TD N°5 : Équations différentielles ordinaires

Ahmed Ammar (`ahmed.ammar@fst.utm.tn`)

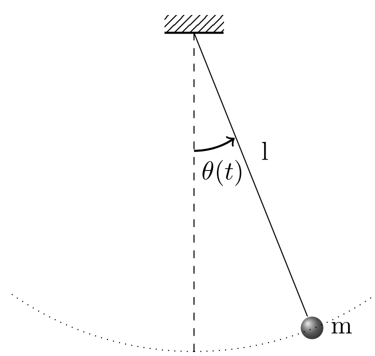
Institut Préparatoire aux Études Scientifiques et Techniques, Université de Carthage.

Mar 10, 2020

Contents

Exercice 1: Pendule simple

On considère un pendule simple de masse $m = 1\ kg$, de longueur $l = 1\ m$ qui va osciller d'arrière en avant à cause du champ de gravité de la Terre $g = 9.8\ m/s^2$.



Le pendule a l'équation du mouvement :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} sin(\theta) \tag{1}$$

Pour les petites amplitudes d'oscillation, $\theta \ll 1$, on peut faire l'approximation $sin(\theta) \approx \theta$, on retrouve alors l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta \tag{2}$$

La solution exacte de cette équation est simplement:

$$\theta(t) = \theta_0 \ cos(\omega_0 t) \tag{3}$$

où $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ et nous avons supposé que le pendule partait du repos avec un déplacement initial $\theta_0 = 0.2 \ rad$.

Nous allons transformer l'équation différentielle d'ordre 2 (Eq. (2)) en deux équations différentielles d'ordre 1 afin de pouvoir utiliser simplement la méthode d'Euler. En posant $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ la vitesse angulaire du pendule, on obtient le système de deux fonctions inconnues suivant :

$$\dot{\theta}(t) = \omega(t) \tag{4}$$

$$\dot{\omega}(t) = -\omega_0^2 \ \theta(t) \tag{5}$$

Pour résoudre ce système nous devons connaître les deux conditions initiales suivantes :

$$\theta(0) = \theta_0$$
$$\omega(0) = 0$$

a) Définir une fonction `sol_exacte(t)` qui renvoie la solution exacte de l'oscillateur harmonique donnée par l'équation (3). Tracer cette solution pour $t \in [0, 10]$ et pour un pas de $\Delta t = 0.01$ s.

Indication.

- Utiliser la fonction `numpy.arange()` pour créer le vecteur temps `t`.
- Utiliser la fonction `matplotlib.pyplot.plot()` pour tracer `sol_exacte(t)`.

b) Rappeler l'expression de la méthode *d'Euler explicite* pour ce système.

c) Calculer $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}$ avec la méthode d'Euler explicite pour $t \in [0, 10]$ et pour un pas d'intégration $\Delta t = 0.01$ s.

Tracer:

- Dans un même graphique, la variation de l'amplitude d'oscillation θ en fonction du temps t et le diagramme des phases (vitesse angulaire ω en fonction de θ).
- Dans un graphique 3D, la vitesse angulaire ω et l'amplitude d'oscillation θ en fonction du temps t.

Que remarquez-vous pour le résultat trouvé?

Indication. On vous donne les instructions nécessaires pour reproduire un graphique en 3D:

```
from mpl_toolkits.mplot3d.axes3d import Axes3D
plt.figure()
ax = plt.axes(projection="3d")
ax.plot(....)
```

d) Rappeler l'expression de la méthode *d'Euler implicite* pour ce système.

e) Calculer $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}$ avec la méthode d'Euler implicite pour $t \in [0, 10]$ et pour un pas d'integration $\Delta t = 0.01$ s.

Tracer:

- Dans un même graphique, la variation de l'amplitude d'oscillation θ en fonction du temps t et le diagramme des phases (vitesse angulaire ω en fonction de θ).
- Dans un graphique 3D, la vitesse angulaire ω et l'amplitude d'oscillation θ en fonction du temps t.

Que remarquez-vous pour le résultat trouvé?

f) Tracer dans un même graphique pour $t \in [0, 10]$ et avec un pas $\Delta t = 0.01$ s:

- `sol_exacte(t)` calculée dans **a)**.
- $\theta(t)$ calculée dans **c)** par la méthode d'Euler explicite.
- $\theta(t)$ calculée dans **e)** par la méthode d'Euler implicite.

Que remarquez-vous si nous modifions la valeur du pas d'intégration par $\Delta\, t = \ 0.001$ s? Expliquer le résultat trouvé.

Exercice 2: Comparaison des schémas d'Euler explicite et implicite

On considère le problème de Cauchy:

$$\frac{dz(t)}{dt} = 1 - \frac{t}{\mu},\ \ t \in \Re,\ \ z(0) = z_0 \tag{6}$$

On rappelle que la solution exacte de ce problème est donnée par:

$$z(t) = \mu - (\mu - z_0)e^{-\frac{t}{\mu}} \tag{7}$$

a) Définir une fonction `sol_exacte(t, mu, z0)` qui renvoie la solution exacte donnée par l'équation (7). Tracer sur un même graphique pour $\mu = 1$ et $z_0 \in \{0, 1, 2\}$ ces solutions. Soit $t \in [0, 2]$ et pour un pas de $\Delta t = 0.1$ s.

b) Même questions pour $\mu = 0.05$ et $z_0 \in \{0, 1, 2\}$.
On suppose dans cette question que $\mu = 0.05$ et que $z_0 = 2$.

c) Rappeler l'expression de la méthode *d'Euler explicite* pour ce problème. Calculer $z(t)$ avec la méthode *d'Euler explicite* pour $t \in [0, 2]$ et pour un pas d'intégration $\Delta t = 0.1$ s.

d) Montrer que l'expression de la méthode *d'Euler implicite* est:

$$z_{n+1} = \frac{z_n + \Delta t}{1 + \frac{\Delta t}{\mu}}, \; n = 0, 1, 2, ..., N - 1.$$

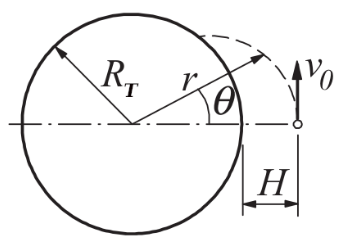
Calculer $z(t)$ avec la méthode *d'Euler implicite* pour $t \in [0, 2]$ et pour un pas d'intégration $\Delta t = 0.1$ s.

e) Tracer dans un même graphique pour $t \in [0, 2]$ et avec des pas d'intégration $\Delta t = 0.5, 0.1, 0.05, 0.01, 0.005$ s:

- La solution exacte: `sol_exacte(t, 0.05, 2)`
- $z(t)$ calculée par la méthode d'Euler explicite.
- $z(t)$ calculée par la méthode d'Euler explicite.

Que remarquez-vous pour les résultats trouvés? Quelle est la méthode la plus proche de la solution exacte?

Exercice 3: Atterrissage d'un vaisseau spatial



Un vaisseau spatial est lancé à l'altitude $H = 772$ km au-dessus du niveau de la mer avec la vitesse $v_0 = 6700$ m/s dans la direction indiquée sur la figure ci-dessus. Les équations différentielles décrivant le mouvement du vaisseau spatial sont:

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{GM_T}{r^2}$$
$$\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r}$$

où r et θ sont les coordonnées polaires du vaisseau spatial. Les constantes impliquées dans le mouvement sont:

- $G = 6.672 \times 10^{-11}\ m^3 kg^{-1} s^{-2}$ = constante gravitationnelle universelle.
- $M_T = 5.9742 \times 10^{24}\ kg$ = masse de la terre.
- $R_T = 6378.14\ km$ = rayon de la terre au niveau de la mer.

a) Dériver les équations différentielles du premier ordre et les conditions initiales de la forme $\dot{y} = F(t, y)$, $y(0) = b$.

b) Utiliser la méthode Runge-Kutta du quatrième ordre (RK4) pour intégrer les équations depuis le lancement jusqu'à ce que le vaisseau spatial touche la terre. Déterminez θ au site d'impact.