高等数学一（上）期中复习题参考答案

一、选择题：

1. C;　2. C;　3. A;　4.C;　5.B;　6.A;　7.D.

二、填空题

1. [1，3]；

2. 2；

3. $y=-\frac{\pi}{4}(x-1)-\frac{\pi^2}{16}$；

4. x=0, y=1

5. 3；

6. $-\frac{\ln 10}{2}$；

7. $-2^9x^3\cos 2x-2^9\cdot 15x^2\sin 2x+2^8\cdot 135x\cos 2x+2^{10}\cdot 45\sin 2x$

8. $-x^2\sec^2 x$

三、解下列各题：

1．求下列函数的极限：

（1）解：$\because \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^3-x+4}=0$ 并且 $\left|\sin(3x^2)\right|\le 1$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} f(x)=0.$$

（2）解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln\left(1+\frac{\cos x-1}{3}\right)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}$

$$=-\frac{1}{6}.$$

（3）解：$\because 1\le\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}\le\frac{(n-2)(n-2)!+(n-1)!+n!}{n!}\to 1,(n\to\infty)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}=1.$$

（4）解：$\because x_1>0,\therefore x_n$ 均为正数，并且

$x_{n+1}=\dfrac{5(1+x_n)}{5+x_n}<\dfrac{5(1+x_n)}{1+x_n}=5$, 则数列 $\{x_n\}$ 有界.

当 $n>2$ 时，$x_{n+1}-x_n=\dfrac{5(1+x_n)}{5+x_n}-\dfrac{5(1+x_{n-1})}{5+x_{n-1}}=\dfrac{20(x_n-x_{n-1})}{(5+x_n)(5+x_{n-1})}$.

因而当 $x_2\ge x_1$ 时，数列 $\{x_n\}$ 单调增加；

当 $x_1>x_2$ 时，数列 $\{x_n\}$ 单调减少.

由单调有界准则数列 $\{x_n\}$ 极限存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a,\therefore a=\dfrac{5(1+a)}{5+a}\therefore a=\sqrt{5}(a=-\sqrt{5}$ 舍去)

$\therefore\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{5}.$

2. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}+x^2}{x^{2n}+1}$ 的连续性，若有间断点要说明其类型.

解：$f(x)=\begin{cases}x^2, & |x|<1;\\ x^{-1}, & |x|>1;\\ 1, & x=1;\\ 0, & x=-1\end{cases}$，

则当 $x\ne\pm1$ 时为初等函数处处连续；点 $x=1$ 为连续点；
点 $x=-1$ 为 第一类跳跃间断点.

3．解：（1） $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\dfrac{\sin t+t\cos t-\sin t}{\cos t}$,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{1}{\cos t},$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}.$$

（2）设 $y=e^{x+y}+x^{\sin x}$，求 y'.

解： $(x^{\sin x})'=x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x}+\cos x\ln x\right)$

等式两边求导得

$$y' = e^{x+y}(1+y') + \left(x^{\sin x}\right)'$$

从而 $y' = \dfrac{e^{x+y} + x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x} + \cos x \ln x\right)}{1-e^{x+y}}$.

4. 解： $f(1^+) = \lim\limits_{x\to 1^+}(ax^2+1) = a+1,$

$f(1^-) = \lim\limits_{x\to 1^-}(-x^2+bx) = b-1,$

由 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续知 $b=a+2.$

$$f_+'(1) = \lim_{x\to 1^+}\frac{ax^2+1-(a+1)}{x-1} = 2a,$$

$$f_-'(1) = \lim_{x\to 1^-}\frac{-x^2+bx-(b-1)}{x-1} = b-2,$$

由 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导知 $b=2a+2.$

则得 $a=0, b=2.$

5. 证明：令 $F(x) = f(x+a) - f(x),$ 则 $F(x)\in C[0,a].$

由于 $F(0)F(a) = [f(a)-f(0)][f(0)-f(a)],$

若 $f(0)=f(a),$ 则取 $\xi = 0, a$ 满足要求.

若 $f(0)\neq f(a),$ 则 $F(0)F(a)<0,$ 由介值定理可知，存在点 $\xi\in(0,a),$ 使

$F(\xi)=0,$ 即 $f(\xi) = f(\xi+a).$

6. 提示：令 $F(x) = e^x f(x)$.

7. 证明： 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 0$，就有 $f(0)=0$， $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = 0$，又因为 $f(1)=0$，由罗尔中值定理，存在 $\xi_1\in(0,1)$，使得 $f'(\xi_1)=0$. 函数 $f'(x)$ 在区间 $[\xi_1,1]$ 也

满足罗尔中值定理，存在$\xi \in (\xi_1, 1)$，使得$f''(\xi) = 0$.

8. 证明：由介值定理，存在$c \in (0,b)$使$f(c) = A$，再由拉格朗日中值定理，存在$\xi \in (0,c)$，使得$f'(\xi)(c-0) = f(c) - f(0)$.

9. 解：$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，即$\sqrt{1-x^2}\,y' = 1$.

两边求导，$(1-x^2)y'' - xy' = 0$.

等式两边求n阶导数得

$$\left[(1-x^2)y^{(n+2)} - 2xny^{(n+1)} - 2\cdot\frac{n(n-1)}{2}y^{(n)}\right] - \left(xy^{(n+1)} + ny^{(n)}\right) = 0$$

整理后可得结论.

10. 证：由于$0 < f(x) < x$和$a_1 > 0$，则$0 < a_{n+1} = f(a_n) < a_n$，即

数列$\{a_n\}$单调递减且有下界，故数列$\{a_n\}$收敛.

令$\lim\limits_{x\to\infty} a_n = t$，由极限保号性得 $t \geq 0$.

又$f(x)$在$[0,+\infty)$内连续，$\lim\limits_{x\to \mathrm{t}} f(x) = f(t)$（$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$），

则$f(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = t$

假若$t > 0$，则$f(t) < t$，矛盾，故$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = t = 0$.