

苏州大学 概率论与数理统计 期中试卷 2023.4

一 选择填空题 (每题 3 分, 共 30 分)

1. 下列事件不相互独立的是()

- A. 在一年中随机选择一个月份, “结果是偶数月份”与“结果在上半年的月份”
- B. 从52张扑克牌(去掉王牌)里随机抽取一张, “取出一张A”与“取出一张红桃”
- C. 将一枚均匀硬币抛掷三次, “第一次抛出的是反面”与“第二次和第三次抛出的是正面”
- D. 抛掷两颗均匀骰子, “至少有一颗点数为6”与“两颗点数之和为7”

2. 设随机事件 A, B , 且 $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.7$, 则 $P(A|B)$ 不可能是()

- A. 0.1
- B. 0.3
- C. 0.5
- D. 0.7

3. 设 X 服从参数是 λ 的泊松分布, 则 $P\{X = 1|1 \leq X \leq 2\} = ()$

- A. $\frac{1}{1+\lambda}$
- B. $\frac{\lambda}{2+\lambda}$
- C. $\frac{2}{2+\lambda}$
- D. $\frac{\lambda}{1+\lambda}$

4. 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数, 则 $P\{|X - \mu| \leq k\sigma\} = ()$ ($k > 0$)

- A. $\Phi(k)$
- B. $1 - \Phi(k)$
- C. $2\Phi(k)$
- D. $2\Phi(k) - 1$

5. 某装置中有黑白两种颜色的球, 其比例可以调整设定, 每次从中随机取出1球, 观察颜色后放回, 直到取出两个白球或两个黑球时为止, X 表示取球的次数, 则 $E(X)$ 的最大值为()

- A. 2
- B. $12/5$
- C. $5/2$
- D. 3

6. 设 A, B 是随机事件, 且 $P(A) = 1/3, P(B|\bar{A}) = 1/4$, 则 $P(A \cup B) =$ _____.

7. 设 A, B, C 是随机事件, 其中 A, B 是样本空间的一个划分, 即 A, B 互不相容且 $A \cup B$ 为样本空间, 已知 $P(A)/P(B) = 2/1, P(C|A)/P(C|B) = 4/3$, 则 $P(A|C) =$ _____.

8. 设随机变量 $X \sim U(0,1)$, 则 $P\{\text{Max}(X, 1 - X) \leq 2/3\} =$ _____.

9. 设离散型随机变量 X 的所有可能取值为 $0, 1, 2$, 若 $P\{X = 1\} = 1/4$, 则 $E(|X - 1|) =$ _____.

10. 设随机变量 X 的分布函数是 $F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt$, 则 $E(X^2) =$ _____.

二 计算题

11. 在一次游戏中抛掷两枚均匀硬币和一颗均匀骰子, 参与者赢得的金额 X 为骰子向上那面的点数与正面向上的硬币数目的乘积

$H_i = \{\text{第}i\text{枚硬币正面朝上}\}, i = 1, 2, B_j = \{\text{骰子向上那面的点数为}j\}, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

(1) 用 H_i, B_j 表示随机事件 $\{X = 6\}$ (2 分)

(2) 求 $P\{X = 6\}$ (4 分)

(3) 设 $F(x)$ 是 X 的分布函数, 求 $F(1)$ (4 分)

12. 设 A, B 是随机事件, $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$

(1) 若随机事件 A, B 有包含关系, 且 $P(A) = 2P(B)$, 求 $P(A \cap B | A \cup B)$ (4 分)

(2) 若随机事件 A, B 互不相容, 且 $P(A) = 2P(B)$, 求 $P(A | A \cup B)$ (4 分)

(3) 若随机事件 A, B 相互独立, 且 $P(A) = 2P(B) = 0.6$, 求 $P(A | \bar{A} \cup \bar{B})$ (4 分)

13. 老师在10个题目中随机选择3题进行考试, 一位学生只复习了10个题目中的8个, 假设学生只能答对复习过的题目

(1) 通过考试要求至少答对两题, 求这位学生通过考试的概率 (4 分)

(2) 要保证至少有50%的概率得到满分, 那么这位学生至少需要复习几题? (4 分)

(3) 这位学生未答对的题目个数是 X , 求 X 的数学期望 (4 分)

14. 某事件发生的概率 X 是一个随机变量, 概率密度函数为 $f(x) = \begin{cases} 6x(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(1) 求 X 的分布函数 (4 分)

(2) 求 X 的数学期望 (4 分)

(3) 求事件不发生的概率 $Y = 1 - X$ 的概率密度函数 (4 分)

15. 呼气分析仪被警方用来测试司机的血液酒精含量是否超过法定限制, A 表示事件“驾驶员的血液酒精含量超过法定限制”, B 表示事件“呼气分析仪的指示超出上限”, 已知

$$P(B|A) = P(\bar{B}|\bar{A}) = p \quad (1-p \text{表示呼气分析仪的误测率})$$

已知周六晚上约有5%的司机的血液酒精含量超过法定限制

(1) 设 $p = 0.95$, 计算 $P(B)$ (4 分)

(2) 设 $p = 0.95$, 描述并计算 $P(\bar{A}|B)$ (4 分)

(3) 呼气分析仪的误测率 $1-p$ 控制在多少以内能使得测试的准确率 $P(A|B)$ 达到 0.9 (4 分)

16. 随机变量 X 的矩母函数 $M(t) = E(e^{tX})$ 可以用来计算 $E(X^n)$:

$$E(X) = \frac{dM}{dt} \Big|_{t=0}, \quad E(X^2) = \frac{d^2M}{dt^2} \Big|_{t=0}, \dots, \quad E(X^n) = \frac{d^n M}{dt^n} \Big|_{t=0}$$

(1) 设随机变量 X 的分布律: $P\{X=0\} = 1-p, P\{X=1\} = p$, 求 $M(t)$ 及 $E(X^{2023})$ (4 分)

(2) 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布, 求 $M(t)$ 及 $E(X^3)$ (4 分)

(3) 设随机变量 $X \sim N(0,1)$, 求 $M(t)$ 及 $E(X^4)$ (4 分)