高等数学一（下）期中复习题参考答案 共 4 页

一． 选择题：（每小题 3 分，共 15 分）

1. A
2. D
3. D
4. C
5. B

二． 填空题：（每小题 3 分，共 15 分）

1. 4
2. $\begin{cases} z=1/2 \\ x=0 \end{cases}$ $(|y|\le\dfrac{\sqrt{3}}{2})$
3. $-2(dx+dy)$
4. $2\sqrt{6}$
5. $\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x} f(x,y)\mathrm{d}y$

三．解下列各题：（每小题 10 分，共 70 分）

1．解：（1）因为$0\le\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le\dfrac{1}{2}\dfrac{|x|(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\dfrac{|x|}{2}\to 0$，$(x,y)\to(0,0)$ （2 分）

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0=f(0,0)$，即 $f(x,y)$ 在点（0, 0）处连续. （2 分）

（2） $f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x}=0$

$f_y(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{0}{y}=0$ （2 分）

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\ne 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$ （2 分）

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$ （2 分）

2. 解： $t=0, x=1, y=3, z=0,$

$x'(0)=\left[e^t\left(\cos t-\sin t\right)\right]|_{t=0}=1,$

$y'(0)=\left(2\cos t-3\sin t\right)|_{t=0}=2,$

$z'(0)=\left[e^t\left(\cos t+\sin t\right)\right]|_{t=0}=1,$ （2 分）

切线方程 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z}{1}$ （2 分）

法平面方程 $x+2y+z-7=0.$ （2 分）

原点到该切线的距离： $d=\sqrt{\dfrac{11}{6}}$ （2 分）

原点到该法平面的距离： $d=\dfrac{7}{\sqrt{6}}$ （2 分）

3. 解：令 $F(x,y,z)=2x^2-2y^2+2z-\dfrac{5}{8}$，则 $F_x=4x,\ F_y=-4y,\ F_z=2$ （2 分）

过直线 L 的平面束方程为 $(3+\lambda)x+(\lambda-2)y+(\lambda-1)z-5=0$ （2 分）

设切点为 (x_0,y_0,z_0)，则有

$$\begin{cases}\dfrac{3+\lambda}{4x_0}=\dfrac{\lambda-2}{-4y_0}=\dfrac{\lambda-1}{2}=t\\ (3+\lambda)x_0+(\lambda-2)y_0+(\lambda-1)z_0=5\\ 2x_0^2-2y_0^2+2z_0=\dfrac{5}{8}\end{cases}$$ （2 分）

解得 $t=1,3$，从而 $\lambda=3,7$，

所求切平面方程为

$6x+y+2z=5$ 或 $10x+5y+6z=5$ （4 分）

4. 解：令 $F(x,y,z)=2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8$

则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=-\dfrac{4x+8z}{2z+8x-1}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}=-\dfrac{4y}{2z+8x-1}$ （2 分）

由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$ 且 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 可得 $x=-2z, y=0$，代入原方程得 $z=1,\ \ z=-\dfrac{8}{7}$

则得驻点 $(-2,0),\ (\dfrac{16}{7},0)$ （2 分）

在 $(-2,0)$ 处， $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{4}{15}>0, B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0, C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{4}{15}, AC-B^2>0$，则

$z=z(x,y)$ 在点 $(-2,0)$ 处取得极小值 $z=1$. （3 分）

在 $(\dfrac{16}{7},0)$ 处， $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{4}{15}<0, B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0, C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{4}{15}, AC-B^2>0$，则

$z=z(x,y)$ 在点 $(\dfrac{16}{7},0)$ 处取得极大值 $z=-\dfrac{8}{7}$. （3 分）

5. 解：设球面上点为 $(x,y,z),\ (x>0,y>0,z>0)$

令 $L(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z+\lambda(x^2+y^2+z^2-5R^2)$， （3 分）

$L_x=\dfrac{1}{x}+2\lambda x=0$，$L_y=\dfrac{1}{y}+2\lambda y=0$，

$L_z=\dfrac{1}{3z}+2\lambda z=0$， $L_\lambda=x^2+y^2+z^2-5R^2=0$ （3 分）

解得 $x=y=R,\ \ z=\sqrt{3}R$. （2 分）

由题意得 $f(x,y,z)$ 在球面上的最大值一定存在，因此唯一的稳定点就是最大值点，最大值为 $f(R,R,\sqrt{3}R)=\ln(3\sqrt{3}R^5)$. （2 分）

6. 解：分割区域为 $D_1=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 0, 0\le y<x^2\}$

$D_2=\{(x,y)\,|\,0<x\le 1, 0\le y<x^2\}$， $D_3=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 1, x^2\le y\le 1\}$

$\iint\limits_D \left|x^2-y\right|d\sigma=\iint\limits_{D_1+D_2}\left(x^2-y\right)dxdy+\iint\limits_{D_3}\left(y-x^2\right)dxdy$ （2 分）

$$=\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{x^2}\left(x^2-y\right)dx+\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}\left(y-x^2\right)dy$$ （2 分）

$$=\frac{1}{5}+\frac{8}{15}=\frac{11}{15}$$ （3 分）

则 $\iint\limits_{D}(\left|x^2-y\right|+\frac{1}{3})\mathrm{d}\sigma=\frac{11}{15}+\frac{1}{3}\times 2=\frac{7}{5}$ （3 分）

7. 解： $f(x,2x)=x^2$ 两边对 x 求导，得 $f_x(x,2x)+2f_y(x,2x)=2x$

于是有 $f_y(x,2x)=\frac{x}{2}$ （2 分）

$f_x(x,2x)=x$， $f_y(x,2x)=\frac{x}{2}$ 两边对 x 求导有 $\begin{cases} f_{xx}(x,2x)+2f_{xy}(x,2x)=1 \\ f_{yx}(x,2x)+2f_{yy}(x,2x)=\frac{1}{2} \end{cases}$ （3 分）

由于 $f_{xx}(x,y)=f_{yy}(x,y)$ 及 $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$ （2 分）

故 $f_{xx}(x,2x)=0$， $f_{xy}(x,2x)=\frac{1}{2}$. （3 分）