第四章复习题

第四章复习题解答

1. （A）对.（（B）和（C）等式的右端应该加C，（D）的右端应该为$f(x)\mathrm{d}x$.

2. （B）错，$f(x)=g(x)+C$.

3. 由$f'(\mathrm{e}^x)=1+x$知$f'(x)=1+\ln x$，$f(x)=\int(1+\ln x)\mathrm{d}x=x\ln x+C$，（C）对.

4. $\int\frac{f(x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\cot xf(x)+\int\cot xf'(x)\mathrm{d}x$，$f'(x)=\cot x$，（B）对.

5. （A）对．$F(x)$必须连续.

6. $\int\frac{2-x^4}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1-x^4+1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int\left(1-x^2+\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=x-\frac{x^3}{2}+\arctan x+C$.

7. $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x^2-2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{3}x}{\sqrt{3x^2-\sqrt{2}^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|\sqrt{3}x+\sqrt{3x^2-2}\right|+C$.

8. $\int\frac{\ln x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x+1}\cdot\ln x+\int\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=-\frac{\ln x}{x+1}+\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$.

9. $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x=2\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-\sqrt{x}^2}}\mathrm{d}\sqrt{x}=\left(\arcsin\sqrt{x}\right)^2+C$.

10. $f(x)=2\mathrm{e}^{2x}$，$\int x\cdot 2\mathrm{e}^{2(1-x^2)}\mathrm{d}x=\int\mathrm{e}^{2(1-x^2)}\mathrm{d}\left(x^2-1\right)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2(1-x^2)}+C$.

11. 令$\ln^2 x+1=t$，则$\int\frac{\ln^3 x\sqrt{1+\ln^2 x}}{x}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int \ln^2 x\sqrt{1+\ln^2 x}\,\mathrm{d}\ln^2 x=\frac{1}{2}\int (t-1)\sqrt{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{5}\left(\ln^2 x+1\right)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}\left(\ln^2 x+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]+C .$$

12. $\int \frac{f'(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=\int f'(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)=f(\ln x)=x^2+C$，故 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}+C$.

13. $\int xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x=x\left(\frac{\ln x}{x}\right)'-\frac{\ln x}{x}+C=\frac{1}{x}-\frac{2\ln x}{x}+C$.

14. $\frac{4}{1-x^2}f(x)=2f(x)f'(x)$， $f'(x)=\frac{4}{1-x^2}$，

$$f(x)=\int \frac{2}{1-x^2}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)\mathrm{d}x=\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C .$$

15. $y=\int \sec^6 x\mathrm{d}x=\int\left(1+\tan^2 x\right)^2\mathrm{d}\tan x=\frac{1}{5}\tan^5 x+\frac{2}{3}\tan^3 x+\tan x+C$.

因 $y(0)=1$，故 $C=1$． $y=\frac{1}{5}\tan^5 x+\frac{2}{3}\tan^3 x+\tan x+1$.

16. $f(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$， $\int x^3 f'(x)\mathrm{d}x=x^3 f(x)-3\int x^2 f(x)\mathrm{d}x$

$$=x^2\cos x-x\sin x-3\left(x^2\frac{\sin x}{x}-2\int x\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right)=x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C .$$

17. $\frac{1}{2}F^2(x)=\frac{1}{2}\int\left(F^2(x)\right)'\mathrm{d}x=\int f(x)F(x)\mathrm{d}x=\int \sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$，

因 $F(0)=1$，故 $F^2(x)=1+x-\frac{1}{2}\sin 2x$，又因为 $F(x)\geq 0$，故

$$F(x)=\sqrt{1+x-\frac{1}{2}\sin 2x}，\quad f(x)=F'(x)=\frac{1-\cos 2x}{2\sqrt{1+x-\frac{1}{2}\sin 2x}}=\frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x-\sin x\cos x}} .$$

18. $f'(x)=ax^2+bx+c$，则 $f'(-1)=f'(5)=0$，可设为 $f'(x)=a(x^2-4x-5)$.

$f(x)=a\int(x^2-4x-5)\mathrm{d}x=a\left(\frac{x^3}{3}-2x^2-5x\right)+C$. 由于 $f(0)=2$， $f(-2)=0$. 就有 $C=2$， $a\left(-\frac{2}{3}\right)+C=0$，故 $a=3$，从而 $f(x)=3x^3-6x^2-15x+2$.

19. （1） $\int y\mathrm{d}x=\int b\sin t\cdot(-a\sin t)\mathrm{d}t=-ab\int\sin^2 t\mathrm{d}t=-\frac{ab}{2}\int(1-\cos 2t)\mathrm{d}t$

$=-\frac{ab}{2}\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)+C$.

（2）令 $y=tx$，代入所给方程得 $x=\frac{1}{t^2(1-t)}$，则 $y=\frac{1}{t(1-t)}$， $\mathrm{d}x=\frac{3t-2}{t^3(1-t)^2}\mathrm{d}t$，故

$\int\frac{\mathrm{d}x}{y^2}=\int\left(3-\frac{2}{t}\right)\mathrm{d}t=3t-2\ln|t|+C=\frac{3y}{x}-2\ln\left|\frac{y}{x}\right|+C$.