离散数学

离散数学

计算机科学与技术学院 朴明浩

第一章 命题逻辑

- 1-1 命题及其表示法
- 1-2 联结词
- 1-3 命题公式与翻译
- 1-4 真值表与等价公式
- 1-5 重言式与蕴含式
- 1-6 其他联结词
- 1-7 对偶与范式
- 1-8 推理理论

命题联结词的真值表

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

联结词是两个命题真值之间的联结，而不是命题内容之间的连接，因此复合命题的真值只取决于构成他们的各简单命题的真值，而与它们的内容无关，与二者之间是否有关系无关。

Example

命题 1：雪是白的当且仅当北京是中国的首都。

命题 2：如果 2 是偶数，则天上就可以掉馅饼。

尽管两个简单命题的内容之间无关联，但二者均为合法命题，且具有确定的真值。

十大命题定律

对等律	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$
幂等律	$P \vee P \Leftrightarrow P$，$P \wedge P \Leftrightarrow P$
结合律	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
交换律	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
分配律	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
吸收律	$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$ $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$
德. 摩根律	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
同一律	$P \vee F \Leftrightarrow P$, $P \wedge T \Leftrightarrow P$
零律	$P \wedge F \Leftrightarrow F$, $P \vee T \Leftrightarrow T$
否定律	$\mathbf{P \vee \neg P \Leftrightarrow T}$, $\mathbf{P \wedge \neg P \Leftrightarrow F}$

蕴含式	$\mathbf{P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q}$
假言易位	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$
等价式	$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ $\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)$
等价否定等式	$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \leftrightarrow \neg P$
归谬论	$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow \neg P$

重言式与蕴含式

- **重言式**
  - ✓对一命题公式，若无论对分量作怎样的指派，其对应的真值永为T，则该命题公式为重言式或永真公式
- **矛盾式**
  - ✓对一命题公式，若无论对分量作怎样的指派，其对应的真值永为F，则该命题公式为矛盾式或永假公式
- **定理**：任何两个重言式的合取或析取，仍为重言式
  - ✓证明：设A，B为两个重言式，则不论A和B的分量指派任何值，总有A为T，B为T。则$A \wedge B \Leftrightarrow T$，$A \vee B \Leftrightarrow T$
- **定理：**一重言式，对同一分量都用任何公式置换，其结果仍为一重言式。
  - ✓证明：由于重言式的真值与分量的指派无关。故对同一分量的任何合式公式置换后，重言式真值仍为T

重言式与蕴含式

- **定理**：设A，B为命题公式，$A \Leftrightarrow B$ iff $A \leftrightarrow B$为一个重言式
  - 证明：
    - "$\Leftarrow$"：由$A \Leftrightarrow B$知，A与B具有相同的真值，则由双条件联结词定义可知：$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow T$；
    - "$\Rightarrow$"：由$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow T$知，A与B具有相同的真值，则由命题等价定义可知：$A \Leftrightarrow B$
- **蕴含式**
  - **定义**：*iff* $P \rightarrow Q$为重言式时，称"**P蕴含Q**"，**即$P \Rightarrow Q$**
- 注：
  - 1、因 $P \rightarrow Q$ 不是对称关系，则 $P \rightarrow Q$ 与 $Q \rightarrow P$ 不等价
  - 2、对 $P \rightarrow Q$，其逆换式为 $Q \rightarrow P$ ，反换式为 $\neg P \rightarrow \neg Q$ ，逆反式为 $\neg Q \rightarrow \neg P$
  - 3、$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$，$Q \rightarrow P \Leftrightarrow \neg P \rightarrow \neg Q$

重言式与蕴含式

下表所列是**常见蕴含式**，均可以使用上述等价方式进行证明：

$P \wedge Q \Rightarrow P$	1	$P \wedge (P \to Q) \Rightarrow Q$	8
$P \wedge Q \Rightarrow Q$	2	$\neg Q \wedge (P \to Q) \Rightarrow \neg P$	9
$P \Rightarrow P \vee Q$	3	$\neg P \wedge (P \vee Q) \Rightarrow Q$	10
$\neg P \Rightarrow P \to Q$	4	$(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow P \to R$	11
$Q \Rightarrow P \to Q$	5	$(P \vee Q) \wedge (P \to R) \wedge (Q \to R) \Rightarrow R$	12
$\neg (P \to Q) \Rightarrow P$	6	$(P \to Q) \wedge (R \to S) \Rightarrow (P \wedge R) \to (Q \wedge S)$	13
$\neg (P \to Q) \Rightarrow \neg Q$	7	$(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R) \Rightarrow (P \leftrightarrow R)$	14

对偶与范式

- **定义**：命题公式称为**合取范式**，*iff* 它具有形式：A1∧A2∧…∧An （n≥1），其中A1，A2，…，An都是命题变元或其否定所组成的析取式
  - ✓例如：(P∨Q)∧¬ Q∧(¬ P∨Q∨R)，（P∨Q∨R） 为合取范式

- **定义**：命题公式称为**析取范式**，*iff* 它具有形式：A1∨A2∨…∨An （n≥1），其中A1，A2，…，An都是命题变元或其否定所组成的合取式
  - ✓例如： (P∧¬ Q)∨R∨(¬ P∧R∧Q)，P∧Q∧¬ R 为析取范式

对偶与范式

- 任何命题公式，其合取范式或析取范式均可按照下面三个步骤进行：
  - ✓(1)将公式中的联结词化归为$\wedge$，$\vee$ 及 $\neg$
  - ✓(2)利用德.摩根律将否定$\neg$直接移到各个命题变元之前
  - ✓(3)利用分配律、结合律将公式归约为合取范式或析取范式

- 求$(P\wedge(Q\rightarrow R))\rightarrow S$的合取范式。

解：$(P\wedge(Q\rightarrow R))\rightarrow S \Leftrightarrow (P\wedge(\neg Q\vee R))\rightarrow S$

$\Leftrightarrow \neg(P\wedge(\neg Q\vee R)) \vee S$

$\Leftrightarrow \neg P \vee (Q\wedge\neg R)\vee S$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee S)\vee(Q \wedge\neg R)$ //结合律

$\Leftrightarrow (\neg P \vee S\vee Q) \wedge(\neg P\vee S \vee\neg R)$ //分配律

对偶与范式

- 求$\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(P\wedge Q)$的析取范式。

  解：因为：$A\leftrightarrow B\Leftrightarrow(A\wedge B)\vee(\neg A\wedge\neg B)$

  故$\neg(P\vee Q)\leftrightarrow(P\wedge Q)$

  $\Leftrightarrow(\neg(P\vee Q)\wedge(P\wedge Q))\vee((P\vee Q)\wedge\neg(P\wedge Q))$ //等价式

  $\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge P\wedge Q)\vee((P\vee Q)\wedge(\neg P\vee\neg Q))$

  $\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q\wedge P\wedge Q)\vee(P\wedge\neg P)\vee(Q\wedge\neg P)\vee(P\wedge\neg Q)\vee(Q\wedge\neg Q)$

  //两次分配律

- 注：命题公式的合取范式或析取范式并不唯一

  如：$P\vee(Q\wedge R)\Leftrightarrow(P\vee Q)\wedge(P\vee R)$

  $\Leftrightarrow(P\wedge P)\vee(P\wedge R)\vee(Q\wedge P)\vee(Q\wedge R)$

- 为使任一命题公式化成唯一的等价命题的标准形式，下面引进“主范式”概念

对偶与范式：小项

- **定义：** n个命题变元的合取式，称作**布尔合取或小项**，其中每个变元与它的否定不能同时存在，但两者必须出现且仅出现一次
  - ✓例如，设P、Q、R是三个命题变元，如下表所示

m	下标编码（十进制数）	下标编码（二进制数）	小项
m_0（m_{000}）	0	000	$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
m_1（m_{001}）	1	001	$\neg P \wedge \neg Q \wedge R$
m_2（m_{010}）	2	010	$\neg P \wedge Q \wedge \neg R$
m_3（m_{011}）	3	011	$\neg P \wedge Q \wedge R$
m_4（m_{100}）	4	100	$P \wedge \neg Q \wedge \neg R$
m_5（m_{101}）	5	101	$P \wedge \neg Q \wedge R$
m_6（m_{110}）	6	110	$P \wedge Q \wedge \neg R$
m_7（m_{111}）	7	111	$P \wedge Q \wedge R$

主析取范式

- **定义：** 对给定的命题公式，若有一等价公式，仅由小项析取组成，则该等价式称作原式的主析取范式
- **定理：** 在真值表中，公式真值为T的指派所对应的小项的析取，即为此公式的主析取范式
- **证明：** 设给定公式为A,其真值为T的指派所对应的小项为 m_1' , m_2' ,…, m_k' 这些小项的析取式记为B，即证A $\Leftrightarrow$ B，即A与B在相应指派下具有相同真值
  - ✓对A为T的某一指派，其对应的小项为 m_i' ,则因为 m_i' 为T，而 m_1' , m_2' ，…, m_{i-1}' ， m_{i+1}' ，…, m_k' 均为F，故B为T。
  - ✓对A为F的某一指派，其对应小项不包含在B中，即 m_1' , m_2' ,…, m_k' 均为F，故B为F。因此A $\Leftrightarrow$ B

主析取范式

- 例：设公式A的真值表如下

P	Q	R	A	P	Q	R	A
T(1)	T(1)	T(1)	T	F(0)	T(1)	T(1)	F
T(1)	T(1)	F(0)	F	F(0)	T(1)	F(0)	F
T(1)	F(0)	T(1)	F	F(0)	F(0)	T(1)	F
T(1)	F(0)	F(0)	T	F(0)	F(0)	F(0)	T

- 则公式A的主析取范式为（练习）：
  - ✓ $A \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R) \Leftrightarrow m_0 \vee m_4 \vee m_7$，简记为$\Sigma_{0,4,7}$

主析取范式

- 求命题公式的主析取范式的方法：

1. 可以从真值表直接得出。
2. 可以是由基本等价公式推出，推理步骤为：
   I. 化归为析取范式；
   II. 除去析取范式中所有永假的析取项；
   III. 将析取范式中重复出现的合取项和现同的变元合并；
   IV. 对合取项补入没有出现的命题变元，如变元P未出现，即添加(P∨¬P)的合取项 ，然后应用分配律展开

- 任何命题公式的主析取范式，如果固定变元出现的次序，此公式的主析取范式便是唯一的

对偶与范式：大项

- **定义：** n个命题变元的析取式，称作布尔析取或大项，其中每个变元与它的否定不能同时存在，但两者必须出现且仅出现一次
- 设P、Q、R是三个命题变元，如下表所示

M	下标编码（十进制数）	下标编码（二进制数）	大项
$M_0(M_{000})$	0	000	$P\vee Q\vee R$
$M_1(M_{001})$	1	001	$P\vee Q\vee\neg R$
$M_2(M_{010})$	2	010	$P\vee\neg Q\vee R$
$M_3(M_{011})$	3	011	$P\vee\neg Q\vee\neg R$
$M_4(M_{100})$	4	100	$\neg P\vee Q\vee R$
$M_5(M_{101})$	5	101	$\neg P\vee Q\vee\neg R$
$M_6(M_{110})$	6	110	$\neg P\vee\neg Q\vee R$
$M_7(M_{111})$	7	111	$\neg P\vee\neg Q\vee\neg R$

小项 vs. 大项

- 小项(极小项)和大项(极大项)的编码方式刚好相反

P	Q	R	极小项	极大项
0	0	0	$m_0 = \neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$M_0 = P \vee Q \vee R$
0	0	1	$m_1 = \neg P \wedge \neg Q \wedge R$	$M_1 = P \vee Q \vee \neg R$
0	1	0	$m_2 = \neg P \wedge Q \wedge \neg R$	$M_2 = P \vee \neg Q \vee R$
0	1	1	$m_3 = \neg P \wedge Q \wedge R$	$M_3 = P \vee \neg Q \vee \neg R$
1	0	0	$m_4 = P \wedge \neg Q \wedge \neg R$	$M_4 = \neg P \vee Q \vee R$
1	0	1	$m_5 = P \wedge \neg Q \wedge R$	$M_5 = \neg P \vee Q \vee \neg R$
1	1	0	$m_6 = P \wedge Q \wedge \neg R$	$M_6 = \neg P \vee \neg Q \vee R$
1	1	1	$m_7 = P \wedge Q \wedge R$	$M_7 = \neg P \vee \neg Q \vee \neg R$

1. $m_i \wedge m_j = 0$
   $M_i \vee M_j = 1$
   $(i \neq j)$
2. $m_i = \neg M_i$
   $M_i = \neg m_i$
3. $\bigvee_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$
   $\bigwedge_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$

对偶与范式：大项

- 真值T和F分别表示为“1”和“0”
- 大项具有的性质
  - 每个大项当其真值指派与编码相同时，其真值为F，在其余2^n-1种指派情况下均为T。如P、Q、R为三个变元，则

大项	对应为假的指派 (P Q R)	大项	对应为假的指派 (P Q R)
$\neg P\vee\neg Q\vee\neg R$	(T T T)	$P\vee\neg Q\vee\neg R$	(F T T)
$\neg P\vee\neg Q\vee R$	(T T F)	$P\vee\neg Q\vee R$	(F T F)
$\neg P\vee Q\vee\neg R$	(T F T)	$P\vee Q\vee\neg R$	(F F T)
$\neg P\vee Q\vee R$	(T F F)	$P\vee Q\vee R$	(F F F)

对偶与范式：大项

- 真值T和F分别表示为“1”和“0”
- 大项具有的性质
  - ✓每个大项当其真值指派与编码相同时，其真值为F，在其余2^n-1种指派情况下均为T

		$M_{11}(M_3)$	$M_{10}(M_2)$	$M_{01}(M_1)$	$M_{00}(M_0)$
P	Q	$\neg P \vee \neg Q$	$\neg P \vee Q$	$P \vee \neg Q$	$P \vee Q$
0	0	1	1	1	**0**
0	1	1	1	**0**	1
1	0	1	**0**	1	1
1	1	**0**	1	1	1

- 没有两个不同的极大项是等价的。
- 每个极大项只有一组成假赋值，因此可用于给极大项编码。 编码规律为：命题变元与 0 对应，命题变元的否定与 1 对应。

对偶与范式：大项

- 真值T和F分别表示为“1”和“0”
- 大项具有的性质
  - ✓ 任意两个不同大项的析取式为永真(T)。$M_i \vee M_j \Leftrightarrow T (i \neq j)$
  - ✓ 3)全体大项的合取式必为永假，记为：$\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = M_0 \wedge M_1 \wedge \cdots \wedge M_{2^n-1} \Leftrightarrow F$

主合取范式

- **定义**：对于给定的命题公式，若一等价公式，它仅由大项的合取所组成，则该等价式称作原式的主合取范式
- **定理**：在真值表中，一公式的真值为F的指派对应的大项的合取，即为此公式的主合取范式
  - ✓例：设公式A的真值表如下

P	Q	R	A	P	Q	R	A
T(1)	T(1)	T(1)	T	F(0)	T(1)	T(1)	F
T(1)	T(1)	F(0)	F	F(0)	T(1)	F(0)	F
T(1)	F(0)	T(1)	F	F(0)	F(0)	T(1)	F
T(1)	F(0)	F(0)	T	F(0)	F(0)	F(0)	T

推理

推理理论

- 在实际应用的推理中，常把本门学科的一些定律、定理和条件，作为假设前提，尽管这些前提在数理逻辑中并非永真
- 但在推理过程中，却总是假设这些命题为T，并使用一些公认的规则，得到另外的命题，形成结论，此过程即为论证

- **定义**：设A和C是命题公式，iff A→C为一重言式,即 A ⇒ C，称C是A的有效结论
- 把上述定义推广到有n个前提的情况
  - ✓设$H_1, H_2, \cdots, H_n, C$ 是命题公式， *iff*

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C \qquad \text{(A)}$$

  - ✓称C是一组前提$H_1, H_2, \cdots, H_n$ 的有效结论

推理理论

- 判别有效结论的过程就是论证过程，基本方法有真值表法、直接证法和间接证法
  - 真值表法
  - 直接证法
  - 间接证法
    - 反证法
    - CP规则 （附加前提规则）

推理理论：直接证法

- 即由一组前提，利用一些公认的推理规则，根据已知的等价或蕴含公式，推演得到有效的结论
- **P规则（前提引用规则）：** 前提在推导过程中的任何时候都可以引入使用
- **T规则（逻辑结果引用规则）：** 在推导中，如果有一个或多个公式、重言蕴含着公式S，则公式S可引入推导之中

直接证法：常用蕴含式

表 1-8.3

I_1	$P \wedge Q \Rightarrow P$
I_2	$P \wedge Q \Rightarrow Q$
I_3	$P \Rightarrow P \vee Q$
I_4	$Q \Rightarrow P \vee Q$
I_5	$\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$
I_6	$Q \Rightarrow P \rightarrow Q$
I_7	$\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$
I_8	$\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$
I_9	$P, Q \Rightarrow P \wedge Q$
I_{10}	$\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$
I_{11}	$P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$
I_{12}	$\neg Q, P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$
I_{13}	$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$
I_{14}	$P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \Rightarrow R$
I_{15}	$A \rightarrow B \Rightarrow (A \vee C) \rightarrow (B \vee C)$
I_{16}	$A \rightarrow B \Rightarrow (A \wedge C) \rightarrow (B \wedge C)$

直接证法：常用等价式

表 1-8.4

E_1	$\neg\neg P \Leftrightarrow P$
E_2	$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$
E_3	$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$
E_4	$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$
E_5	$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$
E_6	$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
E_7	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
E_8	$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$
E_9	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
E_{10}	$P \vee P \Leftrightarrow P$
E_{11}	$P \wedge P \Leftrightarrow P$
E_{12}	$R \vee (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow R$
E_{13}	$R \wedge (P \vee \neg P) \Leftrightarrow R$
E_{14}	$R \vee (P \vee \neg P) \Leftrightarrow \boldsymbol{T}$
E_{15}	$R \wedge (P \wedge \neg P) \Leftrightarrow \boldsymbol{F}$
E_{16}	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
E_{17}	$\neg(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \neg Q$
E_{18}	$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$
E_{19}	$P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$
E_{20}	$P \rightleftarrows Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
E_{21}	$P \rightleftarrows Q \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
E_{22}	$\neg(P \rightleftarrows Q) \Leftrightarrow P \rightleftarrows \neg Q$

证明 $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow S) \Rightarrow S \vee R$

推理理论：直接证法

- 例：证明 $(W\vee R)\rightarrow V$，$V\rightarrow C\vee S$，$S\rightarrow U$，$\neg C\wedge\neg U \Rightarrow \neg W$

- 演绎思路
  - ✓如何得到$\neg W$?
  - ✓W出现在$(W\vee R)\rightarrow V$，缺的是否定
  - ✓否定之后，$\neg W\wedge\neg R$；W，R同时出现在$(W\vee R)\rightarrow V$
  - ✓需要得到$\neg(W\vee R)$
  - ✓$(W\vee R)\rightarrow V$，$V\rightarrow C\vee S$，可得到$(W\vee R)\rightarrow C\vee S$
  - ✓如果由$\neg(C\vee S)$，则$\neg(W\vee R)$
  - ✓因此需要$\neg(C\vee S)$，也就是$\neg C\wedge\neg S$

推理理论：直接证法

- 例：证明 $(W\vee R)\rightarrow V$，$V\rightarrow C\vee S$，$S\rightarrow U$, $\neg C\wedge\neg U \Rightarrow \neg W$

(1)	$\neg C\wedge\neg U$	P
(2)	$\neg U$	T(1)，I2
(3)	$S\rightarrow U$	P
(4)	$\neg S$	T(2),(3),I12
(5)	$\neg C$	T(1)，I1
(6)	$\neg C\wedge\neg S$	T(4),(5),I9
(7)	$\neg(C\vee S)$	T(6)，E9
(8)	$(W\vee R)\rightarrow V$	P
(9)	$V\rightarrow C\vee S$	P
(10)	$(W\vee R)\rightarrow C\vee S$	T(8),(9)，I13
(11)	$\neg(W\vee R)$	T(7),(10)，I12
(12)	$\neg W\wedge\neg R$	T(11)，E9
(13)	$\neg W$	T(12)，I1

推理理论：间接证法

- **反证法**：设有一组前提$H_1, H_2, \cdots, H_m$，要推出结论C，即证$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$，记作$S \Rightarrow C$，即$\neg C \rightarrow \neg S$为永真(E18)，或$C \vee \neg S$为永真(E16)，故$\neg C \wedge S$为永假
- 因此要证明$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$，只要证明$H_1, H_2, \cdots, H_m$与$\neg C$是不相容的

推理理论：间接证法（反证法）

例：证明 $(P\vee Q)\wedge(P\to R)\wedge(Q\to S)\Rightarrow S\vee R$

1.	$\neg(S\vee R)$	P（附加前提）
2.	$\neg S\wedge\neg R$	T(1)，E9
3.	$P\vee Q$	P
4.	$\neg P\to Q$	T(3)，E16
5.	$Q\to S$	P
6.	$\neg P\to S$	T(4),(5)，I13
7.	$\neg S\to P$	T(6)，E18
8.	$(\neg S\wedge\neg R)\to(P\wedge\neg R)$	T(7)，I16
9.	$P\wedge\neg R$	T(2),(8),I11
10.	$P\to R$	P
11.	$\neg P\vee R$	T(10),E16
12.	$\neg(P\wedge\neg R)$	T(11),E8
13.	$(P\wedge\neg R)\wedge\neg(P\wedge\neg R)$（矛盾）	T(9),(12),I9

（注意：反证法的证明格式）

推理理论：间接证法

- **CP规则**：若要证$H1 \land H2 \land \cdots \land Hn \Rightarrow (R \to C)$ 。
  - ✓设 $H1 \land H2 \land \cdots \land Hm$ 为S，即证$S \Rightarrow (R \to C)$ 或$S \Rightarrow (\neg R \lor C)$
  - ✓故 $S \to (\neg R \lor C)$为永真式。
  - ✓因为 $S \to (\neg R \lor C) \Leftrightarrow \neg S \lor (\neg R \lor C) \Leftrightarrow \neg (S \land R) \lor C \Leftrightarrow (S \land R) \to C$
  - ✓因此将R作为附加前提，证明$(S \land R) \Rightarrow C$，即证得$S \Rightarrow (R \to C)$

- 例：证明 $A \to (B \to C)$, $\neg D \lor A$, B 重言蕴含 $D \to C$

1.	D	P(附加前提)
2.	$\neg D \lor A$	P
3.	A	T(1),(2),I10
4.	$A \to (B \to C)$	P
5.	$B \to C$	T(3),(4),I11
6.	B	P
7.	C	T(5),(6),I11
8.	$D \to C$	CP

（注意：CP规则的证明格式）

推理理论：间接证法（CP规则）

- 例：设有下列情况，结论是否有效？
  - (a) 或者是天晴，或者是下雨。(b) 如果是天晴，我就去看电影。如果我去看电影，我就不看书。结论：如果我在看书则天在下雨。

- 解：若设M:天晴　　Q:下雨　　S:我看电影　　R:我看书
- 故本题即为证明：$M\bar{\nabla}Q$，$M\rightarrow S$，$S\rightarrow\neg R \Rightarrow R\rightarrow Q$
- $M\bar{\nabla}Q = \neg(M\leftrightarrow Q)$
- 证

R	P(附加前提)
$S\rightarrow\neg R$	P
$R\rightarrow\neg S$	T(2),E18
$\neg S$	T(1),(3),I11
$M\rightarrow S$	P
$\neg M$	T(4),(5),I12
$\neg M\leftrightarrow Q)$	P
$M\leftrightarrow\neg Q$	T(7),E22
$M\rightarrow\neg Q)\wedge(\neg Q\rightarrow M)$	T(8),E 20
$\neg Q\rightarrow M$	T(9),I2
$\neg M\rightarrow Q$	T(10),E18
Q	T(6),(11),I11
$R\rightarrow Q$	CP

离散数学

谓词逻辑

计算机科学与技术学院 朴明浩

- 概念与表示
- 命题函数与量词
- 谓词公式与翻译
- 变元的约束
- 谓词演算的等价式与蕴含式
- 前束范式
- 谓词演算的推理理论

前束范式

- 在命题演算中，常将公式化成规范形式，对于谓词演算也可化为与之等价的范式。
- 定义：一个公式，若量词均在全式开头，且作用域延伸到整个公式末尾，则该公式叫做**前束范式**。有下述形式：
  - ✓ (□v1)(□v2) …(□vn)A,其中□可能是量词 ∀ 或 ∃ ,v_i (i=1,2, …,n)是客体变元,A是不含量词的谓词公式。
- 定理:任意一谓词公式均和一个前束范式等价。
- 证明：
  - ✓首先利用量词转化公式。
  - ✓把否定深入到命题变元和谓词填式的前面。
  - ✓其次利用 $(\forall x)A(x)\vee B \Leftrightarrow (\forall x)(A(x)\vee B)$ 和 $(\exists x)A(x)\wedge B \Leftrightarrow (\exists x)(A(x)\wedge B)$
  - ✓把量词移到全式最前面，这样便得到前束范式

前束范式

- 定义：一个wff A若具有如下形式则称为前束合取范式。
  - $(v_1)(v_2)\cdots(v_n)[(A_{11}\vee A_{12}\vee\cdots\vee A_{1n1})\wedge(A_{21}\vee A_{22}\vee\cdots\vee A_{2n2})\wedge\cdots\wedge(A_{m1}\vee A_{m2}\vee\cdots\vee A_{mnm})]$其中可能是量词∀或∃，$v_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 是客体变元，A_{ij}是原子公式或其否定
- 定理：每一个wff A都可转化为与其等价的前束合取范式。

- 定义：一个wff A若具有如下形式则称为前束析取范式。
  - $(v_1)(v_2)\cdots(v_n)[(A_{11}\wedge A_{12}\wedge\cdots\wedge A_{1n1})\vee(A_{21}\wedge A_{22}\wedge\cdots\wedge A_{2n2})\vee\cdots\vee(A_{m1}\wedge A_{m2}\wedge\cdots\wedge A_{mnm})]$其中可能是量词∀或∃，$v_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是客体变元，A_{ij}是原子公式或其否定
- 定理：每一个wff A都可转化成与其等价的前束析取范式。

前束范式

- 注：Wff A 转化为前束合取范式或前束析取范式步骤：
  - 1、取消多余量词。
  - 2、换名。
  - 3、化为仅含有∧，∨，¬
  - 4、将量词推到左边

谓词演算的等价式与蕴含式

- 量词与命题联结词之间的一些等价式
  - 量词与命题联结词之间存在不同的结合情况
    - 如：联欢会上所有人既跳舞又唱歌和联欢会上所有人唱歌且所有人跳舞。该两个命题具有相同意义
  - 故
  - $(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow (\forall x)A(x) \wedge (\forall x)B(x)$
  - 同理：$(\exists x)(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow (\exists x)A(x) \vee (\exists x)B(x)$

谓词演算的等价式与蕴含式

- 量词与命题联结词之间的一些蕴含式
  - 量词与命题联结词之间存在一些不同的结合情况，有些是蕴含式。
- 如：
  - 这些学生都聪明或这些学生都努力，可以推出这些学生都聪明或努力；
  - 但这些学生都聪明或努力却不能推出这些学生都聪明或这些学生都努力。
- 故
  - $(\forall x)A(x) \vee (\forall x)B(x) \Rightarrow (\forall x)(A(x) \vee B(x))$
  - $(\exists x)(A(x) \wedge B(x)) \Rightarrow (\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)$
  - $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow (\forall x)A(x) \rightarrow (\forall x)B(x)$
  - $(\forall x)(A(x) \leftrightarrow B(x)) \Rightarrow (\forall x)A(x) \leftrightarrow (\forall x)B(x)$

前束范式的求解步骤：换名

$(\exists x)G(x) = (\exists y)G(y); \quad (\forall x)G(x) = (\forall y)G(y);$ (改名规则)

$(\forall x)(G(x) \wedge H(x)) = (\forall x)G(x) \wedge (\forall x)H(x);$ (量词分配律)

$(\exists x)(G(x) \vee H(x)) = (\exists x)G(x) \vee (\exists x)H(x).$

$(\forall x)G(x) \vee (\forall x)H(x) = (\forall x)(\forall y)(G(x) \vee H(y));$

$(\exists x)G(x) \wedge (\exists x)H(x) = (\exists x)(\exists y)(G(x) \wedge H(y)).$

$(\forall x)(G(x) \vee S) = (\forall x)G(x) \vee S; \quad (\forall x)(G(x) \wedge S) = (\forall x)G(x) \wedge S;$ (量词辖域的扩张与收缩律)

$(\exists x)(G(x) \vee S) = (\exists x)G(x) \vee S; \quad (\exists x)(G(x) \wedge S) = (\exists x)G(x) \wedge S.$

综合推理方法

- 推导过程中可以引用命题演算中的规则P 和规则T；
- 如果结论是以条件形式或析取形式给出，则可使用规则CP；
- 若需消去量词，可以引用规则US和规则ES；
- 当所求结论需定量时，可引用规则UG和规则EG引入量词；
- 证明时可采用如命题演算中的直接证明方法和间接证明方法；
- 在推导过程中，对消去量词的公式或公式中不含量词的子公式，可以引用命题演算中的基本等价公式和基本蕴涵公式；
- 在推导过程中，对含有量词的公式可以引用谓词中的基本等价公式和基本蕴涵公式

难点总结

- 在推导过程中，如既要使用规则US 又要使用规则ES 消去量词，而且选用的个体是同一个符号，**则必须先使用规则ES，再使用规则US**。然后再使用命题演算中的推理规则最后使用规则UG 或规则EG 引入量词，得到所求结论。
- 如一个变量是用规则ES 消去量词，对该变量在添加量词时，则只能使用规则EG；
- 如使用规则US 消去量词，对该变量在添加量词时，则可使用规则EG 和规则UG。
- 在用规则US 和规则ES 消去量词时，此量词必须位于整个公式的最前端，且辖域为其后的整个公式。
- 在添加量词(∀x) 和(∃x) 时，所选用的x 不能在公式G(y)或G(c) 中出现

谓词演算的推理理论

- 例：所有的人都是要死的；苏格拉底是人。所以苏格拉底是要死的
- 设
  - ✓H(x):x 是人；
  - ✓M(x):x 是要死的；
  - ✓s：苏格拉底.
- 则推理符号化成：$(\forall x)(H(x) \rightarrow M(x))$；$H(s) \Rightarrow M(s)$
  - ✓(1) $(\forall x)(H(x) \rightarrow M(x))$ P
  - ✓(2) $\cancel{H(y) \rightarrow M(y)}$ $\boxed{H(s) \rightarrow M(s)}$ US，(1)， I
  - ✓(3) $H(s)$ P
  - ✓(4) $M(s)$ T，(2)，(3)， I

谓词演算的推理理论

- 例:
- $(\forall x)(C(x)\rightarrow W(x)\wedge R(x)), (\exists x)(C(x)\wedge Q(x)) \Rightarrow (\exists x)(Q(x)\wedge R(x))$

✓1	$(\forall x)(C(x)\rightarrow W(x)\wedge R(x))$	P
✓2	$(\exists x)(C(x)\wedge Q(x))$	P
✓3	$C(a)\wedge Q(a)$	ES(2)
✓4	$C(a)\rightarrow W(a)\wedge R(a)$	US(1)
✓5	$C(a)$	T(3), I
✓6	$W(a)\wedge R(a)$	T(4), (5), I
✓7	$Q(a)$	T(3), I
✓8	$R(a)$	T(6), I
✓9	$Q(a)\wedge R(a)$	T(7), (8), I
✓10	$(\exists x)(Q(x)\wedge R(x))$	EG(9)

注：推导过程中**(3)(4)**顺序不能颠倒，若先用**US**规则，再用**ES**规则，不一定得到**C(*a*)∧Q(*a*)**，一般为**C(*b*)∧Q(*b*)**，故无法推证下去，谨记！！！

谓词演算的推理理论

- 例：任何人违反交通规则，则要受到罚款，因此，如果没有罚款，则没有人违反交通规则。
- 解
  - ✓设
  - ✓S(x, y)：“x违反y” x 的论域为“人”
  - ✓M(y)：“ y 是交通规则”
  - ✓P(z)：“z是罚款”
  - ✓R(x, z)：“x受到z”
- 则该题可符号化为：
  - ✓H：$(\forall x)((\exists y)(S(x,y)\wedge M(y))\rightarrow(\exists z)(P(z)\wedge R(x,z)))$
  - ✓C：$\neg(\exists z)P(z)\rightarrow\neg(\exists x)(\exists y)(S(x,y)\wedge M(y))$

谓词演算的推理理论

- 例
  - H: $(\forall x)((\exists y)(S(x,y)\land M(y))\to(\exists z)(P(z)\land R(x,z)))$
  - C: $\neg(\exists z)P(z)\to\neg(\exists x)(\exists y)(S(x,y)\land M(y))$
- 证明：
  - 1 $(\forall x)((\exists y)(S(x,y)\land M(y))\to(\exists z)(P(z)\land R(x,z)))$ P
  - 2 $((\exists y)(S(b,y)\land M(y))\to(\exists z)(P(z)\land R(b,z)))$ US(1)
  - 3 $\neg(\exists z)(P(z)$ P(附加前提)
  - 4 $(\forall z)\neg P(z)$ T(3), E
  - 5 $\neg P(a)$ US(4)
  - 6 $\neg P(a)\lor\neg R(b,a)$ T(5), I
  - 7 $(\forall z)(\neg P(z)\lor\neg R(b,z))$ UG(6)
  - 8 $\neg(\exists z)(P(z)\land R(b,z))$ T(7), E
  - 9 $\neg(\exists y)(S(b,y)\land M(y))$ T(2), (8), I
  - 10 $(\forall y)(\neg S(b,y)\lor\neg M(y))$ T(9), E
  - 11 $(\forall y)(\neg(S(x,y)\land M(y))$ T(10), E
  - 12 $(\forall x)(\forall y)(\neg(S(x,y)\land M(y))$ UG(11)
  - 13 $\neg(\exists x)(\exists y)(S(x,y)\land M(y))$ T(12), E
  - 14 $\neg(\exists z)P(z)\to\neg(\exists x)(\exists y)(S(x,y)\land M(y))$ CP(3), (13)

命题函数与量词

- 使用全总个体域，对每一个客体变元的变化范围，可以用**特性谓词**加以限制。
  - ✓对“∀”，此特性谓词常作**蕴含前件**；
  - ✓对“∃”，特性谓词常作**合取项**。
- 如在全总个体域中：
  - ✓M(x)：x是人，　　　H(x)：x是要呼吸的。
  - ✓ $(\forall x)H(x)$ 可写成 $(\forall x)(M(x)\rightarrow H(x))$
    - 其中M(x)为H(x)的特性谓词
  - ✓ $(\exists x)H(x)$ 可写成 $(\exists x)(M(x)\wedge H(x))$
    - M(x)为特性谓词,限定了H(x)中变元范围

离散数学

集合与关系

计算机科学与技术学院 朴明浩

- 概念与表示法
- 集合的运算
- 序偶与笛卡尔积
- 关系及其表示
- 关系的性质
- 复合关系和逆关系
- 关系的闭包运算
- 集合的划分和覆盖
- 等价关系与等价类
- 相容关系
- 序关系

集合论

- 3-1 集合论的基本概念
- 3-2 集合上的运算
- 3-3 * 包含排斥原理
- 3-4 序偶与笛卡尔积

集合的笛卡尔积

- 序偶
  - 两个元素a_1, a_2组成的序列记作$\langle a_1, a_2\rangle$, 称为序偶
- 定义（3-4.1）：
  - 二个序偶$\langle a, b\rangle$和$\langle c, d\rangle$相等，当且仅当a=c且b=d，即 $\langle a, b\rangle=\langle c, d\rangle \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$
- 推广：
  - $\langle\langle a_1, a_2\rangle, a_3\rangle$称为三元组，记为$\langle a_1, a_2, a_3\rangle$，注:$\langle a_1, \langle a_2, a_3\rangle\rangle$不是三元组
  - $\langle\langle a_1, \cdots, a_{n-1}\rangle, a_n\rangle$称为n元组，记为$\langle a_1, a_2, \cdots, a_n\rangle$
- 注：
  - ①二元组的元素次序是重要的。例:$\langle 2, 3\rangle \neq \langle 3, 2\rangle$
  - ②n元组相等，当且仅当对应的元素分别相等。
  - ③$\langle\langle a_1, a_2\rangle, a_3\rangle \neq \langle a_1, \langle a_2, a_3\rangle\rangle$，后者不是三元组

关 系 论

- 3-5 关系及其表示
- 3-6 关系的性质
- 3-7 复合关系和逆关系
- 3-8 关系的闭包运算
- 3-9 集合的划分和覆盖
- 3-10 等价关系和等价类
- 3-11 相容关系
- 3-12 序关系

关系及其表示

- 日常生活中关系普遍存在，数学上可以用序偶来表达：若有xRy，可记为$\langle x, y\rangle \in R$，由此可见，关系R是序偶的集合
- 定义(3-5.1)：
  - ✓任一序偶的集合确定了一个二元关系R，R中任一序偶$\langle x, y\rangle$可记为 $\langle x, y\rangle \in R$ 或 **xRy**
  - ✓例：$(5, 7) \in <$，或 $5<7$

- 定义(3-5.2)：
  - ✓二元关系R中，由所有x组成的集合叫做关系R的前域记作$\mathrm{dom}\ R=\{x \mid \exists y(\langle x, y\rangle \in R)\}$
  - ✓由所有y组成的集合叫做关系R的值域，$\mathrm{Ran}\ R=\{y \mid \exists x(\langle x, y\rangle \in R)\}$
  - ✓R的前域和值域统称为R的域，记为$\mathrm{FLD}R=\mathrm{dom}(R) \cup \mathrm{ran}(R)$

- 例1.
  - ✓设$A=\{x1, \cdots, x7\}$，$B=\{y1, \cdots, y6\}$，$R=\{\langle x3, y1\rangle, \langle x3, y2\rangle, \langle x6, y2\rangle, \langle x5, y6\rangle\}$
  - ✓解：$\mathrm{dam}(R)=\{x3, x6, x5\}$，$\mathrm{ran}(R)=\{y1, y2, y6\}$

关系的性质：自反性

- 自反性（设R是A上的二元关系）
  - ✓定义(3-6.1)：若∀x∈A，均有xRx，那么称R是自反的

- 例
  - ✓A=｛1，2，3｝，R={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>}为自反关系
  - ✓A=｛1，2，3｝，R={<1,1>,<2,2>,<1,2>} 自反?
- 注：
  - ✓1）A上关系R是自反的 ⇔∀x（x∈A→xRx）
  - ✓2）在关系矩阵中，反映为主对角线元素均为1。在关系图中，反映为每结点都有自回路

关系的性质：反自反性

- 反自反性
  - 定义(3-6.4)：若$\forall x \in A$，均有$\langle x, x\rangle \notin R$，那么称R是反自反的
- 例
  - A={1, 2, 3}　R={<1, 2>, <2, 3>}
- 注：
  - 1）A上的关系R是反自反的$\Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \rightarrow \langle x, x\rangle \notin R)$
  - 2）在关系矩阵中，反映为主对角线元素均为0。在关系图中，反映为每结点都无自回路
- 注：有些关系可以既不是自反的，也不是反自反的

关系的性质：对称性

- 对称性
  - 定义(3-6.2)：如果对于每个x, y属于A, 每当xRy, 都有yRx, 则称A上的关系R是对称的
  - 例：A={1, 2, 3}，R={<1, 2>, <2, 1>, <3, 3>}

- 注：
  - 1）定义⇔$\forall x \forall y (x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \rightarrow yRx)$
  - 2）关系矩阵是对称矩阵。关系图中，若有弧则必是成对出现

关系的性质：反对称性

- 反对称性
  - 定义(3-6.5):如果对于每个x,y属于A,每当xRy和yRx,必有x=y, A上的关系R是反对称的
  - 例 A={1,2,3}, R={<1,2>,<1,3>}
  - 又如 S={<1,1>,<2,2>,<3,3>},对称的也是反对称的
- 注：
  - 1) $\Leftrightarrow \forall x \forall y (x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \wedge yRx \rightarrow x=y)$
  - 2) 在关系矩阵中，反映为主对角线对称的元素不能同时为1
- 在关系图上，反映为任意两个结点间的弧线不能成对出现

- 注：
  - 1)有些关系既不是对称的，又不是反对称的。例如A={1,2,3} R={<1,2>,<2,1>,<1,3>}
  - 2)有些关系既是对称的，又是反对称的，例如恒等关系、空关系

关系的性质：传递性

- 传递性
  - ✓定义(3-6.3)：设R是A上的二元关系，如果对于任意x，y，z属于A，每当xRy，yRz时就有xRz，则称关系R在A上是传递的
- 例：A={1, 2, 3, 4}
  - ✓R_1={<1, 4>, <4, 3>, <1, 3>, <3, 1>, <1, 1>, <4, 1>, <3, 3>, <4, 4>}
  - ✓R_2= {<1, 1>，<2, 2>，<3, 3>，<4, 4>}
  - ✓R_3= { }
  - ✓R_4= {<1, 2>，<2, 2>}，则：R_1，R_2，R_3，R_4是传递的
  - ✓R_5= {<1, 1>，<1, 2>，<2, 1>} 不是传递关系, 没有<2, 2>
- 注：
  - ✓1）定义$\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z(x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$
  - ✓2）传递关系图的特征是：
    - 在关系图中若存在从a到b一条有向路径（即存在一结点序列$a=a_1$，…，$a_n=b$，其中$\langle a_i, a_{i+1}\rangle \in R$，$1 \leqslant i \leqslant n-1$），则从a到b必定存在一条弧。 传递关系在关系矩阵上的特性都不易看出来

复合关系和逆关系

- 复合关系
  - ✓定义(3-7.1)： 设R_1是A到B的关系，R_2是B到C的关系，则$R_1 \circ R_2$是A到C的复合关系，定义如下：
  - ✓ $R_1 \circ R_2 = \{\langle a, c\rangle \mid (\exists b)(a \in A \wedge c \in C \wedge b \in B \wedge \langle a, b\rangle \in R_1 \wedge \langle b, c\rangle \in R_2)\}$

- 注：
  - ✓① 关系图上，$R_1 \circ R_2$是由$\langle a, c\rangle$这样的序偶组成，从$a \in A$到$c \in C$有一长度为2的路径，其中第一条弧属于R_1，第二条弧属于R_2
  - ✓② 若R_1的值域与R_2的前域的交集为空，则$R_1 \circ R_2$为空关系
  - ✓③ 设I_A、I_B分别为A和B上的恒等关系，R是A到B的二元关系，则$I_A \circ R = R \circ I_B = R$
- 注意： $R \circ I_A$, $I_B \circ R$为空关系，无意义

关系的闭包运算

- 闭包的定义
- 定义3-8.1：设R是X上的二元关系，如果有另一关系R′满足：
  - ✓1）R′是自反的（对称的、传递的）；
  - ✓2）$R \subseteq R'$；
  - ✓3）对任何自反的（对称的、传递的）关系R″，$R'' \supseteq R$，
  - ✓则 $R'' \supseteq R'$
- 称R’ 为R的自反（对称、传递）闭包，记作r(R), s(R), t(R)。
- 注：
  - ✓自反（对称、传递）闭包其实就是包含R的最小的自反（对称、传递）关系
  - ✓已知关系R，构作它的闭包可以采取添加序偶的方法来完成
- 如：
  - ✓X= {a, b, c} ， R= {<a, a>, <b, b>, <b, c>} ，
  - ✓则 r(R)= {<a, a>, <b, b>, <c, c>, <b, c> }

集合的划分和覆盖

- 我们除了把二个集合进行相互比较外，还常把一个集合分成若干子集讨论
- **覆盖和划分：** 定义(3-9.1)： 设A为非空集，
  - ✓ $S=\{S_1, \cdots, S_m\}$，$S_i \subseteq A$，$S_i \neq \varnothing (i=1, \cdots, m)$ 且 $S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m = A$，称S是A的**覆盖**
  - ✓ 若再加 $S_i \cap S_j = \varnothing (i \neq j, i, j=1, 2, \cdots, m)$ 则称S是A的**划分**，m称为S的秩
- 例1 设 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，

则 $X=\{\{1, 2\}, \{3\}, \{4, 5\}\}$ 划分

$Y=\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$ 覆盖

$Z=\{\{1, 2, 3\}, \{4\}\}$ 划分

$U=\{\{1, 2, 3, 4, 5\}\}$ 划分

$V=\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$ 划分

U称为A的最小划分，V称为A的最大划分

等价关系和等价类

- 定义(3-10.1)：若集合A上的二元关系R是：
  (1)自反的
  (2)对称的
  (3)传递的

则称R是A上的等价关系

- 例：
  - ✓ A={1, 2, 3, 4}， R={<1, 1>, <1, 4>, <4, 1>, <4, 4>, <2, 2>, <2, 3>, <3, 2>, <3, 3>}是一个等价关系
- 此外
  - ✓ 数中的“相等”关系,集合中的“相等”关系,命题演算中“⇔”关系,都是等价关系

- 注：其关系图的特点：每一结点有自回路，每对结点之间要么没有弧，要么有弧而且成对出现

序关系

- 在一个集合上，考虑元素的次序关系
- 定义(3-12.1)：若集合A上的二元关系R是自反的、反对称的和传递的，则称R是A的偏序关系，序偶$\langle A,R\rangle$称为偏序集
- 注：
  - ✓①常把偏序关系R记为“≤”即小于等于。则$\langle A,R\rangle$记为$\langle A,\leq\rangle$，aRb记为$a\leq b$，这里符号“≤”表示了一种更为普遍的“小于等于关系”即偏序关系
  - ✓②例如，实数集R的“小于或等于”关系是偏序关系
- 例：A={2,3,6,8}，D表示整除关系，M表示整倍数关系

  则 $D=\{\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 6,6\rangle,\langle 8,8\rangle,\langle 2,6\rangle,\langle 2,8\rangle,\langle 3,6\rangle\}$

  $M=\{\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 6,6\rangle,\langle 8,8\rangle,\langle 6,2\rangle,\langle 8,2\rangle,\langle 6,3\rangle\}$

  经验证，D和M均为偏序关系

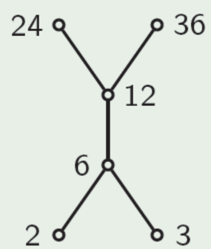
哈斯图

- 设R 是非空集合A 上的偏序关系，使用如下方法对R 的关系图进行简化：
  - ✓取消每个结点的自环；（因自反性）
  - ✓取消所有由于传递性出现的边．即若x→y, y→z，则去掉x→z 这条边;（因传递性）
  - ✓重新排列每条边，使得边的箭头方向全部向上，然后去掉这些箭头.（因反对称性）
- 以上步骤可以得到一个包含足够偏序信息的图，这个图称为偏序关系R的哈斯图(Hasse diagram)

最大元、最小元、极大元和极小元

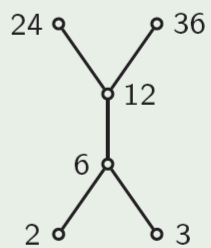
- B 的最大元、最小元、极大元和极小元如果存在，一定在B中；
- b是B的最大元，B中所有的元素都比b小；
- b是B的最小元，B中所有的元素都比b大；
- b是B的极大元，B中没有比b大的元素；
- b是B的极小元，B中没有比b小的元素.

Example



	{6,12}	{2,3}	{24,36}	{2,3,6,12}
最大元	12	无	无	12
最小元	6	无	无	无

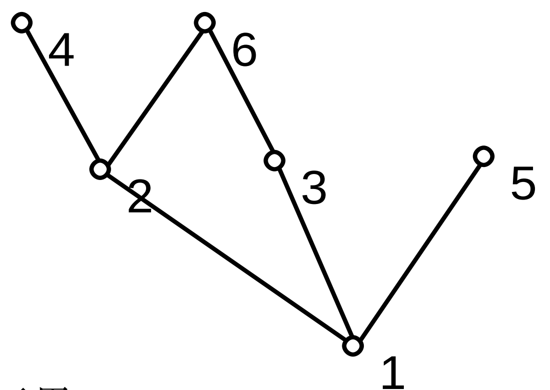
Example



	{6,12}	{2,3}	{24,36}	{2,3,6,12}
极大元	12	2,3	24,36	12
极小元	6	2,3	24,36	2,3

序关系

- 定义（3-12.7）设<A, ≤>是一偏序集合，B是A的子集
  - ✓ 如有a∈A，且∀x∈B, x≤a，则称a为B的上界
  - ✓ 如有a∈A，且∀x∈B, a≤x，则称a为B的下界
- 例： A={1, 2, 3, 4, 5, 6} 则<A, 整除>哈斯图为



  - ✓ a) B={1, 2, 3, 6}，则6是B的上界，1是B的下界
  - ✓ b) B={2, 3, 6}，则6是B的上界， 1是B的下界。
  - ✓ c) B={1, 2, 3, 4, 5, 6}，则B的上界不存在， 1是B的下界
- 可见，B的上界（下界）未必是B的元素。上界和下界可以不存在，也可以不唯一

离散数学

函数

计算机科学与技术学院 朴明浩

- 概念
- 逆函数和复合函数
- 基数的概念
- 可数集与不可数集
- 基数的比较

4-1 函数的概念

定义4-1.1 设X和Y是任何两个集合， f是X到Y的一个关系，如果对于每一个$x\in X$，有唯一的$y\in Y$，使得xfy，称关系f为函数，记作：$f: X\to Y$

称x为自变量， 称y为对应于x的象。

定义4-1.3 对于函数$f: X \to Y$，若$ran\ f = Y$，即Y 的每一个元素都是 X 中一个或多个元素的映像，则称函数 f 为**满射**。

$f: X \to Y$ 是满射 $\Leftrightarrow$ 对于$\forall y \in Y, \exists x \in X$使得 $y = f(x)$ 成立。

(*给出了证明满射的方法*)

例 *$A = \{a,b,c,d\}, B = \{1,2,3\}$，如果$f$ 为A 到B 的函数，且 $f(a) = 1, f(b) = 1, f(c) = 3, f(d) = 2$，*

则 f 是A 到 B 上的满射。

定义4-1.4　从 X 到Y的函数f，X中没有两个元素有相同的象，则称这个函数为**入射**。

$f:X\to Y$ 是入射 $\Leftrightarrow \forall x_1,x_2\in X$， $x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$

(此处给出了证明入射的方法)。

例　*函数*f: $\{a,b\} \to \{2,4,6\}$, $f(a)=2, f(b)=6$,

则 f 是入射，但不是满射。

定义4-1.5 从 X 到 Y 的函数f，若 f 既是满射又是入射，

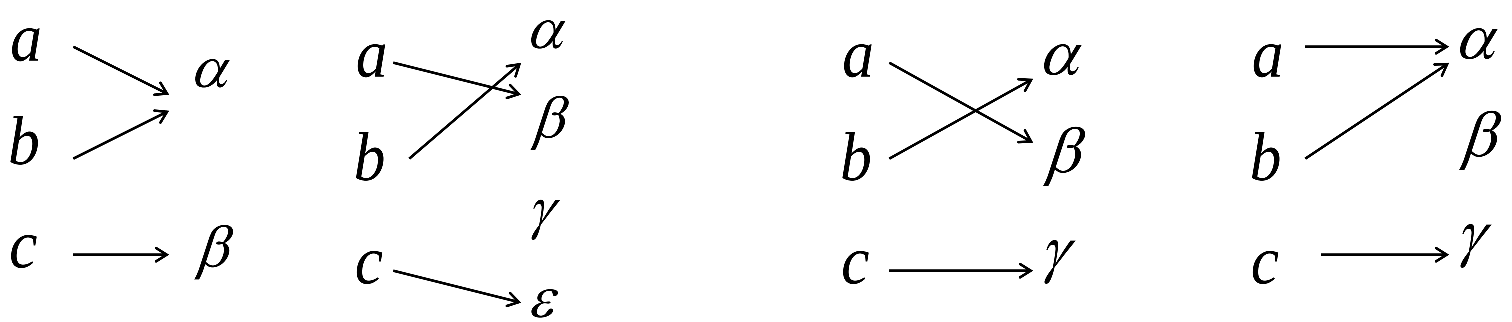
则称函数f是**双射**。

例 *函数 $f:\{a,b\}\rightarrow\{1,2\}, f(a)=1, f(b)=2$，*

则 f 为双射。

例 *在下图表示函数的中,判断是满射，入射或双射。*

满射　　入射　　双射　　非入射、满射



(a)　　(b)　　(c)　　(d)

4-2 逆函数和复合函数

一、逆函数

给定一个关系 R，颠倒 R 的所有序偶，得到逆关系R^c。

给定一个函数 f，颠倒 f 的所有序偶，得到的逆关系 f^c 不一定是函数。这是因为：

1)如果 $f:X\to Y$ 不是满射，则$ran\ f$是Y的真子集，也就是$dom\ f^c$是Y的真子集，不符合定义域的要求。

2)如果 $f:X\to Y$ 不是入射，则可能$y=f(x_1), y=f(x_2)$，逆函数$f^c(y)$的值将有两个，违反函数值唯一性的要求。

为此，对函数求逆需规定一些条件：**既是满射，又是入射**。

二、复合函数

（关系可以复合，函数是一种关系，因而函数也可复合。）

- 复合关系
  - ✓定义(3-7.1)：　设R_1是A到B的关系，R_2是B到C的关系，则$R_1 \circ R_2$是A到C的复合关系，定义如下：
  - ✓ $R_1 \circ R_2=\{\langle a, c\rangle \mid (\exists b)(a \in A \wedge c \in C \wedge b \in B \wedge \langle a, b\rangle \in R_1 \wedge \langle b, c\rangle \in R_2)\}$

定义4-2.2　设函数$f: X \rightarrow Y$,g: $W \rightarrow Z$，若$f(X) \subseteq W$ ，则

$$g \circ f=\{<x, z>|x \in X \wedge z \in Z \wedge (\exists y)(y \in Y \wedge y=f(x) \wedge z=g(y))\}$$

称函数 g在f的左边可复合。否则，g在f的左边不可复合。

注：

1、 $g \circ f(x)=g(f(x))$ 。

2、若$ran\ f \subseteq$ W 这个条件不成立，则定义$g \circ f$为空

复合的结果还可以复合，因此函数可以多次复合。

例 $f:R\to R,\ g:R\to R,\ h:R\to R,\ f(x)=x+2, g(x)=x-2, h(x)=3x$

求: $g\circ f$，$h\circ(g\circ f)$

解: $g\circ f=\{<x,x>|x\in R\}$ $h\circ(g\circ f)=\{<x,3x>|x\in R\}$

$g\circ f = g(f(x))=g(x+2)=x+2-2=x$

$h\circ(g\circ f) = h((g\circ f)(x))=h(g(f(x)))=h(g(x+2))= h(x+2-2)=3x$

由于复合关系满足可结合性，故复合函数也满足可结合性。

一般地，有 $h\circ(f\circ g)=(h\circ f)\circ g=h\circ f\circ g$。

离散数学

基数

计算机科学与技术学院 朴明浩

集合的基数

定义4-4.5　对于**集合*A*来说，**称与A等势的那个唯一的自然数为A的**基数**，**记作 *K*[*A*] (或 $\overline{\overline{A}}$、 |*A*|)。**

两个集合的基数相等，也即两者**等势。**

4-5 可数集与不可数集

- 由定理4-4.2知 N 是无限集，但是并非所有无限集都可以与 N 等势。
- 故无限集合之间也是有大小的。我们通过寻找新的“标准”去定义无限集的基数。
- 本节重点讨论可数集与不可数集及其性质。

$$1.01^{365}=37.8 \qquad \lim_{n\to\infty}1.01^{n}=\infty$$

$$0.99^{365}=0.03 \qquad \lim_{n\to\infty}0.99^{n}=0$$

4-5 可数集与不可数集

阿列夫零: **首先我们选取 N 为“标准集合”，记 $K[N] = \aleph_0$ 。**
(读 阿列夫零)

定义4-5.1　与自然数集合等势的任意集合称为可数的，可数集合的基数为 $\aleph_0$ 。

例　$A=\{1,4,9,16,\ldots,n^2,\ldots\}$，$B=\{1,8,27,64,\ldots,n^3,\ldots\}$
$C=\{2,5,10,17,\ldots,n^2+1,\ldots\}$，$D=\{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$

均为可数集，且 $K[A] = K[B] = K[C] = K[D] = \aleph_0$ 。

注：有限集和可数集统称为**至多可数集**。

定理4-5.8　实数集*R*是不可数的。

证明： 设 $S = \{x|x \in R \wedge 0<x<1\}$，因为$S \sim R$（已经证明）。因为$S$是不可数集，则$R$也是不可数集。

记（0,1）的基数为 $\aleph$，如果 $A \sim (0,1)$，那么$K[A] = \aleph$。

$\aleph$ 也称作连续统的势。

4-6　基数的比较

为了证明两个集合的基数相等，我们必须构造两个集合之间的双射函数，这常常是非常困难的工作。本节将介绍证明基数相等的一个较为简单的方法，首先说明基数是如何比较大小的。

定义（4-6.1） 若从集合A到集合B存在一个入射，则称A的基数不大于B的基数，记作 $K[A] \le K[B]$ 。若从A到B存在一个入射，但不存在双射，则称A的基数小于B的基数，记作$K[A] < K[B]$ 。

定理4-6.1 （Zermelo定理或称三岐性定理）

令A和B是任意集合，则以下三条中恰有一条成立。

a) $K[A] < K[B]$　　b) $K[A] > K[B]$　　c) $K[A] = K[B]$

定理4-6.2 （Cantor-Schroder-Bernstein定理）

设A和B是集合，如果$K[A] \leq K[B]$， $K[B] \leq K[A]$，

则 $K[A] = K[B]$ 。

定理4-6.2告诉我们：若存在从A到B和B到A的入射函数，则存在从A到B的双射函数。它为证明两个集合具有相同的基提供了有效方法。这是因为构造两个入射函数比构造一个双射函数要容易得多。

离散数学

代数系统

计算机科学与技术学院 朴明浩

- 代数系统的引入
- 运算及其性质
- 半群
- 群与子群
- 阿贝尔群和循环群
- 陪集与拉格朗日定理
- 同态与同构
- 环与域
- 格

代数系统

定义5-1.1　对于集合A，一个从A^n到B的映射，称为集合A上的一个n元运算。如果B是A的子集，则称该n元运算是封闭的。

定义5-1.2　一个非空集合A连同若干个定义在该集合上的运算$f_1, f_2, \ldots, f_n$所组成的系统就称为一个代数系统，记作$\langle A, f_1, f_2, \ldots, f_n \rangle$。

5.2 运算及其性质

对于二元运算来说

定义5-2.1：*是定义在A上的二元运算，若∀x，y∈A，有x * y∈A，称*在A上是封闭的。

例：$A=\{2^n \mid n\in N\}$，问<A，x>运算封闭否，

<A，+>，<A，/>呢？

解：$\forall 2^r$，$2^s\in A$，$2^r \times 2^s=2^{r+s}\in A$（$r+s\in N$），

∴<A，x>运算封闭。

又：2，4∈A，2+4∉A，∴<A，+>运算不封闭。

2，4∈A，2/4∉A，∴<A，/>运算不封闭。

交换律

定义5-2.2 *是定义在A上的二元运算，若$\forall x, y \in A$，有 $x*y=y*x$，称*满足交换律。

例：设<有理数集，*>,*定义如下：

$a*b=a+b-ab$，问*满足交换律否？

证：$\because \forall a, b \in A$,

$$a*b=a+b-ab=b+a-ba=b*a$$

$\therefore$ *满足交换律。

结合律

定义5-2.3　*是定义在A上的二元运算，若∀x，y，z∈A，有x*（y*z）=（x*y）*z，称*满足**结合律**。

例：<A，*>，若∀a，b∈A，有a*b=b。

证明：*满足结合律

证：∀a，b，c∈A，

a*（b*c）=a*c=c

（a*b）*c=b*c=c

∴a*（b*c）=（a*b）*c

∴　*满足结合律。　#

分配律

定义5-2.4　设*和△是定义在A上的两个二元运算，若∀x，y，z∈A 都有：

$$x*(y\triangle z)=(x*y)\triangle(x*z)$$

$$(y\triangle z)*x=(y*x)\triangle(z*x)\text{，}$$

称运算*在△上**可分配**的。

例：设A={α，β}，二元运算*和△的**运算表**如右：

*	α	β
α	α	β
β	β	α

△	α	β
α	α	α
β	α	β

问分配律成立否？

吸收律

定义5-2.5 设*和△是定义在A上的两个可交换的二元运算，若$\forall x, y \in A$有：

$$x*(x \triangle y)=x \quad , \quad x \triangle (x * y) = x,$$

称运算*和运算△满足**吸收律**。

例：N为自然数集，$\forall x,y \in N$，$x*y=\max\{x, y\}$，$x \triangle y=\min\{x, y\}$
试证：*和△满足吸收律。

证明：$\forall x, y \in N$，

$x*(x \triangle y) = \max\{x, \min\{x, y\}\}=x$，

$x \triangle (x*y) = \min\{x, \max\{x, y\}\}=x$，

∴ *和△满足吸收律。

#

等幂律

定义5-2.6 *是定义在A上的二元运算，若$\forall x \in A$，都有 $x*x=x$， 则称*满足**等幂律**。

例：已知集合s，$\langle \rho(s), \cup, \cap \rangle$。

$\forall A, B \in \rho(s)$， $A \cup A = A$， $A \cap A = A$

$A \cap (A \cup B) = A$， $A \cup (A \cap B) = A$

则$\cup$和$\cap$满足吸收律，等幂律。

幺元和零元

定义5-2.7，5-2.8 设*是定义在A上二元运算，如果存在元素e_r，e_l, θ_r，θ_l，e，$\theta\in A$，有

①.若$\forall x\in A$，有$e_l*x=x$，称e_l为运算*的**左幺元**。

若$\forall x\in A$，有$x*e_r=x$，称e_r为运算*的**右幺元**。

②.若$\forall x\in A$，有$\theta_l*x=\theta_l$，称θ_l为运算*的**左零元**。

若$\forall x\in A$，有$x*\theta_r=\theta_r$，称θ_r为运算*的**右零元**。

③. 若$\forall x\in A$，有$e*x=x*e=x$，称e为运算*的**幺元**。**也叫单位元**

若$\forall x\in A$，有$\theta*x=x*\theta=\theta$，称θ为运算*的**零元**。

幺元和零元

定理5-2.1: 设*是定义在 集合A上的二元运算，且在A中有关于*运算的左幺元e_l和右幺元e_r，则$e_l=e_r=e$，且幺元唯一。

证明： $e_r = e_l * e_r = e_l$

设有二个幺元e，e’；则e=e*e’=e’。

#

幺元和零元

定理5-2.2: 设*是定义在 集合A上的二元运算，且在A中有关于*运算的左零元θ_l，右零元θ_r，$\theta_l=\theta_r=\theta$，且零元唯一。

(证明与定理5-2.1类似)

定理5-2.2: 设〈A，*〉是一个代数系统，且集合A中元素的个数大于1。如果该代数系统中存在幺元e和零元θ，则$\theta\neq e$。

证明：（反证法）设$\theta=e$，那么对于任意的$\forall x\in A$，必有

$x=e*x=\theta*x=\theta=e$，于是A中的所有元素都是相同的，这与A中含有多个元素相矛盾。

#

逆元

定义5-2.9　设*是定义在A上的二元运算，e是运算*的幺元：

若对于元素a存在着元素b，使得b*a=e，那么称b为a的左逆元，如果a*b=e，则称b为a的右逆元。

如果一个元素b既是a的左逆元，又是a的右逆元，则称b是a的逆元。

显然，如果b是a的逆元，则a也是b的逆元，简称a与b互逆，a的逆元记作a^{-1}。

从运算表中看二元运算的性质

1）运算 * 具有封闭性，当且仅当运算表中的每个元素都属于A。

2）运算 * 具有可交换性，当且仅当运算表关于主对角线是对称的。

3）运算 * 具有等幂性，当且仅当运算表的主对角线上的每一个元素与它所在的行（列）的表头元素相同。

4）A关于运算 * 有零元，当且仅当该元素所对应的行和列中的元素都与该元素相同。

5）A关于运算 * 有幺元，当且仅当该元素所对应的行和列依次与运算表的行和列相一致。

6）设A中有幺元，a和b互逆，当且仅当位于a所在行，b所在列的元素以及b所在行，a所在列的元素都是幺元。

广群和半群

定义5-3.1：　具有运算封闭性的代数系统〈S，*〉称为广群。

定义5-3.2：　满足封闭性、结合律的代数系统＜S，*＞，称为半群，即∀x，y，z∈S满足

$(x*y)*z=x*(y*z)$，

这里*是二元运算。

独异点

定义5-3.3： 含有幺元的半群称为**独异点**（也称**含幺半群**）。

例

<R,+><N, x >　都是独异点

<N-{0},+>　是半群，不是独异点，没有幺元

群（Group）

定义5-4.1： 代数系统〈G，*〉，如果二元运算*满足：

1) **封闭性**，即$\forall a,b,\in G$，$a*b \in G$。

2) **结合律**，即$\forall a,b,c\in G$，$a*(b*c)=(a*b)*c$。

3) **存在幺元e**，即$\forall a\in G$，$e*a=a*e=a$。

4) G中**每个元素存在逆元**，$\forall a\in G$，$\exists a^{-1}\in G$，使$a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$。

则称〈G，*〉为**群（Group）**。

例： $<R-\{0\}, \times>$是一个群。

阶数

定义5-4.2： 设〈G，*〉为群，若G是有限集，称〈G，*〉为**有限群**，｜G｜称为群的**阶数**，若G是无限集，称〈G，*〉为**无限群**。

例： <R-{0}, x >是一个无限群。

5.5 阿贝尔群与循环群

定义5-5.1： 设〈G，*〉为群，若*满足交换律，称〈G，*〉为阿贝尔群(或可交换群)。

循环群

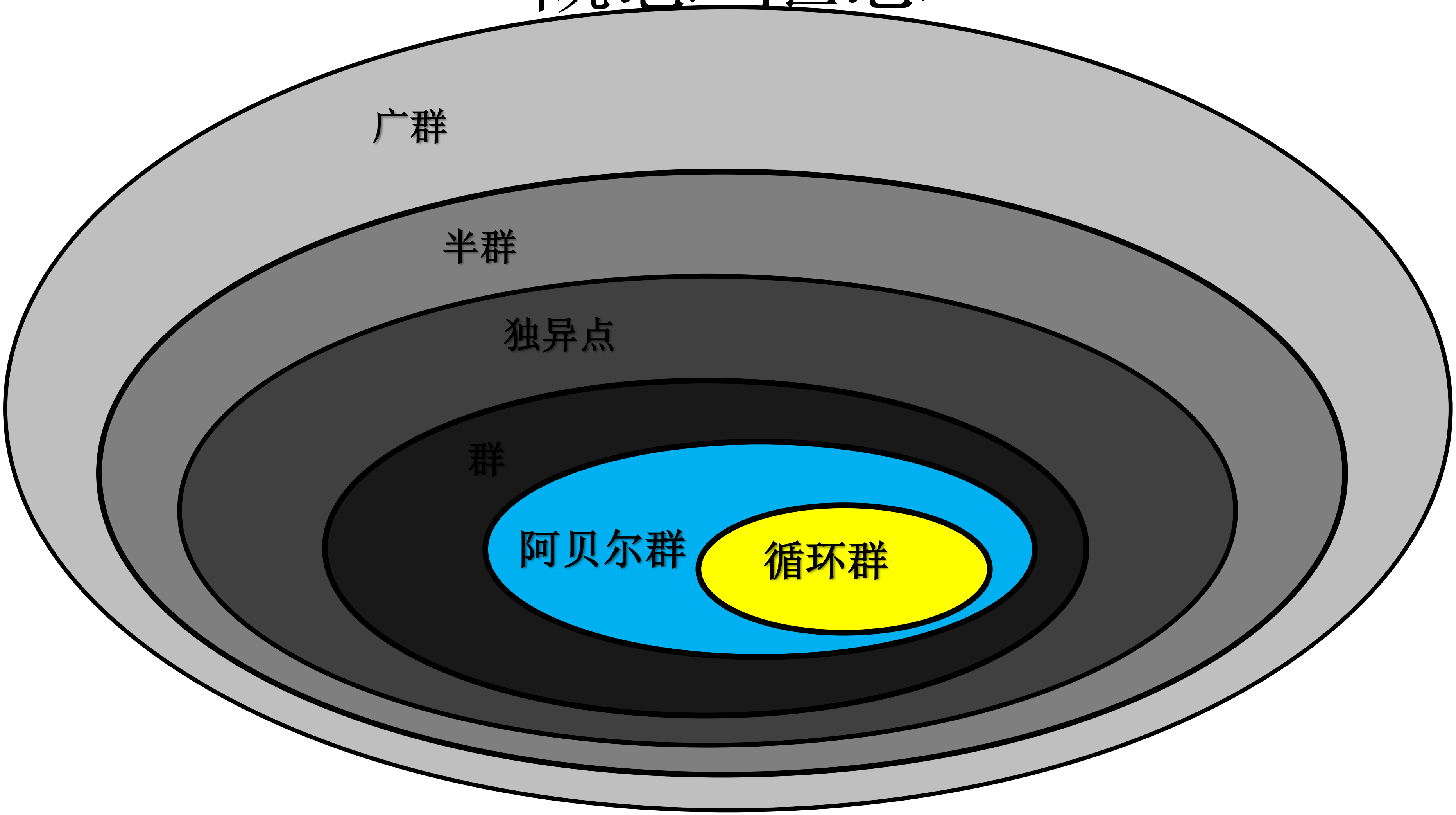
定义5-5.2 设<G,*>是一个群，若在G中存在元素a，使得G中任意元素都由a的幂组成，则称<G,*>是一个**循环群**，元素a称为循环群<G,*>的**生成元**。

例，群{<0°,60°,120°,180°,240°,360°>，★}

其中，★是两个角度连续旋转，即mod 360加，

该群是一个循环群，其生成元是60°

概念 汇总



5.8 同态与同构

定义5-8.1 设<A,★>和<B,*>是两个代数系统，f是从A到B的映射，$\forall a,b \in A$，有 $f(a_1 \bigstar a_2)=f(a_1)*f(a_2)$ 则称f是从<A,★>到<B,*>的一个同态映射，称<A,★>同态于<B,*>，记作<A,★>~ <B,*>。

把<f(A),*>称为<A,★>的一个同态象，其中 $f(A)=\{x \mid x=f(a), a \in A\}$，包含于B。

例子

设f是代数系统$<A,*>$到代数系统$<B,★>$的同态,则

若$<A,*>$是独异点,则$<f(A),★>$也是独异点.

证:$\forall a\in f(A)$,则$\exists x$,有$a=f(x)$,$e\in A$,$f(e)\in f(A)$,

$\therefore a★f(e)=f(x)★f(e)=f(x*e)=f(x)=a$,

$f(e)★a=f(e)★f(x)=f(e*x)=f(x)=a$。

$\therefore f(e)$是$<f(A),★>$的幺元,$\therefore <f(A),★>$是独异点。

同构

定义5-8.2 设f是从代数系统<A,★>到<B,*>的同态，

如果f是满射，则称f为**满同态**；

如果f是入射，则称f为**单一同态**；

如果f是**双射**，则称f**同构映射**，此时代数系统A与B是**同构的**，记作<A,★>≌<B,*>。

同余关系

定义5-8.5: $<A,*>$是一个代数系统，R是A上的等价关系，若$\forall <a,b>,<c,d>\in R$都有$<a*c，b*d>\in R$，称R是A上关于*的同余关系，R将A划分的等价类称为同余类。

5.9 环与域

定义5-9.1 代数系统<R,+,·>，若具有如下性质:

1) <R,+>是个阿贝尔群,

2) <R,·>是个半群,

3) 乘法·对加法+可分配，即

$\forall a,b,c \in R$，$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$，且$(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$,

称<R,+,·>是一个环。

我们约定： a的加法逆元记为-a，a+(-b)可简写为a-b。

域

定义5-9.4: 设代数系统<A,+,·>满足

1)<A,+>是阿贝尔群;

2)<A-{θ},·>是阿贝尔群;

3)运算·对+可分配,

则称<A,+,·>是域。

格

- 定义6-1.1：
- 设〈A，≤〉是偏序集，若∀a，b∈A，都有最大下界、最小上界，则称〈A,≤〉是一个**格**。

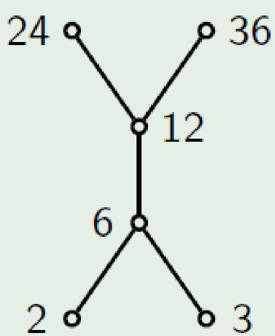
上界和上确界

Definition

设 $< A, \leqslant >$ 是偏序集, B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $a \in A$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 满足 $x \leqslant a$, 则称 a 为 B 的上界;
- 若元素 $a' \in A$ 是 B 的上界, 元素 $a \in A$ 是 B 的任何一个上界, 若均有 $a' \leqslant a$, 则称 a' 为 B 的最小上界或上确界.

Example



	$\{6,12\}$	$\{2,3\}$	$\{24,36\}$	$\{2,3,6,12\}$
上界	12,24,36	6,12,24,36	无	12,24,36
上确界	12	6	无	12

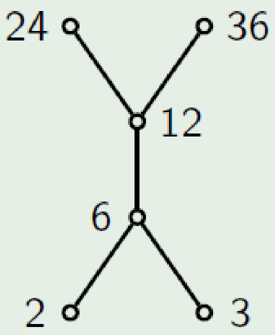
下界和下确界

Definition

设 $<A, \leqslant>$ 是偏序集,B 是 A 的任何一个子集, 若存在元素 $a \in A$, 使得

- 对任意 $x \in B$, 满足 $a \leqslant x$, 则称 a 为 B 的下界;
- 若元素 $a' \in A$ 是 B 的下界, 元素 $a \in A$ 是 B 的任何一个下界, 若均有 $a \leqslant a'$, 则称 a' 为 B 的最大下界或下确界.

Example



	$\{6,12\}$	$\{2,3\}$	$\{24,36\}$	$\{2,3,6,12\}$
下界	2,3,6	无	2,3,6,12	无
下确界	6	无	12	无

格

- 定义6-1.1：
- 设〈A，$\leq$〉是偏序集，若$\forall$a，b$\in$A，都有最大下界、最小上界，则称〈A,$\leq$〉是一个**格**。

格的基本性质

- 在格$<A, \leq>$中，对于任意a，b，c，d $\in A$，
  - 偏序的性质：自反，反对称，传递性
  - $a \leq a \vee b$， $a \wedge b \leq a$ （定理6-1.1）
  - $a \leq b, c \leq d \Rightarrow a \wedge c \leq b \wedge d$，$a \vee c \leq b \vee d$ （定理6-1.2）
  - $a \leq b, \Rightarrow a \wedge c \leq b \wedge c$，$a \vee c \leq b \vee c$ （推论）
  - 交换律，结合律，等幂律，吸收律(定理6-1.3)

离散数学

图论

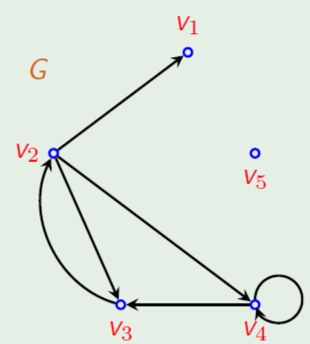
计算机科学与技术学院 朴明浩

- 基本概念
- 路与回路
- 矩阵表示
- 欧拉图与汉密尔顿图
- 平面图
- 对偶图与着色
- 树与生成树
- 根树及其应用

结点的度数（无向图）

- 定义7-1.2　　在图G=<V, E>中，与结点v关联的边数称作该结点的**度数**，记作deg(v)。
  - 有环时则需计算两次

Example



- $deg(v_1) = 1$, $deg^+(v_1) = 0$, $deg^-(v_1) = 1$;
- $deg(v_2) = 4$, $deg^+(v_2) = 3$, $deg^-(v_2) = 1$;
- $deg(v_3) = 3$, $deg^+(v_3) = 1$, $deg^-(v_3) = 2$;
- $deg(v_4) = 4$, $deg^+(v_4) = 2$, $deg^-(v_4) = 2$;
- $deg(v_5) = 0$, $deg^+(v_5) = 0$, $deg^-(v_5) = 0$;
- v_1 是悬挂结点, $< v_2, v_1 >$ 为悬挂边。

- 图的**最大度Δ(G)**、**最小度δ(G)**
  - 图$G = < V, E >$中，称$\Delta(G) = \max\{deg(v) \mid v \in V\}$为G的**最大度**
  - $\delta(G) = \min\{deg(v) \mid v \in V\}$为G 的**最小度**。

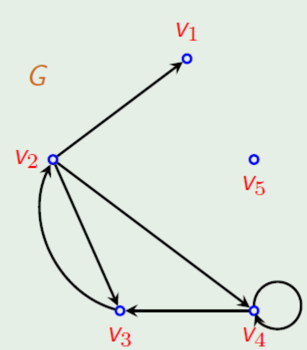
有向图的度数

- 定义7-1.3　　在有向图中，射入一个结点的边数称为该结点的入度$deg(v)^{-}$，由一个结点射出的边数称为该结点的出度$deg(v)^{+}$ 。结点的出度和入度之和就是该结点的度数。

$$deg(v) = deg(v)^{-} + deg(v)^{+}$$

- 定理7-1.3　　在任何有向图中，所有结点的入度之和等于所有结点的出度之和，也等于边数。

Example



- $deg(v_1) = 1$, $deg^{+}(v_1) = 0$, $deg^{-}(v_1) = 1$;
- $deg(v_2) = 4$, $deg^{+}(v_2) = 3$, $deg^{-}(v_2) = 1$;
- $deg(v_3) = 3$, $deg^{+}(v_3) = 1$, $deg^{-}(v_3) = 2$;
- $deg(v_4) = 4$, $deg^{+}(v_4) = 2$, $deg^{-}(v_4) = 2$;
- $deg(v_5) = 0$, $deg^{+}(v_5) = 0$, $deg^{-}(v_5) = 0$;
- v_1 是悬挂结点,$< v_2, v_1 >$ 为悬挂边。

7.2 路与回路

- 定义7-2.1　　给定图G=<V, E>，设v_0，v_1，…，v_nV，e_1，e_2，…，e_nE，其中e_i是连接v_{i-1}和v_i的边，那么交替序列$v_0e_1v_1e_2v_2 \cdots e_nv_n$称为连接$v_0$到$v_n$的**路**。
  - v_0 ：起点；
  - v_n ：终点；
  - n ：路的长度；
  - $v_0=v_n$ ：**回路**；
  - 所有边都不同：迹；
  - 所有结点都不同：**通路**；
  - 起点=终点的通路：**圈**。

	任意	vi！=vj
任意	路	通路
v0=vn	回路	圈

无向图的连通性

- 定义7-2.2　　在无向图G中，如果结点u和v之间存在一条路，则称结点**u和v是连通的，**记作**u ～ v。**
  - 此外，规定：对于任意 v∈V，v～v。
  - 连通关系　～={（u,v）|u,v∈V且u与v连通}，～是V上的等价关系。

- 定义7-2.3　　若无向图G是平凡图或G中任何两个顶点都是连通的，则称G为**连通图**，否则称G是**非连通图**或**分离图**。
  - 完全图$K_n(n\geqslant 1)$都是连通图，而零图$N_n(n\geqslant 2)$都是分离图。

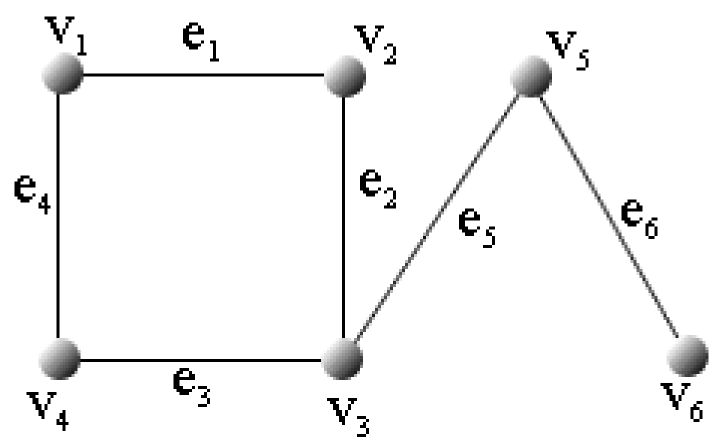
连通分支

- 定义　　设无向图G=<V,E>，V关于顶点之间的连通关系～的商集V/～={V_1, V_2, …, V_k}，V_i为等价类，称导出子图G[V_i](i=1, 2, …, k)为G的**连通分支**，连通分支数记为p(G).

- 　　由定义可知，若G为连通图，则p(G)=1，若G为非连通图，则p(G)≥2，在所有的n阶无向图中，n阶零图是连通分支最多的，$p(N_n)=n$.

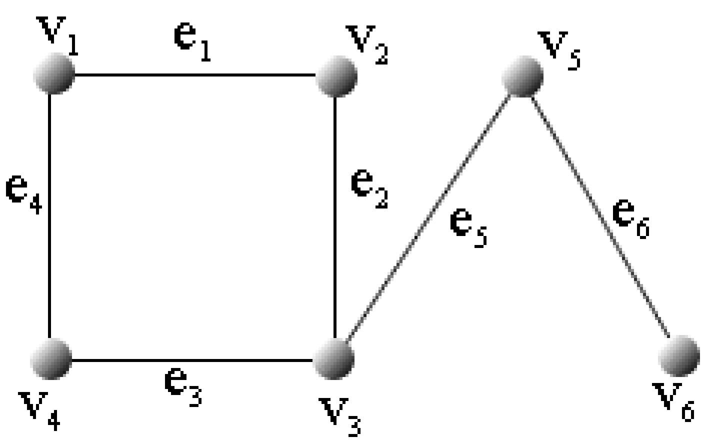
无向图的点割集

- 定义7-2.4 设无向图G=<V, E>为连通图，有非空$V_1 \subset V$，若图G删除了V_1中所有结点后，所得子图是不连通的；而删除了V_1的任何真子集后，所得子图都是连通的，则称V_1是G的一个点割集。若某一个点构成一个点割集，则称该点为割点。
- 例：
  - $\{v_2,v_4\}$，$\{v_3\}$，$\{v_5\}$都是点割集，
  - 而v_3,v_5都是割点。



无向图的边割集

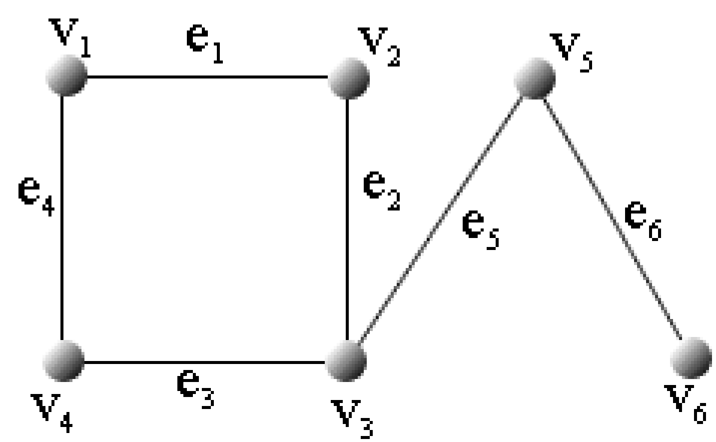
- 定义7-2.5　　设无向图G=<V, E>为连通图，有非空$E_1 \subset E$，若图G删除了E_1中所有边后，所得子图是不连通的；而删除了E_1的任何真子集后，所得子图都是连通的，则称E_1是G的一个（边）割集。若某一条边构成一个边割集，则称该边为割边（桥）。
- 例：
  - $\{e_6\},\{e_5\},\{e_2,e_3\},\{e_1,e_2\},\{e_3,e_4\},\{e_1,e_4\},\{e_1,e_3\},\{e_2,e_4\}$都是边割集，其中$e_6,e_5$是桥。



点连通度

- **定义** 设G为无向连通图且为非完全图，则称 $\kappa(G)=\min\{|V'|\,|\,V'$为G的点割集$\}$为G的**点连通度**，简称**连通度**。
  - 完全图$K_n(n\geqslant1)$的点连通度为n-1，非连通图的点连通度为0.
- 若$\kappa(G)\geqslant k$，则称G是**k-连通图**，k为非负整数。
- 例：
  - 右图的点连通度为1，

    此图为1-连通图。



  - 如K_5的点连通度$\kappa=4$，所以

    K_5是1-连通图，2-连通图，3-连通图，4-连通图。

无/有向图的邻接矩阵

- **定义14.26** 设简单图G=<V, E>，V={$v_1, v_2, \cdots, v_n$}，E={$e_1, e_2, \cdots, e_m$}，n阶方阵称$A(G)=(a_{ij})_{n\times n}$为G的**邻接矩阵**，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1, v_i, adj\ v_j\\ 0, v_i, nadj\ v_j \text{ 或 } i=j\end{cases}$$

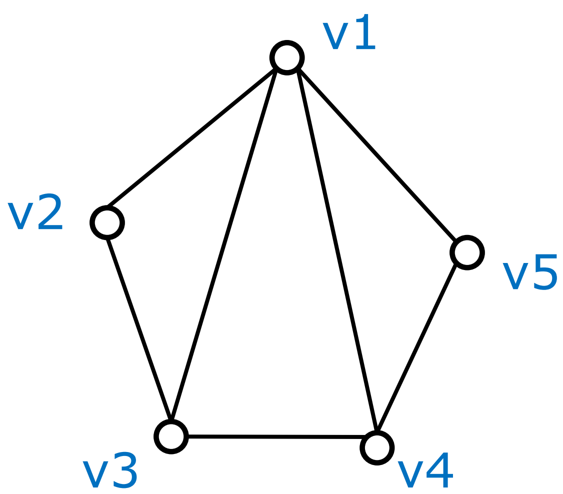
  - 还可表示为 $a_{ij}=\begin{cases}1 & <v_i, v_j>\in E \text{ 或 } (v_i, v_j)\in E\\ 0 & \text{否则}\end{cases}, (i, j=1, 2, 3, \cdots, n)$

  - adj 表示邻接，nadj 表示不邻接

- 如何得来？

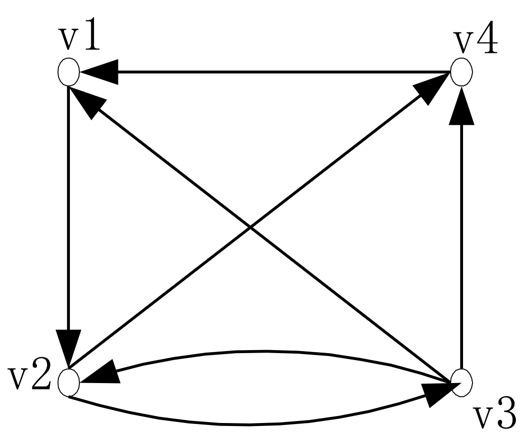
  ——直接看出来

■例：



$$A(G)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

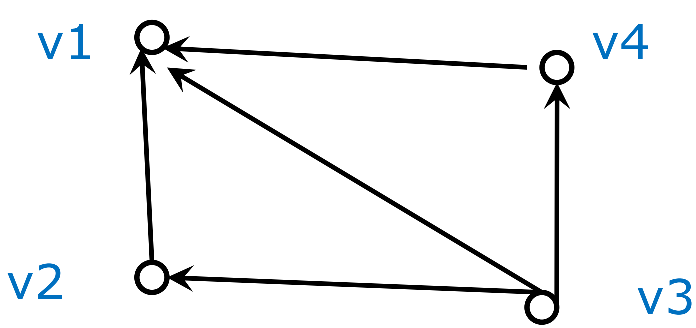
无向图的邻接矩阵是对称矩阵



$$A(G)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

有向图的可达矩阵

- **定义7-3.2** 设D=<V,E>为简单有向图，$V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，矩阵P(D) 称为D的**可达矩阵**，其中 $(p_{ij})_{n\times n}= \begin{cases} 1, & v_i\text{可达}v_j \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$
  - $v_i\in V$，$v_i \to v_i$，所以主对角线上的元素全为1.
- 例如，



- 不容易看出，如何求P(D)？

从邻接矩阵计算

方法1：假设图G的邻接矩阵为A，有A可以计算出：

$B_n=A+A^2+\ldots+A^n$，再从B_n中将不为零的元素均换为1，即可得到可达性矩阵P。

方法2：将矩阵为A，A^2，…，A^n，

分别改为布尔矩阵：$A^{(1)}$，$A^{(2)}$，…，$A^{(n)}$，

$P= A^{(1)} \vee A^{(2)} \vee \ldots \vee A^{(n)}$。

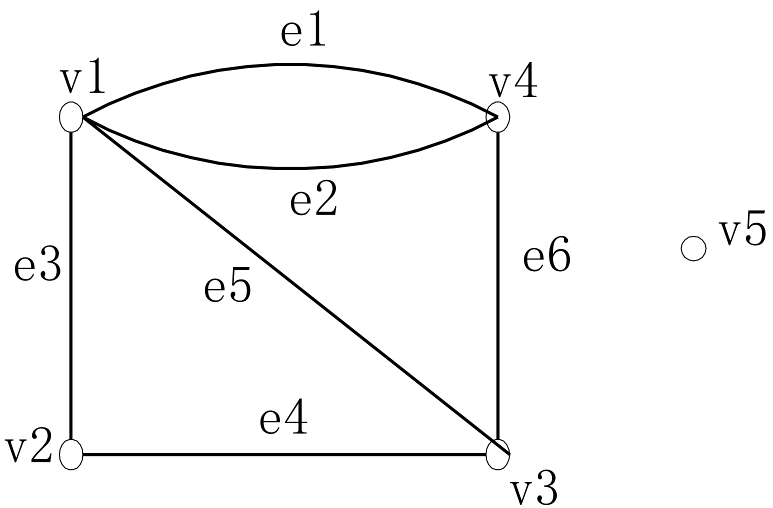
其中： $A^{(i)}$表示在布尔意义下的A的次方。“$\vee$”表示布尔意义下的矩阵加法。

无向图的关联矩阵

- 定义7-3.3　　给定无向图G=<V, E>, $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，$E=\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$，则M（G）$=(m_{ij})_{n\times m}$称为G的完全关联矩阵，其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & \text{若 } v_i \text{关联 } e_j \\ 0, & \text{若 } v_i \text{不关联 } e_j\end{cases}$$

■例1　求给定图的完全关联矩阵



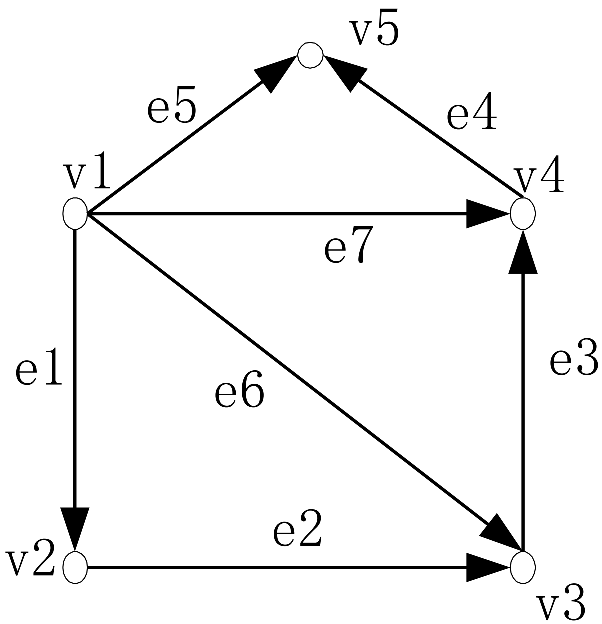
	e1	e2	e3	e4	e5	e6
v1	1	1	1	0	1	0
v2	0	0	1	1	0	0
v3	0	0	0	1	1	1
v4	1	1	0	0	0	1
v5	0	0	0	0	0	0

有向图的关联矩阵

- 定义7-3.4　　给定有向图D=<V, E>, $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，$E=\{e_1, e_2, \cdots, e_m\}$，则M（G）$=(m_{ij})_{n\times m}$称为G的完全关联矩阵，其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & 若\ v_i是\ e_j的起点\\ -1, & 若\ v_i是\ e_j的终点\\ 0, & 若\ v_i不关联\ e_j\end{cases}$$

- 例2　求给定图的完全关联矩阵



	e1	e2	e3	e4	e5	e6	e7
v1	1	0	0	0	1	1	1
v2	-1	1	0	0	0	0	0
v3	0	-1	1	0	0	-1	0
v4	0	0	-1	1	0	0	-1
V5	0	0	0	-1	-1	0	0

无向图的欧拉图

- **定义7-4. 1**　　给定无孤立结点图G，若存在一条路，经过图中每边一次且仅一次，该条路称为**欧拉路**，
- 若存在一条回路，经过图中每边一次且仅一次，该回路称为**欧拉回路**。
- 具有欧拉回路的图称为**欧拉图**。

☞ 注意

- 规定：平凡图为欧拉图；
- 欧拉通路是经过图中所有边的通路中长度最短的通路；
- 欧拉回路是经过图中所有边的回路中长度最短的回路。

- **定义7-4. 3** 给定图G，若存在一条路经过图中的每个结点恰好一次，这条路称作**汉密尔顿路**。若存在一条回路，经过图中的每个结点恰好一次，这条回路称作**汉密尔顿回路**。

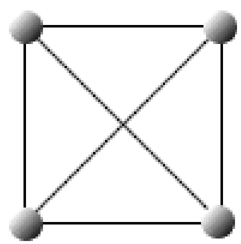
- 具有汉密尔顿回路的图称作**汉密尔顿图**。

☞ 注意

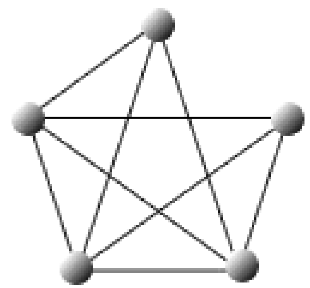
- 规定：平凡图为哈密顿图；
- 哈密顿通路是经过图中所有结点的通路中长度最短的通路；
- 哈密顿回路是经过图中所有结点的回路中长度最短的回路。

7.5 平面图

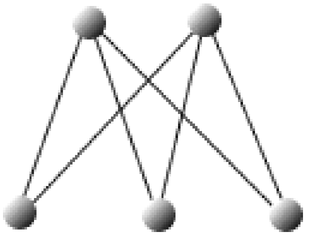
定义7-5.1 设G=<V，E>是一个无向图，如果能够把G的所有结点和边画在平面上，且使得任何两条边除了在结点外没有其它的交点，就称G是**平面图**。



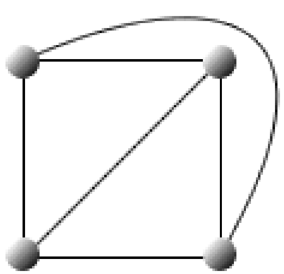
(1)



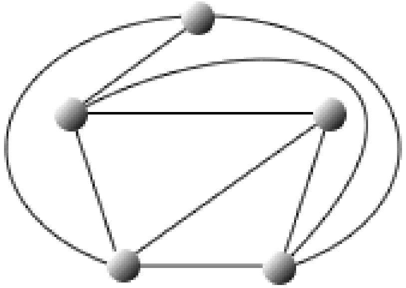
(2)



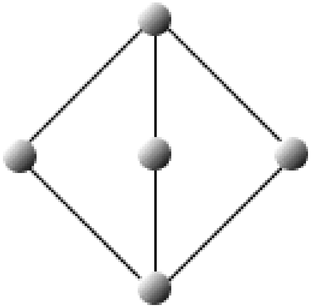
(3)



(4)



(5)



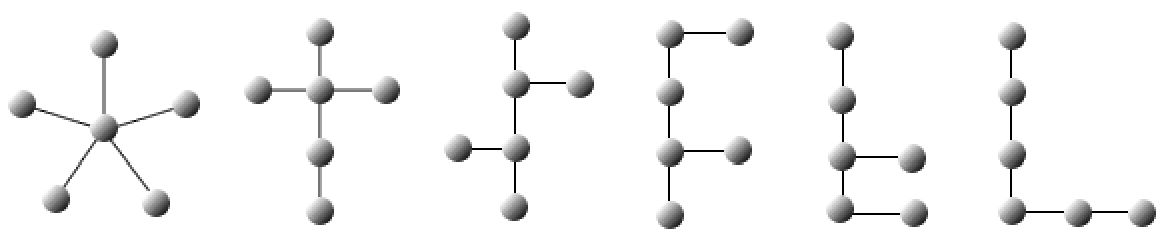
(6)

7.7 树与生成树

定义7-7.1 连通且无回路的无向图称为**无向树,树**。

- 若无向图至少有两个连通分支，每个连通分支都是树,该无向图称为**森林**。
- 在树中，度数为1 的结点称为**树叶**。
- 度数大于等于2的结点称为**内点(或分枝点)**。

例：举出所有6阶无向树



T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 T_6

问： n个结点的树有多少条边？（n-1）

设有n个村庄要修路，（1）若要使所有村庄之间都有通路，问需在两村之间至少修几条路？（2）若要使任意两村庄之间至少有一条直接的路，则至少修几条路？

树的性质

定理7-7.1 给定图T,以下关于树的定义是等价的。

（1）T是树；

（2）连通且无回路的图；

（2）无回路且e=v-1的图；其中e是边数，v是结点数。

（3）连通且e=v-1的图；

（4）无回路，但增加一条新边，得到一个且仅有一个回路；

（5）连通，但删去任一条边后图便不连通；

（6）每一对结点间有一条且仅有一条路。

定理7-7.2　结点数大于等于2的树，至少有两片树叶。

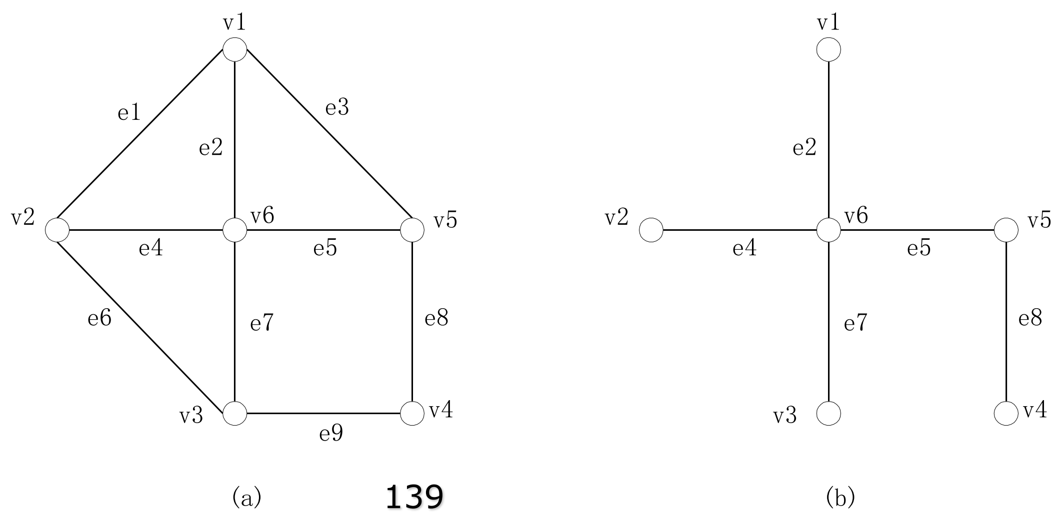
证：（用反证法证明）

图→树：生成树

定义 若无向图G的一个**生成子图**T是树，则称T为G的**生成树**，T中的边称为**树枝**，E（G）-E（T）称为树T的**补**（或余树），其中的每一边称为树T的**弦**。

注意：由树的定义知，只有连通图才有生成树。

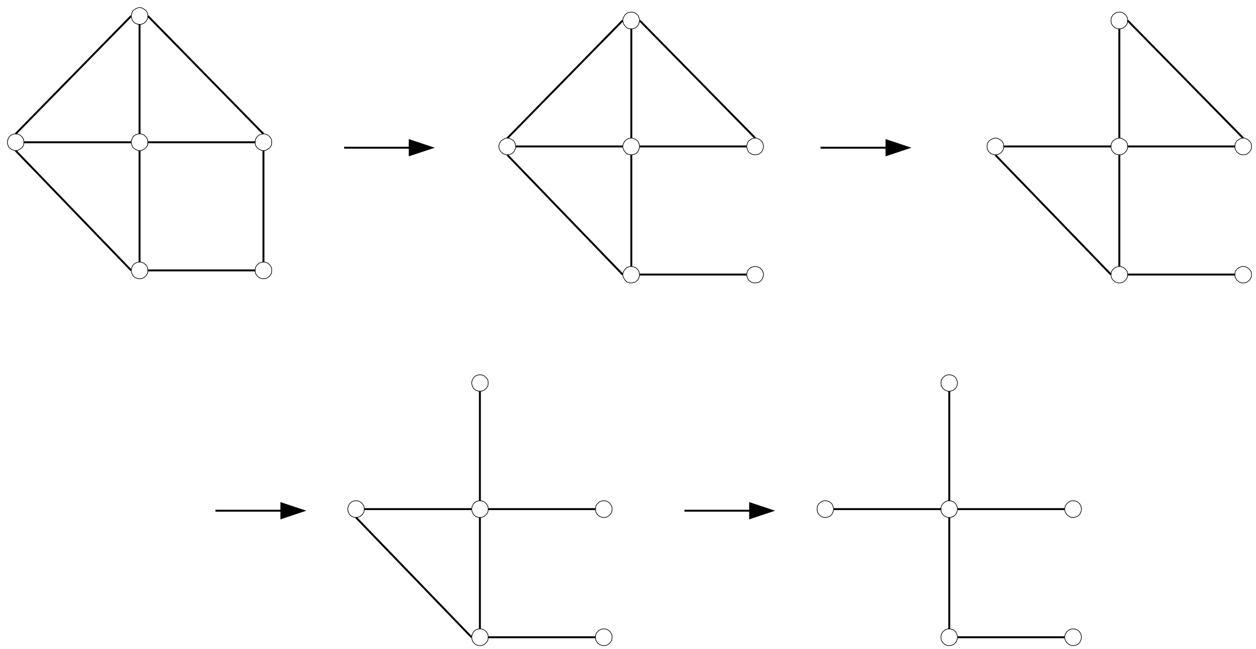
例如：



生成树的性质

定理7-7.3　任意连通图至少有一棵生成树。

证明：（不断地删去图中的回路，总能得到一棵生成树。但是方法不唯一，故**连通图的生成树往往不唯一**。）



定理7-7.4 图G中任一条回路和任何一棵生成 树的补至少有一条公共边。

证： （反证法）

定理7-7.5 图G中任何一个边割集和任何一棵生成树至少有一条公共边。

证： （反证法）

最小生成树——一种特别的生成树

定义　　　设图G=<V，E，W>是带权连通简单图，其中每一权w(i,j)是非负实数。

若图G有生成树T，T的权定义为w(T)= Σw(i,j)。

我们称W(T)最小的生成树为G的**最小生成树**。

最小生成树的求法

定理7-7.6（*kruska*算法）避圈法

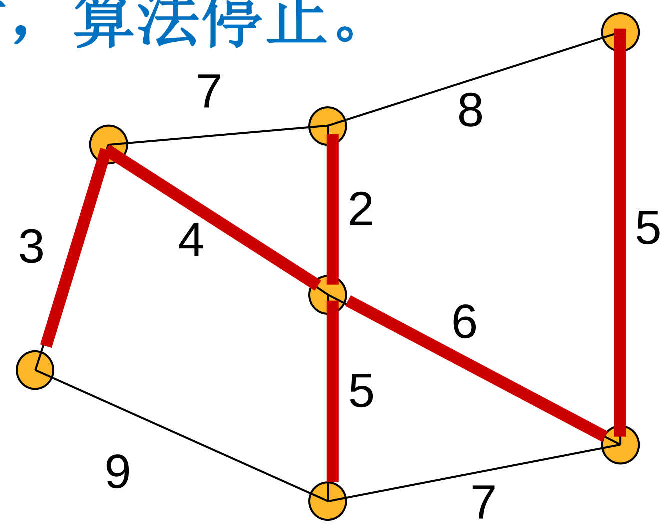
设n阶无向连通带权图G=<V,E,W>有m条边，有环则首先将环删除，最小生成树T的求解步骤:

（1）将m条边按权从小到大排列，设为$e_1,e_2,\ldots,e_m$；

（2）取e_1在T中，然后依次检查$e_2,e_3,\ldots,e_m$，若e_j与T中的边不能构成回路，则取e_j在T中，否则弃去e_j；

（3）直到生成T的为树，算法停止。

证明： **(略)**



(重点)

例1　如图所示，求其最小生成树。

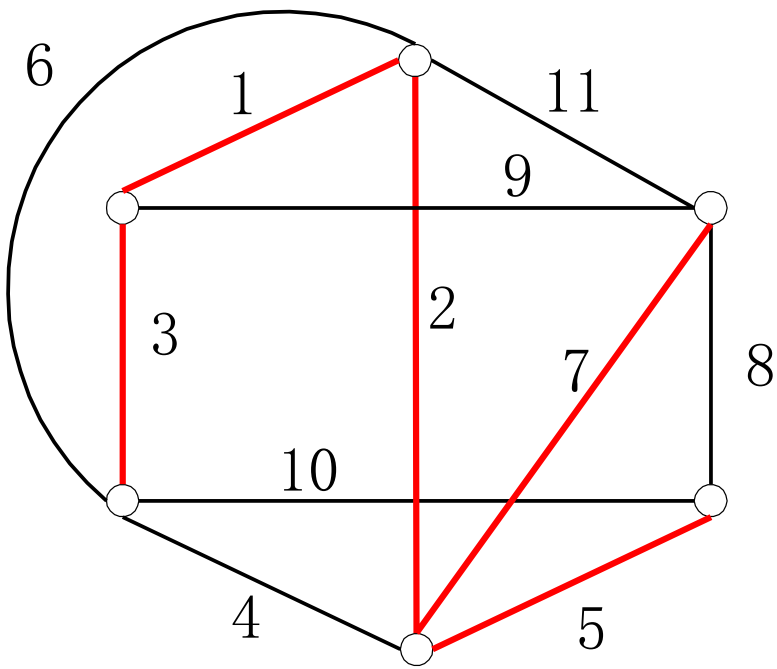
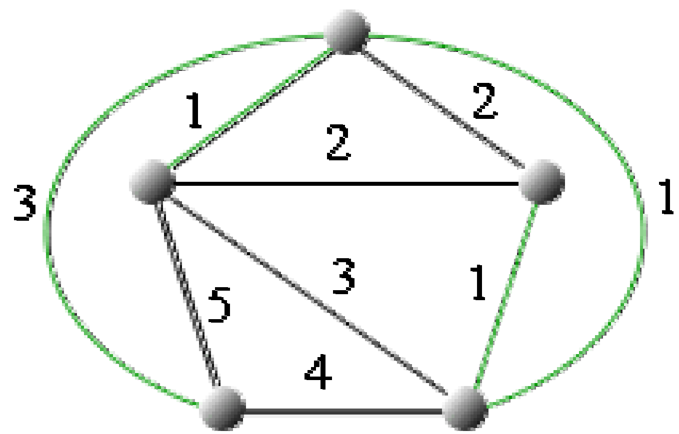


图7-7.3

（注：最小生成树也可能唯一）

例2 现有5个村庄V_i，（i=l，2，…，5），欲修建道路使村村连通。现有方案如下图所示，图中边为道路，边上权值表示修建该道路所需费用。问该如何精简该方案，使得村村连通而且修建的总费用最低？



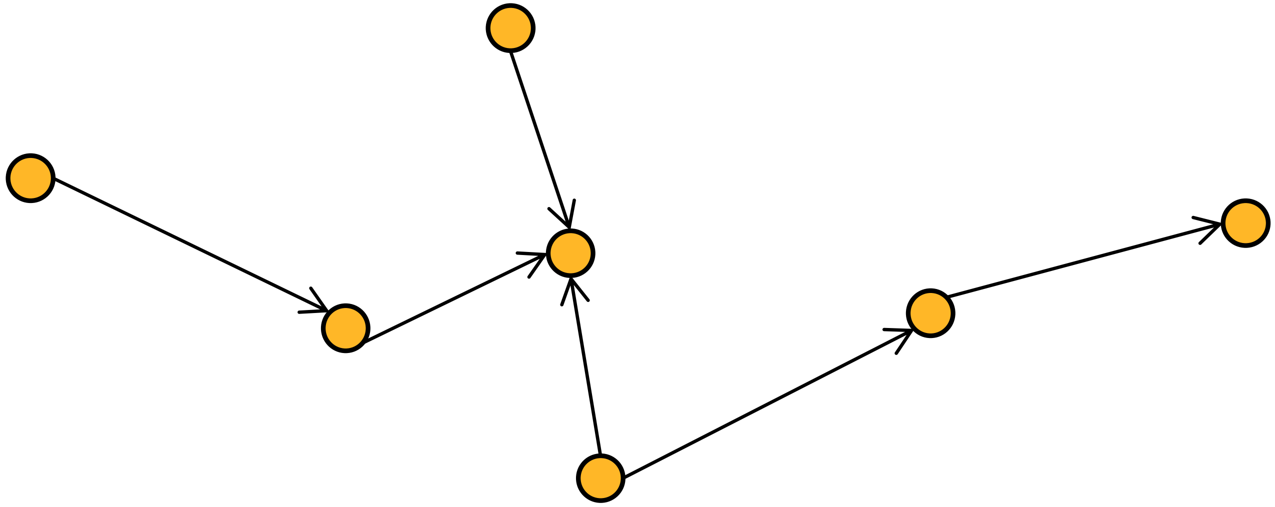
(1)

（本节。完）

7.8 根树及其应用

定义7-8.1 设D是有向图，若D的**基图**是树，则称D为**有向树**。

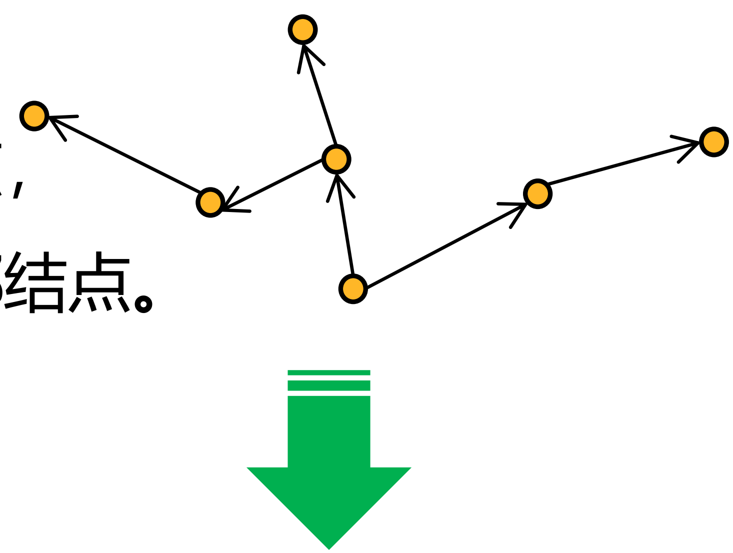
例如，



根树——一种重要的有向树

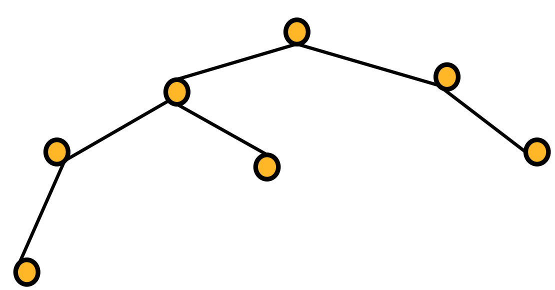
定义7-8.2　一棵有向树T，如果恰有一个结点的入度为0，其余所有结点入度为1，称T为**根树**。

- 入度为0的结点称为**根**，root
- 出度为0的结点称为**树叶**或外部结点，
- 出度不为0的结点称为**分枝点**或内部结点。



- 根树的**表示方法**：

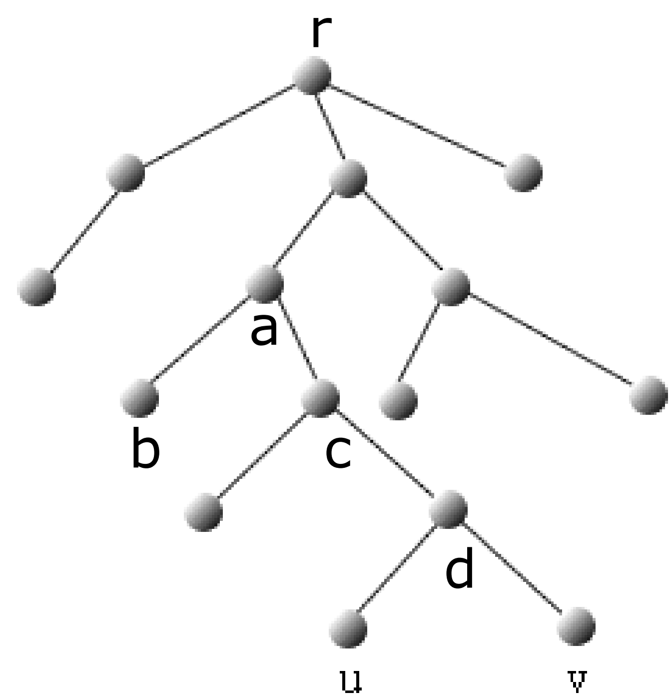
根在顶端；
所有边方向向下，箭头省略



相关术语

设a、b和c是树T的结点，

- 若从a到b有一条边则称a是b的“**父亲**”，b是a的“**儿子**”。**若**c也是a的儿子，称b和c为“**兄弟**”。
- 若从a到d存在一有向路，称a是d的**祖先**，d是a的**后代**。
- 从树根r到结点a的路中所含的边数称为a的**结点层次**。
- 树中最大的结点层次称为树的**高度**。



- 设T为根树，若将T中层数相同的顶点都标定次序，则称T为**有序树**。

根树的分类

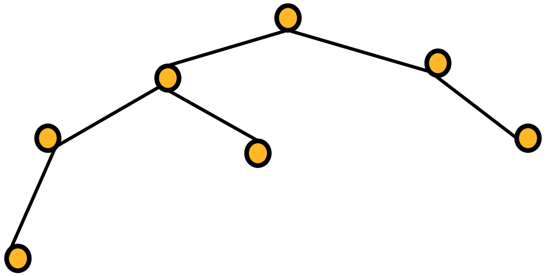
定义7-8.4 在根树中，若每一结点的儿子个数小于或等于m ,称T为**m叉树**。

如果根树T中每一结点的儿子个数等于m或者等于0，称T为**完全m叉树**。

若完全m叉树所有树叶层次相同，称为**正则m叉树**。

- **当m=2时，有二叉树、完全二叉树**

  和正则二叉树，例如，



在所有的r叉树中，二叉树最重要。

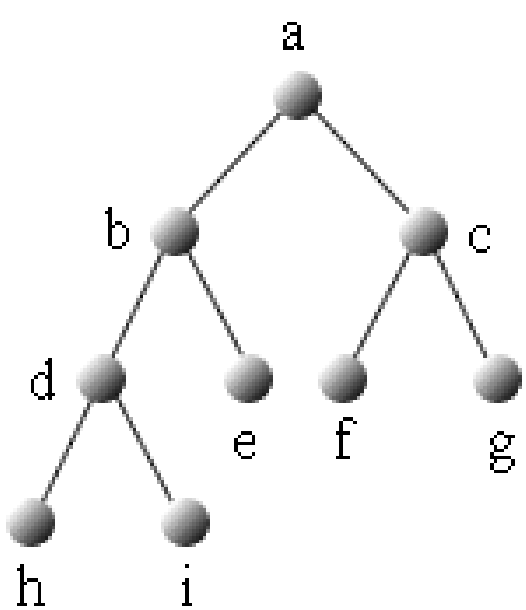
性质

定理7-8.1 设有完全m叉树，其树叶数为t，分枝点数为i，则 $(m-1)*i=t-1$ 。

定理7-8.2 设完全二叉树T有n个分枝点，且分枝点层数之和为I，所有叶子结点层数之和为E，则 $E=I+2n$。

二叉树的遍历

- 对于一棵根树的每个结点都访问一次且仅一次称为**遍历**。
- 三种遍历方式：
  1. 中序行遍法。访问的次序为：左子树、树根、右子树
  2. 前序行遍法。访问的次序为：树根、左子树、右子树
  3. 后序行遍法。访问的次序为：左子树、右子树、树根



- 应用：

表示四则运算的算式

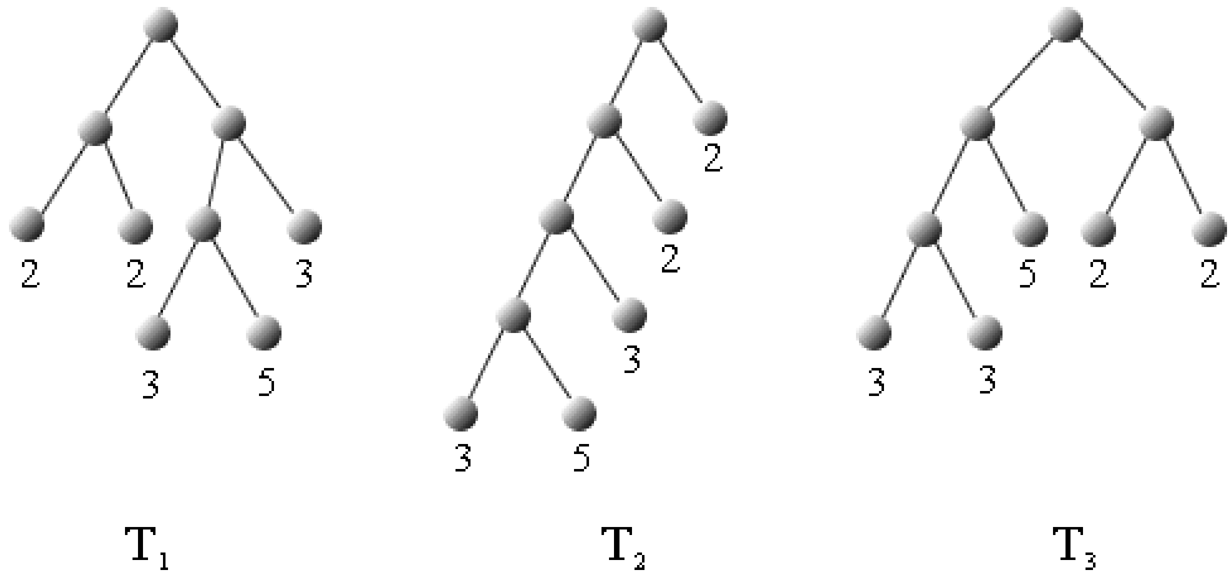
最优树——一种重要的二叉树

定义 一棵二叉树，共有t片树叶，分别带权:$w_1,w_2,\ldots,w_t$，其中w_i为非负实数，则该二叉树称为**带权二叉树**。

定义7-8.6 在带权二叉树中，若带权为w_i的树叶的层次为$L(w_i)$，我们把$w(T)=\sum w_i * L(w_i)$称为该**带权二叉树的权**。

带权相同的二叉树可以有多种，在所有带权$w_1,w_2,\ldots,w_t$的二叉树中，权值w(T)最小的二叉树，称为最优二叉树，简称**最优树**。

例1　二叉树T_1,T_2,T_3都是带权为2,2,3,3,5的二叉树。



根据定义计算它们的权，得

$W(T_1)=2\times2+2\times2+3\times3+5\times3+3\times2=38$

$W(T_2)=3\times4+5\times4+3\times3+2\times2+2\times1=47$

$W(T_3)=3\times3+3\times3+5\times2+2\times2+2\times2=36$

- 问：以上三棵二叉树都不是带权为2,2,3,3,5的最优树，应该如何求最优树呢？

最优树的求法

Huffman算法：

给定实数$w_1,w_2,\ldots,w_t$，且$w_1\le w_2\le\ldots\le w_t$:

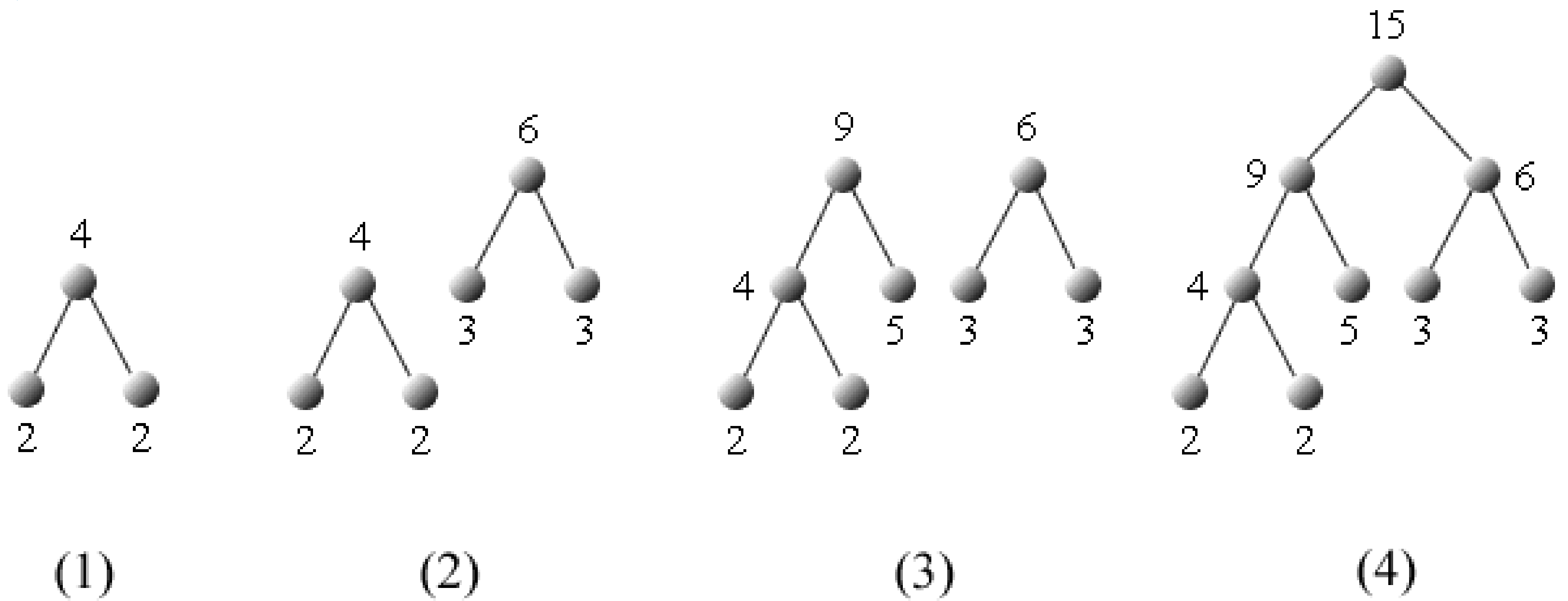
(1)连接权为w_1,w_2的两片树叶，得一个分支点，其权为w_1+w_2.

(2)在$w_1+w_2,w_3,\ldots,w_t$中选出两个最小的权，连接它们对应的顶点（不一定是树叶），得新分支点及所带的权。

(3)重复(2)，直到形成t-1个分支点，t片树叶为止。

例2 求带权2,2,3,3,5的最优二叉树。

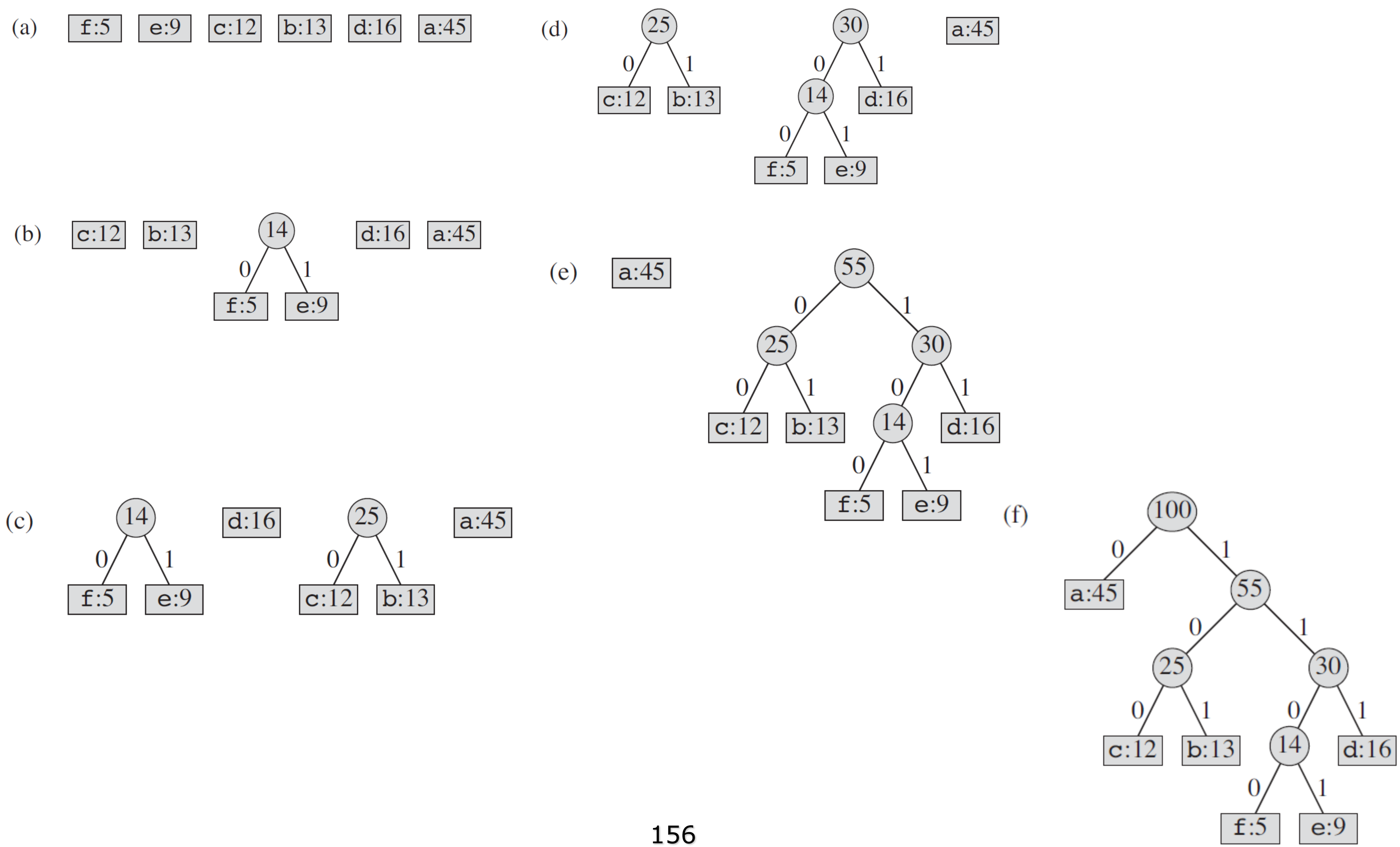
解： Huffman算法的计算过程：



图（4）为最优树，W(T)=

由此，进一步说明图1所示三棵树都不是最优树。

例



(a) f:5 e:9 c:12 b:13 d:16 a:45
(b) c:12 b:13 14 0 1 f:5 e:9 d:16 a:45
(c) 14 0 1 f:5 e:9 d:16 25 0 1 c:12 b:13 a:45
(d) 25 0 1 c:12 b:13 30 0 1 14 d:16 0 1 f:5 e:9 a:45
(e) a:45 55 0 1 25 30 0 1 c:12 b:13 0 1 14 d:16 0 1 f:5 e:9
(f) 100 0 1 a:45 55 0 1 25 30 0 1 c:12 b:13 0 1 14 d:16 0 1 f:5 e:9

最优树在通信中的应用

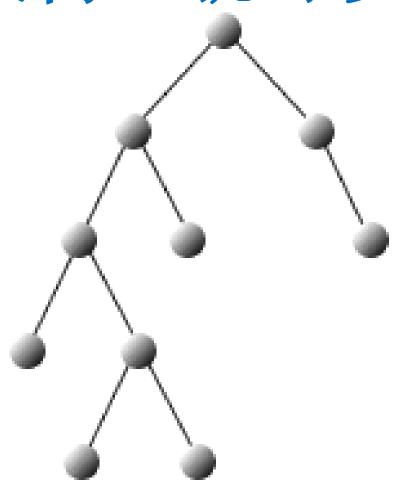
在通信中，常用二进制编码表示字符。例如可用长为2的二进制编码00，01，10，11分别表示A,B,C,D。{00，01，10，11}就是一个序列的集合。

定义 给定一个序列的集合，任何序列都不是另一个序列的前缀，则这个序列集合称为**前缀码**。

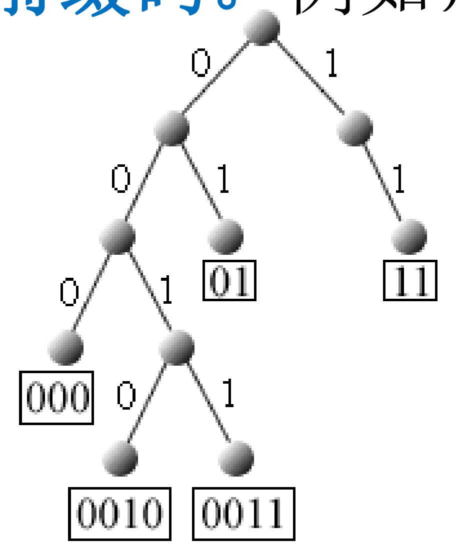
例如，{00，01，10，101}就不是。

问：如何产生通信需要的前缀码呢？

给定一棵二叉树，就可以产生前缀码。例如，



(1)

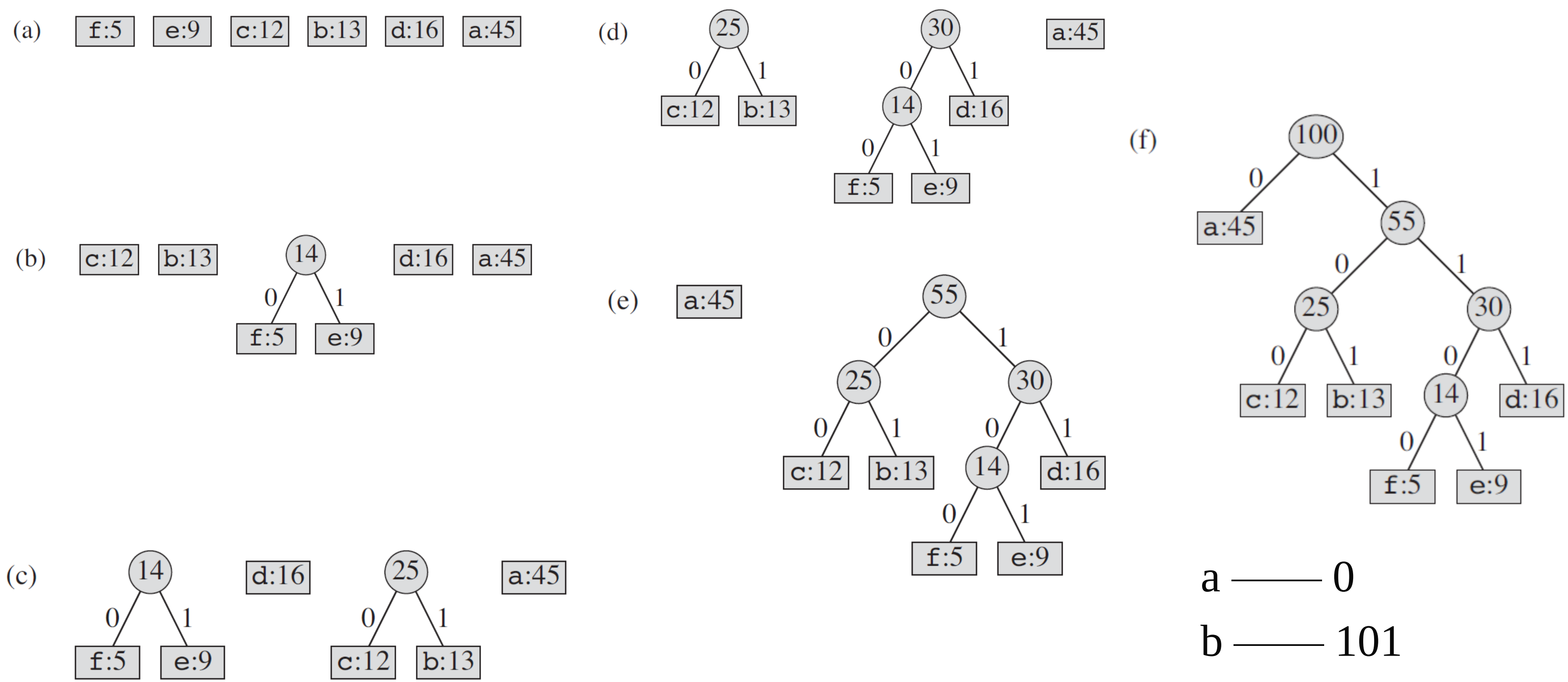


(2)

由二叉树的叶子产生前缀码，可以传输5个符号，比如A,B,C,D,E都不会混淆。

问：当这些字母出现频率不同时，用哪一个符号串传输哪个字母最省呢？

例



a —— 0

b —— 101

c —— 100

d —— 111

e —— 1101

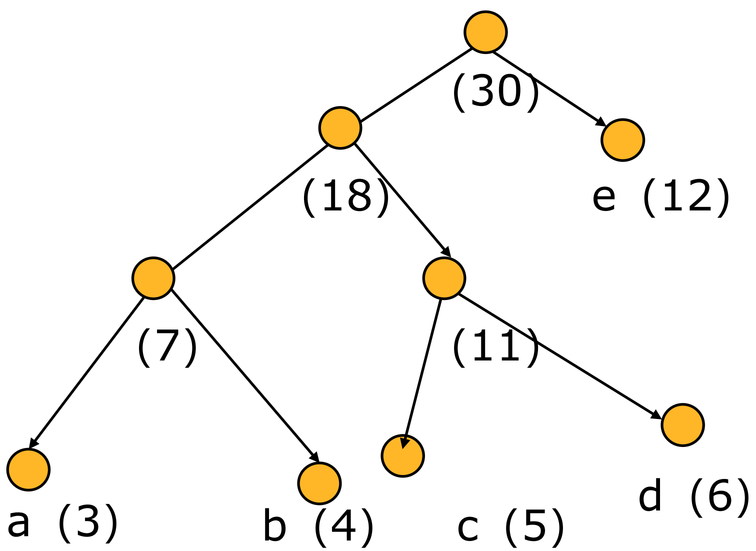
f —— 1100

- **方法：**

　　以各个字符出现的频率为权，利用Huffman算法求最优二叉树。由最优二叉树产生的前缀码称为**最佳前缀码。**

- 用最佳前缀码传输字符，效率最高。

例3：五个字符a，b，c，d，e的使用频率分别为3，4，5，6，12次，试求它们的最佳前缀码 。



分配编码：如果左子树用0，右子树用1，则
最优前缀码为a：000，b：001，c：010，d：011，e：1

- 其实，最佳前缀码不唯一。为什么？

练习

例 在通信中，八进制数字出现的频率如下：

0：25%　　1：20%
2：15%　　3：10%
4：10%　　5：10%
6：5%　　7：5%

求传输它们的最佳前缀码，

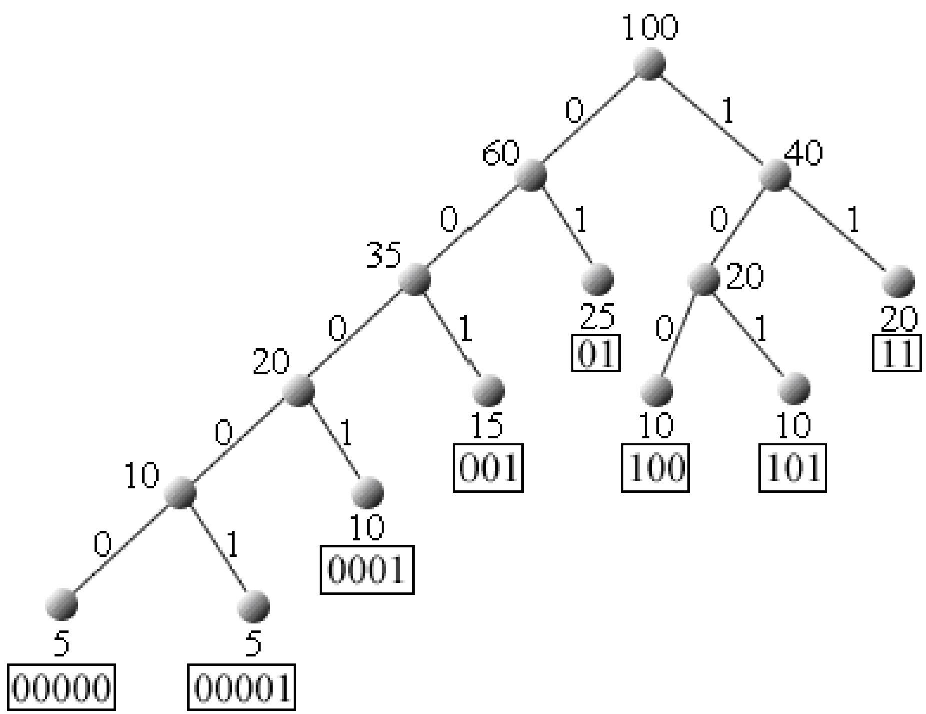
并求传输10^n（n≥2）个按上述比例出现的八进制数字需要多少个二进制数字？

若使用等长的（长为3）的码传输，需要多少个二进制数字？

（本节完）

解答

- 以100乘各频率为权，并按小到大排列，得$w_1=5$, $w_2=5$, $w_3=10$, $w_4=10$, $w_5=10$, $w_6=15$, $w_7=20$, $w_8=25$。产生的最优树如下。



0 —— 01

1 —— 11

2 —— 001

3 —— 100

4 —— 101

5 —— 0001

6 —— 00000

7 —— 00001

- 本节概念更迭：
  - 有向树
  - 根树
  - m叉树
  - 二叉树
  - 最优二叉树
  - 最优二叉树的求法与应用（重点）

练习

- 如果天不下雨，我们去打篮球，除非班上有会
  - P：今天天下雨
  - Q：我们去打篮球
  - R：今天班上有会

- 则原命题符号化为： $\neg R \to (\neg P \to Q)$

也可以符号化为：

$(\neg P \wedge \neg R) \to Q$

- (1)如果苹果是红的而且很甜，那么我就买苹果
- (2)苹果既不红又不甜，所以我没买苹果
  - P：苹果是甜的
  - Q：苹果是红的
  - R：我买苹果

- （1）$(P \wedge Q) \rightarrow R$

- （2）$(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg R$

验证下列等值式。

(1) $(P\rightarrow Q)\rightarrow R \Leftrightarrow (\neg Q \wedge P)\vee R$

解： (1) $(P\rightarrow Q)\rightarrow R$

$\Leftrightarrow(\neg P\vee Q)\rightarrow R$（条件转化律）

$\Leftrightarrow\neg(\neg P\vee Q)\vee R$（条件转化律）

$\Leftrightarrow(P\wedge\neg Q)\vee R$（德·摩根律）

$\Leftrightarrow(\neg Q\wedge P)\vee R$（交换律）

所以，$(P\rightarrow Q)\rightarrow R\Leftrightarrow(\neg Q\wedge P)\vee R$

- **例：** 求 $(P\vee Q) \wedge (P\rightarrow R)$ 的主合取范式

解：$(P\vee Q) \wedge (P\rightarrow R)$

$\Leftrightarrow (P\vee Q) \wedge (\neg P\vee R)$

$\Leftrightarrow (P\vee Q\vee (R\wedge\neg R)) \wedge (\neg P\vee (Q\wedge\neg Q)\vee R)$

$\Leftrightarrow (P\vee Q\vee R)\wedge(P\vee Q\vee\neg R)\wedge(\neg P\vee Q\vee R)\wedge(\neg P\vee\neg Q\vee R)$

$\Leftrightarrow M_{000}\wedge M_{001}\wedge M_{100}\wedge M_{110}$

$\Leftrightarrow M_0\wedge M_1\wedge M_4\wedge M_6$

- 证明：A，C→D，¬B→C，A→¬B $\Rightarrow$ D

证明：

1.	A	P
2.	A→¬B	P
3.	¬B	T(1)(2)假言推理
4.	¬B→C	P
5.	C	T(3)(4)假言推理
6.	C→D	P
7.	D	T(5)(6)假言推理

设有下列情况，结论是否有效？

- 如果甲得冠军，则乙或丙得亚军；如果乙得亚军，则甲不能得冠军；如果丁得亚军，丙不能得亚军。事实是甲已得到冠军，可知丁不能得亚军。

首先将原子命题符号化为：

- P：甲得冠军， Q：乙得亚军， R：丙得亚军，S：丁得亚军
- 则原题可符号化为：
  - $P\to(Q\vee R)$，$Q\to\neg P$，$S\to\neg R \Rightarrow P\to\neg S$

$P \rightarrow (Q \vee R)$， $Q \rightarrow \neg P$， $S \rightarrow \neg R \Rightarrow P \rightarrow \neg S$

证明如下：

1.	P	P（附加前提）
2.	$P \rightarrow (Q \vee R)$	P
3.	$Q \vee R$	T（1）（2）假言推理
4.	$Q \rightarrow \neg P$	P
5.	$P \rightarrow \neg Q$	T（4）逆反式
6.	$\neg Q$	T（1）（5）假言推理
7.	R	T（3）（6）析取三段论
8.	$S \rightarrow \neg R$	P
9.	$R \rightarrow \neg S$	T（8）逆反式
10.	$\neg S$	T（7）（9）假言推理
11.	$P \rightarrow \neg S$	CP规则

符号化下述命题并推出其结论:

- 有些女孩喜欢各种香水,但女孩都不喜欢有毒物体,所以香水都不是有毒物体。
- 符号化:
  - $M(x)$: x是女孩
  - $D(x)$: x是香水
  - $Q(x)$: x是有毒物体
  - $L(x, y)$:x喜欢y

前提: $\exists x(M(x)\wedge\forall y(D(y)\rightarrow L(x, y)))$,

$$\forall x\forall y(M(x)\wedge Q(y)\rightarrow\neg L(x, y))$$

结论: $\forall x(D(x)\rightarrow\neg Q(x))$

1.	$\exists x\,(M(x) \land \forall y(D(y) \rightarrow L(x, y)))$	P
2.	$M(c) \land \forall y(D(y) \rightarrow L(c, y))$ T(1)	ES
3.	$\forall y(D(y) \rightarrow L(c, y))$	T(2)化简
4.	$D(z) \rightarrow L(c, z)$ T(3)US	
5.	$\forall x \forall y\,(M(x) \land Q(y) \rightarrow \neg L(x, y))$	P
6.	$\forall y\,(M(c) \land Q(y) \rightarrow \neg L(c, y))$	T(5)US
7.	$M(c) \land Q(z) \rightarrow \neg L(c, z)$	T(6)US
8.	$M(c) \rightarrow (Q(z) \rightarrow \neg L(c, z))$	T(7)等价公式
9.	$M(c)$	T(2)I化简
10.	$Q(z) \rightarrow \neg L(c, z)$	T(8)(9)假言推理
11.	$L(c, z) \rightarrow \neg Q(z)$	T(10)假言易位
12.	$D(z) \rightarrow \neg Q(z)$	T(4)(11)假言三段论
13.	$\forall x(D(x) \rightarrow \neg Q(x))$	T(12)UG

- 任给集合A, B和C, 则 $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

证明

对任意x, y, 有

$\langle x, y\rangle\in A\times(B\cup C)$

$\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in(B\cup C)$

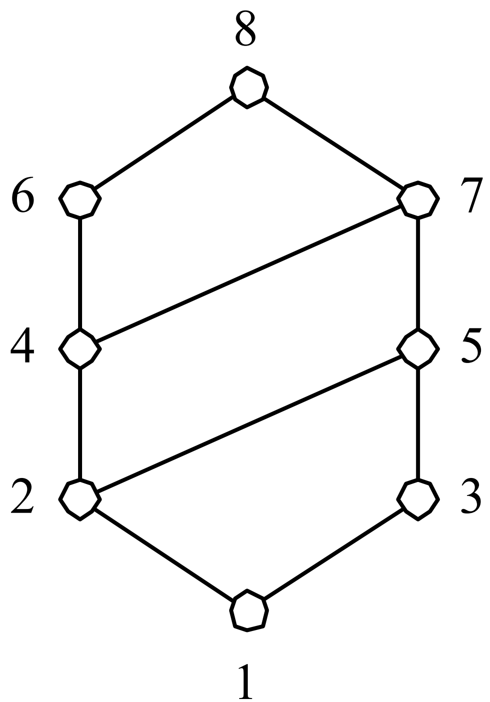
$\Leftrightarrow x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)$

$\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)$

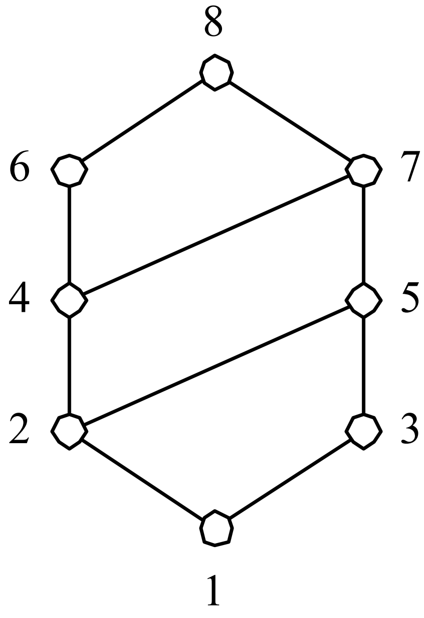
$\Leftrightarrow(\langle x, y\rangle\in A\times B)\vee(\langle x, y\rangle\in A\times C)$

$\Leftrightarrow\langle x, y\rangle\in(A\times B)\cup(A\times C)$

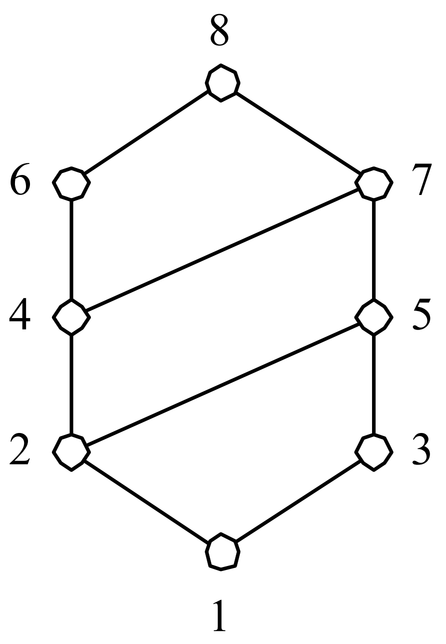
- 偏序<{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, ≤ >
- 哈斯图如下



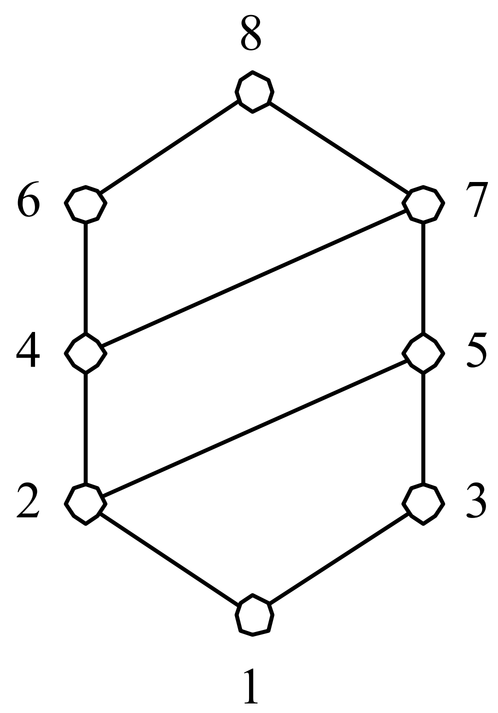
- 求最大元、最小元、极大元、极小元
- B={1, 2, 3, 5}
  - B的最大元为5。B的极大元为5。B的最小元为1。B的极小元也为1
- B={2, 3, 4, 5, 6, 7}
  - B无最大元和最小元。
  - B的极大元是6,7。极小元是2,3



- 求最大元、最小元、极大元、极小元
- B={4, 5, 8}
  - B的最大元是8,无最小元。B的极大元为8,极小元为4,5
- B={4, 5}
  - B无最大元,也无最小元。
  - B的极大元是4,5,极小元也是4,5



- 求上界、下界、最小上界、最大下界。
- B={2, 3, 4, 5, 6, 7}
  - *B*有上界8,下界1;
  - 最小上界8,最大下界1
- B={2, 4, 5, 6}
  - B有上界8,下界2,1;
  - 最小上界8,最大下界2



设函数$g: X \to Y$，$f: Y \to Z$，那么

- 如果f和g是单射的，则$f \circ g$也是单射的。

证明：

- 设x_1，$x_2 \in X$，$x_1 \neq x_2$，
- 由于g为单射，故有$y_1 \neq y_2 \in Y$,
- 且$y_1=g(x_1) \neq y_2=g(x_2)$；
- 又因为f也是单射，
- 所以有$z_1 \neq z_2 \in Z$, 且$z_1=f(y_1) \neq z_2=f(y_2) \Rightarrow f(g(x_1)) \neq f(g(x_2))$，
- 即$f \circ g(x_1) \neq f \circ g(x_2)$。$f \circ g$是单射得证。

- 设<G, *>为群，a, b∈G，且 $(a*b)^2=a^2*b^2$，证明 $a*b=b*a$。

证明:

由 $(a*b)^2=a^2*b^2$ 得 $(a*b)*(a*b)=(a*a)*(b*b)$

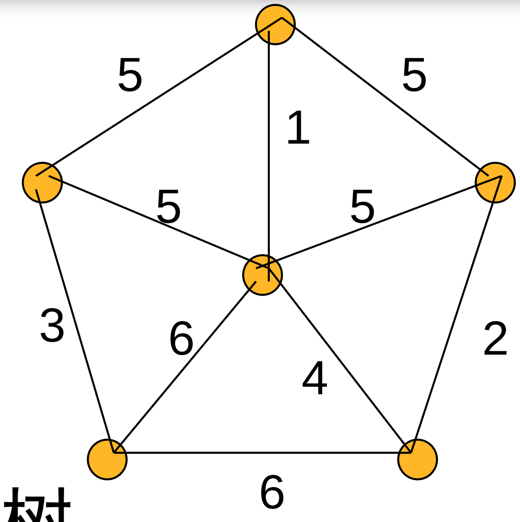
根据群中的消去律，

$$a^{-1}*(a*b)*(a*b)*b^{-1}=a^{-1}*(a*a)*(b*b)*b^{-1}$$

可得 $b*a=a*b$，

求下图的带权图的最小生成树

- 给定图



- 最小生成树