第一章 命题逻辑

- 1-1 命题及其表示法
- 1-2 联结词
- 1-3 命题公式与翻译
- 1-4 真值表与等价公式
- 1-5 重言式与蕴含式
- ~~1-6 其他联结词~~
- 1-7 对偶与范式
- 1-8 推理理论

第二章 谓词逻辑

- 2-1谓词的概念及表示
- 2-2命题函数与量词
- 2-3谓词公式与翻译
- 2-4变元的约束
- 2-5谓词演算的等价式与蕴含式
- 2-6前束范式
- 2-7谓词演算的推理理论

离散数学

集合与关系

计算机科学与技术学院 朴明浩

集合论

- 3-1 集合论的基本概念
- 3-2 集合上的运算
- 3-3 * 包含排斥原理
- 3-4 序偶与笛卡尔积

3-1集合论的基本概念

- 集合的概念
  - ✓集合是作为一次论述的事物的全体，在某些场合有时又称为类、族或搜集。
- 集合用大写英文字母A，B，C，…等表示
  - ✓组成集合的每个事物称为此集合的**元素**
- 集合中的元素用小写英文子母a, b, c，…表示
  - ✓若a是A中的元素，记为：$a \in A$

集合的表示法

- 列举法
  - 例：偶数集合 $A = \{\cdots, -4, -2, 0, 2, 4, \cdots\}$

- 描述法：用谓词描述出集合元素的特征来表示集合
  - 例1：$A = \{x \mid x=a \lor x=b\}$ （$A=\{a, b\}$）
  - 例2：A为偶数集合 $A=\{x \mid \exists y(y\in I \land x=2y)\}$ (I表示整数集)
  - 例3：永真式集合 $A=\{p \mid p\in wff \land p\Leftrightarrow T\}$
  - 一般地，$S = \{a \mid P(a)\}$ 表示 $a\in S$ 当且仅当$P(a)$是真

集合的表示法

- 注：
  - 集合中的元素可以是集合，例：A = {a, b, c， {a, b, c}}
  - 仅含一个元素的集合称为单元素集合
  - 应把单元素集合与单元素区别开来

- 例：
- {a}与a不同
  - {a}表示仅以a为元素的集合
- {{1，0}}与{1，0}不同
  - {{1，0}}表示仅以{1，0}为元素的集合
  - {1，0}是{{1，0}}的元素

集合的基数

- 含有有限个元素的集合称有限集合，否则称为无限集。
- 有限集合的元素个数称为该集合的基数或势，记为 |A|
- 例：
  - ✓ A = {a, b}, 则 |A|=2
  - ✓ |{A}|=1
  - ✓ B ={a, b}, |B|=2

集合相等公理

- 外延性公理：
  - 集合A，B相等，当且仅当A与B有相同的元素
  - [即 *iff* $\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge\forall x(x\in B\rightarrow x\in A)$]

- 故：
  - 列举法中，元素的次序无关紧要，即$\{x, y, z\}$与$\{z, x, y\}$相等
  - 元素的重复出现无关紧要，即$\{x, y, x\}$，$\{y, x\}$，$\{x, x, x, x, y\}$相等
  - 集合的表示不唯一，如$\{x| x^2=1\}$与$\{-1, 1\}$表示相同的集合

离散数学0315

微信扫码签到

集合间的包含关系

- 子集
  - ✓定义(3-1.1)：设A和B是集合，若$\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)$，那么A是B的子集，记为$A\subseteq B$。读作‘B包含A’或‘A是B的子集’，又称“B是A的扩集”

- 真子集
  - ✓定义(3-1.2)：若$A\subseteq B$，且$A\neq B$，称A是B的真子集，记$A\subset B$。读“B真包含A”
  - ✓即 $A\subset B\Leftrightarrow\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge\exists x(x\notin A\wedge x\in B)$

集合间的包含关系

- 全集
  - ✓我们讨论的元素和集合是限于某一论述区域中，此论述区域称为全集E。虽然有时这个论述区域未明晰给出
- 定理：
  - ✓任意集合$A \subseteq E$
  - ✓证：$\because \forall x(x \in A \rightarrow x \in E)$为真
  - ✓ $\therefore$定理1正确
- 定理（3-1.1）：$A=B$等价于$A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
  - ✓证：$\because A = B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x(x \in B \rightarrow x \in A) \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
  - ✓ $\therefore$定理正确
  - ✓推论：$A \subseteq A$（$\because A=A$，$\therefore A \subseteq A$）
- 定理：若$A \subseteq B$，且$B \subseteq C$，则$A \subseteq C$
  - ✓证：$\because A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in B)$
  - ✓ $B \subseteq C \Leftrightarrow \forall x(x \in B \rightarrow x \in C)$
  - ✓ $\therefore \forall x(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \forall x(x \in B \rightarrow x \in C) \Rightarrow \forall x(x \in A \rightarrow x \in C)$
  - ✓即定理3正确

集合间的包含关系

- 空集
  - 定义（3-1.3）：没有元素的集合称为空集，记为Φ

- 定理（3-1.2）：对任意集合A，Φ⊆A
  - 证：∵∀x(x∈Φ→x∈A)永真
  - ∴Φ⊆A

- 注：Φ与{Φ}不同，前者没有元素，后者是以空集为一个元素的集合。

集合间的包含关系

- 幂集
  - ✓定义（3-1.5)给定集合A，由集合A的所有子集为元素组成的集合，称为集合A的幂集，记为ρ（A）。
- 举例：
  - ✓例1：试求出集合{p, q}的幂集。
  - ✓解：
    - Φ，{p}，{q}，{p, q}是{p, q}的子集，
    - ∴{Φ，{p}，{q}，{p, q}}是{p, q}的幂集。
- 定理（3-1.3)：集合A有n个元素，则其幂集有2^n个元素。
  - ✓证明：从幂集的定义出发，根据乘法原理，易得。

集合间的包含关系

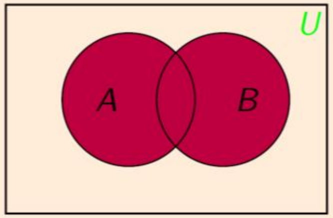
- 幂集的编码表示法：设S={a, b, c}
  - ✓ $\rho(A)=\{S_i,\ i\in J\}$，其中$J=\{i \mid i$是二进制数且$000\leq i\leq 111\}$
  - ✓例如，$S_3=S_{011}=\{b, c\}$，$S_6=S_{110}=\{a, b\}$等

集合上的运算：并、交、差运算

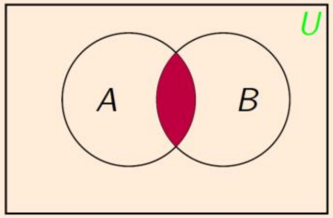
- 并、交、差运算

- 基本概念（设A和B为集合）
  - ✓定义(3-2.1) A和B的并：$A \cup B=\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
  - ✓定义(3-2.2) A和B的交：$A \cap B=\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
  - ✓定义(3-2.3) A和B的差：$A-B=\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$，也称为相对补

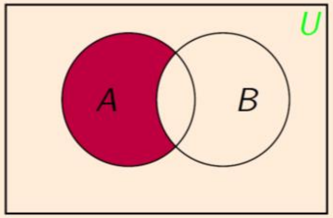
文氏图:$A \cup B$



文氏图:$A \cap B$



文氏图:$A - B$



集合上的运算：并、交、差运算

- 并运算
  - 集合$\{1,3,5\}$ 和集合$\{1,2,3\}$ 的并集是$\{1,2,3,5\}$
- 交运算
  - 集合$\{1,3,5\}$ 和集合$\{1,2,3\}$ 的交集是$\{1,3\}$
- 差运算
  - 集合$\{1,3,5\}$ 和集合$\{1,2,3\}$ 的差集是$\{5\}$

集合上的运算：并、交、差运算

- 基本性质
  - a) $A\cup B=B\cup A$
  - b) $A\cap B= B\cap A$
  - c) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
  - d) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
- 即交、并运算是可交换和可结合的

- 证：b) $\forall x\in E$（全集）
  - $x\in A\cap B \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in B$（$\cap$的定义）
  - $\Leftrightarrow x\in B\wedge x\in A$（$\wedge$的可交换性）
  - $\Leftrightarrow x\in B\cap A$，
  - $\therefore \forall x(x\in A\cap B \leftrightarrow x\in B\cap A)$，即$A\cap B = B\cap A$

集合上的运算：并、交、差运算

- 定理（3-2.1）：（分配律）设A、B、C为任意三个集合，则
  - a) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
  - b) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

- 证：b) $\forall x\in U$
- $x\in A\cap(B\cup C)\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in(B\cup C)$
- $\Leftrightarrow x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)$
- $\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)$
- $\Leftrightarrow x\in A\cap B\vee x\in A\cap C$ （$\wedge$在$\vee$上可分配）
- $\Leftrightarrow x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$
- $\therefore A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

集合上的运算：并、交、差运算

- 定理（3-2.2）：（吸收律）设A、B为任意两个集合，则
  - a) $A \cup (A \cap B) = A$
  - b) $A \cap (A \cup B) = A$

- 证明：a) $A \cup (A \cap B) = (A \cap E) \cup (A \cap B)$
- $= A \cap (E \cup B)$
- $= A$
- 练习：证明b
- b) $A \cap (A \cup B) = (A \cup A) \cap (A \cup B)$
- $= A \cup (A \cap B)$
- $= A$
- 注：也可以利用谓词性质证明。类似定理3-2.1的证明方法

集合上的运算：并、交、差运算

- 例：设A, B, C, D是任意集合, 则
  - a）若$A\subseteq B$，$C\subseteq D$，那么，$A\cup C\subseteq B\cup D$
  - b）若$A\subseteq B$，$C\subseteq D$，那么，$A\cap C\subseteq B\cap D$

- 证：对 b）
  - $\because$ $x\in(A\cap C) \Leftrightarrow x\in A\wedge x\in C \Rightarrow x\in B\wedge x\in D$
  - $\Leftrightarrow x\in(B\cap D)$
  - $\therefore A\cap C\subseteq B\cap D$

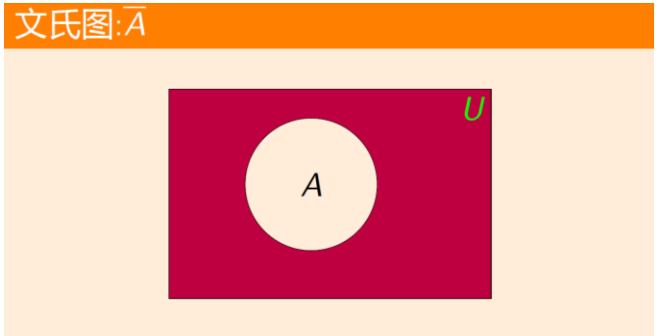
集合上的运算：并、交、差运算

- 定理（3-2.3）设A,B是任意集合,则
  - a） $A \subseteq B$， *iff* $A \cup B = B$
  - b） $A \subseteq B$， *iff* $A \cap B = A$

- 证：对 b）
  - $\because$ $A \subseteq B$, 又$A \subseteq A$
  - $\therefore$ $A \cap A \subseteq A \cap B$，即 $A \subseteq A \cap B$
  - 又 $\because$ $A \cap B \subseteq A$
  - $\therefore$ $A = A \cap B$

集合上的运算：补运算

- 定义（3-2.4）：设E是全集，A的补集为：
  - ✓ $\sim A=E-A=\{x \mid x \in E \wedge x \notin A\}=\{x \mid x \notin A\}$，也称绝对补
  - ✓ 例：集合{1,3,5} 和集合{1,2,3,4,5,6} 的补集是{2,4,6}
- 性质：设A为任意集合，则
  - ✓ a) $A \cup \sim A = E$
  - ✓ b) $A \cap \sim A = \Phi$
  - ✓ c) $\sim \Phi = E$
  - ✓ d) $\sim E = \Phi$
  - ✓ e) $\sim\sim A = A$



集合上的运算：德•摩根定律

- 定理（3-2.4）：设A、B为任意两个集合，则：
  - a） $\sim(A \cup B) = \sim A \cap \sim B$
  - b） $\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$

- 证：b）
  - $\because (\sim A \cup \sim B) \cap (A \cap B) = (\sim A \cap A \cap B) \cup (\sim B \cap A \cap B)$
  - $= \Phi \cup \Phi$
  - $= \Phi$
  - $(\sim A \cup \sim B) \cup (A \cap B) = (\sim A \cup \sim B \cup A) \cap (\sim A \cup \sim B \cup B)$
  - $= E$
  - $\therefore$ $\sim A \cup \sim B$是$A \cap B$的补
  - 但$\sim(A \cap B)$也是$A \cap B$的补，由补的唯一性
  - $\therefore \sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$

思路是什么？

集合上的运算：德•摩根定律

- 定理（3-2.5）：设A、B为任意两个集合，则：
  - a) $A-B = A\cap \sim B$
  - b) $A-B = A-(A\cap B)$
- 证明：b)
  - $A-(A\cap B)=A\cap\sim(A\cap B)$
  - $=A\cap(\sim A\cup\sim B)$
  - $=(A\cap\sim A)\cup(A\cap\sim B)$
  - $=\Phi\cup(A\cap\sim B)$
  - $=A-B$

集合上的运算：德•摩根定律

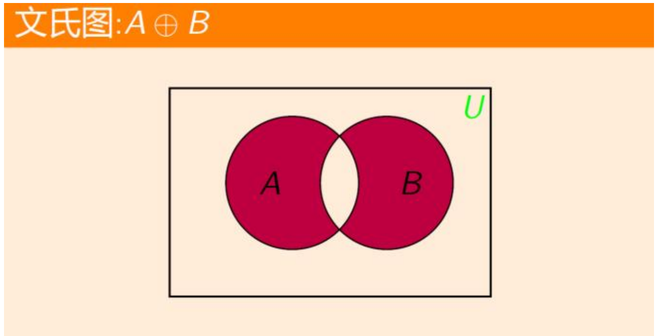
- 定理（3-2.6）设A、B、C为任意三个集合，则：
  - ✓ $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$
- 证明：
  - ✓ $A\cap(B-C) = A\cap(B\cap\sim C)$
  - ✓ $= A\cap B\cap\sim C$
  - ✓ $(A\cap B)-(A\cap C) = (A\cap B)\cap\sim(A\cap C)$
  - ✓ $= (A\cap B)\cap(\sim A\cup\sim C)$
  - ✓ $= (A\cap B\cap\sim A)\cup(A\cap B\cap\sim C)$
  - ✓ $= \Phi \cup (A\cap B\cap\sim C)$
  - ✓ $= A\cap B\cap\sim C$
  - ✓ 所以：$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

集合上的运算：德•摩根定律

- 定理（3-2.7）设A、B为任意两个集合，若$A \subseteq B$，则：
  - a) $\sim B \subseteq \sim A$
  - b) $(B-A) \cup A = B$
- 证明：a)
  - 若$x \in A$，则$x \in B$。因此$x \notin B$必有$x \notin A$
  - 故$x \in \sim B$必有$x \in \sim A$，即$\sim B \subseteq \sim A$
- 证明：b)
  - $(B-A) \cup A = (B \cap \sim A) \cup A$
  - $= (B \cup A) \cap (\sim A \cup A)$
  - $= (B \cup A) \cap E$
  - $= B \cup A$
  - 因为$A \subseteq B$，就有$B \cup A = B$。因此$(B-A) \cup A = B$

集合上的运算：对称差

- 定义(3-2.5)：集合A和B的对称差为集合S，其元素或属于A，或属于B，但不能既属于A又属于B，记为$A \oplus B$
- 即 $A \oplus B = (A-B) \cup (B-A)$，或$\{x \mid x \in A \;\bar{\vee}\; x \in B\}$
  - ✓例：集合{1,3,5} 和集合{1,2,3} 的交集是{2,5}
- 性质
  - ✓$A \oplus B = B \oplus A$
  - ✓$A \oplus \Phi = A$
  - ✓$A \oplus A = \Phi$
  - ✓$A \oplus B = (\sim A \cap B) \cup (A \cap \sim B)$
  - ✓$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$



包含排斥原理

- 有限集基数的有关结果
- 定理：
- a) $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$ $(|A\cap B|\leqslant\min(|A|,|B|))$
- b) $|A\oplus B|=|A|+|B|-2|A\cap B|$
- c) $|A-B|\geqslant|A|-|B|$ $(\because |A-B|+|B|=|A\cup B|\geqslant|A|)$
- a) 证明：
  - ✓ ①当$A\cap B=\Phi$，则$|A\cup B|=|A|+|B|$，a)成立。
  - ✓ ②当$A\cap B\neq\Phi$，
  - ✓ 则： $|A|=|A\cap(B\cup\sim B)|$
  - ✓ $=|A\cap\sim B|+|A\cap B|$，
  - ✓ $|B|=|B\cap\sim A|+|A\cap B|$
  - ✓ $\therefore |A|+|B|=|A\cap\sim B|+|B\cap\sim A|+|A\cap B|+|A\cap B|$
  - ✓ $=|A\cup B|+|A\cap B|$ $(|A\cup B|=|A\cap\sim B|+|B\cap\sim A|+|A\cap B|)$
  - ✓ $\therefore |A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$ {包含排斥原理}

包含排斥原理

- 例：
  - 设某班有60名同学，其中班足球队员有28名
  - 篮球队员有15名。若有25名同学没有参加这两个队
  - 问同时参加这两个队的队员有多少名？

- 解：设A为足球队员集合，B为篮球队员集合，则
  - $|A \cup B| = 60 - 25 = 35$
  - $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 28 + 15 - 35 = 8$

包含n个集合的包含排斥原理(归纳法证明)

- $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots\cdots \cup A_n|$

  $= \Sigma_{i=1}^{n} |A_i| + \Sigma_{1 \leqslant I < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \Sigma_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots\cdots$

  $+ (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots\cdots \cap A_n|$

- 特别地, n=3
  - ✓ $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

证明:当n=2时,结论成立（前面已证明）。

设n-1时,结论成立,则

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots\cdots \cup A_n| = |\cup_{i=1}^{n-1} A_i| + |A_n| - |(\cup_{i=1}^{n-1} A_i) \cap A_n|$$

$$= \Sigma_{i=1}^{n} |A_i| - \Sigma_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} |A_i \cap A_j| + \cdots\cdots + (-1)^{n-2} |\cap_{i=1}^{n-1} A_i|$$

$$- [\Sigma_{i=1}^{n-1} |A_i \cap A_n| - \Sigma_{1 \leqslant i < j < n-1} |A_i \cap A_j \cap A_n| + \cdots\cdots$$

$$+ (-1)^{n-2} |\cap_{i=1}^{n-1} A_i \cap A_n|]$$

$$= \Sigma_{i=1}^{n} |A_i| - \Sigma_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_n| + \cdots\cdots + (-1)^{n-1} |\cap_{i=1}^{n} A_i|$$

包含n个集合的包含排斥原理

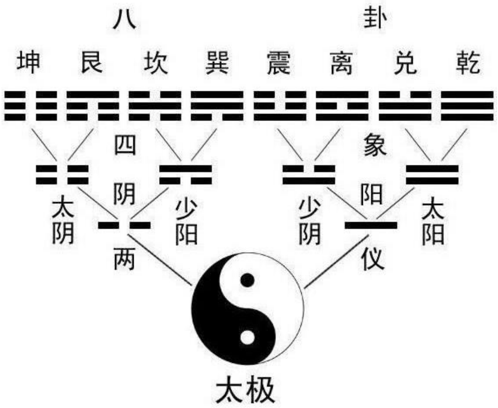
- 例2:试决定在1到100之间能被2,3,5中某一数整除的个数
- 解:
  - ✓ A_1表示1到100之间能被2整除的整数集
  - ✓ A_2表示1到100之间能被3整除的整数集
  - ✓ A_3表示1到100之间能被5整除的整数集
- 则:
  - ✓ $|A_1|=100/2=50$，$|A_2|=100/3=33$，$|A_3|=100/5=20$，
  - ✓ $|A_1\cap A_2|=100/(2\times 3)=16$，$|A_1\cap A_3|=100/(2\times 5)=10$，
  - ✓ $|A_2\cap A_3|=100/(3\times 5)=6$，$|A_1\cap A_2\cap A_3|= 100/(2\times 3\times 5)=3$
- $\therefore |A_1\cup A_2\cup A_3|=|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|$
- $-|A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_3|$
- $= 50+33+20-16-10-6+3$
- $= 74$

序偶和笛卡尔积

事物间的联系

- 蝴蝶效应
  - ✓亚马逊雨林一只蝴蝶翅膀偶尔振动，也许两周后就会引起美国得克萨斯州的一场龙卷风应

- 易经
  - ✓太极生两仪，两仪生四象，四象生八卦，八卦生万物



集合的笛卡尔积

- 序偶
  - ✓两个元素a_1, a_2组成的序列记作$\langle a_1, a_2\rangle$, 称为序偶

- 定义（3-4.1）：
  - ✓二个序偶$\langle a, b\rangle$和$\langle c, d\rangle$相等，当且仅当$a=c$且$b=d$，即 $\langle a, b\rangle=\langle c, d\rangle \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$

- 推广：
  - ✓$\langle\langle a_1, a_2\rangle, a_3\rangle$称为三元组，记为$\langle a_1, a_2, a_3\rangle$，注:$\langle a_1, \langle a_2, a_3\rangle\rangle$不是三元组
  - ✓$\langle\langle a_1, \cdots, a_{n-1}\rangle, a_n\rangle$称为n元组，记为$\langle a_1, a_2, \cdots, a_n\rangle$

- 注：
  - ✓①二元组的元素次序是重要的。例:$\langle 2, 3\rangle \neq \langle 3, 2\rangle$
  - ✓②n元组相等，当且仅当对应的元素分别相等。
  - ✓③$\langle\langle a_1, a_2\rangle, a_3\rangle \neq \langle a_1, \langle a_2, a_3\rangle\rangle$，后者不是三元组

集合的笛卡尔积

- 例
  - 张明喜欢离散数学可用序偶表示为：〈张明，离散数学〉
  - 英语课本在书桌上可用序偶表示为：〈英语课本，书桌〉
  - 若序偶〈x+y；2y-1〉＝〈3y-4；5〉，根据序偶相等的定义有
  - x+y ＝ 3y-4；2y-1 ＝ 5，解得x ＝ 2；y ＝ 3

集合的笛卡尔积

- 笛卡尔积(定义(3-4.2))：
  - ✓设任意两个集合A和B，若序偶的第一个成员是A的元素，第二个成员是B的元素，由所有这样的序偶组成的集合，称为集合A和集合B的笛卡尔积， 记为A×B。 即：$A\times B=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in B\}$

- 举例
  - ✓例1：设$A=\{a,b\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{p,q\}$， $E=\{0\}$。
  - ✓则：$A\times B=\{\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle a,3\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle,\langle b,3\rangle\}$，

    $A\times\Phi = \Phi$，

    $(A\times E)\times E=\{\langle a,0,0\rangle,\langle b,0,0\rangle\}$

    $(A\times B)\cap(B\times A)=\Phi$

- 另外，$(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$吗？

NO

A×(B×C)不是三元组

集合的笛卡尔积

- 性质：笛卡尔积不符交换律和结合律
- 定理(3-4.1)：设A、B、C为任意三个集合
- 则：
  - ✓ a) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$
  - ✓ b) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$
  - ✓ c) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$
  - ✓ d) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$
- 证明（d）设$\langle x,y\rangle$是$(A\cap B)\times C$的任一元素，

$$\langle x,y\rangle\in(A\cap B)\times C$$

$\Leftrightarrow(x\in A\cap B)\wedge y\in C$（根据定义）

$$\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\in B)\wedge y\in C$$

$$\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in C)\wedge(x\in B\wedge y\in C)$$

$$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in A\times C\ \wedge\ \langle x,y\rangle\in B\times C$$

$$\Leftrightarrow\ \langle x,y\rangle\ \in(A\times C)\cap(B\times C)$$

$\therefore(A\cap B)\times C=A\times C\cap B\times C$。(a), b), c)的证明类似)

集合的笛卡尔积

- 定理(3-4.2):若$C \neq \Phi$，则：$A \subseteq B \Leftrightarrow (A \times C \subseteq B \times C)$，$A \subseteq B \Leftrightarrow (C \times A \subseteq C \times B)$
- 证明：
  - ✓必要性：若$y \in C$，设$A \subseteq B$，有

$$
\begin{aligned}
\langle x, y\rangle \in A \times C &\Rightarrow (x \in A \wedge y \in C) \\
&\Rightarrow (x \in B \wedge y \in C) \\
&\Rightarrow \langle x, y\rangle \in B \times C
\end{aligned}
$$

因此 $A \times C \subseteq B \times C)$

  - ✓充分性：若$C \neq \Phi$，$A \times C \subseteq B \times C$，取$y \in C$

则有

$$
\begin{aligned}
x \in A &\Rightarrow x \in A \wedge y \in C \\
&\Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in A \times C \\
&\Rightarrow \langle x, y\rangle \in B \times C \\
&\Leftrightarrow x \in B \wedge y \in C \\
&\Rightarrow x \in B
\end{aligned}
$$

因此 $A \subseteq B$

  - ✓类似可证：$A \subseteq B \Leftrightarrow (C \times A \subseteq C \times B)$

集合的笛卡尔积

- 定理(3-4.3)：设A, B, C, D为四个非空集，则：
  - ✓ $A\times B \subseteq C\times D$的充分必要条件为 $A\subseteq C$， $B\subseteq D$
- 证明：
  - ✓ 必要性：若$A\times B\subseteq C\times D$，对任意$x\in A$和$y\in B$有

$$
\begin{aligned}
x\in A\wedge y\in B &\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in A\times B\\
&\Rightarrow \langle x,y\rangle\in C\times D\\
&\Leftrightarrow x\in C\wedge y\in D
\end{aligned}
$$

即： $A\subseteq C$且 $B\subseteq D$

  - ✓ 充分性：若$A\subseteq C$且 $B\subseteq D$，设任意$x\in A$和$y\in B$有

$$
\begin{aligned}
\langle x,y\rangle\in A\times B &\Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B\\
&\Rightarrow x\in C\wedge y\in D\\
&\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in C\times D
\end{aligned}
$$

因此 $A\times B\subseteq C\times D$

关 系 论

- 3-5 关系及其表示
- 3-6 关系的性质
- 3-7 复合关系和逆关系
- 3-8 关系的闭包运算
- 3-9 集合的划分和覆盖
- 3-10 等价关系和等价类
- 3-11 相容关系
- 3-12 序关系

二元关系

- 例：
  - ✓令A 为某大学所有学生的集合，B 表示该大学开设的所有课程的集合，则A×B 可表示该校学生选课的所有可能情况。而真正的选课情况（即选课关系）则会是A×B 的某一个子集。
  - ✓令F 为某地所有父亲的集合，S 表示该地所有儿子的集合，则F×S 可表示父子关系的所有可能情况。而真正的父子关系则会是F×S 的某一个子集
- 定义：
  - ✓设A，B 为两个非空集合，称A×B 的任意子集R 为从A 到B 的一个二元关系，简称关系(relation)
  - ✓其中，A 称为关系R 的前域，B 称为关系R 的后域。如果A = B，则称R为A 上的一个二元关系

枚举二元关系

假设 $A=\{a,b\}$ $B=\{c,d\}$，试写出从 A 到 B 的所有不同关系。

解 首先求两个集合的笛卡儿积：$A\times B=\{<a,c>,<a,d>,<b,c>,<b,d>\}$。

再求 $A\times B$ 的所有不同子集：

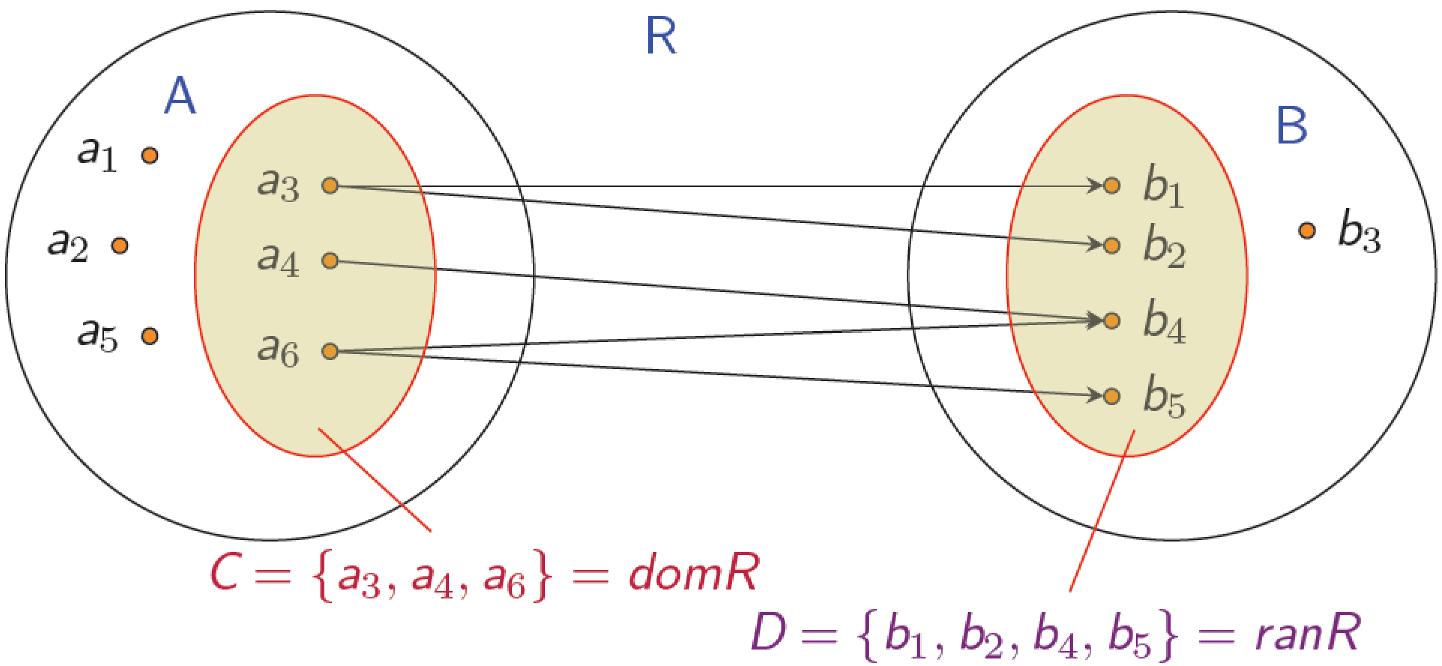
- 0–元子集：$\varnothing$；
- 1–元子集：$\{<a,c>\},\{<a,d>\},\{<b,c>\},\{<b,d>\}$；
- 2–元子集：$\{<a,c>,<a,d>\}$,$\{<a,c>,<b,c>\}$, $\{<a,c>,<b,d>\}$,$\{<a,d>,<b,d>\}$, $\{<a,d>,<b,d>\}$, $\{<b,c>,<b,d>\}$；
- 3–元子集：
  $\{<a,c>,<a,d>,<b,c>\}$,$\{<a,c>,<a,d>,<b,d>\}$,$\{<a,c>,<b,c>,<b,d>\}$,
  $\{<a,d>,<b,c>,<b,d>\}$；
- 4–元子集：$\{<a,c>,<a,d>,<b,c>,<b,d>\}$。

所以，上面的 16 个不同子集就是从 A 到 B 的所有不同关系。

关系及其表示

- 日常生活中关系普遍存在，数学上可以用序偶来表达：若有xRy，可记为$\langle x, y\rangle \in R$，由此可见，关系R是序偶的集合
- 定义(3-5.1)：
  - 任一序偶的集合确定了一个二元关系R，R中任一序偶$\langle x, y\rangle$可记为 **$\langle x, y\rangle \in R$ 或 xRy**
  - 例：$(5, 7) \in <$，或 $5<7$
- 定义(3-5.2)：
  - 二元关系R中，由所有x组成的集合叫做关系R的前域记作dom $R=\{x \mid \exists y(\langle x, y\rangle \in R)\}$
  - 由所有y组成的集合叫做关系R的值域，Ran $R=\{y \mid \exists x(\langle x, y\rangle \in R)\}$
  - R的前域和值域统称为R的域，记为$FLDR=dom(R) \cup ran(R)$
- 例1.
  - 设$A=\{x1, \cdots, x7\}$，$B=\{y1, \cdots, y6\}$，$R=\{\langle x3, y1\rangle, \langle x3, y2\rangle, \langle x6, y2\rangle, \langle x5, y6\rangle\}$
  - 解：$dam(R)=\{x3, x6, x5\}$，$ran(R)=\{y1, y2, y6\}$

前域和值域



关系与笛卡儿积

- 关系中序偶的元素分别来自于两个不同的集合，因此：关系其实就是这两个集合的笛卡儿积的子集
- 定义(3-5.3)：X×Y的两个平凡子集X×Y和空集， X×Y称为全域关系，空集称为空关系

- 当X=Y时，关系R是X×X的子集，称R为X上的二元关系
  - ✓例 设X={1，2，3，4}，求X上的关系 >
  - ✓解：{<2,1>,<3,1>,<4,1>,<3,2>,<4,2>,<4,3>}

- 定义(3-5.4)：设R是X上的二元关系，且R={<x,x>|x属于X}，则称R是X上的恒等关系，**记为I_x**
  - ✓例：X={1，2，3}，则I_x={<1,1>,<2,2>,<3,3>}

- 关系的运算
  - ✓定理5.1：关系的交，并，补，差仍是X到Y的关系

关系的表示

- 关系矩阵
  - ✓设集合x={x_1, …, x_m}， y={y_1, …, y_n}, R是从X到Y的一个二元关系。则对应于关系R有一个关系矩阵MR=$(r_{ij})_{m\times n}$, 其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1,<x_i,y_i>\in R\\0,<x_i,y_j>\notin R\end{cases}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

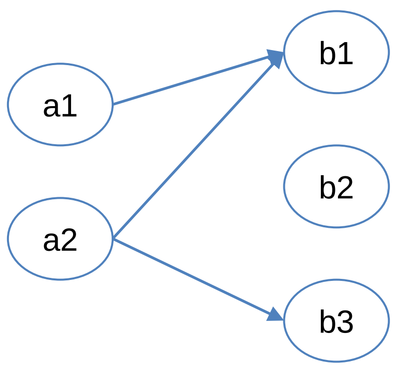
- 关系图：设集合x={x_1, …, x_m}， y={y_1, …, y_n}, R是从X到Y的一个二元关系
  - ✓用小圈表示元素
  - ✓i)若<x_i, y_i>∈R, 则从结点x_i画一有向弧，箭头指向y_i
  - ✓ii)否则，结点之间没有线段连接
  - ✓这样的图称为关系图

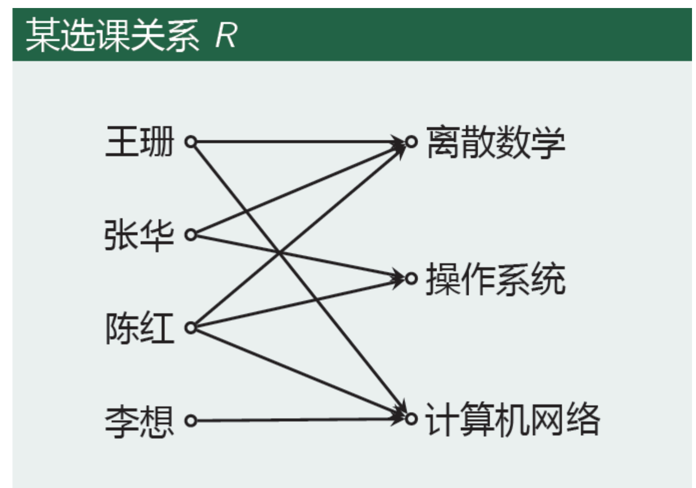
关系的表示

- 例：
  - ✓设 A={a_1， a_2} B={b_1, b_2, b_3}
  - ✓R={<a_1, b_1>, <a_2, b_1>, <a_2, b_3>}
- 解：

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 关系图





- 指出：
  - ✓设R是X到Y上的关系，则R是X×Y的子集，由有X×Y是（XUY）×（XUY）的子集，所以R也是（XUY）×（XUY）的子集
  - ✓因此，以后的讨论仅局限于同一集合上的二元关系

布尔矩阵的并和交运算

Definition

1. 如果 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$ 是两个 $m \times n$ 矩阵，则A 和 B 的并也是一个 $m \times n$ 矩阵，记为$A \vee B = C = (c_{ij})$, 其中：

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } a_{ij} = 1 \text{ or } b_{ij} = 1 \\ 0 & \text{if } a_{ij} = 0 \text{ and } b_{ij} = 0 \end{cases}$$

2. 如果 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$ 是两个 $m \times n$ 矩阵，则A 和 B 的交也是一个 $m \times n$ 矩阵，记为$A \wedge B = C = (c_{ij})$, 其中：

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } a_{ij} = 1 \text{ and } b_{ij} = 1 \\ 0 & \text{if } a_{ij} = 0 \text{ or } b_{ij} = 0 \end{cases}$$

布尔矩阵的积运算

Definition

如果 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times p$ 矩阵, $B=(b_{ij})$ 是 $p\times n$ 矩阵，则A 和 B 的积是一个 $m\times n$ 矩阵，记为$A\odot B=C=(c_{ij})$, 其中：

$$c_{ij}=\begin{cases}1 & \exists k, a_{ik}=1 \text{ and } b_{kj}=1\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

Example

设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\1&0&1&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}$, 则 $A\odot B=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\1&1&0&0\end{pmatrix}$.

关系的性质：自反性

- 自反性（设R是A上的二元关系）
  - ✓定义(3-6.1)：若$\forall x \in A$，均有xRx，那么称R是自反的

- 例
  - ✓A=｛1，2，3｝，R={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>}为自反关系
  - ✓A=｛1，2，3｝，R={<1,1>,<2,2>,<1,2>} 自反？
- 注：
  - ✓1）A上关系R是自反的 $\Leftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow xRx)$
  - ✓2）在关系矩阵中，反映为主对角线元素均为1。在关系图中，反映为每结点都有自回路

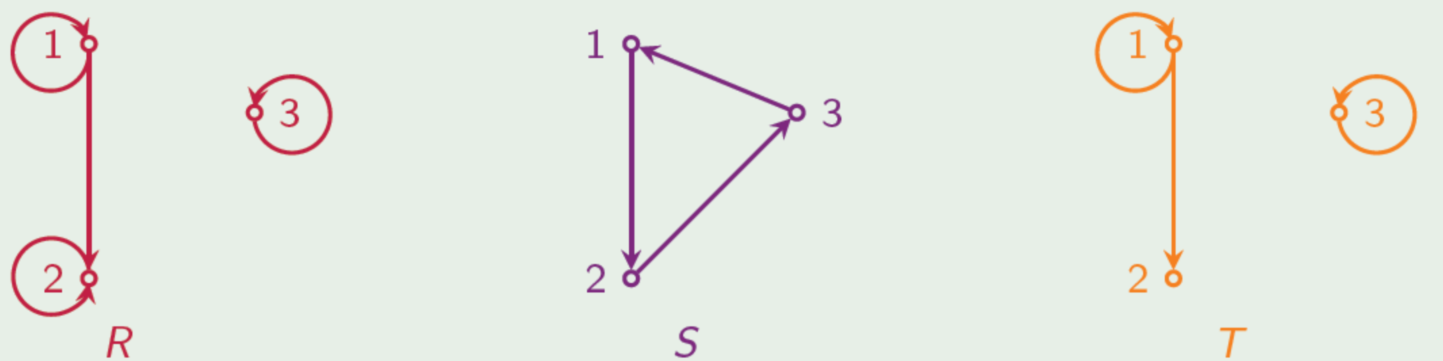
关系的性质：反自反性

- 反自反性
  - ✓定义(3-6.4)：若$\forall x \in A$，均有$\langle x, x\rangle \notin R$，那么称R是反自反的
- 例
  - ✓ A={1, 2, 3}　R={<1, 2>, <2, 3>}
- 注：
  - ✓1） A上的关系R是反自反的$\Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \rightarrow \langle x, x\rangle \notin R)$
  - ✓2） 在关系矩阵中，反映为主对角线元素均为0。在关系图中，反映为每结点都无自回路
- 注：有些关系可以既不是自反的，也不是反自反的

自反性与反自反性

- 设A = {1，2，3}，定义A 上的关系R，S 和 T 如下：
  - ✓R = {<1，1>，<1，2>，<2，2>，<3，3>} 自反
  - ✓S = {<1，2>，<2，3>，<3，1>} 反自反
  - ✓T = {<1，1>，<1，2>，<1，3>，<3，1>，<3，3>} 非自反，非反自反

关系图：



自反性与反自反性

- 存在既不是自反的也不是反自反的关系
- 关系图
  - ✓关系R 是自反的当且仅当R 的关系图中每个结点都有自环,
  - ✓关系R 是反自反的当且仅当R 的关系图中每个结点都无自环
- 关系矩阵
  - ✓关系R 是自反的当且仅当R 的关系矩阵的主对角线上全为1,
  - ✓关系R 是反自反的当且仅当R 的关系矩阵的主对角线上全为0

Example (关系矩阵)

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

关系的性质：对称性

- 对称性
  - 定义(3-6.2)：如果对于每个x, y属于A, 每当xRy, 都有yRx, 则称A上的关系R是对称的
  - 例：$A=\{1,2,3\}$，$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,3\rangle\}$
- 注：
  - 1）定义$\Leftrightarrow \forall x \forall y(x \in A \wedge y \in A \wedge xRy \rightarrow yRx)$
  - 2）关系矩阵是对称矩阵。关系图中，若有弧则必是成对出现

关系的性质：反对称性

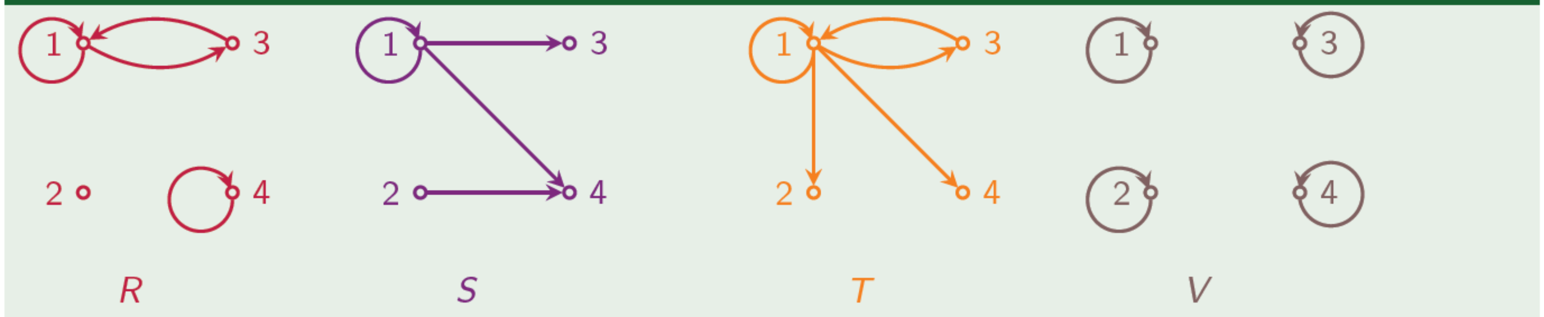
- 反对称性
  - 定义(3-6.5)：如果对于每个x, y属于A, 每当xRy和yRx, 必有x=y， A上的关系R是反对称的
  - 例 A={1, 2, 3}， R={<1, 2>, <1, 3>}
  - 又如 S={<1, 1>, <2, 2>, <3, 3>}, 对称的也是反对称的
- 注：
  - 1） $\Leftrightarrow \forall x \forall y (x \in A \land y \in A \land xRy \land yRx \rightarrow x=y)$
  - 2） 在关系矩阵中，反映为主对角线对称的元素不能同时为1
- 在关系图上，反映为任意两个结点间的弧线不能成对出现

- 注：
  - 1)有些关系既不是对称的，又不是反对称的。例如A={1, 2, 3} R={<1, 2>, <2, 1>, <1, 3>}
  - 2)有些关系既是对称的，又是反对称的，例如恒等关系、空关系

对称性与反对称性

- 设A = {1，2，3，4}，定义A 上的关系R，S，T 和V 如下：
  - ✓R = {<1，1>，<1，3>，<3，1>，<4，4>}　对称
  - ✓S = {<1，1>，<1，3>，<1，4>，<2，4>}　反对称
  - ✓T = {<1，1>，<1，2>，<1，3>，<3，1>，<1，4>}　非对称，非反对称
  - ✓V = {<1，1>，<2，2>，<3，3>，<4，4>}　对称，反对称

Example (关系图)



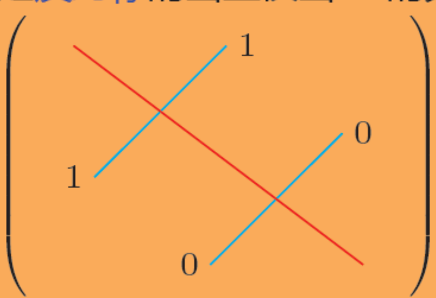
关系图判定法：关系R 是对称的当且仅当R 的关系图中，任何一对结点之间，要么有方向相反的两条边，要么无边，关系R 是反对称的当且仅当R 的关系图中，任何一对结点之间至多只有一条边。

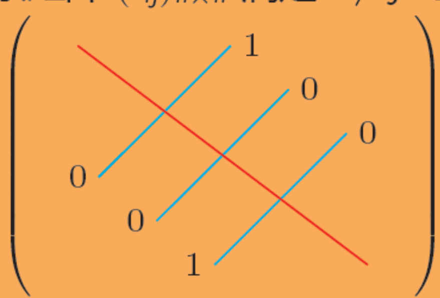
对称性与反对称性

Example (关系矩阵)

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

关系矩阵判定法：关系 R 是对称的当且仅当 R 的关系矩阵 $(r_{ij})_{n\times n}$ 为对称矩阵，关系 R 是反对称的当且仅当 R 的关系矩阵 $(r_{ij})_{n\times n}$ 满足 $i \neq j$ 时,$r_{ij} = 0$ 或 $r_{ji} = 0$.





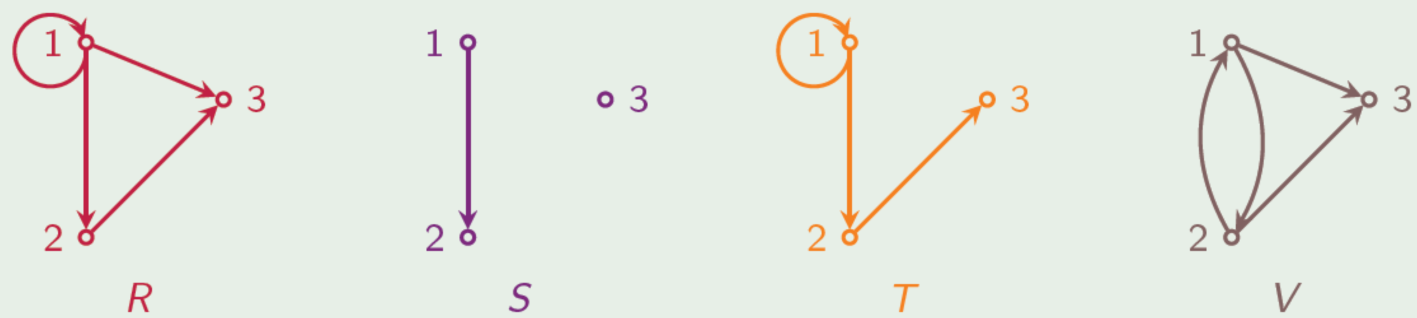
关系的性质：传递性

- 传递性
  - ✓定义(3-6.3)：设R是A上的二元关系，如果对于任意x，y，z属于A，每当xRy，yRz时就有xRz，则称关系R在A上是传递的
- 例：A={1, 2, 3, 4}
  - ✓R_1={<1, 4>, <4, 3>, <1, 3>, <3, 1>, <1, 1>, <4, 1>, <3, 3>, <4, 4>}
  - ✓R_2= {<1, 1>，<2, 2>，<3, 3>，<4, 4>}
  - ✓R_3= { }
  - ✓R_4= {<1, 2>，<2, 2>}，则：R_1，R_2，R_3，R_4是传递的
  - ✓R_5= {<1, 1>，<1, 2>，<2, 1>} 不是传递关系, 没有<2, 2>
- 注：
  - ✓1）定义⇔$\forall x \forall y \forall z(x \in A \land y \in A \land z \in A \land xRy \land yRz \rightarrow xRz)$
  - ✓2）传递关系图的特征是：
    - 在关系图中若存在从a到b一条有向路径（即存在一结点序列$a=a_1$，…，$a_n=b$，其中$\langle a_i, a_{i+1}\rangle \in R$，$1 \leqslant i \leqslant n-1$），则从a到b必定存在一条弧。 传递关系在关系矩阵上的特性都不易看出来

传递性

- 设A = {1，2，3}，定义A 上的关系R，S,T 和V 如下：
  - ✓R = {<1，1>，<1，2>，<2，3>，<1，3>}　传递
  - ✓S = {<1，2>} 传递
  - ✓T = {<1，1>，<1，2>，<2，3>}　非传递
  - ✓V = {<1，2>，<2，3>，<1，3>，<2，1>}　非传递

关系图:



传递性

Example (关系矩阵)

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M_V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

☞ 总结

- 关系 R 是传递的当且仅当在 R 的关系图中，任何三个不同结点 x, y, z 之间，若从 x 到 y 有一条边存在，从 y 到 z 有一条边存在，则从 x 到 z 一定有一条边存在;
- 关系 R 是传递的当且仅当在 R 的关系矩阵中，对任意 $i, j, k \in \{1, 2, \cdots, n\}$，若 $r_{ij} = 1$ 且 $r_{jk} = 1$，必有 $r_{ik} = 1$.

关系性质判定

- 一个关系可能满足多种性质，如：
  - ✓非空集合A 上的全关系E_A ： 自反，对称，传递
  - ✓非空集合A 上的空关系∅ ： 反自反，对称，反对称，传递
  - ✓非空集合A 上的恒等关系I_A ： 自反，对称，反对称，传递
  - ✓实数集R 上的等于关系= ： 自反，对称，反对称，传递
  - ✓幂集上的真包含关系⊂ ： 反自反，反对称，传递

- 假设A = {a，b，c，d}，R 是定义在A 上的关系.
  - ✓R = {<a，a>，<a，b>，<b，a>，<cd>}有哪些性质？
    非自反，非反自反，非对称，非反对称，非传递
  - ✓可见，一个关系也有可能不满足任何性质

关系性质

- 设$A = \{1, 2, 3\}$，R, S 是集合A 上的关系
  - ✓$R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,3\rangle\}$　反自反，反对称，传递
  - ✓$S = \{\langle 3,2\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 2,1\rangle\}$　反自反，反对称，传递
  - ✓$R \circ S = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,2\rangle\}$ 非反自反，非反对称
  - ✓$R \cup S = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 31\rangle\}$ 非传递，非反对称

  - ✓$R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$ 自反，对称，传递
  - ✓$S = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$ 自反，对称，传递
  - ✓$R \circ S = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,3\rangle\}$
    非传递，非对称
  - ✓$R - S = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$　非自反，非传递

复合关系和逆关系

复合关系

- 定义(3-7.1)： 设R_1是A到B的关系，R_2是B到C的关系，则$R_1 \circ R_2$是A到C的复合关系，定义如下：
- $R_1 \circ R_2 = \{\langle a, c\rangle \mid (\exists b)(a \in A \wedge c \in C \wedge b \in B \wedge \langle a, b\rangle \in R_1 \wedge \langle b, c\rangle \in R_2)\}$

注：

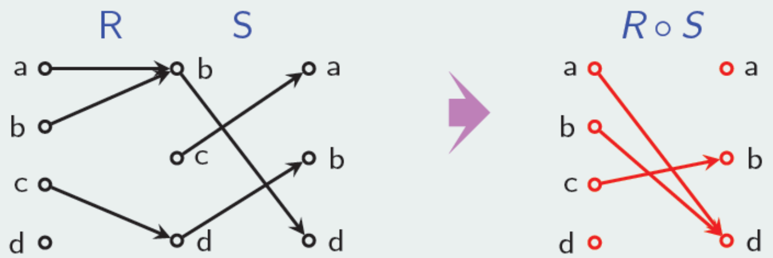
- ① 关系图上，$R_1 \circ R_2$是由$\langle a, c\rangle$这样的序偶组成，从$a \in A$到$c \in C$有一长度为2的路径，其中第一条弧属于R_1，第二条弧属于R_2
- ② 若R_1的值域与R_2的前域的交集为空，则$R_1 \circ R_2$为空关系
- ③ 设I_A、I_B分别为A和B上的恒等关系，R是A到B的二元关系，则$I_A \circ R = R \circ I_B = R$

注意： $R \circ I_A$, $I_B \circ R$为空关系，无意义

复合关系

- 设 A={a, b, c, d}， B={b, c, d}； C={a, b, d}
  - ✓R={<a, b>, <c, d>, <b, b>} 是A 到B 的关系
  - ✓S={<d, b><b, d><c, a>} 是B 到C 的关系
- 则 R ∘ S={<a, d>, <c, b>, <b, d>}

复合运算(关系图形式)



复合运算(关系矩阵形式)

$$M_{R\circ S} = M_R \odot M_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

复合关系和逆关系

- 例1
  - 设$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$，A上的二元关系
  - $R=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$
  - $S=\{\langle 4, 2\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 3, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$
- 则
  - $R \circ S=\{\langle 1, 5\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 2, 5\rangle\}$，$S \circ R=\{\langle 4, 2\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 1, 4\rangle\}$
  - $(R \circ S) \circ R=\{\langle 3, 2\rangle\}$，　　$R \circ (S \circ R)=\{\langle 3, 2\rangle\}$
  - $R \circ R=\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$，　　$S \circ S=\{\langle 4, 5\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 1, 1\rangle\}$
- 例2：
  - xR_1y表示x是y的兄弟，yR_2z表示y是z的父亲
  - 则　$xR_1 \circ R_2z$ 表示x是z的叔伯
  - $xR_2 \circ R_2z$ 表示x是z的祖父

关系性质

- 设A = {1, 2, 3}, R, S 是集合A 上的关系
  - ✓$R = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,3\rangle\}$ 反自反，反对称，传递
  - ✓$S = \{\langle 3,2\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 2,1\rangle\}$ 反自反，反对称，传递
  - ✓$R\circ S = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,2\rangle\}$ 非反自反，非反对称
  - ✓$R\cup S = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 31\rangle\}$ 非传递，非反对称

  - ✓$R = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$ 自反，对称，传递
  - ✓$S = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 2,3\rangle\}$ 自反，对称，传递
  - ✓$R\circ S = \{\langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 1,3\rangle\}$
    非传递，非对称
  - ✓$R-S = \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$ 非自反，非传递

复合关系和逆关系：结合律

- 结合律
  - 设R_1, R_2, R_3分别是从A到B，从B到C，从C到D的关系。
  - 则 $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$
    - 证：设$\langle a, d\rangle$是$(R_1 \circ R_2) \circ R_3$的任一序偶。

则 $\langle a, d\rangle \in (R_1 \circ R_2) \circ R_3$

$\Leftrightarrow \exists c(\langle a, c\rangle \in R_1 \circ R_2 \land \langle c, d\rangle \in R_3)$

$\Leftrightarrow \exists c(\exists b(\langle a, b\rangle \in R_1 \land \langle b, c\rangle \in R_2) \land \langle c, d\rangle \in R_3))$

$\Leftrightarrow \exists c \exists b(\langle a, b\rangle \in R_1 \land \langle b, c\rangle \in R_2 \land \langle c, d\rangle \in R_3)$

$\Leftrightarrow \exists b \exists c(\langle a, b\rangle \in R_1 \land (\langle b, c\rangle \in R_2 \land \langle c, d\rangle \in R_3))$

$\Leftrightarrow \exists b(\langle a, b\rangle \in R_1 \land \langle b, d\rangle \in R_2 \circ R_3)$

$\Leftrightarrow \langle a, d\rangle \in R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$

- 故 $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3) = R_1 \circ R_2 \circ R_3$

复合关系和逆关系：关系R的幂

- 定义
  - ✓设R是集合A上的二元关系，R与自身的复合为R的幂，记为$R^{(n)}$。如下:
  - ✓1）$R^{(0)}$是A的相等关系，$R^{(0)}=\{\langle x, x\rangle | x\in A\}=I_A$
  - ✓2) $R^{(n+1)}= R^{(n)} \circ R$
- 其关系图的意义
  - ✓在$R^{(2)}$的图形上，有一条a到b的弧，则在R的图形上从a到b有一条长度为2的路径
  - ✓在$R^{(n)}$的图形上，有一条a到b的弧，则在R的图形上从a到b有一条长度为n的路径

复合关系和逆关系：关系R的幂

- R^n 的基数并非随着n 的增加而增加，而是呈递减趋势

Example

设 $R=\{<1,1>,<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>,<5,6>\}$ 是定义在集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ 上的关系，考察 $R^n(n=1,2,3,\cdots)$：

$R^1=R$，

$R^2=R\circ R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,4>,<3,5>,<4,6>\}$，

$R^3=R^2\circ R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,5>,<3,6>\}$，

$R^4=R^3\circ R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<2,6>\}$，

$R^5=R^4\circ R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<1,6>\}$，

$R^6=R^5\circ R=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<1,4>,<1,5>,<1,6>\}=R^5$，

$R^7=R^6\circ R=R^5$，

Example

设 $S=\{<1,2>,<2,3>,<3,4>,<4,5>,<5,6>\}$ 是定义在集合 $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ 上的关系，考察 $S^n(n=1,2,3,\cdots)$：

$S^1=S$，$S^2=S\circ S=\{<1,3>,<2,4>,<3,5>,<4,6>\}$，

$S^3=S\circ S\circ S=S^2\circ S=\{<1,4>,<2,5>,<3,6>\}$，$S^4=S^3\circ S=\{<1,5>,<2,6>\}$，

$S^5=S^4\circ S=\{<1,6>\}$，$S^6=S^5\circ S=\varnothing$，$S^7=\varnothing$，$\cdots$ $S^n=\varnothing(n>5)$；

复合关系和逆关系：复合关系的矩阵表达

- 设
  - ✓ $X=\{x_1, \ldots, x_m\}$, $Y=\{y_1, \ldots, y_n\}$, $Z=\{z_1, \ldots, z_p\}$。R、S分别是X到Y, Y到Z的关系，设$M_R=[a_{ik}]$, $M_S=[b_{kj}]$,
- 则
  - ✓ 构造为 $M_{R\circ S}=[C_{ij}]$，如果Y中至少有这样一个元素y_j，使得$\langle x_i, y_j\rangle$属于R，$\langle y_j, z_k\rangle$属于S，则必有$\langle x_i, z_k\rangle$属于$R \circ S$，也即$C_{ik}=1$；否则$C_{ik}=0$。
- 故：
  - ✓ $M_{R\circ S}=[C_{ij}]=M_R \circ M_S = C_{ik}$
  - ✓ 其中 $C_{ik} = \vee_{j=1}^{n}(a_{ij} \wedge b_{jk})$
  - ✓ (“∧”表示逻辑乘，$1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant k\leqslant p$，“∨”表示逻辑加)

复合关系和逆关系：复合关系的矩阵表达

- 例1
  - 设x={1, 2}， y={a, b, c}， z={α, β}， R={<1, a>, <1, b>, <2, c>}，
  - S={<a, β>, <b, β>}。
- 解：

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},M_S=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$M_R\circ M_S=M_{R\circ S}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$$

复合关系和逆关系：逆关系

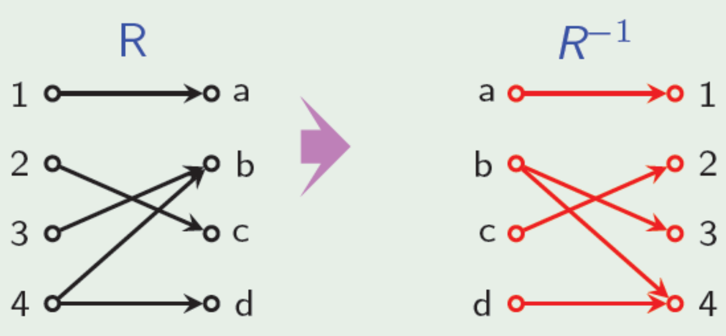
- 定义(3-7.2)：设R是A到B的二元关系，则R的逆是B到A的二元关系，记为 R^c 其中 $R^c=\{\langle y,x\rangle \mid \langle x,y\rangle\in R\}$。

- 例1
  - ✓ $A=\{0,1,2,3\}$　$R=\{\langle 0,0\rangle,\langle 0,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}$
  - ✓ 则 $R^c=\{\langle 0,0\rangle,\langle 3,0\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$
- 整数集上的 ‘$<$’ 关系的逆是 ‘$>$’ 关系
- 集合族上的 ‘$\subseteq$’ 关系的逆是 ‘$\supseteq$’

- 注：
  - ✓（1）$xRy\Leftrightarrow yR^cx$
  - ✓（2）交换R 的关系矩阵的行和列，既得R^c的关系矩阵
  - ✓（3）颠倒R的关系图中每条弧线的箭头方向，既得R^c的关系图

逆关系

- 设A = {1, 2, 3, 4}, B = {a, b, c, d}， R 是从A 到B 的一个关系且, R = {<1, a>, <2, c>, <3, b>, <4, b>, <4, d>} 则
  - ✓ R^{-1} = {<a, 1>, <c, 2>, <b, 3>, <b, 4>, <d, 4>}



$$M_{R^{-1}} = (M_R)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

复合关系和逆关系：逆关系

- 定理（3-7.1） 设R, R_1, R_2是A到B的关系，则
  - a） $(R^c)^c=R$
  - b） $(R_1 \cup R_2)^c=R_1^c \cup R_2^c$
  - c） $(R_1 \cap R_2)^c =R_1^c \cap R_2^c$
  - d） $(\sim R)^c =\sim (R^c)$， $\sim R=A\times B-R$
  - e） $(R_1-R_2)^c =R_1^c - R_2^c$

复合关系和逆关系：逆关系

- 定理（3-7.2）设R、S分别是A到B、B到C的关系。
  - ✓则 $(R \circ S)^c = S^c \circ R^c$
- 证：

设 $\langle c, a\rangle$ 是 $(R \circ S)^c$ 的任一元素，

则 $\langle c, a\rangle \in (R \circ S)^c \Leftrightarrow \langle a, c\rangle \in R \circ S$

$\Leftrightarrow \exists b(\langle a, b\rangle \in R \wedge \langle b, c\rangle \in S)$

$\Leftrightarrow \exists b(c, b\rangle \in S^c \wedge \langle b, a\rangle \in R^c)$

$\Leftrightarrow \langle c, a\rangle \in S^c \circ R^c$

复合关系和逆关系：逆关系

- 定理3(3-7.3)：R是A上的二元关系,
  - (a) R是对称的 $\Leftrightarrow$ $R=R^c$
  - (b) R是反对称的 $\Leftrightarrow$ $R\cap R^c\subseteq I_A$
-
- 证：

(a) ‘$\Rightarrow$’ 设R是对称

$\langle a,b\rangle\in R\Leftrightarrow\langle b,a\rangle\in R$

$\Leftrightarrow\langle a,b\rangle\in R^c$

即$R=R^c$

‘$\Leftarrow$’ 设 $\langle a,b\rangle\in R$ 则$\langle b,a\rangle\in R^c$

$\because R=R^c$

$\therefore\langle b,a\rangle\in R$，故R是对称的

(b) 略

引言

- 一个关系可能不具备某一个特殊性质。但是，如果希望它有我们希望它具备的某一个性质，应该如何操作呢？
  - ✓例如，对给定集合$A=\{1,2,3\}$上的关系$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$，它不具有自反性
  - ✓我们可以通过添加一些元素，使得关系具备我们想要的性质
  - ✓在关系R中添加$\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle$这两个元素后，所得到的新关系$R'$就具有自反性
  - ✓另外，还可以添加$\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,3\rangle$，得到的新关系$R''$仍然具有自反性
- 如何在给定关系中添加最少的元素，使其具有需要的特殊性质，这就是关系的闭包问题

关系的闭包运算

- 闭包的定义
- 定义3-8.1：设R是X上的二元关系，如果有另一关系R′满足：
  - 1）R′是自反的（对称的、传递的）；
  - 2）R $\subseteq$ R′；
  - 3）对任何自反的（对称的、传递的）关系R″，R″$\supseteq$R，
  - 则 R″$\supseteq$R′
- 称R’ 为R的自反（对称、传递）闭包，记作r(R),s(R),t(R)。
- 注：
  - 自反（对称、传递）闭包其实就是包含R的最小的自反（对称、传递）关系
  - 已知关系R，构作它的闭包可以采取添加序偶的方法来完成
- 如：
  - X=｛a,b,c｝，R=｛<a,a>, <b,b>, <b,c>｝，
  - 则 r(R)=｛<a,a>,<b,b>,<c,c>,<b,c> ｝

关系的闭包运算

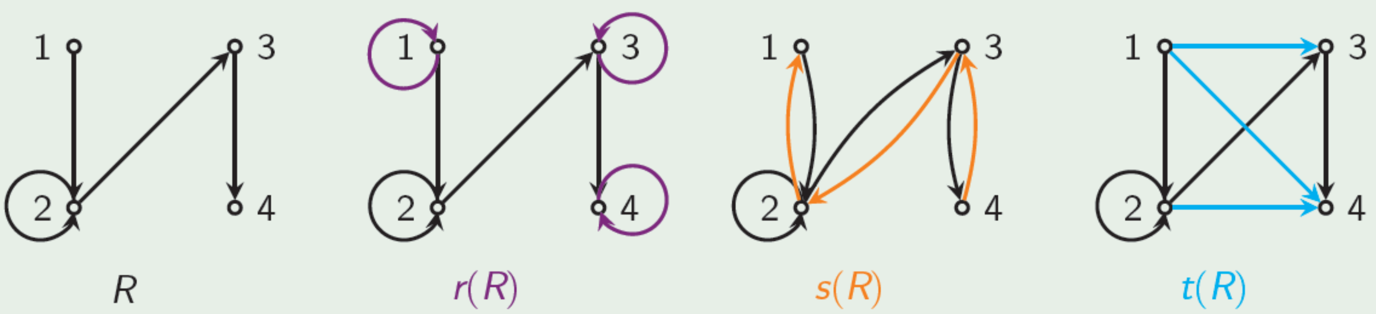
➢例子

Example

设集合 $A=\{1,2,3,4\}$,$R=\{<1,2>,<2,2>,<2,3>,<3,4>\}$ 是定义在 A 上的二元关系,则

1. $r(R)=\{<1,2>,<2,2>,<2,3>,<3,4>,<1,1>,<3,3>,<4,4>\}$;
2. $s(R)=\{<1,2>,<2,2>,<2,3>,<3,4>,<2,1>,<3,2>,<4,3>\}$;
3. $t(R)=\{<1,2>,<2,2>,<2,3>,<3,4>,<1,3>,<1,4>,<2,4>\}$.

➢利用关系图



关系的闭包运算

- 定理3-8.1 设R是X上的二元关系， R的自反闭包记为r(R), R的对称闭包记为s(R)， R的传递闭包记为t(R),那么
  - ✓1）若R是自反的，则R=r(R),反之也成立
  - ✓2）若R是对称的，则R=s(R),反之也成立
  - ✓3）若R是传递的，则R=t(R),反之也成立

- 证明：
  - ✓1）如果R是自反的，因为R⊇R，且任何包含R的自反关系R″，有R″⊇R，故R就是满足自反闭包的定义，即 R=r(R).反之，如果R=r(R)，由定义3-8.1，R必是自反的。
  - ✓2）和3）的证明完全类似1）

纠正（p. 116）

- “∧”表示逻辑乘
- “∨”表示逻辑加

关系的闭包运算:闭包的求法

- 定理3-8.2：设R是X上的二元关系，则：$r(R)=R\cup I_X$
- 证明：

设$R'=R\cup I_X$,

∵① $\forall x\in A, \langle x, x\rangle\in R'$ ∴R'具有自反性

② $R\subseteq R'$

③ 设R''是自反的，且$R\subseteq R''$，∴$I_X\subseteq R''$

又∵$R\subseteq R''$， ∴$R'=I_X\cup R\subseteq R''$

关系的闭包运算:闭包的求法

- 定理3-8.3：设R是X上的二元关系，则：$S(R)= R\cup R^c$
- 证明：设 $R'= R\cup R^c$

①$R'^c=(R\cup R^c)^c=R^c\cup (R^c)^c= R^c\cup R=R'$

另可写为：$\langle x,y\rangle\in R'$，则$\langle x,y\rangle\in R$或$\langle x,y\rangle\in R^c$，即$\langle y,x\rangle\in R$或$\langle y,x\rangle\in R^c$，故$\langle y,x\rangle\in R\cup R^c$，所以R’是对称的

②$R'=R\cup R^c\supseteq R$

③设R″是对称的，且$R\subseteq R''$ 要证 $R'\subseteq R''$

$\langle a,b\rangle\in R\cup R^c$

$\Leftrightarrow\langle a,b\rangle\in R\vee\langle a,b\rangle\in R^c$

$\Leftrightarrow\langle a,b\rangle\in R''\vee\langle b,a\rangle\in R$

$\Leftrightarrow\langle a,b\rangle\in R''\vee\langle b,a\rangle\in R''$

$\Leftrightarrow\langle a,b\rangle\in R''\vee\langle a,b\rangle\in R''$

$\Leftrightarrow\langle a,b\rangle\in R''$

$\therefore R'=R\cup R^c\subseteq R''$

关系的闭包运算:闭包的求法

- 定理3-8.4设R是X上的二元关系，则 $t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$
- 证明：先证 $\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i \subseteq t(R)$
- 归纳法：对$\forall n>0, R^n \subseteq t(R)$

  i）由定义可知 $R \subseteq t(R)$

  ii)假设 $R^n \subseteq t(R)$ 成立，要证 $R^{n+1} \subseteq t(R)$

  设$\langle a,b\rangle \in R^{n+1} = R^n \circ R$

  ∴存在c使$\langle a,c\rangle \in R^n, \langle c,b\rangle \in R$

  ∵由归纳法知$\langle a,c\rangle \in t(R)$ $\langle c,b\rangle \in t(R)$

  ∵$t(R)$是传递的，∴$\langle a,b\rangle \in t(R)$ 即$R^{n+1} \subseteq t(R)$

  ∴对一切n，$R^n \subseteq t(R)$

  ∴ $\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i \subseteq t(R)$

关系的闭包运算:闭包的求法

- 再证 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \supseteq t(R)$

- 设<a, b>, <b, c>是 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 的任意元素
  - ✓ ∴∃s, ∃t, 使得<a, b>∈R^s, <b, c>∈R^t ∴<a, c>∈$R^t \circ R^s = R^{t+s}$
  - ✓ ∴<a, c>∈ $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$, ∴ $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 是传递的
  - ✓ ∵t(R)包含R的最小传递关系, ∴ $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \supseteq t(R)$
  - ✓综上必有 $t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

- 注意：通常，将 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 记作R+， 读做“R正”
- 例：课本121页的例子

关系的闭包运算:有限集的传递闭包

- 定理3-8.5 设R是有限集A的二元关系，|A|=n, 则存在一个正整数k<=n, 使得 $t(R)=\bigcup_{i=1}^{k}R^i$
- 证:

对任意<x, y>∈t(R)，即证存在一个最小的正整数k≤n，使xR^ky

(反证法)

假设最小的正整数k>n,

∵xR^ky ∴存在序列$x=a_0, a_1, \cdots\cdots, a_{k-1}, a_k=y$, 使得$xRa_1, \cdots\cdots, a_{k-1}Ry$

(也就是 $a_0Ra_1, \cdots\cdots, a_{k-1}Ra_k$)

又∵k>n

∴$a_0, \cdots\cdots, a_k$中必有两个元素相同，不妨设$a_i=a_j$， $0\le i<j\le k$

∴$xRa_1, a_1Ra_2, \cdots, a_{i-1}Ra_i, a_jRa_{j+1}, \cdots, a_{k-1}Ry$成立

令 $S=k-(j-i)<k$， 且xR^Sy。这与k是最小的假设矛盾

关系的闭包运算:有限集的传递闭包

- 例1 设A={a, b, c, d}，给定A上的关系R为:
  - R= { 〈a, b〉 , 〈b, a〉 , 〈b, c〉 , 〈c, d〉 } , 求t(R)
- 解

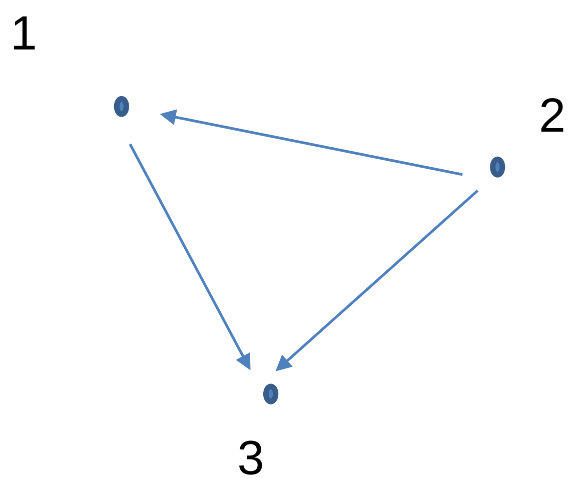
$$M_R=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad M_{R^2}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$M_{R^3}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

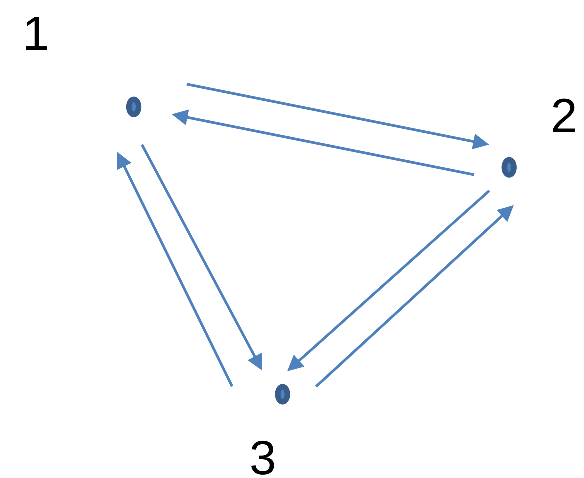
$$M_{R^4}=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$M_{t(R)}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

- 若R是自反的，则s(R)和t(R)也是自反的
- 若R是对称的，则r(R)和t(R)也是对称的
- 若R是传递的，则r(R)是传递的，s(R)不一定传递

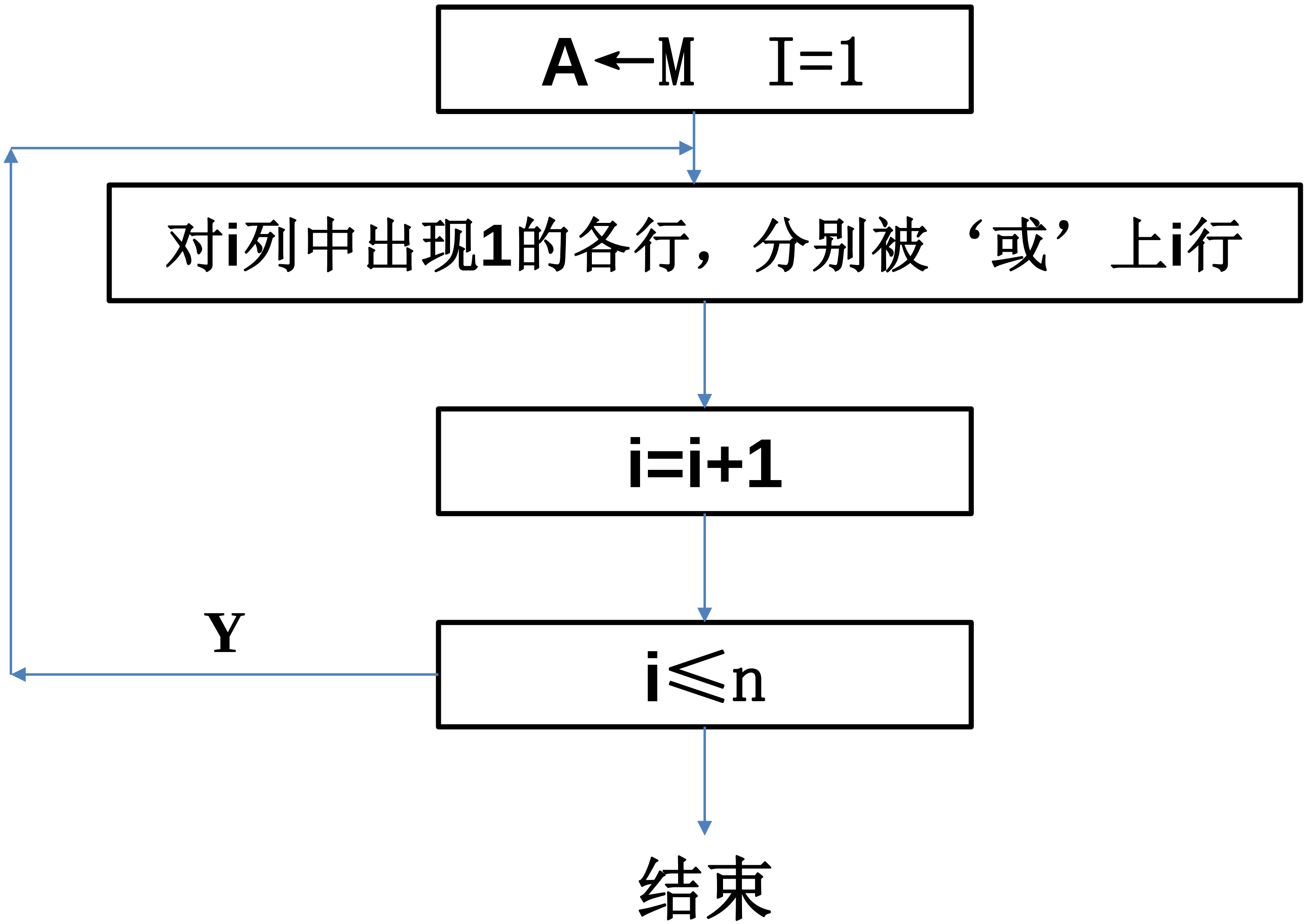


R



s(R)

关系的闭包运算:Warshall算法(p.124)



Warshall算法

求t(R)的矩阵Warshall算法：$|X|=n$, $R\subseteq X\times X$,

令$M_R=A$ R^2的矩阵为A^2，… R^k的矩阵为A^k.于是

t(R)的矩阵记作$M_{R+}=A+A^2+\ldots+A^k+\ldots$ (+是逻辑加)

(1)置新矩阵 $A:=M_R$；

(2)置 $i=1$;

(3)对所有 j ,如果$A[j,i]=1$,则对$k=1,2,\ldots,n$

$A[j,k]:=A[j,k]+A[i,k]$; /*第j行+第i行,送回第j行*/

(4) i加1;

(5) 如果$i\leq n$, 则转到步骤(3)，否则停止。

Warshall算法:例子

1

i=1 (i---列, j---行)

A[4,1]=1

1行+4行→4行

A的初值: $A=M_R=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\1&0&1&1\end{bmatrix}$

After 1

$A=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$

2

i=2 A[1,2]=1 ,1行+2行→1行

A[2,2]=1 ,2行+2行→2行 A不变

A[4,2]=1 ,4行+2行→4行,4行全1, A不变

3

i=3 A[1,3]=1,1行+3行→1行, 3行全0, A不变

A[2,3]=1,2行+3行→2行, 3行全0, A不变

A[4,3]=1,4行+3行→4行, 3行全0, A不变

After 2

After 3

$A=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$

4

i=4 A[1,4]=1 ,1行+4行→1行

A[4,4]=1 ,4行+4行→4行 A不变,

最后 $A=M_{t(R)}$

After 4

$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$

关系的闭包运算

- 定理3-8.6 设R是X上的二元关系，则：
  - a) $rs(R)=sr(R)$ （自反对称闭包等于对称自反闭包）
  - b) $tr(R)=rt(R)$
  - c) $ts(R)\supseteq st(R)$ （证明较困难，书上说不困难。）
- 证：

a) $rs(R)=r(R\cup R^c)=I_X\cup R\cup R^c$

$$= I_X\cup R\cup I_X^c\cup R^c$$

$$= I_X\cup R\cup (I_X\cup R)^c$$

$$= s(I_X\cup R)=sr(R)$$

b)

$$tr(R)=t(I_X\cup R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}(I_X\cup R)^i=\bigcup_{i=1}^{\infty}(I_X\cup\bigcup_{j=1}^{i}R^j)=I_X\cup\bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{i}R^i=I_X\cup\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i=rt(R)$$

关系的闭包运算

- 定理3-8.6 设R是X上的二元关系，则：
  - a) rs(R)=sr(R)（自反对称闭包等于对称自反闭包）
  - b) tr(R)=rt(R)
  - c) ts(R)⊇st(R)（证明较困难，书上说不困难）
- 证 c)
- 1）若$R_1 \supseteq R_2$，则$s(R_1) \supseteq s(R_2)$，$t(R_1) \supseteq t(R_2)$

  i) $\because R_1 \supseteq R_2$

  $\therefore \langle b,a\rangle \in R_2^c \Leftrightarrow \langle a,b\rangle \in R_2 \Rightarrow \langle a,b\rangle \in R_1 \Leftrightarrow \langle b,a\rangle \in R_1^c$

  $\therefore R_1^c \supseteq R_2^c$，

  $\therefore R_1 \cup R_1^c \supseteq R_2 \cup R_2^c$，即$s(R_1) \supseteq s(R_2)$。

  ii) $n=1$，$R_2 \subseteq R_1$，假设$R_2^n \subseteq R_1^n$，则

  $\langle a,b\rangle \in R_2^{n+1} \Leftrightarrow \exists c(\langle a,c\rangle \in R_2^n \wedge \langle c,b\rangle \in R_2)$

  $\Rightarrow \exists c(\langle a,c\rangle \in R_1^n \wedge \langle c,b\rangle \in R_1)$

  $\Leftrightarrow \langle a,b\rangle \in R_1^{n+1}$

  $\therefore R_2^{n+1} \subseteq R_1^{n+1}$，　$\therefore \bigcup_{i=1}^{\infty} R_1^i \supseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R_2^i$，$\therefore t(R_1) \supseteq t(R_2)$

关系的闭包运算

- （继续）

  $\because s(R)\supseteq R$

  $\therefore\ ts(R)\supseteq t(R)$

  $\therefore\ sts(R)\supseteq st(R)$

  又$\because s(R)$是对称的，故$ts(R)$是对称的

  由定理1(b)知　　$\therefore sts(R)=ts(R)$

  $\therefore ts(R)\supseteq st(R)$。

  下举例说明上包含可以是真包含：

  例　整数集I上的<关系

  $st(<)=s(<)=\neq$

  $ts(<)=t(\neq)=I\times I$

  $\therefore st(<)\subseteq ts(<)$

- **注：R*表示R的自反传递闭包，即$R^*=tr(R)$　读做“R星”**

集合的划分和覆盖

- 我们除了把二个集合进行相互比较外，还常把一个集合分成若干子集讨论
- **覆盖和划分：** 定义(3-9.1)： 设A为非空集，
  - ✓ $S=\{S_1,\cdots,S_m\}$，$S_i\subseteq A$，$S_i\neq\varnothing(i=1,\cdots,m)$且$S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_m=A$，称S是A的**覆盖**
  - ✓ 若再加$S_i\cap S_j=\varnothing(i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,m)$则称S是A的**划分**，m称为S的秩
- 例1 设$A=\{1,2,3,4,5\}$，

则 $X=\{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\}$ 划分

$Y=\{\{1,2\},\{2,3\},\{4,5\}\}$ 覆盖

$Z=\{\{1,2,3\},\{4\}\}$ 划分

$U=\{\{1,2,3,4,5\}\}$ 划分

$V=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$ 划分

U称为A的最小划分，V称为A的最大划分

集合的划分和覆盖

- 交叉划分：定义(3-9.2)：若$S_1=\{A_1,\cdots,A_m\}$，$S_2=\{B_1,\cdots,B_n\}$是A的两个划分
  - ✓ 则$S=\{A_i\cap B_j\neq\varnothing \mid A_i\in S_1\wedge B_j\in S_2\}$称为A的**交叉划分**

- **定理(3-9.1)：** 交叉划分是在集合A的划分

证明：$S=\{A_1\cap A_2,\ \cdots,A_1\cap B_n,\ \cdots,A_m\cap B_1,\cdots,A_m\cap B_n\}$

① 则$(A_1\cap B_1)\cup\cdots\cup(A_1\cap B_n)\cup\cdots\cup(A_m\cap B_n)$

$$
\begin{aligned}
&=(A_1\cap(B_1\cup\cdots\cup B_n))\cup\cdots\cup(A_m\cap(B_1\cup\cdots\cup B_n))\\
&=((A_1\cup\cdots\cup A_m)\cap(B_1\cup\cdots\cup B_n))\\
&=A\cap A\\
&=A
\end{aligned}
$$

∴S是A的一个覆盖（p.130）

② $\forall(A_i\cap B_h),(A_j\cap B_R)\in S$

$$
(A_i\cap B_h)\cap(A_j\cap B_R)=\begin{cases}\varnothing, & i\neq j,\ \ h=k\\ \varnothing, & i\neq j,\ \ h\neq k\\ \varnothing, & i=j,\ \ h\neq k\end{cases}
$$

∴S是A的一个划分

集合的划分和覆盖

- 加细(细分)：定义(3-9.3)：设S, S′是集合A的两个划分，若S的每一块均是S′中某块的子集，称S是S′的加细（或细分)
- 例：

  A=整数集 ， S={{1, 3, 5, 7…}, {2, 4, 6…}}

  S′={{1, 5, 9…}, {3, 7…}, {2, 4, 6…}}

  则： S′是S的加细(细分)

- 定理3-9.2：任何两种划分的交叉划分，都是原来各划分的一种加细(细分)

离散数学（10月11日）

微信扫码签到

等价关系和等价类

- 定义(3-10.1)：若集合A上的二元关系R是：

  (1)自反的

  (2)对称的

  (3)传递的

则称R是A上的等价关系

- 例：
  - ✓ A={1,2,3,4}， R={<1,1>,<1,4>,<4,1>,<4,4>,<2,2>,<2,3>,<3,2>,<3,3>}是一个等价关系
- 此外
  - ✓ 数中的“相等”关系,集合中的“相等”关系,命题演算中“⇔”关系,都是等价关系

- 注：其关系图的特点：每一结点有自回路，每对结点之间要么没有弧，要么有弧而且成对出现

等价关系和等价类

- 定义(3-10.2)：设R是A上的等价关系，$\forall a \in A$，集合 $[a]_R=\{x \mid x \in A, aRx\}$ 称为元素a形成的R等价类

- 例： $A=\{1, 2, 3, 4\}$，
  $R=\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 4, 1\rangle, \langle 4, 4\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$
  - ✓上例中，A上各个元素形成的R等价类为：

$$[1]_R=\{1, 4\}$$

$$[2]_R=\{2, 3\}$$

等价关系和等价类

- 定理(3-10.1)：设R是定义在A上的等价关系，$\forall a, b \in A$，有

  $aRb \Leftrightarrow [a]_R=[b]_R$

- 证：'$\Leftarrow$' 由R的自反性知： $a \in [a]_R$

  故：假定$[a]_R=[b]_R$，因为$a \in [a]_R$，故$a \in [b]_R$，

  根据等价类定义可知：$bRa \Rightarrow aRb$

  '$\Rightarrow$' 若 aRb

  $\forall x \in [a]_R \Leftrightarrow xRa$又$aRb \Rightarrow xRb \Leftrightarrow x \in [b]_R$,

  故$[a]_R \subseteq [b]_R$

  同理可证： $[b]_R \subseteq [a]_R$

  所以， $[a]_R=[b]_R$

等价关系和等价类

- 定义(3-10.3)：集合A上的等价关系R，其等价类集合$\{[a]_R \mid a \in A\}$称为A关于R的商集，记为A/R

- 例：上例中 $A/R=\{[1]_R, [2]_R\}$(也可以是$=\{[4]_R, [2]_R\}$)

- 那么，商集是否可以认为是一种划分？

等价关系和等价类

- 定理(3-10.2)：集合A上的等价关系R，则商集A/R是A的一个划分

- 证明：

$A/R=\{[a]_R \mid a\in A\}$

1. $\bigcup_{a\in A}[a]_R=A$，　　∴A/R是一个覆盖
2. ∵$\forall a\in A$, aRa成立，　∴　$a\in[a]_R$, 每个元素的确属于一个分块
3. $\forall a,b\in A$, $[a]_R\neq[b]_R$，则$[a]_R\cap[b]_R=\varnothing$，A的每个元素只能属于一个分块

- 反证法：设$\exists c\in[a]_R\cap[b]_R$，且$[a]_R\cap[b]_R\neq\varnothing$

　　∴cRa，cRb（同时aRc成立）

　　∵R是传递的

　　∴aRb

通过定理3-10.1知$[a]_R=[b]_R$ ，与前提矛盾

等价关系和等价类

- 定理(3-10.3)：集合A的任一划分S确定了A上的一个等价关系R
- 证明： 设$S=\{s_1, s_2, \cdots, s_m\}$，定义关系R：aRb，当且仅当a, b在S的同一分块中，现证R是等价关系

  1. $\forall a \in A$，a与a在同一块中，$\therefore aRa$，自反性成立
  2. $\forall a, b \in A$，a与b在同一块中，则b与a也在同一块
     即 $aRb \Rightarrow bRa$，$\therefore$对称性成立
  3. $\forall a, b, c \in A$，若a与b在同一块，b与c在同一块，
     $\because S_i \cap S_j = \varnothing (i \neq j)$，即b属于且仅属于一个分块
     $\therefore$a与c在同一块，即$aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$
     $\therefore$传递性满足
     $\therefore$R是A的一个等价关系，且$A/R=S$

等价关系和等价类

- 例：A={a, b, c, d, e} ， S={{a, b}, {c}, {d, e}}

  则 $R_1=\{a, b\}\times\{a, b\}=\{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$

  $R_2=\{c\}\times\{c\}=\{\langle c, c\rangle\}$

  $R_3=\{d, e\}\times\{d, e\}=\{\langle d, d\rangle, \langle d, e\rangle, \langle e, d\rangle, \langle e, e\rangle\}$

  则R=R1∪R2∪R3是由S诱导的等价关系

等价关系和等价类

- 定理(3-10.4)设R_1，R_2是非空集合上的等价关系，则
  $R_1=R_2 \Leftrightarrow A/R_1=A/R_2$

- 证明：
  '⇒' 若$R_1=R_2$ $\because A/R_1=\{[a]R_1 \mid a\in A\}$，$A/R_2=\{[a]R_2 \mid a\in A\}$，
  $\forall a\in A$，$x\in[a]R_1 \Leftrightarrow \langle x,a\rangle\in R_1 \Leftrightarrow \langle x,a\rangle\in R_2 \Leftrightarrow x\in[a]R_2$
  $\therefore [a]R_1=[a]R_2$，$\therefore A/R_1= A/R_2$
  '⇐' 若$A/R_1=A/R_2$，
  $\therefore \forall a\in A$，$[a]R_1\in A/R_1$，$\exists c\in A$，使 $[a]R_1=[c]R_2$
  $\therefore \forall a,b\in A$
  $\langle a,b\rangle\in R_1 \Leftrightarrow a\in[a]R_1 \wedge b\in[a]R_1$
  $\Leftrightarrow a\in[c]R_2 \wedge b\in[c]R_2$
  $\Rightarrow \langle a,b\rangle\in R_2$
  $\therefore R_1 \subseteq R_2$， 同理可证$R_2\subseteq R_1$
  $\therefore R_1= R_2$

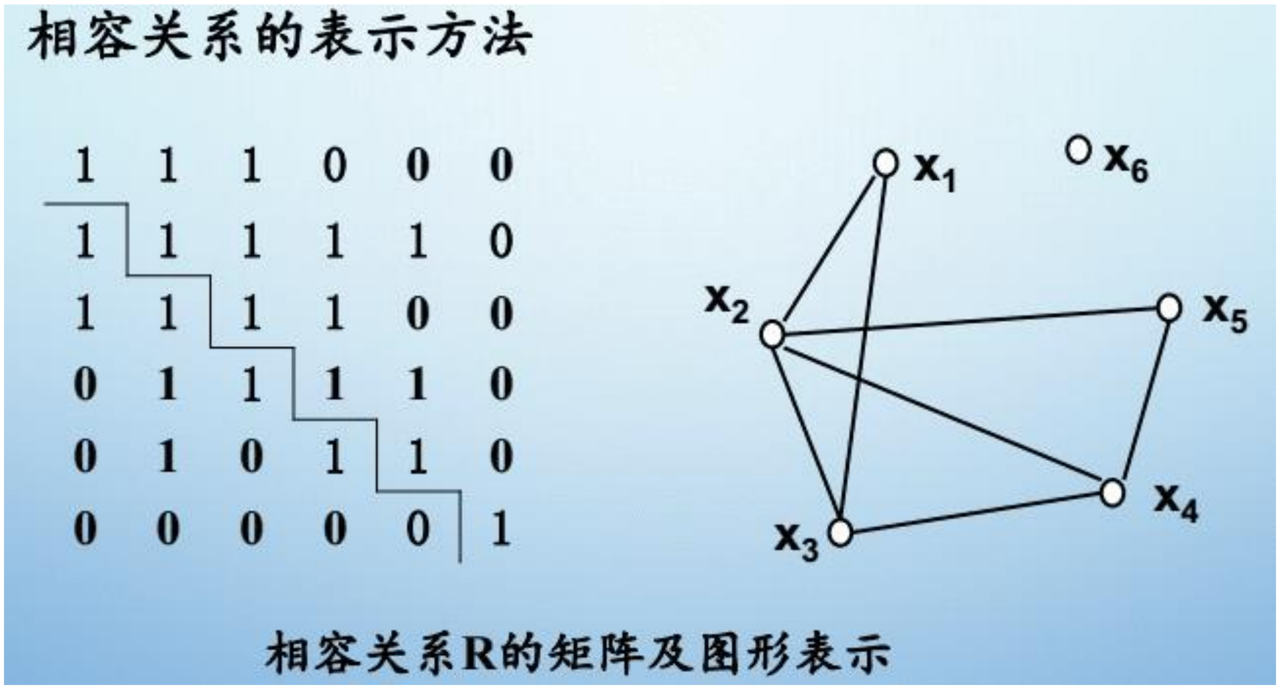
等价关系和等价类

- 上述定理告诉我们
  - ✓划分与等价关系本质上相同
  - ✓唯一区别是关系可以在空集上定义，划分则不能

相容关系

- 定义(3-11.1)： 设R是集合A上的二元关系，若R是自反的和对称的，称R是相容关系
- 例：
  - a）所有等价关系是相容关系
  - b）A= {a, b, c, d, } , R= {<a, a>, <b, b>, <c, c>, <d, d>, <a, b>, <b, a>}
- 其关系矩阵与关系图
  - 1）仅给出关系矩阵的左下角就可描写相容关系（不包括主对角线元素）
  - 2）相容关系的关系图可简记（用无向边代替二条有向边、不用自回路）

相容关系：关系矩阵与关系图



相容关系

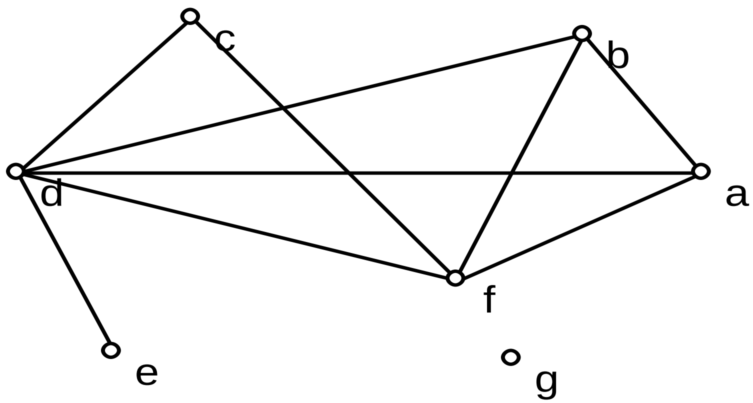
- 定义(3-11.2)：设R是集合A的相容关系，集合C是A的子集，满足 $\forall x, y \in C$ ，则xRy，则C称为由R产生的相容类
  - 例如，上例中{a，b}，{c}，{d}，{a}，{b}都是

- 定义(3-11.3)：设R是集合A的相容关系，C是由R产生的相容类，如果C不真包含于其他任何相容类，则称C为最大相容类
  - 例如，上例中{a，b}，{c}，{d}都是

A=｛a,b,c,d,｝,R=｛<a,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>,<a,b>,<b,a>｝

相容关系

- 注：
  - ✓1） A上的相容关系R的最大相容类集合{A_1，…，A_m}构成A的一个覆盖
  - ✓2） 最大相容类在关系图上反映为一个完全图
  - ✓完全图：图中每一对结点间都有边相连
- 最大相容类的求法（利用关系图）
  - ✓求出图中所有最大完全图，每个完全图代表了一个最大相容类



✓**所有最大相容类为**{a, b, d, f}，{c, d, f, }，{d, e}，{g}}

相容关系

- 定义(3-11.4):在集合A上给定相容关系R，其最大相容类的集合称作集合A的完全覆盖，记作$C_R(A)$

- A上的相容关系R确定一个完全覆盖
- 证：$\because \forall a \in A$, aRa $\therefore \bigcup_{a \in A}[a]_a$所在的最大相容类$=A$

相容关系

- 定理(3-11.2) A上的覆盖$\{A_1, \cdots, A_n\}$确定一个相容关系：

$$R = A_1 \times A_1 \cup \cdots \cup A_n \times A_n$$

证：现证 R 是一个相容关系

① $\forall a \in A \quad \exists i \ , a \in A_i (1 \leqslant i \leqslant n)$

$\therefore \langle a, a \rangle \in A_i \times A_i \subseteq R$

即 aRa　∴自反性成立

② $\forall a, b \in A$ ，　若$\langle a, b \rangle \in R$，

$\therefore \exists i (1 \leqslant i \leqslant n), \langle a, b \rangle \in A_i \times A_i$，$\therefore \langle b, a \rangle \in A_i \times A_i$，$\langle b, a \rangle \in R$，

$\therefore aRb \Rightarrow bRa$，对称性成立

∴R是相容关系

相容关系

- 定理（3-11.3）：集合A上相容关系R与完全覆盖C_R存在一一对应

离散数学（10月12日）

微信扫码签到

序关系

- 在一个集合上，考虑元素的次序关系
- 定义(3-12.1)：若集合A上的二元关系R是自反的、反对称的和传递的，则称R是A的偏序关系，序偶<A, R>称为偏序集
- 注：
  - ①常把偏序关系R记为"≤"即小于等于。则<A, R>记为<A, ≤>, aRb记为a≤b，这里符号"≤"表示了一种更为普遍的"小于等于关系"即偏序关系
  - ②例如，实数集R的"小于或等于"关系是偏序关系
- 例：A={2, 3, 6, 8}，D表示整除关系，M表示整倍数关系

  则　D={<2, 2>, <3, 3>, <6, 6>, <8, 8>, <2, 6>, <2, 8>, <3, 6>}

  M={<2, 2>, <3, 3>, <6, 6>, <8, 8>, <6, 2>, <8, 2>, <6, 3>}

  经验证，D和M均为偏序关系

序关系

- 定义(3-12.2)在偏序集合<A, ≤>中，如果x, y∈A, x≤y, x≠y, 且没有其他元素z满足x≤z， z≤y，则称**y盖住x**。盖住关系 COV A={<x, y>|y盖住x}

- 例：A={2, 3, 6, 8}，D表示整除关系
  D={<2, 2>, <3, 3>, <6, 6>, <8, 8>, <2, 6>, <2, 8>, <3, 6>}
  - ✓上例中D的盖住关系为COV A = {<2, 6>, <3, 6>, <2, 8>}

可比与覆盖

- 设R 是非空集合A 上的偏序关系，$\forall x, y \in A$,
  - 如果$x \preccurlyeq y$ 或 $y \preccurlyeq x$，则称 x与y可比
  - 如果$x \prec y$ 且不存在 $z \in A$ 使得 $x \prec z \prec y$，则称 y覆盖x

- 例：正整数集合上的整除关系中
  - 2与4可比，6与3可比，4和3不可比
  - 4和6覆盖2
  - 但8、12 等均不覆盖2
- A = {1, 2, 3, 4} 的幂集上的包含关系中
  - {1} 和{1, 2}可比
  - {1} 和{2}不可比
  - {1, 2}和{1, 3, 4}不可比
  - {1, 2}覆盖{1}和{2}

哈斯图

- 在偏序集的关系图中，许多有向边可以不用显示出来
  - 例如，偏序关系满足自反性，所以每个结点都有环，因此可以不必显示这些环；
  - 又如，偏序关系满足传递性，我们不必显示由于传递性而必须出现的边；
  - 另外，由于其反对称的特性，我们可以规定边的方向，从而省去箭头.
- 按照以上方法对关系图进行简化而得到的图形叫做哈斯图,
  - 哈斯图对于判断元素之间的先后顺序以及确定特殊元素非常方便

哈斯图

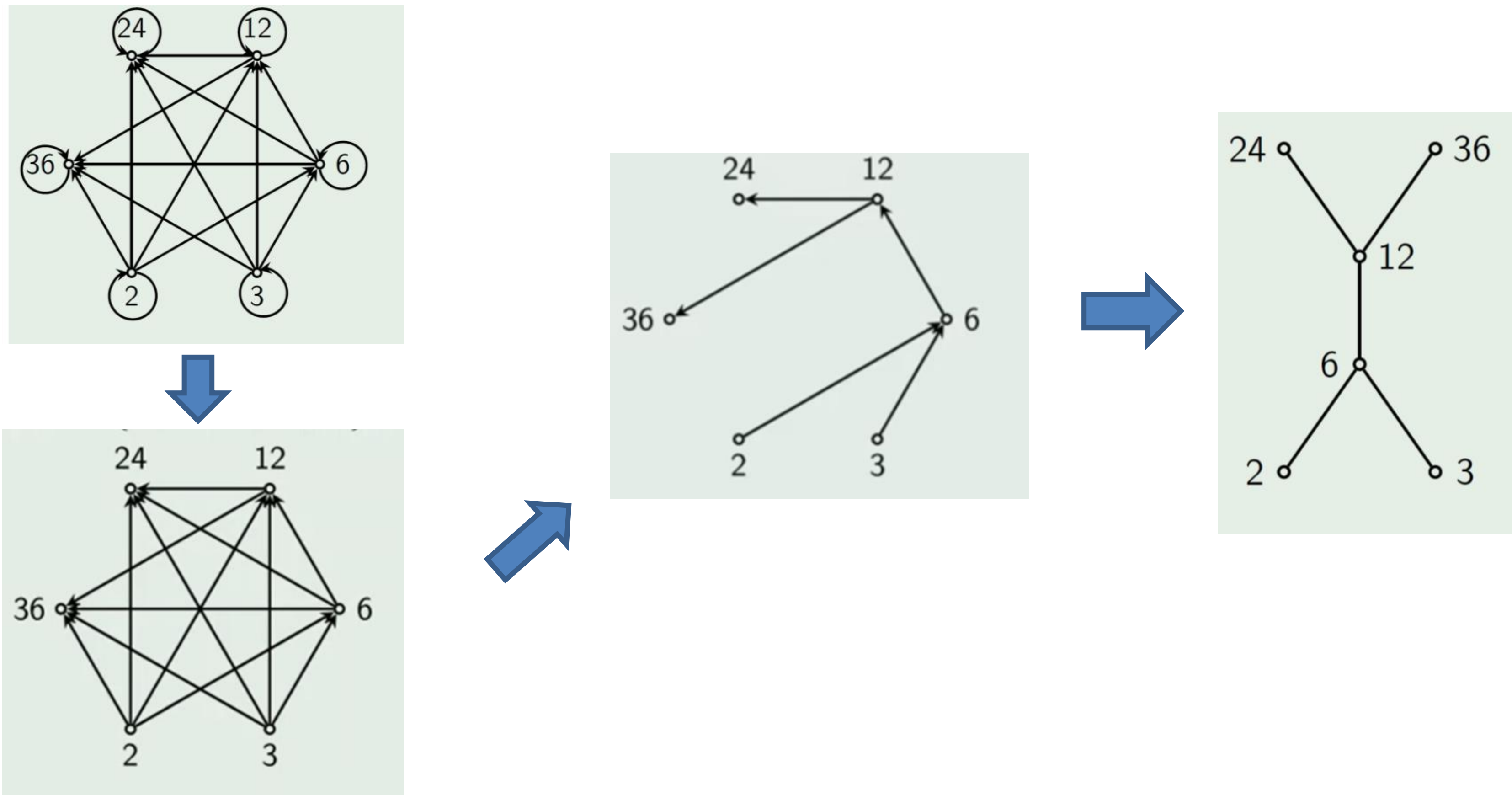
- 偏序集合用图表示，作图规则为：
  - ✓小圆圈表示元素
  - ✓如果$x \leqslant y$，则将y画在x之上
  - ✓如果$\langle x, y\rangle \in CovA$，则在$x$，$y$之间无向连接
- 所得的关系图称为哈斯图（hasse图）

哈斯图

- 设R 是非空集合A 上的偏序关系， 使用如下方法对R 的关系图进行简化：
  - ✓取消每个结点的自环；（因自反性）
  - ✓取消所有由于传递性出现的边. 即若x→y, y→z， 则去掉x→z 这条边;(因传递性)
  - ✓重新排列每条边， 使得边的箭头方向全部向上， 然后去掉这些箭头.(因反对称性)
- 以上步骤可以得到一个包含足够偏序信息的图， 这个图称为偏序关系R的哈斯图(Hasse diagram)

哈斯图

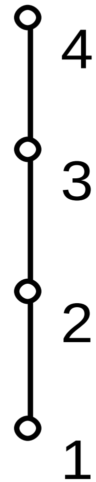
- 设A = {2, 3, 6, 12, 24, 36}，“⩽”是A 上的整除关系R



序关系

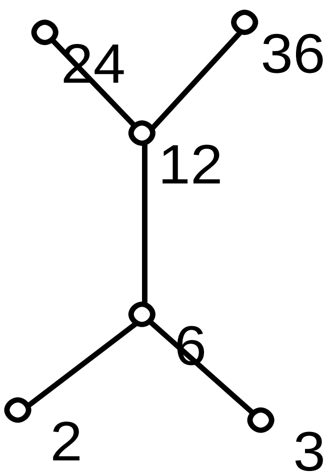
a） P={1, 2, 3, 4}

- 〈P, ≼〉的哈斯图为



b) A={2, 3, 6, 12, 24, 36}，

- 〈A, 整除〉的哈斯图为

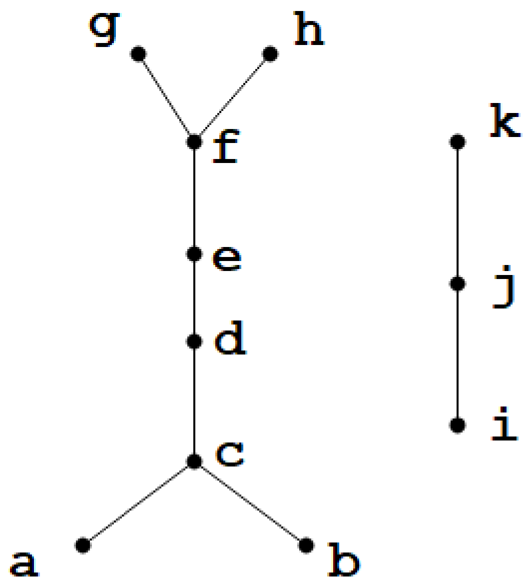


序关系

- 定义(3-12.3)： 设<A, ≤>是一个偏序集合，$B \subseteq A$， $\forall a, b \in B$，都有a≤b或b≤a（也即a与b是可比较的），则称B为链，否则称B为反链
- 我们约定，当B只有唯一元素时，B既是链，又是反链

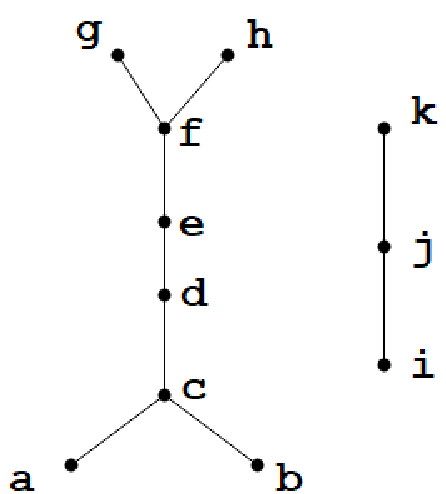
链与反链:例子

- 下图是某一偏序集$\langle A, \preceq \rangle$ 的哈斯图, 其中 $A=\{a, b, \cdots, k\}$



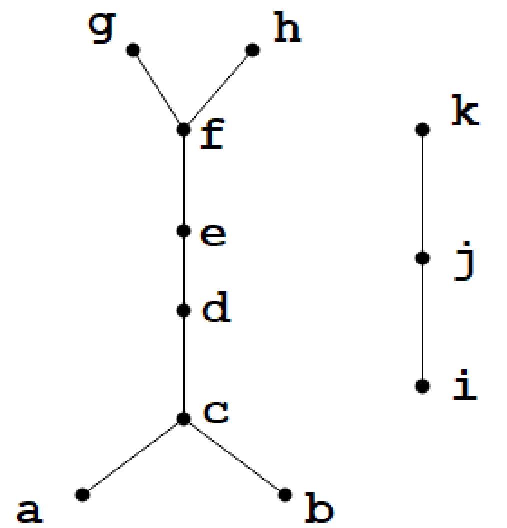
链与反链:例子

- 问题1: B_1={a, c, d, e}是一条长为4的链;
  - ✓这四个元素互相之间是可比的;并且也是覆盖的, e覆盖d, d覆盖c, c覆盖a;
- 问题2: B_2={a, e, h}是一条长为3的链;
  - ✓a, e, h之间都是可比的,但没有覆盖关系,即他们之间都有其它元素相隔,这也是链;
  - ✓集合中有 n个元素,且这些元素可比,那么这个集合就是一个长为n的链,中间可以隔着其它元素;
- 问题3: B_3={b, g}是一条长为2的链;
  - ✓b, g之间隔着4个元素,但这个集合中元素是可比的,也是链,长度为集合的元素个数;



链与反链:例子

- 问题4: B_4={g, h, k} 是一条长为3的反链;
  - ✓ 集合中的元素，都不可比，那这个集合就是反链;
  - ✓ 如果一部分可比，另一部分不可比，那这个集合什么都不是，既不是链，也不是反链;
- 问题5: B_5={a} 是一条长为1的链，同时也是一条长为1的反链;
  - ✓ 如果集合中只有一个元素，那么该集合既是链，又是反链，长度为1;
- 问题6: B_6={a, b, g, h} 既不是链，也不是反链;
  - ✓ g, a是可比的，h, a是可比的，g, b是可比的，h, b是可比的，g, h不可比，a, b不可比，因此其既不是链，也不是反链;



序关系

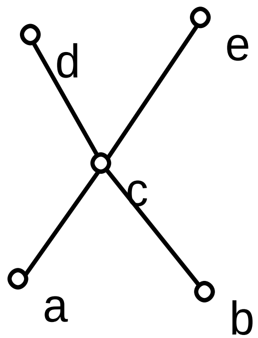
- 定义（3-12.4）：在偏序集合<A, ≼>中，如果A是一个链，则称<A, ≼>为全序集合或线序集合，此时≼称为全序关系或线序关系

- 例：
  - a）定义在自然数集合N上的“小于等于”关系“≤”就是一个全序关系。
  - b）{1, 2, 3, 6}的整除关系不能构成一个线序集合。
- 例：
  - P={∅，{a}, {a, b}, {a, b, c}}上的包含于关系“⊆”，可验证<P, ⊆>是一个全序集合

- 可见，全序集合的哈斯图是一竖立的结点序列，每相邻的结点用一条弧连接

序关系

- 定义（3-12.5）：设<A，≤>是一偏序集合，B是A的子集，
  - ✓若b∈B，且B中不存在元素x，使b≠x且b≤x，称b∈B是B的极大元
  - ✓若b∈B，且B中不存在元素x，使b≠x且b≥x，称b∈B是B的极小元
- 例



Definition

设 $<A, \leqslant>$ 是偏序集，B 是 A 的任何一个子集，若存在元素 $b \in B$，使得

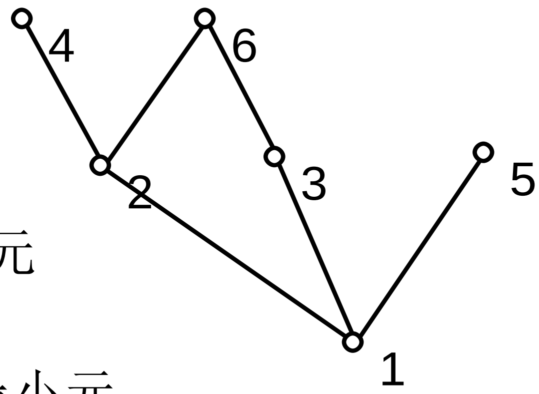
- 对任意 $x \in B$，满足 $b \leqslant x \Rightarrow x = b$，则称 b 为 B 的极大元；
- 对任意 $x \in B$，满足 $x \leqslant b \Rightarrow x = b$，则称 b 为 B 的极小元.

  - ✓则A={a, b, c, d, e} 极大元为d, e，极小元为a, b。B={c, a, b}则极大元素为c，极小元素为a, b
- **可见，极大元和极小元可以不唯一。其实也可以不存在，例如<I，≤>设B={i | i∈N}，但对于非空有限偏序集合，其极大元和极小元总是存在**

序关系

- 定义(3-12.6)：设<A, ≼>是一偏序集合，B是A的子集，
  - ✓若b∈B，且对每一元素x∈B，x≼b，则称b为B的最大元
  - ✓若b∈B，且对每一元素x∈B，b≼x，则称b为B的最小元

- 例　A={1, 2, 3, 4, 5, 6}　则<A, 整除>哈斯图为



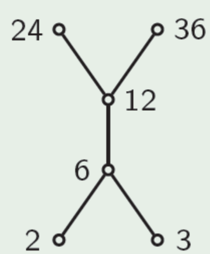
  - ✓a) B={1, 2, 3, 6}，则6是B的最大元，1是B的最小元
  - ✓b) B={2, 3, 6}，则6是B的最大元，B没有最小元
  - ✓c) B={1, 2, 3, 4, 5, 6}，则B没有最大元，1是B的最小元

- 可见，子集的最大元可以不存在，例如<I, ≼>设B={i | i∈N}

最大元、最小元、极大元和极小元

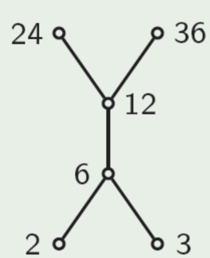
- B 的最大元、最小元、极大元和极小元如果存在，一定在B中；
- b是B的最大元，B中所有的元素都比b小；
- b是B的最小元，B中所有的元素都比b大；
- b是B的极大元，B中没有比b大的元素；
- b是B的极小元，B中没有比b小的元素.

Example



	{6,12}	{2,3}	{24,36}	{2,3,6,12}
最大元	12	无	无	12
最小元	6	无	无	无

Example



	{6,12}	{2,3}	{24,36}	{2,3,6,12}
极大元	12	2,3	24,36	12
极小元	6	2,3	24,36	2,3

序关系

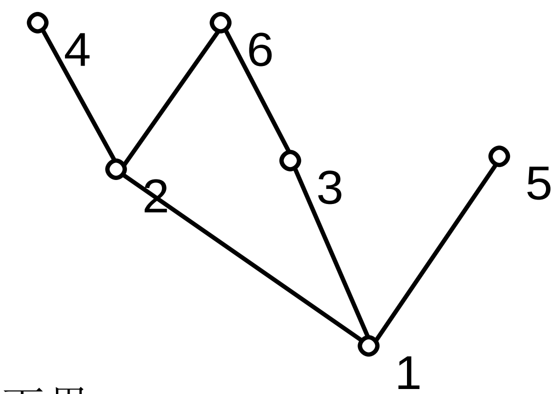
- 定理(3-12.1)： 设<A, ≤>是一偏序集合，且B⊆A则B若有最大（最小）元，则最大（最小）元是唯一的

- 证：（反证法）
  - ✓设 a,b都是B的最大元，那么a≤b,b≤a，由反对称性得a=b

序关系

- 定义（3-12.7）设<A, ≤>是一偏序集合，B是A的子集
  - ✓ 如有a∈A，且∀x∈B, x≤a ，则称a为B的上界
  - ✓ 如有a∈A，且∀x∈B, a≤x ，则称a为B的下界

- 例： A={1, 2, 3, 4, 5, 6} 则<A, 整除>哈斯图为



  - ✓ a) B={1, 2, 3, 6}， 则6是B的上界，1是B的下界
  - ✓ b) B={2, 3, 6}， 则6是B的上界， 1是B的下界。
  - ✓ c) B={1, 2, 3, 4, 5, 6}， 则B的上界不存在， 1是B的下界

- 可见，B的上界（下界）未必是B的元素。上界和下界可以不存在，也可以不唯一

序关系

- 定义(3-12.8):设<A, ≤>是一偏序集合，B是A的子集
  - ✓若a是B的上界，且对B的所有上界y，有a≤y，那么称a为B的最小上界，记为 LUB B
  - ✓若a是B的下界，且对B的所有下界y，有y≤a，那么称a为B的最大下界，记为 GLB B

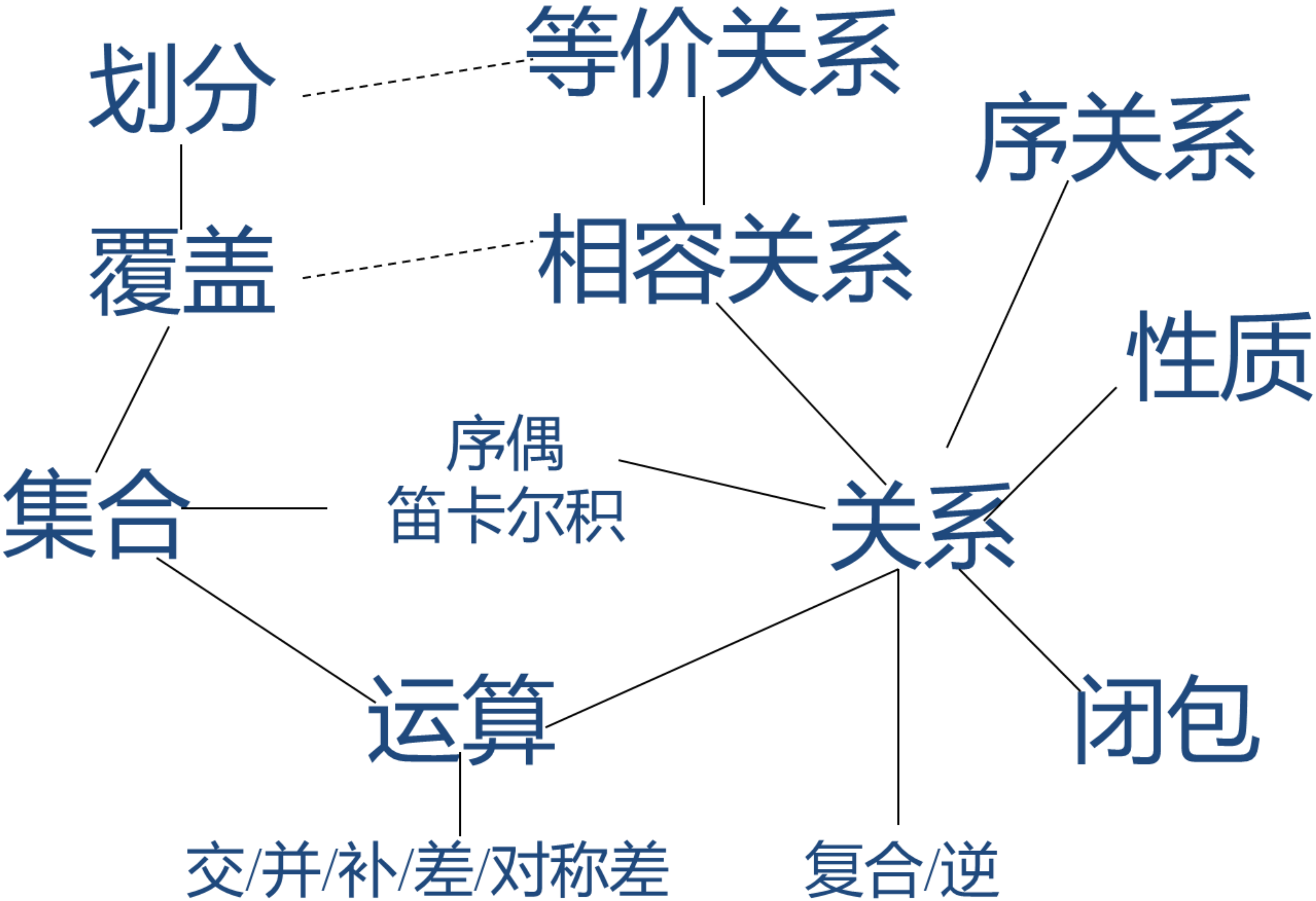
序关系

- 定义(3-12.9)：若R是A上的一个偏序关系，且A的每个非空子集都有最小元素，则称R是A上的良序关系，序偶<A,R>称良序集合
- 例：
  - ✓（a）每一个有限的线序集合都是良序集合
  - ✓（b）<I，≤>是良序集合

序关系

- 定理(3-12.2)：每一个良序集合，一定是全序集合
- 证：
- 设<R, ≤>为良序集合，
  - ✓则对于任意两个元素a, b∈R可构成子集｛a, b｝，必存在最小元素不是a就是b，
  - ✓因此一定有a≤b或b≤a. 所以<R, ≤>为全序集

- 定理(3-12.3)：每一个有限的全序集合都是良序集合
- 证：
  - ✓设A=｛a_1, a_2, …, a_n｝，令〈A，≤>是全序集合，现在假定〈A，≤>不是良序集合，那么必存在一个非空子集B⊆A，在B中不存在最小元素，由于B是一个有限集合，故一定可以找出两个元素x与y是无关的，由于〈A，≤>是全序集，x, y∈A，所以x, y必有关系，得出矛盾，故〈A，≤>必是良集合


划分
等价关系
序关系
覆盖
相容关系
性质
序偶
笛卡尔积
集合
关系
运算
闭包
交/并/补/差/对称差
复合/逆

谢谢

Thanks！