

# TD N°5 : Équations différentielles ordinaires

Ahmed Ammar ([ahmed.ammar@fst.utm.tn](mailto:ahmed.ammar@fst.utm.tn))

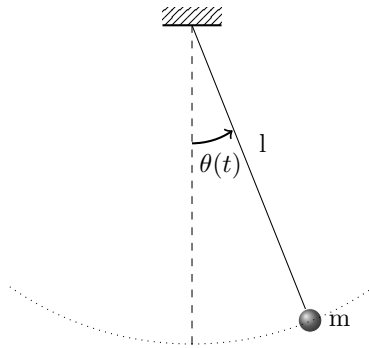
Institut Préparatoire aux Études Scientifiques et Techniques, Université de Carthage.

Feb 26, 2020

## Contents

### Exercice 1: Pendule simple

On considère un pendule simple de masse  $m = 1 \text{ kg}$ , de longueur  $l = 1 \text{ m}$  qui va osciller d'arrière en avant à cause du champ de gravité de la Terre  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ .



Le pendule a l'équation du mouvement :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\sin(\theta) \quad (1)$$

Pour les petites amplitudes d'oscillation,  $\theta \ll 1$ , on peut faire l'approximation  $\sin(\theta) \approx \theta$ , on retrouve alors l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta \quad (2)$$

La solution exacte de cette équation est simplement:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) \quad (3)$$

où  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$  et nous avons supposé que le pendule partait du repos avec un déplacement initial  $\theta_0 = 0.2 \text{ rad}$ .

Nous allons transformer l'équation différentielle d'ordre 2 (Eq. (2)) en deux équations différentielles d'ordre 1 afin de pouvoir utiliser simplement la méthode d'Euler. En posant  $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$  la vitesse angulaire du pendule, on obtient le système de deux fonctions inconnues suivant :

$$\dot{\theta}(t) = \omega(t) \quad (4)$$

$$\dot{\omega}(t) = -\omega_0^2 \theta(t) \quad (5)$$

Pour résoudre ce système nous devons connaître les deux conditions initiales suivantes :

$$\theta(0) = \theta_0$$

$$\omega(0) = 0$$

a) Définir une fonction `sol_exacte(t)` qui renvoie la solution exacte de l'oscillateur harmonique donnée par l'équation (3). Tracer cette solution pour  $t \in [0, 10]$  et pour un pas de  $\Delta t = 0.01 \text{ s}$ .

#### Indication.

- Utiliser la fonction `numpy.arange()` pour créer le vecteur temps `t`.
- Utiliser la fonction `matplotlib.pyplot.plot()` pour tracer `sol_exacte(t)`.

b) Rappeler l'expression de la méthode *d'Euler explicite* pour ce système.

c) Calculer  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}$  avec la méthode d'Euler explicite pour  $t \in [0, 10]$  et pour un pas d'intégration  $\Delta t = 0.01 \text{ s}$ .

Tracer:

- Dans un même graphique, la variation de l'amplitude d'oscillation  $\theta$  en fonction du temps  $t$  et le diagramme des phases (vitesse angulaire  $\omega$  en fonction de  $\theta$ ).
- Dans un graphique 3D, la vitesse angulaire  $\omega$  et l'amplitude d'oscillation  $\theta$  en fonction du temps  $t$ .

Que remarquez-vous pour le résultat trouvé?

**Indication.** On vous donne les instructions nécessaires pour reproduire un graphique en 3D:

```
from mpl_toolkits.mplot3d.axes3d import Axes3D
plt.figure()
ax = plt.axes(projection="3d")
ax.plot(...)
```

- d) Rappeler l'expression de la méthode *d'Euler implicite* pour ce système.
- e) Calculer  $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \theta(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix}$  avec la méthode d'Euler implicite pour  $t \in [0, 10]$  et pour un pas d'intégration  $\Delta t = 0.01$  s.  
Tracer:

- Dans un même graphique, la variation de l'amplitude d'oscillation  $\theta$  en fonction du temps  $t$  et le diagramme des phases (vitesse angulaire  $\omega$  en fonction de  $\theta$ ).
- Dans un graphique 3D, la vitesse angulaire  $\omega$  et l'amplitude d'oscillation  $\theta$  en fonction du temps  $t$ .

Que remarquez-vous pour le résultat trouvé?

- f) Tracer dans un même graphique pour  $t \in [0, 10]$  et avec un pas  $\Delta t = 0.01$  s:
- `sol_exacte(t)` calculée dans a).
  - $\theta(t)$  calculée dans c) par la méthode d'Euler explicite.
  - $\theta(t)$  calculée dans e) par la méthode d'Euler implicite.

Que remarquez-vous si nous modifions la valeur du pas d'intégration par  $\Delta t = 0.001$  s? Expliquer le résultat trouvé.

## Exercice 2: Comparaison des schémas d'Euler explicite et implicite

On considère le problème de Cauchy:

$$\frac{dz(t)}{dt} = 1 - \frac{t}{\mu}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad z(0) = z_0 \quad (6)$$

On rappelle que la solution exacte de ce problème est donnée par:

$$z(t) = \mu - (\mu - z_0)e^{-\frac{t}{\mu}} \quad (7)$$

1. Définir une fonction `sol_exacte(t, mu, z0)` qui renvoie la solution exacte donnée par l'équation (7). Tracer sur un même graphique pour  $\mu = 1$  et  $z_0 \in \{0, 1, 2\}$  ces solutions. Soit  $t \in [0, 2]$  et pour un pas de  $\Delta t = 0.1$  s.
2. Même questions pour  $\mu = 0.05$  et  $z_0 \in \{0, 1, 2\}$ .
3. On suppose dans cette question que  $\mu = 0.05$  et que  $z_0 = 2$ .

a)

- Rappeler l'expression de la méthode *d'Euler explicite* pour ce problème.
- Calculer  $z(t)$  avec la méthode *d'Euler explicite* pour  $t \in [0, 2]$  et pour un pas d'intégration  $\Delta t = 0.1$  s.

b)

- Montrer que l'expression de la méthode *d'Euler implicite* est:

$$z_{n+1} = \frac{z_n + \frac{\Delta t}{\mu}}{1 + \frac{\Delta t}{\mu}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

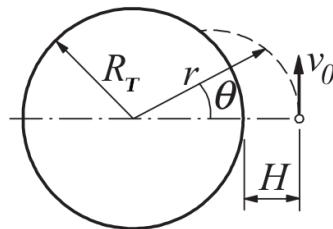
- Calculer  $z(t)$  avec la méthode *d'Euler implicite* pour  $t \in [0, 2]$  et pour un pas d'intégration  $\Delta t = 0.1$  s.

c) Tracer dans un même graphique pour  $t \in [0, 2]$  et avec des pas d'intégration  $\Delta t = 0.5, 0.1, 0.05, 0.01, 0.005$  s:

- La solution exacte: `sol_exacte(t, 0.05, 2)`
- $z(t)$  calculée par la méthode d'Euler explicite.
- $z(t)$  calculée par la méthode d'Euler explicite.

Que remarquez-vous pour les résultats trouvés? Quelle est la méthode la plus proche de la solution exacte?

### Exercice 3: Atterrissage d'un vaisseau spatial



Un vaisseau spatial est lancé à l'altitude  $H = 772$  km au-dessus du niveau de la mer avec la vitesse  $v_0 = 6700$  m/s dans la direction indiquée sur la figure

ci-dessus. Les équations différentielles décrivant le mouvement du vaisseau spatial sont:

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{GM_T}{r^2}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r}$$

où  $r$  et  $\theta$  sont les coordonnées polaires du vaisseau spatial. Les constantes impliquées dans le mouvement sont:

- $G = 6.672 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  = constante gravitationnelle universelle.
- $M_T = 5.9742 \times 10^{24} \text{ kg}$  = masse de la terre.
- $R_T = 6378.14 \text{ km}$  = rayon de la terre au niveau de la mer.

**a)** Dériver les équations différentielles du premier ordre et les conditions initiales de la forme  $\dot{y} = F(t, y)$ ,  $y(0) = b$ .

**b)** Utiliser la méthode Runge-Kutta du quatrième ordre (RK4) pour intégrer les équations depuis le lancement jusqu'à ce que le vaisseau spatial touche la terre. Déterminez  $\theta$  au site d'impact.