高等数学一（上）模拟测试参考答案

一． 选择题：（每小题 3 分，共 15 分）

1. B　　2. C　　3. D　　4. D　　5. A

二． 填空题：（每小题 3 分，共 15 分）

1. $-\frac{3}{2}$　　2. $(-1)^n n![\frac{2}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}]$

3. $\frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}}+C$　　4. $\frac{1}{2}$　　5. $xf(x^2)$

三．解答题：（每小题 10 分，共 70 分）

1．解： $f(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}(ax^2+1)=a+1,$ ………….（1 分）

$f(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}(-x^2+bx)=b-1,$ ………….（1 分）

由 $f(x)$ 在 $x=1$ 连续知 $b=a+2.$ ………….（2 分）

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{ax^2+1-(a+1)}{x-1}=2a,$ ………….（1 分）

$f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-x^2+bx-(b-1)}{x-1}=b-2,$ ………….（1 分）

由 $f(x)$ 在 $x=1$ 可导知 $b=2a+2.$ ………….（2 分）

则得 $a=0,b=2.$ ………….（2 分）

2. 解： $\frac{dy}{dt}=\frac{y^2-e^t}{2(1-ty)},\ \frac{dx}{dt}=\frac{1}{1+t^2}$ ………….3 分

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{(1+t^2)(y^2-e^t)}{2(1-ty)},$ ………….2 分

$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=\frac{\mathrm{d}(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{11}{2}$ ………….4 分

3. 解：令 $x=\sin t$，则原式=$\int \dfrac{\cos t dt}{\sin t+\cos t}$ …………3 分

$$=\frac{1}{2}\int \frac{(\sin t+\cos t)dt}{\sin t+\cos t}+\frac{1}{2}\int \frac{(\cos t-\sin t)dt}{\sin t+\cos t}=\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\ln\left|\sin t+\cos t\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|+C.$$ …………7 分

4. 解： 弧长 $s=\int_0^{3\pi}\sqrt{r^2+r'^2}d\theta$ ……………3 分

$$=\int_0^{3\pi}\sqrt{a^2\left(\sin\frac{\theta}{3}\right)^6+a^2\left(\sin\frac{\theta}{3}\right)^4\left(\cos\frac{\theta}{3}\right)^2}d\theta$$ ……………..3 分

$$=a\int_0^{3\pi}\left(\sin\frac{\theta}{3}\right)^2 d\theta=\frac{3}{2}\pi a.$$ ………………..4 分

5. 解：$S_1(x)=x^3-\int_0^x t^2\mathrm{d}t=\frac{2}{3}x^3,$ …………..3 分

$S_2(x)=\int_x^1 t^2\mathrm{d}t-(1-x)x^2=\frac{1}{3}-x^2+\frac{2}{3}x^3,$ …………..3 分

$S_1(x)+S_2(x)=\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}, x\in[0,1]$

$\left(S_1(x)+S_2(x)\right)'=2x(2x-1)=0,$ 驻点 $x=0, x=\frac{1}{2},$…………..2 分

$S_1(0)+S_2(0)=\frac{1}{3}, S_1(1)+S_2(1)=\frac{2}{3}, S_1(\frac{1}{2})+S_2(\frac{1}{2})=\frac{1}{4},$

面积和最大值为$\frac{2}{3}$,最小值为$\frac{1}{4}$. …………..2 分

6. 解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t}{x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2xf(x^2)}{2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x^2 f(x)}$ （$\frac{0}{0}$洛必达法则）…………3 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f(x^2)}{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2f'(x^2)\cdot 2x}{2f(x)+f(x)+xf'(x)}$ （$\frac{0}{0}$洛必达法则）

…………….. 3 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4xf'(x^2)}{3f(x)+xf'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4f'(x^2)}{3\dfrac{f(x)-f(0)}{x}+f'(x)}$

又 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq 0,$

原式$=\dfrac{4f'(0)}{3f'(0)+f'(0)}=1.$ ………………4 分

7. 证明：（1） 反证法：若 $f(x)$ 仅在 $x=0,1$ 处取值为 0，则在 $(0,1)$ 在恒号。

不妨设 $f(x)>0$， $x\in(0,1)$. 任取 $x_1<x_2\in(0,1)$，则有

$0\le\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx\le\int_0^1 f(x)dx=0$，从而 $\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx=0$。

根据积分中值定理:

至少存在一点 $\xi\in[x_1,x_2]\subset(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$，矛盾。 …………4 分

（2）令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则 $F(0)=F(1)=0$，且 $F'(x)=f(x)$。

$G(x)=e^{-x}\mathrm{F}(x)$，则 $G(0)=G(1)=0$，且 $G'(x)=e^{-x}(F'(x)-F(x))$。

利用罗尔定理，至少存在一点 $\eta\in(0,1)$，使得 $G'(\eta)=0$，

即 $e^{-\eta}(F'(\eta)-F(\eta))=0$，由于 $e^{-\eta}\neq 0$，故 $f(\eta)=\int_0^\eta f(x)dx$。

…………6 分