苏州大学 高等数学一（下）课程期末试卷　共 4 页

考试形式：闭卷

院系__________年级__________专业__________

学号__________姓名__________成绩__________

特别提醒：请将答案填写在答题纸上，若填写在试卷纸上无效.

一．　选择题：（每小题 3 分，共 15 分）

1．函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 2, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处（　　）.D

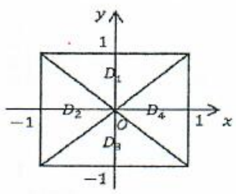
A.无定义　　B.无极限　　C.有极限但不连续　　D. 连续

2.　设曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $x=1$ 的交线在点 $(1,1,1)$ 处的切线对 y 轴的斜率为 1，则（　　）.C

A. $f(x,y)=x^2+y^2-1$　　B. $f(x,y)=(x-1)^2+(y-1)^2+1$

C. $f(x,y)=xy$　　D. $f(x,y)=\sqrt{3-x^2-y^2}$

3. 如图，正方形 $\{(x,y)\,|\,|x|\le 1,|y|\le 1\}$ 被其对角线划分为四个区域



$D_k(k=1,2,3,4)$, $I_k=\iint\limits_{D_k} y\cos x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 则 $\max\limits_{1\le k\le 4}\{I_k\}=$（　　）. A

A. I_1　　B. I_2　　C. I_3　　D. I_4

4．设 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于 $z=0$ 与 $z=1$ 之间的部分，Σ_1 是 Σ 在第一卦限的部分，则 $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+xz)\mathrm{d}S=$（　　）.D

A. $\iint\limits_{\Sigma_1} xy\mathrm{d}S$　　B. $4\iint\limits_{\Sigma} yz\mathrm{d}S$　　C. $4\iint\limits_{\Sigma} xz\mathrm{d}S$　　D. 0

5. 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，常数 $\lambda\in(0,\dfrac{\pi}{2})$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n\tan\dfrac{\lambda}{n})a_n$（　　）. A

A.绝对收敛　　B. 条件收敛　　C. 发散　　D. 敛散性与 λ 有关

二． 填空题：（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $F(x,y)=\int_0^{xy} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$, 则 $\mathrm{d}F(x,y)=$____________. $\mathrm{e}^{-x^2y^2}\left(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y\right)$

2．若函数 $f(x,y)=2x^2+ax+xy^2+2y$ 在点 $(1,-1)$ 处取得极值，则 $a=$______. -5

3. 设函数 $f(u)$ 连续，区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2y\}$, 化二重积分 $\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为极坐标下的二次积分为____________. $\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r^2\sin\theta\cos\theta)r\mathrm{d}r$

4.已知曲线 L: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$, 则曲线积分 $\oint_L (x-y+z^2)\mathrm{d}s=$_________. $\frac{2}{3}\pi R^3$.

5．已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，在 $x=-4$ 处发散，则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-3)^n$ 的收敛域为____________. $(1,5]$

三．解下列各题：（每小题 10 分，共 40 分）

1．把 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x-4}$ 展开为 $x-1$ 的幂级数，并指出其收敛域.

解：$f(x)=\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{1}{x+1}\right)$ …(2 分)

$$=-\frac{1}{15}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-1}{3}}-\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-1}{2}} \quad \text{…(3 分)}$$

$$=-\frac{1}{15}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{3^n}-\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^n}{2^n},\ -1<x<3. \quad \text{…(5 分)}$$

2. 求微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 的特解.

解：通解 $y=\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}[\int \ln x\cdot \mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C]=\dfrac{1}{x^2}\cdot[\int x^2\ln x\mathrm{d}x+C]$ …(5 分)

$$=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x+C\frac{1}{x^2}. \quad \text{…(2 分)}$$

由 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 得 $C=0$.特解：$y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x$. …(3 分)

3．求曲面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 介于 $z=0$ 和 $z=1$ 部分的质量，其中面密度 $\rho(x,y,z)=z$.

解：$m=\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}\rho(x,y,z)\mathrm{d}S$ …(2 分)

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{1}{2}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y, D_{xy}: x^2+y^2\le 2 \ldots(4\text{ 分})$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^2\sqrt{1+r^2}r\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{15}(6\sqrt{3}+1). \qquad \ldots(4\text{ 分})$$

4．计算$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$,其中$\Omega$是由曲线$\begin{cases}x=0,\\ y^2=2z\end{cases}$绕$z$轴旋转一周而成的曲面与平面$z=8$围成的立体.

解： 旋转曲面 $x^2+y^2=2z$ …(2 分)

曲面与平面交线$x^2+y^2=16, z=8$ …(1 分)

采用柱面坐标系 $\Omega: 0\le\theta\le 2\pi, 0\le r\le 4, \frac{r^2}{2}\le z\le 8,$ …(3 分)

$$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^4\mathrm{d}r\int_{\frac{r^2}{2}}^8 r^2\cdot r\mathrm{d}z \qquad \ldots(2\text{ 分})$$

$$=2\pi\int_0^4 r^3(8-\frac{r^2}{2})\mathrm{d}r=\frac{1024}{3}\pi. \qquad \ldots(2\text{ 分})$$

四．解下列各题：（每小题 10 分，共 30 分）

1. 设$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos x\mathrm{d}x, n=0,1,2,\cdots$ 求$\sum_{n=0}^{\infty}I_n$.

解：$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\mathrm{d}\sin x=\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}I_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n} \qquad \ldots(4\text{ 分})$$

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n, x\in[-1,1)$$

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}, \qquad \ldots(2\text{ 分})$$

$$s(x)=s(0)+\int_0^x s'(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln(1-x), \qquad \ldots(2\text{ 分})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}I_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n=s(\frac{\sqrt{2}}{2})=\ln(2+\sqrt{2}). \qquad \ldots(2\text{ 分})$$

2. 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有一阶连续导数，L是上半平面$y>0$

内的光滑曲线，其起点为(a,b)，终点(c,d).

记$I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2 f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2 f(xy)-1]\mathrm{d}y$,

（1）证明曲线积分I与路径L无关;

（2）当$ab=cd$时，求I的值.

解:（1）$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{y}[1+y^2 f(xy)]\right\}=f(xy)-\frac{1}{y^2}+xyf'(xy)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{y^2}[y^2 f(xy)-1]\right\}$…(2 分)

（2）L选由点(a,b)到点(c,b)再到点(c,d)的折线段,

$$I=\int_a^c \frac{1}{b}[1+b^2 f(bx)]\mathrm{d}x+\int_b^d \frac{c}{y^2}[y^2 f(cy)-1]\mathrm{d}y \qquad \text{…(3 分)}$$

$$=\frac{c-a}{b}+\int_a^c bf(bx)\mathrm{d}x+\int_b^d cf(cy)\mathrm{d}y+\frac{c}{d}-\frac{c}{b}$$

$$=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{bc} f(t)\mathrm{d}t+\int_{bc}^{cd} f(t)\mathrm{d}t=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{cd} f(t)\mathrm{d}t, \qquad \text{…(3 分)}$$

当$ab=cd$时，$I=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$. …(2 分)

3. 计算曲面积分$I=\oint\!\!\!\oint_\Sigma \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{1.5}}$,其中$\Sigma$是曲面$2x^2+2y^2+z^2=4$的外侧.

解：令$P=\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{1.5}}, Q=\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{1.5}}, R=\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{1.5}}$,

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)-3x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)-3y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \frac{\partial R}{\partial z}=\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)-3z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},$$

…(3 分)

$\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$在$O(0,0,0)$不连续，故不能直接用 Gauss 公式,

取Σ_1: $x^2+y^2+z^1=1$（内侧）Ω为Σ与Σ_1之间立体区域，应用 Gauss 公式:

…(2 分)

$$I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma+\Sigma_1} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{1.5}}-\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_1} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{1.5}}$$

$$=\iiint_\Omega 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad \text{…(3 分)}$$

$$=\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1} 3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\cdot\frac{4}{3}\pi 1^3=4\pi. \qquad \text{…(2 分)}$$