

恒星大气物理：核心概念与推导（复习笔记）

2026 年 1 月 10 日

目录

1 光度 (Luminosity)	2
2 有效温度 (Effective Temperature)	2
3 赫罗图 (H–R 图)	3
4 热动平衡状态 (Thermodynamic Equilibrium, TE)	3
5 Saha 公式 (电离平衡)	4
6 玻尔兹曼分布 (激发平衡)	4
7 普朗克分布函数 (黑体辐射)	5
8 吸收系数 (Absorption coefficient)	6
9 发射系数 (Emission coefficient)	6
10 光致电离 (Photoionization)	7
11 光致激发 (Photoexcitation)	8
12 自由–自由吸收 (Free-free / Bremsstrahlung absorption)	8
13 光学深度 (Optical depth)	9
14 光子的自由程 (Mean free path)	10
15 不透明度的微观物理过程 (Opacity microphysics)	10
16 恒星大气的基本方程组	11
17 灰大气模型 (Grey atmosphere model)	12
18 灰大气模型的温度分布	13
19 太阳临边昏暗现象 (Limb darkening)	14
20 局部热动平衡大气模型 (LTE)	14

1 光度 (LUMINOSITY)	2
21 氢原子模型	15
22 连续吸收的来源	15
23 吸收线的产生机制	16
24 谱线轮廓 (Line profile)	16
25 等值宽度 (Equivalent width)	17
26 谱线致宽机制 (Line broadening mechanisms)	17
27 Voigt 轮廓 (Voigt profile)	18

1 光度 (Luminosity)

定义与物理意义

光度 L 是天体向所有方向辐射 (或输出) 能量的总功率:

$$L \equiv \frac{dE}{dt}. \quad (1)$$

它是恒星的“总能量预算”指标: 与内部能量产生 (核反应) 和外层能量输运 (辐射/对流) 共同决定恒星在演化轨道上的位置。

与通量、半径的关系

若在距离 r 处测得辐射通量 $F(r)$ (单位面积单位时间的能流), 在各向同性近似下:

$$L = 4\pi r^2 F(r). \quad (2)$$

在恒星表面 $r = R$:

$$L = 4\pi R^2 F_{\text{surf}}. \quad (3)$$

天文学意义

- **距离标尺**: 与视亮度结合可定义绝对星等与距离模数。
- **结构约束**: 主序星满足近似 $L \sim M^\alpha$ ($\alpha \approx 3-4$), 反映内部能量产生与不透明度的综合效应。
- **大气建模边界条件**: 大气模型最终要匹配给定 L (或 T_{eff}), 保证能量守恒。

2 有效温度 (Effective Temperature)

定义

有效温度 T_{eff} 由“同光度同半径的黑体”定义:

$$L \equiv 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4, \quad (4)$$

因此

$$T_{\text{eff}} = \left(\frac{L}{4\pi R^2 \sigma} \right)^{1/4}. \quad (5)$$

物理意义

T_{eff} 不是大气任一点的真实气体温度，而是把观测到的总辐射能流（频率积分后的通量）映射为黑体温度的“等效参数”。谱能量分布形状 (λ_{peak})、电离/激发平衡 (Saha/玻尔兹曼) 都强烈依赖 T_{eff} 。

与颜色温度、亮温的区别

- **颜色温度**: 用谱形（例如两段波段比色）拟合的温度，受谱线/消光影响。
- **亮温**: 用某一频率处的比强度等效为黑体得到的温度，常用于射电。
- **有效温度**: 由频率积分后的总通量定义，最接近能量守恒量。

3 赫罗图 (H-R 图)

坐标与基本结构

赫罗图以 $\log T_{\text{eff}}$ (或颜色指数) 为横轴、 $\log L$ (或绝对星等) 为纵轴，揭示恒星族群的分布规律：主序、巨星支、白矮、水平支等。

与大气物理的连接

从观测到的光谱/颜色推回 T_{eff} 、表面重力 g 与金属丰度 $[\text{Fe}/\text{H}]$ ，再映射到 L 与演化状态。大气中连续谱与线谱形成决定了温度刻度与重力敏感线（如压强展宽）如何被测量。

天文学意义

- **演化诊断**: 同一星团的转折点给出年龄；巨星支形态与金属丰度相关。
- **恒星参数反演**: 通过 L 与 T_{eff} 得到 R ，结合 $g = GM/R^2$ 得到质量尺度。

4 热动平衡状态 (Thermodynamic Equilibrium, TE)

定义

严格热动平衡要求：物质与辐射场处处具有同一温度 T ，各微观过程满足详细平衡 (forward rate = reverse rate)，辐射场为各向同性黑体：

$$I_\nu = B_\nu(T), \quad J_\nu = B_\nu(T). \quad (6)$$

此时粒子速度分布为 Maxwell 分布，能级布居为玻尔兹曼分布，电离由 Saha 公式给出。

为何恒星大气通常不满足 TE

恒星大气是开放系统：能量向外逃逸，辐射场随深度变化且非各向同性；外层密度低，碰撞不足以强制“物质与辐射完全耦合”，导致非局部热动平衡 (NLTE) 效应。

天文学意义

TE 是推导 Saha/玻尔兹曼/普朗克与灰大气的基准极限；理解“偏离 TE 的方向与原因”是 NLTE 谱线形成的核心。

5 Saha 公式 (电离平衡)

要解决的问题

给定温度 T 与电子密度 n_e (或压强), 求元素在相邻电离态 $i \leftrightarrow i+1$ 之间的数密度比: n_{i+1}/n_i 。

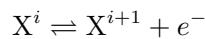
结果 (常用形式)

设电离能为 χ_i (从 i 到 $i+1$), 配分函数为 $U_i(T)$ 。Saha 方程:

$$\frac{n_{i+1} n_e}{n_i} = \frac{2U_{i+1}(T)}{U_i(T)} \left(\frac{2\pi m_e k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\chi_i}{k_B T}\right). \quad (7)$$

推导要点 (由化学势/统计力学得到)

在 TE 中, 相邻反应



满足化学势平衡

$$\mu_i = \mu_{i+1} + \mu_e. \quad (8)$$

对理想气体组分, μ 可写为

$$\mu = -k_B T \ln \left[\frac{U(T)}{n} \left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2} \right], \quad (9)$$

其中 U 代表内部分配函数 (含简并度与激发态贡献)。把 μ_i, μ_{i+1}, μ_e 代入并整理, 同时把电离能 χ_i 作为内能差写入指数项, 即得式 (7)。

物理解释

- **指数项** $\exp(-\chi_i/k_B T)$: 温度越高越易电离。
- **相空间因子** $(2\pi m_e k_B T/h^2)^{3/2}$: 自由电子平动状态数随 $T^{3/2}$ 增加。
- **电子密度**: n_e 越大, 复合越强, 电离度越低 (对固定总粒子数)。

天文学意义

电离平衡决定谱线来自哪一电离态 (例如 Fe I vs Fe II), 从而使得谱线强度对 T 、 n_e 、 g 具有诊断能力 (常用“电离平衡”定标表面重力)。

6 玻尔兹曼分布 (激发平衡)

结果

同一电离态 i 内, 不同激发能级 j 的布居满足:

$$\frac{n_{i,j}}{n_i} = \frac{g_{i,j}}{U_i(T)} \exp\left(-\frac{E_{i,j}}{k_B T}\right), \quad (10)$$

其中 $g_{i,j}$ 为简并度, $E_{i,j}$ 为相对基态的激发能。

推导要点

在 TE 中微观态概率 $p_s \propto \exp(-E_s/k_B T)$ 。将能级 j 的简并度 g_j 计入，得到 $n_j \propto g_j \exp(-E_j/k_B T)$ ，归一化常数即配分函数 $U(T) = \sum_j g_j \exp(-E_j/k_B T)$ 。

物理与天文学意义

玻尔兹曼分布说明：高激发线（大 $E_{i,j}$ ）对温度极敏感，因此高激发谱线常用于 T_{eff} 或温度结构的约束；同时它与 Saha 联合决定“总的可吸收粒子数”。

7 普朗克分布函数（黑体辐射）

结果

黑体在温度 T 的谱辐射亮度（源函数极限）：

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/k_B T) - 1}, \quad (11)$$

$$B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/\lambda k_B T) - 1}. \quad (12)$$

推导要点（光子占据数）

在 TE 中，频率 ν 的电磁模每个自由度平均占据数为

$$\bar{n}_\nu = \frac{1}{\exp(h\nu/k_B T) - 1}. \quad (13)$$

单位体积单位频率的模密度为 $8\pi\nu^2/c^3$ ，每个光子能量 $h\nu$ ，得能量密度

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/k_B T) - 1}. \quad (14)$$

各向同性辐射场中 $u_\nu = 4\pi B_\nu/c$ ，从而得到 B_ν 。

常用极限与积分

- **Rayleigh–Jeans** ($h\nu \ll k_B T$)： $B_\nu \approx 2\nu^2 k_B T / c^2$ 。
- **Wien** ($h\nu \gg k_B T$)： $B_\nu \approx (2h\nu^3/c^2) \exp(-h\nu/k_B T)$ 。
- **Stefan–Boltzmann**： $\int_0^\infty B_\nu d\nu = \sigma T^4 / \pi$ 。
- **Wien 位移**： $\lambda_{\text{peak}} T \approx 2.9 \times 10^{-3} \text{ m K}$ （按 B_λ 峰值）。

天文学意义

普朗克函数是 LTE 下源函数 S_ν 的核心（见第 20 节），也决定了连续谱形状、颜色温度以及临边昏暗的深层原因。

8 吸收系数 (Absorption coefficient)

定义

沿射线方向 s 的辐射转移:

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu I_\nu + j_\nu, \quad (15)$$

其中 α_ν 是吸收系数 (单位 cm^{-1}), 表示单位路径长度上强度的衰减率。

与不透明度、密度的关系

天体物理中常用质量不透明度 (质量吸收/消光系数)

$$\kappa_\nu \equiv \frac{\alpha_\nu}{\rho} \quad [\text{cm}^2 \text{ g}^{-1}], \quad (16)$$

并把总消光拆为

$$\alpha_\nu = \alpha_\nu^{\text{abs}} + \alpha_\nu^{\text{sca}} \iff \kappa_\nu = \kappa_\nu^{\text{abs}} + \kappa_\nu^{\text{sca}}. \quad (17)$$

有时也定义单次相互作用后被“热化”的概率 (热化参数)

$$\epsilon_\nu \equiv \frac{\alpha_\nu^{\text{abs}}}{\alpha_\nu^{\text{abs}} + \alpha_\nu^{\text{sca}}}, \quad (18)$$

它控制了散射主导时源函数对 J_ν 的依赖 (见下一节)。

微观表达

α_ν 可写为“单位体积中吸收体数密度 \times 单个粒子的有效截面”之和:

$$\alpha_\nu = \sum_k n_k \sigma_{\nu,k}, \quad (19)$$

包含束缚-束缚 (线吸收)、束缚-自由 (光致电离/连续吸收)、自由-自由 (制动辐射吸收) 与散射 (常以“散射吸收系数” $\alpha_{\nu,\text{sca}}$ 计入总消光)。

束缚-束缚 (谱线) 吸收的常用写法

对跃迁 $l \rightarrow u$, 用振子强度 f_{lu} 表示的线吸收系数常写为

$$\alpha_\nu^{\text{line}} = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{lu} n_l \left(1 - \frac{g_l n_u}{g_u n_l} \right) \phi(\nu), \quad (20)$$

括号项是受激发射修正 (当布居反转时可为负, 对应受激放大/激射条件)。

天文学意义

α_ν 决定在给定频率处“看见”大气的哪一层 (光学深度 $\tau_\nu \sim 1$), 从而决定连续谱与谱线形成层与对温度/压强/速度场的敏感性。

9 发射系数 (Emission coefficient)

定义

式 (15) 中 j_ν 为发射系数 (单位 $\text{erg s}^{-1} \text{ cm}^{-3} \text{ Hz}^{-1} \text{ sr}^{-1}$), 表示单位体积单位立体角单位频率的自发辐射贡献。

源函数

定义源函数

$$S_\nu \equiv \frac{j_\nu}{\alpha_\nu}. \quad (21)$$

则辐射转移方程可写为

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\alpha_\nu (I_\nu - S_\nu). \quad (22)$$

在 LTE 下（见第 20 节）有 $S_\nu = B_\nu(T)$ (Kirchhoff 定律)。

包含散射时的源函数 (常用近似)

若把“真正吸收”(会与热库交换能量)与“弹性散射”(只改传播方向/频率很小变化)区分开，在各向同性、相干散射近似下，源函数可写成

$$S_\nu = (1 - \epsilon_\nu)J_\nu + \epsilon_\nu B_\nu(T), \quad (23)$$

其中 J_ν 是平均强度， ϵ_ν 为上一节定义的热化参数。这条式子把“辐射场的非局域性”(通过 J_ν)与“局部热化”(通过 B_ν)明确分开，是理解散射主导大气(热星电子散射、强线散射)中谱线源函数行为的核心。

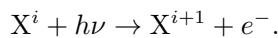
天文学意义

源函数把“微观辐射产生机制”浓缩成一个量：谱线形成(尤其 NLTE)本质上是理解 S_ν 如何偏离 B_ν 。

10 光致电离 (Photoionization)

过程

光子能量 $h\nu$ 大于某能级电离阈值 χ 时：



它属于束缚–自由 (bound-free) 过程，是许多波段连续不透明度的重要来源。

光致电离率 (把辐射场写进来)

对某一初态 k (阈频 ν_0)，光致电离速率(单位 s^{-1})常写为

$$R_{k \rightarrow c} = \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{4\pi J_\nu}{h\nu} \sigma_{\nu,k}^{\text{bf}} d\nu. \quad (24)$$

这显示：即使局部温度不高，只要紫外辐射场 J_ν 强，仍可能发生过电离 (over-ionization)，是许多 NLTE 效应的典型来源。

截面与阈值行为

光致电离截面 σ_ν^{bf} 在阈值 $\nu_0 = \chi/h$ 以上通常随频率下降(氢样近似 $\sigma \propto \nu^{-3}$ 量级)，并可能存在共振结构。

与反过程的关系

反过程为辐射复合 (radiative recombination), 在 TE/LTE 下二者满足详细平衡, 从而保证 Kirchhoff 定律与 Saha 关系一致。

天文学意义

- **连续谱形成:** 例如热星紫外区金属光致电离、冷星可见光区 H⁻ 的光致剥离 (见第 22 节)。
- **电离平衡/NLTE:** 在外层低密度区, 光致电离常主导布居, 导致 Saha 偏离与谱线强度变化。

11 光致激发 (Photoexcitation)

过程

光子诱导从低能级 l 到高能级 u 的跃迁 (束缚-束缚):

$$\text{X}(l) + h\nu \rightarrow \text{X}(u), \quad h\nu = E_u - E_l.$$

对应吸收线的基本机制之一。

爱因斯坦系数与吸收

跃迁概率可用爱因斯坦 B_{lu} 表示; 线吸收系数常写为

$$\alpha_\nu^{\text{line}} = \frac{h\nu}{4\pi} (n_l B_{lu} - n_u B_{ul}) \phi(\nu), \quad (25)$$

其中 $\phi(\nu)$ 是谱线轮廓函数 (见第 24 节), 括号中的差体现受激发射对净吸收的抵消。

天文学意义

光致激发把辐射场与能级布居直接耦合, 是 NLTE 的根源之一: 辐射场由“远处的层”决定, 布居因此具有非局域性。

12 自由-自由吸收 (Free-free / Bremsstrahlung absorption)

过程

自由电子在离子库仑场中散射时吸收/发射光子:

$$e^- + \text{X}^{i+1} + h\nu \rightleftharpoons e^- + \text{X}^{i+1}.$$

它没有阈值 (连续), 在高温、长波 (红外/射电) 往往重要。

基本依赖关系 (量级)

经典近似下自由-自由不透明度随

$$\alpha_\nu^{\text{ff}} \propto n_e n_i T^{-1/2} \nu^{-3} \left(1 - \exp \left[-\frac{h\nu}{k_B T} \right] \right) g_{\text{ff}}, \quad (26)$$

其中 g_{ff} 是 Gaunt 因子 (量子修正, 量级 ~ 1)。

对应的自由–自由发射 (并与 Kirchhoff 对照)

自由–自由发射系数满足 (量级)

$$j_{\nu}^{\text{ff}} \propto n_e n_i T^{-1/2} \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right) g_{\text{ff}}. \quad (27)$$

在 LTE 下可验证 $j_{\nu}^{\text{ff}} = \alpha_{\nu}^{\text{ff}} B_{\nu}(T)$, 这正是 Kirchhoff 定律在具体微观过程上的体现。

天文学意义

- **H II 区/恒星风射电连续谱**: 自由–自由发射与吸收共同决定谱指数。
- **热星大气/色球**: 高温电子使 ff 过程成为重要连续源。

13 光学深度 (Optical depth)

定义

定义沿路径的光学深度

$$d\tau_{\nu} \equiv \alpha_{\nu} ds, \quad \tau_{\nu}(s) = \int_s^{\infty} \alpha_{\nu} ds'. \quad (28)$$

用柱质量 m (见式 (40)) 也常写成

$$d\tau_{\nu} = \kappa_{\nu} dm, \quad (29)$$

强调 “形成深度” 与质量柱密度/不透明度之间的联系。则辐射转移方程 (15) 可写为

$$\frac{dI_{\nu}}{d\tau_{\nu}} = I_{\nu} - S_{\nu} \quad (30)$$

(符号取决于 τ 的积分方向; 上式对应 τ 向外递减的常用约定)。

物理意义: $\tau_{\nu} \sim 1$ 的 “可见层”

τ_{ν} 衡量 “光子被消光的累积概率”。经验上, 某频率的出射辐射主要来自 $\tau_{\nu} \approx 1$ 附近的层 (更深处被强烈吸收、散射, 多次相互作用后才逃逸)。

Eddington–Barbier 近似 (非常常用)

若源函数 $S_{\nu}(\tau_{\nu})$ 随深度变化较平滑, 则形式解可近似为

$$I_{\nu}(0, \mu) \approx S_{\nu}(\tau_{\nu} = \mu), \quad (31)$$

即 “沿方向 μ 的出射强度大致等于光学深度 $\tau_{\nu} = \mu$ 处的源函数”。这条近似把临边昏暗与谱线形成层的直觉联系变成了可计算关系。

天文学意义

τ_{ν} 提供了从几何深度到 “辐射形成深度” 的映射, 使不同频率/谱线的形成层可比较 (连续 vs 线芯 vs 线翼)。

14 光子的自由程 (Mean free path)

定义与关系

光子平均自由程

$$\ell_\nu \equiv \frac{1}{\alpha_\nu}. \quad (32)$$

因此 $\Delta\tau_\nu \sim 1$ 对应的几何尺度约为 ℓ_ν 。

物理意义

ℓ_ν 表示光子在发生一次“相互作用事件”(吸收/散射)前可自由传播的典型距离。外层密度降低导致 α_ν 下降、 ℓ_ν 上升，辐射场更具非局域性 (NLTE 更显著)。

随机游走与扩散近似的尺度

在纯散射 (或强散射) 介质中，光子逃逸近似为随机游走：若从 τ 深处出发，典型相互作用次数 $N \sim \tau^2$ ，总路径长度 $\sim N\ell$ 。这解释了为何深层辐射可用扩散近似描述、而外层辐射则需要完整转移方程。

15 不透明度的微观物理过程 (Opacity microphysics)

总消光与拆分

通常定义总消光系数 (不透明度对应的线性形式)

$$\alpha_\nu = \alpha_\nu^{\text{abs}} + \alpha_\nu^{\text{sca}}. \quad (33)$$

若用质量不透明度 κ_ν (单位 $\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$)，则 $\alpha_\nu = \rho \kappa_\nu$ 。

主要过程清单

- **束缚–束缚 (bound-bound)**: 谱线吸收/发射 (光致激发与受激发射)，决定线谱与线 blanketing。
- **束缚–自由 (bound-free)**: 光致电离与辐射复合，决定连续边 (如 Balmer jump) 与紫外连续不透明度。
- **自由–自由 (free-free)**: 制动辐射吸收/发射，常在红外/射电重要。
- **散射 (scattering)**:
 - **汤姆孙散射** (自由电子): 近似频率无关， $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$ 。
 - **瑞利散射** (束缚电子): $\sigma \propto \lambda^{-4}$ 。
 - **线散射**: 在谱线频率附近的共振散射。
- **分子与尘埃**: 低温大气中分子带与尘埃连续不透明度显著 (晚型星/褐矮)。

天文学意义

不透明度的频率依赖决定温度结构 (反演/增温)、能量在谱上的再分配 (blanketing) 以及不同波段对元素丰度、湍动、重力的敏感性。

16 恒星大气的基本方程组

(1) 辐射转移方程

沿方向余弦 $\mu = \cos \theta$, 用平面平行近似的光学深度坐标 τ_ν :

$$\mu \frac{dI_\nu(\tau_\nu, \mu)}{d\tau_\nu} = I_\nu(\tau_\nu, \mu) - S_\nu(\tau_\nu, \mu). \quad (34)$$

辐射场的角矩: J_ν, H_ν, K_ν

定义角矩 (平面平行)

$$J_\nu \equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(\mu) d\mu, \quad (35)$$

$$H_\nu \equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu I_\nu(\mu) d\mu, \quad (36)$$

$$K_\nu \equiv \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu^2 I_\nu(\mu) d\mu. \quad (37)$$

它们与常用物理量的关系是

$$F_\nu = 4\pi H_\nu, \quad u_\nu = \frac{4\pi}{c} J_\nu, \quad P_{\nu, \text{rad}} = \frac{4\pi}{c} K_\nu. \quad (38)$$

为了从矩方程闭合, 需给出 Eddington 因子 $f_\nu \equiv K_\nu/J_\nu$ (Eddington 近似取 $f_\nu = 1/3$)。

(2) 流体静力平衡 (或动量方程)

静态、平面平行时

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g, \quad (39)$$

或用柱质量 $m \equiv \int_z^\infty \rho dz$ ($dm = -\rho dz$) 写为

$$\frac{dP}{dm} = g. \quad (40)$$

必要时加入辐射压梯度或动压项 (强辐射场、恒星风)。

(3) 能量守恒/辐射平衡

纯辐射平衡时, 总通量 (频率积分) 守恒:

$$F \equiv \int_0^\infty F_\nu d\nu = \sigma T_{\text{eff}}^4 = \text{const.} \quad (41)$$

若有对流, 则总通量 $F = F_{\text{rad}} + F_{\text{conv}}$ 。

辐射平衡的等价 “积分形式”

由 $dH_\nu/d\tau_\nu = J_\nu - S_\nu$ (矩方程) 可得辐射平衡条件等价于

$$\int_0^\infty \alpha_\nu^{\text{abs}} (J_\nu - S_\nu) d\nu = 0. \quad (42)$$

在 LTE 下 $S_\nu = B_\nu(T)$, 上式表示 “单位体积的吸收能量率等于发射能量率” (净加热为零)。

(4) 物态方程与电离/激发

$$P = \frac{\rho}{\mu m_H} k_B T + P_{\text{rad}} + \dots, \quad (43)$$

并结合 Saha (第 7 式)、玻尔兹曼 (第 10 式) 或更一般的统计平衡方程 (NLTE)。

统计平衡 (NLTE 的核心方程)

若不强制 Saha/玻尔兹曼, 能级布居由统计平衡决定:

$$\sum_{j \neq i} n_j P_{ji} = n_i \sum_{j \neq i} P_{ij}, \quad (44)$$

其中 $P_{ij} = R_{ij} + C_{ij}$ 是从 $i \rightarrow j$ 的总跃迁率 (辐射 R 与碰撞 C)。这套方程与辐射转移方程 (34) 强耦合, 构成 NLTE 大气模型的计算难点。

(5) 化学组成与电中性

给定元素丰度, 满足电中性 $\sum_i Z_i n_i = n_e$, 并与分子平衡 (低温) 耦合。

边界条件 (常用)

- **外边界:** 入射辐射 $I_\nu(\tau_\nu = 0, \mu < 0) \approx 0$ 。
- **深层:** 扩散近似 $I_\nu \approx B_\nu + \mathcal{O}(\tau_\nu^{-1})$ 。

17 灰大气模型 (Grey atmosphere model)

基本假设

- **灰不透明度:** 质量不透明度 κ_ν 取为常数 κ (与频率无关)。
- **平面平行、静态、辐射平衡:** $F = \sigma T_{\text{eff}}^4$ 常数。
- **LTE:** 源函数 $S_\nu = B_\nu(T)$ 。
- **闭合近似:** 常用 Eddington 近似 $K = \frac{1}{3}J$ 。

灰大气是理解温度结构、临边昏暗的最小模型, 也是更复杂 NLTE/非灰模型的参照。

Rosseland 平均与“灰深度”

在深层扩散近似下, 能量输运更接近“按温度梯度加权的频率平均”。因此常定义 Rosseland 平均不透明度:

$$\frac{1}{\kappa_R} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu}. \quad (45)$$

并以 $d\tau \equiv \kappa_R dm$ 定义 Rosseland 光学深度 τ 。灰大气模型把 κ_ν 近似为常数, 相当于 κ_R 也为常数, 从而频率积分的方程可以用单一 τ 描述。

频率积分后的矩方程

对 (34) 取角矩并频率积分, 得到 (略去推导细节):

$$\frac{dH}{d\tau} = J - S, \quad (46)$$

$$\frac{dK}{d\tau} = H, \quad (47)$$

其中 τ 为 Rosseland 光学深度 (灰模型下与频率无关), 并且在辐射平衡且 LTE 下 $S = J$, 因此

$$\frac{dH}{d\tau} = 0 \Rightarrow H = \text{const.} \quad (48)$$

通量 $F = 4\pi H$ 常数。

18 灰大气模型的温度分布

Eddington 近似推导

在 LTE 与辐射平衡下, 频率积分源函数 $S = \int S_\nu d\nu \equiv B = \sigma T^4/\pi$, 并有 $J = S = B$ 。由矩方程 $dK/d\tau = H$ 积分得

$$K(\tau) = H\tau + C. \quad (49)$$

Eddington 近似给出 $K = \frac{1}{3}J = \frac{1}{3}B$, 从而

$$\frac{1}{3}B(\tau) = H\tau + C. \quad (50)$$

将 $H = F/(4\pi) = \sigma T_{\text{eff}}^4/(4\pi)$ 、 $B = \sigma T^4/\pi$ 代入:

$$\frac{1}{3}\frac{\sigma T^4}{\pi} = \frac{\sigma T_{\text{eff}}^4}{4\pi}\tau + C. \quad (51)$$

两边乘以 π/σ :

$$\frac{1}{3}T^4 = \frac{1}{4}T_{\text{eff}}^4\tau + C', \quad (52)$$

即

$$T^4(\tau) = \frac{3}{4}T_{\text{eff}}^4(\tau + q), \quad (53)$$

其中常数 q 由边界条件确定。

表面边界条件与 $q = 2/3$

采用 Eddington 边界条件 (半空间、外边界无入射), 可得 $J(0) = 2H$, 即

$$\frac{1}{3}J(0) = \frac{2}{3}H.$$

又 $K(0) = \frac{1}{3}J(0)$, 而 $K(0) = C$, 故 $C = \frac{2}{3}H$, 对应 $q = 2/3$ 。因此灰大气的经典温度结构为

$$T^4(\tau) = \frac{3}{4}T_{\text{eff}}^4\left(\tau + \frac{2}{3}\right). \quad (54)$$

天文学意义

- **形成深度:** 连续谱的出射辐射大致采样 $\tau \sim 1$ 附近, 从而 $T(\tau \sim 1) \approx 1.06 T_{\text{eff}}$ 。
- **临边昏暗:** 由于不同 μ 看到不同 τ 层, 温度随 τ 递增导致中心更亮 (见下一节)。
- **局限:** 真实大气是非灰的, κ_ν 变化会引起温度反演、线 blanketing 等。

19 太阳临边昏暗现象 (Limb darkening)

现象与直观解释

太阳圆盘中心比边缘更亮：边缘视线倾斜（小 μ ）时，光程更长、更容易在较高更冷的层达到 $\tau_\nu \sim 1$ ，因此出射强度更小。

从形式解出发

平面平行下的出射强度（ $\tau = 0$ 处， $\mu > 0$ ）满足形式解：

$$I_\nu(0, \mu) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty S_\nu(\tau_\nu) \exp\left(-\frac{\tau_\nu}{\mu}\right) d\tau_\nu. \quad (55)$$

若 S_ν 随深度单调增大（通常由温度递增导致），则小 μ 的指数权重 $\exp(-\tau/\mu)$ 更偏向浅层，从而 $I_\nu(0, \mu)$ 更小。

Eddington-Barbier 直觉：为何“看到的是 $\tau_\nu \approx \mu$ 的层”

把源函数在 $\tau_\nu = \mu$ 附近做一阶展开并代入 (55)，可得近似

$$I_\nu(0, \mu) \approx S_\nu(\tau_\nu = \mu), \quad (56)$$

因此临边昏暗强弱直接由 $S_\nu(\tau_\nu)$ (LTE 下近似 $B_\nu[T(\tau_\nu)]$) 的梯度控制。由于 κ_ν 随波长变化， $\tau_\nu = \mu$ 对应的几何高度也随波长变化，因此临边昏暗具有显著的波长依赖（通常蓝光更强）。

灰大气的一个解析例子（频率积分）

在灰大气中 $S = B \propto T^4 \propto (\tau + 2/3)$ ，因此可近似取

$$S(\tau) = S_0 + S_1 \tau, \quad (57)$$

代入 (55) 并积分可得线性临边昏暗形式（频率积分后）：

$$I(0, \mu) \propto \left(\mu + \frac{2}{3}\right), \quad \Rightarrow \quad \frac{I(0, \mu)}{I(0, 1)} \approx \frac{\mu + 2/3}{1 + 2/3}. \quad (58)$$

真实太阳的临边昏暗系数随波长变化（蓝光更强），需要非灰不透明度与真实温度梯度描述。

天文学意义

临边昏暗影响凌星光变曲线、恒星半径与行星参数反演；也影响干涉测量的可见度函数与“角直径”定义。

20 局部热动平衡大气模型 (LTE)

定义

LTE 假设：物质在每一点的微观布居由局部温度 $T(\mathbf{r})$ 决定（Saha+ 玻尔兹曼成立），并且满足 Kirchhoff 定律：

$$S_\nu = B_\nu(T). \quad (59)$$

但 辐射场不必是黑体： $J_\nu \neq B_\nu$ 可以成立。

成立条件（经验）

- 碰撞过程足够频繁，使能级布居主要由碰撞热化决定（高密度、较深层）。
- 光子平均自由程较短，辐射场更“局域”。

何时失效（NLTE）

在外层低密度、强辐射场（紫外）或稀薄等离子体中，辐射跃迁率可超过碰撞率，导致过电离、源函数偏离普朗克函数等 NLTE 效应，从而显著改变谱线强度与轮廓。

21 氢原子模型

氢样能级与简并度

在忽略精细结构与外场的最简模型中：

$$E_n = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (60)$$

主量子数 n 的简并度（含自旋）为 $g_n = 2n^2$ 。跃迁频率由能级差决定，形成 Lyman（到 $n = 1$ ）、Balmer（到 $n = 2$ ）等谱系。

选择定则与谱线

电偶极跃迁满足 $\Delta\ell = \pm 1$ 等选择定则。实际谱线还受精细结构、超精细结构、外场（Zeeman/Stark）与碰撞展宽影响。

在恒星大气中的角色

- 热星：** 氢 Balmer 线翼对电子压强敏感，可用于测 g 。
- 连续边：** Balmer 跃迁与 Lyman 连续强烈影响紫外/蓝端能量分布。
- 等离子体参量：** 氢是最重要的电子供体与碰撞伙伴之一，影响 n_e 与不透明度。

22 连续吸收的来源

主要连续不透明度机制

- H⁻ 连续**（晚型星可见光主导）：
 - 束缚-自由：** H⁻ + hν → H + e⁻（光致剥离）。
 - 自由-自由：** H + e⁻ + hν → H + e⁻（H⁻ ff）。
- HI/HeI/HeII 的束缚-自由：** 形成 Lyman/Balmer/Paschen 等连续边，热星紫外非常重要。
- 自由-自由（电子-离子）：** 红外/射电、热等离子体重要。
- 电子散射：** 热星与高光度星中可成为重要灰散射源。
- 分子与尘埃：** 低温大气（M 型、褐矮）中分子连续/准连续与尘埃吸收显著。

为何 H⁻ 如此关键 (晚型星)

虽然 H⁻ 丰度不高, 但在 $\sim 0.3\text{--}1.6 \mu\text{m}$ 具有较大的连续截面; 并且晚型星光球层温度/电子密度条件使 H⁻ 易形成, 从而主导可见光连续谱, 直接决定 T_{eff} 标定与颜色。

23 吸收线的产生机制

基本图景

当某频率处存在束缚-束缚跃迁的强吸收 (α_{ν} 在该频率显著增大) 时, $\tau_{\nu} \sim 1$ 的形成层被“抬到”更高、更冷的层, 导致该频率的出射强度 (或通量) 低于连续谱, 形成吸收线。

线源函数与 NLTE

在线频率处源函数一般为

$$S_{\nu}^{\text{line}} = \frac{j_{\nu}^{\text{line}}}{\alpha_{\nu}^{\text{line}}}, \quad (61)$$

在 LTE 下 $S_{\nu}^{\text{line}} = B_{\nu}(T)$, 吸收线强度主要由不透明度增强与温度梯度决定; 在 NLTE 下 S_{ν}^{line} 可偏离 B_{ν} , 出现线核填充、反转甚至发射线。

天文学意义

谱线的深度与形状编码了元素丰度、温度结构、压力 (展宽)、速度场 (多普勒位移/不对称) 与磁场 (塞曼分裂)。

24 谱线轮廓 (Line profile)

轮廓函数的定义与归一化

把线吸收系数写为

$$\alpha_{\nu}^{\text{line}} = \alpha_0 \phi(\nu), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\nu) d\nu = 1, \quad (62)$$

$\phi(\nu)$ 描述吸收在频率上的分布。常用变量

$$u \equiv \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D}$$

把频率偏移无量纲化。

热运动导致的多普勒 (高斯) 轮廓

若吸收原子速度分量服从 Maxwell 分布, 则频率偏移服从高斯:

$$\phi_D(\nu) = \frac{1}{\Delta\nu_D \sqrt{\pi}} \exp \left[- \left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D} \right)^2 \right], \quad (63)$$

其中多普勒宽度

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_0}{c} \sqrt{\frac{2k_B T}{m} + \xi_{\text{turb}}^2}, \quad (64)$$

可加入微湍动速度 ξ_{turb} 。

自然展宽与碰撞展宽 (洛伦兹翼)

有限寿命导致能级不确定性 (自然展宽), 碰撞导致相位扰动 (压强展宽), 二者常合并为阻尼常数 Γ :

$$\phi_L(\nu) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(\nu - \nu_0)^2 + \gamma^2}, \quad \gamma \equiv \frac{\Gamma}{4\pi}. \quad (65)$$

25 等值宽度 (Equivalent width)

定义

以连续谱通量 F_c 为基准, 等值宽度定义为 “与谱线吸收等面积的矩形宽度”:

$$W_\lambda \equiv \int \left(1 - \frac{F_\lambda}{F_c}\right) d\lambda. \quad (66)$$

若用强度也可定义 $W_\lambda = \int (1 - I_\lambda/I_c) d\lambda$ (需明确是通量还是强度)。

物理意义

W_λ 将谱线 “深度 + 宽度” 的信息压缩成一个标量, 对分辨率与展宽细节相对不那么敏感, 因此常用于丰度分析与曲线增长 (curve of growth)。

曲线增长的三段

- 弱线 (线性段): $\tau_0 \ll 1$, $W \propto N$ (吸收原子柱密度/丰度)。
- 饱和段: 线芯饱和, 增加 N 主要增加宽度, 增长变慢 (对微湍动敏感)。
- 阻尼翼段: 洛伦兹翼贡献主导, W 再次加速增长 (对压强展宽敏感)。

26 谱线致宽机制 (Line broadening mechanisms)

(1) 热多普勒展宽

由粒子热运动产生, 尺度 $\Delta\nu_D \propto \sqrt{T/m}$, 轻元素线更宽。

(2) 湍动展宽 (微/宏湍动)

- 微湍动: 尺度小于光子平均自由程, 进入局部吸收系数, 等效增加 $\Delta\nu_D$ 。
- 宏湍动: 尺度大于形成区, 主要通过对最终谱线的速度场卷积改变轮廓, 不改等值宽度 (理想化下)。

(3) 自然展宽

由激发态寿命 τ 有限, $\Gamma_{\text{nat}} \sim 1/\tau$, 形成洛伦兹线翼但通常线芯不主导 (除极窄线/低温低压)。

(4) 压强 (碰撞) 展宽

与粒子密度相关, 常见:

- van der Waals 展宽: 中性粒子碰撞 (晚型星重要)。
- Stark 展宽: 电子/离子电场扰动 (热星、Balmer 线翼尤重要)。

(5) 自转、脉动与大尺度速度场

自转产生典型“旋转轮廓”并导致线展宽；径向速度场（风、脉动、对流）会造成线的不对称、位移与分裂（P Cygni 等）。

(6) 仪器展宽

由光谱仪线扩散函数（LSF）决定，观测谱线是天体真实谱线与 LSF 的卷积。

27 Voigt 轮廓 (Voigt profile)

定义：高斯与洛伦兹的卷积

实际谱线往往同时受多普勒与阻尼展宽，轮廓为卷积：

$$\phi_V(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_D(\nu') \phi_L(\nu - \nu') d\nu'. \quad (67)$$

用无量纲变量

$$u = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D}, \quad a = \frac{\gamma}{\Delta\nu_D}$$

可写为

$$\phi_V(\nu) = \frac{1}{\Delta\nu_D \sqrt{\pi}} H(a, u), \quad (68)$$

其中 Voigt 函数

$$H(a, u) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-y^2)}{(u - y)^2 + a^2} dy = \operatorname{Re}[w(u + ia)] \quad (69)$$

(w 为 Faddeeva 函数)。

近似行为

- 线芯： $|u| \lesssim 1$ 时接近高斯；
- 线翼： $|u| \gg 1$ 时呈洛伦兹翼 $H \sim a/(\sqrt{\pi}u^2)$ 。

天文学意义

Voigt 轮廓是大气谱线合成的标准输入：线芯诊断温度/微湍动与速度场，线翼诊断压强（重力）与碰撞物理；对高分辨率丰度分析与线形成深度判读至关重要。