§1.1 随机事件　　§1.2 随机事件的概率

一 选择填空题

1. 设事件A,B互不相容，则（　）

A. $P(A)=1-P(B)$　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(\bar{A}\bar{B})=0$　　D. $P(\bar{A}\cup\bar{B})=1$

2. 电脑主板上有4个温控器，运行过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度t_0，电脑就会降低运行频率，设$T_{(1)}\le T_{(2)}\le T_{(3)}\le T_{(4)}$是4个温控器显示的从低到高的温度值，则事件“电脑降低运行频率”等于（　）

A. $\{T_{(1)}\ge t_0\}$　B. $\{T_{(2)}\ge t_0\}$　C. $\{T_{(3)}\ge t_0\}$　D. $\{T_{(4)}\ge t_0\}$

3. 已知A,B,C是随机事件，用A,B,C表示以下事件：

$\{A,B,C$都不发生$\}=$________________,$\{A,B,C$至少有一件不发生$\}=$________________.

4. 从 1,2,3,4,5,6 中随机取出两个不同的数，则“一个数是另一个数的两倍”的概率是________，“组成的两位数能被 3 整除”的概率是________，“两数之和是偶数”的概率是__________，“两数之积是偶数”的概率是__________.

5. 10名学生中有2名女生和8名男生，将10名学生平分成两组，则2名女生分在不同组的概率是__________.

6. 设 A,B 为两个随机事件，且 $P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$, 则 $P(\bar{A}\cup\bar{B})=$__________.

二 计算题

1. 设 A,B 为两个随机事件，且 $P(A)=0.7$，$P(B)=0.4$，$P(A\bar{B})=0.5$，求 $P(AB),P(\bar{A}B),P(\bar{A}\bar{B}),P(B|A\cup\bar{B})$.

2. 设 A,B 为两个随机事件，且 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.7$，试问分别在什么条件下，$P(AB)$取得最大值和最小值？最大值和最小值各是多少？

3. 在1到1000中任取一个整数，该数的平方的末位数是6的概率是多少？该数不能被3和4整除的概率是多少？

§1.3 条件概率

一 选择填空题

1. 设A, B为两个随机事件，$0 < P(A) < 1$，$0 < P(B) < 1$，如果$P(A|B) = 1$，则（　）

A．$P(A|\bar{B}) = 0$　　　　B．$P(\bar{B}|\bar{A}) = 1$

C．$P(A \cup B) = 0$　　　　D．$P(B|A) = 1$

2. 设 A, B 为两个随机事件，$0 < P(A) < 1$，$0 < P(B) < 1$，

① $P(A \cup B) = P(A) + P(B - A)$　　　　② $P(AB) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B})$

③ $P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(A \cup B)$　　　　④ $P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B|\bar{A})$

其中必定正确的是____________________.

3. 设A, B为两个随机事件，且$P(B) = 0.4$，$P(A \cup B) = 0.7$，则$P(A|\bar{B}) =$__________.

4. 设A, B, C是三个随机事件，且 $P(A) = P(B) = P(C) = 1/4$，$P(AB) = 0, P(AC) = P(BC) = 1/16$，则$A, B, C$恰有一件发生的概率是________________，A, B, C都不发生的概率是________________，A不发生的条件下B, C都发生的概率是______________.

5. 有质地均匀的红、白骰子各一个，六个面上分别有1, 2, 3, 4, 5, 6六个数，随机抛掷红、白骰子各一次，观察向上的那面出现的数字，事件$A =$ {两个骰子的数字之和为8}，$B =$ {红色骰子的数字小于白色骰子的数字}，则 $P(B) =$ ________________，$P(A|B) =$ ________________，$P(B|A) =$________________.

6. 如表所示，手机所用某元件是由三家供应商提供的，根据以往记录数据如表，设所有元件在仓库中均匀混合且无区分标志，随机取一只元件，若取到的是次品，则该次品由第二家供应商提供的概率是__________.

供应商	次品率	提供份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

7. 已知甲盒中有2个白球和1个黑球，乙盒中有1个白球2个黑球，先从甲盒中任取一球放入乙盒，再从乙盒中任取一球，最后从乙盒中取出白球的概率是____________.

二 计算题

1. 抛掷三枚均匀硬币，正面向上记为H，反面向上记为T.

(1)分别写出试验的样本空间Ω，事件$A=\{恰有一枚正面向上\}$，$B=\{至少有一枚反面向上\}$；

(2) 求 $P(A),P(B),P(A|B)$.

2. 10件产品中有2件次品8件正品，从中不放回地任取三次，每次取一个，求

(1)至少取得一件次品的概率；

(2)恰好取得一件次品的概率；

(3)第三次才取得次品的概率；

(4)第二次取得次品的概率.

3. 电脑通过扫描邮件的某些特征来进行垃圾邮件的识别。对收到的邮件进行扫描之前，不妨认为每封邮件是垃圾邮件或普通邮件的概率相等，由以往数据，垃圾邮件含有链接的概率是60%，普通邮件含有链接的概率是20%，如果一封邮件含有链接，那么它是垃圾邮件的概率是多少？

4. 假设在某特定人群中，每100人中有1人患有一种没有症状的特殊疾病。在进行医学检测中，健康的人的检测结果必为阴性，而患病者中也有10%的人检测结果呈阴性，从这个人群中随机选取一人，他的检测结果呈阴性，那么他的确没有患病的概率是多少？

5. 顾客的转化率是指来店顾客中产生消费行为的比率，据“小米之家”的数据显示，其顾客转化率约为20%，在最终购物的顾客中，约有90%会在选购过程中向店员咨询产品，在最终未购物的顾客中，约有30%会向店员咨询产品，求

(1) 来店的顾客向店员咨询产品的概率是多少？

(2) 如果一位来店的顾客向店员咨询产品，他最终会购买产品的概率是多少？

6. 假币和真币外观相同，因为材质密度小，假币的重量比真币轻，有2枚假币和8枚真币混合在一起，先从中随机取出一对硬币，从余下8枚中再随机取出一对硬币

(1) 求第一对与第二对硬币重量相等的概率

(2) 如果第一对与第二对硬币重量相等，这四枚都是真币的概率是多少？

§1.4 随机事件的独立性

一 选择填空题

1. 从$1,2,3,4$中随机取出一个数，$A=\{\text{取到 1 或 2}\}$, $B=\{\text{取到 1 或 3}\}$, $C=\{\text{取到 }m\text{或 }n\}$，如果事件$A$与$C$相互独立，事件$B$与$C$也相互独立，且$A,B,C$都发生的概率是$0$，则$(m,n)=$

A. (2, 3)　　B. (2, 4)　　C. (3, 4)　　D. (1, 4)

2. 设事件A,B,C相互独立，且$P(A)=P(B)=P(C)$，$P(A\cup B\cup C)=7/8$，则 $P(A)=$__________.

3. 设A,B为两个随机事件，且$P(A)=0.6$，$P(B-A)=0.2$，当A,B相互独立时，$P(B)=$__________，当A,B互不相容时，$P(B)=$__________.

4. 设事件A,B相互独立，$P(A)=0.6$, $P(B)=0.3$, 则$P(\bar{A}|A\cup B)=$_________.

5. 盒中有5张卡片，标有数字$1,2,3,4,5$, 从中不放回地随机抽取，每次取一张，直到取出的所有卡片上的数字之和超过4，则恰好取出三张卡片的概率是___________.

6. 三人独立向同一目标各射击一次，击中目标的概率分别是$0.5,0.4,0.3$，则目标被击中的概率是__________，只有一人击中目标的概率是___________.

7. 甲, 乙的投篮命中率为别是$1/3$，$2/5$, 两人进行比赛，轮流投篮，各投一次，从甲先开始，先投中者为胜者，则甲取胜的概率是___________.

二 计算题

1. 设 A,B 是两个随机事件，且$P(A)=0.4$，$P(A\cup B)=0.8$，在以下不同情况下，分别计算$P(B)$，$P(A|B)$

(1) 事件A,B互不相容； (2) 事件A,B有包含关系； (3) 事件A,B相互独立.

2. 甲乙两人比赛围棋，每局比赛甲获胜概率都是0.6，每局比赛的胜负相互独立，采用五局三胜制，求:

(1)甲最终获胜的概率;

(2)已知甲最终获胜，那么甲是以 3：2 获胜的概率;

(3)已知甲最终获胜，那么甲在第一局中获胜的概率

3.在回答选择题时，学生或者知道答案，或者就猜一个，p表示他知道正确答案的概率，则$1-p$表示他猜的概率，假定学生猜中正确答案的概率是$1/m$，此处m就是选择题可选的选项数

(1)该学生回答正确的概率是多少？

(2)在已知他回答正确的条件下，该学生知道正确答案的概率是多少？

(3)一项测验有三个这样的选择题，正确答对两个或以上即可通过，如果该学生仅凭猜测，那么他通过的概率是多少？假设回答每个问题正确与否相互独立

§2.1 一维随机变量与分布函数

§2.2 一维离散型随机变量

一 选择填空题

1. 福利彩票的中奖概率是0.01, 某人购买了100张彩票, 他没有中奖的概率最接近(　　)

A. 30%　　B. 32%　　C. 35%　　D. 37%

2. 向平面区域$D=\{(x,y)\big||X|+|Y|\le 1\}$内随机投3个点，则3个点中恰有2个点落在第一象限内的概率是____________.

3. 设 $X\sim\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$，则 $P\{\sin\frac{\pi X}{2}=0\}=$__________.

4. 设随机变量X的分布函数$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x$，$x\in R$, 则$P\{X^2\ge X\}=$____________.

5. 设随机变量X的分布律：$P\{X=k\}=a(\frac{1}{2})^k$，$k=1,2,\cdots$，则$a=$____________，$P\{X>2\}=$____________.

6. 甲参加象棋比赛，每场比赛获胜概率都是0.6， 如果在五场比赛中失利场数不超过两场即可晋级，则甲晋级的概率是____________.

二 计算题

1. 盒中有2个白球3个黑球，先后从中取3次，每次任取一个球，X表示取得的白球数，在每次取出的球放回盒中和不放回盒中两种情况下，分别求X的分布律。

2. 盒中有2个白球3个黑球，每次从中任取一球，直到取到白球为止，X表示总共取球的次数，在每次取出的球放回盒中和不放回盒中两种情况下，分别求X的分布律。

3. 盒中有2个白球3个黑球，每次从中任取一球，直到取到4次白球为止，X表示总共取球的次数，在每次取出的球放回盒中和不放回盒中两种情况下，求X的分布律。

4. 发出一份问卷，有0.8的几率受调查人马上完成问卷，有0.5的几率第一次没有完成的人在第二次发给他问卷时会完成问卷，如果问卷被发给了 100 个人，求两次都没有完成问卷的人数X的分布律，以及至少有两人两次都没有完成问卷的概率.（利用泊松定理计算）

5. 盒中共有10个球，其中6个白球、3个黑球、1个红球，从中有放回随机取20次，每次取一个球，设X_1，X_2，X_3分别表示取到的白球、黑球、红球的个数，求：

（1）X_1的分布律及$P\{X_1 \geq 1\}$；

（2）$P\{X_1 = k_1, X_2 = k_2, X_3 = k_3\}$ $(k_1, k_2, k_3$是非负整数，且$k_1 + k_2 + k_3 = 20)$.

6. 在独立重复地进行试验时，设每次试验中事件A发生的概率都是p，当事件A首次发生时，已进行的试验次数X的分布称为几何分布,

(1) 求X的分布律及$P\{X为偶数\}$;

(2) 若对任意自然数n和m，都有$P\{X > n + m|X > m\} = P\{X > n\}$, 则称$X$的分布具有无记忆性，证明：离散型随机变量$X$的分布具有无记忆性当且仅当$X$服从几何分布.

§2.3 一维连续型随机变量

一 选择填空题

1. 设$f(x)$，$F(x)$是随机变量X的概率密度函数与分布函数，若$f(x)=f(-x)$，则（　）

A．$F(-a)=1-\int_0^a f(x)dx$　　　　B．$F(-a)=0.5-\int_0^a f(x)dx$

C．$F(-a)=F(a)$　　　　D．$F(-a)=2F(a)-1$

2. 设随机变量X的分布函数是$F(x)=\frac{1}{1+x^2}$，$a<x<b$，则区间(a,b)可以是（　）

A．$(-\infty,+\infty)$　　B．$(0,+\infty)$　　C．$(-\infty,0)$　　D．$(0,1)$

3. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$, 对给定的$0<\alpha<1$，数Z_α满足$P\{X>Z_\alpha\}=\alpha$，

若$P(|X|>x)=\alpha$，则$x=$（　）

A．$Z_{\alpha/2}$　　B．$Z_{1-\alpha/2}$　　C．$Z_{(1-\alpha)/2}$　　D．$Z_{1-\alpha}$

4. 设随机变量 $X_1\sim N(0,1)$，$X_2\sim N(0,4)$，$X_3\sim N(5,9)$，$p_i=P(-2\le X_i\le 2), i=1,2,3$, 则（　）

A．$p_1>p_2>p_3$　　　　B．$p_2>p_1>p_3$

C．$p_3>p_1>p_2$　　　　D．$p_1>p_3>p_2$

5. 设随机变量$X\sim U(-1,5)$，且$P(X^2\le a)=0.5$，则$a=$__________.

6. 设随机变量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且$P\{\mu<X<\mu+\sigma\}=0.3$，则$P\{X<\mu-\sigma\}=$__________.

7. 设随机变量X的概率密度函数$f(x)=\begin{cases} ax+b, & 0\le x\le 1 \\ 0, & else \end{cases}$，且$P\{X>0.5\}=0.625$，

则$a=$__________，$b=$__________，$P\{0.5<X<1.5\}=$__________.

8. 在800米跑步比赛中，选手成绩X服从正态分布$X\sim N(180,400)$（单位：秒），成绩位于前40%的选手直接晋级，则用时在____________秒以内可直接晋级， 成绩位于后20%的选手直接淘汰，则用时超过________________________秒就要被淘汰.

9. 设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则$P\{|X-\mu|<\sigma\}=$__________，$P\{|X-\mu|<2\sigma\}=$__________.

10. 设某型号电视机的寿命X（单位：年）的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{12}e^{-x/12}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$，则一台改型号电视机的寿命超过12年的概率是__________，一台已正常使用了12年的电视机还能再使用12年的概率是_________.

二 计算题

1. 设随机变量X的概率密度函数$f(x)=\begin{cases}ax, & 0\le x\le 1\\ 2-x, & 1<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，求：

(1)常数a;(2)X的分布函数；(3)$P\{0.5<X<1.5\}$.

2. 设随机变量X的分布函数是$F(x)=\begin{cases}a+be^{-\frac{x^2}{2}}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$，求：

(1) 常数a,b； (2)X的概率密度函数$f(x)$； (3) $P\{0<X<\sqrt{2}\}$.

3. 设某种电子管的寿命X（单位：小时）的概率密度函数是$f(x)=\begin{cases}1000x^{-2}, & x>1000\\ 0, & x\le 1000\end{cases}$

(1) 求电子管的寿命不超过1500小时的概率；

(2) 5个这种电子管中寿命不超过1500小时的个数是Y，写出Y的分布律，并求其中至少有两个电子管寿命不超过1500小时的概率.

4. 某系统在t小时内发生故障的次数X服从参数为$0.2t$的泊松分布，与起始时刻无关，

（1） 写出X的分布律，并求某天上午9时至下午15时至少发生一次故障的概率；

（2）设T是系统的无故障运行时间（即两次故障发生的间隔时间），求T的分布函数 $F(t) = P\{T \leq t\}$和概率密度函数$f(t)$.

5. 设随机变量$X \sim N(0,1)$，其概率密度函数$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$，

（1）求$\varphi(x)$的单调区间，极值，凹凸区间，拐点；

（2）证明：$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$

（3）设随机变量$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$，证明：$\frac{Y-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

§2.4 一维随机变量函数的分布

二 计算题

1. 设随机变量X的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，求

（1） $P\{e^{-X}\leq 0.8\}$

（2） $P\{X\leq a+1|X>a\}\quad (a>0)$；

（3） 随机变量$Y=1-e^{-X}$的概率密度函数 $f_Y(y)$.

2. 设随机变量$X\sim U(0,1)$，求：

（1） $Y_1=a+(b-a)X$的分布函数与概率密度函数；$(a<b)$

（2） $Y_2=-\ln X$的分布函数与概率密度函数.

3. 设随机变量$X \sim N(0,1)$，求：

（1）$Y_1 = aX + b$的概率密度函数；

（2）$Y_2 = X^2$的概率密度函数.

（3）$Y_3 = e^X$的概率密度函数.

§2.5 一维随机变量的数字特征

一 选择填空题

1. 设随机变量X的数学期望$E(X)$，方差$D(X)$，c为非零常数，则下列错误的是（　）

A. $D(cX)=c^2D(X)$　　B. $D(X+c)=D(X)+c$

C. $D(X)=E(X-E(X))^2$　　D. $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

2. 设连续型随机变量X的概率密度函数是$f(x)$，且$f(x)=f(-x)$，$E(X)$, $D(X)$都存在，a是非负实数，则不一定正确的是(　　)

A. $D(X)=2\int_0^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x$　　B. $E(X)=2\int_0^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$

C. $P\{X\le -a\}=1-P\{X\le a\}$　　D. $P\{|X|\ge a\}=2P\{X\ge a\}$

3. 设随机变量X的概率密度函数$f(x)=\begin{cases}1-|1-x|, & 0<x<2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,则$E(X)=$（　）

A. 1/2　　B. 1　　C. 3/2　　D. 2/3

4. 设随机变量X的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则$E(X)=$

A. 2/π　　B. 1/π　　C. 2π/3　　D. π/4

5. 设正态总体X的概率密度$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$，则$E(X^2)=$（　）

A. 1/2　　B. 1　　C. 3/2　　D. 2

6. 设每次射击时击中目标的概率均为 p，X为100次独立射击时击中目标的次数，则当 $p=$_____时，击中目标次数的标准差最大，最大值是_____________.

7. 设随机变量X服从参数为λ的泊松分布，且$E[(X-1)(X-2)]=1$, 则 $\lambda=$__________.

8. 设随机变量$X\sim U(0,2)$，则$E(|X-E(X)|)=$______________.

9. 设随机变量$X\sim N(0,1)$，则$E(|X|)=$______________.

10. 抽样调查结果表明：某地区考生的外语成绩(百分制)服从正态分布，平均成绩72分，96分以上者占总人数的2.3%，则考生的外语成绩在60分至84分之间的概率是_________________.

11. 设随机变量X的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则$P\{X>E(X)\}=$____________.

12. 设随机变量$X\sim U(-1,2)$，随机变量$Y=\begin{cases}-1, & X<0\\ 0, & X=0\\ 1, & X>0\end{cases}$，则$D(Y)=$____________.

13. 设随机变量X的概率密度函数 $f(x)=\begin{cases} 2x, & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，$a=$________时，$E(X-a)^2$取得最小值.

14. 设随机变量X的密度函数$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, $Y=\mathrm{Min}(X,1)$，则$E(Y)=$（　）

A. (e-1)/e　　　　B. 1/2　　　　C. (e-2)/e　　　　D. (e+1)/2e

二 计算题

1. 抛掷三枚均匀的骰子(正方体六面上分别有1,2,3,4,5,6六个数),观察向上的那面出现的数字,

(1) 数字相同的骰子个数是X，求X的分布律和数学期望；

(2) 数字是偶数的骰子个数是Y，求Y的分布律和数学期望；

(3) 三枚骰子的数字之和是Z，求Z的数学期望与方差；

2. 超市进行购物抽奖：盒中有红白黑三种颜色的球各1个，除颜色外完全相同，顾客每次取1个球，取后不放回，取到黑球则抽奖结束，否则可继续取球。取到黑球没有奖励，取到红球则奖励20元，取到白球则奖励10元，求：

(1) 每一名顾客取球两次就停止抽奖的概率；

(2) X表示每一名顾客抽奖获得的奖励数额，求X的分布律和数学期望.

3. 甲乙两队进行篮球决赛，采用三场两胜制，甲队在主场的获胜概率是0.6，在客场的获胜概率是0.5，三场比赛采用“主客主”顺序，由以往战绩，决赛从甲队主场开始，各场比赛的胜负相互独立，求：(1) 甲队赢得决赛的概率；

(2) 决赛阶段进行的比赛场数X的分布律与数学期望.

4. 设随机变量X的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases}1/2, & -1\le x<0\\ 1/4, & 0\le x\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，

（1）若$P\{X\le a\}=0.8$，求a的值；

（2）求$|X|$的数学期望与方差.

5. 设连续型随机变量X的概率密度函数是$f(x)=\begin{cases} ax^2(1-x), & 0\le x\le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，

(1) 求常数a；

(2) $\mu_1=E(X)$，对于任意 $0\le x\le 1$,都有 $f(\mu_2)\ge f(x)$，求 μ_1与μ_2；

(3) 若$P\{X\le \mu_3\}=0.5$, 比较μ_1、μ_2、μ_3的大小关系.

6. 在伯努利试验中，$P(A)=\theta$，θ可看作是一个$(0,1)$上的随机变量， 如果最初对θ缺乏了解，不妨设$\theta\sim U(0,1)$，其概率密度函数记为$\pi(\theta)$，称为θ的先验分布。独立重复进行n次试验，其中事件A发生了x次，把这个结果发生的概率记为$f(x|\theta)$，称为似然函数

(1) 写出先验分布$\pi(\theta)$和似然函数$f(x|\theta)$的表达式；

(2) $\pi(\theta|x)$表示在得到结果x后θ的概率密度函数，称为θ的后验分布。根据贝叶斯公式：

$$\pi(\theta|x)=\frac{\pi(\theta)f(x|\theta)}{\int_{-\infty}^{+\infty}\pi(\theta)f(x|\theta)d\theta}$$

在$n=3,x=1$时，求后验分布$\pi(\theta|x)$的表达式和后验期望$E(\theta|x)$.

7．设随机变量X的分布函数是$F(x)$，概率密度函数为$f(x)$，c是常数

（1）证明：$P\{X \leq x | X > c\} = \frac{F(x)-F(c)}{1-F(c)}$，并且这个函数的导数是一概率密度函数；

（2）设某电子元件的使用寿命X(单位：h)服从指数分布，其数学期望$E(X) = \mu$，证明：若该元件已正常使用了c小时，在此条件下该元件寿命的期望是$\mu + c$.

自测题一

一 选择填空题

1. 城市某区域有5个PM2.5浓度监测器，只要有两个监测器显示的浓度不低于临界浓度x_0，空气污染指数即为橙色，设$X_{(1)} \le X_{(2)} \le X_{(3)} \le X_{(4)} \le X_{(5)}$是5个监测器显示的从低到高的浓度值，则事件“空气污染指数为橙色”是(　　)

A．$\{X_{(2)} \ge x_0\}$　　B．$\{X_{(3)} \ge x_0\}$　　C．$\{X_{(4)} \ge x_0\}$　　D．$\{X_{(5)} \ge x_0\}$

2. 设A,B为两个随机事件，且$P(A)=0.4$，$P(B)=0.8$，则$P(\bar{A}\cup\bar{B})$的取值范围是(　　)

A. $[0.4,\ 0.8]$　　B. $[0.6,\ 0.8]$　　C. $[0.4,\ 0.6]$　　D. $[0.4,\ 1]$

3. 设连续函数$F(x)$和$f(x)$是连续型随机变量X的分布函数和密度函数，下列错误的是(　　)

A. $0 \le f(x) \le 1$　　B. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$

C. $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$　　D. $f(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{P\{x < X \le x+h\}}{h}$

4. 设连续型随机变量X的概率密度函数是$f(x)$，且$f(x)=f(-x)$，$E(X)$, $D(X)$都存在，则不一定正确的是(　　)

A．$D(X)=D(-X)$　　B．$E(X)=E(-X)$

C．$P\{X \le x\} = P\{X \le -x\}$　　D．$P\{X \le x\} + P\{X \le -x\} = 1$

5. 某繁忙路段每天有大量汽车通行，设一辆汽车在一天的某段时间内出事故的概率是 0.0001，已知在该时段内有 1000 辆汽车通过，至少有两辆汽车出事故的概率是（　　）

A．$1-e^{-0.1}$　　B．$1-0.1e^{-0.1}$　　C．$1-1.1e^{-0.1}$　　D．$1-1.105e^{-0.1}$

6. 设随机变量$X \sim U(0,2)$，$Y = \mathrm{Min}(X,1)$，则$E(Y) = $(　　)

A. 1　　B. 5/6　　C. 4/5　　D. 3/4

7. 盒中有20个白球, 30个黑球和30个红球, 从中随机取出8个球，其中取出的白球个数的数学期望是________.

8. 设随机变量X的概率密度函数$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，且$P\{X>c\}=P\{X<c\}$，$c=$______.

二 计算题

1. 证明：(1) 设事件A,B相互独立，则$P(A|B)+\ P(\bar{A}|\bar{B})=1$

(2) 设事件A,B互不相容，则$P(A|A\cup B)=P(A)/(P(A)+P(B))$

2. 假设在某特定人群中有25%的人患有一种没有症状的特殊疾病。在进行医学检测中，健康的人的检测结果必为阴性，而患病者中也有20%的人检测结果呈阴性，从这个人群中随机选取一人，他的检测结果呈阴性的概率是多少？如果已知他的检测结果是阴性，那么他的确没有患病的概率是多少？

3. 设连续型随机变量X的概率密度函数是$f(x)=\begin{cases} xe^{-x}, x>0 \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$，求：

(1) X的分布函数；(2) X的数学期望

4. 盒中共有10个球，标号为1到10，每次从中随机取出1个球，观察球的标号并放回，重复这个过程，直到取出的球的标号大于8，

求：(1) 恰好取球n次的概率；(2) 至少取球k次的概率；(3) 取球次数的数学期望.

5. (1) 设随机变量X的数学期望和方差都存在，证明：对于任意常数C，$E(X-C)^2 \geq D(X)$

(2) 设随机变量X的概率密度函数$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-\frac{x}{2}}, & x>0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$,

a为何值时，$E(X-a)^2$取得最小值?

6. 设随机变量$X \sim U(0,1)$，$Y=\mathrm{Max}(X,1-X)$

(1) 求$P\{Y \leq 3/4\}$;

(2) 求Y的概率密度函数, 数学期望与方差.

§3.1 二维随机变量与分布函数

§3.2 边缘分布及随机变量的独立性

§3.3 二维随机变量函数的分布

一 选择填空题

1. 设二维随机变量$(X,Y)\sim N(0,1,0,1,0)$，则$P\{|X-Y|\le\sqrt{2}\}=($　　$)$

A. 0.5　　B. 0.6826　　C. 0.8413　　D. 0.9332

2. 已知随机变量X和Y相互独立，分布律分别为：$X\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0.6 & 0.4\end{pmatrix}$，$Y\sim\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$，

则$P\{X+Y=0\}=$__________.

3. 从$1,2,3$中随机取一个数X，再从1到X中随机取出一个数Y， 则$P\{Y=2\}=$__________.

4. 甲乙两人相约在7点到8点之间在公共汽车站碰头，设两人的到达时刻是随机的，若先到者最多等候 20 分钟，则他们能相遇的概率是__________；在7时15分，7时30分，7时45分，8时各有一班公共汽车到站，两人见车就乘，则他们能乘坐同一班车的概率是__________；若先到者最多等一班车，则他们能乘坐同一班车的概率是__________.

5. 二维随机变量(X,Y)的分布律为：

$$P\{X=0,Y=0\}=0.4,\qquad P\{X=0,Y=1\}=a,$$

$$P\{X=1,Y=0\}=b,\qquad P\{X=1,Y=1\}=0.1,$$

若随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，则$a=$__________，$b=$__________.

6. 二维随机变量(X,Y)的联合分布函数$F(x,y)=\frac{1}{16}x^2y^2, 0\le x,y\le 2$，

则$P\{X>1\}=$__________，$P\{\min(X,Y)\le 1\}=$__________.

7. 二维随机变量(X,Y)的概率密度函数为：$f(x,y)=\begin{cases} a(x+y), & 0\le x,y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，则$a=$______.

8. 二维随机变量(X,Y)服从区域$D=\{(x,y)|(x-1)^2+y^2\le 1\}$上的均匀分布，

则$P\{X<Y\}=$__________，$P\{X+Y>1\}=$__________.

9. 网站有两台服务器A 和 B，每分钟的访问次数都服从泊松分布且相互独立，平均每分钟的访问次数分别为360次和240次，则一秒钟内两台服务器总共接到至少2次访问的概率是__________.

二 计算题

1. 设随机变量 X_1, X_2 相互独立且具有相同的分布， $X_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, (其中 $0 < p < 1$),

随机变量 $X_3 = \begin{cases} 0, & 若\ X_1 + X_2 为奇数 \\ 1, & 若 X_1 + X_2 为偶数 \end{cases}$， p为何值时，随机变量 X_1, X_3 相互独立?

2. 设随机变量X和Y独立同分布, 分布律为$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$，记$U = \max(X, Y), V = \min(X, Y)$,

求(U, V)的联合分布律与边缘分布律.

3. 有四张扑克牌，一张3，两张4，一张5，背面朝上放在桌面上，先从中任取一张牌，不放回，再从中任取一张牌，X和Y分别表示第一，二次取到的牌的数字，求：

(1) (X,Y)的联合分布律与边缘分布律；

(2) 两次取到的牌的数字之和$X+Y$的分布律；

(3) 两次取到的牌的较小数字$\min(X,Y)$的分布律.

4. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度函数$f(x,y)=\begin{cases}0.25xy, & 0\le x,y\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$,

(1) 求$P\{X\ge 1\}$, $P\{\min(X,Y)<1\}$；

(2) 随机事件$A=\{X>a\}$与$B=\{Y>a\}$，且$P(A\cup B)=0.75$, 求a；

(3) 当 $0\le z\le 2$ 时，求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度函数$f_Z(z)$.

5. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度函数为：$f(x,y)=\begin{cases} 1, & 0<x<1,\ 0<y<2x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

（1） 求关于X和Y的边缘密度函数$f_X(x), f_Y(y)$；

（2） 求$P\{Y \le 0.5 | X \le 0.5\}$.

6. 设随机变量X和Y相互独立，$X \sim U(0,1)$，Y的概率密度函数为$f(y)=\begin{cases} 0.5e^{-0.5y}, & y>0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$，

(1) 求(X,Y)的概率密度函数；

(2) 设关于t的二次方程为$t^2+2Xt+Y=0$，求方程有实根的概率.

7．随机变量 X_1,X_2相互独立，

（1）$X_1 \sim b(n_1,p), X_2 \sim b(n_2,p)$, 证明: $X_1+X_2 \sim b(n_1+n_2,p)$；

（2）X_1,X_2分别服从参数是 λ_1,λ_2的泊松分布, 证明: X_1+X_2服从参数是 $\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布；

（3）$X_1 \sim N(0,1), X_2 \sim N(0,1)$, 证明: $X_1+X_2 \sim N(0,2)$

8．随机变量 X_1,X_2相互独立且都服从参数是λ的指数分布, 求以下随机变量的概率密度函数和数学期望

（1）X_1+X_2；（2）$\mathrm{Min}\,(X_1,X_2)$；（3）$\mathrm{Max}\,(X_1,X_2)$

9. 随机变量X_1,X_2相互独立且都服从$U(0,1)$, 求以下随机变量的概率密度函数和数学期望

（1）X_1+X_2；（2）Max (X_1,X_2)；（3）Min (X_1,X_2)；（4）$|X_1-X_2|$

§3.5 多维随机变量函数的数字特征及性质

§3.6 协方差，相关系数和矩

一 选择填空题

1. 设随机变量X,Y的数学期望，方差，协方差都存在，则下列等式错误的是（　）

A．$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$

B．$E(X^2)=D(X)+(E(X))^2$

C．$\mathrm{Cov}(X,X)=D(X)$

D．$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+\mathrm{Cov}(X,Y)$

2. 随机变量X和Y的分布律：$X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0.2 & 0.5 & 0.3\end{pmatrix}$， $Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$

且$P\{X^2=Y^2\}=1$，则$\mathrm{Cov}(X,Y)=$（　）

A. 0.05　　　　B. 0.1　　　　C. 0　　　　D. -0.05

3. 设随机变量X,Y的数学期望，方差，协方差都存在且不为0,将X,Y进行标准化：

$$X^*=\frac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}},\qquad Y^*=\frac{Y-E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}$$

① $E(X^*)=E(Y^*)=0$　　　　② $D(X^*)=D(Y^*)=1$

③ $\mathrm{Cov}(X^*,Y^*)=\rho_{XY}$　　　　④ $\rho_{XY}=\rho_{X^*Y^*}$

其中正确的有________________.

4. 设随机变量X和Y独立同分布，分布函数是$F(x)$, 则$Z_1=\max(X,Y)$的分布函数为________________, $Z_2=\min(X,Y)$的分布函数为________________.

5. 设相互独立的随机变量X,Y，　$D(X)=1,D(Y)=4$，则$D(X-2Y+1)=$____________.

6. 设二维随机变量(X,Y)服从正态分布$N(1,0;1,1;0)$, 则$D(X+Y)=$____________, $D(XY)=$____________，$P\{XY-Y<0\}=$____________.

7. 二维随机变量(X,Y)的概率密度函数为：$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0\le y\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, 则$E(X+Y)=$________.

8. 已知随机变量X的方差$D(X)$存在，设$Y=-2X+1$，则X与Y的相关系数$\rho_{XY}=$____________.

二 计算题

1. 设A, B是随机试验E的两个事件，且$P(A) > 0$, $P(B) > 0$，随机变量X和Y的定义为

$$X = \begin{cases} 1, & A发生, \\ 0, & A不发生, \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & B发生, \\ 0, & B不发生, \end{cases}$$

证明：若$\rho_{XY} = 0$，则事件A与B相互独立.

2. 盒中装有5只球，编号是1,2,3,4,5，从中随机取出3个球，X, Y表示取出的三个球中的最小和最大的号码，求(X, Y)的联合分布律与$\mathrm{Cov}(X, Y)$.

3. 盒中有1个黑球2个白球2个红球，从中任取两次，每次任取一球，X,Y分别表示取得的白球与红球的个数，

(1) 如果每次取出的球不再放回，求(X,Y)的联合分布律与(X,Y)的相关系数ρ_{XY}；

(2) 如果每次取出的球放回，求(X,Y)的联合分布律与$P\{X=1|X+Y=2\}$.

4. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度函数为：$f(x,y)=\begin{cases} 12y^2, & 0 \le y \le x \le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，求关于$X$和$Y$的边缘概率密度函数$f_X(x), f_Y(y)$及$\mathrm{Cov}(X,Y)$

5. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度函数是$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<2, 1\le y\le 1.5\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

(1) 求$P\{X+Y\le 2\}$；

(2) 求随机变量$Z=\max(X,Y)$的概率密度函数；

(3) 求a的值，使 $P\{\min(X,Y)\le a\le \max(X,Y)\}$最大

6. 正方形边长为1，在其四条边上随机取两点，

$A_1=\{$两个点在同一条边上$\}$, $A_2=\{$两个点在相邻的两条边上$\}$, $A_3=\{$两个点在相对的两条边上$\}$,

$B=\{$两点距离小于 1$\}$,

(1) 求$P(A_1), P(A_2), P(A_3)$ (2) 求$P(B|A_1), P(B|A_2), P(B|A_3)$ (3) 求$P(B)$

§4.1 大数定律　§4.2 中心极限定理

一 选择填空题

1. 彩票的中奖率是0.01，某人购买了200张彩票，则中奖次数不超过2次的概率最接近(　　　)

A. 0.68　　　B. 0.5　　　C. 0.62　　　D. 0.56

2. 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是独立同分布的随机变量序列，且$E(X_i)=\mu$，$D(X_i)=\sigma^2$，$i=1,2,\cdots\cdots$，

则$\forall\varepsilon>0$，$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\mu\right| \geq \varepsilon\right\}=$____________，$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}>0\right\}=$____________.

二 计算题

1. 抛掷两枚均匀硬币，如果两枚都正面向上则赢得2元，否则输1元，

(1)设每次赢得金额为X，求X的分布律，$E(X), D(X)$；

(2)某人进行27次试验，由中心极限定理计算其亏损(赢得总金额为负)的概率.

2. 抛掷n枚均匀硬币，其中有X枚正面向上，

(1) 若对任意正数ε，$\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{X}{n}-a\right|<\varepsilon\right\}=1$，求$a$；

(2) 用中心极限定理计算：抛掷 100 枚均匀硬币，正面向上的频率在 0.45 到 0.55 之间的概率。

3. 有10000人向保险公司购买一年期车险，保费2000元，根据以往数据，投保人车辆因发生事故索赔的概率是0.2，平均赔付额5000元，X表示10000人在一年内索赔的人数，

(1) 求X的分布律，$E(X), D(X)$；

(2) 由中心极限定理，求保险公司盈利超过一千万元的概率.

4. 已知某课程的选课学生数X是一个泊松随机变量，数学期望为100，

(1) 写出X的分布律

(2) 如果选课学生超过110人，学校就开设两个班级，由中心极限定理计算计算需要开设两个班级的概率

§5.1 总体和样本 §5.2 统计量 §5.3 抽样分布

一 选择填空题

1. 设随机变量X和Y相互独立，且$X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，则$\frac{X}{\sqrt{Y/n}}\sim$（　）

A．$t(n-1)$　　B．$\chi^2(n)$

C．$\chi^2(n-1)$　　D．$t(n)$

2. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，下列结论正确的是（　）

A．$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sim\chi^2(n-1)$

B．$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sim\chi^2(n)$

C．$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sim\chi^2(n-1)$

D．$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sim\chi^2(n)$

3. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自正态总体$N(0,1)$的样本，$\bar{X}$和S^2是样本均值和样本方差，则（　）

A．$\bar{X}/S\sim t(n-1)$　　B．$\sum_{i=1}^{n}X_i^2\sim\chi^2(n)$

C．$n\bar{X}\sim N(0,1)$　　D．$\bar{X}\sim N(0,1)$

4. 设随机变量X和Y相互独立，且$X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(1,1)$，则（　）

A．$P\{X+Y\le 0\}=0.5$　　B．$P\{X+Y\le 1\}=0.5$

C．$P\{X-Y\le 0\}=0.5$　　D．$P\{X-Y\le 1\}=0.5$

5. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自总体$X\sim b(10,0.2)$的一组样本，若$\forall\varepsilon>0$，

$\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-a\right|<\varepsilon\right\}=1$，则$a=$______________.

6. 设$x_1,x_2,\cdots,x_{10}$是从总体中随机抽取的一组样本观测值，算得数据:

$$\sum_{i=1}^{10}x_i=20,\ \sum_{i=1}^{10}x_i^2=940,$$

则样本标准差$s=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=$__________.

7. 设$X_1,X_2,\cdots,X_{25}$是取自正态总体$X\sim N(20,16)$的一组样本，$\bar{X}=\frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25}X_i$，则

$P(\bar{X}<21)=$________________，$P\left\{\sum_{i=1}^{16}X_i-\sum_{i=17}^{25}X_i\le 155\right\}=$________________.

8. 设X_1,X_2,X_3是取自正态总体$X\sim N(0,0.25)$的样本，若$a(X_1^2+X_2^2+X_3^2)\sim\chi^2(3)$，则$a=$________.

二 计算题

1. 设 X_1, X_2, X_3, X_4是取自正态总体$X \sim N(0,4)$的一组样本，

$$Y = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_1 - 4X_2)^2$$

问a, b分别为何值时，统计量Y服从χ^2分布，其自由度是多少？

2. 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体$U(0,1)$的样本, 求：

(1) $P\{X_1 + X_2 + X_3 \le 1\}$； (2) $P\{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \le 1\}$； (3) $P\{X_1 + \cdots\cdots + X_{1200} > 605\}$

§6.1 点估计 §6.2 估计量的评选标准

一 选择填空题

1. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$是取自于正态总体$N(0,\sigma^2)$的一组样本，下列不是σ^2的无偏估计的是（　）

A. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2$　　　　B. $n(\bar{X})^2$

C. $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$　　　　D. $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2-(\bar{X})^2$

2. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体$N(0,\sigma^2)$的样本, 下列四个估计量是σ^2的无偏估计的是________.

① $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2$　② $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2-\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$　③ $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$　④ $\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$

3. 设$\hat{\theta}$是总体X的未知参数θ的无偏估计，则$E(\hat{\theta}-\theta)=$________.

4. 设 X_1, X_2, X_3是来自总体X的样本，下列关于总体均值的估计中，

a. $(X_1+X_2+X_3)/3$　　　　b. X_1

c. $(X_1+X_2)/2$　　　　d. $(2X_1+X_2+X_3)/4$

则无偏估计是________________，其中最有效的是__________.

5. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自于总体$X\sim N(\mu,1)$的样本, 则$E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right)=$______________,

$E(\bar{X}-\mu)^2=$______________，$E[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2]=$____________.

6. 设总体X的概率密度函数为$f(x;\theta)=\begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x\ge\theta \\ 0, & else \end{cases}$，$\theta$是未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体$X$的样本，则$\theta$的矩估计是____________.

7. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$是来自总体$U(0,\theta)$的样本，$\hat{\theta}$是θ的最大似然估计，则

$E(\hat{\theta}/\theta)=$____________.

二 计算题

1. 某学校进行一次关于学生考试作弊情况的随机化调查。一套卡片共20张，15张上写有“你在考试中曾作弊了吗？”，5张上写有“你参加过校园马拉松吗？”，每人随机抽取一张卡片，根据卡片上的问题回答“是”或“否”，在参加调查的100名学生中，回答“是”有30人，回答“否”有70人，假设每人都真实回答，则学生中曾考试作弊的比例的矩估计是多少？（全校约有三分之一的学生参加过校园马拉松）

2. 设 X_1, X_2, X_3 是来自总体 $X \sim U(0, \theta)$ 的样本，

(1) 验证 $\hat{\theta}_1 = (2X_1 + 4X_3)/3$ 是 θ 的无偏估计；

(2) 验证 $\hat{\theta}_2 = \frac{4}{3}\max\{X_1, X_2, X_3\}$ 是 θ 的无偏估计；

(3) 上述哪个估计更有效？

3. 设总体 X 的分布律是：

$$P\{X=-1\}=\theta^2,\quad P\{X=0\}=2\theta(1-\theta),\quad P\{X=1\}=(1-\theta)^2$$

从总体中抽取的一组样本观测值为：$x_1 = x_4 = -1,\quad x_3 = x_6 = x_7 = 0,\quad x_2 = x_5 = 1$

(1) 求 θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}$;

(2) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，在 $\theta = \hat{\theta}$ 时，由中心极限定理，计算

$$P\{\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_{50}}{50}\right| \le 0.1\}$$

3. 设总体的概率密度函数为：$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-x/\theta}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$， $X_1,X_2,\cdots,X_n$是取自总体的样本，

(1) 求θ的最大似然估计$\hat{\theta}_1$;

(2) 记$X_{(1)}=\min(X_1,X_2,\cdots\cdots X_n)$, 求$X_{(1)}$的概率密度函数;

(3) 证明：$\hat{\theta}_1$和 $\hat{\theta}_2=nX_{(1)}$都是θ的无偏估计.

4. 设总体X的概率密度函数为$f(x;\theta)=\begin{cases}2x/\theta^2, & 0\leq x\leq\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，$\theta$是未知参数， $X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体X的样本，

(1) 求$E(X),E(X^2)$;

(2) 求θ的矩估计$\hat{\theta}$，判断$\hat{\theta}$是否是θ的无偏估计;

(3) 若$\frac{c}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i{}^2$是$\theta^2$的无偏估计，求$c$的值.

(4) 统计量 $T=\max(X_1,X_2,X_3)$， 求T的概率密度函数并构造θ的无偏估计.

§6.3 区间估计 §6.4 单正态总体均值与方差的区间估计

§7.1 参数假设检验问题概述 §7.2 单正态总体的参数检验

一 选择填空题

1. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本，样本均值$\bar{x} = 9.5$，总体均值μ的置信度为 0.95 的双侧置信区间上限为 10.8，则μ的置信度为 0.95 的双侧置信区间是________________________.

2. 某型号汽车的百公里油耗X服从正态分布$N(\mu, 0.36)$，随机抽取 9 辆这款车测试其百公里油耗，得到数据如下： 9.0 , 9.5 , 8.6 , 10.2 , 9.9 , 8.1 , 9.1 , 7.9 , 8.7（单位：升），则μ的矩估计是____________，μ的置信度为 0.95 的置信区间是_________________________ .

3. 体育课上随机测试了36位学生的50米游泳成绩，他们平均成绩 $\bar{x} = 40$秒，样本标准差$s = 6$秒，已知学生的50米游泳成绩服从正态分布，则μ的置信度为0.95的置信区间是

A.(38, 42)　　B.(39, 41)　　C.(38.5, 41.5)　　D.(39.5, 40.5)

4. 在假设检验中，显著性水平α是（　　　　）的概率

A. 未拒绝正确原假设　　B. 未拒绝错误原假设

C. 拒绝正确原假设　　D. 拒绝错误原假设

5. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{25}$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本，样本标准差$s = 1$，在显著性水平α下，检验H_0: $\mu = \mu_0$，H_1: $\mu > \mu_0$，则α =（　　　　）

A. $P\{\bar{X} < \mu_0 - 0.2\, t_{\alpha/2}(24) | H_0为真\}$　　B. $P\{\bar{X} < \mu_0 - 0.2\, t_{\alpha}(24) | H_0为真\}$

C. $P\{\bar{X} \geq \mu_0 + 0.2\, t_{\alpha/2}(24) | H_0为真\}$　　D. $P\{\bar{X} \geq \mu_0 + 0.2\, t_{\alpha}(24) | H_0为真\}$

6. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$是来自总体$N(\mu, 100)$的样本，在显著性水平$\alpha = 0.05$下，检验

H_0: $\mu = 0$，H_1: $\mu > 0$，拒绝域是$\{(x_1, x_2, \cdots, x_{100}): \bar{x} \in D\}$，则$D =$

A.(1.65, +∞)　　B.(1.96, +∞)　　C.(−∞, −1.65)　　D.(−∞, −1.96)

二 计算题

1. 交通部门对市民的出行方式进行抽样调查，1, 2, 3, 4分别表示公共交通，私家车，骑车，步行，即总体分布为：$P\{X = k\} = \theta_k$，$k = 1, 2, 3, 4$，在收到的10000份问卷调查中，选择1的人数$X_1 = 2075$，

(1) 在$\theta_1 = 0.2$时，由中心极限定理计算$P\{X_1 \geq 2075\}$;

(2) 根据调查结果，可否认为选择公共交通的市民比例显著高于20%？(取显著性水平$\alpha = 0.05$)

2. 由全国普查数据知，14周岁男孩体重$X\sim N(50,100)$，14周岁女孩体重$Y\sim N(47,100)$,（单位：kg）,设男女孩人数相等，则14周岁儿童体重超标（大于65）率是多少？数据还显示，全国14周岁儿童的平均体重为48，A,B分别是某山区学校与沿海城市学校各36位14周岁儿童的体重数据，可否认为A,B两地14周岁儿童的平均体重与全国的平均值相比显著偏低或显著偏高？设体重服从正态分布，取显著性水平为0.05.

3. 质检局为检验某品牌牛奶每百毫升平均含钙量，随机抽查了 36 盒牛奶，结果每百毫升平均含钙量为 115 毫克，已知该品牌牛奶每百毫升含钙量$X\sim N(\mu,36)$，

（1）求总体均值μ的置信度为 0.95 的置信区间；

（2）该牛奶包装盒上标注每百毫升含钙量约为 118 毫克，根据检验结果，可否认为与标注有显著差距？（取显著性水平$\alpha=0.05$）

4. 航空公司为了解今天旅客携带行李的平均重量，随机选择了 25 位乘客，称重了他们的行李后得知平均重量为 18 磅，已知旅客携带行李的重量$X\sim N(\mu,4)$，

（1）求总体均值μ的置信度为 0.95 的置信区间；

（2）根据以往数据，旅客携带行李的重量$X\sim N(17.6,4)$，今天旅客携带行李的平均重量与以往相比有无显著变化？（取显著性水平$\alpha=0.05$）

5.为估计采用新工艺生产的某批次轮胎的平均寿命，随机抽取 16 只轮胎进行寿命试验，测得平均寿命 $\overline{x}=4.709$（单位：万千米），样本标准差 $s=0.248$，设轮胎寿命 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，

（1）求轮胎平均寿命 μ 的置信度为 0.95 的置信区间；

（2）采用新工艺制造的这批轮胎的寿命相比以前的平均寿命 4.585 万千米是否有显著提高?（取显著性水平为 0.05）

6.医院为了解慢性铅中毒患者的脉搏(每分钟)与正常人有无显著差别，测量了 25 位患者，得知他们的脉搏平均次数 $\bar{x}=69$，已知脉搏次数 $X\sim N(\mu,10^2)$

（1）求总体均值 μ 的置信度为 0.95 的置信区间；

（2）根据以往数据，正常人的脉搏次数 $X\sim N(74,10^2)$，那么患者的脉搏与正常人相比有无显著差异？取显著性水平 $\alpha=0.05$.

自测题二

一 选择填空题

1. 设事件A,B互不相容, 则(　　)

A. $P(A)=1-P(B)$　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$　　C. $P(\bar{A}\bar{B})=0$　　D. $P(\bar{A}\cup\bar{B})=1$

2. 以下随机变量X,Y不相互独立的是(　　)

A. A,B是任意集合，且$P\{X\in A,Y\in B\}=P\{X\in A\}P\{Y\in B\}$

B. 二维随机变量(X,Y), 其联合概率密度函数为$f(x,y)=\begin{cases}1/\pi, & x^2+y^2\le 1\\ 0, & x^2+y^2>1\end{cases}$

C. $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,0)$

D. 从一副扑克牌(去掉王牌)随机抽取一张, 取出的数字X和取出的花色Y

3. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$, 其分布函数为$\Phi(x)$, 则$P(|X|>x)=$(　　)

A. $2\Phi(x)-1$　　B. $2(1-\Phi(x))$　　C. $\Phi(x)-\Phi(-x)$　　D. $1-2\Phi(-x)$

4. 设X_1,X_2,X_3是来自总体$X\sim U(0,\theta)$的样本, 以下是θ的无偏估计量的是(　　)

A. $(X_1+X_2+X_3)/3$　　B. $\min\{X_1,X_2,X_3\}$

C. $\max\{X_1,X_2,X_3\}$　　D. $(X_1+2X_2+3X_3)/3$

5. 体育课上随机测试了36位学生的50米游泳成绩, 他们平均成绩 $\bar{x}=40$秒, 样本标准差 $s=6$秒, 已知学生的50米游泳成绩服从正态分布, 则μ的置信度为0.95的置信区间是(　　)

A. $(38,42)$　　B. $(39,41)$　　C. $(38.5,41.5)$　　D. $(39.5,40.5)$

6. 设A,B为两个随机事件, 且$P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$, 则 $P(\bar{A}\cup\bar{B})=$__________.

7. 盒中有2个白球2个红球和1个黑球, 每次随机取出一个球, 观察颜色后放回, 重复进行三次，则三种颜色的球各取出一次的概率是__________.

8. 设相互独立的随机变量X,Y, $D(X)=1,D(Y)=4$, 则$D(X-2Y+1)=$__________.

9. 设(X,Y)的联合概率密度函数$f(x,y)=\begin{cases}4xy & 0\le x,y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, 则$P\{X>Y\}=$__________.

10. 设$X_1,X_2,\cdots,X_{100}$是来自于总体$X\sim N(\mu,100)$的样本, 则$D\left(\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}X_i\right)=$_______.

二 计算题

11. 盒中装有标号为$1\sim10$的10个球，随机无放回取出3个球，取出的球中最大的标号是X，求：

(1) 最大标号超过6的概率；　　(2) X的分布律.

12. 一项血液化验有95%的把握诊断某种疾病，但用于健康人也有1%的“伪阳性”结果，该疾病的患者事实上仅占总人口的0.5%，如果全民检验，结果为阳性的概率是多少？若某人化验结果为阳性，则此人确实患病的概率是多少？

13. 两人相约去车站乘车, 设他们的到达时刻X, Y相互独立, 且都服从上午9点到10点之间的均匀分布$U(0,1)$,（单位：小时）

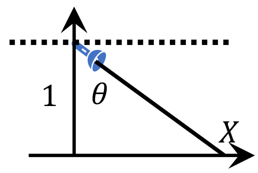
(1) 9点10分有一辆车到达车站, 求他们都没有赶上这班车的概率；

(2) 求后到者的到达时刻$T = \text{Max}\,(X, Y)$的概率密度函数和数学期望.

14. 光源离地面高度为1, 与竖直方向的夹角$\theta \sim U[-\pi/2\,, \pi/2]$, 地面上的光点坐标是$X$, 求：

(1) $P\{X \leq \sqrt{3}\}$；

(2) X的分布函数和概率密度函数.



15. 设(X,Y)的概率密度函数为：$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\ 0<y<2x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，

(1)求边缘密度函数$f_X(x), f_Y(y)$；(2)求$\text{Cov}(X,Y)$.

16. 某种彩票的中奖概率p未知, 设每次中奖与否相互独立,

(1)某人购买了100张彩票, 如果已知$p=0.01$, 求他至少中奖一次的概率；

(2)m个人每人购买了n张彩票, 中奖次数分别是$x_1, x_2, \cdots, x_m$, 求p的矩估计和最大似然估计.

自测题三

一 选择填空题

1. 设A,B,C为三个随机事件，且$P(C|AB)=1$, 则（　）

A. $P(C)=P(AB)$　　　　B. $P(C)=P(A\cup B)$

C. $P(C)\ge P(A)+P(B)-1$　　　　D. $P(C)\le P(A)+P(B)-1$

2. 设随机变量 X的概率密度函数是$f(x)=\begin{cases} ax^{-\frac{3}{2}}, & 1<x<9 \\ 0, & 其他 \end{cases}$，则$a=$（　）

A. $1/2$　　B. $1/3$　　C. $2/3$　　D. $3/4$

3. 将长度 1 米的线段随机分为 3 段，这三段能围成三角形的概率是（　）

A. $1/2$　　B. $1/3$　　C. $1/4$　　D. $4/9$

4. 设二维随机变量$(X,Y)\sim N(0,1,1,1,0)$，则下列事件中概率为0.5的是(　　)

A. $\{X+Y\le 0\}$　　B. $\{X+Y\le 1\}$　　C. $\{X-Y\le 0\}$　　D. $\{X-Y\le 1\}$

5. 英语考试的通过率$X\sim U(\theta,1)$，随机调查了n所学校，得到一组样本：$x_1,x_2,\cdots,x_n$，得知$x_{(1)}=0.64$，$x_{(n)}=0.98$，$\bar{x}=0.8$, 则θ的矩估计$\hat{\theta}_1$与最大似然估计$\hat{\theta}_2$是(　　)

A. $\hat{\theta}_1=0.8,\quad \hat{\theta}_2=0.98$　　　　B. $\hat{\theta}_1=0.6,\quad \hat{\theta}_2=0.81$

C. $\hat{\theta}_1=0.6,\quad \hat{\theta}_2=0.64$　　　　D. $\hat{\theta}_1=0.64,\quad \hat{\theta}_2=0.81$

6. 设(X,Y)服从$D=\{(x,y)\big||X|+|Y|\le 2\}$上的均匀分布，则$P\{X^2<Y\}=$______________.

7. 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度函数为：$f(x,y)=\begin{cases} 6x, & 0\le x\le y\le 1, \\ 0, & else \end{cases}$

则$P\{X+Y\le 1\}=$____________________.

8. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$是来自正态总体$N(\mu,1)$的样本，样本均值$\bar{x}=5$，总体均值μ的置信度为0.95的置信区间是______________________.

二 计算题

1. 已知盒中有2个白球和3个黑球，每次从中任取一球，取后不放回，直到两种颜色的球都取到为止，此时的取球次数是X，求X的分布律和$E(X)$.

2. 把标号是a, b两个球随机放入标号为1,2,3,4的四个盒子，X, Y分别表示放入标号为1,2的盒中的球的个数，求(X, Y)的联合分布律相关系数ρ_{XY}

3.设随机变量X的概率密度函数$f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & -1 \le x \le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 求：

(1) X的分布函数$F(x)$；

(2) 求$|X|$的数学期望与方差.

4. 设二维随机变量(X,Y)服从区域$D=\{(X,Y)|0\le x,y\le 2\}$上的均匀分布，

(1) 求$P\{X\ge 1\}$，$P\{\min(X,Y)<1\}$；

(2) 随机事件$A=\{X>a\}$与$B=\{Y>a\}$，且$P(A\cup B)=0.75$, 求a；

(3) 求$X+Y$的概率密度函数

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，其中μ,σ是未知参数，

$$\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n}X_i\text{，}S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{n}(X_i-\bar{X})^2,\quad T=\bar{X}^2-\frac{1}{n}S^2$$

(1) 证明 $\bar{X}$ 和 S^2 分别是 μ 和 σ^2 的无偏估计；(2) 证明 T 是 μ^2 的无偏估计.

6. 测量零件长度时的误差$X \sim N(\mu, 0.5)$（单位：毫米），测量了200次，平均误差$\bar{x} = 0.1$，

(1) 在$\mu = 0$时，计算$P\{|\bar{X}| \geq 0.1\}$；

(2) 根据测量结果，可否认为 μ 显著不为 0？（取显著性水平$\alpha = 0.05$）

7. 设离散型总体X的分布是：

$$P\{X = 1\} = 1 - \theta，P\{X = 2\} = \theta - \theta^2，P\{X = 3\} = \theta^2$$

从总体中随机抽取样本容量为n的样本，其中 1，2，3 各有X_1, X_2, X_3个，$X_1 + X_2 + X_3 = n$,

(1) 求θ的最大似然估计$\hat{\theta}$；

(2) 求常数a_1, a_2, a_3，使 $T = a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3$ 是θ的无偏估计.

8. 设二维随机变量X,Y的联合密度函数为：$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0,y>0, \\ 0, & 其他 \end{cases}$，求：

(1) $P\{X<Y\}$； (2) 随机变量$Z=X+Y$的概率密度函数$f_Z(z)$.

9. 设总体X的概率密度函数$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^2}xe^{-\frac{x}{\theta}}, & x>0 \\ 0, & x\le 0\end{cases}$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是来自总体$X$的样本，

(1)求θ的矩估计和最大似然估计

(2)判断上述估计是否是无偏估计?