1. 曲线$\Gamma:\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4} \\ y=4 \end{cases}$在点$(2,4,5)$处的切线与横轴的正向所成的角度为（ ）. C

A. $\dfrac{\pi}{2}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\dfrac{\pi}{6}$

2. 已知$(axy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1+by\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$是某一个函数的全微分，则$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$取值分别为（ ）. B

A. -2和2　　B. 2和-2　　C. -3和3　　D. 3和-3

3. 设$f(x)$是连续函数，则$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r=$（ ）. C

A. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$　　B. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$

C. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

4. 设 L 为直线 $y=x$ 上从点（0，0）到点（1，1）之间的一段，则曲线积分

$\int_L yds=$（ ）. D

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. 1　　C. 0　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

5. 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!}x^n$的和函数为（ ）. A

A. $(x+1)e^x$，$-\infty<x<+\infty$　　B. $(x-1)e^x$，$-\infty<x<+\infty$

C. $(1-x)e^x$，$-\infty < x < +\infty$　　　　D. xe^x，$-\infty < x < +\infty$

二.　填空题：（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设二阶非齐次线性微分方程的三个特解为 $y_1 = 1+\sin 2x$，$y_2 = 1+\cos 2x$ 和 $y_3 = 1$，则该方程的通解为________．　$y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + 1$.

2. 函数 $z = 3x^2 y - y^2$ 在点 P（2，3）处沿曲线 $y = x^2 - 1$ 朝 x 增大方向的方向导数为________．$\dfrac{60}{\sqrt{17}}$

3. 已知空间闭区域 $\Omega = \left\{(x,y,z)\middle| x^2+y^2+z^2 \le R^2\right\}$，则 $\iiint\limits_{\Omega} x^2 \mathrm{dv} =$ ________．

$\dfrac{4}{15}\pi R^5$.

4. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n^\alpha}$ 收敛，则 α 取值为________．　$\alpha > \dfrac{1}{2}$

5. 设函数 $f(x) = x^2(-\pi \le x \le \pi)$ 的傅里叶级数展开式为 $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx)$，则其中系数 $a_3 =$________．　$-\dfrac{4}{9}$

1．设 $z+\ln z+\int_{y}^{x}e^{-t^2}dt=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial x\partial y}$.

解：方程两边对x求导，$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+e^{-x^2}=0$，得 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{ze^{-x^2}}{1+z}$ （3 分）

方程两边对y求导，$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}-e^{-y^2}=0$，得 $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{ze^{-y^2}}{1+z}$ （3 分）

从而 $\frac{\partial z}{\partial x\partial y}=-\frac{\frac{\partial z}{\partial y}e^{-x^2}(1+z)-ze^{-x^2}\frac{\partial z}{\partial y}}{(1+z)^2}=-\frac{\frac{\partial z}{\partial y}e^{-x^2}}{(1+z)^2}$ （2 分）

$=-\frac{\frac{ze^{-y^2}}{1+z}e^{-x^2}}{(1+z)^2}=-\frac{ze^{-x^2-y^2}}{(1+z)^3}$ （2 分）

2. 求函数 $z=e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2)$ 的极值.

解：由方程组：$\begin{cases} z'_x=2e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2+8x-3y)=0 \\ z'_y=3e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2-2x+2y)=0 \end{cases}$ （2 分）

得驻点$P_1(0,0)$和$P_2(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2})$ （2 分）

$z''_{xx}=4e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2+16x-6y+4)$

$z''_{xy}=6e^{2x+3y}(8x^2-6xy+3y^2+6x-y-1)$

$z''_{yy}=9e^{2x+3y}\left(8x^2-6xy+3y^2-4x+4y+\frac{2}{3}\right)$ （2 分）

在驻点$P_1(0,0)$处: $\mathrm{A}=16, \mathrm{B}=-6, \mathrm{C}=6, \mathrm{AC}-\mathrm{B}^2>0$，$\mathrm{A}>0$

所以函数 z 在该点处取得极小值 z(0,0)=0; （2 分）

在驻点$P_2(-\frac{1}{4},-\frac{1}{2})$处: $\mathrm{A}=14e^{-2}, \mathrm{B}=-9e^{-2}, \mathrm{C}=\frac{3}{2}e^{-2}, \mathrm{AC}-\mathrm{B}^2<0$

所以函数 z 在该点处无极值. （2 分）

3. 求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 上位于 $z=\dfrac{R}{3}$ 和 $z=\dfrac{R}{2}$ 之间的部分球面的面积.

解：曲面方程：$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ ，$\dfrac{R}{3}\le z\le\dfrac{R}{2}$

在 xoy 面上的投影区域 $D_{xy}:\dfrac{3}{4}R^2\le x^2+y^2\le\dfrac{8}{9}R^2$ （2 分）

$$ds=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy \quad （3 分）$$

$$\iint_\Sigma ds=\iint_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy=R\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}R}^{\frac{2\sqrt{2}}{3}R}\frac{rdr}{\sqrt{R^2-r^2}}=\frac{\pi R^2}{3} \quad （5 分）$$

4. 计算曲线积分 $I=\oint_L\dfrac{ydx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}$,其中 L 为曲线 $4x^2+y^2-8x=0$ 的正向.

4. 计算曲线积分 $I=\oint_L \frac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}$，其中 L 为曲线 $4x^2+y^2-8x=0$ 的正向.

解：令 $P=\frac{y}{(x-1)^2+y^2}$，$Q=\frac{-(x-1)}{(x-1)^2+y^2}$，

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{(x-1)^2-y^2}{\left[(x-1)^2+y^2\right]^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},\qquad (2\text{ 分})$$

P,Q 在 $(1,0)$ 不连续，取一小圆周：$L_1:(x-1)^2+y^2=r^2(0<r<1)$ 顺时针

$L+L_1$ 构成复连域 D'，由 Green 公式，

$$\oint_{L+L_1}\frac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}=\iint_{D'}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\qquad (4\text{ 分})$$

$$\therefore \oint_L\frac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}=-\oint_{L_1}\frac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{r\sin t\cdot(-r\sin t)-r\cos t\cdot r\cos t}{r^2}\mathrm{d}t$$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=-2\pi.$$

(4 分)

5. 计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma} xy(y+1)dydz+yz^2dzdx+x^2zdxdy$ 的值，其中 Σ 是由曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{1-y^2}, \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面的上侧.

解：曲面Σ：$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $x^2+y^2\le 1$，取上侧。 (2 分)

添补曲面 Σ_0：$z=0$, $x^2+y^2\le 1$，取上侧。

对封闭曲面 $\Sigma+\Sigma_0^-$ 使用高斯公式，得

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_0^-} xy(y+1)dydz+yz^2dzdx+x^2zdxdy=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2+y)dv \quad (3\text{ 分})$$

$$=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1\rho^4\sin\varphi d\rho=\frac{2\pi}{5} \quad (3\text{ 分})$$

另 $\iint_{\Sigma_0} xy(y+1)dydz+yz^2dzdx+x^2zdxdy=0$

从而$I=\iint_{\Sigma} xy(y+1)dydz+yz^2dzdx+x^2zdxdy=\frac{2\pi}{5}$ (2 分)

6. 已知 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\ne 0, \\ 1, & x=0, \end{cases}$ 将 $f(x)$ 展开为 x 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

解： $\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}dx$ （2 分）

$$=\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\mathrm{d}x \qquad （2 分）$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in[-1,1] \qquad （2 分）$$

$$x\neq 0,\quad f(x)=\frac{1+x^2}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n},x\in[-1,1]\setminus\{0\} \qquad （2 分）$$

令 $x=1,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{1}{2}[f(1)-1]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$ （2 分）

7. 求微分方程 $\begin{cases} y'-y=f(x) \\ y(0)=0 \end{cases}$ 的解，其中 $f(x)=\begin{cases} x,\ 0\le x\le 2 \\ 2,\ \ x>2 \end{cases}$.

解：先在区间 $[0,2]$ 上求解 $\begin{cases} y'-y=x \\ y(0)=0 \end{cases}$

$$y=e^{\int dx}[C_1+\int xe^{\int -dx}dx]=C_1e^x-x-1. \qquad （3 分）$$

由初值 $y(0)=C_1-1=0\Rightarrow C_1=1.\ \ \therefore y=e^x-x-1,\ 0\le x\le 2.$ （1 分）

在区间 $[2,+\infty)$ 上求解 $\begin{cases} y'-y=2 \\ y(2)=e^2-3 \end{cases}$

$$y=e^{\int dx}[C_2+\int 2e^{\int -dx}dx]=C_2e^x-2. \qquad （3 分）$$

由初值 $y(2)=C_2e^2-2=e^2-3\Rightarrow C_2=1-e^{-2}.$

$$\therefore y=(1-e^{-2})e^x-2,\ x>2. \qquad （1 分）$$

综上，所求解为 $y=\begin{cases} e^x-x-1, & 0\le x\le 2 \\ (1-e^{-2})e^x-2, & x>2 \end{cases}$ （2 分）