第三章复习题

一. 选择题

1. 下列函数中在给定的区间上满足罗尔中值定理条件的是（　　）

（A） $f(x)=\left(x-1\right)^{\frac{3}{2}}$，$\left[0,2\right]$；　（B） $f(x)=x^2-4x+3$，$\left[1,3\right]$；

（B） $f(x)=x\cos x$，$\left[0,\pi\right]$；　（D） $f(x)=\begin{cases}x+1, x<3\\ 1, \quad x\geq 3.\end{cases}$，$\left[0,3\right]$.

2. 若函数 $f\left(x\right)$ 在 x_0 处有 $f'\left(x_0\right)>0$，则（　　）

（A） $f\left(x\right)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加；（B） $f\left(x_0\right)\neq 0$；（C） $f'\left(x\right)$ 在 x_0 处连续；（D） $f\left(x\right)$ 在 x_0 的某邻域内不一定单调

3. 对任意 $x\neq 0$，下列不等式正确的是（　　）

（A） $\mathrm{e}^{-x}<1-x$；（B） $\mathrm{e}^{-x}<1+x$；（C） $\mathrm{e}^{-x}>1-x$；（D） $\mathrm{e}^{-x}>1+x$.

4. 设函数 $y=f\left(x\right)$ 在点 x_0 处满足条件 $f'\left(x_0\right)=f''\left(x_0\right)=0$，$f'''\left(x_0\right)>0$，则下列结论中正确的是（　　）

（A） $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值；（B） $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值；（C） $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值；

（D）$\left(x_0, f(x_0)\right)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

5. 设 $f(x)$ 二阶连续可导，且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则有（　　）

（A） $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值；　　（B） $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值；

（C）$(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点；

（D） $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0, f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

二. 填空题

6. 设 $f(x)=x^3-x+1$ 且 $f'(\xi)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}$，则 $\xi=$_________.

7. $\lim\limits_{x\to 0^+}x\left(\ln x\right)^2=$__________.

8. $a=$__________时，函数 $y=a\sin x+\dfrac{\sin 3x}{3}$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处有极值.

9. 曲线 $y=\left(x^2-4\right)^{\frac{1}{3}}$ 的拐点个数为__________.

10. $\dfrac{1}{3+x}$ 的 n 阶麦克劳林展开式为(带皮亚诺型余项)________________ .

三. 简答题

11. 设 $f(x)$ 二次可微，且 $f(0)=0$， $f'(0)=1$， $f''(0)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}$.

12. 计算极限 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(1-x\sin\dfrac{1}{x}\right)$.

13. 求数列 $\left\{\dfrac{\sqrt{n}}{n+100}\right\}$ 的最大项.

14. 设 $f(x)=\ln(1+x),\forall x\in(-1,1)$，由拉格朗日中值定理，$\exists\theta\in(0,1)$ 使得 $\ln(1+x)-\ln 1=\dfrac{1}{1+\theta x}\cdot(x-0)$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\theta$.

15. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，且 $f'(x)>g'(x)$，当 $a<x<b$ 时下列三个结果哪个正确？试证明你的判断.

（A） $f(x)>g(x)$；（B） $f(x)+g(a)>f(a)+g(x)$；（C） $f(x)+g(b)>f(b)+g(x)$.

四. 综合题

16. 讨论方程 $\ln x=ax$ 有几个实根.

17. 求函数 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ 的单调区间及极值，并求该函数图形的拐点和渐近线.

18. 设 $f(x)$ 二阶连续可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$， $f(1)=0$，试证：$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=0$.

19. （1）设 $f(x)$ 在区间 $[0,b]$ 上连续，在 $(0,b)$ 内可导， $f(0)=0$， $f(b)>0$. 试证对于任意数值 A， $0<A<f(b)$，存在 $c\in(0,b)$ 及 $\xi\in(0,c)$，使得 $f'(\xi)c=A$.

（2）设 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $\varphi(0)=0,\varphi(1)=1$，证明：存在不同的 $\xi,\eta\in(0,1)$，使得 $\dfrac{1}{\varphi'(\xi)}+\dfrac{2}{\varphi'(\eta)}=3$.