TD N°3 : Bibliothèques numpy et matplotlib

Ahmed Ammar (ahmed.ammar@fst.utm.tn)

Institut Préparatoire aux Études Scientifiques et Techniques, Université de Carthage.

Mercredi, 5 décembre 2018

Table des matières

Exercise 1 : Tracer une fonction

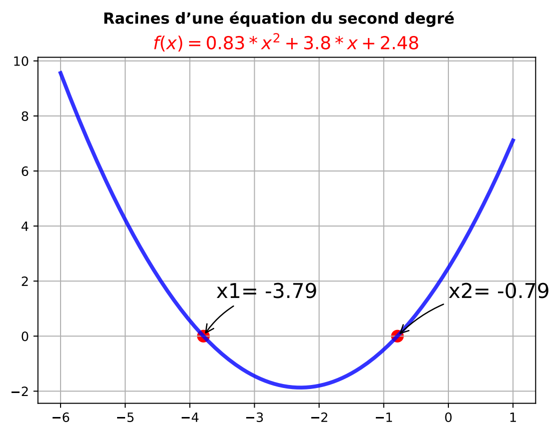
Ecrivez un programme qui trace la fonction $g(y) = e^{-y} sin(4y)$ pour $y \in [0, 4]$ en utilisant une ligne continue rouge. Utilisez 500 intervalles pour évaluer les points dans [0,4]. Stockez toutes les coordonnées et les valeurs dans des tableaux. Placez le texte des graduations sur les axes et utilisez le titre "Onde sinusoïdale atténuée".

Exercise 2 : Tracer deux fonctions

Comme Exercice 1, mais ajouter une courbe en pointillé noir pour la fonction $h(y) = e^{-\frac{3}{2}y} sin(4y)$. Inclure une légende pour chaque courbe (avec les noms g et h).

Exercise 3 : Racines d'une équation du second degré

Dans l'"application de l'exercice 4 dans TD N°2, nous avons montré la représentation graphique d'une équation du second degré $f(x) = 0.83x^2 + 3.8x + 2.48$ ainsi que ses racines réelles :



Reproduire ce graphique en utilisant la fonction `EqSecondDegree(a,b,c)` du script Python `racines.py` pour déterminer les valeurs des racines x1 et x2 de l'équation $f(x)$.

Exercise 4 : Approximer une fonction par une somme de sinus

Nous considérons la fonction constante par morceaux :

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T/2, \\ 0, & t = T/2, \\ -1, & T/2 < t \leq T \end{cases} \tag{1}$$

On peut approcher f(t) par la somme :

$$S(t; n) = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2i-1} \sin\left(\frac{2(2i-1)\pi t}{T}\right) \tag{2}$$

On peut montrer que $S(t; n) \to f(t)$ quand $n \to \infty$

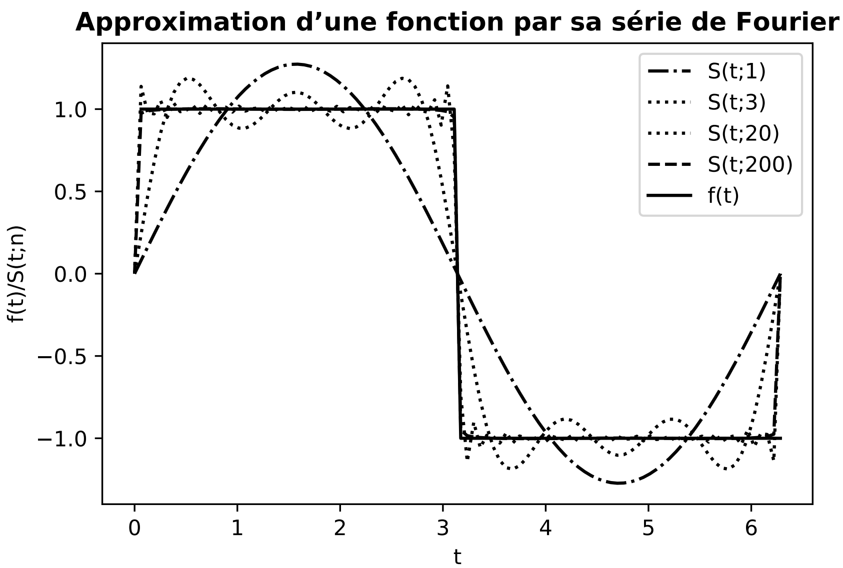
a) Ecrivez une fonction Python `S(t, n, T)` pour renvoyer la valeur de $S(t; n)$.

b) Ecrivez une fonction Python `f(t, T)` pour calculer $f(t)$.

c) Créer un tableau `t` à l'aide de la fonction `linspace`, du module `numpy`, pour `100` valeurs `t` uniformément espacés dans [0, T]. On prendra $T = 2\pi$.

d) Remplir une liste `F` par les valeurs de `f(ti,T)` avec $ti \in t$. Transformer la liste `F` en un tableau (nous voulons avoir un tableau pour la fonction $f(t)$ avec $t \in [0, T]$ et $T = 2\pi$).

e) Tracer $S(t;1)$, $S(t;3)$, $S(t;20)$, $S(t;200)$ et la fonction exacte $f(t)$ dans le même graphique. Le résultat devrait être similaire au graphique ci-dessous.



f) Quelle est la relation entre la qualité de l'approximation et le choix de la valeur de `n` ?

Exercise 5 : Fonctions spéciales (intégrales de Fresnel et spirale de Cornu)

Les intégrales de Fresnel ont été introduites par le physicien français Augustin Fresnel (1788-1827) lors de ses travaux sur les interférences lumineuses (voici un article intéressant à lire : Fresnel, des Mathématiques en Lumière).

Ces intégrales doivent être calculées numériquement à partir des développements en série des intégrales :

$$\int_0^x e^{-i\frac{\pi t^2}{2}} dt = \int_0^x cos(t^2)dt - i\int_0^x sin(t^2)dt = C(x) - iS(x)$$

Les fonctions de Fresnel sont des fonctions spéciales, définies par :

Pour $x \geq \sqrt{\frac{8}{\pi}}$

$$C(x) = \frac{1}{2} + \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) gg1 + \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) ff1$$

$$S(x) = \frac{1}{2} - \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) ff1 + \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) gg1$$

et pour $0 \leq x < \sqrt{\frac{8}{\pi}}$

$$C(x) = \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) gg2 + \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) ff2$$
$$S(x) = -\cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) ff2 + \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) gg2$$

Où :

$$ff1 = \sum_{n=0}^{11} \frac{d_n}{x^{2n+1}} \left(\frac{8}{\pi}\right)^{n+1/2} \quad gg1 = \sum_{n=0}^{11} \frac{c_n}{x^{2n+1}} \left(\frac{8}{\pi}\right)^{n+1/2}$$
$$ff2 = \sum_{n=0}^{11} b_n x^{2n+1} \left(\frac{\pi}{8}\right)^{n+1/2} gg2 = \sum_{n=0}^{11} a_n x^{2n+1} \left(\frac{\pi}{8}\right)^{n+1/2}$$

et a_n, b_n, c_n et d_n sont des coefficients tabulés (*J.Boersma Math Computation 14,380(1960)*) et donnés dans un fichier **coef.dat** :

```
#-----------------------------------------------
#    an            bn           cn           dn
#-----------------------------------------------
+1.595769140 -0.000000033 -0.000000000 +0.199471140
-0.000001702 +4.255387524 -0.024933975 +0.000000023
-6.808568854 -0.000092810 +0.000003936 -0.009351341
-0.000576361 -7.780020400 +0.005770956 +0.000023006
+6.920691902 -0.009520895 +0.000689892 +0.004851466
-0.016898657 +5.075161298 -0.009497136 +0.001903218
-3.050485660 -0.138341947 +0.011948809 -0.017122914
-0.075752419 -1.363729124 -0.006748873 +0.029064067
+0.850663781 -0.403349276 +0.000246420 -0.027928955
-0.025639041 +0.702222016 +0.002102967 +0.016497308
-0.150230960 -0.216195929 -0.001217930 -0.005598515
+0.034404779 +0.019547031 +0.000233939 +0.000838386
```

Écrire un programme Python qui calcule les fonctions de Fresnel $C(x)$ et $S(x)$ ainsi que leurs représentations graphiques :

a) Définir les fonctions `ff1(x)`, `gg1(x)`, `ff2(x)` et `gg2(x)`. Chaque fonction renvoie la valeur de la somme qui lui correspond.

b) Définir les fonctions Python `C(x)` et `S(x)` qui renvoient respectivement les listes, les valeurs de $C(x)$ et $S(x)$, `CF` et‘ SF‘ (en utilisant une boucle `for` pour remplir les listes par exemple).

c) Créer des tableaux `an`, `bn`, `cn` et `dn` à partir du fichier **coef.dat**.

d) Créer un tableau `x`. Utilisez 800 intervalles pour évaluer les points dans [0,10] (cas où $x \geq 0$).

e) Transformer `C(x)` et `S(x)` en tableaux `numpy`, respectivement `CF` et `SF`.

f) Tracer une grille de figures à 2 colonnes (voir Cours3 : Vues en grille) dont le graphique de gauche représente `CF` et `SF` en fonction de `x` et le graphique de droite représente une clothoïde (ou spirale de Cornu, ou Spirale de Fresnel..)‘SF‘ en fonction de `CF`. La sortie de ce programme devrait être comme suit :