二 叉 树

学习目标

- 二叉树的定义
- 几种特殊的二叉树
- 二叉树的基本性质
- 二叉树的抽象数据类型定义

二叉树的定义

二叉树是应用最广泛的树形结构

二叉树每个结点有且最多有两个子树，
并且子树有左右区别（有序树）

二叉树的定义

二叉树是由结点组成的有限集合T，用$|T|$表示结点的数量。

二叉树具备以下性质：

（1） $|T| = 0$，T是空树。

（2） $|T| > 0$，

T中有且仅有一个特殊结点$r \in T$，称为二叉树的根结点；

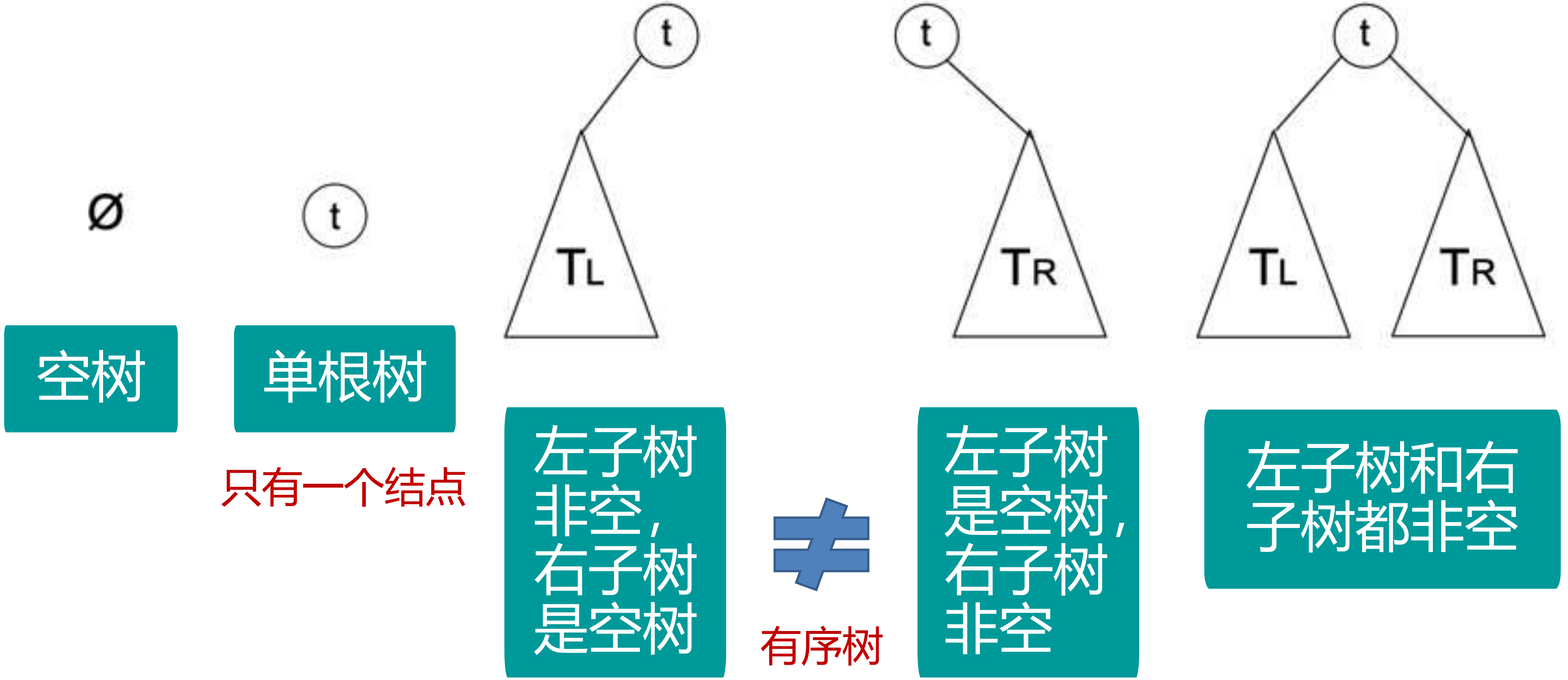
其它结点$T - \{r\}$划分为两个不相交的子集T_L和T_R。

T_L是r的左子树，本身是一棵二叉树，如果$|T_L| > 0$, T_L的根r_L是r的左子结点，r是r_L的父结点；

T_R是r的右子树，也是一棵二叉树，如果$|T_R| > 0$，其根r_R是r的右子结点，r是r_R的父结点。

二叉树的定义

二叉树的5种基本形态：



思考

二叉树是度为 2 的树吗?

二叉树是度小于等于 2 的树吗?

注意

树和二叉树是两种不同的树结构，二叉树不是树的特例，而是一种特殊形态的树。

树和二叉树的2个主要差别：

1、树中结点的最大度数没有限制，而二叉树结点的最大度数为2；

2、树的结点无左、右之分，而二叉树的结点有左、右之分。

虽然二叉树与树的概念不同，但是有关树的基本术语对二叉树都适用。

二叉树的特点

- 二叉树有什么特点?

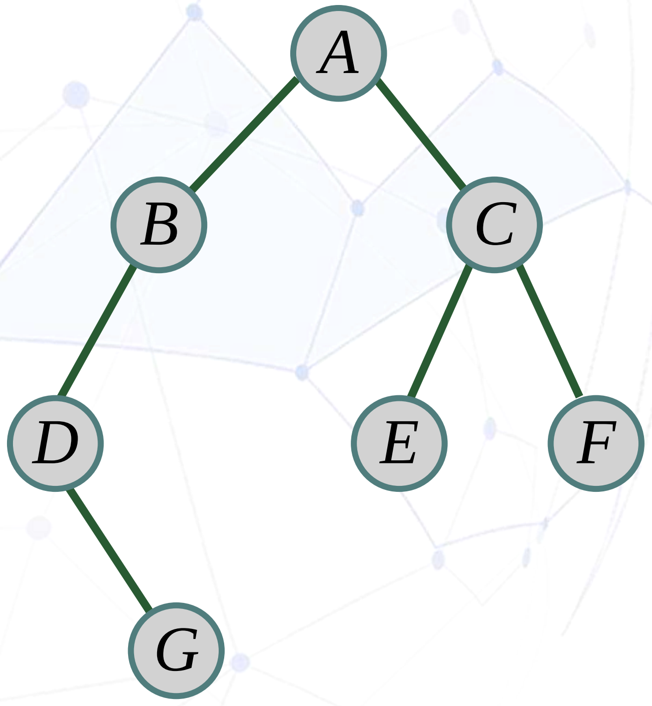
  （1）每个结点最多有两棵子树

  （2）二叉树是有序的，其次序不能任意颠倒

- 为什么要研究二叉树?

  （1）二叉树是最简单的树结构

  （2）将树转换为二叉树，
  从而利用二叉树解决树的有关问题



二叉树的抽象数据类型定义

ADT BiTree

DataModel

二叉树由一个根结点和两棵互不相交的左右子树构成，结点具有层次关系

Operation

- BinaryTreeNode(): 创建一个二叉树结点
- CreatBinaryTree(*value*, *left_tree*, *right_tree*): 构造二叉树，根结点的数据为*value*, 左子树和右子树分别是*left_tree*和*right_tree*
- IsLeaf(*tree*, *node*): 如果二叉树*tree*中结点*node*为叶结点，返回**true**；否则返回**false**
- Height(*tree*): 返回二叉树*tree*的高度（深度）
- PreOrder(*tree*): 前序遍历二叉树*tree*
- InOrder(*tree*): 中序遍历二叉树*tree*
- PostOrder(*tree*): 后序遍历二叉树*tree*
- LevelOrder(*tree*): 层序遍历二叉树*tree*

endADT

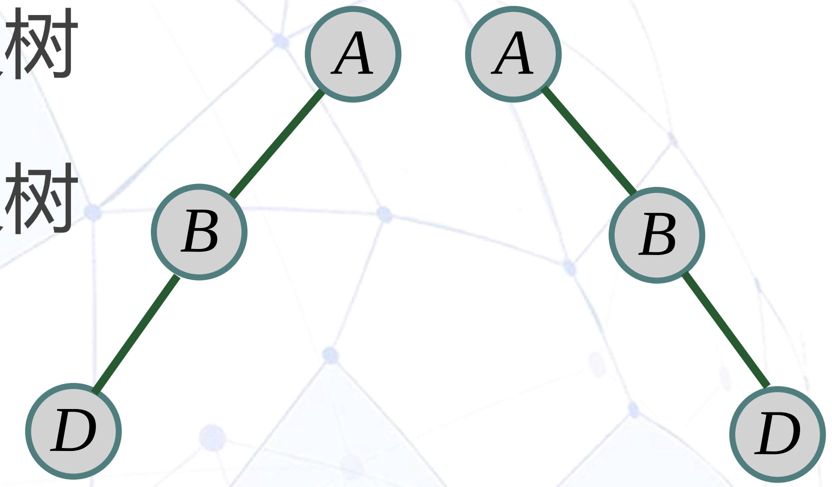
形态特殊的二叉树

形态结构特殊、应用广泛的二叉树

- 斜树
- 满二叉树
- 完全二叉树
- 完美二叉树
- 扩充二叉树

斜树、单支二叉树

- **左斜树**：所有结点都只有左子树的二叉树
- **右斜树**：所有结点都只有右子树的二叉树
- **斜树**：左斜树和右斜树的统称



斜树有什么特点呢?

（1）每一层只有一个结点

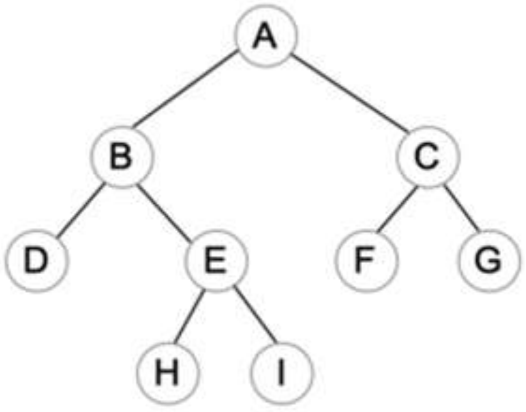
（2）结点个数与其深度相同

斜树是树结构的特例，是从树结构退化成了线性结构

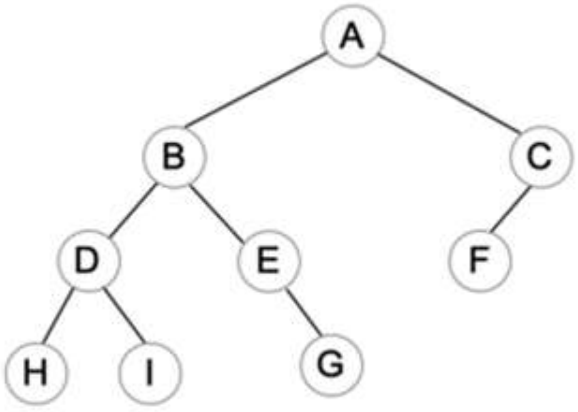
满二叉树

形态结构特殊、应用广泛的二叉树

满二叉树：由度为0的叶结点和度为2的中间结点构成的二叉树，树中没有度为1的结点



满二叉树



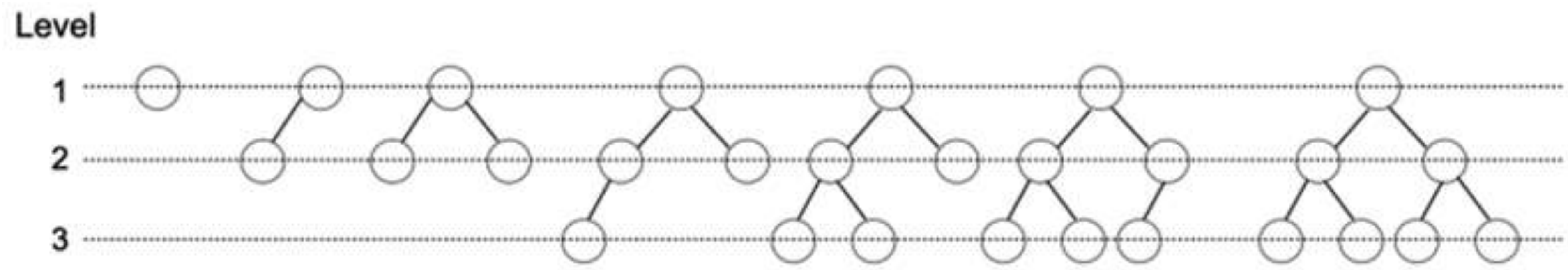
非满二叉树

满二叉树实例：哈夫曼树、表达式树

完全二叉树

形态结构特殊、应用广泛的二叉树

高度$1 \le d \le 3$的所有完全二叉树

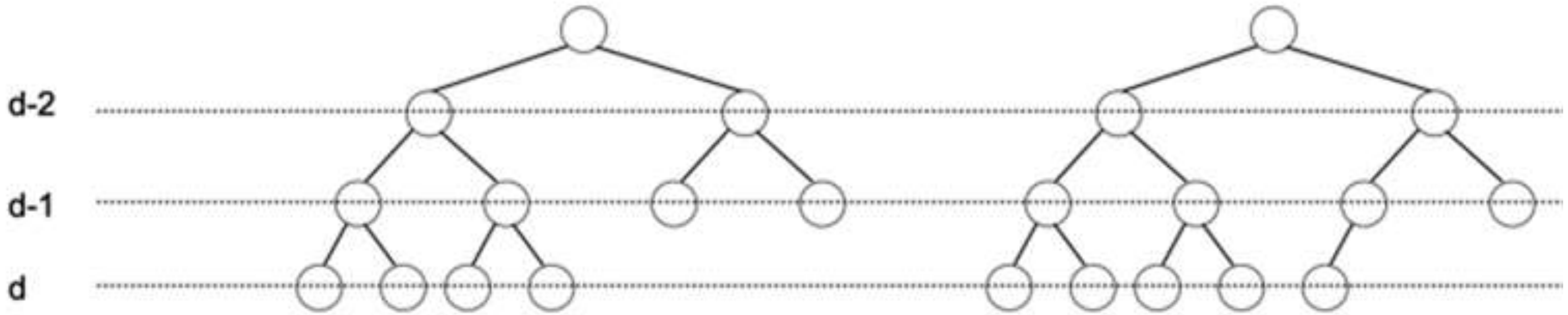


完全二叉树实例：堆

完全二叉树

高度$d > 3$的完全二叉树

形态结构特殊、应用广泛的二叉树



没有度为1的中间结点

只有一个度为1的中间结点且左子树非空

高度$d > 3$的完全二叉树基本形态

(1) 从第1层到第$d-2$层全是度为2的中间结点

(2) 第d层的结点都是叶结点，度为0

(3) 在第$d-1$层，各结点的度从左向右单调非递增排列，同时度为1的结点要么没有，要么只有一个且该结点的左子树非空

完全二叉树

形态结构特殊、应用广泛的二叉树

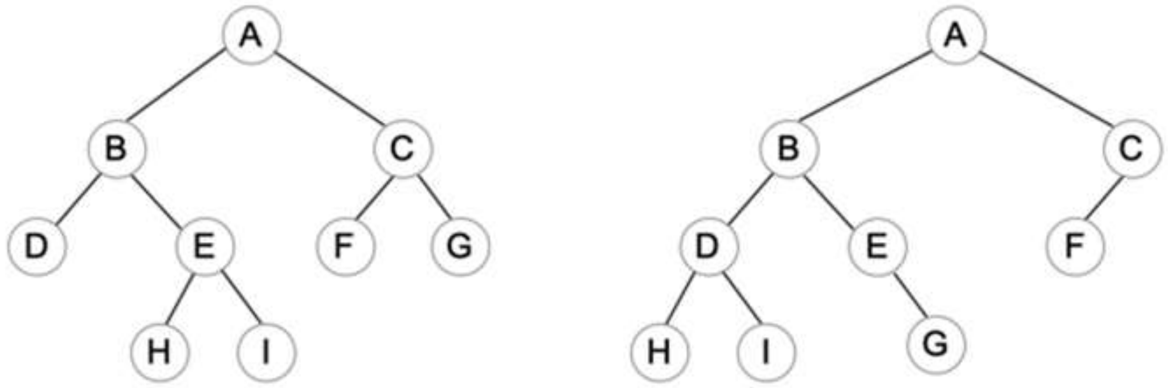
完全二叉树

(1) 从第1层到第$d-2$层全是度为2的中间结点

(2) 第d层的结点都是叶结点，度为0

(3) 在第$d-1$层，各结点的度从左向右单调非递增排列，同时度为1的结点要么没有，要么只有一个且该结点的左子树非空

非完全二叉树示例



理由：度为0的结点D在度为2的结点E的左边，不满足条件(3)

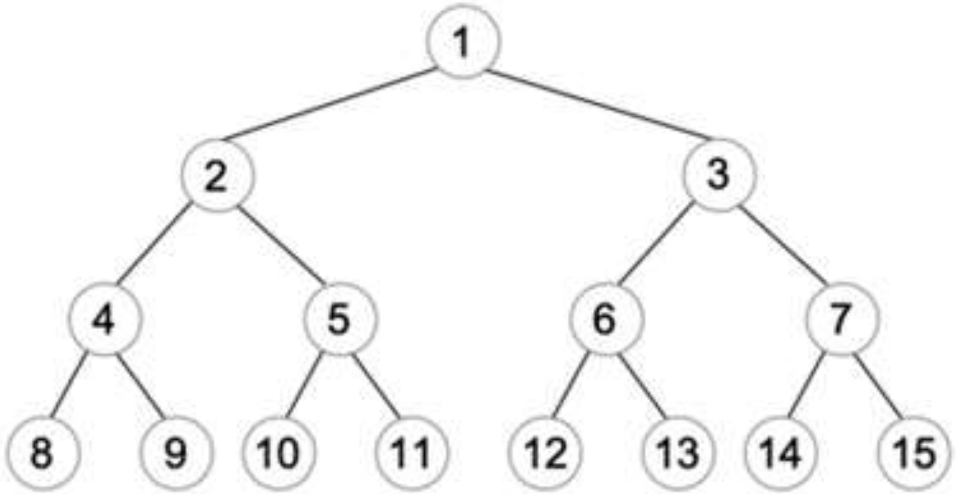
理由1： 结点C的度为1，不满足条件(1)

理由2：结点E的度为1，但左子树为空，不满足条件(3)

完美二叉树

形态结构特殊、应用广泛的二叉树

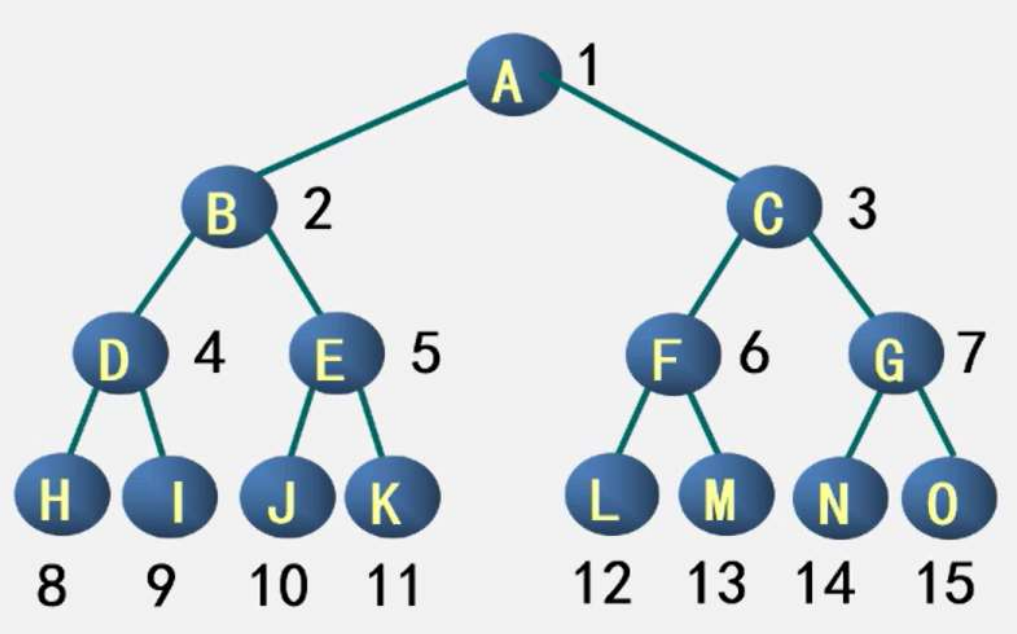
完美二叉树：对于高度（深度）为$d \geq 1$的完全二叉树，如果第d-1层所有结点的度都是2，则该树是一个完美二叉树



完美二叉树中的所有子树都是完美二叉树

去掉完全二叉树最下层的叶结点，由此生成的树是完美二叉树

完美二叉树的特点（2）



(1) 叶子只能出现在最下一层

(2) 只有度为 0 和度为 2 的结点

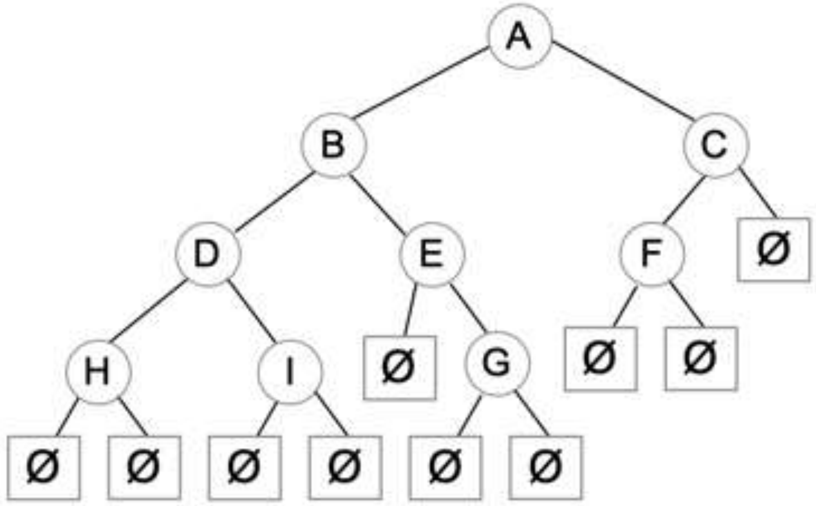
(3) 在同样深度的二叉树中结点个数最多

(4) 在同样深度的二叉树中叶子结点个数最多

扩充二叉树

形态结构特殊、应用广泛的二叉树

扩充二叉树：在二叉树结点的空子树位置添加特殊的结点：空树叶，形成的二叉树称作扩充二叉树



二叉树中所有结点都被扩充成度为2的中间结点

扩充二叉树是满二叉树，并且所有的叶结点都是空树叶

二叉树基本性质

命题5-1：设非空二叉树中度为$i \in [0,2]$的结点数为$\mathbf{n_i}$，则$\mathbf{n_0=n_2+1}$。

证明：

(1) 结点总数 $n = n_0 + n_1 + n_2$，其中子结点数目等于$n - 1$ （根除外）

(2) 中间结点数目为$n_1 + n_2$，并且每个中间结点的子结点都不是其它任何结点的子结点！ （思考）

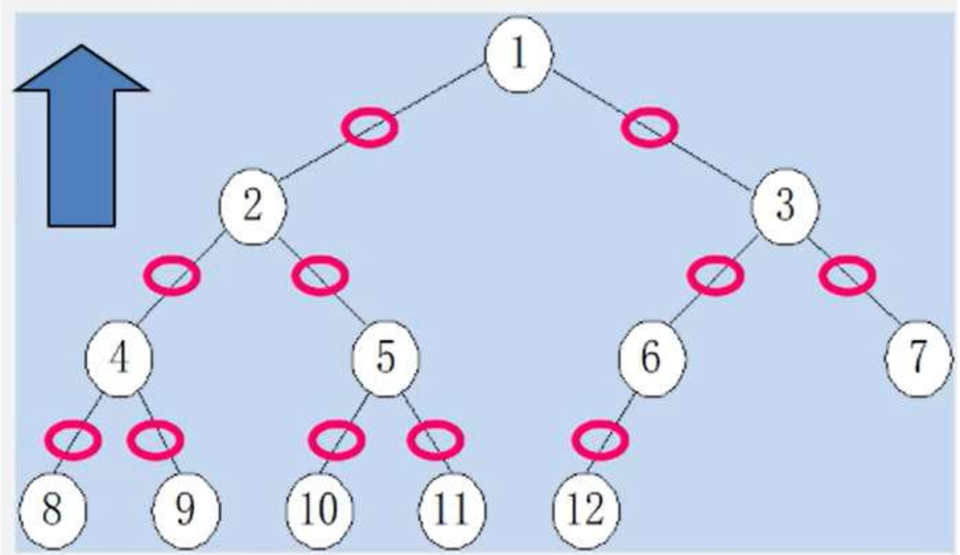
(3) 根据(1)和(2), 子结点数目：$n - 1 = n_0 + n_1 + n_2 - 1 = 2n_2 + n_1$

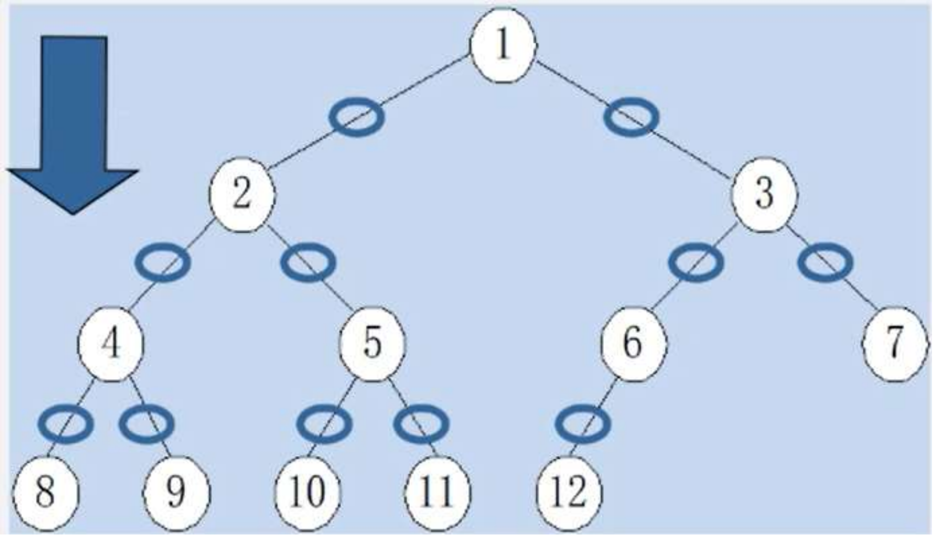
综合上述分析，可得 $n_0 = n_2 + 1$，命题得证。

二叉树基本性质

命题5-1：设非空二叉树中度为$i\in[0,2]$的结点数为n_i，则$n_0=n_2+1$。

假设n是总结点数，B是总边数（也意味着多少对父子关系）



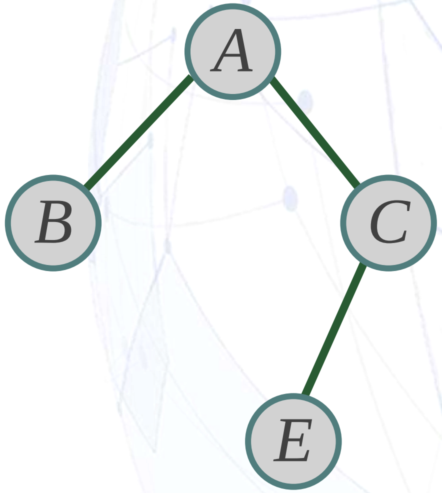


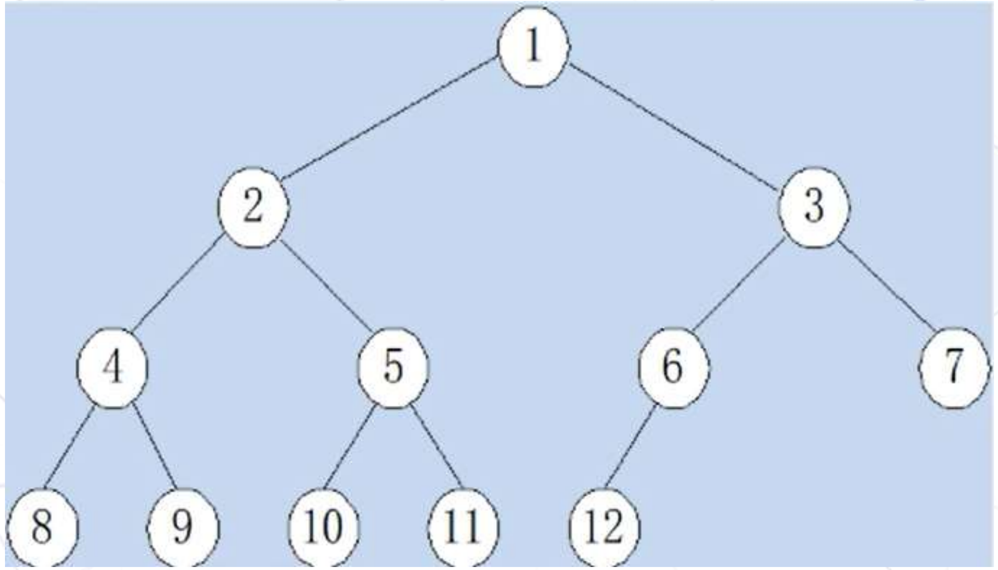
从下往上看，除根结点，每个结点都有一个边与其双亲连接

$$B = n - 1$$

从上往下看，度为2的结点有2个边，度为1的结点对应1个边

$$B = n_2 \times 2 + n_1 \times 1$$





2=1+1

6=5+1

二叉树基本性质

命题5-1：设非空二叉树中度为$i \in [0,2]$的结点数为$\mathbf{n_i}$，则$\mathbf{n_0 = n_2 + 1}$。

定理5-1：（满二叉树定理）非空满二叉树中叶结点数等于中间结点数加1。

证明：满二叉树没有度为1的中间结点，由命题5-1直接得证

二叉树基本性质

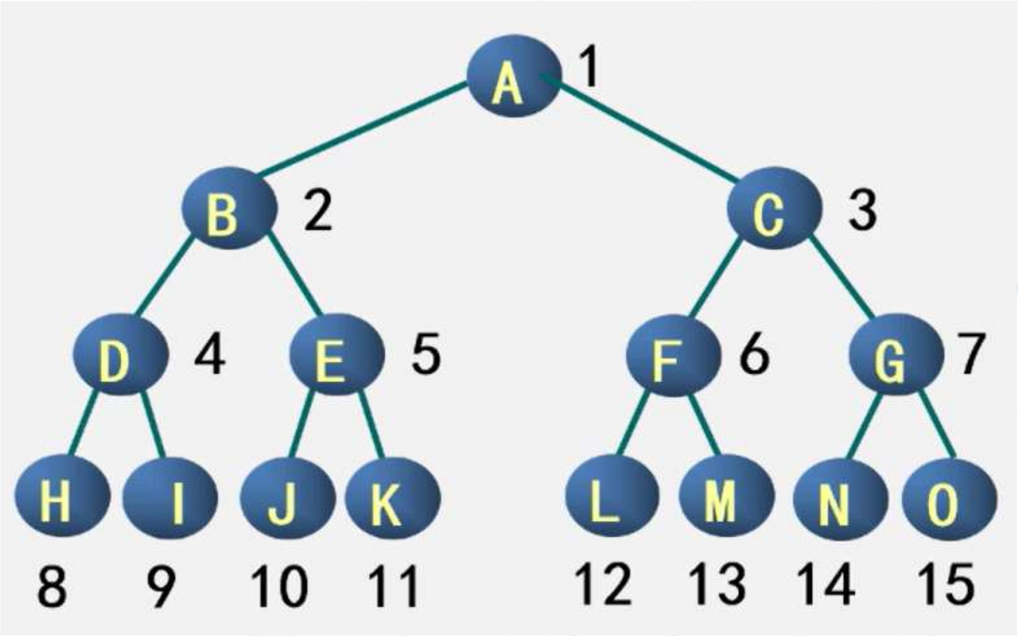
命题5-2：二叉树的第i层最多有 2^{i-1} 个结点 $(i \geq 1)$ 。

证明： 第1层只有根结点，即2^0个结点。
假设第$i-1$层有2^{i-2} 个结点 $(i>1)$。由于每个结点最多只有两个子结点，则第i层的结点数不会超过第$i-1$层结点数的2倍，即2^{i-1} 个结点。

命题5-3：深度（高度）为$d(\geq 1)$的二叉树最多有 2^d-1 个结点。

证明：根据命题5-2，二叉树第$i\in[1,d]$层最多有 2^{i-1} 个结点，因此结点数的最大值等于：

$$\sum_{i=1}^{d} 2^{i-1} = 2^d - 1$$



第1层：$2^0=1$

第2层：$2^1=2$

第3层：$2^2=4$

第4层：$2^3=8$

总共 **1+2+4+8 = 15**

完美二叉树

二叉树基本性质

定理5-2：深度（高度）为$d(\geq 1)$的二叉树是**完美二叉树**的充分必要条件是树中有 $2^d - 1$ 个结点。

充分条件

(1) 根据命题5-3，结点总数等于$2^d - 1$说明每层的结点数达到最大值

(2) 根据命题5-2，第$i+1$层的结点数是第 i 层的结点数的2倍$(1 \leq i < d)$

(3) 根据(2), 二叉树从第1层到第$d-1$层都是度为2的中间结点

因此，结点数达到最大值的二叉树是完美二叉树

必要条件

(1) 完美二叉树第1层的结点数为2^0

(2) 对所有$1 \leq i < d$，第i层的结点都是度为2的中间结点

(3) 第$i+1$层的结点数是第 i 层的结点数的2倍，即 2^i 个结点

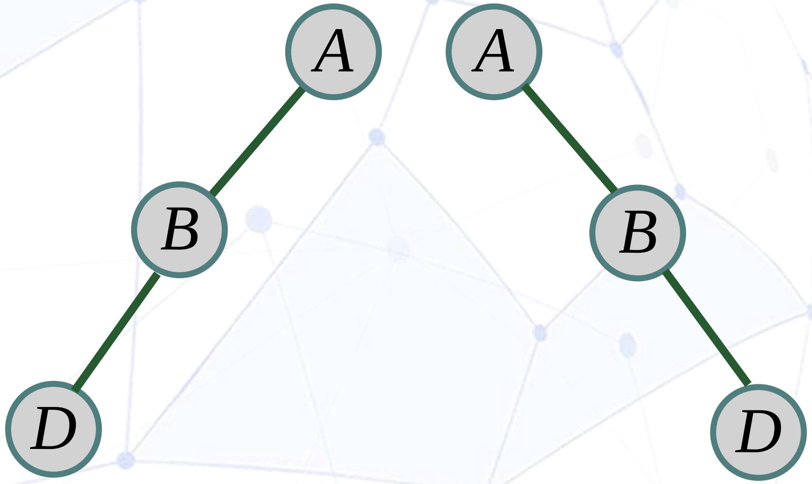
因此，完美二叉树的结点总数：

$$\sum_{i=1}^{d} 2^{i-1} = 2^d - 1$$

思考

二叉树第i层上至少有____个结点?

1



在深度为 k 的二叉树中，最少有多少个结点?

k

完全二叉树的分层编号

完全二叉树的结构特征

设完全二叉树的深度（高度）为$d(\geq 1)$

(1) 从第1层到第$d-1$层的结点构成完美二叉树

(2) 第$d-1$层结点的度从左向右非递增排列，并且度为1的结点最多1个且左子树非空

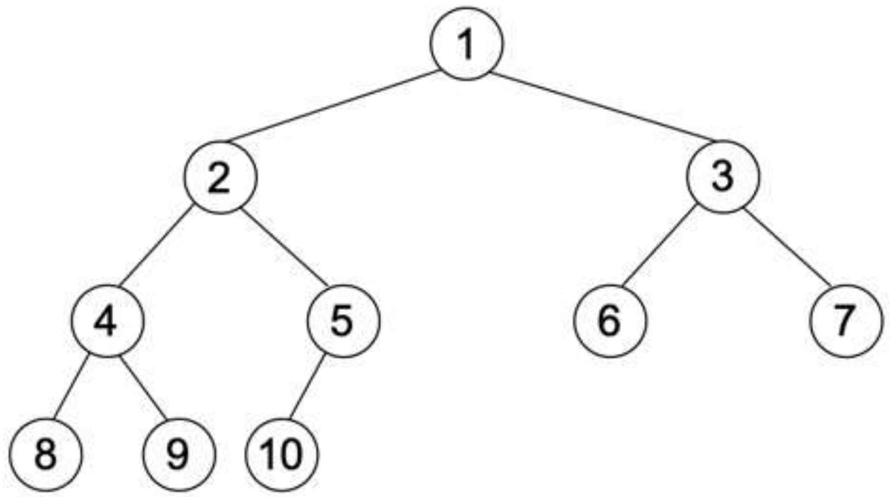
(3) 根据(2)，第d层的叶结点连续集中在最左边

分层编号

(1) 根编号为1

(2) 第$i \in [2, d]$层，左端结点设置为2^{i-1}

(3) 同一层结点，从左向右连续编号



实现对所有结点从上至下、从左向右连续编号！

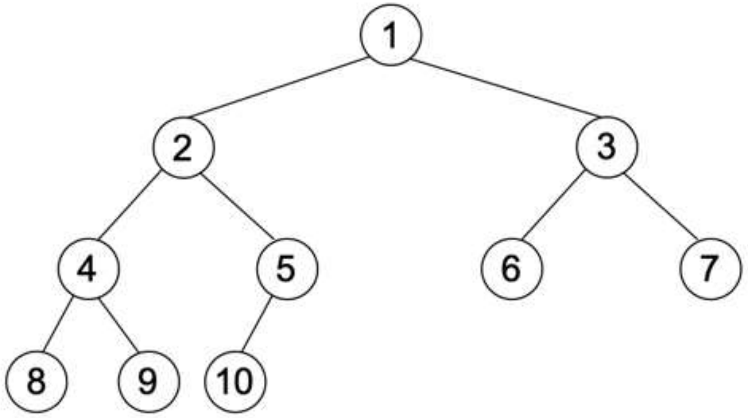
二叉树基本性质

定理5-3：完全二叉树有n个结点$(n \geq 1)$，按层次从左向右连续编号。树中任一结点k $(1 \leq k \leq n)$满足以下性质

(1) 如果$2k \leq n$，则结点 k 的左子结点是 $2k$，否则没有左子结点；

(2) 如果$2k+1 \leq n$，则结点 k 的右子结点是$2k+1$，否则没有右子结点。

(3) 如果 $k > 1$，则结点 k 的父结点是 $\left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor$。



定理5-3是完全二叉树实现顺序存储以及二叉堆的重要性质！

二叉树基本性质

命题5-4：有n个结点$(n \geq 1)$的完全二叉树的深度$d = \lceil \log_2(n+1) \rceil$

或 $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ 。

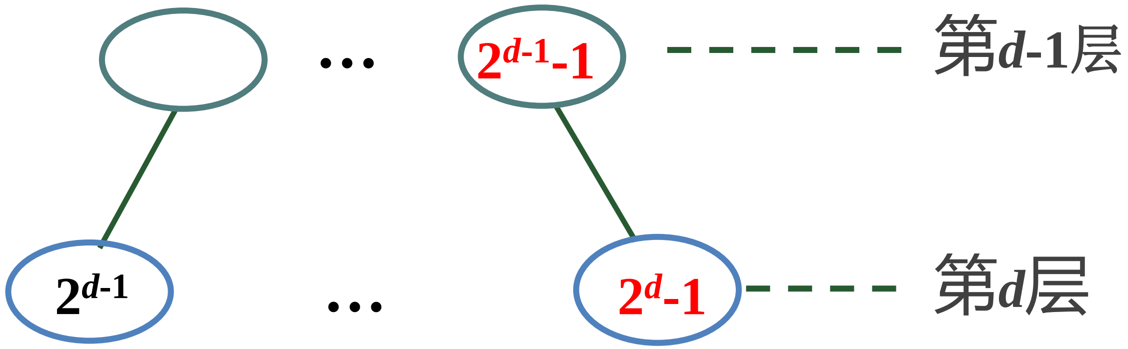
证明：

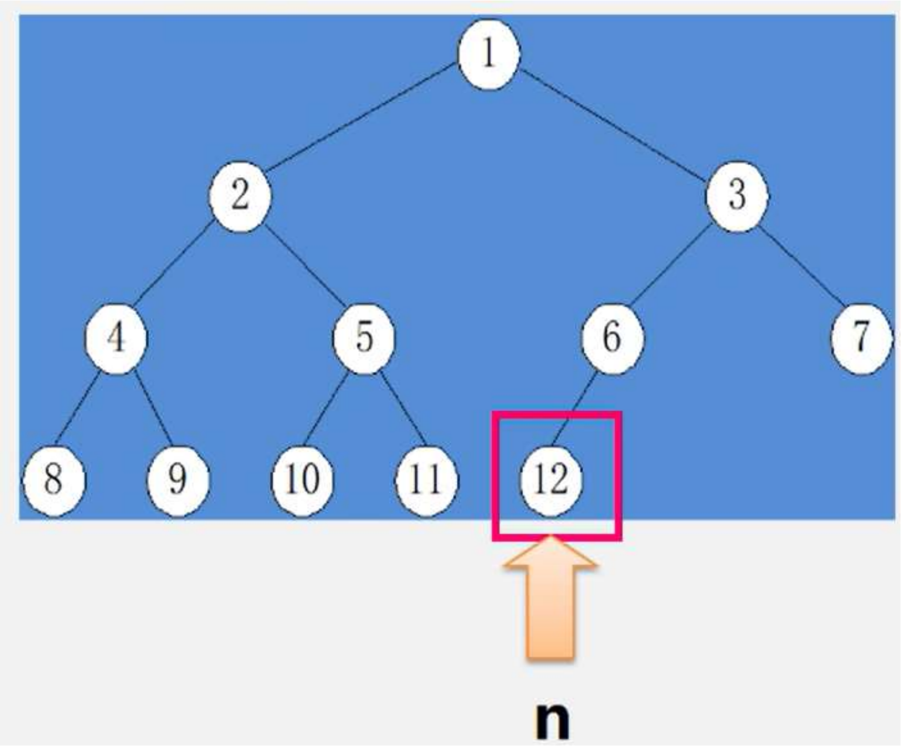
设具有 n 个结点的完全二叉树的深度为 d，则根据定理5-2和命题5-3，

$$2^{d-1}-1 < n \leq 2^d - 1$$

对不等式取对数，有：

$$d-1 < \log_2(n+1) \leq d$$





$\log_2 12$

思考：

一颗完全二叉树有500个结点，请问该完全二叉树有多少个叶子结点？有多少个度为1的结点？请写出推导过程

提示：

完全二叉树的特点

完全二叉树中如果有度为 1 的结点，只可能有一个，且该结点只有左孩子

联合命题5-1

250个叶子结点，1个度为1的结点

求一棵具有1025个结点的二叉树的高度h

提示：

完全二叉树的特点

在同样结点个数的二叉树中，完全二叉树深度最小

命题5-4

$\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$

$\lfloor \log_2 1025 \rfloor + 1 <= h <=\ ?$

小结

特殊形态的二叉树：

满二叉树，完全二叉树，完美二叉树

二叉树的性质：

3个定理4个命题