

一 选择题 (每题 3 分, 共 21 分)

1. 设 A, B 为两个随机事件, 且 $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.8$, 则 $P(\bar{A}\bar{B})$ 的取值范围是()
- A. $[0.1, 0.4]$ B. $[0, 0.2]$ C. $[0, 0.3]$ D. $[0.1, 0.3]$
2. 以下随机变量 X, Y 一定相互独立的是()
- A. X, Y 满足 $P\{X \leq 1, Y \leq 1\} = P\{X \leq 1\}P\{Y \leq 1\}$
- B. X, Y 的方差存在, 且 $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$
- C. (X, Y) 的联合概率密度函数 $f(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$
- D. 抛掷一颗均匀骰子 n 次, 朝上的那面是偶数的次数 X 与朝上的那面是奇数的次数 Y
3. 从2至8的7个整数中随机取两个不同的数, 则这两个数互质的概率是()
- A. $1/2$ B. $2/3$ C. $1/4$ D. $3/4$
4. 随机变量 X 和 Y 的分布律: $X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$, $Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$, 且 $P\{X \neq Y\} = 1$, 则 $\text{Cov}(X, Y) =$ ()
- A. -0.05 B. 0.1 C. 0.05 D. -0.1
5. 盒中有20张卡片, 其中15张写着“你曾在考试中作弊了吗?”, 另外5张写着“你参加过校园马拉松吗?”. 100名学生每人有放回随机抽取一张, 根据抽到的问题回答“是”或“否”, 回答“是”有30人, 回答“否”有70人, 假设每人都真实回答, 则学生中曾考试作弊的比例的估计值是() (已知约有20%的学生参加过校园马拉松)
- A. $1/3$ B. $1/4$ C. $1/2$ D. $1/5$
6. 体育课上随机测试了36位学生的50米游泳成绩, 他们平均成绩 $\bar{x} = 40$ 秒, 样本标准差 $s = 6$ 秒, 已知学生的50米游泳成绩 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 μ 的置信度为0.95的置信区间是()
- A. $(38, 42)$ B. $(39, 41)$ C. $(38.5, 41.5)$ D. $(39.5, 40.5)$
7. 设 X_1, X_2, \dots, X_{100} 是来自总体 $N(\mu, 100)$ 的样本, 在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下, 检验 $H_0: \mu = 0$, $H_1: \mu < 0$, 拒绝域是 $\{(x_1, x_2, \dots, x_{100}): \bar{x} \in D\}$, 则 $D =$ ()
- A. $(1.65, +\infty)$ B. $(1.96, +\infty)$ C. $(-\infty, -1.65)$ D. $(-\infty, -1.96)$

二 填空题 (每题 3 分, 共 21 分)

8. 设事件 A, B 相互独立, $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$, 则 $P(\bar{A}|A \cup B) =$ _____
9. 设随机变量 X 的概率密度函数 $f(x) = \begin{cases} 1/x, & 1 < x < e \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 且 $P\{X > c\} = P\{X < c\}$, 则 $c^2 =$ _____
10. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 $U(0, 2)$ 的样本, 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\bar{X} - a| < \varepsilon\} = 1$, 则 $a =$ _____
11. 设二维随机变量 $(X, Y) \sim N(1, -1, 2, 4, 0)$, 则 $E[(X + Y)^2] =$ _____

12. 设 (X, Y) 的概率密度函数是 $f(x, y) = \begin{cases} 12y^2, & 0 \leq y \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 则 $E(X + Y) =$ _____

13. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 $U(\theta, 2\theta)$ 的样本, $\hat{\theta} = c\bar{X}$ 是 θ 的无偏估计, 则 $c =$ _____

14. 设 X_1, X_2, X_3 是来自总体 $U(0, 1)$ 的样本, 则 $P\{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \leq 1\} =$ _____

三 计算题

15. 一串钥匙共8把, 只有一把能打开门, 某人随机选钥匙去开门, 已经试过的不会重复试, 求:

(1) 第二次就打开门的概率 (2) 打开门时所用次数的分布律和数学期望

16. (1) 设随机变量 X 的数学期望和方差都存在, 证明: 对于任意常数 C , $E(X - C)^2 \geq D(X)$

(2) 设 X 的概率密度函数为 $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \pi/2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

a 为何值时, $E(X - a)^2$ 取得最小值? 并求其最小值

17. 两人相约在某地碰面, 他们的到达时刻 X, Y 相互独立, 且都服从上午9点到10点间的均匀分布 $U(0, 1)$, (单位: 小时)

(1) 求先到者需等待另一人15分钟以上的概率

(2) 求先到者的到达时刻 $T = \min(X, Y)$ 的概率密度函数和数学期望

18. 仪器测量某零件的长度时产生的误差 $X \sim N(\mu, 0.5)$ (单位: 毫米),

(1) 如果已知 $\mu = 0$, 求 $E(|X|)$

(2) 记录的 n 次测量的误差是 x_1, x_2, \dots, x_n , 求 μ 的矩估计和最大似然估计

19. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度函数为: $f(x, y) = \begin{cases} e^{-x}, & 0 < y < x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$,

(1) 求边缘密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$

(2) 求 $\text{Cov}(X, Y)$