Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Севастопольский государственный университет
Кафедра ИС

Отчет
по лабораторной работе №3
«Расчет числовых характеристик и энтропии непрерывной случайной величины»
по дисциплине
«ТЕОРИЯ ИНФОРМАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ»

Выполнил студент группы ИС/б-17-2-о
Горбенко К. Н.
Проверил
Заикина Е.Н.

Севастополь
2019

1 ЦЕЛЬ РАБОТЫ

• Изучение способов описания непрерывных случайных величин.

• Приобретение практических навыков расчета числовых характеристик и энтропии непрерывной случайной величины по ее плотности распределения вероятности.

2 ЗАДАНИЕ НА РАБОТУ

Ход данной лабораторной работы аналогичен ходу лабораторной работы №1; поскольку рассмотрению подлежит непрерывная случайная величина, а не дискретная, то ряд распределения заменяется плотностью распределения, а энтропия – дифференциальной энтропией.

3 ХОД РАБОТЫ

Выберем закон распределения Рэлея:

$$p(x) = \frac{x}{\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right).$$

Опишем ограничения, накладываемые на параметры распределения и функцию, определяющую плотность распределения вероятностей, проверим выполнение условия нормировки:

```
> restart :
  assume(x > 0) :
  assume(sigma :: integer, sigma > 0);
> p(x, sigma) := x/sigma^2 exp(-x^2/(2 sigma^2)) :
  int(p(x, sigma), x = 0 ..infinity);
                                    1                                   (1)
```

Рисунок 1 – Функция плотности вероятностей

Опишем функции вычисления начального момента порядка s и математического ожидания:

```
> Moment(sigma, s) := int((x^s)p(x, sigma), x = 0 ..infinity) :
  Moment(sigma, s);
```

$$2^{\frac{s}{2}}\sigma\sim^{s}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) \tag{2}$$

```
> Moment(sigma, 0);
```

$$1 \tag{3}$$

```
> MO(sigma) := Moment(sigma, 1) :
  MO(sigma);
```

$$\frac{\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}}{2\,\sigma\sim^{2}\left(\frac{1}{\sigma\sim^{2}}\right)^{3/2}} \tag{4}$$

Рисунок 2 – Начальный момент и математическое ожидание

График зависимости математического ожидания от σ изображен на рисунке 3

```
> plot(MO(sigma), sigma = 0 ..10);
```

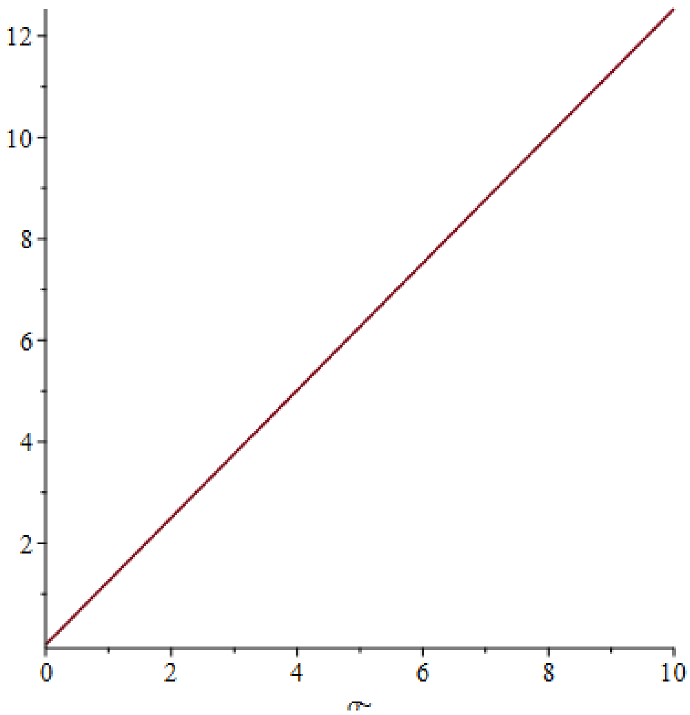

Рисунок 3 – График зависимости математического ожидания от σ

Опишем функцию вычисления центрального момента порядка s:

```
> mu(sigma, s) := (int((x − MO(sigma))^s·p(x, sigma), x = 0 ..infinity)) :
  mu(sigma, 0);
  mu(sigma, 1);
```

$$1$$

$$0 \tag{5}$$

Рисунок 4 – Центральный момент порядка s

Опишем функцию вычисления дисперсии. Построим график ее зависимости от σ:

```
> Dsp(sigma) := mu(sigma, 2) :
  Dsp(sigma);
  plot(Dsp(sigma), sigma = 0 ..10);
```

$$-\frac{1}{2}\sigma\sim^2\pi + 2\,\sigma\sim^2$$

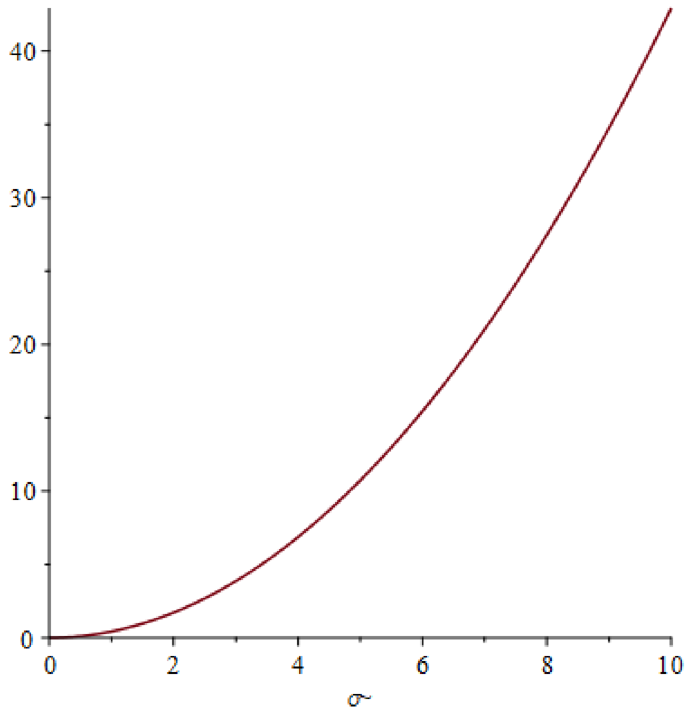

Рисунок 5 – График зависимости дисперсии от σ

Опишем функцию вычисления среднеквадратического отклонения. Построим график его зависимости от σ:

```
> SD(sigma) := sqrt(Dsp(sigma)) :
  SD(sigma);
  plot(SD(sigma), sigma = 0 ..10);
```

$$\frac{\sqrt{-2\,\sigma\sim^{2}\pi + 8\,\sigma\sim^{2}}}{2}$$

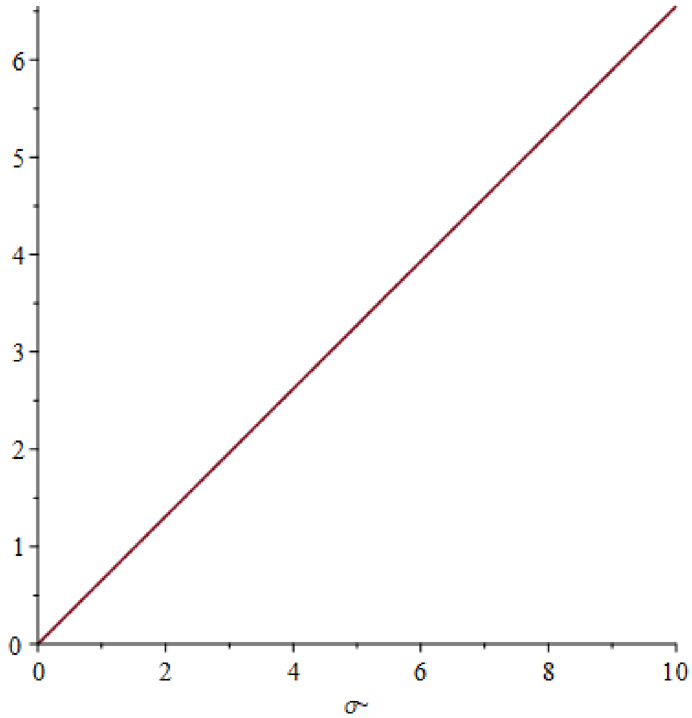

Рисунок 6 – График зависимости среднеквадратического отклонения от σ

СКО закона распределения Рэлея линейно зависит от σ.

Опишем функцию вычисления коэффициента ассиметрии. Построим график его его зависимости от σ:

$> Skewness(\mathrm{sigma}) := \dfrac{\mathrm{mu}(\mathrm{sigma}, 3)}{SD(\mathrm{sigma})^3}:$

$Skewness(\mathrm{sigma});$

$plot(Skewness(\mathrm{sigma}), \mathrm{sigma} = 0..10, Skewness = 0..1);$

$$\frac{8\left(\frac{\sigma\sim^3\sqrt{2}\,\pi^{3/2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}\,\sqrt{\pi}\,\sigma\sim^3}{2}\right)}{\left(-2\,\sigma\sim^2\pi + 8\,\sigma\sim^2\right)^{3/2}}$$

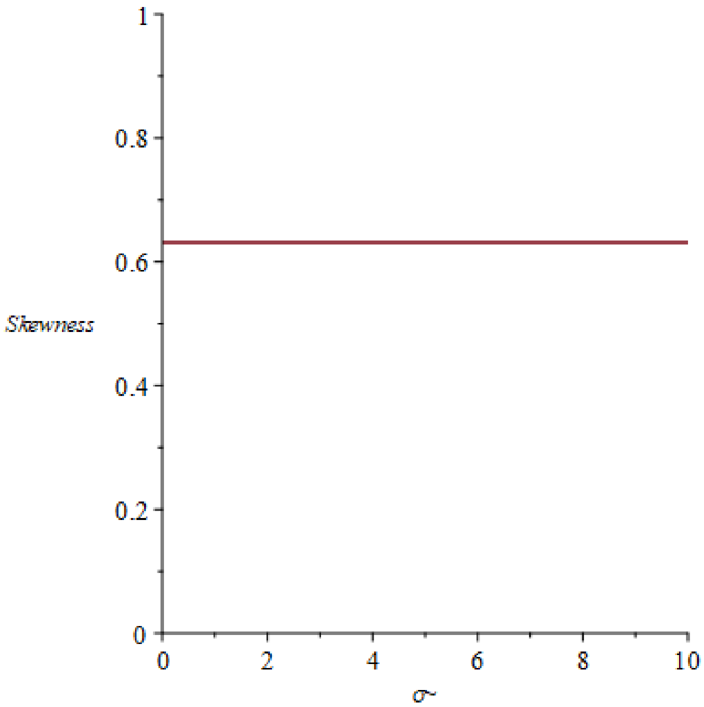

Рисунок 7 – График зависимости коэффициента ассиметрии от σ

Опишем функцию вычисления коэффициента эксцесса. Построим график его его зависимости от σ:

$$> \mathit{Kurtosis}(\mathrm{sigma}) := \frac{\mathrm{mu}(\mathrm{sigma}, 4)}{\mathit{SD}(\mathrm{sigma})^4} - 3:$$

$\mathit{Kurtosis}(\mathrm{sigma});$

$\mathit{plot}(\mathit{Kurtosis}(\mathrm{sigma}), \mathrm{sigma} = 0\,..10, \mathit{Kurtosis} = 0\,..1)$

$$\frac{16\left(-\frac{3}{4}\,\sigma\sim^4\,\pi^2 + 8\,\sigma\sim^4\right)}{\left(-2\,\sigma\sim^2\,\pi + 8\,\sigma\sim^2\right)^2} - 3$$

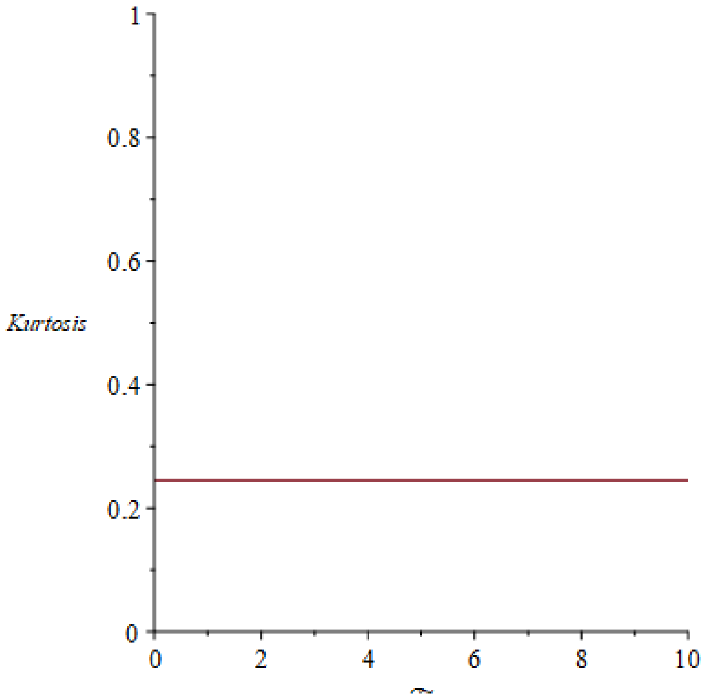

Рисунок 8 – График зависимости коэффициента эксцесса от σ

Коэффициенты ассиметрии и эксцесса не зависят от $sigma$.

Построим графики плотности вероятностей для различных σ.

> plot([p(x, 5), p(x, 10), p(x, 15)], x = 0..60);

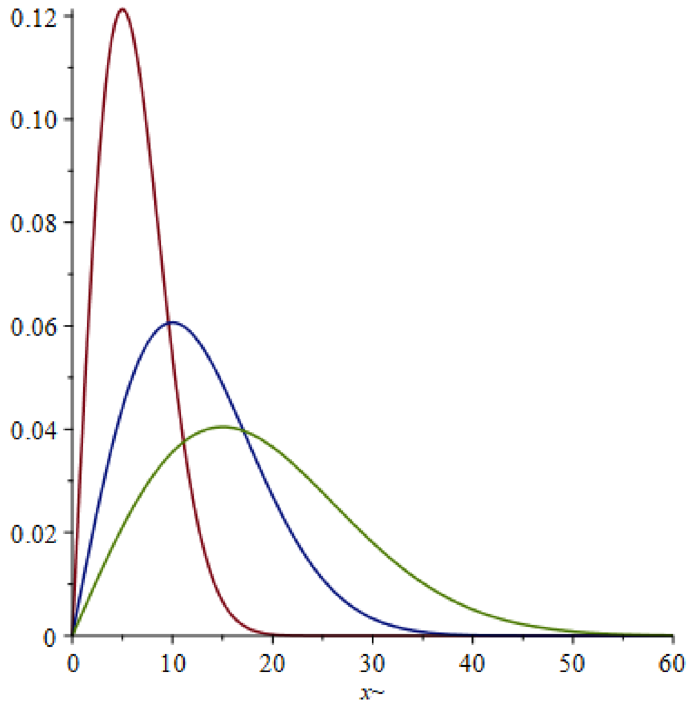

Рисунок 9 – Графики плотности вероятностей при $\sigma = 5$, $\sigma = 10$, $\sigma = 15$

Опишем функцию вычисления интегральной функци распределения. Построим ее графики для различных σ:

```
> F(x, sigma) := int(p(i, sigma), i = 0 ..x) :
  F(x, sigma);
  plot([F(x, 5), F(x, 10), F(x, 15)], x = 0 ..60);
```

$$1 - e^{-\frac{x\sim^2}{2\,\sigma\sim^2}}$$

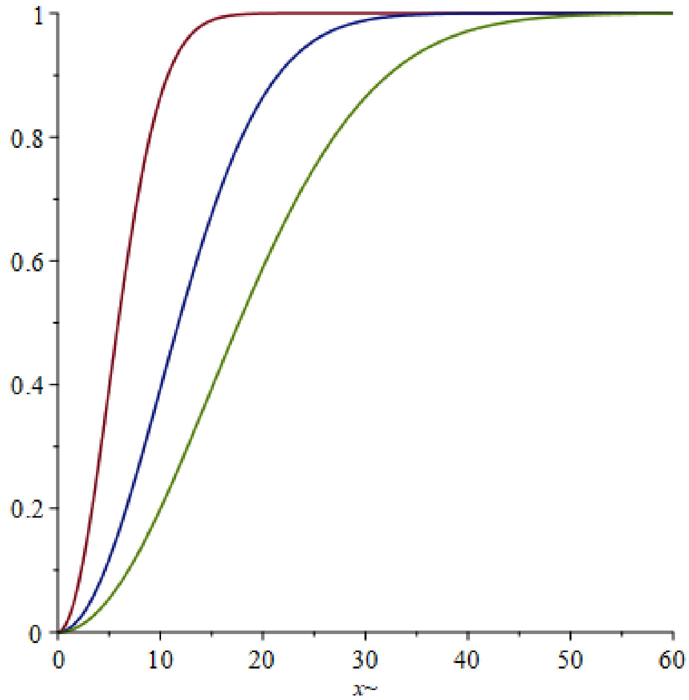

Рисунок 10 – Графики интегральной функции при σ = 5, σ = 10, σ = 15

Опишем функцию вычисления дифференциальной энтропии. Построим график ее зависимости от σ

```
> H(sigma) := int(p(x, sigma)·ln(p(x, sigma)), x = 0 ..infinity) :
  H(sigma);
  plot(H(sigma), sigma = 0 ..10);
```

$$-\frac{\gamma}{2} + \frac{\ln(2)}{2} - \ln(\sigma\sim) - 1$$

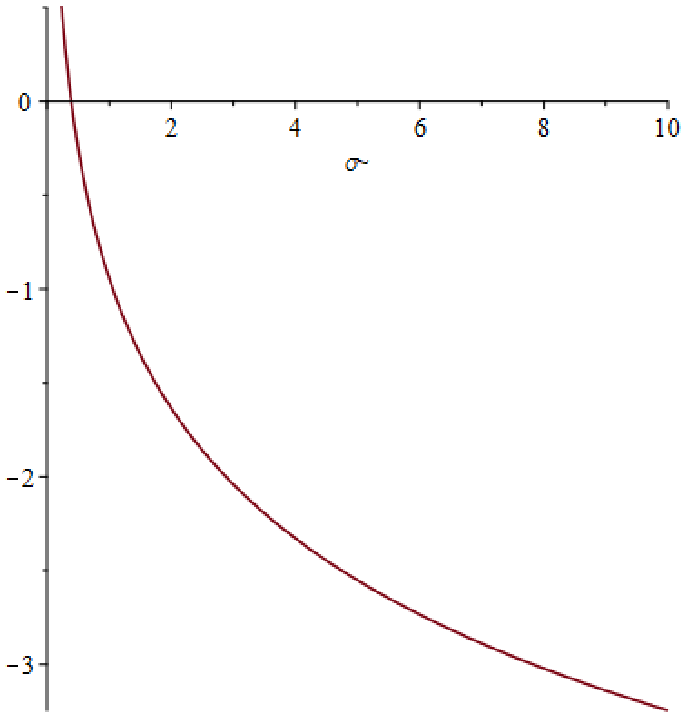

Рисунок 11 – График зависимости дифференциальной энтропии от σ

Дифференциальная энтропия принимает отрицательные значения в промежутке [0.4; ∞]

ВЫВОД

В ходе лабораторной работы был исследован закон распределения Рэлея. Он имеет параметр σ, характеризующий масштаб распределения. СКО случайной величины, распределенной по данному закону, линейно зависит от параметра σ, а дисперсия квадратично. Коэффициенты ассиметрии и эксцесса не зависят от σ.