6.1 格

- 对于计算机科学来说，格与布尔代数是两个重要的代数系统。
- 在开关理论计算机的逻辑设计，及其它一些科学领域中，都直接应用了格与布尔代数。
- 此两个系统有一个重要特点：强调次序关系。

回忆偏序的一些概念:

- (1) 若集合A上的二元关系满足自反性、反对称性、传递性，称A为偏序集。aRb记为a≤b, 它可用哈斯图表示。
- (2)设〈A，≤〉是偏序集合，B是A的子集，
  - 若∀ b∈B,b≤a,则a是子集B的上界。
  - 若a’也是B的上界，有a≤a’，称a是子集B的最小上界，记为lub (B);
  - 若∀ b∈B,b≥a,则a是子集B的下界。
  - 若a’也是B的下界，有a≥a’，称a是子集B的最大下界，记为 glb(B)。
- (3) 即使下/上界存在,最大下/最小上界也未必存在;
  - 若最大下界、最小上界存在，则必定唯一。

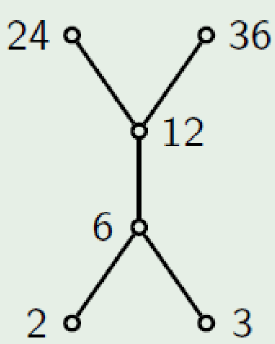
上界和上确界

Definition

设 $<A, \leqslant>$ 是偏序集,B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $a \in A$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 满足 $x \leqslant a$, 则称 a 为 B 的上界;
- 若元素 $a' \in A$ 是 B 的上界, 元素 $a \in A$ 是 B 的任何一个上界, 若均有 $a' \leqslant a$, 则称 a' 为 B 的最小上界或上确界.

Example



	{6,12}	{2,3}	{24,36}	{2,3,6,12}
上界	12,24,36	6,12,24,36	无	12,24,36
上确界	12	6	无	12

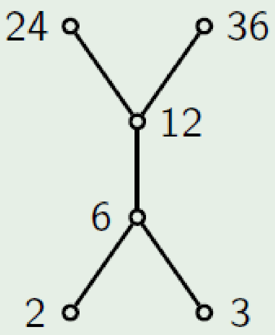
下界和下确界

Definition

设 $<A, \leqslant>$ 是偏序集,B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $a \in A$, 使得

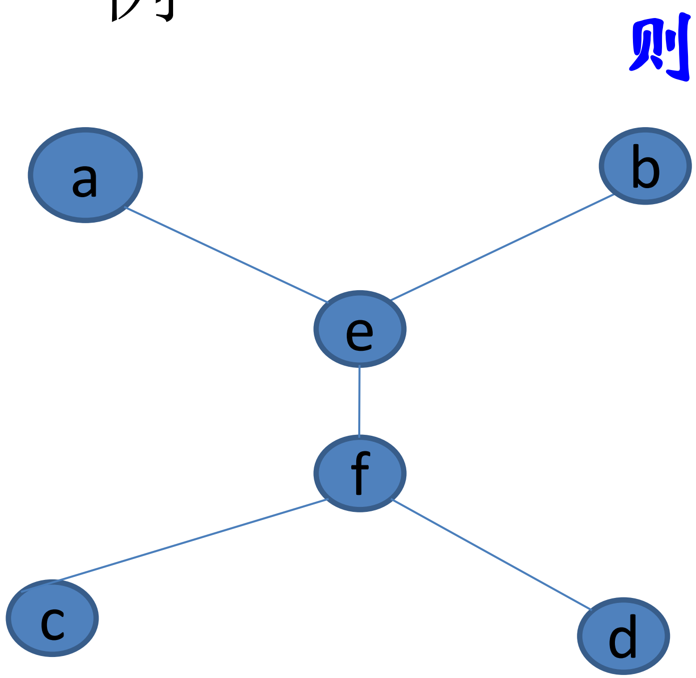
- 对任意 $x \in B$, 满足 $a \leqslant x$, 则称 a 为 B 的下界;
- 若元素 $a' \in A$ 是 B 的下界, 元素 $a \in A$ 是 B 的任何一个下界, 若均有 $a \leqslant a'$, 则称 a' 为 B 的最大下界或下确界.

Example



	$\{6,12\}$	$\{2,3\}$	$\{24,36\}$	$\{2,3,6,12\}$
下界	2,3,6	无	2,3,6,12	无
下确界	6	无	12	无

- 例

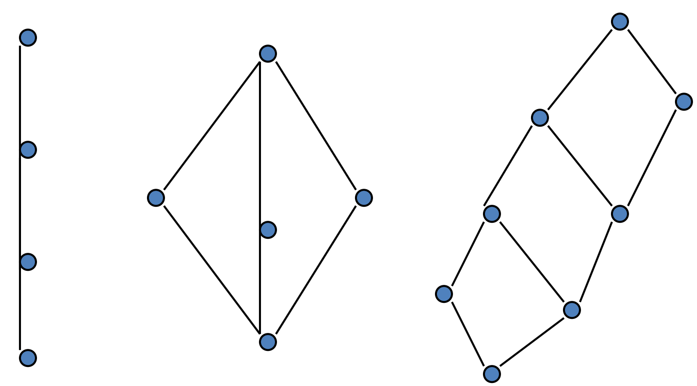


lub(a,b)不存在 glb(a,b)=e

lub(a,e)=a glb(a,e)=e

lub(c,d)=f glb(c,d)不存在

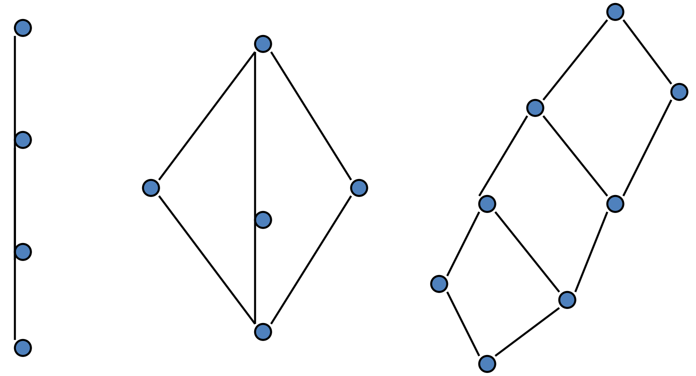
然而,有些偏序集中,任何两个元素都有lub和glb:



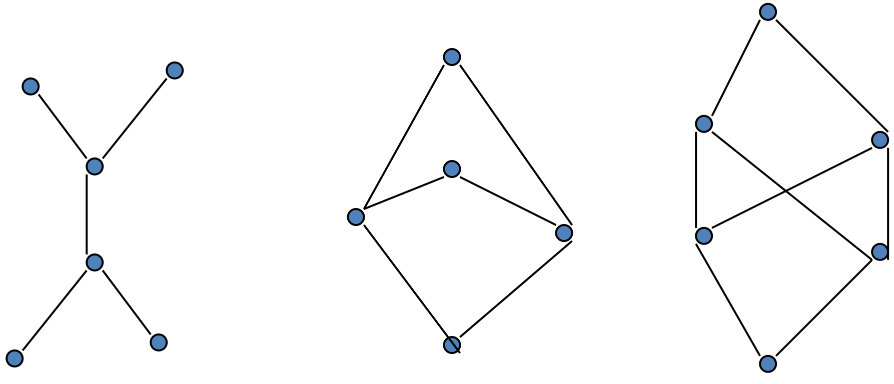
格

- 定义6-1.1：
- 设〈A，≤〉是偏序集，若∀a，b∈A，都有最大下界、最小上界，则称〈A,≤〉是一个**格**。

例1

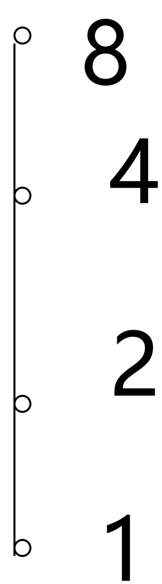


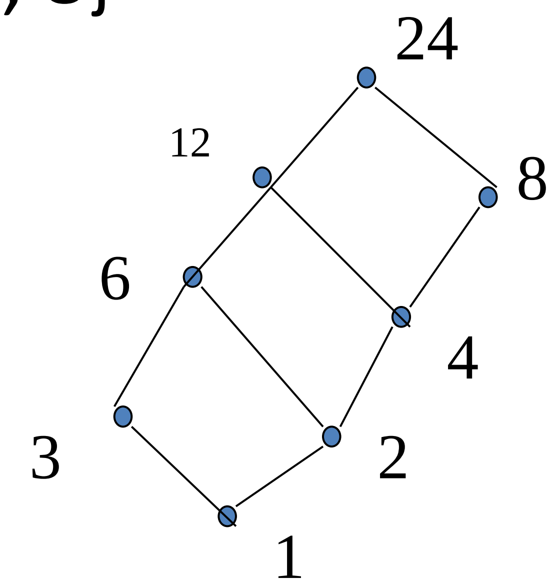
是格



不是格

- 例2.设n是一正整数，Sn是n的所有因子的集合， D是整除关系,则<Sn,D>是个格。
- 如：n=8 ， Sn={1, 2, 4, 8}

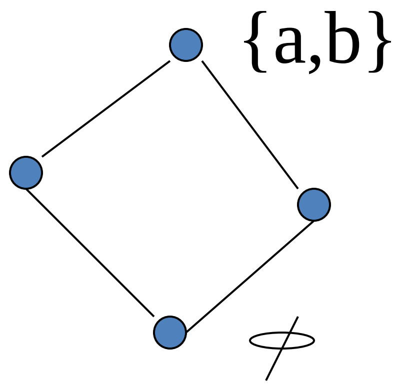




n=24，S_n={1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}

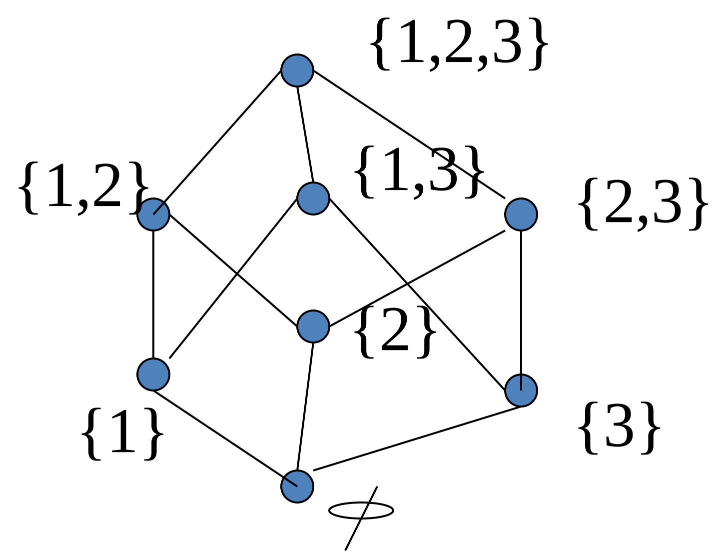
- 例3.设S是任意集合，ρ(S)是幂集，　偏序集<S, ⊆>是个格。

如：S={a,b}



{a}

S={1,2,3}



{b}

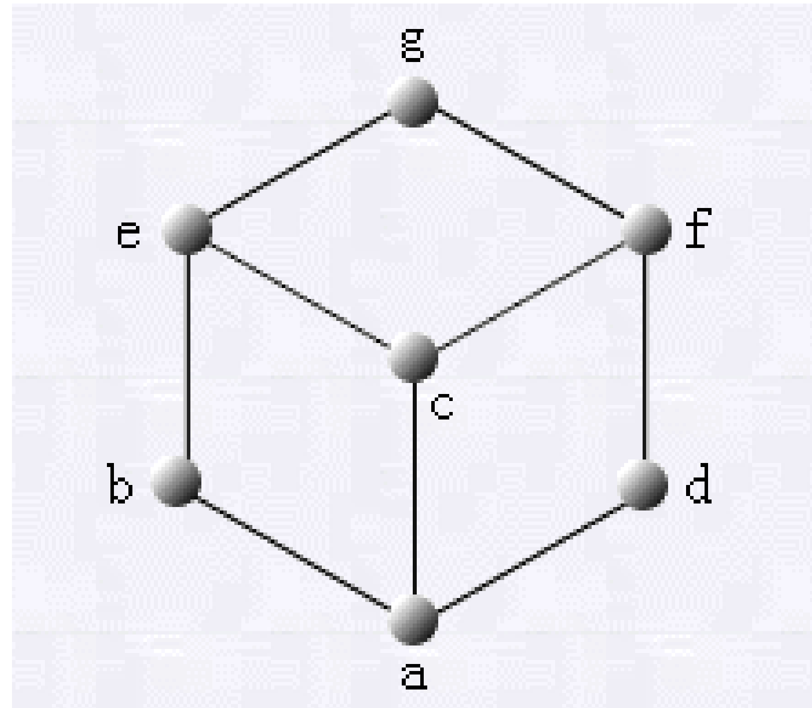
- 定义6-1.2
- 设<A, ≤ >是一个格，定义代数系统<A, ∧,∨ >,使得对于任意元素a,b，有a∧b=glb(a,b)，a∨b=lub(a,b)，称<A, ∧,∨>为由格〈A，≤〉所诱导的代数系统。称二元运算∧,∨分别为**交和并**
- 例如
  - $<I_+,|>$是格，而且诱导的代数系统是$< I_+$,最小公倍数，最大公约数>，设E_+是正偶整数，因为 E_+在运算上是封闭的，所以$<E_+,|>$是$<I_+,|>$的子格

子格

- 定义6-1.3 设<A, ≤ >是一个格，B是A的非空子集，如果B在所诱导的∧,∨ 运算仍然构成格，则称B是A 的**子格**。

  - 参考 国家十五规划教材 精品课程
  - 《离散数学》（北京大学 屈婉玲 教授）

例 设格L如下图所示。



令$S_1=\{a, e, f, g\}$，　　$S_2=\{a, b, e, g\}$

则S_1不是L的子格, S_2是L的子格。

因为对于e和f, 有$e\wedge f=c$, 但$c\notin S_1$.

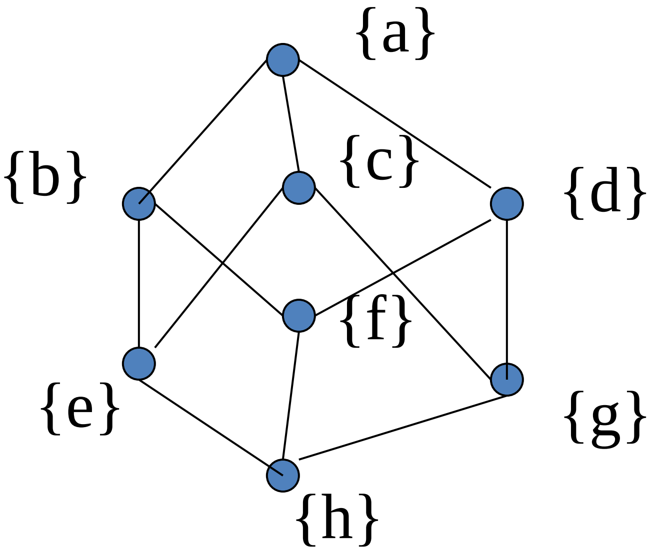
P233 例5：

$S=\{a,b,c,d,e,f,g,h\}$

$S_1=\{a,b,d,f\}$

$S_2=\{c,e,g,h\}$

$S_3=\{a,b,c,d,e,g,h\}$



设$<S, \leq >$是格

- $<S_1, \leq >$, $<S_2, \leq >$是$<S, \leq >$的子格
- $<S_3 , \leq >$不是$<S, \leq >$的子格，因为$b\wedge d=f$不属于S_3

对偶原理

- 现实生活中，对偶现象。

- 因为<S, ≤>的交是<S, ≥>的并， <S, ≤>的并是<S, ≥> 的交, 所以，关于格的一般性质的任意命题,
  - 如用≥替换≤，用≤替换≥，用∨替换∧，用∧替换∨，格的一般性质的任意命题仍成立,
- 称为格的**对偶原理**。

格的基本性质

- 在格<A, ≤ >中，对于任意a，b，c，d $\in$A，
  - 偏序的性质：自反，反对称，传递性
  - $a \le a \vee b$， $a \wedge b \le a$ （定理6-1.1）
  - $a \le b, c \le d \Rightarrow a \wedge c \le b \wedge d$，$a \vee c \le b \vee d$ （定理6-1.2）
  - $a \le b, \Rightarrow a \wedge c \le b \wedge c$，$a \vee c \le b \vee c$ （推论）
  - 交换律，结合律，等幂律，吸收律(定理6-1.3)

- 定理6-1.5： 分配律不等式
  - $a\vee(b\wedge c)\leq(a\vee b)\wedge(a\vee c)$
  - 对偶式：$a\wedge(b\vee c)\geq(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$

- 证:

$$a\leq a\vee b,\ \ a\leq a\vee c \Rightarrow\ a\leq(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

$$b\leq a\vee b,\ \ c\leq a\vee c\ \Rightarrow\ b\wedge c\leq(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

$$\therefore\ a\vee(b\wedge c)\leq(a\vee b)\wedge(a\vee c)$$

- 定理6-1.6：$a \le b \Leftrightarrow a \wedge b=a$，$a \vee b=b$

- 证：
- “$\Rightarrow$”设 $a \le b$，
  - $\therefore a \le a$, $a \le b$,
  - $\therefore a \le a \wedge b$，又 $a \ge a \wedge b$，$\therefore a=a \wedge b$.
- “$\Leftarrow$”设 $a \wedge b=a$，（教科书239页更易懂）
  - 若$b \le a$且$b \ne a$，则与$a \wedge b=b$ 矛盾。
  - 若a,b不可比较，则与$a \wedge b=a$矛盾。$\therefore a \le b$。
  - 类似可证：$a \le b \Leftrightarrow a \vee b=b$。

- 定理6-1.7：模不等式

  $a \le c \Leftrightarrow a \vee (b \wedge c) \le (a \vee b) \wedge c$

- 证：
- "$\Rightarrow$" 若$a \le c$ 则$a \vee c = c$，
  - 代入分配不等式
  - $a \vee (b \wedge c) \le (a \vee b) \wedge (a \vee c) = (a \vee b) \wedge c$。
- "$\Leftarrow$" 若$a \vee (b \wedge c) \le (a \vee b) \wedge c$，
  - 因为$a \le a \vee (b \wedge c) \le (a \vee b) \wedge c \le c$，
  - 所以$a \le c$。

格的存在性判定

- 定理6-1.4： 设代数系统<A, ∧,∨ >， 如果二元运算∧,∨满足交换律、结合律和吸收律，则A上必定存在格<A, ≤ >

先证幂等性成立。

由吸收律知 $a \wedge a = a \wedge (a \vee (a \wedge b)) = a$

$a \vee a = a \vee (a \wedge (a \vee b)) = a$

返回

下证有偏序关系$\preccurlyeq$。

先定义L上$\preccurlyeq$关系如下：对任意$a,b\in L$,

$a\preccurlyeq b$当且仅当$a\wedge b=a$。

(1)证$\preccurlyeq$为L上偏序关系。

①由幂等性，因为$a\wedge a=a$,故$a\preccurlyeq a$。自反性得证。

②设$a\preccurlyeq b,b\preccurlyeq a$,则$a\wedge b=a$, $b\wedge a=b$。由于交换律$a\wedge b=b\wedge a$, 故$a=b$。反对称性得证。

③设$a \preccurlyeq b, b \preccurlyeq c$,则$a \wedge b = a, b \wedge c = b$,于是

$a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a$

故$a \preccurlyeq c$。传递性得证。

(2)可证$a \preccurlyeq b$当且仅当$a \vee b = b$。

设$a \preccurlyeq b$,那么$a \wedge b = a$,从而$(a \wedge b) \vee b = a \vee b$,由吸收律即得$b = a \vee b$。

反之,设$a \vee b = b$,那么$a \wedge (a \vee b) = a \wedge b$,由吸收律可知$a = a \wedge b$,即$a \preccurlyeq b$。

(3)下证在这个关系下,对任意$a,b\in L$,$a\vee b$为$\{a,b\}$的上确界,即$a\vee b=\text{LU}B\{a,b\}$。

由吸收律$a\wedge(a\vee b)=a$,所以$a\preccurlyeq a\vee b$。又因为$b\wedge(a\vee b)=b$,所以$b\preccurlyeq a\vee b$,故$a\vee b$为$\{a,b\}$的一个上界。

设c为$\{a,b\}$任一上界,即$a\preccurlyeq c$,$b\preccurlyeq c$,那么,

$a\vee c=c$,$b\vee c=c$,于是

$$a\vee c\vee b\vee c=c\vee c$$

亦即$a\vee b\vee c=c$,故$a\vee b\preccurlyeq c$。这表明$a\vee b$为$\{a,b\}$的上确界。

(4) 下证在这个关系下，对任意$a,b \in L$，$a \wedge b$为$\{a,b\}$的下确界，即$a \wedge b = \mathrm{GL}B\{a,b\}$。

由吸收律$(a \wedge b) \wedge a = a \wedge a \wedge b = a \wedge b$，所以$a \wedge b \preccurlyeq a$。

又因为$(a \wedge b) \wedge b = a \wedge (b \wedge b) = a \wedge b$，所以$a \wedge b \preccurlyeq b$，故$a \wedge b$为$\{a,b\}$的一个下界。

设c为$\{a,b\}$任一下界，即$c \preccurlyeq a$且$c \preccurlyeq b$，由　的定义知 $a \wedge c = c, b \wedge c = c$，于是

$$c \wedge (a \wedge b) = (c \wedge a) \wedge b = c \wedge b = c$$

所以$c \preccurlyeq a \wedge b$，即$a \wedge b$为$\{a,b\}$的下确界。

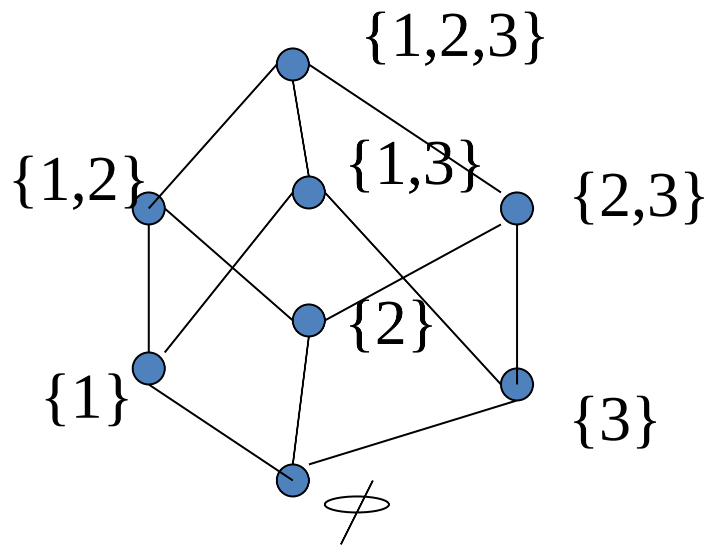
因此$<L,\preccurlyeq>$是格。

6.2 分配格

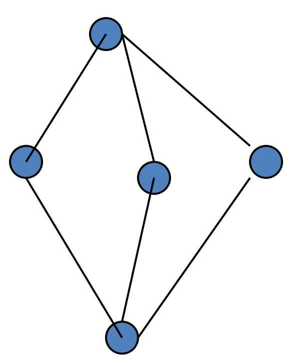
- 由性质知，**分配律不等式**(定理6-1.5)
  - $a\vee(b\wedge c)\leq(a\vee b)\wedge(a\vee c)$
  - $a\wedge(b\vee c)\geq(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$

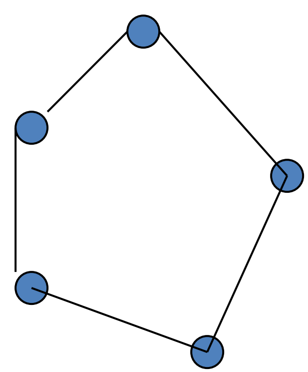
- 定义6-2.1：设代数系统$<A,\wedge,\vee>$由格$<A,\leq>$诱导的，若$\forall a,b,c\in A$，有：
  - $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$
  - $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$
- 则称$<A,\leq>$为**分配格**。

例：



是分配格





不是分配格

- 定理6-2.1 代数系统<A, ∧,∨>由格< A,≤>诱导的，则

  $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c) \Leftrightarrow a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$

证 $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$

- 则 $(a\vee b)\wedge(a\vee c)=((a\vee b)\wedge a)\vee((a\vee b)\wedge c)$

$$=a\vee((a\vee b)\wedge c)$$
$$=a\vee((a\wedge c)\vee(b\wedge c))$$
$$=(a\vee(a\wedge c))\vee(b\wedge c)$$
$$=a\vee(b\wedge c)$$

- 分配格的定义中，条件可以减弱。

- 定理6-2.2 每个链是分配格。（自行练习）
- 定理6-2.3 设$<A, \leq>$是分配格，则 $\forall a,b,c \in A$ ，若 $c \wedge a=c \wedge b$并且$c \vee a=c \vee b$,则$a=b$

证明

因为 $(c \wedge a) \vee b=(c \wedge b) \vee b=b$ (因$c \wedge a=c \wedge b$)

$(c \wedge a) \vee b=(c \vee b) \wedge (a \vee b)$

$=(c \vee a) \wedge (a \vee b)$ (因$c \vee a=c \vee b$)

$=a \vee (c \wedge b)$

$=a \vee (c \wedge a)$ (因$c \wedge a=c \wedge b$)

$=a$

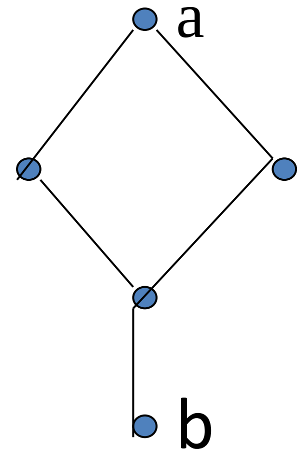
所以$a=b$。

6.3　有补格

- 定义6-3.1，给定格<A,≤>， 若存在a∈A，
  - 使∀b∈ A,有b≤a (或a≤b)，称a为< A,≤>的全上界（或全下界）。
  - 分别记为1和0。

- 定理6-3.1，一个格的全上界（全下界）是唯一的。

- 例：格



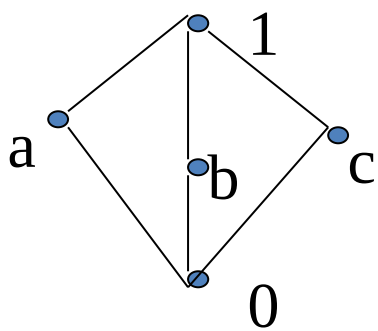
  - 全上界为a，全下界为b。

- 定理6-3.3 设格<A,≤>，对任意的$a\in A$，必有：$a\vee 1=1$, $a\vee 0=a$, $a\wedge 1=a$, $a\wedge 0=0$

有界格,补元

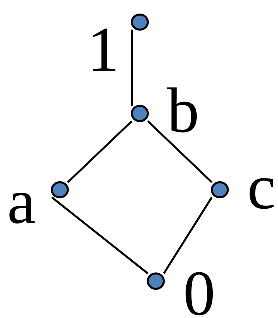
- 定义6-3.3　具有全上界和全下界的格，称为**有界格**
- 定义6-3.4 设$< A \wedge,\vee, >$是有界格诱导的，对于元素$a\in A$，若存在$b\in A$，使$a\wedge b=0,a\vee b=1$，称b为a的**补元**。
- 注：
  - ① 若a是b的补元，则b也是a的补元;
  - ② 补元可以不存在，若存在也可以不唯一。
  - ③有界分配格中，补元若存在，则必定唯一 。
- （定理6-3.4）

- 例3
- a)



a的补元是b,c。
b的补元是a,c, c的补元是a,b

- b)



a,b,c 均不存在补元。

- c) 有界格中，0，1互为补元。

有补格

- 定义6-3.5：若在一个有界格中，每个元素<u>**至少**</u>有一个补元，则称此格为**有补格**。

6.4　布尔代数

- 定义6-4.1 一个有补格分配格，称**布尔格**。
- 定义6-4.2 由布尔格<A,≤> 诱导的代数系统<A，∧，∨，¯ >称为**布尔代数**。
- 例如：
  - 集合运算<ρ(S)，≤>，命题运算，都是布尔代数,
  - (因为满足结合律、交换律、吸收律、分配律、存在补元及0，1）

- 定理6-4.1　有补分配格中，任何元素的补元是唯一的。

- 定理6-4.2 有补分配格满足德.摩根定律，即

ⅰ（1）$(a^{\wedge})^{\wedge}=a$

ⅱ（2）$(a \wedge b)^{\wedge}=a^{\wedge} \vee b^{\wedge}$

（3）$(a \vee b)^{\wedge}=a^{\wedge} \wedge b^{\wedge}$