苏州大学高等数学（一）下课程期中试卷　共 6 页

考试形式：闭卷　　时间：2023.04

院系__________ 年级__________ 专业__________

学号__________ 姓名__________ 成绩__________

特别提醒：请将答案填写在答题纸上，若填写在试卷纸上无效.

一．选择题：（每小题 3 分，共 15 分）

1. 方程 $x^2-\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$ 表示（　　）.

A. 旋转双曲面　　B. 双叶双曲面　　C.双曲柱面　　D. 锥面

2. 极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{e^{x^2+y^2}-1}=$（　　）.

A. 0　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. 1　　D. 不存在

3. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义，且 $f_x(0,0)=2$，$f_y(0,0)=2$，则曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ x=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 处的切向量为（　　）.

A. $(1,0,2)$　　B. $(0,2,1)$　　C. $(2,0,1)$　　D. $(0,1,2)$

4. 两平行平面 $\pi_1:19x-4y+8z+21=0$ 与 $\pi_2:19x-4y+8z+42=0$ 之间的距离为（　　）.

A. 21　　B. 2　　C. 1　　D. $\dfrac{1}{2}$

5. 设 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 xf(x)dx$，$D=\{(x,y)\mid x+y\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$，则二重积分 $\iint\limits_D f(x)dxdy=$（　　）.

A. 0.5　　B. 0　　C. 1　　D. 2

二．填空题：（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$，则 $[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=$ ________.

2. 曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$在 yOz 面上的投影为________.

3. 设二元函数 $f(x,y)=e^{-\left(\frac{y}{x}-\frac{x}{y}\right)}$，则 $df|_{(1,-1)}=$ ________.

4. 函数 $u=2xy-z^2$ 在点 $P(2,-1,1)$ 处的方向导数的最大值为________.

5. 交换积分次序 $\int_{-1}^{0}dy\int_{-2\arcsin y}^{\pi}f(x,y)dx+\int_{0}^{1}dy\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)dx=$________.

三. 解下列各题:（每题 10 分，共 70 分）

1. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$

（1）证明 $f(x,y)$在点（0, 0）处连续;

（2）求 $f_x(x,y)$ 及 $f_y(x,y)$.

2. 求曲线 $\Gamma:\begin{cases} x=e^t\cos t \\ y=2\sin t+3\cos t \\ z=e^t\sin t \end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线和法平面方程,并分别求出坐标原点到该切线和法平面的距离.

3. 求过直线 $L:\begin{cases} 3x-2y-z=5 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 且与曲面 $2x^2-2y^2+2z=\dfrac{5}{8}$ 相切的切平面方程.

4. 求由方程 $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 的极值.

5. 在曲面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=5R^2\quad(x>0,y>0,z>0)$ 上求一点 P，使得函数 $f(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z$ 在点 P 处取得它在 Σ 上的最大值.

6. 求 $\iint\limits_D\left(|x^2-y|+\dfrac{1}{3}\right)d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 1,0\le y\le 1\}$.

7. 设 $f(x,y)$ 存在一、二阶连续偏导数，且 $f_{xx}(x,y)=f_{yy}(x,y)$，$f(x,2x)=x^2$，$f_x(x,2x)=x$，求 $f_{xx}(x,2x)$ 及 $f_{xy}(x,2x)$.

苏州大学高等数学一（下）课程期中试卷参考答案 共 4 页

一． 选择题：（每小题 3 分，共 15 分）

1．A
2．D
3．D
4．C
5．B

二． 填空题：（每小题 3 分，共 15 分）

1． 4

2． $\begin{cases} z = 1/2 \\ x = 0 \end{cases} \quad (|y| \le \dfrac{\sqrt{3}}{2})$

3． $-2(dx + dy)$

4． $2\sqrt{6}$

5． $\int_0^{\pi} \mathrm{d}x \int_{-\sin\frac{x}{2}}^{\sin x} f(x, y) \mathrm{d}y$

三．解下列各题：（每小题 10 分，共 70 分）

1．解：（1）因为 $0 \le \left|\dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}\right| \le \dfrac{1}{2} \dfrac{|x|(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \dfrac{|x|}{2} \to 0,\ (x, y) \to (0,0)$ （2 分）

故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0 = f(0,0)$，即 $f(x, y)$ 在点（0, 0）处连续. （2 分）

（2） $f_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x} = 0$

$f_y(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{0}{y} = 0$ （2 分）

$f_x(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}, & x^2 + y^2 \ne 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$ （2 分）

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$ （2 分）

2. 解：$t=0,x=1,y=3,z=0,$

$x'(0)=\left[e^t\left(\cos t-\sin t\right)\right]|_{t=0}=1,$

$y'(0)=\left(2\cos t-3\sin t\right)|_{t=0}=2,$

$z'(0)=\left[e^t\left(\cos t+\sin t\right)\right]|_{t=0}=1,$ （2 分）

切线方程 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z}{1}$ （2 分）

法平面方程 $x+2y+z-7=0.$ （2 分）

原点到该切线的距离：$d=\sqrt{\dfrac{11}{6}}$ （2 分）

原点到该法平面的距离：$d=\dfrac{7}{\sqrt{6}}$ （2 分）

3. 解：令 $F(x,y,z)=2x^2-2y^2+2z-\dfrac{5}{8}$，则 $F_x=4x,\ F_y=-4y,\ F_z=2$ （2 分）

过直线 L 的平面束方程为 $(3+\lambda)x+(\lambda-2)y+(\lambda-1)z-5=0$ （2 分）

设切点为 (x_0,y_0,z_0)，则有

$$\begin{cases}\dfrac{3+\lambda}{4x_0}=\dfrac{\lambda-2}{-4y_0}=\dfrac{\lambda-1}{2}=t\\ (3+\lambda)x_0+(\lambda-2)y_0+(\lambda-1)z_0=5\\ 2x_0^2-2y_0^2+2z_0=\dfrac{5}{8}\end{cases}$$ （2 分）

解得 $t=1,3$，从而 $\lambda=3,7$，

所求切平面方程为

$$6x+y+2z=5 \text{ 或 } 10x+5y+6z=5$$ （4 分）

4. 解：令 $F(x,y,z)=2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8$

则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{F_x}{F_z}=-\dfrac{4x+8z}{2z+8x-1}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{F_y}{F_z}=-\dfrac{4y}{2z+8x-1}$ （2 分）

由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$ 且 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$ 可得 $x=-2z, y=0$，代入原方程得 $z=1,\ \ z=-\dfrac{8}{7}$

则得驻点 $(-2,0),\ (\dfrac{16}{7},0)$ （2 分）

在 $(-2,0)$ 处， $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{4}{15}>0, B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0, C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{4}{15}, AC-B^2>0$，则

$z=z(x,y)$ 在点 $(-2,0)$ 处取得极小值 $z=1$. （3 分）

在 $(\dfrac{16}{7},0)$ 处， $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{4}{15}<0, B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0, C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{4}{15}, AC-B^2>0$，则

$z=z(x,y)$ 在点 $(\dfrac{16}{7},0)$ 处取得极大值 $z=-\dfrac{8}{7}$. （3 分）

5. 解：设球面上点为 $(x,y,z),\ (x>0,y>0,z>0)$

令 $L(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z+\lambda(x^2+y^2+z^2-5R^2)$， （3 分）

$L_x=\dfrac{1}{x}+2\lambda x=0$, $L_y=\dfrac{1}{y}+2\lambda y=0$,

$L_z=\dfrac{1}{3z}+2\lambda z=0$， $L_\lambda=x^2+y^2+z^2-5R^2=0$ （3 分）

解得 $x=y=R,\ \ z=\sqrt{3}R$. （2 分）

由题意得 $f(x,y,z)$ 在球面上的最大值一定存在，因此唯一的稳定点就是最大值点，最大值为 $f(R,R,\sqrt{3}R)=\ln(3\sqrt{3}R^5)$. （2 分）

6. 解：分割区域为 $D_1=\{(x,y)\,|-1\le x\le 0, 0\le y<x^2\}$

$D_2=\{(x,y)\,|\,0<x\le 1, 0\le y<x^2\}$， $D_3=\{(x,y)\,|-1\le x\le 1, x^2\le y\le 1\}$

$\iint\limits_D |x^2-y|d\sigma=\iint\limits_{D_1+D_2}(x^2-y)dxdy+\iint\limits_{D_3}(y-x^2)dxdy$ （2 分）

$=\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{x^2}\left(x^2-y\right)dx+\int_{-1}^{1}dx\int_{x^2}^{1}\left(y-x^2\right)dy$ （2 分）

$=\frac{1}{5}+\frac{8}{15}=\frac{11}{15}$ （3 分）

则 $\iint\limits_{D}(\left|x^2-y\right|+\frac{1}{3})\mathrm{d}\sigma=\frac{11}{15}+\frac{1}{3}\times 2=\frac{7}{5}$ （3 分）

7. 解： $f(x,2x)=x^2$ 两边对 x 求导，得 $f_x(x,2x)+2f_y(x,2x)=2x$

于是有 $f_y(x,2x)=\frac{x}{2}$ （2 分）

$f_x(x,2x)=x$， $f_y(x,2x)=\frac{x}{2}$ 两边对 x 求导有 $\begin{cases} f_{xx}(x,2x)+2f_{xy}(x,2x)=1 \\ f_{yx}(x,2x)+2f_{yy}(x,2x)=\frac{1}{2} \end{cases}$ （3 分）

由于 $f_{xx}(x,y)=f_{yy}(x,y)$ 及 $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$ （2 分）

故 $f_{xx}(x,2x)=0$， $f_{xy}(x,2x)=\frac{1}{2}$. （3 分）