

# L'intégration numérique

Ahmed Ammar (ahmed.ammar@fst.utm.tn)

Institut Préparatoire aux Études Scientifiques et Techniques, Université de Carthage.

Jan 5, 2020

## Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Idées de base de l'intégration numérique</b>	<b>2</b>
2.1	Exemple de calcul . . . . .	3
<b>3</b>	<b>La règle trapézoïdale composite</b>	<b>3</b>
3.1	La formule générale . . . . .	5
3.2	Implémentation . . . . .	6
<b>4</b>	<b>La méthode du point milieu composite</b>	<b>9</b>
4.1	L'idée . . . . .	9
4.2	La formule générale . . . . .	10
4.3	Implémentation . . . . .	10
4.4	Comparaison des méthodes du trapèze et du point milieu . . . .	10
<b>5</b>	<b>Intégrales doubles et triples</b>	<b>12</b>
5.1	La règle du point milieu pour une double intégrale . . . . .	12
5.2	La règle du point milieu pour une triple intégrale . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Intégration Monte Carlo pour les domaines de forme complexe</b>	<b>17</b>
6.1	L'algorithme d'intégration de Monte Carlo . . . . .	18
6.2	Implémentation . . . . .	20

## 1 Introduction

L'intégration numérique est un chapitre important de l'analyse numérique et un outil indispensable en physique numérique. On intègre numériquement dans deux cas principaux:

- on ne peut pas intégrer analytiquement,
- l'intégrande est fourni non pas sous la forme d'une fonction mais de tableaux de mesures, cas d'ailleurs le plus fréquent dans la vraie vie.

Les méthodes numériques d'intégration d'une fonction sont nombreuses et les techniques très diverses. Des très simples, comme la méthode des rectangles aux très complexes comme certaines variétés de la méthode de Monte-Carlo.

## 2 Idées de base de l'intégration numérique

Nous considérons l'intégrale

$$\int_a^b f(x)dx \quad (1)$$

La plupart des méthodes numériques de calcul de cette intégrale divisent l'intégrale d'origine en une somme de plusieurs intégrales, chacune couvrant une partie plus petite de l'intervalle d'intégration d'origine  $[a, b]$ . Cette réécriture de l'intégrale est basée sur une sélection de points d'intégration  $x_i, i = 0, 1, \dots, n$  qui sont répartis sur l'intervalle  $[a, b]$ . Les points d'intégration peuvent ou non être répartis uniformément. Une distribution uniforme simplifie les expressions et est souvent suffisante, nous nous limiterons donc principalement à ce choix. Les points d'intégration sont ensuite calculés comme:

$$x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2)$$

où

$$h = \frac{b - a}{n} \quad (3)$$

Compte tenu des points d'intégration, l'intégrale d'origine est réécrite sous la forme d'une somme d'intégrales, chaque intégrale étant calculée sur le sous-intervalle entre deux points d'intégration consécutifs. L'intégrale dans (1) est donc exprimée comme:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \quad (4)$$

Notez que  $x_0 = a$  et  $x_n = b$ .

En partant de (4), les différentes méthodes d'intégration différeront dans la façon dont elles approchent chaque intégrale du côté droit. L'idée fondamentale est que chaque terme est une intégrale sur un petit intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ , et sur ce petit intervalle, il est logique d'approximer  $f$  par une forme simple, disons une constante, une ligne droite ou une parabole, que nous pouvons facilement intégrer à la main. Les détails deviendront clairs dans les exemples à venir.

## 2.1 Exemple de calcul

Pour comprendre et comparer les méthodes d'intégration numérique, il est avantageux d'utiliser une intégrale spécifique pour les calculs et les illustrations graphiques. En particulier, nous voulons utiliser une intégrale que nous pouvons calculer à la main de sorte que la précision des méthodes d'approximation puisse être facilement évaluée. Notre intégrale spécifique est tirée de la physique de base. Supposons que vous accélériez votre voiture du repos et demandez-vous jusqu'où vous allez en  $T$  secondes. La distance est donnée par l'intégrale  $\int_0^T v(t)dt$ , où  $v(t)$  est la vitesse en fonction du temps. Une fonction de vitesse en augmentation rapide pourrait être:

$$v(t) = 3t^2 e^{t^3} \quad (5)$$

La distance après une seconde est

$$\int_0^1 v(t)dt \quad (6)$$

qui est l'intégrale que nous cherchons à calculer par des méthodes numériques. Heureusement, l'expression choisie de la vitesse a une forme qui permet de calculer facilement l'anti-dérivé comme

$$V(t) = e^{t^3} - 1 \quad (7)$$

Nous pouvons donc calculer la valeur exacte de l'intégrale comme  $V(1) - V(0) \approx 1.718$  (arrondi à 3 décimales pour plus de commodité).

## 3 La règle trapézoïdale composite

L'intégrale  $\int_a^b f(x)dx$  peut être interprétée comme l'aire entre l'axe des  $x$  et le graphique  $y = f(x)$  de fonction à intégrer. La figure 1 illustre cette zone de choix (6). Le calcul de l'intégrale  $\int_0^1 f(t)dt$  revient à calculer l'aire de la zone hachurée.

Si nous remplaçons le vrai graphique de la figure 1 par un ensemble de segments de ligne droite, nous pouvons voir la zone plutôt comme composée de trapèzes, dont les zones sont faciles à calculer. Ceci est illustré sur la figure 2, où 4 segments de ligne droite donnent naissance à 4 trapèzes, couvrant les intervalles de temps  $[0, 0.2)$ ,  $[0.2, 0.6)$ ,  $[0.6, 0.8)$  et  $[0.8, 1.0]$ . Notez que nous en avons profité pour démontrer les calculs avec des intervalles de temps de tailles différentes.

Les aires des 4 trapèzes représentés sur la figure 2 constituent maintenant notre approximation de l'intégrale (6):

$$\begin{aligned} \int_0^1 v(t)dt \approx & h_1 \left( \frac{v(0) + v(0.2)}{2} \right) + h_2 \left( \frac{v(0.2) + v(0.6)}{2} \right) \\ & + h_3 \left( \frac{v(0.6) + v(0.8)}{2} \right) + h_4 \left( \frac{v(0.8) + v(1.0)}{2} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

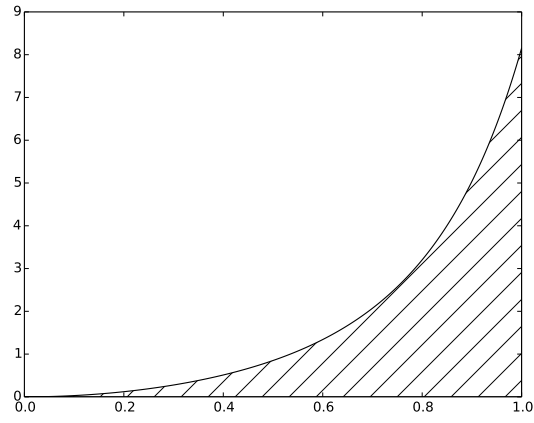


Figure 1: L'intégrale de  $v(t)$  interprétée comme l'aire sous le graphique de  $v$ .

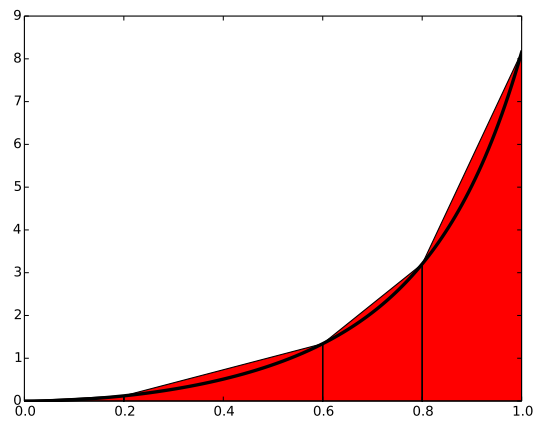


Figure 2: Calculer approximativement l'intégrale d'une fonction comme la somme des aires des trapèzes.

où

$$h_1 = (0.2 - 0.0) \tag{9}$$

$$h_2 = (0.6 - 0.2) \tag{10}$$

$$h_3 = (0.8 - 0.6) \tag{11}$$

$$h_4 = (1.0 - 0.8) \tag{12}$$

Avec  $v(t) = 3t^2e^{t^3}$ , chaque terme dans (8) est facilement calculé et notre calcul approximatif donne

$$\int_0^1 v(t)dt \approx 1.895 \quad (13)$$

Par rapport à la vraie réponse de 1.718, cela est d'environ 10%. Cependant, notez que nous avons utilisé seulement 4 trapèzes pour approximer la zone. Avec plus de trapèzes, l'approximation serait devenue meilleure, puisque les segments de droite du côté trapézoïdal supérieur suivraient alors le graphique de plus près. Faire un autre calcul avec plus de trapèzes n'est pas trop tentant pour un humain paresseux, mais c'est un travail parfait pour un ordinateur! Dérivons donc les expressions d'approximation de l'intégrale par un nombre arbitraire de trapèzes.

### 3.1 La formule générale

Pour une fonction donnée  $f(x)$ , nous voulons approximer l'intégrale  $\int_a^b f(x)dx$  par  $n$  trapézoïdes (de largeur égale). Nous commençons par (3.5) et approchons chaque intégrale du côté droit avec un seul trapèze. En détail,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx, \\ &\approx h \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} + h \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} + \dots + \\ &\quad h \frac{f(x_{n-1}) + f(x_n)}{2} \end{aligned} \quad (14)$$

En simplifiant le côté droit de (3.15), nous obtenons

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)] \quad (15)$$

qui est écrit de façon plus compacte comme

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left[ \frac{1}{2}f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2}f(x_n) \right] \quad (16)$$



#### Règles d'intégration composites

Le mot composite est souvent utilisé lorsqu'une méthode d'intégration numérique est appliquée avec plus d'un sous-intervalle. à vrai dire alors, écrire, par exemple, "la méthode trapézoïdale", devrait impliquer l'utilisation d'un seul trapèze, tandis que "la méthode trapézoïdale composite" est le nom le plus correct lorsque plusieurs trapèzes sont utilisés. Cependant, cette convention de dénomination n'est pas toujours suivie, donc dire que "la méthode trapézoïdale" peut pointer vers un seul trapèze ainsi que la règle composite avec de nombreux trapèzes.

## 3.2 Implémentation

**Implémentation spécifique ou générale?** Supposons que notre objectif principal était de calculer l'intégrale spécifique  $\int_0^1 v(t)dt$  avec  $v(t) = 3t^2e^{t^3}$ . D'abord, nous avons joué avec un simple calcul de main pour voir de quoi il s'agissait, avant de développer (comme c'est souvent le cas en mathématiques) une formule générale (16) pour l'intégrale générale ou «abstraite»  $\int_a^b f(x)dx$ . Pour résoudre notre problème spécifique  $\int_0^1 v(t)dt$ , nous devons ensuite appliquer la formule générale (16) aux données données (fonction et limites intégrales) dans notre problème. Bien que simples en principe, les étapes pratiques sont déroutantes pour beaucoup car la notation dans le problème abstrait de (16) diffère de la notation dans notre problème spécial. Clairement, les  $f$ ,  $x$  et  $h$  dans (16) correspondent à  $v$ ,  $t$  et peut-être  $\Delta t$  pour la largeur trapézoïdale dans notre problème spécial.



### Le dilemme du programmeur

1. Faut-il écrire un programme spécial pour l'intégrale spéciale, en utilisant les idées de la règle générale (16), mais en remplaçant  $f$  par  $v$ ,  $x$  par  $t$  et  $h$  par  $\Delta t$ ?
2. Faut-il implémenter la méthode générale (16) telle qu'elle se présente dans une fonction générale `trapezoid(f, a, b, n)` et résoudre le problème spécifique en question par un appel spécialisé à cette fonction?

**L'alternative 2 est toujours le meilleur choix!**

La première alternative dans l'encadré ci-dessus semble moins abstraite et donc plus attrayante pour beaucoup. Néanmoins, comme nous l'espérons, cela sera évident à partir des exemples, la deuxième alternative est en fait la plus simple et la plus fiable d'un point de vue mathématique et de programmation. Ces auteurs affirmeront que la deuxième alternative est l'essence même du pouvoir des mathématiques, tandis que la première alternative est la source de beaucoup de confusion sur les mathématiques!

**Implémentation avec fonctions.** Pour l'intégrale  $\int_a^b f(x)dx$  calculée par la formule (16), nous voulons que le trapèze de la fonction Python correspondante prenne tout  $f$ ,  $a$ ,  $b$  et  $n$  en entrée et renvoie l'approximation à l'intégrale.

Nous écrivons une fonction Python `trapezoidal` dans un fichier "trapezoidal.py":"" aussi proche que possible de la formule (16), en nous assurant que les noms de variables correspondent à la notation mathématique:

```
def trapezoidal(f, a, b, n):  
    h = float(b-a)/n  
    result = 0.5*f(a) + 0.5*f(b)
```

```

    for i in range(1, n):
        result += f(a + i*h)
    result *= h
    return result

```

**Résoudre notre problème spécifique en une session.** Le simple fait d'avoir la fonction `trapezoidal` comme seul contenu d'un fichier `trapezoidal.py` fait automatiquement de ce fichier un module que nous pouvons importer et tester dans une session interactive:

```

>>> from trapezoidal import trapezoidal
>>> from math import exp
>>> v = lambda t: 3*(t**2)*exp(t**3)
>>> n = 4
>>> numerical = trapezoidal(v, 0, 1, n)
>>> numerical
1.9227167504675762

```

Calculons l'expression exacte et l'erreur dans l'approximation:

```

>>> V = lambda t: exp(t**3)
>>> exact = V(1) - V(0)
>>> exact - numerical
-0.20443492200853108

```

Cette erreur est-elle convaincante? On peut essayer un  $n$  plus grand:

```

>>> numerical = trapezoidal(v, 0, 1, n=400)
>>> exact - numerical
-2.1236490512777095e-05

```

Heureusement, beaucoup plus de trapèzes donnent une erreur beaucoup plus petite.

**Résoudre notre problème spécifique dans un programme.** Au lieu de calculer notre problème spécial dans une session interactive, nous pouvons le faire dans un programme. Comme toujours, un morceau de code faisant une chose particulière est mieux isolé en tant que fonction même si nous ne voyons aucune raison future d'appeler la fonction plusieurs fois et même si nous n'avons pas besoin d'arguments pour paramétrer ce qui se passe à l'intérieur de la fonction. Dans le cas présent, nous mettons simplement les instructions que nous aurions autrement mises dans un programme principal, à l'intérieur d'une fonction:

```

def application():
    from math import exp
    v = lambda t: 3*(t**2)*exp(t**3)
    n = input('n: ')
    numerical = trapezoidal(v, 0, 1, n)

    # Compare with exact result
    V = lambda t: exp(t**3)

```

```

exact = V(1) - V(0)
error = exact - numerical
print('n=%d: %.16f, error: %g' % (n, numerical, error))

```

Maintenant, nous calculons notre problème spécial en appelant `application()` comme la seule instruction du programme principal. Les fonctions `trapezoidal` et `application` résident toutes deux dans le fichier `trapezoidal.py`, qui peut être exécuté en tant que

```

Terminal> python trapezoidal.py
n: 4
n=4: 1.9227167504675762, error: -0.204435

```

**Faire un module.** Lorsque nous avons les différentes parties de notre programme comme une collection de fonctions, il est très simple de créer un *module* qui peut être importé dans d'autres programmes. Ce fait, avoir notre code comme module, signifie que la fonction `trapezoidal` peut facilement être réutilisée par d'autres programmes pour résoudre d'autres problèmes. Les exigences d'un module sont simples: mettez tout à l'intérieur des fonctions et laissez les appels de fonction dans le programme principal être dans le soi-disant *bloc de test*:

```

if __name__ == '__main__':
    application()

```

Le test `if` est vrai si le fichier de module, `trapezoidal.py`, est exécuté en tant que programme et faux si le module est importé dans un autre programme. Par conséquent, lorsque nous effectuons une importation: `from trapezoidal import trapezoidal` dans un fichier, le test échoue et `application()` n'est pas appelée, c'est-à-dire que notre problème spécial n'est pas résolu et n'imprime rien à l'écran. D'un autre côté, si nous exécutons `trapezoidal.py` dans la fenêtre du terminal, la condition de test est positive, `application()` est appelée et nous obtenons une sortie dans la fenêtre:

```

Terminal> python trapezoidal.py
n: 400
n=400: 1.7183030649495579, error: -2.12365e-05

```

Lorsque vous regardez maintenant les deux solutions, le programme plat spécial et le programme basé sur les fonctions avec la fonction polyvalente `trapezoidal`, vous vous rendez compte que *la mise en œuvre d'un algorithme mathématique général dans une fonction générale* nécessite une réflexion un peu plus abstraite, mais le code résultant peut être utilisé encore et encore. Essentiellement, si vous appliquez le style plat spécial, vous devez retester l'implémentation de l'algorithme après chaque changement de programme.



## 4 La méthode du point milieu composite

### 4.1 L'idée

Plutôt que d'approximer l'aire sous une courbe par des trapèzes, nous pouvons utiliser des rectangles simples. Il peut sembler moins précis d'utiliser des lignes horizontales et non des lignes obliques suivant la fonction à intégrer, mais une méthode d'intégration basée sur des rectangles (la méthode du point milieu) est en fait légèrement plus précise que celle basée sur des trapèzes!

Dans la méthode du milieu, nous construisons un rectangle pour chaque sous-intervalle où la hauteur est égale à  $f$  au milieu du sous-intervalle. Faisons-le pour quatre rectangles, en utilisant les mêmes sous-intervalles que nous avons pour les calculs manuels avec la méthode trapézoïdale:  $[0, 0.2)$ ,  $[0.2, 0.6)$ ,  $[0.6, 0.8)$  et  $[0.8, 1.0]$ . On a

$$\int_0^1 f(t)dt \approx h_1 f\left(\frac{0+0.2}{2}\right) + h_2 f\left(\frac{0.2+0.6}{2}\right) + h_3 f\left(\frac{0.6+0.8}{2}\right) + h_4 f\left(\frac{0.8+1.0}{2}\right) \quad (17)$$

où  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  et  $h_4$  sont les largeurs des sous-intervalles, utilisées précédemment avec la méthode du trapèze et définies dans (9)-(12).

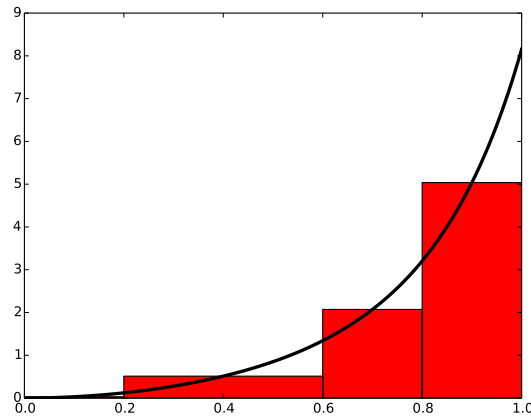


Figure 3: Calcul approximatif de l'intégrale d'une fonction comme la somme des aires des rectangles.

Avec  $f(t) = 3t^2e^{t^3}$ , l'approximation devient 1.632. Comparé à la vraie réponse (1.718), c'est environ 5% trop petit, mais c'est mieux que ce que nous avons obtenu avec la méthode trapézoïdale (10%) avec les mêmes sous-intervalles. Plus de rectangles donnent une meilleure approximation.

## 4.2 La formule générale

Dérivons une formule pour la méthode du milieu basée sur  $n$  rectangles d'égale largeur:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx, \\ &\approx hf \left( \frac{x_0 + x_1}{2} \right) + hf \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right) + \dots + hf \left( \frac{x_{n-1} + x_n}{2} \right) \quad (18)\end{aligned}$$

$$\approx h \left( f \left( \frac{x_0 + x_1}{2} \right) + f \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right) + \dots + f \left( \frac{x_{n-1} + x_n}{2} \right) \right) \quad (19)$$

Cette somme peut être écrite de façon plus compacte comme

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \quad (20)$$

où  $x_i = (a + \frac{h}{2}) + ih$ .

## 4.3 Implémentation

Nous suivons les conseils et les enseignements tirés de la mise en œuvre de la méthode trapézoïdale et réalisons une fonction `midpoint(f, a, b, n)` (dans un fichier `midpoint.py`) pour mettre en œuvre la formule générale (20):

```
def midpoint(f, a, b, n):
    h = float(b-a)/n
    result = 0
    for i in range(n):
        result += f((a + h/2.0) + i*h)
    result *= h
    return result
```

Nous pouvons tester la fonction comme nous l'avons expliqué pour la méthode du trapèze similaire. L'erreur dans notre problème particulier  $\int_0^1 3t^2 e^{t^3} dt$  avec quatre intervalles est maintenant d'environ 0.1 contrairement à 0.2 pour la règle du trapèze. Les différences sont rarement d'une importance pratique, et sur un ordinateur portable, nous pouvons facilement utiliser  $n = 10^6$  et obtenir la réponse avec une erreur d'environ  $10^{-12}$  en quelques secondes.

## 4.4 Comparaison des méthodes du trapèze et du point milieu

L'exemple suivant montre la facilité avec laquelle nous pouvons combiner les fonctions `trapezoidal` et `midpoint` pour comparer les deux méthodes dans le fichier `compare_integration_methods.py`:

```

from trapezoidal import trapezoidal
from midpoint import midpoint
from math import exp

g = lambda y: exp(-y**2)
a = 0
b = 2
print('      n      midpoint      trapezoidal')
for i in range(1, 21):
    n = 2**i
    m = midpoint(g, a, b, n)
    t = trapezoidal(g, a, b, n)
    print('%7d %.16f %.16f' % (n, m, t))

```

Notez les efforts mis en forme agréable - la sortie devient

n	midpoint	trapezoidal
2	0.8842000076332692	0.8770372606158094
4	0.8827889485397279	0.8806186341245393
8	0.8822686991994210	0.8817037913321336
16	0.8821288703366458	0.8819862452657772
32	0.8820933014203766	0.8820575578012112
64	0.8820843709743319	0.8820754296107942
128	0.8820821359746071	0.8820799002925637
256	0.8820815770754198	0.8820810181335849
512	0.8820814373412922	0.8820812976045025
1024	0.8820814024071774	0.8820813674728968
2048	0.8820813936736116	0.8820813849400392
4096	0.8820813914902204	0.8820813893068272
8192	0.8820813909443684	0.8820813903985197
16384	0.8820813908079066	0.8820813906714446
32768	0.8820813907737911	0.8820813907396778
131072	0.8820813907631487	0.8820813907610036
262144	0.8820813907625702	0.8820813907620528
524288	0.8820813907624605	0.8820813907623183
1048576	0.8820813907624268	0.8820813907623890

Une inspection visuelle des chiffres montre à quelle vitesse les chiffres se stabilisent dans les deux méthodes. Il semble que 13 chiffres se soient stabilisés dans les deux dernières lignes.



### Remarque

Les méthodes trapézoïdale et médiane ne sont que deux exemples dans une jungle de règles d'intégration numérique. D'autres méthodes célèbres sont la règle de Simpson et la quadrature de Gauss. Ils fonctionnent tous de la même manière:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} w_i f(x_i)$$

Autrement dit, l'intégrale est approximée par une somme d'évaluations de fonctions, où chaque évaluation  $f(x_i)$  reçoit un poids  $w_i$ . Les différentes méthodes diffèrent par la façon dont elles construisent les points d'évaluation

$x_i$  et les poids  $w_i$ . Nous avons utilisé des points  $x_i$  également espacés, mais une précision plus élevée peut être obtenue en optimisant l'emplacement de  $x_i$ .

## 5 Intégrales doubles et triples

### 5.1 La règle du point milieu pour une double intégrale

Étant donné une intégrale double sur un domaine rectangulaire  $[a, b] \times [c, d]$ ,

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

comment approcher cette intégrale par des méthodes numériques?

**Dérivation via des intégrales unidimensionnelles.** Puisque nous savons comment traiter les intégrales dans une variable, une approche fructueuse consiste à considérer l'intégrale double comme deux intégrales, chacune dans une variable, qui peut être approximée numériquement par les formules unidimensionnelles précédentes. À cette fin, nous introduisons une fonction d'aide  $g(x)$  et écrivons

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b g(x) dx, \quad g(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

Chacune des intégrales

$$\int_a^b g(x) dx, \quad g(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

peut être discrétisé par n'importe quelle règle d'intégration numérique pour une intégrale dans une variable. Utilisons la méthode du point médian (22) et commençons par  $g(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ . Nous introduisons  $n_y$  intervalles sur  $[c, d]$  de longueur  $h_y$ . La règle médiane pour cette intégrale devient alors

$$g(x) = \int_c^d f(x, y) dy \approx h_y \sum_{j=0}^{n_y-1} f(x, y_j), \quad y_j = c + \frac{1}{2}h_y + jh_y$$

L'expression semble quelque peu différente de (22), mais c'est à cause de la notation: puisque nous nous intégrons dans la direction  $y$  et que nous devons travailler avec  $x$  et  $y$  comme coordonnées, nous devons utiliser  $n_y$  pour  $n$ ,  $h_y$  pour  $h$  et le compteur  $i$  est plus naturellement appelé  $j$  lors de l'intégration dans  $y$ . Les intégrales dans la direction  $x$  utiliseront  $h_x$  et  $n_x$  pour  $h$  et  $n$ , et  $i$  comme compteur.

L'intégrale double est  $\int_a^b g(x)dx$ , qui peut être approximée par la méthode du point médian:

$$\int_a^b g(x)dx \approx h_x \sum_{i=0}^{n_x-1} g(x_i), \quad x_i = a + \frac{1}{2}h_x + ih_x$$

En rassemblant les formules, nous arrivons à la méthode du point milieu composite pour une double intégrale:

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx &\approx h_x \sum_{i=0}^{n_x-1} h_y \sum_{j=0}^{n_y-1} f(x_i, y_j) \\ &= h_x h_y \sum_{i=0}^{n_x-1} \sum_{j=0}^{n_y-1} f\left(a + \frac{h_x}{2} + ih_x, c + \frac{h_y}{2} + jh_y\right) \end{aligned} \quad (21)$$

La formule (21) peut également être dérivée directement dans le cas bidimensionnel en appliquant l'idée de la méthode du point milieu. Nous divisons le rectangle  $[a, b] \times [c, d]$  en  $n_x \times n_y$  cellules de taille égale. L'idée de la méthode du point milieu est d'approximer  $f$  par une constante sur chaque cellule et d'évaluer la constante au point médian. La cellule  $(i, j)$  occupe la zone

$$[a + ih_x, a + (i + 1)h_x] \times [c + jh_y, c + (j + 1)h_y],$$

et le milieu est  $(x_i, y_j)$  avec

$$x_i = a + ih_x + \frac{1}{2}h_x, \quad y_j = c + jh_y + \frac{1}{2}h_y$$

L'intégrale sur la cellule est donc  $h_x h_y f(x_i, y_j)$ , et l'intégrale double totale est la somme sur toutes les cellules, qui n'est rien d'autre que la formule (21).

**Programmation d'une double somme.** La formule (21) implique une double somme, qui est normalement implémentée sous la forme d'une boucle double. Une fonction Python implémentant (21) peut ressembler à

```
def midpoint_double1(f, a, b, c, d, nx, ny):
    hx = (b - a)/float(nx)
    hy = (d - c)/float(ny)
    I = 0
    for i in range(nx):
        for j in range(ny):
            xi = a + hx/2 + i*hx
            yj = c + hy/2 + j*hy
            I += hx*hy*f(xi, yj)
    return I
```

Si cette fonction est stockée dans un fichier de module `midpoint_double.py`, nous pouvons calculer une intégrale, par exemple,  $\int_2^3 \int_0^2 (2x + y) dx dy = 9$  dans un shell interactif et démontrer que la fonction calcule le bon nombre:

```
>>> from midpoint_double import midpoint_double1
>>> def f(x, y):
...     return 2*x + y
...
>>> midpoint_double1(f, 0, 2, 2, 3, 5, 5)
9.0
```

**Réutilisation du code pour les intégrales unidimensionnelles.** Il est très naturel d'écrire une méthode de point médian bidimensionnelle comme nous l'avons fait dans la fonction `midpoint_double1` lorsque nous avons la formule (21). Cependant, nous pourrions également demander, tout comme nous l'avons fait en mathématiques, pouvons-nous réutiliser une implémentation bien testée pour les intégrales unidimensionnelles pour calculer les doubles intégrales? Autrement dit, pouvons-nous utiliser la fonction `midpoint`.

```
def midpoint(f, a, b, n):
    h = float(b-a)/n
    result = 0
    for i in range(n):
        result += f((a + h/2.0) + i*h)
    result *= h
    return result
```

de la section 4.3 "deux fois"? La réponse est oui, si nous pensons comme nous l'avons fait dans les mathématiques: calculer l'intégrale double comme règle du point milieu pour intégrer  $g(x)$  et définir  $g(x_i)$  en termes d'une règle médiane sur  $f$  dans la coordonnée  $y$ .

```
def midpoint_double2(f, a, b, c, d, nx, ny):
    def g(x):
        return midpoint(lambda y: f(x, y), c, d, ny)

    return midpoint(g, a, b, nx)
```

L'avantage important de cette implémentation est que nous réutilisons une fonction bien testée pour la règle du point milieu unidimensionnelle standard et que nous appliquons la règle unidimensionnelle exactement comme dans les mathématiques.

**Vérification via les fonctions de test.** Comment tester que nos fonctions pour la double intégrale fonctionnent? Le meilleur test unitaire consiste à trouver un problème où l'erreur d'approximation numérique disparaît, car alors nous savons exactement quelle devrait être la réponse numérique. La règle du point milieu est exacte pour les fonctions linéaires, quel que soit le nombre de sous-intervalles que nous utilisons. De plus, toute fonction linéaire bidimensionnelle  $f(x, y) = px + qy + r$  sera intégrée exactement par la règle point milieu bidimensionnelle. Nous pouvons choisir  $f(x, y) = 2x + y$  et créer une fonction de test appropriée qui peut automatiquement vérifier nos deux implémentations alternatives de la règle médiane bidimensionnelle. La fonction de test devient:

```
def test_midpoint_double():
    """Test that a linear function is integrated exactly."""
    def f(x, y):
        return 2*x + y

    a = 0; b = 2; c = 2; d = 3
    import sympy
    x, y = sympy.symbols('x y')
    I_expected = sympy.integrate(f(x, y), (x, a, b), (y, c, d))
    # Test three cases: nx < ny, nx = ny, nx > ny
    for nx, ny in (3, 5), (4, 4), (5, 3):
        I_computed1 = midpoint_double1(f, a, b, c, d, nx, ny)
        I_computed2 = midpoint_double2(f, a, b, c, d, nx, ny)
        tol = 1E-14
        #print I_expected, I_computed1, I_computed2
        assert abs(I_computed1 - I_expected) < tol
        assert abs(I_computed2 - I_expected) < tol
```



### Laisser parler les fonctions de test?

Si nous appelons la fonction `test_midpoint_double` ci-dessus et que rien ne se passe, nos implémentations sont correctes. Cependant, il est quelque peu ennuyeux d'avoir une fonction complètement silencieuse lorsqu'elle fonctionne - sommes-nous sûrs que tout est correctement calculé? Pendant le développement, il est donc fortement recommandé d'insérer une instruction d'impression afin que nous puissions surveiller les calculs et être convaincu que la fonction de test fait ce que nous voulons. Puisqu'une fonction de test ne doit avoir aucune instruction `print`, nous la commentons simplement comme nous l'avons fait dans la fonction listée ci-dessus.

La méthode de trapèze peut être utilisée comme alternative à la méthode du point milieu. La dérivation d'une formule pour la double intégrale et les implémentations suivent exactement les mêmes idées que nous avons expliquées avec la méthode du point milieu, mais il y a plus de termes à écrire dans les formules.

## 5.2 La règle du point milieu pour une triple intégrale

**Théorie.** Une fois qu'une méthode qui fonctionne pour un problème unidimensionnel est généralisée à deux dimensions, il est généralement assez simple d'étendre la méthode à trois dimensions. Cela sera maintenant démontré pour les intégrales. Nous avons la triple intégrale:

$$\int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dz dy dx$$

et veulent approximer l'intégrale par une règle du point milieu. En suivant les idées de la double intégrale, nous avons divisé cette intégrale en intégrales

unidimensionnelles:

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \int_e^f g(x, y, z) dz \\ q(x) &= \int_c^d p(x, y) dy \\ \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dz dy dx &= \int_a^b q(x) dx \end{aligned}$$

Pour chacune de ces intégrales unidimensionnelles, nous appliquons la règle du point milieu:

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \int_e^f g(x, y, z) dz \approx \sum_{k=0}^{n_z-1} g(x, y, z_k), \\ q(x) &= \int_c^d p(x, y) dy \approx \sum_{j=0}^{n_y-1} p(x, y_j), \\ \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dz dy dx &= \int_a^b q(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n_x-1} q(x_i), \end{aligned}$$

où

$$z_k = e + \frac{1}{2}h_z + kh_z, \quad y_j = c + \frac{1}{2}h_y + jh_y, \quad x_i = a + \frac{1}{2}h_x + ih_x$$

En commençant par la formule pour  $\int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dz dy dx$  et en insérant les deux formules précédentes donne

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d \int_e^f g(x, y, z) dz dy dx &\approx \\ h_x h_y h_z \sum_{i=0}^{n_x-1} \sum_{j=0}^{n_y-1} \sum_{k=0}^{n_z-1} g(a + \frac{1}{2}h_x + ih_x, c + \frac{1}{2}h_y + jh_y, e + \frac{1}{2}h_z + kh_z) &\quad (22) \end{aligned}$$

Notez que nous pouvons appliquer les idées sous Dérivation directe à la fin de la section 5.1 arrive à (22) directement: diviser le domaine en  $n_x \times n_y \times n_z$  cellules de volumes  $h_x h_y h_z$ ; approximativement  $g$  par une constante, évaluée au milieu  $(x_i, y_j, z_k)$ , dans chaque cellule; et additionner les intégrales de cellule  $h_x h_y h_z g(x_i, y_j, z_k)$ .

**Implémentation.** Nous suivons les idées pour les implémentations de la règle du point milieu pour une double intégrale. Les fonctions correspondantes sont présentées ci-dessous et se trouvent dans le fichier `midpoint_triple.py`.

```
def midpoint_triple1(g, a, b, c, d, e, f, nx, ny, nz):
    hx = (b - a)/float(nx)
    hy = (d - c)/float(ny)
```



```

hz = (f - e)/float(nz)
I = 0
for i in range(nx):
    for j in range(ny):
        for k in range(nz):
            xi = a + hx/2 + i*hx
            yj = c + hy/2 + j*hy
            zk = e + hz/2 + k*hz
            I += hx*hy*hz*g(xi, yj, zk)

return I

def midpoint(f, a, b, n):
    h = float(b-a)/n
    result = 0
    for i in range(n):
        result += f((a + h/2.0) + i*h)
    result *= h
    return result

def midpoint_triple2(g, a, b, c, d, e, f, nx, ny, nz):
    def p(x, y):
        return midpoint(lambda z: g(x, y, z), e, f, nz)

    def q(x):
        return midpoint(lambda y: p(x, y), c, d, ny)

    return midpoint(q, a, b, nx)

def test_midpoint_triple():
    """Test that a linear function is integrated exactly."""
    def g(x, y, z):
        return 2*x + y - 4*z

    a = 0; b = 2; c = 2; d = 3; e = -1; f = 2
    import sympy
    x, y, z = sympy.symbols('x y z')
    I_expected = sympy.integrate(
        g(x, y, z), (x, a, b), (y, c, d), (z, e, f))
    for nx, ny, nz in (3, 5, 2), (4, 4, 4), (5, 3, 6):
        I_computed1 = midpoint_triple1(
            g, a, b, c, d, e, f, nx, ny, nz)
        I_computed2 = midpoint_triple2(
            g, a, b, c, d, e, f, nx, ny, nz)
        tol = 1E-14
        print(I_expected, I_computed1, I_computed2)
        assert abs(I_computed1 - I_expected) < tol
        assert abs(I_computed2 - I_expected) < tol

if __name__ == '__main__':
    test_midpoint_triple()

```

## 6 Intégration Monte Carlo pour les domaines de forme complexe

L'utilisation répétée de règles d'intégration unidimensionnelles pour gérer les intégrales doubles et triples ne constitue une stratégie de travail que si le domaine

d'intégration est un rectangle ou une boîte. Pour toute autre forme de domaine, des méthodes complètement différentes doivent être utilisées. Une approche courante pour les domaines bidimensionnels et tridimensionnels consiste à diviser le domaine en plusieurs petits triangles ou tétraèdres et à utiliser des méthodes d'intégration numérique pour chaque triangle ou tétraèdre. L'algorithme global et l'implémentation sont trop compliqués pour être traités dans ce livre. Au lieu de cela, nous utiliserons une méthode alternative, très simple et générale, appelée *intégration de Monte Carlo*. Il peut être implémenté dans une demi-page de code, mais nécessite des ordres de grandeur plus d'évaluations de fonctions en intégrales doubles par rapport à la règle du point milieu.

Cependant, l'intégration Monte Carlo est beaucoup plus efficace en termes de calcul que la règle du point médian lors du calcul d'intégrales de dimension supérieure dans plus de trois variables sur des domaines d'hypercube. Nos idées d'intégrales doubles et triples peuvent être facilement généralisées pour gérer une intégrale en  $m$  variables. Une formule médiane implique alors  $m$  sommes. Avec  $n$  cellules dans chaque direction de coordonnées, la formule nécessite une fonction  $n^m$  d'évaluations. Autrement dit, le travail de calcul explose comme une fonction exponentielle du nombre de dimensions de l'espace. L'intégration de Monte-Carlo, quant à elle, ne souffre pas de cette explosion du travail de calcul et est la méthode préférée pour calculer les intégrales de dimension supérieure. Ainsi, il est logique dans un chapitre sur l'intégration numérique d'aborder les méthodes de Monte Carlo, à la fois pour la gestion de domaines complexes et pour la gestion d'intégrales avec de nombreuses variables.

## 6.1 L'algorithme d'intégration de Monte Carlo

L'idée de l'intégration Monte Carlo de  $\int_a^b f(x)dx$  est d'utiliser le théorème de la valeur moyenne du calcul, qui dit que l'intégrale  $\int_a^b f(x)dx$  est égale à la longueur du domaine d'intégration, ici  $b - a$ , multipliée par la *valeur moyenne* de  $f$ ,  $\bar{f}$ , dans  $[a, b]$ . La valeur moyenne peut être calculée en échantillonnant  $f$  à un ensemble de points *aléatoires* à l'intérieur du domaine et en prenant la moyenne des valeurs de fonction. Dans les dimensions supérieures, une intégrale est estimée comme l'aire/le volume du domaine multiplié par la valeur moyenne, et encore une fois, on peut évaluer l'intégrande à un ensemble de points aléatoires dans le domaine et calculer la valeur moyenne de ces évaluations.

Introduisons quelques quantités pour nous aider à rendre la spécification de l'algorithme d'intégration plus précise. Supposons que nous ayons une intégrale à deux dimensions

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy,$$

où  $\Omega$  est un domaine bidimensionnel défini via une fonction d'aide  $g(x, y)$ :

$$\Omega = \{(x, y) \mid g(x, y) \geq 0\}$$

Autrement dit, les points  $(x, y)$  pour lesquels  $g(x, y) \geq 0$  se trouvent à l'intérieur de  $\Omega$ , et les points pour lesquels  $g(x, y) < 0$  sont à l'extérieur de  $\Omega$ . La

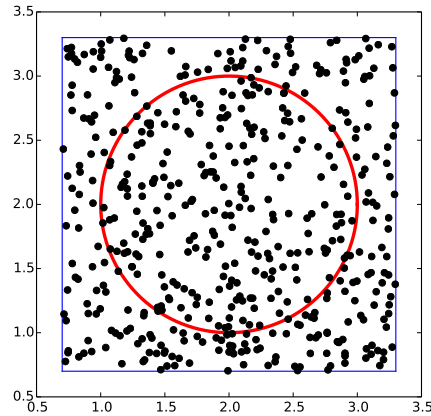
frontière du domaine  $\partial\Omega$  est donnée par la courbe implicite  $g(x, y) = 0$ . De telles formulations de géométries ont été très courantes au cours des deux dernières décennies, et l'une se réfère à  $g$  comme une fonction de *level-set* et la frontière  $g = 0$  comme le contour de niveau zéro de la fonction de level-set. Pour des géométries simples, on peut facilement construire  $g$  à la main, tandis que dans des applications industrielles plus compliquées, il faut recourir à des modèles mathématiques pour construire  $g$ .

Soit  $A(\Omega)$  l'aire d'un domaine  $\Omega$ . On peut estimer l'intégrale par cette méthode d'intégration de Monte Carlo:

1. incorporer la géométrie de  $\Omega$  dans une zone rectangulaire  $R$
2. dessiner un grand nombre de points aléatoires  $(x, y)$  dans  $R$
3. compter la fraction  $q$  de points qui sont à l'intérieur de  $\Omega$
4. approximativement  $A(\Omega)/A(R)$  par  $q$ , c'est-à-dire, régler  $A(\Omega) = qA(R)$
5. évaluer la moyenne de  $f, \bar{f}$ , aux points à l'intérieur de  $\Omega$
6. estimer l'intégrale comme  $A(\Omega)\bar{f}$

Notez que  $A(R)$  est trivial à calculer car  $R$  est un rectangle, tandis que  $A(\Omega)$  est inconnu. Cependant, si nous supposons que la fraction de  $A(R)$  occupée par  $A(\Omega)$  est la même que la fraction des points aléatoires à l'intérieur de  $\Omega$ , nous obtenons une estimation simple pour  $A(\Omega)$ .

Pour avoir une idée de la méthode, considérons un domaine circulaire  $\Omega$  incorporé dans un rectangle comme indiqué ci-dessous. Une collection de points aléatoires est illustrée par des points noirs.



## 6.2 Implémentation

Une fonction Python implémentant  $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy$  peut être écrite comme ceci:

```
import numpy as np

def MonteCarlo_double(f, g, x0, x1, y0, y1, n):
    """
    Monte Carlo integration of f over a domain g>=0, embedded
    in a rectangle [x0,x1]x[y0,y1]. n^2 is the number of
    random points.
    """
    # Draw n**2 random points in the rectangle
    x = np.random.uniform(x0, x1, n)
    y = np.random.uniform(y0, y1, n)
    # Compute sum of f values inside the integration domain
    f_mean = 0
    num_inside = 0 # number of x,y points inside domain (g>=0)
    for i in range(len(x)):
        for j in range(len(y)):
            if g(x[i], y[j]) >= 0:
                num_inside += 1
                f_mean += f(x[i], y[j])
    f_mean = f_mean/float(num_inside)
    area = num_inside/float(n**2)*(x1 - x0)*(y1 - y0)
    return area*f_mean
```

(Voir le fichier MC\_double.py.)

**Vérification.** Un cas de test simple consiste à vérifier l'aire d'un rectangle  $[0, 2] \times [3, 4.5]$  intégré dans un rectangle  $[0, 3] \times [2, 5]$ . La bonne réponse est 3, mais l'intégration de Monte Carlo n'est malheureusement jamais exacte, il est donc impossible de prédire la sortie de l'algorithme. Tout ce que nous savons, c'est que l'intégrale estimée devrait approcher 3 lorsque le nombre de points aléatoires va à l'infini. De plus, pour un nombre fixe de points, nous pouvons exécuter l'algorithme plusieurs fois et obtenir différents nombres qui fluctuent autour de la valeur exacte, car différents points d'échantillonnage sont utilisés dans différents appels à l'algorithme d'intégration de Monte Carlo.

L'aire du rectangle peut être calculée par l'intégrale  $\int_0^2 \int_{3.5}^4 4.53 dy dx$ , donc dans ce cas, nous identifions  $f(x, y) = 1$ , et la fonction  $g$  peut être spécifiée comme (par exemple) 1 si  $(x, y)$  est à l'intérieur de  $[0, 2] \times [3, 4.5]$  et  $-1$  sinon. Voici un exemple sur la façon dont nous pouvons utiliser la fonction `MonteCarlo_double` pour calculer la zone pour différents nombres d'échantillons:

```
>>> from MC_double import MonteCarlo_double
>>> def g(x, y):
...     return (1 if (0 <= x <= 2 and 3 <= y <= 4.5) else -1)
...
>>> MonteCarlo_double(lambda x, y: 1, g, 0, 3, 2, 5, 100)
2.9484
>>> MonteCarlo_double(lambda x, y: 1, g, 0, 3, 2, 5, 1000)
2.947032
>>> MonteCarlo_double(lambda x, y: 1, g, 0, 3, 2, 5, 1000)
3.0234600000000005
```

```
>>> MonteCarlo_double(lambda x, y: 1, g, 0, 3, 2, 5, 2000)
2.9984580000000003
>>> MonteCarlo_double(lambda x, y: 1, g, 0, 3, 2, 5, 2000)
3.1903469999999996
>>> MonteCarlo_double(lambda x, y: 1, g, 0, 3, 2, 5, 5000)
2.986515
```

Nous voyons que les valeurs fluctuent autour de 3, un fait qui prend en charge une implémentation correcte, mais en principe, des bugs peuvent être cachés derrière les réponses inexactes.

Il est mathématiquement connu que l'écart-type de l'estimation de Monte Carlo d'une intégrale converge comme  $n^{-1/2}$ , où  $n$  est le nombre d'échantillons.

**Fonction de test pour la fonction avec des nombres aléatoires.** Pour créer une fonction de test, nous avons besoin d'un test unitaire qui a un comportement identique à chaque fois que nous exécutons le test. Cela semble difficile lorsque des nombres aléatoires sont impliqués, car ces nombres sont différents à chaque fois que nous exécutons l'algorithme, et chaque exécution produit donc un résultat (légèrement) différent. Une façon standard de tester des algorithmes impliquant des nombres aléatoires consiste à *fixer* le *seed* du générateur de nombres aléatoires. Ensuite, la séquence de nombres est la même chaque fois que nous exécutons l'algorithme. En supposant que la fonction `MonteCarlo_double` fonctionne, nous fixons le *seed*, observons un certain résultat et prenons ce résultat comme le résultat correct. À condition que la fonction de test utilise toujours cette valeur de départ (*seed*), nous devrions obtenir exactement ce résultat chaque fois que la fonction `MonteCarlo_double` est appelée. Notre fonction de test peut alors être écrite comme indiqué ci-dessous.

```
def test_MonteCarlo_double_rectangle_area():
    """Check the area of a rectangle."""
    def g(x, y):
        return (1 if (0 <= x <= 2 and 3 <= y <= 4.5) else -1)

    x0 = 0; x1 = 3; y0 = 2; y1 = 5 # embedded rectangle
    n = 1000
    np.random.seed(8) # must fix the seed!
    I_expected = 3.121092 # computed with this seed
    I_computed = MonteCarlo_double(
        lambda x, y: 1, g, x0, x1, y0, y1, n)
    assert abs(I_expected - I_computed) < 1E-14
```

(Voir le fichier `MC_double.py`.)

**Intégrale sur un cercle.** Le test ci-dessus implique une fonction triviale  $f(x, y) = 1$ . Nous devons également tester une fonction  $f$  non constante et un domaine plus compliqué. Soit  $\Omega$  un cercle à l'origine de rayon 2, et soit  $f = \sqrt{x^2 + y^2}$ . son choix permet de calculer un résultat exact: en coordonnées polaires,  $\int_{\Omega} f(x, y) dx dy$  se simplifie à  $2\pi \int_0^2 r^2 dr = 16\pi/3$ . Nous devons nous préparer à des approximations assez grossières qui fluctuent autour de ce résultat exact. Comme dans le cas de test ci-dessus, nous obtenons de meilleurs résultats

avec un plus grand nombre de points. Lorsque nous avons de telles preuves pour une implémentation fonctionnelle, nous pouvons transformer le test en une fonction de test appropriée. Voici un exemple:

```
def test_MonteCarlo_double_circle_r():
    """Check the integral of r over a circle with radius 2."""
    def g(x, y):
        xc, yc = 0, 0 # center
        R = 2 # radius
        return R**2 - ((x-xc)**2 + (y-yc)**2)

    # Exact: integral of r*r*dr over circle with radius R becomes
    # 2*pi*1/3*R**3
    import sympy
    r = sympy.symbols('r')
    I_exact = sympy.integrate(2*sympy.pi*r*r, (r, 0, 2))
    print('Exact integral:', I_exact.evalf())
    x0 = -2; x1 = 2; y0 = -2; y1 = 2
    n = 1000
    np.random.seed(6)
    I_expected = 16.7970837117376384 # Computed with this seed
    I_computed = MonteCarlo_double(
        lambda x, y: np.sqrt(x**2 + y**2),
        g, x0, x1, y0, y1, n)
    print('MC approximation %d samples): %.16f' % (n**2, I_computed))
    assert abs(I_expected - I_computed) < 1E-15
```

(Voir le fichier MC\_double.py.)