Асимптотическая оптимальность

1 Описание модели

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ – вероятностное пространство. Пусть $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{Z}_+\}$ – фильтрация этого вероятностного пространства, характеризующая общее состояние рынка в момент времени $t = 0, 1, \dots$. Пусть на финансовом рынке существует n активов. Каждый актив характеризуется величиной $A_t^k(\omega)$ – доходом на единицу вложенных средств за временной отрезок $(t-1, t]$. Процесс $(A_t = (A_t^1, \dots, A_t^n),\ t \geq 1)$ согласован с фильтрацией $\mathbb{F}$. Будем предполагать, что для любых $\omega \in \Omega$ и $t \geq 1$ выполнется:

$$A_t^k(\omega) > 0. \tag{1}$$

Положим $\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^n : \lambda^1 + \dots + \lambda^n = 1,\ \forall i\ \lambda^i \geq 0\}$ – множество всевозможных вариантов распределения инвестором собственного капитала по активам (λ – вектор долей). Пусть $\lambda_t : \Omega \to \Lambda$ – вектор-функция, показывающая как инвестор будет распределять свой капитал в момент времени t при событии ω. Пусть последовательность функций $\lambda(\omega) = \{\lambda_t(\omega), t \geq 0\}$ является предсказуемой относительно фильтрации $\mathbb{F}$. Тогда назовём $\lambda(\omega)$ *инвестиционной стратегией.*

При выбранной инвестиционной стратегии λ и начальном капитале X_0 ($X_0 \in \mathbb{R}, X_0 > 0$) капитал инвестора в момент времени $t = 1, 2, \dots$ будет рекурсивно определяться как:

$$X_t = \langle \lambda_{t-1}, A_t \rangle X_{t-1}, \tag{2}$$

где $\langle \lambda_{t-1}, A_t \rangle = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_{t-1}^k A_t^k$ – скалярное произведение, которое показывает, какое количество денег получит инвестор на каждую вложенную денежную единицу в момент t, действуя по инвестиционной стратегии $\lambda(\omega)$.

Из выражений (**??**) и (**??**) следует, что $X_t(\omega) > 0\ \forall\ t$.

Наш основной интерес составляют те инвестиционные стратегии, которые будут гарантировать наискорейший (асимптотически) рост капитала. Для этого введём несколько определений.

Определение 1. Назовём инвестиционную стратегию λ^* *логоптимальной*, если для любой стратегии λ выполняется:

$$\mathsf{E}(\ln \frac{X_{t+1}^{\lambda}}{X_{t+1}^{\lambda^*} } \mid \mathcal{F}_t) \leq \ln \frac{X_t^{\lambda}}{X_t^{\lambda^*}}.$$

Определение 2. Назовём инвестиционную стратегию λ^* *асимптотически оптимальной*, если её скорость роста выше скорости роста любой другой стратегии λ:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln X_t^{\lambda} \leq \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln X_t^{\lambda^*}$$

или иначе:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} (\frac{1}{t} \cdot \ln \frac{X_t^{\lambda}}{X_t^{\lambda^*}}) \leq 0.$$

2 Существование логоптимальной стратегии

Для начала введём вспомогательные понятия, которые понадобятся в ходе доказательства.

Определение 3. *Соответствие* $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ из множества X в множество Y сопоставляет каждому значению $x \in X$ подмножество $\varphi(x) \subset Y$.

Определение 4. Пусть $(S, \Sigma)-$ измеримое пространство и пусть X и $Y-$ топологические пространства. Назовём функцию $f : S \times X \to Y$ *функцией Каратеодори*, если:

1) Для каждого $x \in X$ функция $f^x = f(\cdot, x) S \to Y$ $(\Sigma, \mathcal{B}_Y)$-измерима.

2) Для каждого $s \in S$ функция $f_s = f(s, \cdot) : X \to Y$ непрерывна.

Определение 5. *Измеримой выборочной функцией* из соответствия $\varphi : S \twoheadrightarrow X$ между измеримыми пространствами назовём измеримую функцию $f : S \to X$ такую, что $f(s) \in \varphi(s)$ для каждого $s \in S$.

Теорема 1. *(Measurable Maximum Theorem, D.Aliprantis, C.Border "Infinite Dimensional Analysis", Theorem 18.19)*

Пусть $X-$ сепарабельное метрическое компактное пространство и (S, Σ) – измеримое пространство. Пусть $f : S \times X \to \mathbb{R}$ – функция Каратеодори. Определим действительную функцию $m : S \to \mathbb{R}$ как:

$$m(s) = \max_{x \in X} f(s, x)$$

и соответствие $\mu : S \twoheadrightarrow X$ как:

$$\mu(s) = \{x \in X : f(s, x) = m(s)\}.$$

Тогда:

1) Действительная функция $m(s)$ измерима.

2) Соответствие $\mu(s)$ имеет непустые и компактные значения.

3) Соответствие $\mu(s)$ измеримо и допускает существование измеримой выборочной функции.

Теперь приступим непосредственно к основной теореме.

Теорема 2. *Логоптимальная стратегия λ^* существует.*

Доказательство. Необходимо доказать, что существует стратегия λ^*, такая что $\ln \frac{X_{t+1}^{\lambda}}{X_{t+1}^{\lambda^*}}$ - супермартингал. Для этого достаточно показать, что:

$$\mathsf{E}(\ln \frac{X_{t+1}^{\lambda}}{X_t^{\lambda}} \mid \mathcal{F}_t) - \mathsf{E}(\ln \frac{X_{t+1}^{\lambda^*}}{X_t^{\lambda^*}} \mid \mathcal{F}_t) \leq 0 \tag{3}$$

Будем искать логоптимальную стратегию в виде

$$\lambda^*(\omega) = \underset{\lambda(\omega)}{\operatorname{argmax}}\, \mathsf{E}(\ln \frac{X_{t+1}^{\lambda}}{X_t^{\lambda}} \mid \mathcal{F}_t) = \underset{\lambda(\omega)}{\operatorname{argmax}}\, \mathsf{E}(\ln \sum_{k=1}^{n} \lambda_{t+1}^k A_{t+1}^k \mid \mathcal{F}_t) \tag{4}$$

Для того, чтобы существование математического ожидания из предыдущей формулы не вызывало сомнения, нормируем случайный вектор A_t. Введём случайные величины

$$R_t^k = \frac{A_t^k}{\sum\limits_{i=1}^{n} A_t^i}$$

Далее, преобразуем выражение из неравенства (**??**):

$$\mathsf{E}(\ln \frac{X_{t+1}^{\lambda}}{X_t^{\lambda}} - \ln \frac{X_{t+1}^{\lambda^*}}{X_t^{\lambda^*}} \mid \mathcal{F}_t) = \mathsf{E}(\ln \frac{X_{t+1}^{\lambda}}{X_t^{\lambda}} \cdot \frac{X_t^{\lambda^*}}{X_{t+1}^{\lambda^*}} \mid \mathcal{F}_t) = \mathsf{E}(\ln \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_{t+1}^k A_{t+1}^k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_{t+1}^{*k} A_{t+1}^k} \mid \mathcal{F}_t) =$$

$$= \mathsf{E}(\ln \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_{t+1}^k A_{t+1}^k / \sum\limits_{i=1}^{n} A_{t+1}^i}{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_{t+1}^{*k} A_{t+1}^k / \sum\limits_{i=1}^{n} A_{t+1}^i} \mid \mathcal{F}_t) = \mathsf{E}(\ln \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_{t+1}^k R_{t+1}^k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_{t+1}^{*k} R_{t+1}^k} \mid \mathcal{F}_t) =$$

$$= \mathsf{E}(\ln \sum_{k=1}^{n} \lambda_{t+1}^k R_{t+1}^k \mid \mathcal{F}_t) - \mathsf{E}(\ln \sum_{k=1}^{n} \lambda_{t+1}^{*k} R_{t+1}^k \mid \mathcal{F}_t)$$

Определим логоптимальную стратегию как:

$$\lambda^*(\omega) = \underset{\lambda}{\operatorname{argmax}}\ \mathsf{E}(\ln \sum_{k=1}^{n} \lambda_{t+1}^k R_{t+1}^k \mid \mathcal{F}_t)(\omega) \tag{5}$$

Все величины R_{t+1}^k можно оценить сверху: $R_{t+1}^k \leq 1$. К тому же, всегда существует k', т.ч. $\lambda_{t+1}^{k'} R_{t+1}^{k'} > 0$. Тогда:

$$-\infty < \ln \lambda_{t+1}^{k'} R_{t+1}^{k'} \leq \ln \sum_{k=1}^{n} \lambda_{t+1}^k R_{t+1}^k \leq \ln \sum_{k=1}^{n} \lambda_{t+1}^k = \ln 1 = 0$$

Следовательно, $\mathsf{E}|\ln\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_{t+1}^{k}R_{t+1}^{k}| < \infty$ и условное ожидание из формулы (**??**) существует. Преобразуем:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}(\ln\sum_{k=1}^{n}\lambda_{t+1}^{k}R_{t+1}^{k} \mid \mathcal{F}_t) = \mathsf{E}(\ln\sum_{k=1}^{n}\lambda_{t+1}^{k}R_{t+1}^{k} \mid \mathcal{F}_t)(\omega) = \\ = \int\limits_{[0,1]^n} \ln\sum_{k=1}^{n}\lambda_{t+1}^{k}r^{k}\cdot\mathsf{P}_t(\omega, dr),\end{aligned} \tag{6}$$

где $\mathsf{P}_t(\omega, dr)$ - условное распределение вектора R_{t+1} при условии $\mathcal{F}_t$. Для каждого фиксированного ω в уравнении (**??**) мы имеем интеграл от выпуклой вверх функции от λ, поэтому сам интеграл - тоже выпуклая функция от λ. Следовательно, существует её максимум λ^*. Объединяя результаты по всем ω, получаем, что существует стратегия $\lambda^*(\omega)$, удовлетворяющая условию логоптимальности.

Теперь докажем, что функцию $\lambda^*(\omega)$ всегда можно выбрать так, чтобы она была измеримой. Введём обозначения:

$$f(\omega,\lambda) = \int\limits_{S}\ln\sum_{k=1}^{n}\lambda_{t+1}^{k}r^{k}\mathsf{P}(\omega, dr), \text{ где } S = \{x\in[0,1]^n : x^1+\dots x^n = 1\}$$

$$m(\omega) = \max_{\lambda\in\Lambda} f(\omega,\lambda), \quad M(\omega) = \{\lambda\in\Lambda : f(\omega,\lambda) = m(\omega)\}$$

$$\lambda^*(\omega) = \operatorname*{argmax}_{\lambda\in\Lambda} f(\omega,\lambda)$$

и удостоверимся, что функции в нашей ситуации полностью удовлетворяют утверждению теоремы об измеримом максимуме (Measurable Maximum Theorem).

$\Lambda = \{x\in\mathbb{R}^n : x^1+\dots+x^n = 1,\ \forall i\ x^i \geq 0\}$ – компакт на гиперплоскости в $\mathbb{R}^n$ – очевидно, является сепарабельным метрическим пространством (метрика индуцирована с $\mathbb{R}^n, \Lambda\cap\mathbb{Q}^n$ – счётное всюду плотное множество).

$(\Omega,\mathcal{F})$ – измеримое пространство.

$f(\omega,\lambda) : \Omega\to\Lambda$ – функция Каратеодори, т.к. для любого фиксированного $\lambda\in\Lambda$ она, как функция ω, измерима в силу определения условного математического ожидания. Для любого фиксированного $\omega\in\Omega$ она, как функция λ, непрерывна в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости.

Тогда по пункту 3) Теоремы об Измеримом Максимуме существует измеримая выборочная функция $\lambda^*(\omega)$ из соответствия $M(\omega)$.

□

3 Существование асимптотически оптимальной стратегии

Теорема 3. *Логоптимальная стратегия является также и асимптотически оптимальной.*

Доказательство. Пусть λ^* - логоптимальная стратегия. Тогда $\ln \frac{X_t^\lambda}{X_t^{\lambda^*}}$ – супермартингал. Достаточно доказать, что он ограничен сверху, тогда условие асимптотической оптимальности почти автоматически выполнено. Для этого ограничим его сверху:

$$\ln \frac{X_t^\lambda}{X_t^{\lambda^*}} \leq \ln(1 + \frac{X_t^\lambda}{X_t^{\lambda^*}}) = \ln \frac{X_t^\lambda + X_t^{\lambda^*}}{X_t^{\lambda^*}} \tag{7}$$

Докажем, что $\ln \frac{X_t^\lambda + X_t^{\lambda^*}}{X_t^{\lambda^*}}$ - супермартингал. Для простоты будем в дальнейшем писать $\mathsf{E}(\cdot \mid \mathcal{F}_t) = \mathsf{E}_t(\cdot)$.

$$\mathsf{E}_{t-1} \ln \frac{X_t^\lambda + X_t^{\lambda^*}}{X_t^{\lambda^*}} = \mathsf{E}_{t-1}\Big[\ln \frac{X_{t-1}^\lambda + X_{t-1}^{\lambda^*}}{X_{t-1}^{\lambda^*}} - \ln\langle R_t, \lambda_{t-1}^*\rangle +$$

$$+ \ln\Big(\langle R_t, \lambda_{t-1}\rangle \frac{X_{t-1}^\lambda}{X_{t-1}^\lambda + X_{t-1}^{\lambda^*}} + \langle R_t, \lambda_{t-1}^*\rangle \frac{X_{t-1}^{\lambda^*}}{X_{t-1}^\lambda + X_{t-1}^{\lambda^*}}\Big)\Big] =$$

$$= \ln \frac{X_{t-1}^\lambda + X_{t-1}^{\lambda^*}}{X_{t-1}^{\lambda^*}} + \mathsf{E}_{t-1} \ln\Big(\frac{\langle R_t, \lambda_{t-1}\rangle}{\langle R_t, \lambda_{t-1}^*\rangle} \frac{X_{t-1}^\lambda}{X_{t-1}^\lambda + X_{t-1}^{\lambda^*}} + \frac{X_{t-1}^{\lambda^*}}{X_{t-1}^\lambda + X_{t-1}^{\lambda^*}}\Big)$$

Достаточно показать, что

$$\mathsf{E}_{t-1} \ln\Big(\frac{\langle R_t, \lambda_{t-1}\rangle}{\langle R_t, \lambda_{t-1}^*\rangle} \frac{X_{t-1}^\lambda}{X_{t-1}^\lambda + X_{t-1}^{\lambda^*}} + \frac{X_{t-1}^{\lambda^*}}{X_{t-1}^\lambda + X_{t-1}^{\lambda^*}}\Big) \leq 0 \tag{8}$$

Разобьём это математическое ожидание на 2 части индикатором:

$$\mathsf{E}_{t-1} \ln\Big(\cdot\Big) = \mathsf{E}_{t-1} \ln\Big(\cdot\Big)\mathbb{I}\{\frac{\langle R_t, \lambda_{t-1}\rangle}{\langle R_t, \lambda_{t-1}^*\rangle} \leq 1\} + \mathsf{E}_{t-1} \ln\Big(\cdot\Big)\mathbb{I}\{\frac{\langle R_t, \lambda_{t-1}\rangle}{\langle R_t, \lambda_{t-1}^*\rangle} \geq 1\}$$

Теперь оценим обе части:

1) $$\mathsf{E}_{t-1} \ln\Big(\frac{\langle R_t, \lambda_{t-1}\rangle}{\langle R_t, \lambda_{t-1}^*\rangle} \frac{X_{t-1}^\lambda}{X_{t-1}^\lambda + X_{t-1}^{\lambda^*}} + \frac{X_{t-1}^{\lambda^*}}{X_{t-1}^\lambda + X_{t-1}^{\lambda^*}}\Big)\mathbb{I}\{\frac{\langle R_t, \lambda_{t-1}\rangle}{\langle R_t, \lambda_{t-1}^*\rangle} \leq 1\} \leq$$

$$\leq \mathsf{E}_{t-1} \ln\Big(1 \cdot \frac{X_{t-1}^\lambda}{X_{t-1}^\lambda + X_{t-1}^{\lambda^*}} + \frac{X_{t-1}^{\lambda^*}}{X_{t-1}^\lambda + X_{t-1}^{\lambda^*}}\Big)\mathbb{I}\{\frac{\langle R_t, \lambda_{t-1}\rangle}{\langle R_t, \lambda_{t-1}^*\rangle} \leq 1\} \leq$$

$$\leq \mathsf{E}_{t-1} \ln\Big(1 \cdot \frac{X_{t-1}^\lambda}{X_{t-1}^\lambda + X_{t-1}^{\lambda^*}} + \frac{X_{t-1}^{\lambda^*}}{X_{t-1}^\lambda + X_{t-1}^{\lambda^*}}\Big) \cdot 1 = \mathsf{E}_{t-1} \ln\Big(\frac{X_{t-1}^\lambda + X_{t-1}^{\lambda^*}}{X_{t-1}^\lambda + X_{t-1}^{\lambda^*}}\Big) = 0$$

2) $$\mathsf{E}_{t-1} \ln\Big(\frac{\langle R_t, \lambda_{t-1}\rangle}{\langle R_t, \lambda_{t-1}^*\rangle} \frac{X_{t-1}^\lambda}{X_{t-1}^\lambda + X_{t-1}^{\lambda^*}} + \frac{X_{t-1}^{\lambda^*}}{X_{t-1}^\lambda + X_{t-1}^{\lambda^*}}\Big)\mathbb{I}\{\frac{\langle R_t, \lambda_{t-1}\rangle}{\langle R_t, \lambda_{t-1}^*\rangle} \geq 1\} \leq$$

$$\leq \mathsf{E}_{t-1} \ln\Big(\frac{\langle R_t, \lambda_{t-1}\rangle}{\langle R_t, \lambda_{t-1}^*\rangle} \frac{X_{t-1}^\lambda}{X_{t-1}^\lambda + X_{t-1}^{\lambda^*}} + \frac{\langle R_t, \lambda_{t-1}\rangle}{\langle R_t, \lambda_{t-1}^*\rangle} \frac{X_{t-1}^{\lambda^*}}{X_{t-1}^\lambda + X_{t-1}^{\lambda^*}}\Big) \cdot 1 \leq$$

$$\leq \mathsf{E}_{t-1} \ln\Big(\frac{\langle R_t, \lambda_{t-1}\rangle}{\langle R_t, \lambda_{t-1}^*\rangle} \cdot \frac{X_{t-1}^\lambda + X_{t-1}^{\lambda^*}}{X_{t-1}^\lambda + X_{t-1}^{\lambda^*}}\Big) = \mathsf{E}_{t-1} \ln\langle R_t, \lambda_{t-1}\rangle - \mathsf{E}_{t-1} \ln\langle R_t, \lambda_{t-1}^*\rangle$$

В силу того, что $\ln \frac{X_t^\lambda}{X_t^{\lambda^*}}$ - супермартингал, имеем:

$$\mathsf{E}_{t-1} \ln \frac{X_t^\lambda}{X_t^{\lambda^*}} \le \ln \frac{X_{t-1}^\lambda}{X_{t-1}^{\lambda^*}} = \mathsf{E}_{t-1} \ln \frac{X_{t-1}^\lambda}{X_{t-1}^{\lambda^*}}$$

$$\mathsf{E}_{t-1} \ln X_t^\lambda - \mathsf{E}_{t-1} \ln X_t^{\lambda^*} \le \mathsf{E}_{t-1} \ln X_{t-1}^\lambda - \mathsf{E}_{t-1} \ln X_{t-1}^{\lambda^*}$$

$$\mathsf{E}_{t-1} \ln X_t^\lambda - \mathsf{E}_{t-1} \ln X_{t-1}^\lambda \le \mathsf{E}_{t-1} \ln X_t^{\lambda^*} - \mathsf{E}_{t-1} \ln X_{t-1}^{\lambda^*}$$

$$\mathsf{E}_{t-1} \ln \frac{X_t^\lambda}{X_{t-1}^\lambda} \le \mathsf{E}_{t-1} \ln \frac{X_t^{\lambda^*}}{X_{t-1}^{\lambda^*}}$$

$$\mathsf{E}_{t-1} \ln \frac{\langle R_t, \lambda_{t-1} \rangle X_{t-1}^\lambda}{X_{t-1}^\lambda} \le \mathsf{E}_{t-1} \ln \frac{\langle R_t, \lambda_{t-1}^* \rangle X_{t-1}^{\lambda^*}}{X_{t-1}^{\lambda^*}}$$

$$\mathsf{E}_{t-1} \ln \langle R_t, \lambda_{t-1} \rangle - \mathsf{E}_{t-1} \ln \langle R_t, \lambda_{t-1}^* \rangle \le 0$$

Таким образом, неравенство **??** доказано, и $\ln \frac{X_t^\lambda + X_t^{\lambda^*}}{X_t^{\lambda^*}}$ - супермартингал. Что важно, супермартингал неотрицательный:

$$\ln \frac{X_t^\lambda + X_t^{\lambda^*}}{X_t^{\lambda^*}} = \ln(1 + \frac{X_t^\lambda}{X_t^{\lambda^*}}) \ge \ln 1 = 0$$

Одно из следствий теоремы Дуба - неотрицательный супермартингал сходится почти наверное, то есть существует конечная случайная величина $A_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} \ln \frac{X_t^\lambda + X_t^{\lambda^*}}{X_t^{\lambda^*}}$. Отсюда:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} (\frac{1}{t} \cdot \ln \frac{X_t^\lambda}{X_t^{\lambda^*}}) \le \overline{\lim_{t\to\infty}} (\frac{1}{t} \cdot \ln \frac{X_t^\lambda + X_t^{\lambda^*}}{X_t^{\lambda^*}}) = \frac{A_\infty}{\lim\limits_{t\to\infty} t} = 0,$$

то есть стратегия λ^* асимптотически оптимальна.

□