一 选择填空题

1. 城市某区域有四个PM2.5浓度监测器, 只要有三个监测器显示的浓度不低于临界浓度a, 空气污染指数即为红色, 设$X_1 \le X_2 \le X_3 \le X_4$是四个监测器显示的从低到高的浓度值, 则事件“空气污染指数为红色”是（　　）

A. $\{X_1 \ge a\}$　　B. $\{X_2 \ge a\}$　　C. $\{X_3 \ge a\}$　　D. $\{X_4 \ge a\}$

2. 以下随机变量X, Y不一定相互独立的是（　　）

A. $n+m$次独立重复试验中, 前n次与后m次试验中事件A分别发生的次数

B. 对任意实数x, y, 都有$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\}$

C. 向平面区域$\{(x,y)|0 \le x, y \le 1\}$内随机投点的横坐标$X$与纵坐标$Y$

D. X, Y的数学期望存在, 且$E(XY) = E(X)E(Y)$

3. 设随机变量X服从指数分布, 则对任意正实数s, t, 都有（　　）

A. $P\{X > s+t\} = P\{X > s\}P\{X > t\}$　　B. $P\{X < s+t\} = P\{X < s\}P\{X < t\}$

C. $P\{s < X < s+t\} = P\{X < t\}$　　D. $P\{s < X < s+t\} = P\{X < s+t\}$

4. 设二维离散型随机变量(X_1, X_2)的联合分布律为:

$$P\{X_1 = k_1, X_2 = k_2\} = \frac{3!}{k_1!\,k_2!\,(3-k_1-k_2)!}\left(\frac{1}{3}\right)^{k_1}\left(\frac{1}{6}\right)^{k_2}\left(\frac{1}{2}\right)^{3-k_1-k_2}$$

$$k_1, k_2 = 0,1,2,3 \text{ 且} k_1 + k_2 \le 3$$

则$E(X_1 + X_2) = ($　　$)$

A. 1　　B. 2　　C. 3/2　　D. 5/2

5. 设θ是总体分布中的未知参数, 则下列命题不正确的是（　　）

A. $\hat{\theta}$是θ的无偏估计是指$E\left(\hat{\theta} - \theta\right) = 0$

B. $\hat{\theta}$是θ的矩估计, 则$\forall \varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\hat{\theta} - \theta\right| < \varepsilon\right\} = 1$

C. θ的置信度为0.95的置信区间为$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$, 样本容量越大, 则置信区间越宽

D. 在检验$H_0: \theta = \theta_0, H_1:\ \theta \ne \theta_0$中, 显著性水平是指原假设成立时样本值落入拒绝域的概率

6. 已知$P(A) = 1/3$, $P(B \mid \bar{A}) = 1/4$, 则$P(A \cup B) =$________.

7. 据统计, 我国男性中糖尿病患者的比例约为女性中糖尿病患者的比例的两倍, 假设男女人数相等, 则我国糖尿病患者中男性比例约为________.

8. 在n重伯努利试验中, 事件A在每次试验中发生的概率是p, 事件A发生的频数是n_A, 则事件A

发生的频率n_A/n的数学期望是________.

9. 平面上的点(X,Y)在区域$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$内均匀分布, 即(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}, & x^2+y^2\le 1\\ 0, & x^2+y^2>1\end{cases}$$

则点(X,Y)到$(0,0)$的距离的数学期望$E\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)=$__________.

10. 已知随机变量Y服从参数为2的泊松分布, 且

$$P\{X=k|Y=n\}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{n-k}, k=0,1,\cdots,n$$

则$P\{X=1,Y=2\}=$________.

二 计算题

11. 设A,B为随机事件, $P(A)=0.2$, $P(B)=0.5$, 设A,B至少发生一件的概率为p, A,B恰好发生一件的概率为q, 在下列三种情况下分别计算p,q

(1) 若A,B有包含关系　(2) 若A,B互不相容　　(3) 若A,B相互独立

12. 从1,2,3中先后**有**放回各取一个数, 共取两次

(1) 事件A_i表示至少有一次取到数字i $(i=1,2,3)$, 求$P(A_1)$, $P(A_1A_2)$

(2) X_i表示第i次取出的数$(i=1,2)$, 求$P\{X_1=1|X_1+X_2=4\}$, $P\{X_1\le 1|X_1+X_2\le 4\}$

(3) 求两次取出的较大数字$\mathrm{Max}(X_1,X_2)$的分布律和数学期望

13. 设总体X的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases}2(1-x), & 0\le x\le 1\\ 0, & 其他\end{cases}$, 分布函数为$F(x)$

(1) 求总体分布的0.75分位数m, 即满足$F(m)=0.75$

(2) 求$Y=1-X$的概率密度函数$f_Y(y)$

(3) 设$X_1, X_2, \cdots, X_{1800}$是取自总体$X$的样本, 由中心极限定理求$P\{X_1+\cdots+X_{1800}>590\}$

14. 二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1/y, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}, 其中D=\{(x,y)|0<x<y<1\}$$

(1) 画出区域D的图形并求$P\{Y\le 1/2\}$

(2) 求关于X和Y的边缘概率密度函数$f_X(x), f_Y(y)$

(3) 求X和Y的协方差$\mathrm{Cov}(X,Y)$

15. A地区的月降水量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$(单位：毫米), 设每月的降水量相互独立, 求：

(1) 如果$\mu=40,\sigma^2=400$, 求A地区未来三年(36个月)的平均月降水量超过45的概率

(2) A地区2020,2021,2022三年的月降水量是$x_1,x_2,\cdots,x_{36}$, 其样本均值$\bar{x}=42$, 样本标准差$s=12$, 求总体期望μ的置信度为0.95的置信区间

(3) 2019年之前的历史数据显示, A地区的月降水量$X\sim N(40,\sigma^2)$, 总体方差σ^2未知, 根据(2)中的样本数据, 最近三年的月降水量是否显著超过历史平均值？即检验假设$H_0:\mu=40$, $H_1:\mu>40$, 取显著性水平为0.05

16. 设T是总体分布中的未知参数θ的估计量, T的均方差为$\mathrm{MSE}(T)=E(T-\theta)^2$

(1) 证明：$\mathrm{MSE}(T)=D(T)+[E(T)-\theta]^2$

(2) 设乘客等候公交车的时间$X\sim U(0,\theta)$, 随机调查了n位乘客的等候时间$X_1,X_2,\cdots,X_n$, 求θ的矩估计T_1和最大似然估计T_2

(3) 在均方差的标准下, 当$n\geq 3$时, (2)中的估计量T_1,T_2哪个更好?