# 苏州大学 概率论与数理统计 期末试卷

**一 选择题 (每题 3 分，共 21 分)**

1. 设$A,B$为两个随机事件, 且$P(A)=0.4$，$P(B)=0.8$, 则$P(\bar{A}\bar{B})$的取值范围是（ ）

A. $[0.1,\ 0.4]$　　B. $[0,\ 0.2]$　　C. $[0,\ 0.3]$　　D. $[0.1,\ 0.3]$

2. 以下随机变量$X,Y$一定相互独立的是（ ）

A. $X,Y$满足$P\{X\le 1,Y\le 1\}=P\{X\le 1\}P\{Y\le 1\}$

B. $X,Y$的方差存在, 且$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$

C. $(X,Y)$的联合概率密度函数$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0\le x,y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

D. 抛掷一颗均匀骰子$n$次, 朝上的那面是偶数的次数$X$与朝上的那面是奇数的次数$Y$

3. 从 2 至 8 的 7 个整数中随机取两个不同的数，则这两个数互质的概率是（ ）

A. 1/2　　B. 2/3　　C. 1/4　　D. 3/4

4. 随机变量$X$和$Y$的分布律：$X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0.2 & 0.5 & 0.3\end{pmatrix}$，$Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$,

且 $P\{X\ne Y\}=1$，则$\mathrm{Cov}(X,Y)=$（ ）

A. -0.05　　B. 0.1　　C. 0.05　　D. -0.1

5. 盒中有20张卡片，其中15张写着“你曾在考试中作弊了吗？”，另外5张写着“你参加过校园马拉松吗？”。100名学生每人有放回随机抽取一张，根据抽到的问题回答“是”或“否”，回答“是”有30人，回答“否”有70人，假设每人都真实回答，则学生中曾考试作弊的比例的估计值是（ ）（已知约有20%的学生参加过校园马拉松）

A. 1/3　　B. 1/4　　C. 1/2　　D. 1/5

6. 体育课上随机测试了36位学生的50米游泳成绩，他们平均成绩 $\bar{x}=40$秒，样本标准差$s=6$秒，已知学生的50米游泳成绩$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$\mu$的置信度为0.95的置信区间是（ ）

A. (38, 42)　　B. (39, 41)　　C. (38.5, 41.5)　　D. (39.5, 40.5)

7. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$是来自总体$N(\mu,100)$的样本，在显著性水平$\alpha=0.05$下，检验$H_0$: $\mu=0$, $H_1$: $\mu<0$，拒绝域是$\{(x_1,x_2,\cdots,x_{100}):\bar{x}\in D\}$, 则$D=$（ ）

A. $(1.65,+\infty)$　　B. $(1.96,+\infty)$　　C. $(-\infty,-1.65)$　　D. $(-\infty,-1.96)$

**二 填空题 (每题 3 分，共 21 分)**

8. 设事件$A,B$相互独立, $P(A)=0.6$, $P(B)=0.3$, 则$P(\bar{A}|A\cup B)=$________. 1/6

9. 设随机变量$X$的概率密度函数$f(x)=\begin{cases}1/x, & 1<x<e\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，且$P\{X>c\}=P\{X<c\}$，则$c^2=$____. ***e***

10. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自总体$U(0,2)$的样本，若$\forall\varepsilon>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\bar{X}-a|<\varepsilon\}=1$，则$a=$____. 1

11. 设二维随机变量$(X,Y)\sim N(1,-1,2,4,0)$，则$E[(X+Y)^2]=$______. 6

12. 设$(X,Y)$的概率密度函数是$f(x,y)=\begin{cases}12y^2, & 0\le y\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则$E(X+Y)=$_______. 7/5

13. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自总体$U(\theta,2\theta)$的样本，$\hat{\theta}=c\bar{X}$是$\theta$的无偏估计，则$c=$________. 2/3

14. 设 $X_1,X_2,X_3$ 是来自总体$U(0,1)$的样本，则 $P\{X_1^2+X_2^2+X_3^2\le 1\}=$________. π /6

**三 计算题**

15. （10 分）一串钥匙共8把，只有一把能打开某扇门，某人尝试随机用各把钥匙去开门，已经试过的钥匙不会重复试，求：

(1) 第二次就打开门的概率；

(2) 打开门时所用次数的分布律和数学期望.

(1) $p=\frac{7}{8}\cdot\frac{1}{7}=\frac{1}{8}$ (2)

(2) $P\{X=k\}=\frac{1}{8},k=1,2,3\cdots,8$ (4)

$E(X)=\sum_{k=1}^{8}k\cdot\frac{1}{8}=4.5$ (4)

16. （12 分）

(1) 设随机变量$X$的数学期望和方差都存在，证明：对于任意常数$C$，$E(X-C)^2\ge D(X)$；

(2) 设$X$的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，$a$为何值时，$E(X-a)^2$取得最小值？并求其最小值

(1) $D(X)=D(X-c)=E(X-c)^2-E^2(X-c)\le E(X-c)^2$ (4)

(2) $a=E(X)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,\mathrm{d}x=1$ (4)

$E(X^2)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\,\mathrm{d}x=\pi-2$，$D(X)=\pi-3$ (4)

17. （12 分）两人相约在某地碰面，他们的到达时刻$X,Y$相互独立，且都服从上午9点到10点间的均匀分布$U(0,1)$，（单位：小时）

(1) 求先到者需等待另一人15分钟以上的概率；

(2) 求先到者的到达时刻$T=\min(X,Y)$的概率密度函数和数学期望.

(1) $P\{|X-Y|>\frac{1}{4}\}=\frac{9}{16}$ (4)

(2) $f_T(t)=\begin{cases}2(1-t), & 0<t<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ (5)

$E(T)=\int_0^1 2t(1-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}$ (3)

18. (12 分) 仪器测量某零件的长度时产生的误差$X\sim N(\mu,0.5)$（单位：毫米），

(1) 如果已知$\mu=0$, 求$E(|X|)$；

(2) 记录的$n$次测量的误差是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 求$\mu$的矩估计和最大似然估计.

(1) $X\sim N(0,0.5)$ $E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\,f(x)dx=2\int_0^{+\infty}x\,f(x)dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ (4)

(2) 矩估计： $E(X)=\mu\Rightarrow\hat{\mu}=\bar{X}$ (4)

最大似然估计：$L(\mu)=\prod_{i=1}^n\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-(x_i-\mu)^2}=(\frac{1}{\sqrt{\pi}})^n\prod_{i=1}^n e^{-(x_i-\mu)^2}$

两边取对数： $\ln L(\mu)=n\ln\frac{1}{\sqrt{\pi}}-\sum_{i=1}^n(x_i-\mu)^2$

两边求导，并令导数等于 0：$\sum_{i=1}^n 2(x_i-\mu)=0\Rightarrow\hat{\mu}=\bar{X}$ (4)

19 (12 分)

设二维随机变量$(X,Y)$的联合概率密度函数为：$f(x,y)=\begin{cases}e^{-x}, & 0<y<x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，

(1) 求边缘密度函数$f_X(x), f_Y(y)$；

(2) 求$\mathrm{Cov}(X,Y)$.

$f_X(x)=\begin{cases}xe^{-x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ (3+3)

$E(X)=2, E(Y)=1, E(XY)=3, \mathrm{Cov}(X,Y)=1$ (2+2+2)