ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»**

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

КУРСОВАЯ РАБОТА

Асимптотически оптимальные стратегии в модели рынка с конкуренцией и двумя типами активов

Выполнил студент 4 курса
409 академической группы
Асылхузин Тимур Ринатович

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. **Житлухин Михаил Валентинович**

Москва
2020

1 Модель

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ – вероятностное пространство. Пусть $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{Z}_+\}$ – фильтрация этого вероятностного пространства, характеризующая общее состояние рынка в моменты времени $t = 0, 1, \ldots$. Пусть на финансовом рынке есть N активов, выплаты которых пропорциональны вложенной инвестором сумме, и K активов, доходность которых не зависят от вложенной суммы. Каждый актив первого типа характеризуется величиной $X_t^n(\omega)$ – суммарной выплатой средств за временной промежуток $(t-1, t]$, а каждый актив второго типа величиной $Z_t^n(\omega)$ – доходом на единицу вложенных средств за $(t-1, t]$. Процессы $\{X_t = (X_t^1, \ldots, X_t^N)\}_{t \geq 1}$ и $\{Z_t = (Z_t^1, \ldots, Z_t^K)\}_{t \geq 1}$ согласованы с фильтрацией $\mathbb{F}$.

В рамках данной работы будем рассматривать ситуацию с двумя инвесторами, капиталы которых в момент времени t обозначаются как Y_t и $\widetilde{Y}_t$. Суммарный капитал $W_t = Y_t + \widetilde{Y}_t$. Будем предполагать, что начальные капиталы Y_0 и $\widetilde{Y}_0$ известны заранее, положительны и неслучайны. Положим

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^n : \lambda^1 + \cdots + \lambda^N \leq 1, \ \forall n \ \lambda^n \geq 0\},$$
$$M = \{\mu \in \mathbb{R}^n : \mu^1 + \cdots + \mu^K = 1, \ \forall k \ \mu^k \geq 0\},$$

где Λ – множество всевозможных вариантов распределения первым инвестором собственного капитала по активам первого типа, а M – множество вариантов распределения оставшейся части капитала $(1 - \sum_{n=1}^N \lambda^n)$ по активам второго типа (λ и μ – вектора долей). Пусть $\lambda_t(\omega, c) : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to \Lambda$ и $\mu_t(\omega, c) : \Omega \times \mathbb{R}_+ \to M$ – вектор-функции, показывающие как инвестор будет распределять свой капитал в момент времени $t-1$ при событии ω и суммарном капитале инвесторов c. Дополнительно потребуем, чтобы при любом $t \geq 1$ случайные функции λ_t, μ_t были измеримы относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_{t-1} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. Тогда назовём пару $(\lambda(\omega, c),\ \mu(\omega, c))$ *инвестиционной стратегией.*

Аналогично определяется инвестиционная стратегия второго инвестора, которую будем обозначать $(\widetilde{\lambda}(\omega, c),\ \widetilde{\mu}(\omega, c))$. В дальнейшем в тех местах, где это не будет приводить к замешательству, зависимость величин от аргументов будем опускать. Для удобства изложения для векторов $a = (a^1, \ldots, a^K)$, $b = (b^1, \ldots, b^K)$ введём обозначения

$$|a| = \sum_{k=1}^K a^k, \quad a \cdot b = \sum_{k=1}^K a^k b^k.$$

При введённых обозначениях в актив первого типа под номером n в момент времени $t-1$ будет вложена часть капитала $\lambda_t^n Y_{t-1}$, а в актив второго типа под номером k: $(1 - |\lambda_t|)\mu_t^k Y_{t-1}$. Но стратегия зависит также и от суммарного капитала инвесторов, поэтому определим последовательности капиталов рекуррентно:

$t = 0 : Y_0$ и $\widetilde{Y}_0$ известны и неслучайны. Тогда $W_0 = Y_0 + \widetilde{Y}_0$ и

$$\lambda_1(\omega) = \lambda_1(\omega, W_0),\ \widetilde{\lambda}_1(\omega) = \widetilde{\lambda}_1(\omega, W_0),\ \mu_1(\omega) = \mu_1(\omega, W_0),\ \widetilde{\mu}_1(\omega) = \widetilde{\mu}_1(\omega, W_0).$$

Произвольный момент времени t:

$$Y_t(\omega) = \sum_{k=1}^{K}(1-|\lambda_t(\omega)|)\mu_t^k(\omega)Y_{t-1}(\omega)Z_t^k(\omega) + \sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda_t^n(\omega)Y_{t-1}(\omega)}{\lambda_t^n(\omega)Y_{t-1}(\omega)+\widetilde{\lambda}_t^n(\omega)\widetilde{Y}_{t-1}(\omega)}X_t^n(\omega),$$
$$\widetilde{Y}_t(\omega) = \sum_{k=1}^{K}(1-|\widetilde{\lambda}_t(\omega)|)\widetilde{\mu}_t^k(\omega)\widetilde{Y}_{t-1}(\omega)Z_t^k(\omega) + \sum_{n=1}^{N}\frac{\widetilde{\lambda}_t^n(\omega)\widetilde{Y}_{t-1}(\omega)}{\lambda_t^n(\omega)Y_{t-1}(\omega)+\widetilde{\lambda}_t^n(\omega)\widetilde{Y}_{t-1}(\omega)}X_t^n(\omega).$$

Тогда $W_t(\omega) = Y_t(\omega)+\widetilde{Y}_t(\omega)$ и можем найти значения λ, μ для следующего этапа:

$$\lambda_{t+1}(\omega) = \lambda_{t+1}(\omega, W_t(\omega)),\ \ \mu_{t+1}(\omega) = \mu_{t+1}(\omega, W_t(\omega)).$$

Определение 1. Случайные величины $\lambda_{t+1}(\omega) = \lambda_{t+1}(\omega, W_t(\omega))$, $\mu_{t+1}(\omega) = \mu_{t+1}(\omega, W_t(\omega))$ будем называть *реализациями* стратегии $(\lambda(\omega, c),\ \mu(\omega, c))$.

В дальнейшем будем работать только с реализациями стратегий, и там, где это не будет вести к неоднозначности, будем опускать зависимость от аргументов.

Определение 2. Для доли инвестора на рынке в момент времени t введём следующее обозначение:

$$r_t = \frac{Y_t}{W_t}.$$

Определение 3. Если для стратегии (λ, μ) первого инвестора при любых начальных капиталов $Y_0, \widetilde{Y}_0 > 0$ и стратегии $(\widetilde{\lambda}(\omega), \widetilde{\mu}(\omega))$ второго инвестора выполняется, что:

1) r_t – субмартингал, то назовём стратегию (λ, μ) *оптимальной*,

2) $\ln r_t$ - субмартингал, то назовём стратегию (λ, μ) *логоптимальной*.

Утверждение 1. *Из логоптимальности стратегии следует оптимальность.*

Доказательство. По определению логоптимальной стратегии,

$$E(\ln r_t|\mathcal{F}_{t-1}) \geq \ln r_{t-1} \quad \Leftrightarrow \quad E(\ln\frac{r_t}{r_{t-1}}|\mathcal{F}_{t-1}) \geq 0.$$

Логарифм - вогнутая функция. Применяя неравенство Йенсена для условного математического ожидания, получаем

$$0 \leq E(\ln\frac{r_t}{r_{t-1}}|\mathcal{F}_{t-1}) \leq \ln E(\frac{r_t}{r_{t-1}}|\mathcal{F}_{t-1}).$$

Взяв экспоненту от правой и левой частей неравенства выше, получаем требуемое условие для оптимальности. □

2 Оптимальная стратегия

Далее займёмся поиском логоптимальной стратегии в нашей постановке задачи. Выясняется, что если распределять капитал по активам частями, в некотором смысле пропорциональными их выплатам, то удаётся достичь оптимальности.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2. *Инвестиционная стратегия (λ, μ), реализации которой задаются формулами*

$$\lambda_t = E(\frac{X_t^n}{\zeta_t \mu_t \cdot Z_t + |X_t|}|\mathcal{F}_{t-1}), \qquad \mu_t = \frac{a_t}{|a_t|},$$

где $\zeta_t = |a_t| W_{t-1}$,

$$a_t = \underset{a}{\operatorname{argmax}} \left\{ E_{t-1} \ln(\frac{a \cdot Z_t + \frac{|X_t|}{W_{t-1}}}{|Z_t| + \frac{|X_t|}{W_{t-1}}}) - |a| \;\middle|\; |a| \leq 1,\; a^k \geq 0,\; k = \overline{1, K} \right\},$$

является логоптимальной.

Следующий раздел посвящён доказательству этой теоремы.

3 Доказательство оптимальности

Сначала докажем несколько вспомогательных утверждений, которые понадобятся в ходе доказательства.

Лемма 3. *(Дискретное неравенство Йенсена) Пусть функция $f(x)$ является выпуклой на некотором множестве $\mathcal{X}$ и числа $q_1, q_2, \ldots, q_n$ таковы, что*

$$q_1, q_2, \ldots, q_n > 0 \text{ и } q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1.$$

Тогда каковы бы ни были числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из множества $\mathcal{X}$, выполняется неравенство:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} q_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} q_i f(x_i).$$

Для вогнутой функции, соответственно, выполняется неравенство в другую сторону.

Лемма 4. *Для любого $a > 0$ выполняется:*

$$\ln a \geq 1 - \frac{1}{a}.$$

Доказательство. Рассмотрим производные функций $f(a) = \ln a$ и $g(a) = 1 - \frac{1}{a}$:

$$f'(a) = \frac{1}{a}, \;\; g'(a) = \frac{1}{a^2}.$$

В точке a $= 1$ значения функций, как и значения производных, в точности совпадают. При $a > 1: \ f'(a) > g'(a)$. При $a < 1: \ f'(a) < g'(a)$. То есть при движении направо функция f растёт быстрее g, а при движении влево убывает медленнее. Следовательно на всём промежутке $(0; +\infty)$ значение функции f не меньше значения функции g. $\square$

Лемма 5. *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^N$ – два вектора, т.ч. $|\alpha|, |\beta| \le 1$ и для любого n выполняется: если $\beta^n = 0$, то и $\alpha^n = 0$. Тогда*

$$\alpha \cdot (\ln \alpha - \ln \beta) \ge \frac{\|\alpha - \beta\|^2}{4} + |\alpha| - |\beta|,$$

где при $\alpha^n = 0$ положим $\alpha^n(\ln \alpha^n - \ln \beta^n) = 0$.

Доказательство. Используя, что $\ln x \le 2(\sqrt{x} - 1)$ для любого $x > 0$, мы получим

$$\alpha \cdot (\ln \alpha - \ln \beta) = - \sum_{n: \alpha^n \ne 0} \alpha^n \ln(\beta^n / \alpha^n) \ge 2 \sum_n (\alpha^n - \sqrt{\alpha^n \beta^n}) =$$
$$= \sum_n (\sqrt{\alpha^n} - \sqrt{\beta^n}) + |\alpha| - |\beta|.$$

Далее, используя неравенство $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \ge (x - y)^2/4$, которое справедливо для любых $x, y \in [0, 1]$, получаем требуемое утверждение. $\square$

Определение 4. *Соответствие* $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ из множества X в множество Y сопоставляет каждому значению $x \in X$ подмножество $\varphi(x) \subset Y$.

Определение 5. *Селектором* из соответствия $\varphi : S \twoheadrightarrow X$ между двумя множествами назовём функцию $f : S \to X$ такую, что $f(s) \in \varphi(s)$ для каждого $s \in S$.

Теорема 6. *(Об измеримом селекторе) Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ – измеримое пространство, L – сепарабельное метрическое пространство. Функция $f(\omega, l) : \Omega \times L \to \mathbb{R}$ такова, что при любом фиксированном ω она непрерывна по l и при любом фиксированном l измерима по ω (является функцией Каратеодори). Также заданы*

$$m(\omega) = \max_{l \in L} f(\omega, l),$$
$$\mu(\omega) = \{l \in L : \ f(\omega, l) = m(\omega)\}.$$

Тогда функция m измерима и существует измеримый селектор $l^*(\omega)$ из соответствия μ.

Теперь приступим к доказательству основной теоремы.

Доказательство. Чтобы облегчить изложение, введём вспомогательные обозначения:

$$F_t^n = \frac{\lambda_t^n}{\lambda_t^n r_{t-1} + \widetilde{\lambda}_t^n (1 - r_{t-1})}, \quad \widetilde{F}_t^n = \frac{\widetilde{\lambda}_t^n}{\lambda_t^n r_{t-1} + \widetilde{\lambda}_t^n (1 - r_{t-1})}.$$

Тогда уравнение последовательности капитала первого инвестора перепишется в виде

$$Y_t = Y_{t-1}\left((1-|\lambda_t|)\mu_t \cdot Z_t + \frac{F_t \cdot X_t}{W_{t-1}}\right).$$

Для того, чтобы явно выразить отношение r_t/r_{t-1}, распишем несколько промежуточных этапов:

$$W_t = Y_t + \widetilde{Y}_t = Y_{t-1}\left((1-|\lambda_t|)\mu_t \cdot Z_t + \frac{F_t \cdot X_t}{W_{t-1}}\right) + \widetilde{Y}_{t-1}\left((1-|\widetilde{\lambda}_t|)\widetilde{\mu}_t \cdot Z_t + \frac{\widetilde{F}_t \cdot X_t}{W_{t-1}}\right) =$$
$$= r_{t-1}W_{t-1}(1-|\lambda_t|)\mu_t \cdot Z_t + (1-r_{t-1})W_{t-1}(1-|\widetilde{\lambda}_t|)\widetilde{\mu}_t \cdot Z_t + r_{t-1}F_t \cdot X_t + (1-r_{t-1})\widetilde{F}_t \cdot X_t =$$
$$= W_{t-1}\left(r_{t-1}(1-|\lambda_t|)\mu_t \cdot Z_t + (1-r_{t-1})(1-|\widetilde{\lambda}_t|)\widetilde{\mu}_t \cdot Z_t + \frac{r_{t-1}F_t \cdot X_t}{W_{t-1}} + \frac{(1-r_{t-1})\widetilde{F}_t \cdot X_t}{W_{t-1}}\right) =$$
$$= W_{t-1}\left((r_{t-1}(1-|\lambda_t|)\mu_t + (1-r_{t-1})(1-|\widetilde{\lambda}_t|)\widetilde{\mu}_t) \cdot Z_t + \frac{|X_t|}{W_{t-1}}\right),$$

так как $(r_{t-1}F_t + (1-r_{t-1})\widetilde{F}_t) \cdot X_t = 1 \cdot X_t = |X_t|$. Тогда

$$\frac{r_t}{r_{t-1}} = \frac{Y_t}{Y_{t-1}} \cdot \frac{W_{t-1}}{W_t} = \frac{(1-|\lambda_t|)W_{t-1}\mu_t \cdot Z_t + F_t \cdot X_t}{(r_{t-1}(1-|\lambda_t|)\mu_t W_{t-1} + (1-r_{t-1})(1-|\widetilde{\lambda}_t|)\widetilde{\mu}_t W_{t-1}) \cdot Z_t + |X_t|} =$$
$$= \frac{\zeta_t\mu_t \cdot Z_t + F_t \cdot X_t}{r_{t-1}\zeta_t\mu_t \cdot Z_t + (1-r_{t-1})\widetilde{\zeta}_t\widetilde{\mu}_t \cdot Z_t + |X_t|},$$

где $\zeta_t = (1-|\lambda_t|)W_{t-1}$, $\widetilde{\zeta}_t = (1-|\widetilde{\lambda}_t|)W_{t-1}$.

Следовательно,

$$\ln\frac{r_t}{r_{t-1}} = \ln\frac{\zeta_t\mu_t \cdot Z_t + F_t \cdot X_t}{r_{t-1}\zeta_t\mu_t \cdot Z_t + (1-r_{t-1})\widetilde{\zeta}_t\widetilde{\mu}_t \cdot Z_t + |X_t|} =$$
$$= \ln\left(\frac{\zeta_t\mu_t \cdot Z_t + F_t \cdot X_t}{\zeta_t\mu_t \cdot Z_t + |X_t|}\right) + \ln\left(\frac{\zeta_t\mu_t \cdot Z_t + |X_t|}{r_{t-1}\zeta_t\mu_t \cdot Z_t + (1-r_{t-1})\widetilde{\zeta}_t\widetilde{\mu}_t \cdot Z_t + |X_t|}\right).$$

По Лемме 3:

$$\ln\left(\frac{\zeta_t\mu_t \cdot Z_t + F_t \cdot X_t}{\zeta_t\mu_t \cdot Z_t + |X_t|}\right) = \ln\left(\frac{\zeta_t\mu_t \cdot Z_t}{\zeta_t\mu_t \cdot Z_t + |X_t|} \cdot 1 + \sum_{n=1}^{N}\frac{X_t^n}{\zeta_t\mu_t \cdot Z_t + |X_t|} \cdot F_t^n\right) \geq$$
$$\geq \frac{\zeta_t\mu_t \cdot Z_t}{\zeta_t\mu_t \cdot Z_t + |X_t|} \cdot \ln 1 + \sum_{n=1}^{N}\frac{X_t^n}{\zeta_t\mu_t \cdot Z_t + |X_t|} \cdot \ln F_t^n = \frac{X_t \cdot \ln F_t}{\zeta_t\mu_t \cdot Z_t + |X_t|}.$$

По Лемме 4:

$$\ln\left(\frac{\zeta_t\mu_t \cdot Z_t + |X_t|}{r_{t-1}\zeta_t\mu_t \cdot Z_t + (1-r_{t-1})\widetilde{\zeta}_t\widetilde{\mu}_t \cdot Z_t + |X_t|}\right) \geq \frac{(1-r_{t-1})(\zeta_t\mu_t - \widetilde{\zeta}_t\widetilde{\mu}_t) \cdot Z_t}{\zeta_t\mu_t \cdot Z_t + |X_t|}.$$

Используя неравенство выше, для логарифма отношения долей получаем:

$$\ln \frac{r_t}{r_{t-1}} \geq \frac{\ln F_t \cdot X_t}{\zeta_t \mu_t \cdot Z_t + |X_t|} + \frac{(1 - r_{t-1})(\zeta_t \mu_t - \widetilde{\zeta}_t \widetilde{\mu}_t) \cdot Z_t}{\zeta_t \mu_t \cdot Z_t + |X_t|}. \tag{1}$$

Попробуем взять доли капитала для первого типа активов как

$$\lambda_t^n = E(\frac{X_t^n}{\zeta_t \mu_t \cdot Z_t + |X_t|} | \mathcal{F}_{t-1}).$$

В дальнейшем для сокращения записи будем использовать $E_t = E(\,\cdot\,|\mathcal{F}_t)$.

Оценим первое слагаемое в (1). Используя предсказуемость процесса F_t и лемму 5 получаем

$$E_{t-1} \frac{\ln F_t \cdot X_t}{\zeta_t \mu_t \cdot Z_t + |X_t|} = \lambda_t \cdot \ln F_t = \sum_{n=1}^{N} \lambda_t^n \ln \frac{\lambda_t^n}{\lambda_t^n r_{t-1} + \widetilde{\lambda}_t^n (1 - r_{t-1})} \geq$$
$$\geq \frac{1}{4}(1 - r_{t-1})^2 \|\lambda_t - \widetilde{\lambda}_t\|^2 + (1 - r_{t-1})(|\lambda_t| - |\widetilde{\lambda}_t|).$$

Для необходимой нам оценки достаточно доказать, что для второго слагаемого в выражении (1) выполняется:

$$E_{t-1} \frac{(\zeta_t \mu_t - \widetilde{\zeta}_t \widetilde{\mu}_t) \cdot Z_t}{\zeta_t \mu_t \cdot Z_t + |X_t|} \geq -(|\lambda_t| - |\widetilde{\lambda}_t|) = \frac{\zeta_t - \widetilde{\zeta}_t}{W_{t-1}}.$$

Введём обозначения:

$$a_t = \frac{\zeta_t}{W_{t-1}} \mu_t, \quad \widetilde{a}_t = \frac{\widetilde{\zeta}_t}{W_{t-1}} \widetilde{\mu}_t, \quad V_t = \frac{|X_t|}{W_{t-1}}.$$

Здесь $|a_t| \leq 1$, $|\widetilde{a}_t| \leq 1$. Тогда предыдущее неравенство эквивалентно следующему:

$$E_{t-1} \frac{(a_t - \widetilde{a}_t) \cdot Z_t}{a_t \cdot Z_t + V_t} \geq |a_t| - |\widetilde{a}_t|.$$

Для дальнейших вычислений временно опустим индекс t. В силу предсказуемости процессов a и $\widetilde{a}$ имеем

$$E_{t-1} \frac{(a - \widetilde{a}) \cdot Z}{a \cdot Z + V} \geq |a| - |\widetilde{a}| \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot \left(E_{t-1} \frac{Z}{a \cdot Z + V} - 1 \right) + \widetilde{a} \cdot \left(1 - E_{t-1} \frac{Z}{a \cdot Z + V} \right) \geq 0.$$

Для выполнения этого неравенства достаточно найти $\mathcal{F}_{t-1}$-измеримый процесс a, такой что для каждого k выполняется:

$$E_{t-1} \frac{Z^k}{a \cdot Z + V} = 1 \quad \text{или} \quad (E_{t-1} \frac{Z^k}{a \cdot Z + V} < 1 \text{ и } a^k = 0). \tag{2}$$

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} E_{t-1} \ln(a \cdot Z + V) - |a| \longrightarrow \max\limits_a, \\ |a| \leq 1; \quad a^k \geq 0, \; k = 1, \ldots, K. \end{cases} \tag{3}$$

Распишем ожидание из первого выражения

$$(E_{t-1}\ln(a\cdot Z+V))(\omega)=\int\limits_{\mathbb{R}^K\times\mathbb{R}_+}\ln(\sum_{k=1}^{K}a^k z^k+v)P_t(\omega,dz,dv),$$

где $P_t(\omega,dz,dv)$ – регулярная версия совместного распределения (Z,V) при условии $\mathcal{F}_{t-1}$. Тогда, если взглянуть на это выражение как на функцию от a при фиксированном ω, мы получим обыкновенный интеграл Лебега. Интеграл от непрерывной по a функции сам является непрерывной функцией по a. Ограничения на a в (3) образуют компакт, следовательно, по теореме Вейерштрасса существует максимум функции на компакте. Взяв аргумент, на котором достигается максимум и объединив результаты по всем ω, получаем необходимую нам функцию, которую назовём a^*. Описанная только что ситуация полностью удовлетворяет условию теоремы 6: благодаря регулярности условного распределения, максимизируемая функция является функцией Каратеодори (измерима относительно $\mathcal{F}_{t-1}$), пространство $\mathbb{R}^K$ сепарабельно, а множество $\{a\in\mathbb{R}^K:\ |a|\le 1;\quad a^k\ge 0,\ k=1,\dots,K\}$ компактно. Существование функции $m(\omega)$ тоже доказано. Следовательно, существует **измеримая** относительно $\mathcal{F}_{t-1}$ функция a^*, максимизирующая задачу (3).
Будем считать, что $|Z|\le 1, V\le 1$ п.н. Если это не так, то могут возникнуть проблемы с существованием ожидания в (3). В общем случае вычтем из максимизируемого выражения $E_{t-1}\ln(|Z|+V)$. На задачу максимизации это не повлияет, потому что нет зависимости от a, зато выражение под знаком математического ожидания будет ограничено сверху единицей.

Теперь посмотрим на задачу (3) с другой стороны. Это гладкая задача вариационного исчисления с ограничениями типа равенств и неравенств, и a^* доставляет её максимум. Ограничений типа равенств в нашем случае нет, ограничения типа неравенств перепишем как:

$$\begin{aligned}&|a|-1\le 0,\\&-a^k\le 0.\end{aligned}$$

Тогда функция Лагранжа для этой задачи выглядит следующим образом:

$$L(a)=-l^0(E_{t-1}\ln(a\cdot Z+V)-|a|)+\sum l^k(-a^k)+u(|a|-1),$$

где $(l^0,\dots,l^k,u)$ – множители Лагранжа.
По теореме о необходимых условиях максимума первого порядка существуют множители Лагранжа, такие что:

$$\begin{aligned}&1)\ \nabla L(a^*)=0,\\&2)\ l^k\ge 0,\ k=\overline{1,K},\\&3)\ u\ge 0,\\&4)\ l^k a^{*k}=0,\ k=\overline{1,K},\\&5)\ u(|a^*|-1)=0.\end{aligned}\tag{4}$$

Производная по Фреше в случае функции нескольких переменных является просто градиентом, а множитель l^0 благодаря отсутствию ограничений типа равенств считаем равным единице.
Распишем первое условие:

$$\frac{\partial L}{\partial a^k}\Big|_{a^*} = -E_{t-1}\frac{Z^k}{a^* \cdot Z + V} + 1 - l^k + u = 0,\ k = \overline{1, K}. \tag{5}$$

Заметим, что в данной задаче $|a^*| < 1$, то есть неравенство строгое. Предположим противное: $|a^*| = 1$. Рассмотрим функцию

$$f(\alpha) = E_{t-1}\ln(\alpha a^* \cdot Z + V) - \alpha,\ \alpha \in [0, 1].$$

Тогда её производная равняется

$$f'(\alpha) = E_{t-1}\frac{a^* \cdot Z}{\alpha a^* \cdot Z + V} - 1 = E_{t-1}\frac{a^* \cdot Z}{\alpha a^* \cdot Z + V} - |a^*|.$$

Если $P(V > 0) > 0$, то $f'(1) < 0$, что невозможно в силу того, что a^* - экстремум этой функции по a. Следовательно, $|a^*| < 1$, и из (4) следует, что $u = 0$, и уравнение (5) превращается в

$$E_{t-1}\frac{Z^k}{a^* \cdot Z + V} = 1 - l^k,\ k = \overline{1, K},$$

причём если $l^k > 0$, то $a^{*k} = 0$, что также следует из (4).

Тем самым, найден процесс a^*, который удовлетворяет условию (2), то есть при $a_t = a^*$ стратегия будет логоптимальной. Остаётся только от a_t перейти обратно к μ_t. Из равенства $a_t = \frac{\zeta_t}{W_{t-1}}\mu_t$ и $|\mu_t| = 1$ получаем $\zeta_t = |a_t|W_{t-1}$, следовательно,

$$\mu_t = \frac{a_t}{|a_t|}.$$

Доказательство завершено. $\square$