**ARMA谱估计实验**

**Reproduce ARMA**

唐辉1

rgbtangh@gmail.com

西南科技大学

特殊环境机器人技术四川省重点实验室

在工程应用中，利用观测到的一组样本数据估计并分析一个平稳随机信号的功率谱密度十分重要。例如在雷达信号处理中，由回波信号的功率谱密度、谱峰的宽度、高度和位置，确定目标的位距离和运动速度；在阵列信号处理中，空间功率谱描述了信号功率随空间角度的分布情况。在信号处理应用中，谐波过程对应的功率谱为线谱，谐波过程的功率谱估计确定谐波的个数、频率和功率，即合称谐波恢复具有重要意义。实验相关代码将开源在：

*https://github.com/astontang/AMRA*

**ARMA谱估计原理**

多数平稳随机过程都可以通过用白噪声激励线性时不变系统来产生，而线性系统又可以用线性差分方程进行描述，这种差分模型就是自回归—滑动平均模型。而且，任何一个有理式的功率谱密度都可以用一个随机过程的功率谱密度精确逼近。随机过程定义为服足下

列线性差分方程的离散随机过程：



式中是一离散白噪声；上式所示的差分方程称为模型，系统…和…分别称为自回归参数和滑动平均参数，而和分别叫做阶数和阶数。过程可以简记为使用移位算子可以把它写作如下形式：

 （2）

其中：





若，则平过程的功率谱密度为：

（3）

用（3）式进行谱估计必须事先辨识ARMA 模型和激励噪声的方差2，而MA参数的估计需要求解非线性方程。为了避开非线性运算，Cadzow提出了一种线性谱估计子：

（4）

 （5）

（6）

其中为的协方差函数。因此用Cadzow谱估计子只需要确定AR阶数和AR参数就能进行ARMA谱估计。

**实验内容**

仿真的观测数据由下式给出：



其中是一列高斯白噪声n=0,1,2…128。进行如下各项实验：

1、取AR阶数分别为4和6，用最小二乘法估计AR参数，然后使用Cadzow谱估计子进行功率谱估计，并试根据该谱确定谐波频率；

2、假定AR阶数未知，用SVD-TLS方法确定AR阶数和参数，然后使用Cadzow谱估计子进行功率谱估计，并试根据该谱确定谐波频率；

3、用ZHANG方法确定MA阶数，用Kaveh谱估计子进行功率谱估计，用Newton-Raphson方法估计MA参数，结合4、确定ARMA模型，计算ARMA功率谱，并试根据该谱确定谐波频率；

5、用ARMA建模谐波恢复方法确定谐波频率；

6、用MUSIC方法确定谐波频率；

7、用LS-ESPRIT方法确定谐波频率；

8、用TLS-ESPRIT方法确定谐波频率。

**实验过程**

1、编写基于最小二乘法和Cadzow谱估计子的计算机仿真程序lsestimate.m，独立运行程序5次，表1给出了频率的估计数据。从表中数据可以看出第三次程序运行效果比较理想，图1所示的是这次仿真得到的功率谱估计结果。

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| AR阶数 | MA阶数 | 第  1  次 | 第  2  次 | 第  3  次 | 第  4  次 |
| 4 | 5 | 0.203 | 0.289 | 0.203 | 0.203 |
| 4 | 6 | 0.203 | 0.312 | 0.203 | 0.203 |
| 4 | 7 | 0.203 | 0.195 | 0.203 | 0.203 |
| 4 | 8 | 0.203 | 0.195 | 0.203 | 0.203 |
| 6 | 7 | 0.203 | 0.203 | 0.203 | 0.257 |
| 6 | 8 | 0.195 | 0.195 | 0.203 | 0.203 |
| 6 | 9 | 0.203 | 0.195 | 0.203 | 0.203 |
| 6 | 10 | 0.203 | 0.203 | 0.203 | 0.195 |

表1 LS法+Cadzow估计子得到的频率估计数据

取出奇点0.312，0.289，0.257后，计算数据计算方差和均值得到： 均值：m=0.201 方差：s=0.003

2、编写用SVD-TLS方法确定AR阶数和参数，ZHANG方法确定MA阶数，Newton-Raphson方法估计MA参数，用Cadzow谱估计子，Kaveh谱估计子，ARMA模型三种方法估计功率谱的程序svdtls.m(代码见附录2)。表2给出了独立运行计算机仿真程序20次的结果。图2给出了程序第二次运行和第十八次运行得到的用三种方法估计的功率谱。 去除奇点计算数据均值和方差： 均值：m\_Cadzow=0.2008, m\_ARMA=0.2013, m\_Kaveh=0.2013 方差：s\_Cadzow=0.0032,

s\_ARMA=0, s\_Kaveh=0

图1 AR阶数为4时 LS+Cadzow谱估计子估计功率谱

图1-1 AR阶数为6 LS+CadzowCadzow谱估计子估计功率谱

实验过程中发现的第一个问题是，LS估计的数值稳定性不如TLS。LS方法估计的结果出现歧点的频率比较高，而TLS方法后频率估计只出现一次歧点。在实验程序中增加三种试验：1、减少噪声的影响（将噪声电平减少十倍），发现这样对LS法的数值稳定性改变很小；2、把样本数量增加一倍后，运行结果出现歧点的次数明显减少。分析原因，是因为样本数量的增加提高自相关矩阵估计的精确度，因为LS法中使用的矩阵R理论上是满秩的，但自相关函数计算所使用的估计子是渐进无偏估计，加上噪声的影响，可能导致矩阵R亏缺，致使最终结果的不稳定，所以大样本可提高估计准确度；3、增大eq，估计错误率的提高，使用MYW方程时，eq选择（即方程组选择的起点）理论上只要大于实际的q值就能进行准确估计，但实验结果并非如此，究其原因还是跟自相关函数估计子有关，因为随着数据间隔的增加，实际参加计算的样本数在减少，而自相关函数估计子中使用的样本数N是不变的，所以当自相关函数偏离零点越远是，估计值就越小于实际值，而且受噪声的影响就越大。

图2 TLS+Cadzow估计子+Kaveh估计子+ARMA得到的功率谱

TLS法的合理的原因就在于同时考虑了MYW方程中样本相关矩阵的误差和方程右边样本相关向量的误差（LS法中只认为方程右边样本相关向量含有误差），也就是考虑了总体的误差，实验结果也证明了这么做的合理性。在后面ARMA建模或TLS-ESPRIT谐波恢复方法的应用中也证明了TLS这种合理性，可以看出TLS-ESPRIT估计的频率偏差和方差明显优于LS-ESPRIT得到的结果。

图3 AR4 MA2 MUSIC 方法得到的谱

图4 AR5 MA2 MUSIC 方法得到的谱

**总结**

程序编写中发现阈值的取法并没有固定的标准，教材上给出阈值的例子在实验中计算效果并不很理想，所以阈值应该针对特点的问题来选取，本实验中确定阈值的方法是：先运行几次程序，观察实验数据，选择一个可行的数作为阈值，然后经过多次尝试调整之后取定的。