

高等数学（上）基础题

1. 求极限

- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}}$; (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$; (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-2x} - 1 + x^2 \sin \frac{1}{x}}{x}$;
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{\arctan^2 x}$; (5) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{2013} + \frac{n^{2013}}{e^n} \right)$; (6) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{x-1} - \frac{4}{x^2-1} \right)$;
- (7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2}{x \sin x}$; (8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{e^x + 1}}$; (9) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^n + 3^n}$;
- (10) 若 $f'(x_0)$ 存在, 求 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0)}{h}$;
- (11) 设 $0 < x_1 < 2$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n(2 - x_n)}$ ($n=1, 2, \dots$), 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
- (12) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}} \right)$.

2. 下列各式中哪些是 $x \rightarrow 0$ 时的二阶无穷小?

- (1) $1 - \cos x$; (2) $\sqrt{1 - 3x^2} - 1$; (3) $x - \sin x$; (4) $x - \tan x$;
- (5) $\ln(1 - x^2)$; (6) $e^{-x} - 1$

3. 求 $f'(0)$, 设 (1) $f(x) = x \arccot x$; (2) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$;

(3) $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$; (4) 设 $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} \cos 2t dt$.

4. 求导数 $\frac{dy}{dx}$: (1) $y = \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; (2) $x^2 - xy + y^2 = 2$; (3) $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$;

(4) $y = \int_0^x (x-t)e^{-t^2} dt$; (5) $\int f(x) dx = x^2 e^{x^2} + c$, 求 $f(x)$.

5. 求二阶导数 $\frac{d^2 y}{dx^2}$: (1) 设: $\begin{cases} x = t(1 - \sin t) \\ y = t \cos t \end{cases}$; (2) $x + y^2 = \int_0^{y-x} \cos^2 t dt$.

6. (1) 求 $y=1+xe^{-x}$ 在 $x=1$ 处的微分;

(2) 设 $y=f(\sin x)+\sin(f(x))$, 其中 $f(x)$ 可导, 求 dy .

7. (1) 已知 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}=b$, 求常数 a, b 的值;

(2) 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b)=0$, 求常数 a, b 的值.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases} e^x+1, & x<0 \\ x^2+a, & x\geq 0 \end{cases}$, 求 a 使得 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续.

(4) 设 $f(x)=\begin{cases} e^{ax}+1, & x<0 \\ \sin x+b, & x\geq 0 \end{cases}$, 求 a, b 使得 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上可导.

8. (1) 验证 $f_1(x)=x^3-x$, $f_2(x)=x^2$ 在区间 $[0,1]$ 上分别满足 Rolle 和 Lagrange 中值定理, 并求出定理中的 ξ 值;

(2) 求 $f(x)=\ln(1+2x)$ 的麦克劳林公式 (两种余项).

9. (1) 设函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+3$ 在 $x=1$ 处有极小值 1, 求 a, b 的值, 并求该曲线的所有极值点、极值、凹凸区间和拐点;

(2) 证明方程 $x^5-3x=1$ 在区间 $[1, +\infty)$ 有且只有一个实根;

(3) 证明不等式: 当 $x>0$ 时, $e^x>1+x+\frac{x^2}{2}$.

10. 求积分

(1) $\int \frac{1}{x^2-2x-2} dx$; (2) $\int \frac{1}{x(x^2+1)} dx$; (3) $\int \cot^4 x dx$; (4) $\int \sqrt{4-x^2} dx$;

(5) $\int x^3 e^{-x^2} dx$; (6) $\int e^{\sqrt{x}} dx$; (7) $\int_0^\pi \max\{\sin x, \cos x\} dx$;

(8) $\int_{-1}^1 x^3 \ln(1+x^2) dx$; (9) $\int_{-1}^1 (4x+1)\sqrt{4-x^2} dx$; (10) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+6}$;

(11) $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$; (12) 设 $f(x)=\begin{cases} \arcsin x, & x<0 \\ x \ln(x+1), & x\geq 0 \end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x-1) dx$.

11. 将 $I_1 = \int_0^1 \sqrt{\ln(1+x)} dx$, $I_2 = \int_0^1 \sqrt{x} dx$, $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+x^2} dx$, $I_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\sin^2 x} dx$,

$I_5 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \ln(x^2+1) - \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x} dx$, $I_6 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$ 从小到大排列.

12. (1) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 且 $f(x) = e + e^x \int_0^1 f(x) dx$, 求 $\int_0^1 f(x) dx$;

(2) 已知 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int x f'(x) dx$.

13. (1) 求双扭线 $\rho^2 = a^2 \cos 2\theta$ 所围平面图形的面积;

(2) 曲线 $y = \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ 绕 x 轴旋转得一个旋转体, 若把它在 $x=0$ 与 $x=\xi$ 之间的一个旋转体体

积记为 $v(\xi)$, 试问 a 为多少时 $v(a) = \frac{1}{2} \lim_{\xi \rightarrow +\infty} v(\xi)$;

(3) 求曲线 $y = \int_{\frac{\pi}{2}}^x \sqrt{\cos t} dt$ 的弧长.