1. 一家工厂生产的灯装在盒子里, 盒中有15盏灯， 若盒中有一盏有缺陷的灯,

(1) 任取三盏灯测试, 未检查到有缺陷的灯的概率是多少？（3 分）

(2) 每盒应测试多少个灯, 以确保发现有缺陷的灯的概率超过50%？（3 分）

2. 设A,B为两个随机事件, $P(A)=0.2,\ P(B)=0.5$, 求

(1) A,B至少有一件不发生的条件下B发生的概率　　（3 分）

(2) 分别在什么情况下A,B至少有一件发生的概率取得最大最小值？　　（3 分）

(3) 分别在什么情况下A,B至少有一件不发生的概率取得最大最小值？　　（3 分）

3. 事件A的优势比定义为$\alpha=\dfrac{P(A)}{P(\bar{A})}$,若已知事件$B$发生, 事件$A$的新的优势比为$\beta=\dfrac{P(A|B)}{P(\bar{A}|B)}$

(1) 证明：$\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{P(B|A)}{P(B|\bar{A})}$　　(2 分)

(2) 已知$\dfrac{P(A)}{P(\bar{A})}=\dfrac{2}{3}$,$\dfrac{P(B|A)}{P(B|\bar{A})}=\dfrac{1}{4}$, 求$P(A|B),P(\bar{A}|B)$　　(4 分)

4. 在回答选择题时, 学生知道正确答案的概率是p, 则$1-p$表示他猜的概率, 假定学生猜中正确答案的概率是$1/m$, m是选择题可选的选项数, 求：

(1) 已知某个选择题该学生回答正确, 他不知道正确答案猜对的概率是多少？　（4 分）

(2) 设$m=4$, 回答100个选择题时, 如果要使得正确率达到60%, 那么p至少要多大？　（4 分）

(3) 设$p=0.6,m=4$, 求回答100个选择题时该学生回答正确的题数的分布律, 数学期望和方差（4 分）

5. 盒中有两个白球和三个黑球, 每次从中随机取出一球, 观察颜色后不放回, 直到把两个白球都取出为止, 共取出了X个球

(1) 求X的分布律　（4 分）

(2) 求X的数学期望和方差　（6 分）

6. 甲乙两人打网球比赛, 在一局中如果出现平分40比40, 需要某人连续赢下两分才赢得这局, 如果各得一分就再次平分, 假设每回合的胜负相互独立, 甲在每回合中获胜的概率是p, A表示事件“在接下来的两回合后这局结束”, B表示事件“比赛在两回合后又变成了平分”, C表示事件“甲赢得了这一局”， 显然$P(C)=P(C|B)$

(1) 求$P(A),P(B),P(C|A)$　　（5 分）

(2) 通过计算证明$P(C)=P(C|A)$　　（5 分）

7. 设连续型随机变量X的分布函数和概率密度是$F_X(x)$，$f_X(x)$，用它们来表示以下随机变量函数 $Y=g(X)$的分布函数$F_Y(y)$和概率密度$f_Y(y)$

（1） $Y=-X$ （4 分） （2） $Y=X^2$ （4 分）

8. 已知随机变量X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}x(2-x), & 0\le x\le 2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（1） 求X的分布函数$F_X(x)$ （4 分）

（2） 求X的数学期望和方差 （5 分）

（3） 求$Y=\sqrt{x}$的概率密度函数$f_Y(y)$ （5 分）

9. 在独立重复试验中, 每次试验成功的概率是p, 当成功次数为r时试验结束, X表示此时的试验次数, 称X服从参数为r,p的负二项分布, 记为$X\sim nb(r,p)$

(1) 若$X\sim nb(3,1/3)$, 求$P(X=5)$ （4 分）

(2) 若$X\sim nb(2,1/2)$, 求$P(X\le n)$ （4 分）

(3) 若$X\sim nb(2,1/2)$, 要在n次内结束试验的概率不小于$3/4$, 求n的最小值 （4 分）

10. 已知随机变量X的分布函数

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

(1) 求$D(X)$ （3 分）

(2) 随机变量$Y=g(X)$的分布函数是$F\left(\frac{x-1}{2}\right)$, 求$Y=g(X)$的表达式和$E(Y)$ （4 分）

(3) 设$G(x)=\frac{1}{2}F\left(\frac{x-1}{2}\right)+\frac{1}{2}F(2x)$, 证明$G(x)$是某个随机变量$Z$的分布函数并求$E(Z)$ （6 分）