

第五章复习题

一. 选择题

1. 若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则下列各结论中不正确的是 ()

(A) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy$; (B) $\int_a^a f(x)dx = 0$; (C) 若 $f(x) \geq b-a$, 则 $\int_a^b f(x)dx \geq (b-a)^2$;

(D) $\frac{d}{dx} \left(\int_a^b f(x)dx \right) = f(b)$.

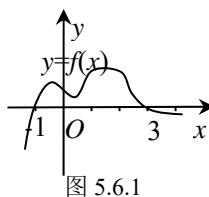
2. 下列各式中正确的是 ()

(A) $\int_0^1 e^x dx < \int_0^1 e^{x^2} dx$; (B) $\int_1^2 e^x dx < \int_1^2 e^{x^2} dx$; (C) $\int_0^1 e^{-x} dx < \int_1^2 e^{-x} dx$;

(D) $\int_{-2}^{-1} x^2 dx < \int_{-2}^{-1} x^3 dx$.

3. 设 $f(x)$ 具有三阶连续导数, $y = f(x)$ 的图像如图 5.6.1 所示, 问下列积分中哪一个为负值?

(A) $\int_{-1}^3 f(x)dx$; (B) $\int_{-1}^3 f'(x)dx$; (C) $\int_{-1}^3 f''(x)dx$; (D) $\int_{-1}^3 f'''(x)dx$.



4. 下列积分中, 值等于零的是 ()

(A) $\int_{-1}^1 \ln(x + \sqrt{1+x^2})dx$; (B) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; (C) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3}$; (D) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+\sin x}$.

5. 下列反常积分收敛的是 ()

(A) $\int_0^1 \ln(1-x)dx$; (B) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x}$; (C) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$; (D) $\int_0^{+\infty} e^{x^2} dx$.

二. 填空题

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx =$ _____.

7. 设 $0 < a < 1$ 且 $\int_0^a \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx = 1$, 则 $a =$ _____.

8. 方程 $\int_0^y (1+x^2)dx + \int_x^0 e^{y^2} dy = 0$ 确定 y 是 x 的函数, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

9. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt}{x^3} =$ _____.

10. 摆线一拱 $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$ 的全长为 $s =$ _____.

三. 简答题

11. 计算定积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$.

12. 计算定积分 $I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{1 - e^{-2x}} dx$.

13. 设 $f(x)$ 连续, 且满足 $f(x) = \ln^2 x - \int_1^x f(x) dx$, 求 $f(x)$.

14. 已知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, 求反常积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ 的值.

15. 已知两曲线 $y = f(x)$ 与 $y = \int_0^{\arctan x} e^{-t^2} dt$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线重合 (两曲线相切), 求极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x f\left(\frac{2}{x}\right).$$

四. 综合题

16. 求常数 a, b , 使其满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{bx - \sin x} \int_0^x \frac{t^2}{\sqrt{a+t}} dt = 1$.

17. 过点 $P(1, 0)$ 作抛物线 $y = \sqrt{x-2}$ 的切线, 该切线与抛物线及 x 轴围成一平面图形. 试求 (1) 该平面图形的面积; (2) 该平面图形绕 x 轴旋转一周的旋转体的体积.

18. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{x-1}}, & x > 1, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$

(1) 求 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$;

(2) 讨论: 函数 $y = F(x)$ 是否存在极值点? 曲线 $y = F(x)$ 是否存在拐点?

19. 设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[-a, a]$ 上连续, $g(x)$ 为偶函数, 且 $f(x)$ 满足条件

$$f(x) + f(-x) = A \quad (A \text{ 为常数}).$$

(1) 证明: $\int_{-a}^a f(x) g(x) dx = A \int_0^a g(x) dx$;

(2) 利用 (1) 的结论计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \arctan e^x dx$.