1. 一家工厂生产的灯装在盒子里，盒中有15盏灯，若盒中有一盏有缺陷的灯，

(1) 任取三盏灯测试，未检查到有缺陷的灯的概率是多少？（3 分）

(2) 每盒应测试多少个灯，以确保发现有缺陷的灯的概率超过50%？（3 分）

(1). $\dfrac{C_{14}^{3}}{C_{15}^{3}} = \dfrac{4}{5}$ (2) $1 - \dfrac{C_{14}^{n}}{C_{15}^{n}} = 1 - \dfrac{15-n}{15} = \dfrac{n}{15} > 50\%$, $n=8$.

2. 设A,B为随机事件，在什么条件下$P(A\cup B),P(AB)$取得最值？

(1) 如果$P(A)=0.3,\ P(B)=0.5$ （5 分） (2) 如果$P(A)=0.7,\ P(B)=0.5$ （5 分）

(1). A, B 互不相容时，$P(A\cup B)_{max}=0.8$，$P(AB)_{min}=0$.

$A\subseteq B$ 时 $P(A\cup B)_{min}=0.5$，$P(AB)_{max}=0.3$

(2). $A\cup B=S$ 时，$P(A\cup B)_{max}=1$，$P(AB)_{min}=0.2$

$B\subseteq A$ 时，$P(A\cup B)_{min}=0.7$，$P(AB)_{max}=0.5$

3. 事件A的优势比定义为$\alpha=\dfrac{P(A)}{P(\bar{A})}$，若已知事件$B$发生，事件$A$的新的优势比为$\beta=\dfrac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)}$

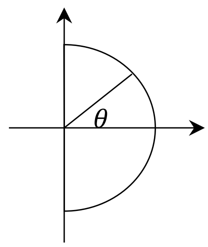
(1) 证明：$\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{P(B|A)}{P(B|\bar{A})}$ （2 分）

(2) 已知$\dfrac{P(A)}{P(\bar{A})}=\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{P(B|A)}{P(B|\bar{A})}=\dfrac{1}{4}$，求$P(A|B),P(\bar{A}|B)$ （4 分）

(1). $\dfrac{\beta}{\alpha} = \dfrac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)}\cdot\dfrac{P(\bar{A})}{P(A)} = \dfrac{P(A|B)/P(A)}{P(\bar{A}|B)/P(\bar{A})} = \dfrac{P(B|A)}{P(B|\bar{A})}$.

(2). $\dfrac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)} = \dfrac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(\bar{A})P(B|\bar{A})} = \dfrac{1}{6}$. $P(A|B)=\dfrac{1}{7}$. $P(\bar{A}|B)=\dfrac{6}{7}$.

4. 如图所示，设右半单位圆上的动点与圆心连线和x轴正半轴的夹角$\theta\sim U(-\pi/2,\pi/2)$，在水平光线照射下，动点在$y$轴上的投影$Y=\sin\theta$



(1) 求$P(|Y|\le 0.5)$ （4 分） (2) 求Y的概率密度函数和方差（6 分）

(1) $P(|Y|\le 0.5) = P\left(-\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}$

(2). $-1\le y\le 1$ 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\sin\theta\le y)=P\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\arcsin y\right)$

$= \frac{1}{\pi}\arcsin y + \frac{1}{2}$.

$\therefore f_Y(y)=\dfrac{d}{dy}F_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-y^2}}, & -1<y<1\\ 0, & else\end{cases}$. $E(Y)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{y}{\pi\sqrt{1-y^2}}dy \overset{或}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\frac{1}{\pi}dx=0$.

$D(Y)=E(Y^2)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{y^2}{\pi\sqrt{1-y^2}}dy$ 或 $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cdot\frac{1}{\pi}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}$.

5. 盒中有两个白球和三个黑球, 每次从中随机取出一球, 观察颜色后不放回, 直到把两个白球都取出为止, 共取出了X个球

(1) 求X的分布律　(4 分)　　(2) 求X的数学期望和方差　(6 分)

$$X \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix} \qquad E(X)=4, \quad E(X^2)=17. \quad D(X)=1.$$

6. 甲乙两人打网球比赛, 在一局中如果出现平分, 需要一方连续赢下两分才赢得这局, 如果各得一分就再次平分, 每回合的胜负相互独立, 甲在每回合中获胜的概率是p, A表示“在接下来的两回合后这局结束”, B表示“比赛在两回合后又变成了平分”, C表示“甲赢得了这一局”, 显然$P(C)=P(C|B)$

(1) 求$P(A), P(B), P(C|A)$　(6 分)　　(2) 通过计算证明$P(C)=P(C|A)$　(5 分)

(1). $P(A)=p^2+(1-p)^2=2p^2-2p+1, \quad P(B)=2p(1-p).$

$$P(C|A)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{p^2}{2p^2-2p+1}$$

(2) $P(C)=P(A)P(C|A)+P(B)P(C|B)=p^2+(2p-2p^2)P(C).$ $\therefore P(C)=\dfrac{p^2}{2p^2-2p+1}.$

7. 设连续型随机变量X的分布函数和概率密度是$F_X(x)$, $f_X(x)$, 用它们来表示以下随机变量函数 $Y=g(X)$的分布函数$F_Y(y)$和概率密度$f_Y(y)$

(1) $Y=-X$　(4 分)　　(2) $Y=X^2$　(4 分)

(1) $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(-X\le y)=P(X\ge -y)=1-F_X(-y)$ 　$f_Y(y)=f_X(-y)$

(2) $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le \sqrt{y})=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y}),$

$$f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})\right)$$

8. 已知随机变量X的概率密度函数为$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}x(2-x), & 0\le x\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}$

(1) 求X的分布函数$F_X(x)$　(4 分)　　(2) 求X的数学期望和方差　(5 分)

(3) 求$Y=\sqrt{x}$的概率密度函数$f_Y(y)$　(5 分)

(1). $$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{3}{4}x^2-\frac{x^3}{4}, & 0\le x\le 2 \\ 1, & x>2. \end{cases}$$

(2). $E(X)=\int_0^2\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{4}x^3\right)dx=1$

$E(X^2)=\int_0^2\left(\frac{3}{2}x^3-\frac{3}{4}x^4\right)dx=\frac{6}{5}, \quad D(X)=\frac{1}{5}.$

(3). $0\le y\le\sqrt{2}$时, $P(Y\le y)=P(\sqrt{X}\le y)=P(0\le X\le y^2)=\int_0^{y^2}\frac{3}{4}(2x-x^2)dx.$

$$\therefore f_Y(y)=\frac{d}{dy}F_Y(y)=\begin{cases} 3y^3-\frac{3}{2}y^5, & 0\le y\le\sqrt{2} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

9. 在独立重复试验中，每次试验成功的概率是p，当成功次数为r时试验结束，X表示此时的试验次数，称X服从参数为r,p的负二项分布，记为$X\sim nb(r,p)$

(1) 若$X\sim nb(3,1/3)$，求$P(X=5)$　（4 分）　(2) 若$X\sim nb(2,1/2)$，求$P(X\le n)$　（4 分）

(3) 若$X\sim nb(2,1/2)$，要在n次内结束试验的概率不小于$3/4$，求n的最小值　（4 分）

(1). $P(X=5) = C_4^2\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{81}$

(2). $P(X\le n) = 1-P(X>n) = 1-P($n次试验中成功0次或1次$)$

$= 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n - n\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(3). $P(X\le n)\ge\frac{3}{4}$. $2^{n-2}-n-1\ge 0$, $n\ge 5$

10. 已知随机变量X的分布函数

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

(1) 求$D(X)$　（3 分）

(2) 随机变量$Y=g(X)$的分布函数是$F\left(\frac{x-1}{2}\right)$，求$Y=g(X)$的表达式和$E(Y)$　（4 分）

(3) 设$G(x)=\frac{1}{2}F\left(\frac{x-1}{2}\right)+\frac{1}{2}F(2x)$，证明$G(x)$是某个随机变量$Z$的分布函数并求$E(Z)$　（6 分）

(1). $X\sim N(0,\frac{1}{2})$　$D(X)=\frac{1}{2}$

(2). $F\left(\frac{x-1}{2}\right) = P\left(X\le\frac{x-1}{2}\right) = P(2X+1\le x) = P(g(X)\le x)$.

$\therefore$ $Y=2X+1$,　$E(Y)=2E(X)+1=1$

(3). $G(x)$ 单调不减 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}G(x)=0$. $\therefore$ $G(x)$是分布函数

Z 的 p.d.f 是 $\frac{dG(x)}{dx} = \frac{1}{4}f\left(\frac{x-1}{2}\right)+f(2x)$. ($f(x)$ 是 X 的 p.d.f)

$\therefore E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\left(\frac{1}{4}f\left(\frac{x-1}{2}\right)+f(2x)\right)dx = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}xf\left(\frac{x-1}{2}\right)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}xf(2x)dx$

$\overset{\frac{x-1}{2}=t}{=}$ $\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}(2t+1)f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty}tf(t)\,dt+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,dt=\frac{1}{2}$.