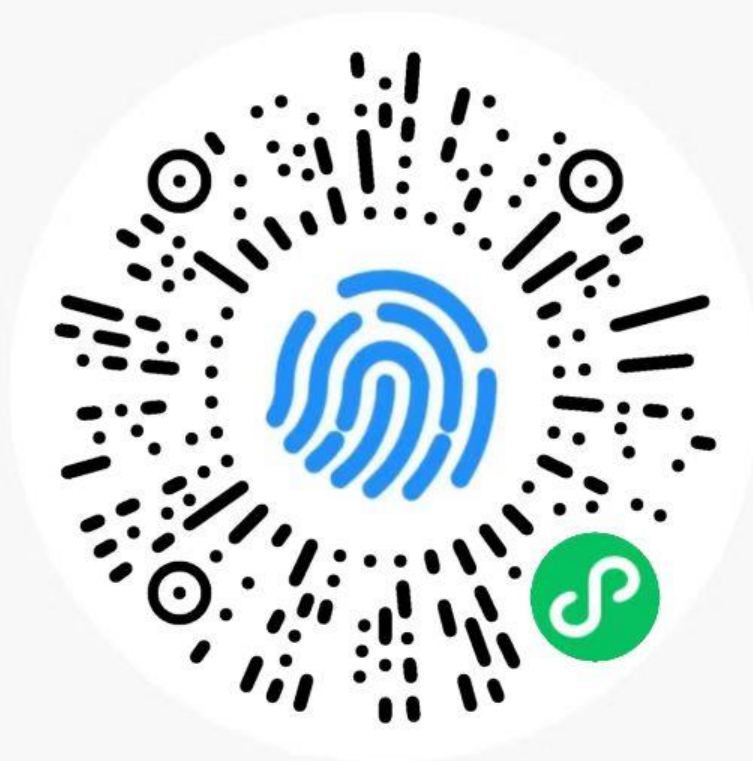


离散数学0410



微信扫码签到

回忆偏序的一些概念:

- (1) 若集合A上的二元关系满足自反性、反对称性、传递性, 称A为偏序集。 aRb 记为 $a \leq b$, 它可用哈斯图表示。
- (2) 设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集合, B是A的子集, $a \in A$,
 - 若 $\forall b \in B, b \leq a$, 则a是子集B的上界。
 - 若 a' 也是B的上界, 有 $a \leq a'$, 称a是子集B的最小上界, 记为 $\text{lub}(B)$;
 - 若 $\forall b \in B, b \geq a$, 则a是子集B的下界。
 - 若 a' 也是B的下界, 有 $a \geq a'$, 称a是子集B的最大下界, 记为 $\text{glb}(B)$ 。
- (3) 即使下/上界存在, 最大下/最小上界也未必存在;
 - 若最大下界、最小上界存在, 则必定唯一。

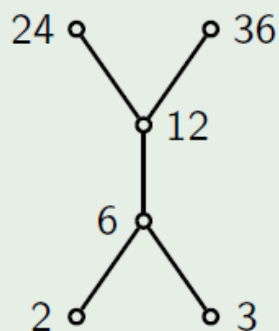
上界和上确界

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $a \in A$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 满足 $x \leq a$, 则称 a 为 B 的**上界**;
- 若元素 $a' \in A$ 是 B 的上界, 元素 $a \in A$ 是 B 的任何一个上界, 若均有 $a' \leq a$, 则称 a' 为 B 的**最小上界或上确界**.

Example



	$\{6, 12\}$	$\{2, 3\}$	$\{24, 36\}$	$\{2, 3, 6, 12\}$
上界	12, 24, 36	6, 12, 24, 36	无	12, 24, 36
上确界	12	6	无	12

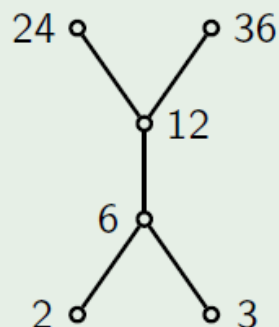
下界和下确界

Definition

设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $a \in A$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 满足 $a \leq x$, 则称 a 为 B 的**下界**;
- 若元素 $a' \in A$ 是 B 的下界, 元素 $a \in A$ 是 B 的任何一个下界, 若均有 $a \leq a'$, 则称 a' 为 B 的**最大下界或下确界**.

Example



	$\{6, 12\}$	$\{2, 3\}$	$\{24, 36\}$	$\{2, 3, 6, 12\}$
下界	2, 3, 6	无	2, 3, 6, 12	无
下确界	6	无	12	无

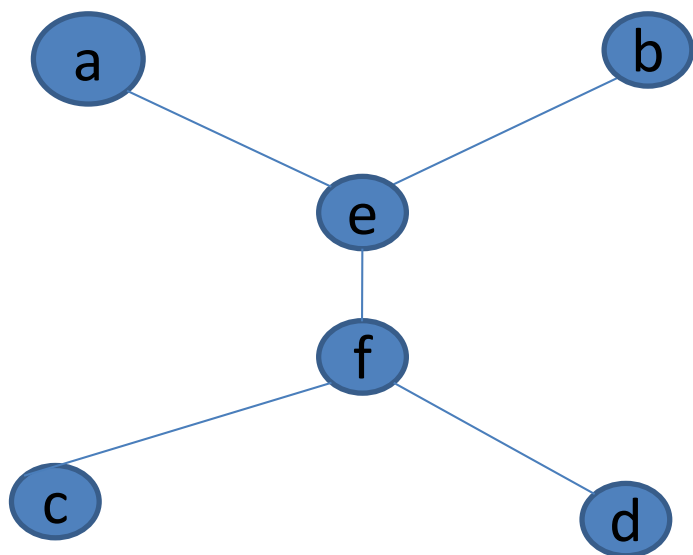
• 例

则

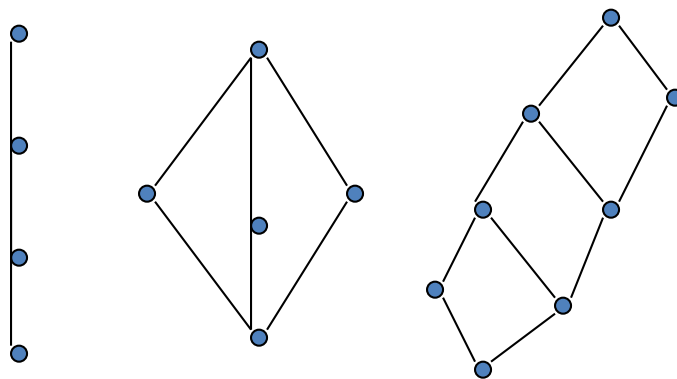
$\text{lub}(a,b)$ 不存在 $\text{glb}(a,b)=e$

$\text{lub}(a,e)=a$ $\text{glb}(a,e)=e$

$\text{lub}(c,d)=f$ $\text{glb}(c,d)$ 不存在



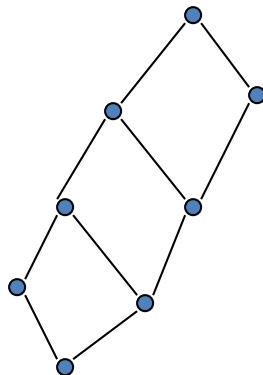
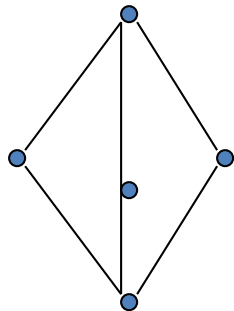
然而,有些偏序集中,任何两个元素都有lub和glb:



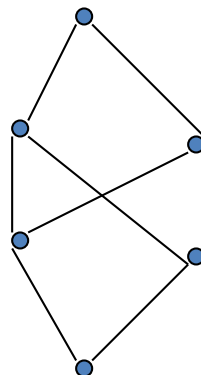
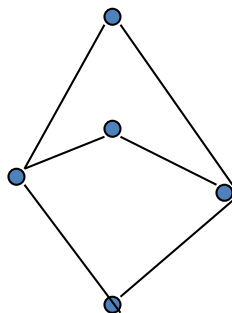
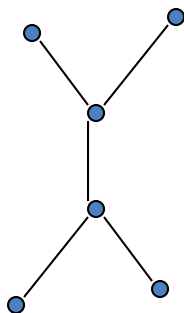
格

- 定义6-1.1:
- 设 $\langle A, \leq \rangle$ 是偏序集, 若 $\forall a, b \in A$, 都有最大下界、最小上界, 则称 $\langle A, \leq \rangle$ 是一个格。

例1



是格



不是格

第四章 函数

- 中学里，我们学过实数集上的函数。
- 现在，学习在广义集合上的函数。
- 从关系到函数。

4-1 函数的概念

定义4-1.1 设 X 和 Y 是任何两个集合， f 是 X 到 Y 的一个关系，如果对于每一个 $x \in X$ ，有唯一的 $y \in Y$ ，使得 xfy ，称关系 f 为**函数**，记作： $f: X \rightarrow Y$
称 x 为**自变量**，称 y 为对应于 x 的**象**。

4-1 函数的概念

注：

1、 X 到 Y 的函数 f 与二元关系 R 的区别与联系

函数是一种特殊的二元关系。

2、函数亦称映射，习惯用小写英文 f, g, \dots 表示。

3、函数的定义域是 X ，而不能是 X 的某个真子集。

4、关系的前域就是函数 f 的定义域，记作 $\text{dom } f = X$ ， f 的值域记为 $\text{ran } f = \{y \mid y \in Y \wedge (\exists x)(x \in X \wedge y = f(x))\}$ 。

5、一般地， $\text{ran } f \subseteq Y$ ，亦称为“集合 X 在 f 作用下的像集合”。
集合 Y 称为 f 的共域（陪域）。

例1 设 $X = \{1, 5, p, \text{张明}\}$, $Y = \{2, q, 7, 9, G\}$ 。

(1) 二元关系 $f = \{ \langle 1, 2 \rangle , \langle 5, q \rangle , \langle p, 7 \rangle , \langle \text{张明}, G \rangle \}$ 。

则可判断 f 为函数, 且 $\text{dom } f = X$, $\text{ran } f = \{2, q, 7, G\}$ 。

(2) 二元关系 $f' = \{ \langle 1, 2 \rangle , \langle 5, q \rangle , \langle \text{张明}, G \rangle \}$,

则 f' 不能构成函数。

另外,

所有从 X 到 Y 的函数的集合记作 Y^X , 读作 “ Y 上 X ”。符号化表示为 $Y^X = \{ f \mid f : X \rightarrow Y \}$, 有 $|Y|^{|X|}$ 个不同的函数。

函数的比较：用集合相等来定义。

定义4-1.2 (函数相等) 设 f , g 为函数, 则 $f = g \Leftrightarrow f \subseteq g$
 $\wedge g \subseteq f$

由以上定义可知, 两个函数 f 和 g 相等, 必须满足下面**两个条件**:

1. $\text{dom } f = \text{dom } g$
2. $\forall x \in \text{dom } f$, 都有 $f(x) = g(x)$

例2 判断函数 $F(x) = (x^2 - 1)/(x + 1)$, $G(x) = x - 1$,
因为 $\text{dom } F = \{x | x \in \mathbb{R} \wedge x \neq -1\}$ 而 $\text{dom } G = \mathbb{R}$ 。 $\text{dom } F \neq \text{dom } G$ 。
两个函数是不相等的。

介绍函数的几类特殊情况

定义4-1.3 对于函数 $f : X \rightarrow Y$, 若 $\text{ran } f = Y$, 即 Y 的每一个元素都是 X 中一个或多个元素的映像, 则称函数 f 为**满射**。

$f : X \rightarrow Y$ 是满射 \Leftrightarrow 对于 $\forall y \in Y, \exists x \in X$ 使得 $y = f(x)$ 成立。
(给出了证明满射的方法)

例 $A = \{a, b, c, d\}, B = \{1, 2, 3\}$, 如果 f 为 A 到 B 的函数, 且 $f(a) = 1$, $f(b) = 1, f(c) = 3, f(d) = 2$,
则 f 是 A 到 B 上的满射。

定义4-1.4 从 X 到 Y 的函数 f , X 中没有两个元素有相同的象, 则称这个函数为**入射**。

$f: X \rightarrow Y$ 是入射 $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
(此处给出了证明入射的方法)。

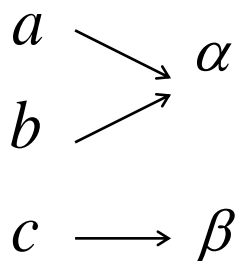
例 函数 $f: \{a, b\} \rightarrow \{2, 4, 6\}, f(a) = 2, f(b) = 6$,
则 f 是入射, 但不是满射。

定义4-1.5 从 X 到 Y 的函数 f , 若 f 既是满射又是入射, 则称函数 f 是**双射**。

例 函数 $f: \{a, b\} \rightarrow \{1, 2\}$, $f(a) = 1, f(b) = 2$, 则 f 为双射。

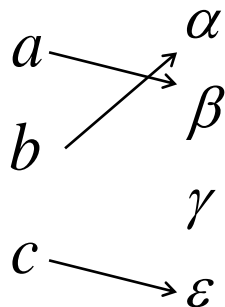
例 在下图表示函数的中, 判断是满射, 入射或双射。

满射



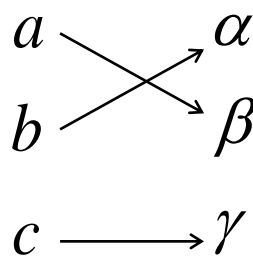
(a)

入射



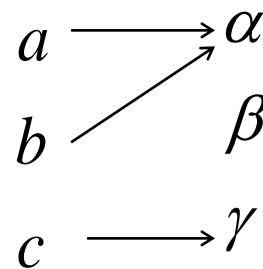
(b)

双射



(c)

非入射、满射



(d)

定理4-1.1 令 X 和 Y 为有限集，若 X 和 Y 的元素个数相同，
即 $|X| = |Y|$ ，则 $f: X \rightarrow Y$ 是入射的，*iff* 它是一个满射。

证明：

1) 设 f 是入射，则 $|X| = |f(x)|$ ，

又因为 $|X| = |Y|$ ，故 $|f(x)| = |Y|$ ，

从 f 定义知 $f(X) \subseteq Y$ ，因为 $|Y|$ 是有限的，故 $f(X) = Y$ ，
所以 f 是满射。

2) 设 f 是满射，由满射定义知 $f(X) = Y$ ，

于是由 $|X| = |Y| = |f(x)|$ ，又因为 $|X| = |f(X)|$ ， $|X|$ 是有限的，
故 f 是一个入射。

注：此定理仅在有限集的情况下才能成立，在无限集上不一定成立。

如： $f: I \rightarrow I, f(x) = 2x$ ，这里显然 f 是一个入射，而不是满射。

4-2 逆函数和复合函数

一、逆函数

给定一个关系 R ，颠倒 R 的所有序偶，得到逆关系 R^c 。

给定一个函数 f ，颠倒 f 的所有序偶，得到的逆关系 f^c 不一定是函数。这是因为：

- 1) 如果 $f: X \rightarrow Y$ 不是满射，则 $\text{ran } f$ 是 Y 的真子集，也就是 $\text{dom } f^c$ 是 Y 的真子集，不符合定义域的要求。
- 2) 如果 $f: X \rightarrow Y$ 不是入射，则可能 $y = f(x_1)$, $y = f(x_2)$ ，逆函数 $f^c(y)$ 的值将有两个，违反函数值唯一性的要求。

为此，对函数求逆需规定一些条件：**既是满射，又是入射。**

定理4-2.1 设 $f:X \rightarrow Y$ 是一双射函数, 则 f^c 是 $Y \rightarrow X$ 的双射函数。

(证明思路: 分两步, (1) 证 f^c 为函数; (2) 证 f^c 为双射)

(1) 设 $f = \{ \langle x, y \rangle \mid x \in X \wedge y \in Y \wedge y = f(x) \}$

$$f^c = \{ \langle y, x \rangle \mid \langle x, y \rangle \in f \}$$

(证 f^c 为函数: 根据函数定义去证明。)

1、因为 f 为函数, 所以 f 为关系, 故 f^c 也是关系。

2、(证明象的存在性, 即证 $\forall y \in Y, \exists x \in X$, 使得 $\langle y, x \rangle \in f^c$ 。)

$\forall y \in Y$ 由于 f 是满射, 故所有的 $y \in Y$ 都有 $\exists x \in X$ 使得 $\langle x, y \rangle \in f$
 $\Leftrightarrow \exists x \in X$ 使得 $\langle y, x \rangle \in f^c$, y 是 f^c 的前域。

3、(证明象的唯一性, 即证 $\forall y \in Y, \exists ! x \in X$, 使得 $\langle y, x \rangle \in f^c$)

(反证法)

假设 $\forall y \in Y, \exists x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ 使得 $f(x_1) = f(x_2)$ 。

由于 f 为入射，故当 $x_1 \neq x_2$ 时，可得 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 与 $f(x_1) = f(x_2)$ 矛盾。

所以 $\forall y \in Y, \exists ! x \in X$ （只有一个 x ），

使得 $\langle x, y \rangle \in f \Leftrightarrow \forall y \in Y, \exists ! x \in X$ ，使得 $\langle y, x \rangle \in f^c$ 。

由1、2、3可知， $f^c: Y \rightarrow X$ 是一个函数。

(2) (证 f^c 是满射又是入射)

1、(证 f^c 为满射，即证 $\forall x \in X, \exists y \in Y$ 使得 $\langle y, x \rangle \in f^c$)，

因为 f 为函数，由 f 的像的存在性可知：

$$\forall x \in X, \exists y \in Y, \text{ 使得 } \langle x, y \rangle \in f$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in X, \exists y \in Y, \text{ 使得 } \langle y, x \rangle \in f^c。$$

故 f^c 为满射。

2、(证 f^c 为入射：即证 $\forall y_1, y_2 \in Y, y_1 \neq y_2, \exists x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$,
使得 $\langle y_1, x_1 \rangle, \langle y_2, x_2 \rangle \in f^c$)

$\forall y_1, y_2 \in Y, y_1 \neq y_2$, 由于 f^c 是函数, 故 $\exists x_1, x_2 \in X$,
使得 $\langle y_1, x_1 \rangle, \langle y_2, x_2 \rangle \in f^c$

$\Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in X$ 使得 $\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle \in f$ 。

又由于 f 是双射可知 $x_1 \neq x_2$ 。

所以, $\forall y_1, y_2 \in Y, y_1 \neq y_2, \exists x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$ 使得
 $\langle y_1, x_1 \rangle, \langle y_2, x_2 \rangle \in f^c$, 故 f^c 为入射。

由1、2可知 f^c 为双射。

#

定义4-2.1 设 $f:X \rightarrow Y$ 是一双射函数，称双射函数 $f^c: Y \rightarrow X$ 为 f 的逆函数，记作 f^{-1} 。

例子： $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b,c\}$, $f: A \rightarrow B$

$$f = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, c \rangle, \langle 3, b \rangle \} \quad f^{-1} = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle c, 2 \rangle, \langle b, 3 \rangle \}$$

若

$$f = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 3, b \rangle \} \quad f^{-1} = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle b, 3 \rangle \}$$

f^{-1} 不是函数

常用的符号

(1) 自然数集(含0)— \mathbf{N}

即非负整数集

(2) 正整数集(不含0)— $\mathbf{N}^*(\mathbf{N}_+)$

(3) 整数集— \mathbf{Z}

(4) 有理数集— \mathbf{Q}

(5) 实数集— \mathbf{R}

二、复合函数

(关系可以复合, 函数是一种关系, 因而函数也可复合。)

➤ 复合关系

- ✓ 定义(3-7.1): 设 R_1 是A到B的关系, R_2 是B到C的关系, 则 $R_1 \circ R_2$ 是A到C的复合关系, 定义如下:
- ✓ $R_1 \circ R_2 = \{ \langle a, c \rangle \mid (\exists b) (a \in A \wedge c \in C \wedge b \in B \wedge \langle a, b \rangle \in R_1 \wedge \langle b, c \rangle \in R_2) \}$

定义4-2.2 设函数 $f: X \rightarrow Y, g: W \rightarrow Z$, 若 $f(X) \subseteq W$, 则 $g \circ f = \{ \langle x, z \rangle \mid x \in X \wedge z \in Z \wedge (\exists y)(y \in Y \wedge y = f(x) \wedge z = g(y)) \}$ 称函数 g 在 f 的左边可复合。否则, g 在 f 的左边不可复合。

注:

- 1、 $g \circ f(x) = g(f(x))$ 。
- 2、若 $\text{ran } f \subseteq W$ 这个条件不成立, 则定义 $g \circ f$ 为空

定理4-2.2 两个函数的复合是一个函数。

即证: $f: X \rightarrow Y$, $g: W \rightarrow Z$ 为左复合, 则 $g \circ f$ 是一个函数

(证明思路: 利用函数的定义直接证明)

证明 设 $g: W \rightarrow Z, f: X \rightarrow Y$ 为左复合, 即 $f(X) \subseteq W$ 。

a) 对于任意 $x \in X$, 因为 f 为函数, 故必有唯一的序偶 $\langle x, y \rangle$ 使 $y = f(x)$ 成立, 而 $f(x) \in f(X)$ 即 $\underline{f(x) \in W}$, 又因为 g 是函数, 故必有唯一序偶 $\langle y, z \rangle$ 使 $z = g(y)$ 成立, 根据复合定义, $\langle x, z \rangle \in g \circ f$, 即 X 中每个 x 对应 Z 中某个 z 。

b) 假定 $g \circ f$ 中包含序偶 $\langle x, z_1 \rangle$ 和 $\langle x, z_2 \rangle$ 且 $z_1 \neq z_2$, 这样在 Y 中必存在 y_1 和 y_2 , 使得在 f 中有 $\langle x, y_1 \rangle$ 和 $\langle x, y_2 \rangle$ 在 g 中有 $\langle y_1, z_1 \rangle$ 和 $\langle y_2, z_2 \rangle$ 。因为 f 是一个函数, 故 $y_1 = y_2$ 。于是 g 中有 $\langle y, z_1 \rangle$ 和 $\langle y, z_2 \rangle$, 但 g 是一个函数, 故 $z_1 = z_2$, 即每个 $x \in X$ 只能有唯一的 $\langle x, z \rangle \in g \circ f$ 。

由 a), b) 可知 $g \circ f$ 是一个函数。



复合的结果还可以复合，因此函数可以多次复合。

例 $f:R \rightarrow R, g:R \rightarrow R, h:R \rightarrow R, f(x)=x+2, g(x)=x-2, h(x)=3x$

求: $g \circ f, h \circ (g \circ f)$

解: $g \circ f = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in R \}$ $h \circ (g \circ f) = \{ \langle x, 3x \rangle \mid x \in R \}$

$$g \circ f = g(f(x)) = g(x+2) = x+2-2 = x$$

$$h \circ (g \circ f) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = h(g(x+2)) = h(x+2-2) = 3x$$

由于复合关系满足可结合性，故复合函数也满足可结合性。

一般地，有 $h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g = h \circ f \circ g$ 。

定理4-2.3 令 $g \circ f$ 是一个复合函数：

a) 若 g 和 f 是满射，则 $g \circ f$ 是满射的。

b) 若 g 和 f 是入射，则 $g \circ f$ 是入射的。

c) 若 g 和 f 是双射，则 $g \circ f$ 是双射的。

(证明思路：利用满射、入射和双射的定义直接证明)

证明

a) $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$ 则 $g \circ f: X \rightarrow Z$, 因为 g 是满射的。

故对于 $\forall z \in Z, \exists y \in Y$ 使得 $g(y) = z$ 。

又因为 f 是满射的, 故对于上述 $y \in Y, \exists x \in X$, 使得 $f(x) = y$ 。

因此, $\forall z \in Z, \exists x \in X$, 使得 $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ 。

所以 $g \circ f$ 是满射的。

b) 因为 f 为入射, 所以 $\forall x_1, x_2 \in X$, 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 有 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 。

又因为 g 是入射, 所以当 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 时,

有 $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ 。

即: $\forall x_1, x_2 \in X$, 且 $x_1 \neq x_2$ 时, 有 $g \circ f(x_1) \neq g \circ f(x_2)$ 。

所以 $g \circ f$ 是入射的。

c) 由 a)、b) 立即可得。

#

离散数学0412



微信扫码签到

两种常用的函数

定义4-2.3 函数 $f:X \rightarrow Y$ 叫做**常函数**，如果存在 $y_0 \in Y$ ，对于每个 $x \in X$ 都有 $f(x) = y_0$ ，即 $f(X) = \{y_0\}$ 。

定义4-2.4 如果 $I_X = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in X \}$ ，则称函数 $I_X: X \rightarrow X$ 为**恒等函数**。

函数与恒等函数的复合

定理4-2.4 设函数 $f: X \rightarrow Y$, 则 $f = f \circ I_X = I_Y \circ f$ 。

(证明思路：证明定义域相同，对应关系相同。)

证明： 1) 因为 $f: X \rightarrow Y$, $I_X: X \rightarrow X$,

故 $f \circ I_X: X \rightarrow Y$, 所以 $\text{dom } f = \text{dom } f \circ I_X = X$ 。

2) 又因为 $\forall x \in X, \exists y \in Y$ 使得 $y = f(x)$,

且 $f \circ I_X(x) = f(I_X(x)) = f(x) = y$ 。 所以 $f = f \circ I_X$ 。

同理可证 $f = I_Y \circ f$ 。

#

函数与自身逆函数的复合

定理4-2.5 如果函数 $f:X \rightarrow Y$ 有逆函数 $f^{-1}:Y \rightarrow X$, 则

$$f^{-1} \circ f = I_X , \quad f \circ f^{-1} = I_Y .$$

(证明思路: 与定理4-2.4相同, 请做练习)

证明:

因为 $f:X \rightarrow Y, f^{-1}:Y \rightarrow X$ 。

故 $f^{-1} \circ f: X \rightarrow X$ 。所以 $\text{dom } f^{-1} \circ f = \text{dom } I_X = X$ 。

又因为 $\forall x \in X, \exists y \in Y$ 使得 $y = f(x)$ 且 $f^{-1}(y) = x$ 。

故 $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x = I_X(x)$ 。

所以 $f^{-1} \circ f = I_X$ 。

同理可证 $f \circ f^{-1} = I_Y$ 。

#

逆函数的逆函数

定理4-2.6 若 $f: X \rightarrow Y$ 是双射函数, 则 $(f^{-1})^{-1} = f$ 。

(证明思路: 利用关系性质证明, 函数相同的定义)

证明: 因为 $f: X \rightarrow Y$ 是双射, 由定理4-2.1知 f^{-1} 是双射,
再由定理4-2.1可知 $(f^{-1})^{-1}$ 也是双射, 且 $(f^{-1})^{-1} = (f^{-1})^c = (f^c)^c$ 。
由逆关系性质知 $(f^c)^c = f$ 。
所以 $(f^{-1})^{-1} = f$ 。

复合函数的逆函数

定理4-2.7 若 $f:X\rightarrow Y$, $g:Y\rightarrow Z$ 均为双射函数, 则 $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$ 。

证明: 因为 f, g 为双射, 由定理4-2.3知 $g\circ f$ 是双射。

由逆函数定义可知: $f^{-1}=f^c, g^{-1}=g^c, (g\circ f)^{-1}=(g\circ f)^c$ 。

再由复合关系逆的性质知: $(g\circ f)^c=f^c\circ g^c$ 。

所以 $(g\circ f)^{-1}=(g\circ f)^c = f^c\circ g^c=f^{-1}\circ g^{-1}$ 。

#

4-4 基数的概念

为了比较两个集合“大小”，引入后继集的概念。

定义4-4.1 设A是任意集合，A的后继集定义为集合：

$$A^+ = A \cup \{A\}.$$

若 $A = \emptyset$ ，则 \emptyset 的后继集依次为：

$$\emptyset, \emptyset \cup \{\emptyset\}, \emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{\emptyset \cup \{\emptyset\}\}, \emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{\emptyset \cup \{\emptyset\}\} \cup \{\emptyset \cup \{\emptyset\} \cup \{\emptyset \cup \{\emptyset\}\}\}, \dots$$

也即： $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots$

若命名 \emptyset 为0，则 $0^+ = 1$ ，

$$1^+ = 2,$$

$$2^+ = 3, \dots$$

G.Peano公理 自然数 N 是如下集合：

- (1) $0 \in N$ (其中 $0 = \emptyset$),
- (2) 如果 $n \in N$, 那么 $n^+ \in N$;
- (3) 如果一个子集 $S \subseteq N$ 具有性质:
 - a. $0 \in S$;
 - b. 如果 $n \in S$, 有 $n^+ \in S$, 则 $S = N$ 。

注：

1、上述自然数定义称为归纳定义。

其中(1)为基础, (2)为归纳, (3)为极小性(指明了自然数系统是满足公理(1)和(2)的最小集合)。

2、从 N 的定义可见, 任意一个自然数可看作是一个集合的名, 例如 $3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ 。

定义4-4.3 设 A, B 是集合，如果存在着从 A 到 B 的双射函数，就称 A 和 B 是**等势**的，记作 **$A \sim B$** 。

注：此定义给出了证明 **$A \sim B$** 的一种方法。

例：设 R 为实数集合， $S = \{x | x \in R \wedge 0 < x < 1\}$ 。
证明： **$R \sim S$** 。

(0,1)区间

} (后面会用到)

证明：令 **$f: R \rightarrow S$** ， **$f(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} x + \frac{1}{2} (-\infty < x < \infty)$** 。

$$\text{因为 } -\frac{\pi}{2} < \operatorname{tg}^{-1} x < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{所以 } -\frac{1}{2} < \frac{1}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} x < \frac{1}{2}$$

$$\text{所以 } 0 < \frac{1}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} x + \frac{1}{2} < 1$$

显然 **$f: R \rightarrow S$** 是一个双射函数。故 **$R \sim S$** 。

#

等势的性质

定理4-4.1 在两个集合上等势关系是一个等价关系。

证明：设 S 为集合族。

1)对于 $\forall A \in S$ ，可作恒等函数 $I_A : A \rightarrow A, I_A(x) = x$ 。显然 $I_A : A \rightarrow A$ 为一个双射函数。故 $A \sim A$ 。即等势关系为**自反关系**。

2)对于 $\forall A, B \in S$ ，

如果 $A \sim B$ ，那么存在双射函数 $f : A \rightarrow B$ 。由定理4-2.1可知

$f^{-1} : B \rightarrow A$ 存在，且为双射函数，故 $B \sim A$ ，即等势关系为**对称关系**。

3)对于 $\forall A, B, C \in S$ ，如果 $A \sim B, B \sim C$ 那么存在 $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ 均为双射函数。由定理4-2.3可知 $g \circ f : A \rightarrow C$ 为双射函数，故 $A \sim C$ ，即等势关系为一个**传递关系**。

由(1)、(2)、(3)可知集合族上的等势关系是一个等价关系。 #

下面利用等势概念来定义有限集与无限集。

定义4-4.4 如果存在一从集合 $\{0, 1, \dots, n-1\}$ 到集合 A 的**双射函数**，则称**集合 A 是有限的**；否则集合 A 是**无限的**。

注： $\{0,1,2, \dots, n-1\} = N_n$ 称为 N 的初始段， N_n 可用于证明集合 N 为有限集。如果 $A \sim N_n$ ，那么集合 A 的“大小”为 n 。

定理4-4.2 自然数集 N 是无限的。

(证明思路：证明 N_n 到 N 不存在双射)

证明： 设 $\forall n \in N$ ， f 是任意的从 N_n 到 N 的函数。

设 $k = 1 + \max\{f(0), f(1), \dots, f(n-1)\}$ 。

那么 $k \in N$ ，但对每一个 $x \in N_n$ ，有 $f(x) \neq k$ 。

因而 $f: N_n \rightarrow N$ 不是满射函数，即 f 也不是双射函数。

由于 n 和 f 均为任意的，故 N 是无限的。

#

集合的基数

定义4-4.5 对于集合A来说, 称与A等势的那个唯一的自然数为A的**基数**, 记作 $K[A]$ (或 \overline{A} 、 $|A|$)。

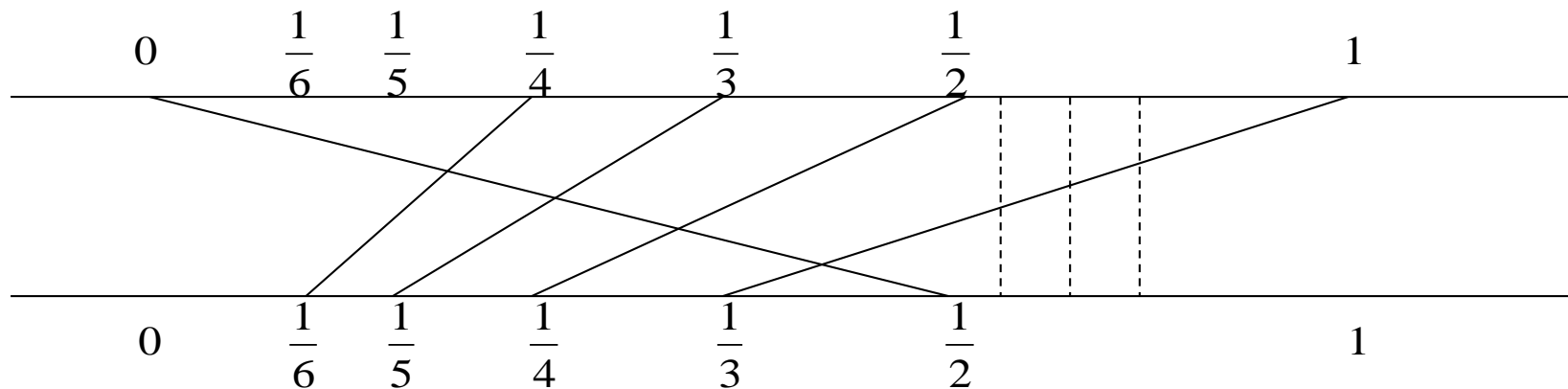
两个集合的基数相等, 也即两者**等势**。

例 **证明区间 $[0,1]$ 与 $(0,1)$ 基数相同。**

证明： 设 $A = \left\{ 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}, A \subseteq [0,1]$

定义 $f: [0,1] \rightarrow (0,1)$,
且
$$\begin{cases} f(0) = \frac{1}{2} \\ f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+2}, n \geq 1 \\ f(x) = x, x \in [0,1] - A \end{cases}$$

显然 f 是 $[0,1]$ 到 $(0,1)$ 上的双射函数。（如下图所示）。 #



4-5 可数集与不可数集

- 由定理4-4.2知 N 是无限集，但是并非所有无限集都可以与 N 等势。
- 故无限集合之间也是有大小的。我们通过寻找新的“标准”去定义无限集的基数。
- 本节重点讨论可数集与不可数集及其性质。

$$1.01^{365} = 37.8 \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} 1.01^n = \infty$$

$$0.99^{365} = 0.03 \qquad \lim_{n \rightarrow \infty} 0.99^n = 0$$

4-5 可数集与不可数集

阿列夫零: 首先我们选取 N 为“标准集合”，记 $K[N] = \aleph_0$ 。
(读 阿列夫零)

定义4-5.1 与自然数集合等势的任意集合称为**可数的**，可数集合的基数为 \aleph_0 。

例 $A = \{1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots\}$, $B = \{1, 8, 27, 64, \dots, n^3, \dots\}$
 $C = \{2, 5, 10, 17, \dots, n^2+1, \dots\}$, $D = \{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$

均为可数集，且 $K[A] = K[B] = K[C] = K[D] = \aleph_0$ 。

注：有限集和可数集统称为**至多可数集**。

定理4-5.1 A 为可数集的充分必要条件是 A 可以排列
 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ 的形式。

证明：如果 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ ，那么存在 $f: A \rightarrow N$ 且

$$f(a_n) = n-1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

f 为双射函数。故 $A \sim N$ ，即 A 为可数集。

反之，如果 A 可数，那么 $A \sim N$ ，则存在双射函数

$$f: N \rightarrow A, \quad \text{令 } f(n) = a_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

故 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ 。

#

注：此定理可以作为 A 是可数集的一个等价定义，也是证明 A 可数的一个实用方法。

定理4-5.2 任一无限集必含有可数子集。

证明：设 A 为无限集合，从 A 中取出一个元素 a_1 ，因为 A 是无限的，它不因取出 a_1 而耗尽，所以从 $A-\{a_1\}$ 中可取元素 a_2 ，
则 $A-\{a_1,a_2\}$ 也是非空集，所以又可取一元素 a_3 ，如此继续下去，就得到 A 的可数子集。 #

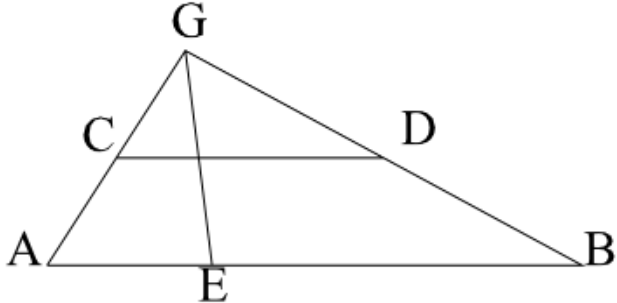
定理4-5.3 任一无限集必与其某一个真子集等势。

证明：设 M 为无限集，有可数子集 $A=\{a_1,a_2, ..., a_n, ...\}$ ，且 $A \subseteq M$ 。
设 $M-A = B$ ，定义集合 M 到自身的映射， $f: M \rightarrow M-\{a_1\}$ ，

使得 $\left\{ \begin{aligned} f(x) &= a_{n+1} (x = a_n, n = 1, 2, \dots), \\ &\text{且对任一 } x \in B, f(x) = x (x \in B) \end{aligned} \right.$

显然

证法2：线段 AB ，其上有线段 CD ，则 AB 与 CD 上所有的点可做成一一对应。即 $AB \sim CD$



定理4-5.4 可数集的任何无限子集都是可数的。

证明：设 A 是可数集合，则 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ ， $B \subseteq A$ 为一无限子集，将 A 中的元素从 a_1 开始，向后检查，不断地删去不在 B 中的元素，则得到新的一列 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}, \dots$ ，

故 $B = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}, \dots\}$ ，它与自然数一一对应，即 B 是可数的。
#

注：从定理4-5.2和4-5.4可知：可数集是最小的无限集。

定理4-5.5 可数个，两两不相交的可数集合的并集，仍然是一可数集。

证明：（用排队的方法证明）

设可数个可数集分别表示为：

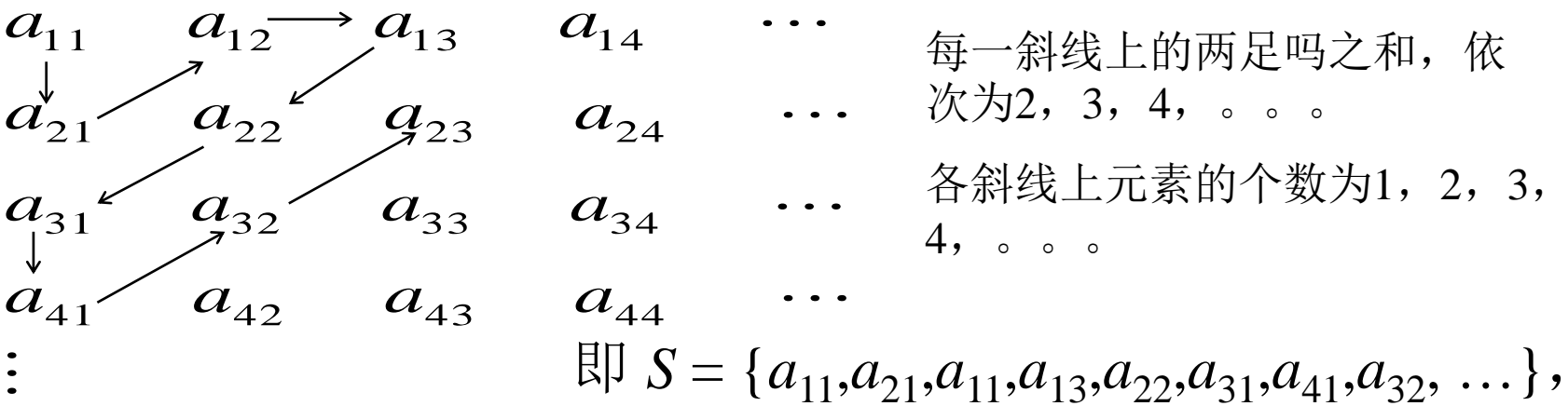
$$S_1 = \{a_{11},a_{12},a_{13}, \ldots,a_{1n}, \ldots\}$$

$$S_2 = \{a_{21},a_{22},a_{23}, \ldots,a_{2n},\ldots\}$$

$$S_3 = \{a_{31},a_{32},a_{33}, \ldots,a_{3n},\ldots\}$$

..... ∞

令 $S=S_1 \cup S_2 \cup \ldots = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k$ ，对 S 的元素作如下排列：



所以 S 是可数集。 #

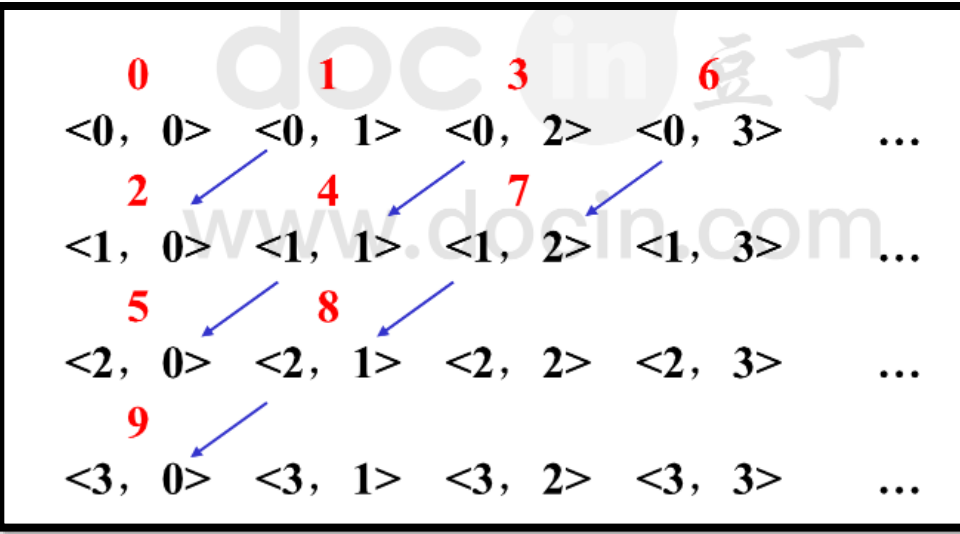
注:

- 1、定理4-5.5中 S 中的元素的排列方法是不唯一的。
- 2、利用定理4-5.4和定理4-5.5可以证明：可数个可数集的并是可数的。

定理4-5.6： $N \times N$ 是可数集。

证明:

令 $S_1 = \{ \langle 0,0 \rangle, \langle 0,1 \rangle, \langle 0,2 \rangle, \langle 0,3 \rangle, \dots \}$
 $S_2 = \{ \langle 1,0 \rangle, \langle 1,1 \rangle, \langle 1,2 \rangle, \langle 1,3 \rangle, \dots \}$
 $S_3 = \{ \langle 2,0 \rangle, \langle 2,1 \rangle, \langle 2,2 \rangle, \langle 2,3 \rangle, \dots \}$
 $\dots\dots\dots$



则 $N \times N = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i$ 。由定理4-5.5可知 $N \times N$ 是可数集。

注：教材上给出的证明法中，直接给出了 $f: N \rightarrow N \times N$ 的一个双射函数。这种方法具有一定难度。

定理4-5.7 有理数集 Q 为可数集。（用排队法证明）

※有理数是整数（正整数、0、负整数）和分数的统称

证明：一切有理数均呈 $\pm n/m (n, m \in N, m \neq 0)$ 。现将所有 $\pm n/m$ 按下列次序排列：

- （1）正分数按其分子、分母之和的大小顺序排列：从小到大。
- （2）正分数的分子、分母之和相同者按分子大小顺序排列：从大到小。
- （3）将0放在首位，与正分数具有相同形式的负分数排于正分数之后。按照上述规则可得：

0, $1/1$, $-1/1$, $2/1$, $-2/1$, $1/2$, $-1/2$, $3/1$, $-3/1$, $2/2$, $-2/2$, $1/3$, $-1/3$, ...

故所有呈 $\pm n/m$ 状的数所组成的集合为可数集，而 Q 为其无限子集，由定理4-5.4知 Q 为可数集。 #

并非所有的无限集均为可数集。且看下回分解。

定理4-5.7 有理数集 Q 为可数集。（教科书）

※两个数的公因数只有1的两个非零自然数,叫做互质数

因为 $N \times N$ 是可数的, S 是 $N \times N$ 的无限子集,
根据定理4-5.4可知 S 是可数的



证明: $N \times N$ 是可数集, $S \subseteq N \times N$

$S = \{ \langle m, n \rangle \mid m, n \in N \text{ 且 } m, n \text{ 互质} \}$, S 是可数的。

令 $g: S \rightarrow Q_+$, 即 $g: \langle m, n \rangle \rightarrow m/n$ (m, n 互质),

因为 g 是双射的, 故 Q_+ 是可数集,

因为 $Q_+ \sim Q_-$, 所以 Q_- 是可数集。

又因为 $Q = Q_+ \cup \{0\} \cup Q_-$, 所以 Q 是可数集。

定理4-5.8 实数集 R 是不可数的。

证明 $(0,1)$ 为不可数集。（前面证明过跟 R 等势）

设 $S = \{x | x \in R \wedge 0 < x < 1\}$ ，假设 S 是可数的，则 S 必可表示为：

$S = \{S_1, S_2, \dots\}$ ，其中 $S_i (i=1, 2, \dots)$ 是 $(0,1)$ 间的任一实数。

设 $S_i = 0.y_1y_2y_3\dots$ ，其中 $y_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

（注：0.2和0.123 可分别记为0.1999... 和 0.122999...）

（规定，所有的有限小数都写成9为循环节的循环小数）

#

定理4-5.8 实数集 \mathbf{R} 是不可数的。

设 $S_1 = 0.\overset{\circ}{a_{11}}a_{12}a_{13}\dots a_{1n}\dots$

$S_2 = 0.a_{21}\overset{\circ}{a_{22}}a_{23}\dots a_{2n}\dots$

$S_3 = 0.a_{31}a_{32}\overset{\circ}{a_{33}}\dots a_{3n}\dots$

..... $\overset{\circ}{}$

$S_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots \overset{\circ}{a_{nn}}\dots$

构造一个 S 内的实数 $r = 0.b_1b_2b_3\dots$, 其中

$$b_j = \begin{cases} 1 & a_{jj} \neq 1 \\ 2 & a_{jj} = 1 \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots$$

那么, r 与 S_1 在位子1不同, 与 S_2 在位置2不同,..., 等等。这样, r 与所有实数 $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ 不同。

因为 r 与 $S_i (i=1, 2, \dots)$ 的小数点后的第 $i (i=1, 2, \dots)$ 位数不相等。这证明了 $r \notin S$, 产生矛盾, 因而 S 是不可数的。

定理4-5.8 实数集 R 是不可数的。

证明：设 $S = \{x | x \in R \wedge 0 < x < 1\}$ ，因为 $S \sim R$ （已经证明）。
因为 S 是不可数集，则 R 也是不可数集。

记 $(0,1)$ 的基数为 \aleph ，如果 $A \sim (0,1)$ ，那么 $K[A] = \aleph$ 。

\aleph 也称作连续统的势。

4-6 基数的比较

为了证明两个集合的基数相等，我们必须构造两个集合之间的双射函数，这常常是非常困难的工作。本节将介绍证明基数相等的一个较为简单的方法，首先说明基数是如何比较大小的。

定义（4-6.1） 若从集合 A 到集合 B 存在一个入射，则称 A 的基数不大于 B 的基数，记作 $K[A] \leq K[B]$ 。若从 A 到 B 存在一个入射，但不存在双射，则称 A 的基数小于 B 的基数，记作 $K[A] < K[B]$ 。

定理4-6.1（Zermelo定理或称三岐性定理）

令 A 和 B 是任意集合，则以下三条中恰有一条成立。

$$a) K[A] < K[B] \quad b) K[A] > K[B] \quad c) K[A] = K[B]$$

定理4-6.2（Cantor-Schroder-Bernstein定理）

设 A 和 B 是集合，如果 $K[A] \leq K[B]$ ， $K[B] \leq K[A]$ ，

则 $K[A] = K[B]$ 。

定理4-6.2告诉我们：

- 若存在从 A 到 B 和 B 到 A 的入射函数，则存在从 A 到 B 的双射函数。
- 它为证明两个集合具有相同的基提供了有效方法。
- 这是因为构造两个入射函数比构造一个双射函数要容易得多。

例 证明 $[0,1]$ 与 $(0,1)$ 有相同的基数。

证明：作入射函数：

$$f:(0,1) \rightarrow [0,1], \quad f(x) = x \quad (\text{恒等函数})$$

$$g:[0,1] \rightarrow (0,1), \quad g(x) = x/2 + 1/4$$

注：此两个函数的选取方法不唯一。如 $f(x) = x/2$, $g(x) = x/3 + 1/3$ 。

故： $[0,1]$ 与 $(0,1)$ 具有相同的基数。

例 设 $A = \mathbb{N}$, $B = (0,1)$, $K[A] = \aleph_0$, $K[B] = \aleph$ 。求证： $K[A \times B] = \aleph$

证明：作 $A \times B$ 到正实数的入射函数 $f:A \times B \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f(n,x) = n+x$

故： $K[A \times B] \leq K[\mathbb{R}_+] = \aleph$ 。

作入射函数 $g:(0,1) \rightarrow A \times B$, $g(x) = \langle 0, x \rangle$

故 $\aleph \leq K[A \times B]$, 因此 $K[A \times B] = \aleph$ 。

定理4-6.3 设 A 是有限集合, 则 $K[A] < \aleph_0 < \aleph$

证明: 设 $K[A] = n$, $N_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, 则 $A \sim N_n$,

定义入射函数 $f: N_n \rightarrow N$, $f(x) = x$

故 $K[A] \leq K[N] = \aleph_0$,

又因为在证明 N 是无限集中已证明 N 与 A 之间不存在双射函数。所以 $K[A] \neq K[N]$, 即 $K[A] < \aleph_0$ 。

再定义入射函数: $g: N \rightarrow [0, 1]$, $g(n) = 1/(n+1)$, g 是入射函数

故 $\aleph_0 \leq \aleph$, $[0, 1]$ 跟 $(0, 1)$ 的基数相同

又因为 N 为可数集, $[0, 1]$ 为不可数集, 故 N 与 $[0, 1]$ 之间不存在双射函数, 所以 $\aleph_0 < \aleph$ 。

#

定理4-6.4 如果 A 是无限集, 那么 $\aleph_0 \leq K[A]$

证明: 因为 A 为无限集, 由定理4-5.2知 A 必含有一个可数无限子集 B , 作入射函数 $f: B \rightarrow A, f(x) = x$ 。故 $K[B] \leq K[A]$, 又因为 $K[B] = \aleph_0$, 所以 $\aleph_0 \leq K[A]$ 。 #

注:

- 1、定理4-6.4说明 \aleph_0 是无限集中最小的基数。
- 2、如果 A 为无限集, 那么 $\aleph_0 \leq K[A], \aleph_0 < \aleph$, 德国数学家康托尔认为 \aleph_0 与 \aleph 之间没有其他基数存在, 但是到目前为止还没有人能够证明它, 这就是著名的连续统假设。
- 3、康托尔证明了: 没有最大的基数和没有最大的集合。

定理4-6.5(Cantor定理) 设 M 是一个集合, $T = \text{幂集}\rho(M)$

则 $K[M] < K[T]$

证明: (a) (首先证明) $K[M] \leq K[T]$

作入射函数 $f: M \rightarrow \rho(M)$, $f(a) = \{a\} \in \rho(M)$,

故 $K[M] \leq K[T]$ 。

(b) (其次证明 $K[M] \neq K[T]$, 用反证法证明)

假设 $K[M] = K[T]$, 则必存在双射函数 $\varphi: M \rightarrow T$, 即对于 $\forall m \in M$,

$\exists \varphi(m) \in T$ 使得 m 对应 $\varphi(m)$ ($m \rightarrow \varphi(m)$)。若 $m \in \varphi(m)$ 称 m 为 M 的内部元素, 若 $m \notin \varphi(m)$ 称 m 为 M 的外部元素。设 $S = \{x | x \in M, x \notin \varphi(x)\}$, 则 S 为 M 的外部元素集合, 则有 $S \subseteq M$, 故 $S \in T$ (根据幂集的定义)。

因为 φ 是双射函数, 故必有一个元素 $b \in M$, 使得 $\varphi(b) = S$ ($S \in T$)。

(1) 如果 $b \in S$ 那么 $b \notin \varphi(b)$, 由 $\varphi(b) = S$ 可得 $b \in S = b \in \varphi(b)$, 矛盾。

(2) 如果 $b \notin S$ 那么 $b \in \varphi(b)$, 由 $\varphi(b) = S$ 可得 $b \notin S = b \notin \varphi(b)$, 矛盾。

故 $K[M] \neq K[T]$, 由(a)、(b)可知: $K[M] < K[T]$ 。

