第三章复习题解答

1. （B）对.

2.（D）对. 反例：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，有 $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}+2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$. 其

中 $f'(0)=\dfrac{1}{2}>0$，但在 $x=0$ 的任何邻域是剧烈振荡的.

3. （C）对. 因为 $e^x>1+x\ \left(x\neq 0\right)$ 恒成立.

4. （D）对. $f'''\left(x_0\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$，由保号性，在某邻域 $U(x_0)$ 内

$\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$，从而 $f''(x)$ 在点 x_0 两侧变号.

5. （B）对. 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，由保号性，在某邻域 $U(x_0)$ 内 $\dfrac{f''(x)}{|x|}>0$，故 $f''(x)>0$，得

到 $f'(x)$ 是递增函数，又因为 $f'(0)=0$，故 $f'(x)$ 在点 x_0 左负右正，从而 $f(0)$ 是一个极小值.

6. $f'(\xi)=3\xi^2-1=\dfrac{7-1}{2-1}$，$3\xi^2=7$，$\xi=\sqrt{\dfrac{7}{3}}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0^+}x\left(\ln x\right)^2=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}\right)^2=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}}\right)^2=\left(\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-2\sqrt{x}\right)\right)^2=0$. 所以答案为 $\underline{0}$.

8. $\underline{2}$. $y'=a\cos x+\cos 3x$，$y'\big|_{x=\frac{\pi}{3}}=\dfrac{a}{2}-1=0$.

此时，$y''=-2\sin x-3\sin 3x$，$y''\big|_{x=\frac{\pi}{3}}=-\sqrt{3}<0$，故有极（大）值.

9. $y'=\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^2}}$，$y''=\dfrac{-2\left(x^2+12\right)}{9\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^5}}$，在 $x=\pm 2$ 的两侧变号，所以有两个拐点．$\left(\pm 2,0\right)$.

10. $\dfrac{1}{3+x}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{x}{3}}=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{x}{3}+(\dfrac{x}{3})^2-(\dfrac{x}{3})^3+\cdots+(-1)^n(\dfrac{x}{3})^n+o(x^n)\right)$，所以，

$$\underline{\frac{1}{3+x}=\frac{1}{3}-\frac{x}{3^2}+\frac{x^2}{3^3}-\frac{x^3}{3^4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{3^{n+1}}+o(x^n)}$$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-1}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\dfrac{f''(0)}{2}=1$.

12. $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(1-x\sin\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t-\sin t}{t^3}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1-\cos t}{3t^2}=\dfrac{1}{6}$.

13. 令 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x+100}$，则 $f'(x)=\dfrac{\frac{x+100}{2\sqrt{x}}-\sqrt{x}}{\left(x+100\right)^2}=\dfrac{100-x}{2\sqrt{x}\left(x+100\right)^2}$，$x=100$ 是唯一的极值点，

且是极大值点，故 $x=100$ 是函数的最大值，数列的最大项为 a_{100}.

14. 因 $\ln(1+x)-\ln 1=\dfrac{1}{1+\theta x}\cdot\left(x-0\right)$，故 $\theta=\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$，

$$\lim_{x\to 0}\theta=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}=\frac{1}{2}.$$

15.（B）正确．令 $F(x)=f(x)-g(x)$，因为 $f'(x)>g'(x)$，$F'(x)>0$，$F(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 递增，

$F(x)>F(a)$，即 $f(x)-g(x)>f(a)-g(a)$，就有 $f(x)+g(a)>f(a)+g(x)$.

16. 令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，$f(x)$ 在 $x>\mathrm{e}$ 时递减，在 $x<\mathrm{e}$ 时递增，在 $x=\mathrm{e}$ 时达

到最大值 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，又因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$，所以原方程：

当 $a>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时无根，当 $a=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 或 $a\le 0$ 时有唯一根，当 $0<a<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时有两个根.

17.（1）$y'=\dfrac{3x^2\left(x-1\right)^2-2x^3\left(x-1\right)}{\left(x-1\right)^4}=\dfrac{x^2\left(x-3\right)}{\left(x-1\right)^3}$，函数在 $\left(-\infty,1\right)$ 和 $\left(3,+\infty\right)$ 上递增，在 $\left(1,3\right)$

上递减．故在点 $x=3$ 处取极小值 $\frac{27}{4}$.

（2） $y''=\frac{6x}{(x-1)^4}$ ，曲线 $y=f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内凸的；在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内凹，拐点 $(0,0)$.

（3）铅垂渐近线 $x=1$ ；又因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x-1)^2}=1$ ， $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(x-1)^2}-1\cdot x\right)=2$ ，故有斜渐近线 $y=x+2$.

18. 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ ，就有 $f(0)=0$ ， $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$ ，又因为 $f(1)=0$ ，由罗尔中值定理，存在 $\xi_1\in(0,1)$ ，使得 $f'(\xi_1)=0$. 函数 $f'(x)$ 在区间 $[\xi_1,1]$ 也满足罗尔中值定理，存在 $\xi\in(\xi_1,1)$ ，使得 $f''(\xi)=0$.

19. （1）由介值定理，存在 $c\in(0,b)$ 使 $f(c)=A$ ，再由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(0,c)$ ，使得 $f'(\xi)(c-0)=f(c)-f(0)$.

（2）因 $\varphi(0)=0,\varphi(1)=1$ ，由介值定理，存在 $a\in(0,1)$ ，使得 $\varphi(a)=\frac{1}{3}$ ，再由拉格朗日中值定理，$\exists\xi\in(0,a)$ ，$\exists\eta\in(a,1)$ ，使得

$$\varphi(a)-\varphi(0)=\varphi'(\xi)(a-0)\text{，}\quad \varphi(1)-\varphi(a)=\varphi'(\eta)(1-a)\text{，}$$

变形为 $\frac{\varphi(a)-\varphi(0)}{\varphi'(\xi)}=(a-0)$ ， $\frac{\varphi(1)-\varphi(a)}{\varphi'(\eta)}=(1-a)$ ，两式相加即得 $\frac{1}{\varphi'(\xi)}+\frac{2}{\varphi'(\eta)}=3$.

第三章总复习题