Contrôle continu : Devoir Surveillé N°2

Ahmed Ammar (ahmed.ammar@fst.utm.tn)

Institut Préparatoire aux Études Scientifiques et Techniques, Université de Carthage.

11 Décembre 2019

Exercise 1 : Équation de récurrence (3 points)

Soit la relation de récurrence suivante :

$$x^{k+2} = 2x^{k+1} - 3x^{k} \ pour \ k \geq 0 \ et \ x^0 = 1, \ x^1 = 2$$

Calculer et afficher les 10 premiers termes de cette relation sous la forme :

```
x^2 = 1
x^3 = -4
x^4 = -11
x^5 = -10
x^6 = 13
x^7 = 56
x^8 = 73
x^9 = -22
x^10 = -263
x^11 = -460
```

Exercise 2 : Calculer une somme (3 points)

a) Le code suivant est supposé calculer la somme $s = \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{k}$

```
s = 0;  k = 1;  M = 100
while k < M:
    s += 1/k
print(s)
```

Ce programme ne fonctionne pas correctement. Quelles sont les deux erreurs ? (si vous essayez d'exécuter le programme, rien ne se passera à l'écran). Écrivez un programme correct.

b) Réécrivez la version corrigée du programme en **a)** en utilisant une boucle `for` sur `k` valeurs au lieu d'une boucle `while`.

Exercise 3 : Générer des coordonnées équidistantes (4 points)

Nous voulons générer $n+1$ coordonnées x équidistantes dans $[a, b]$. Stocker, pour `a = -2` ; `b = 3` et `n= 20` les coordonnées x dans une liste `xList`.

a) Définir toutes les variables puis utiliser une boucle **for** et ajouter chaque coordonnée à la liste `xList` (*initialement vide*).

Indication. Avec n intervalles, correspondant à $n+1$ points, dans $[a, b]$, chaque intervalle a une longueur $h = (b-a)/n$. Les coordonnées peuvent alors être générées par la formule `xi = a + i * h` ; $i = 0, \ldots, n$.

b) Utiliser une liste de compréhension comme une implémentation alternative.

c) Vectoriser la liste résultante `xList` en un tableau `numpy` xVect. N'oubliez pas **d'importer** d'abord la fonction qui transforme les listes en tableaux à partir de `numpy`.

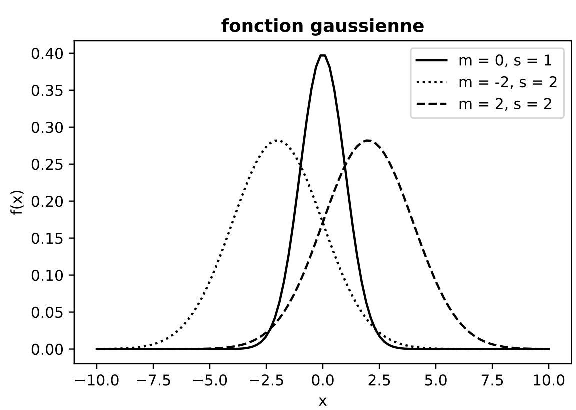
Exercise 4 : Implémenter une fonction gaussienne (5 points)

a) Créer la fonction : `gauss(x, m = 0, s = 1)`, qui modélise la gaussienne :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, s} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{s}\right)^2\right] \tag{1}$$

b) Créer un tableau `x` à l'aide de la fonction `linspace`, du module `numpy`, pour `100` valeurs `x` uniformément espacées dans [-10, 10].

c) Écrire les instructions pour tracer le graphique ci-dessous à l'aide de la bibliothèque `matplotlib`.



Exercise 5 : Tracer les 6 premiers polynômes de Legendre (5 points)

En mathématiques et en physique théorique, les polynômes de Legendre constituent l'exemple le plus simple d'une suite de polynômes orthogonaux. Ce sont des solutions polynomiales $P_n(x)$ de l'équation différentielle de Legendre :

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d}{dx}P_n(x)\right] + n(n+1)P_n(x) = 0$$

Les polynômes de Legendre sont définis uniquement pour $x \in [-1; 1]$ puisque les points $x = \pm 1$ sont des points singuliers réguliers de cette équation différentielle.

Les 6 premiers polynômes de Legendre sont :

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= 1 \\
P_1(x) &= x \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\
P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)
\end{aligned}$$

a) Définir les fonctions `P0(x)`, `P1(x)`, `P2(x)`, `P3(x)`, `P4(x)` et `P5(x)` qui retournent les valeurs des 6 premiers polynômes de Legendre.

b) Créer un tableau `x` à l'aide de la fonction `linspace`, du module `numpy`, pour `100` valeurs `x` uniformément espacées dans [-1, 1].

c) Tracer ces polynômes sur le même graphique en utilisant la bibliothèque `matplotlib`.