

高等数学一（下）练习卷

一. 选择题：（每小题 3 分，共 15 分）

1. 曲线 $\Gamma: \begin{cases} z = \frac{x^2 + y^2}{4} \\ y = 4 \end{cases}$ 在点 $(2, 4, 5)$ 处的切线与横轴的正向所成的角度为 ().

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

2. 已知 $(axy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 + by \sin x + 3x^2 y^2)dy$ 是某一个函数的全微分，则 a, b 取值分别为 ().

- A. -2 和 2 B. 2 和 -2 C. -3 和 3 D. 3 和 -3

3. 设 $f(x)$ 是连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr =$ ().

- A. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$ B. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$
C. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$ D. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx$

4. 设 L 为直线 $y = x$ 上从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 1)$ 的一段，则曲线积分 $\int_L y ds =$ ().

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 0 D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

5. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} x^n$ 的和函数为 ().

- A. $(x+1)e^x, -\infty < x < +\infty$ B. $(x-1)e^x, -\infty < x < +\infty$
C. $(1-x)e^x, -\infty < x < +\infty$ D. $xe^x, -\infty < x < +\infty$

二. 填空题：（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设二阶非齐次线性微分方程的三个特解为 $y_1 = 1 + \sin 2x$, $y_2 = 1 + \cos 2x$ 和 $y_3 = 1$, 则该方程的通解为_____.

2. 函数 $z = 3x^2y - y^2$ 在点 $P(2, 3)$ 处沿曲线 $y = x^2 - 1$ 朝 x 增大方向的方向导数为_____.

3. 已知空间闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$, 则 $\iiint_{\Omega} x^2 dv =$ _____.

4. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{n^{\alpha}}$ 收敛, 则 α 的取值为_____.

5. 设函数 $f(x) = x^2 (-\pi \leq x \leq \pi)$ 的傅里叶级数展开式为 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx)$, 则其中系数 $a_3 =$ _____.

三. 解下列各题: (每题 10 分, 共 70 分)

1. 设 $z + \ln z + \int_y^x e^{-t^2} dt = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x \partial y}$.

2. 求函数 $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$ 的极值.

3. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 上位于 $z = \frac{R}{3}$ 和 $z = \frac{R}{2}$ 之间的部分球面的面积.

4. 计算曲线积分 $I = \oint_L \frac{ydx - (x-1)dy}{(x-1)^2 + y^2}$, 其中 L 为曲线 $4x^2 + y^2 - 8x = 0$ 的正向.

5. 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} xy(y+1)dydz + yz^2dzdx + x^2zxdy$, 其中 Σ 是由曲线 $\begin{cases} z = \sqrt{1-y^2} \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面的上侧.

6. 将 $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x^2}{x} \arctan x, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ 展开为 x 的幂级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

7. 求微分方程 $\begin{cases} y' - y = f(x) \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 的解, 其中 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases}$.