苏州大学 概率论与数理统计 期中试卷 2023.4

一 选择填空题（每题 3 分，共 30 分）

1. 下列事件不相互独立的是（ D ） $P(A)=\frac{1}{2}$， $P(B)=\frac{1}{2}$， $P(AB)=\frac{1}{4}$.

A. 在一年中随机选择一个月份，“结果是偶数月份”与“结果在上半年的月份”✓

B. 从52张扑克牌(去掉王牌)里随机抽取一张，“取出一张A”与“取出一张红桃”✓

C. 将一枚均匀硬币抛掷三次，“第一次抛出的是反面”与“第二次和第三次抛出的是正面”✓

D. 抛掷两颗均匀骰子，“至少有一颗点数为6”与“两颗点数之和为7”

$P(A)=\frac{11}{36}$， $P(B)=\frac{6}{36}$ $P(AB)=\frac{2}{36}$

2. 设随机事件A,B, 且$P(A)=0.5$, $P(B)=0.7$, 则$P(A|B)$不可能是（ A ）

0.2 0.5

A. 0.1 B. 0.3 C. 0.5 D. 0.7

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{0.7}=\frac{1.2-P(A\cup B)}{0.7} \quad 0.5\le P(A\cup B)\le 0.7$$

3. 设X服从参数是λ的泊松分布，则$P\{X=1|1\le X\le 2\}=$（ C ）

A. $\frac{1}{1+\lambda}$ B. $\frac{\lambda}{2+\lambda}$ C. $\frac{2}{2+\lambda}$ D. $\frac{\lambda}{1+\lambda}$

$$\frac{P(X=1)}{P(X=1)+P(X=2)}=\frac{\frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!}}{\frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!}+\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}}=\frac{2}{2+\lambda}$$

4. 设随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, $\Phi(x)$是标准正态分布函数, 则$P\{|X-\mu|\le k\sigma\}=$（ D ）$(k>0)$

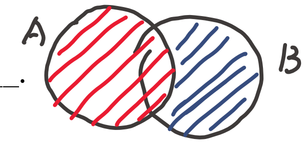
A. $\Phi(k)$ B. $1-\Phi(k)$ C. $2\Phi(k)$ D. $2\Phi(k)-1$

$P\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|\le k\right)$ $2\Phi(k)-1$

5. 某装置中有黑白两种颜色的球, 其比例可以调整设定, 每次从中随机取出1球, 观察颜色后放回, 直到取出两个白球或两个黑球时为止, X表示取球的次数, 则$E(X)$的最大值为（ C ）

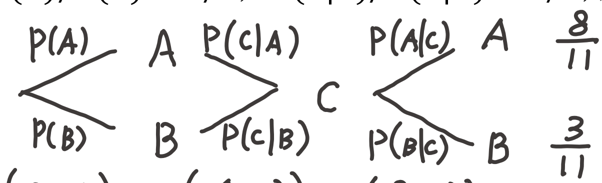
A. 2 B. 12/5 C. 5/2 D. 3

6. 设A,B是随机事件，且$P(A)=1/3$，$P(B|\bar{A})=1/4$，则$P(A\cup B)=$____________.



$$\frac{1}{4}=\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}.\quad \therefore P(\bar{A}B)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}\qquad P(A\cup B)=\frac{1}{2}.$$

7. 设A,B,C是随机事件，其中A,B是样本空间的一个划分，即A,B互不相容且$A\cup B$为样本空间，已知$P(A)/P(B)=2/1$，$P(C|A)/P(C|B)=4/3$，则$P(A|C)=$__$\frac{8}{11}$.__.



$$\frac{P(A|C)}{P(B|C)}=\frac{P(AC)}{P(BC)}=\frac{P(A)}{P(B)}\frac{P(C|A)}{P(C|B)}$$

$(2:1)\times(4:3)=(8:3)$

8. 设随机变量$X\sim U(0,1)$，则$P\{\mathrm{Max}(X,1-X)\le 2/3\}=$ ____________.

$$P\left(X\le\frac{2}{3}\text{ 且 }1-X\le\frac{2}{3}\right)=P\left(\frac{1}{3}\le X\le\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}.$$

$$P\left(\mathrm{Min}(x,1-x)\le\frac{1}{3}\right)=1-P\left(\mathrm{Min}(x,1-x)>\frac{1}{3}\right)$$

9. 设离散型随机变量X的所有可能取值为0,1,2, 若$P\{X=1\}=1/4$，则$E(|X-1|)$ ____________.

$$=1-P\left(X>\frac{1}{3}\text{ 且 }1-X>\frac{1}{3}\right)=1-P\left(\frac{1}{3}<X<\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}.$$

$$E|X-1|=|0-1|\cdot p_0+|1-1|\frac{1}{4}+|2-1|p_2=p_0+p_2=\frac{3}{4}.$$

10. 设随机变量X的分布函数是$F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2}\mathrm{d}t$，则$E(X^2)=$____________.

$$X\sim N\left(0,\frac{1}{2}\right)\qquad E(x^2)=D(x)+(E(x))^2=\frac{1}{2}.$$

二 计算题

11. 在一次游戏中抛掷两枚均匀硬币和一颗均匀骰子，参与者赢得的金额X为骰子向上那面的点数与正面向上的硬币数目的乘积

$H_i=\{$第i枚硬币正面朝上$\}$，$i=1,2$，$B_j=\{$骰子向上那面的点数为$j\}$，$j=1,2,3,4,5,6$

(1) 用H_i,B_j表示随机事件$\{X=6\}$（2 分） $H_1H_2B_3\cup H_1\bar{H}_2B_6\cup\bar{H}_1H_2B_6$

(2) 求$P\{X=6\}$（4 分） $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{8}$

(3) 设$F(x)$是X的分布函数，求$F(1)$（4 分）

(3) $F(1)=P(X\le 1)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$

12. 设A, B是随机事件, $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$

(1) 若随机事件A, B有包含关系, 且$P(A) = 2P(B)$, 求$P(A \cap B | A \cup B)$（4 分） $B \subseteq A$.

(2) 若随机事件A, B互不相容, 且$P(A) = 2P(B)$, 求$P(A | A \cup B)$ （4 分）

(3) 若随机事件A, B相互独立, 且$P(A) = 2P(B) = 0.6$, 求$P(A | \bar{A} \cup \bar{B})$ （4 分）

(1) $P(B|A) = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{1}{2}$

$A \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = A(\bar{A} + \bar{B})$

$= A \cdot \bar{A} + A\bar{B} = A\bar{B}$

(2) $P(A | A \cup B) = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{2P(B)}{3P(B)}$

(3) $\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{A} \cup \bar{B})} = \frac{P(A)P(\bar{B})}{1 - P(A)P(B)} = \frac{0.6 \times 0.7}{1 - 0.6 \times 0.3} = \frac{0.42}{0.82}$

13. 老师在10个题目中随机选择3题进行考试, 一位学生只复习了10个题目中的8个, 假设学生只能答对复习过的题目 $P(3 - X \geq 2) = P(X \leq 1) = \frac{14}{15}$

(1) 通过考试要求至少答对两题, 求这位学生通过考试的概率 （4 分）

(2) 要保证至少有50%的概率得到满分, 那么这位学生至少需要复习几题？ （4 分）

(3) 这位学生未答对的题目个数是X, 求X的数学期望 （4 分）

(3) $P(X=0) = \frac{C_8^3}{C_{10}^3} = \frac{\cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{10} \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{8}} = \frac{7}{15}$. $P(X=1) = \frac{C_2^1 \cdot C_8^2}{C_{10}^3} = \frac{7}{15}$

$P(X=2) = \frac{C_2^2 \cdot C_8^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{15}$. $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{7}{15} & \frac{7}{15} & \frac{1}{15} \end{pmatrix}$

14. 某事件发生的概率X是一个随机变量, 概率密度函数为$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$

(1) 求X的分布函数（4 分）

(2) 求X的数学期望（4 分）

(3) 求事件不发生的概率$Y = 1 - X$的概率密度函数（4 分）

$E(X) = 6\int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx$, $E(X^2) = 6\int_0^1 (x^3 - x^4)\,dx$

$D(X) = \cdots$

$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \triangle, & 0 \leq y \leq 1 \\ 1, & y > 1 \end{cases}$ $f_Y(y) = \begin{cases} 6y(1-y), & 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(1 - X \leq y) = P(X \geq 1 - y) = \int_{1-y}^{1} 6x(1-x)\,dx$

15. 呼气分析仪被警方用来测试司机的血液酒精含量是否超过法定限制，A表示事件“驾驶员的血液酒精含量超过法定限制”，B表示事件“呼气分析仪的指示超出上限”，已知

$$P(B|A)=P(\bar{B}|\bar{A})=p \qquad (1-p\text{表示呼气分析仪的误测率})$$

已知周六晚上约有5%的司机的血液酒精含量超过法定限制

(1) 设$p=0.95$，计算$P(B)$　（4 分）

(2) 设$p=0.95$，描述并计算$P(\bar{A}|B)$　（4 分）

(3) 呼气分析仪的误测率$1-p$控制在多少以内能使得测试的准确率$P(A|B)$达到0.9　（4 分）

16. 随机变量X的矩母函数$M(t)=E(e^{tX})$可以用来计算$E(X^n)$：

$$E(X)=\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}|_{t=0},\ E(X^2)=\frac{\mathrm{d}^2M}{\mathrm{d}t^2}|_{t=0},\cdots\cdots,E(X^n)=\frac{\mathrm{d}^nM}{\mathrm{d}t^n}|_{t=0}$$

(1) 设随机变量X的分布律：$P\{X=0\}=1-p,P\{X=1\}=p$，求$M(t)$及$E(X^{2023})$　（4 分）

(2) 设随机变量X服从参数为1的指数分布，求$M(t)$及$E(X^3)$　（4 分）

(3) 设随机变量$X\sim N(0,1)$，求$M(t)$及$E(X^4)$　（4 分）

(1) $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1-p & p\end{pmatrix}$. $M(t)=E(e^{tX})=1\cdot(1-p)+e^t\cdot p$

$M'(t)=pe^t$, $M^{(n)}(t)=pe^t$. $E(X^n)=p$

(2) $E(e^{tX})=\int_0^{+\infty}e^{tx}e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}e^{(t-1)x}dx=\frac{e^{(t-1)x}}{t-1}\Big|_0^{+\infty}$

$=\frac{1}{1-t}$. $M^{(3)}(t)=\frac{6}{(1-t)^4}$. $E(X^3)=6$.

(3). $M(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2-2tx+t^2-t^2}{2}}dx$

$=e^{\frac{t^2}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}dx=e^{\frac{t^2}{2}}$

$M'(t)=te^{\frac{t^2}{2}}$. $M''(t)=e^{\frac{t^2}{2}}(1+t^2)$

$M'''(t)=e^{\frac{t^2}{2}}(2t+t+t^3)$. $M^{(4)}(t)=e^{\frac{t^2}{2}}(3+3t^2+3t^3+t^4)$.

$E(X^4)=3$.