Отчет по лабораторной работе №2

Задача о погоне. (Вариант 70)

Кроз Елена Константиновна | НФИбд-02-18

Содержание

Цель работы 1
Задание 1
Выполнение лабораторной работы 1
    Условие задачи 4
    Решение 4
Выводы 5

Цель работы

Приведем один из примеров построения математических моделей для выбора правильной стратегии при решении задач поиска. Например, рассмотрим задачу преследования браконьеров береговой охраной. На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии k км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в n раза больше скорости браконьерской лодки. Необходимо определить по какой траектории необходимо двигаться катеру, чтоб нагнать лодку.

Задание

1. Провести необходимые рассуждения и вывод дифференциальных уравнений, если скорость катера больше скорости лодки в n раз.
2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Определить по графику точку пересечения катера и лодки.

Выполнение лабораторной работы

Принимаем за $t_0 = 0, X_0 = 0$ - место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, $X_0 = k$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров $x_0 = 0(\theta = x_0 = 0)$, а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны.

Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x, а катер $x - k$ (или $x + k$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{x+k}{v}$ (для второго случая $\frac{x-k}{v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояние можно найти из следующего уравнения: $\frac{x}{v} = \frac{x+k}{v}$ - в первом случае, $\frac{x}{v} = \frac{x-k}{v}$ во втором случае.

Отсюда мы найдем два значения x_1 и x_2, задачу будем решать для двух случаев.

$x_1 = \frac{k}{n+1}$,при $\theta = 0$

$x_2 = \frac{k}{n-1}$,при $\theta = -\pi$

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и v_t- тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса $v_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $v = \frac{dr}{dt}$. Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ на радиус r, $vr = r\frac{d\theta}{dt}$ Найдем тангенциальную скорость для нашей задачи $v_t = r\frac{d\theta}{dt}$. Вектора образуют прямоугольный треугольник, откуда по теореме Пифагора можно найти тангенциальную скорость $v_t = \sqrt{n^2 v_r^2 - v^2}$. Поскольку, радиальная скорость равна v, то тангенциальную скорость находим из уравнения $v_t = \sqrt{n^2 v^2 - v^2}$. Следовательно, $v_\tau = v\sqrt{n^2 - 1}$.

Тогда получаем $r\frac{d\theta}{dt} = v\sqrt{n^2 - 1}$

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = v \\ r\dfrac{d\theta}{dt} = v\sqrt{n^2 - 1} \end{cases}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = \dfrac{k}{n+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = \dfrac{k}{n-1} \end{cases}$$

Исключая из полученной системы производную по t, можно перейти к следующему уравнению: $\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{n^2-1}}$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах. Теперь, когда нам известно все, что нам нужно, построим траекторию движения катера и лодки для двух случаев.

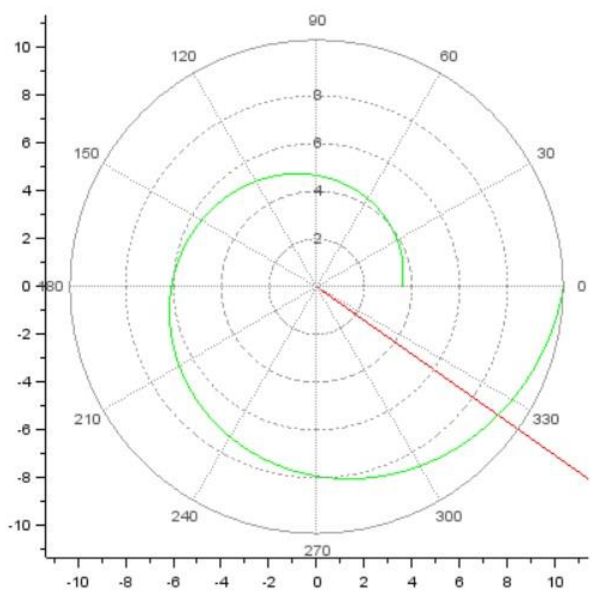
```
//Вариант 70. По условию n - разница в скорости катера и лодки. k - начальное расстояние между катером и лодкой
n=6.0;
k=25.0;
fi=3*%pi/4;

//функция, описывающая движение катера береговой охраны
function dr=f(tetha, r)
dr=r/sqrt(n*n-1);
endfunction;



//функция, описывающая движение лодки браконьеров
r0=k/(n+1);
tetha0=0;
tetha=0:0.01:2*%pi;
r=ode(r0,tetha0,tetha,f);



function xt=f2(t)
    xt=cos(fi)*t;
endfunction
t=0:1:800;
plot2d(t,f2(t),style = color('red')); //построение траектории движения браконьерской лодки
polarplot(tetha,r,style = color('green'));  //построение траектории движения катера в полярных координатах

//Построение второго случая

r0=k/(n-1);
tetha0=-%pi;
figure();
r=ode(r0,tetha0,tetha,f);
```

```
plot2d(t,f2(t),style = color('red')); //построение траектории движения браконьерской лодки
polarplot(tetha,r,style = color('green')); //построение траектории движения катера в полярных координатах
```

Условие задачи

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 25 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 6 раза больше скорости браконьерской лодки

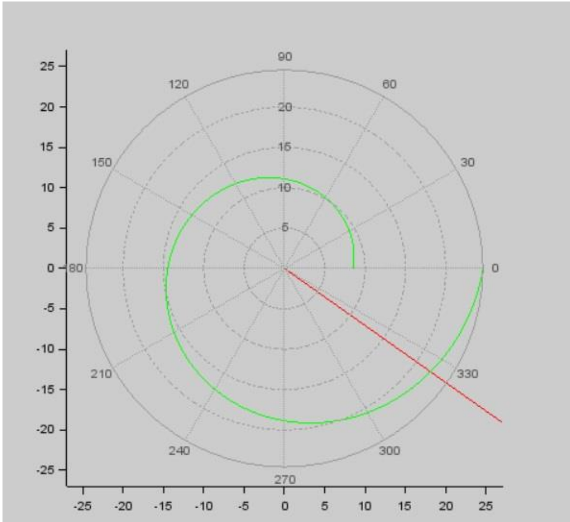
Решение



траектории для случая 1

Точка пересечения красного и зеленого графиков - точка пересечения катера и лодки, исходя из графика, имеет параметры

$$\begin{cases} \theta = 325 \\ r = 9 \end{cases}$$



траектории для случая 2

Точка пересечения красного и зеленого графиков - точка пересечения катера и лодки, исходя из графика, имеет параметры

$$\begin{cases} \theta = 325 \\ r = 22 \end{cases}$$

Наблюдаем, что при погоне «по часовой стрелке» для достижения цели потребуется пройти значительно меньшее расстояние.

Выводы

В ходе лабораторной работы я рассмотрела и смоделлировала задачу о погоне, провела анализ и вывод дифференциальных уравнений.