Отчёт по дифференциальным уравнениям
Задача №2

31 марта 2020 г.

1 Постановка задачи

Пусть дана задача Коши:

$$\begin{cases} -y''(x) + b(x)y(x) = f(x), x \in [0,1], b(x) \geq 0, \\ y(0) = y'(1) = 0. \end{cases}$$

Для этой задачи необходимо на равномерной сетке

$$\overline{D}_h = \{x_i = ih - \tfrac{h}{2};\ i = 0, \ldots, N; h = \tfrac{2}{2N-1}\}$$

построить на трёхточечном шаблоне разностную схему, имеющую второй порядок сходимости в $L_{2,h}[0,1]$-норме. Результат строго обосновать теоретически.

2 Доказательство сходимости

Положим $f_k = f(x_k),\ b_k = b(x_k)$ и рассмотрим разностную схему

$$\begin{cases} -\frac{y_{k+1}-2y_k+y_{k-1}}{h^2} + b_k y_k = f_k,\ k = 1, \ldots, N-1 \\ y_0 = -y_1, \end{cases}$$

Второе краевое $y'(1) = 0$ преобразуем, воспользовавшись формулой Тейлора:

$$y'(1) = \frac{y(1) - y(1-h)}{h} + O(h) = \frac{y(1) - y(1) + y'(1)h - y''(1)\frac{h^2}{2} + O(h^3)}{h} + O(h) = \\ = -y''(1)\tfrac{h}{2} + O(h^2) = (f(1) - b(1)y(1)) \cdot \tfrac{h}{2} + O(h^2)$$

То есть, если нам нужно, чтобы вектор $\{y_k\}$ приближал след функции $y(x)$ со вторым порядком, то можно наложить на него условие вида

$$\frac{y_N - y_{N-1}}{h} = (f_N - b_N y_N)\tfrac{h}{2},$$

откуда имеем итоговое второе краевое условие

$$(b_N + \tfrac{2}{h^2})y_N - \tfrac{2}{h^2}y_{N-1} = f_N$$

Теперь докажем, что такая схема действительно имеет необходимый нам порядок сходимости.

Доказательство. Сперва аппроксимация. Проверяем по определению.

$$y(x_k \pm h) = y(x_k) \pm y'(x_k)h + y''(x_k)\tfrac{h^2}{2} \pm y'''(x_k)\tfrac{h^3}{6} + O(h^4)$$

$$-\frac{y(x_{k+1}) - 2y(x_k) + y(x_{k-1})}{h^2} + b_k y(x_k) - f_k = \{b_k = b(x_k), f_k = f(x_k)\} =$$
$$= -\frac{2y''(x_k)\frac{h^2}{2} + O(h^4)}{h^2} + b(x_k)y(x_k) - f(x_k) = y''(x_k) + b(x_k)y(x_k) - f(x_k) + O(h^2) =$$
$$= 0 + O(h^2) = O(h^2)$$

Следовательно, в $L_{2,h}$-норме:

$$\|L_h(y)_{Y_h} - f_h\| = (\sum_{k=1}^{N-1} h * (L_h(y)_{Y_h} - f_h)_k^2)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{k=1}^{N-1} h * (O(h^2))^2)^{\frac{1}{2}} \ \leq$$
$$\leq (\sum_{k=1}^{N-1} h * Ch^4)^{\frac{1}{2}} \leq Ch^2 \cdot (N-1)h = Ch^2 \frac{2N-2}{2N-1} < Ch^2$$

А значит схема имеет второй порядок аппроксимации на решении исходной задачи в нужной нам норме. Далее устойчивость. Здесь второй порядок задачи, поэтому придётся действовать по определению. Представим уравнение схемы в виде

$$-\frac{1}{h}\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h}\right) + b_k y_k = f_k, \ k = 1, \ldots, N-1$$

Умножим обе части уравнения на hy_k и просуммируем по k. Получим:

$$-\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h}\right) y_k + h\sum_{k=1}^{N-1} b_k y_k^2 = h\sum_{k=1}^{N-1} f_k y_k$$

Применив преобразование Абеля к левой части, получим:

$$\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{N-1}(y_k - y_{k-1})^2 - \frac{y_N - y_{N-1}}{h}y_{N-1} + h\sum_{k=1}^{N-1} b_k y_k^2 = h\sum_{k=1}^{N-1} f_k y_k$$

Умножим второе краевое условие на $hy_N/2$:

$$h\frac{b_N y_N^2}{2} + \frac{y_N - y_{N-1}}{h}y_N = h\frac{f_N y_N}{2}$$

и прибавим к обеим частям уравнения выше:

$$\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{N}(y_k - y_{k-1})^2 + h(\sum_{k=1}^{N-1} b_k y_k^2 + \frac{b_N y_N^2}{2}) = h(\sum_{k=1}^{N-1} f_k y_k + \frac{f_N y_N}{2})$$

Таким образом, получаем, что

$$\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{N}(y_k - y_{k-1})^2 + ((by)_h, y_h) = (f_h, y_h).$$

Применим неравенство Пуанкаре:

$$\sum_{k=1}^{N} y_k^2 \leq \frac{1}{h^2}\sum_{k=1}^{N}(y_k - y_{k-1})^2 \Rightarrow \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{N}(y_k - y_{k-1})^2 \geq (y_h, y_h).$$

Поэтому $(f_h, y_h) - ((by)_h, y_h) \geq (y_h, y_h)$. Считаем, что $b(x) \geq b \geq 0$. Тогда

$$(b+1)(y_h, y_h) \leq ((by)_h, y_h) + (y_h, y_h) \leq (f_h, y_h).$$

То есть $\|y_h\| \leq \|f\| \cdot \frac{1}{1+b}$, что и означает устойчивость.

Следовательно, по теореме Филиппова решение разностной задачи сходится к решению дифференциальной с порядком 2. $\square$

3 Описание алгоритмов решения

Далее займёмся нахождением вектора y_h.

3.1 Случай $b(x) \equiv b = const$

Если убрать добавок by_k и рассмотреть левую часть как умножение матрицы на вектор Ay_h, то собственными векторами и значениями матрицы A в случае моих краевых будут:

$$\varphi^{(m)} = \{\sin(\pi(m+0.5)(ih - \tfrac{h}{2}))\}_{i=0}^{N}, \quad \lambda^{(m)} = \tfrac{4}{h^2}\sin^2((m+0.5)\tfrac{h}{2})$$

Если вернуть этот добавок, то на диагональ матрицы A добавятся значения by_k и к собственным значениям прибавится b. Следовательно, решая систему методом Фурье, получаем

$$y = \sum_{m=1}^{N} c_m \varphi^{(m)}, \quad \text{где} \quad c_m = \frac{(f, \varphi^{(m)})}{\lambda^{(m)}(\varphi^{(m)}, \varphi^{(m)})}$$

3.2 Общий случай

Здесь на диагональ изначальной матрицы A прибавятся значения $b_k y_k$ и решать методом Фурье уже не получится. Но A - трёхдиагональная матрица, следовательно, можем воспользоваться методом прогонки. Введём обозначения: пусть диагональные элементы матрицы называются $c_0, \dots, c_N$, поддиагональные $-a_1, \dots, -a_N$, наддиагональные $-b_0, \dots, -b_{N-1}$. Строки матрицы с номерами $1, \dots, N-1$ представляют собой саму разностную задачу, поэтому:

$$a_k = \frac{1}{h^2} = b_k,\ c_k = \frac{2}{h^2} + b_k,\ k = 1, \dots, N-1.$$

Первая же и последняя строки отвечают за краевые условия. Поэтому:

$$c_0 = 1,\ b_0 = -1,\ a_N = \frac{2}{h^2},\ c_N = \frac{2}{h^2} + b_N.$$

Далее, по формулам метода прогонки:

$$\alpha_1 = \frac{b_0}{c_0}, \quad \alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i}$$
$$\beta_1 = \frac{f_0}{c_0}, \quad \beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i\beta_i}{c_i - a_i\alpha_i}$$

где i принимает значения $1, \dots, N-1$. Далее последовательно вычисляем значения y_k:

$$y_N = \frac{f_N + a_N\beta_N}{c_N - a_i\alpha_i}, \quad y_i = \alpha_{i+1}y_{i+1} + \beta_{i+1},\ i = N-1, \dots, 0.$$

4 Описание программы и численные результаты

Одна программа реализует оба метода - Фурье и Прогонка. В первом случае функция

void f2c(double *C, double *f, double* eig_func, double b, double h, const int N);

вычисляет коэффициенты C, далее функция

void c2y(double* C, double* y, double h, int N);

собирает вектор y. Во втором случае функция

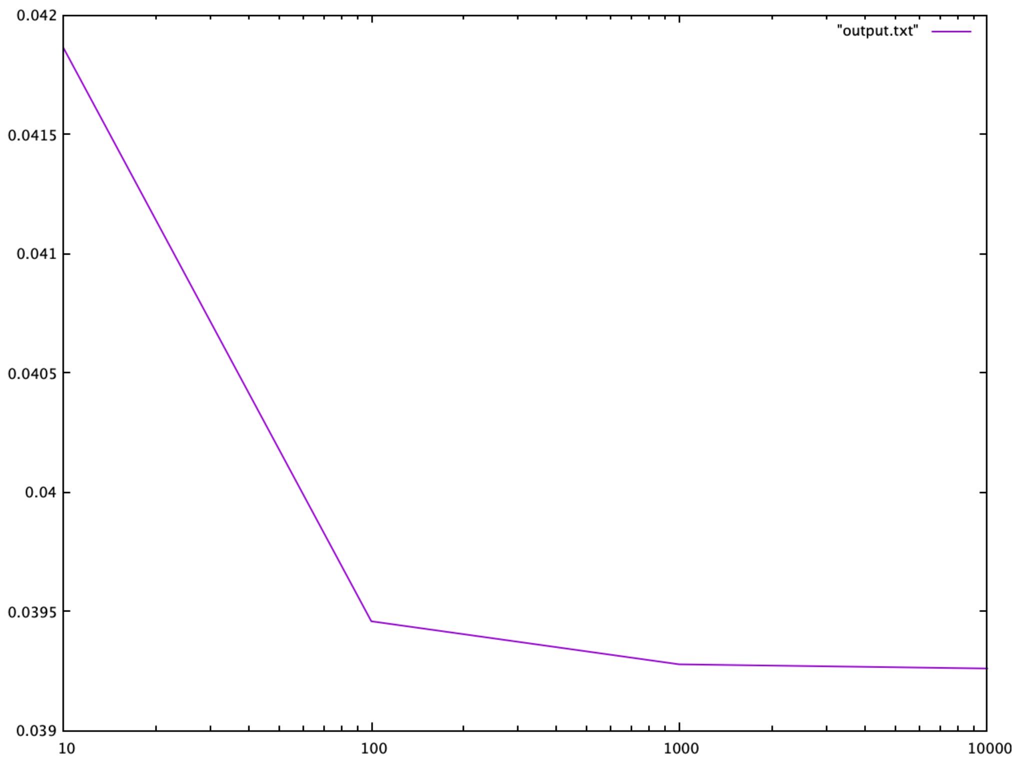
void solver_progonka(double* y, double* a, double* b, double* c, double* f, int N);

выполняет решение алгоритмом, который описан в предыдущем пункте.

Перейдём к численным результатам работы. Метод Фурье будем проверять в случае $b(x) \equiv 5$ на функции

$$f(x) = \sin \frac{3\pi}{2} x \text{ с решением } \ y(x) = \frac{\sin \frac{3\pi}{2} x}{(\frac{3\pi}{2})^2 + 5}$$

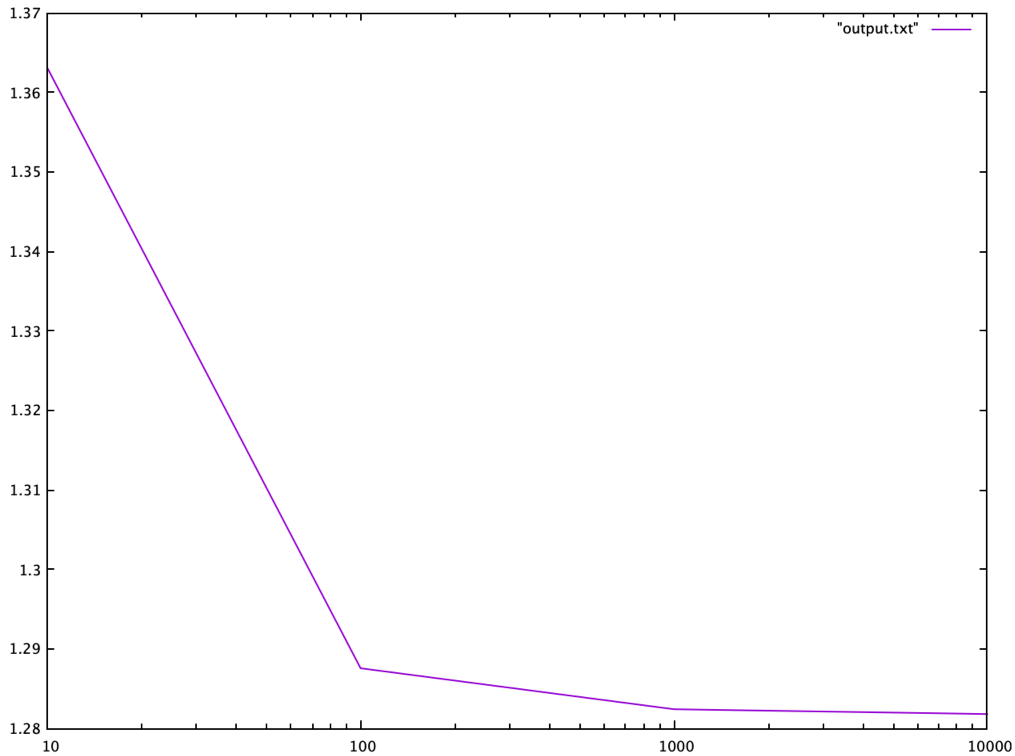
График зависимости ошибки, поделённой на h^2, от N в логарифмической шкале:



Далее метод прогонки. Пусть $b(x) = x$. Тогда для проверки возьмём пару функций

$$f(x) = \sin \frac{3\pi}{2} x \cdot (x + \frac{9\pi^2}{4}) \text{ с решением } \ y(x) = \sin \frac{3\pi}{2} x$$

График зависимости ошибки, поделённой на h^2, от N в логарифмической шкале:


"output.txt"
1.37
1.36
1.35
1.34
1.33
1.32
1.31
1.3
1.29
1.28
10
100
1000
10000