TD N°4 : Intégration numérique

Ahmed Ammar (`ahmed.ammar@fst.utm.tn`)

Institut Préparatoire aux Études Scientifiques et Techniques, Université de Carthage.

Jan 29, 2020

Contents

Exercice 1: Vitesse d'une fusée

On lance une fusée verticalement du sol et l'on mesure pendant les premières 80 secondes l'accélération γ:

t[s]	0	10	20	30	40	50	60	70	80
γ [m s^{-2}]	30	31.63	33.44	35.47	37.75	40.33	43.29	46.70	50.67

Calculer la vitesse V de la fusée à l'instant $t = 80\ s$, par la méthode des trapèzes.

Exercice 2: Valeur approchée de π

Étant donnée l'égalité:

$$\pi = 4\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = 4\left(\int_0^{10} e^{-x^2}dx + \epsilon\right)^2 \tag{1}$$

avec $0 < \epsilon < 10^{-44}$, utiliser la méthode des trapèzes composite à 10 intervalles pour estimer la valeur de π.

Exercice 3: Intégration adaptative

Supposons que nous voulons utiliser la méthode des trapèzes ou du point milieu pour calculer une intégrale $\int_a^b f(x)dx$ avec une erreur inférieure à une tolérance prescrite ϵ. Quelle est la taille appropriée de n?

Pour répondre à cette question, nous pouvons entrer une procédure itérative où nous comparons les résultats produits par n et $2n$ intervalles, et si la différence est inférieure à ϵ, la valeur correspondant à $2n$ est retournée. Sinon, nous avons n et répétons la procédure.

Indication. Il peut être une bonne idée d'organiser votre code afin que la fonction `integration_adaptive` peut être utilisé facilement dans les programmes futurs que vous écrivez.

a) Écrire une fonction `integration_adaptive(f, a, b, eps, method="midpoint")` qui implémente l'idée ci-dessus (`eps` correspond à la tolérance ϵ, et la méthode peut être `midpoint` ou `trapeze`).

b) Testez la méthode sur $g(x) = \int_0^2 \sqrt{x}dx$ pour $\epsilon = 10^{-1}, 10^{-10}$ et notez l'erreur exacte.

c) Faites un tracé de n en fonction de $\epsilon \in [10^{-1}, 10^{-10}]$ pour $\int_0^2 \sqrt{x}dx$. Utilisez l'échelle logarithmique pour ϵ.

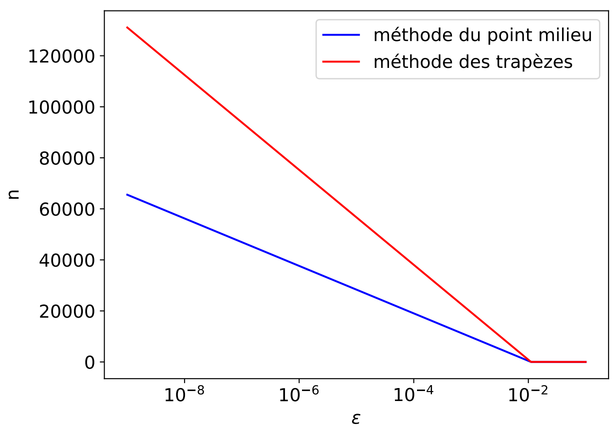

Figure 1: Affichage de n en fonction de ϵ lorsque $\int_0^2 \sqrt{x}dx$ est calculé par la méthode du point milieu (bleu) et la méthode des trapèzes (rouge).

Remarques. Le type de méthode exploré dans cet exercice est appelé *adaptatif*, car il essaie d'adapter la valeur de n pour répondre à un critère d'erreur donné. La vraie erreur peut très rarement être calculée (car nous ne connaissons pas la réponse exacte au problème de calcul), il faut donc trouver d'autres indicateurs de l'erreur, comme celui ici où les changements de la valeur intégrale, comme le nombre d'intervalles est doublé, est pris pour refléter l'erreur.

Exercice 4: Intégration de x élevé à x

Considérons l'intégrale

$$I = \int_0^2 x^x \, dx \, .$$

L'intégrande x^x n'a pas de primitive qui peut être exprimé en termes de fonctions standard (visitez http://wolframalpha.com et tapez `integral x^x dx from 0 to 2` pour vous convaincre que notre affirmation est juste. Notez que Wolfram alpha vous donne une réponse, mais cette réponse est une approximation, elle n'est pas *exacte*. C'est parce que Wolfram alpha utilise également des méthodes numériques pour arriver à la réponse, comme vous le ferez dans cet exercice). Par conséquent, nous sommes obligés de calculer l'intégrale par des méthodes numériques. Calculez un résultat composé de quatre chiffres.

Indication. Utilisez des idées de l'exercice 3.