苏州大学 高等数学一（下）课程期末试卷 共 页

考试形式：闭卷

院系__________年级 __________ 专业 __________

学号__________ 姓名__________ 成绩 __________

特别提醒：请将答案填写在答题纸上，若填写在试卷纸上无效.

一. 选择题：（每小题 3 分，共 15 分）

1．曲面 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$ 是由（ ）绕 y 轴旋转得到的. B

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{z^2}{16}=1$ B. $-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$

C. $\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$ D. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

2．如果在点 (x_0,y_0) 的某邻域内 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处（ D ）.

A. 连续 B. 可微 C. 间断 D. 不一定连续

3．已知 $(axy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1+by\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$ 为某函数 $f(x,y)$ 的全微分,则（ ）. A

A. $a=2,b=-2$ B. $a=-2,b=2$

C. $a=2,b=0$ D. $a=0,b=-2$

4．设有下列命题

（1）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_{2n-1}+u_{2n}\right)$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

（2）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+100}$ 收敛.

（3）若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

（4）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(u_n+v_n\right)$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛.

以上命题中**正确**的是（　　）．　　B

A．（1）（2）　　　B．（2）（3）　　　C．（3）（4）　　　D．（1）（4）

5．已知 $D: x^2+y^2\le 1,\ D_1: x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0.$ 则下列四个等式中**不成立**的是（　　）．　　C

A. $\iint\limits_D x\ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$　　B. $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_1}\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

C. $\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　　D. $\iint\limits_D |xy|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

二．　填空题：（每小题 3 分，共 15 分）

1．设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $z=\mathrm{e}^{2x-3z}+2y$ 确定，则 $3\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$__________．　2

2. 设 l 为椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{5}=1,$ 其周长为 $a,$ 则 $\oint_l\left(5x^2+4y^2\right)\mathrm{d}s=$______________.$20a$

3．微分方程 $(1+x^2)y'=\arctan x$ 满足条件 $y|_{x=0}=0$ 的特解是__________________.

$y=\dfrac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2$

4．幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}x^{2n}$ 的收敛半径为________________.$\sqrt{2}$

5．已知平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le a^2\}, a>0,$ 则根据二重积分的几何意义，二重积分 $\iint\limits_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma=$______________.　$\dfrac{2\pi a^3}{3}$

三．解下列各题：（每小题 8 分，共 40 分）

1. 把 $\sin x$ 展开成 $(x+\dfrac{\pi}{4})$ 的幂级数.

解：

$$\sin x=\sin[-\frac{\pi}{4}+(x+\frac{\pi}{4})]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}[\sin(x+\frac{\pi}{4})-\cos(x+\frac{\pi}{4})]\text{................(2分)}$$

$$\sin(x+\frac{\pi}{4})=(x+\frac{\pi}{4})-\frac{(x+\frac{\pi}{4})^3}{3!}+\frac{(x+\frac{\pi}{4})^5}{5!}-\text{............(2分)}$$

$$\cos(x+\frac{\pi}{4})=1-\frac{(x+\frac{\pi}{4})^2}{2!}+\frac{(x+\frac{\pi}{4})^4}{4!}-\text{............(2分)}$$

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+(x+\frac{\pi}{4})+\frac{(x+\frac{\pi}{4})^2}{2!}-)(-\infty<x<+\infty)\text{............(2分)}$$

2. 求微分方程 $x^2y'+xy-y^2=0$ 的通解

解：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2-xy}{x^2}=(\frac{y}{x})^2-\frac{y}{x}$ ……………（2 分）

令 $u=\frac{y}{x}$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ ………………（2 分）

因此 $u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u^2-u$ 即 $\frac{\mathrm{d}u}{u^2-2u}=\frac{\mathrm{d}x}{x}$ ……（2 分）

解得 $y-2x=cyx^2$ ………………………….(2 分)

3．计算曲线积分 $\int_C(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$, 其中 C 为螺旋线 $x=a\cos t, y=a\sin t,\ z=bt,$

$(0\le t\le 2\pi), a>0, b>0.$

解：$\mathrm{d}s=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\mathrm{d}t=\sqrt{a^2+b^2}\mathrm{d}t,$ …(2 分)

原式 $=\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\mathrm{d}t$ …(3 分)

$=\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\mathrm{d}t=\sqrt{a^2+b^2}(2\pi a^2+\frac{8}{3}\pi^3b^2).$ …(3 分)

4．计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{2x^2+2y^2+z}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\mathrm{d}S$, 其中 Σ 为曲面 $z=9-x^2-y^2(z\ge 0).$

解：$\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}=\sqrt{1+4x^2+4y^2}, D_{xy}: x^2+y^2\le 9$ …(3 分)

原式 $=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{2x^2+2y^2+(9-x^2-y^2)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\cdot\sqrt{4x^2+4y^2+1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ …(2 分)

$$=\iint_{D_{xy}}(9+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^3(9+r^2)r\mathrm{d}r=\frac{243\pi}{2}.\quad \ldots(3\text{ 分})$$

5．求平面 $3x+4y-z-26=0$ 上距原点最近的点.

解： $F(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda(3x+4y-z-26)$ …(2 分)

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x+3\lambda=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2y+4\lambda=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial z}=2z-\lambda=0\\ 3x+4y-z-26=0\end{cases}\qquad \ldots(4\text{ 分})$$

$\lambda=-2,x=3,y=4,z=-1$, 该点为 $(3,4,-1)$.　　…(2 分)

四．解下列各题：（每小题 10 分，共 30 分）

1．计算曲线积分 $I=\int_L(x+y)^2\mathrm{d}x-(x^2+y^2\sin y)\mathrm{d}y$, 其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(-1,1)$ 到点 $(1,1)$ 的那一段.

解：补上有向直线段 $y=1(-1\le x\le 1)$,　　…(2 分)

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=-4x-2y,\qquad \ldots(2\text{ 分})$$

利用格林公式

$$I=\iint_D(-4x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_{-1}^1(x+1)^2\mathrm{d}x\qquad \ldots(3\text{ 分})$$

$$=-2\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{8}{3}=\frac{16}{15}.\qquad \ldots(3\text{ 分})$$

2. 计算曲面积分 $\iint_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\le z\le 1)$ 的下侧.

解：补曲面 Σ_1: $\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ z=1\end{cases}$，上侧　　…(2 分)

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=6,$$ …(2 分)

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}6\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\pi$$ …(3 分)

又 $\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$ …(2 分)

从而，原式= $=2\pi.$ …(1 分)

3. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}x^{n-1}$ 的和函数，并写出收敛区间.

解：收敛区间 $(-\infty,+\infty)$ ……..（2 分）

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{n}{(n+1)!}x^{n-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}$$ ……..（2 分）

$$=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{1}{x}[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-(1+x)]=\frac{1}{x}[\mathrm{e}^x-(1+x)](x\neq 0)$$ ……..（2 分）

$$f(x)=\{\frac{1}{x}[\mathrm{e}^x-(1+x)]\}'=\frac{x\mathrm{e}^x-(\mathrm{e}^x-1)}{x^2}(x\neq 0)$$ ……..（2 分）

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\mathrm{e}^x-(\mathrm{e}^x-1)}{x^2}, & x\neq 0\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & x=0\end{cases}$$ ……..（2 分）