第五章复习题解答

1.（D）对．积分值与所用的变量无关，但（D）中的变量是 x，常数是 a,b．对常数的导数应为零．

2.（B）对．要考虑二个函数的大小或符号，也要考虑一个函数的单调性．

3.（C）对．$\int_{-1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$ 表示 $y=f\left(x\right)$ 与 x 轴所围图形的面积，为正数；

$$\int_{-1}^{3} f'(x)\mathrm{d}x = f\left(3\right)-f(-1)=0-0=0；$$

$$\int_{-1}^{3} f''(x)\mathrm{d}x = f'\left(3\right)-f'(-1)=负数-正数<0；$$

$$\int_{-1}^{3} f'''(x)\mathrm{d}x = f''\left(3\right)-f''(-1)=正数-负数>0 .$$

4.（A）对．被积函数是奇函数，注意（C）是发散的反常积分．

5.（A）对．$\int_0^1 \ln\left(1-x\right)\mathrm{d}x=\left[x\ln(1-x)-1-\ln(1-x)\right]\Big|_0^{1^+}=-1$，也可以先换元成为 $\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x$，再计算极限．

当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时 $\dfrac{1}{\sin x}>\dfrac{1}{x}$，而 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=+\infty$，所以积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x}=+\infty$，从而 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{dx}{\sin x}$ 发散．

$\int_2^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\int_2^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}\ln x}{\ln x}=\ln\ln x\Big|_2^{+\infty}=+\infty$，发散． $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x=+\infty$ 显然．

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\mathrm{d}x=\dfrac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{5\pi}{32}$．

7. $1=\int_0^a\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^a\left(\cos x+\sin x\right)\mathrm{d}x=\left(\sin x-\cos x\right)\Big|_0^a=\sin a-\cos a+1$，

故 $\tan a=1$，$a=\dfrac{\pi}{4}$．

8. 对 $\int_0^y\left(1+x^2\right)dx+\int_x^0\mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y=0$ 两边求导，$\left(1+y^2\right)y'-\mathrm{e}^{x^2}=0$，故 $y'=\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{1+y^2}$．

9. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}dt}{x^3}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x\cdot 2x}{3x^2}=\dfrac{2}{3}$．

10. $s=\int_0^{2\pi}3\sqrt{\left(1-\cos t\right)^2+\left(\sin t\right)^2}\mathrm{d}t=6\int_0^{2\pi}\left|\sin\dfrac{t}{2}\right|dt=12\int_0^{\pi}\sin u\mathrm{d}u=24$．

11. 解法一：$I=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\left(\cos x+\sin x\right)+\left(\cos x-\sin x\right)}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\left(x+\ln\left|\cos x+\sin x\right|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\dfrac{1}{4}$．

解法二：$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\cos t+\sin t}{\sin t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(t+\ln\left|\sin t\right|\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$.

解法三：$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$，与原式$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$，相加得$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\mathrm{d}x$，故$I=\frac{\pi}{4}$.

12. $I=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1-\mathrm{e}^{-2x}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{3}{4}}t\cdot\frac{t\mathrm{d}t}{1-t^2}=\left[-t+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)\right]\Bigg|_0^{\frac{3}{4}}=\ln 7-\frac{3}{4}$.

13. 令$A=\int_1^{\mathrm{e}}f\left(x\right)\mathrm{d}x$，则两边积分得$A=\int_1^{\mathrm{e}}\ln^2 x\mathrm{d}x-A\left(\mathrm{e}-1\right)$，

其中 $\int_1^{\mathrm{e}}\ln^2 x\mathrm{d}x=x\ln^2 x\Big|_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}2\ln x\mathrm{d}x=\mathrm{e}-2\left(x\ln x-x\right)\Big|_1^{\mathrm{e}}=\mathrm{e}-2\left(\mathrm{e}-\mathrm{e}+1\right)=\mathrm{e}-2$，即 $A=\mathrm{e}-2-A\left(\mathrm{e}-1\right)$，$A=\frac{\mathrm{e}-2}{2\mathrm{e}-1}$，所以，$f\left(x\right)=\ln^2 x-\frac{\mathrm{e}-2}{2\mathrm{e}-1}$.

14. $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}\cdot\sin^2 x\Bigg|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2\sin x\cos x}{x}\mathrm{d}x=0+\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$.

15. $y'=\mathrm{e}^{-\arctan^2 x}\cdot\frac{1}{1+x^2}$，故$y'=1$，$\lim\limits_{x\to+\infty}xf\left(\frac{2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}2\frac{f\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{2}{x}}=2f'\left(0\right)=2y'\left(0\right)=2$.

16. $1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{b-\cos x}$，为使极限存在，必须$b=1$，此时$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，进一步得到 $1=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{a+x}}$，所以必须$\sqrt{a}=2$，即$a=4$．综上，$a=4$，$b=1$.

17. $y'=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$，设切点为$\left(a,\sqrt{a-2}\right)$，则切线方程为$y-\sqrt{a-2}=\frac{1}{2\sqrt{a-2}}\left(x-a\right)$，点 $\left(1,0\right)$在此直线上，故$0-\sqrt{a-2}=\frac{1}{2\sqrt{a-2}}\left(1-a\right)$，得切点坐标为$A\left(3,1\right)$．切线方程 $y=\frac{1}{2}\left(x-1\right)$.

面积 $S=\int_1^2 \frac{1}{2}(x-1)\mathrm{d}x+\int_2^3\left(\frac{1}{2}(x-1)-\sqrt{x-2}\right)\mathrm{d}x$

$=\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x\right)\Big|_1^2+\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}\sqrt{x-2}^3\right)\Big|_2^3=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$.

旋转体体积：

$V_1=\pi\int_1^3\left(\frac{1}{2}(x-1)\right)^2\mathrm{d}x+\pi\int_2^3\left(\sqrt{x-2}\right)^2\mathrm{d}x$；

$V_2=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{3}(x-1)^3\Big|_1^3+\pi\cdot\frac{1}{2}(x-2)^2\Big|_2^3=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{7\pi}{6}$.

18. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}, & x>1,\\ x, & 0\le x\le 1,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

$x<0$ 时，$F(x)=0$；

$0\le x\le 1$ 时，$F(x)=\int_0^x t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}x^2$；

$x>1$ 时，$F(x)=\int_0^1 t\mathrm{d}t+\int_1^x\frac{1}{t\sqrt{t-1}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}+\int_0^{\sqrt{x-1}}\frac{2u\mathrm{d}u}{\left(1+u^2\right)\cdot u}=\frac{1}{2}+2\arctan u\Big|_0^{\sqrt{x-1}}$

$=\frac{1}{2}+2\arctan\sqrt{x-1}$.

综上，$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+2\arctan\sqrt{x-1}, & x>1,\\ \dfrac{1}{2}x^2, & 0\le x\le 1,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

由于 $f(x)\ge 0$，$F(x)$ 单调递增，故 $F(x)$ 没有极值点.

$$F'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}, & x>1,\\ x, & 0<x\le 1,\\ 0, & x<0,\end{cases}\quad F''(x)=\begin{cases}\dfrac{-(3x-2)}{2x^2\sqrt{x-1}^3}, & x>1\\ 1, & 0<x<1\\ 0, & x<0\end{cases}$$，恒有 $F''(x)\ge 0$．故曲线没有拐点．

19. 令 $x=-t$ 得

$$\int_{-a}^{0} f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{0} f(-t)g(-t)\mathrm{d}(-t)=\int_{0}^{a} f(-t)g(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{a} f(-x)g(x)\mathrm{d}x,$$

于是 $\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0} f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{a}\left(f(x)+f(-x)\right)g(x)\mathrm{d}x$

$=A\int_{0}^{a} g(x)\mathrm{d}x$.

据此，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\left(\arctan \mathrm{e}^{x}+\arctan \mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\cdot\dfrac{\pi}{2}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$.