Ej 1

Monday, October 10, 2022 1:21 AM

Problema 1:

Dado el siguiente SEL: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Se aplicaron los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel con la semilla $(x_0,y_0)=(6,1)$. Los resultados luego de la primera iteración fueron los siguientes: $(x_1, y_1)_{JAC} = (1.5, -1)$
$(x_1, y_1)_{G\text{-}S} = (1.5, 0.5)$

a) Hallar los valores de *c* y *d*.

b) ¿Es posible la convergencia a la solución exacta con cada método? No es necesario hallar la solución, solo justificar conceptualmente.

a) Jacobi: I $x^{(1)} = \dfrac{4-y^{(0)}}{2}$ GS: $x^{(1)} = \dfrac{4-y^{(0)}}{2}$

II $y_J^{(1)} = \dfrac{3-cx^{(0)}}{d}$ $y^{(1)} = \dfrac{3-cx^{(1)}}{d}$ III

I $x^{(1)} = \dfrac{4-1}{2} = 1.5$ idem

II $y_J^{(1)} = \dfrac{3-c.6}{d} = -1$ $y_{GS}^{(1)} = \dfrac{3-c.1.5}{d} = 0.5$ III

$\downarrow$ $\downarrow$

$\boxed{6c-d=3}$ $1.5c+0.5d=3$

$\downarrow$

$\boxed{3c+d=6}$

$\rightarrow$ $9c=9$ $\rightarrow$ $\boxed{\begin{matrix} c=1 \\ d=3 \end{matrix}}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow$ matriz diagonal dominante

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow$ matriz diagonal dominante

converge

Ej 2

Monday, October 10, 2022 1:21 AM

Problema 2: Dado el siguiente SENL de 2x2: $x^3-(y-1)^2=0$

$y^3-(x-2)^2=7$

a) Aplicar el método de Newton Raphson utilizando la semilla (2,1). Realizar una sola iteración.
b) Explicar qué alternativa se podría implementar si se quiere evitar la inversión del Jacobiano en cada iteración (no resolv er).

$$\text{NR: } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3x^2 & -2(y-1) \\ -2(x-2) & 3y^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 8 \\ -6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ -1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1{,}33 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

sol exacta: $x=1 \quad y=2$

b) Utilizar la matriz $\begin{bmatrix} 1/12 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$ en todas las iteraciones

Ej 3

Monday, October 10, 2022 1:21 AM

Problema 3: Dado el SEL $\begin{pmatrix} 3.0 & 0.50 \\ 1.5 & 2.0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.0 \\ 5.0 \end{pmatrix}$

Se obtuvo la solución aproximada $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0.67\,, 2.0)$ utilizando aritmética de 2 dígitos. Se quiere mejorar la solución aplicando refinamiento iterativo.

a) Calcular el residuo.

b) Si se obtuvo $(\delta\tilde{x}, \delta\tilde{y}) = (-0.0043\,, 0.0057)$ re-aplicando la factorización LU. Justificar si sería conveniente refinar la primera solución.

a) $\underline{r} = \underline{b} - \underline{\underline{A}}.\tilde{x}$

doble precisión → $t = 4$

$$= \begin{bmatrix} 3.0 \\ 5.0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3.0 & 0.50 \\ 1.5 & 2.0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.67 \\ 2.0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3.0 \\ 5.0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3.010 \\ 5.005 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.010 \\ -0{,}0050 \end{bmatrix}$$

b) $$K(A) \simeq \frac{\|\delta x\|}{\|\tilde{x}\|} \cdot 10^2 = \frac{7.1 \cdot 10^{-3}}{2.1} \cdot 10^2 \simeq 0{,}34$$

muy baja

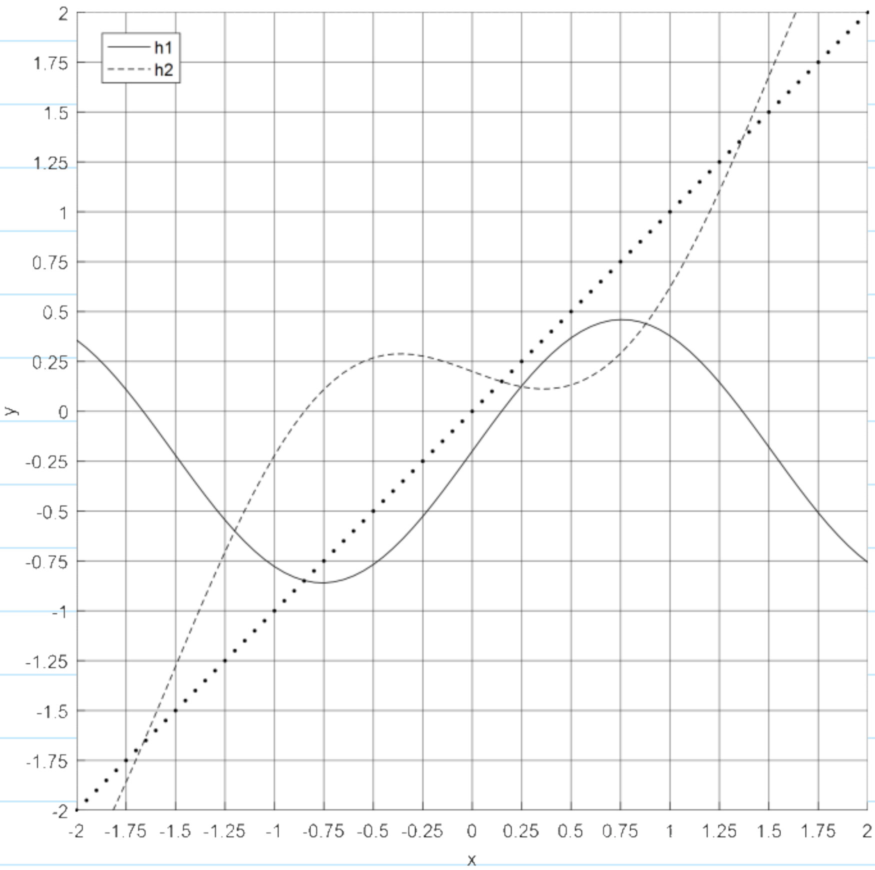
$$p = \log_{10} K(a) \simeq -0{,}46$$

$$q = t - p \simeq 2{,}46$$ → ok para refinar

Ej 4

Monday, October 10, 2022 1:22 AM

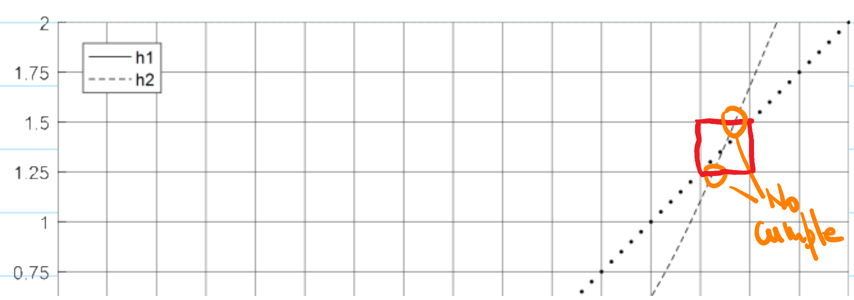
Problema 4: El gráfico indica dos funciones en las que se cumple: $h_1(x) + h_2(x) = x$
a) Indicar una posible función $g(x)$ que pueda utilizarse para hallar raíces de h_1 mediante el método de Punto Fijo. Para cada raíz de h_1 identificable en el gráfico encontrar, si es posible, un intervalo en el que esté garantizada la convergencia a través del Teorema de Punto Fijo. El intervalo hallado deberá ser lo más angosto posible y según la grilla. JUSTIFICAR cada paso realizado.
Ejemplos posibles de intervalos informar: (0.25 , 0.5) | (0.25 , 0.75) | (1, 2). Ejemplos incorrectos: (0.33 , 1.33) | (1.5 , 1.8)

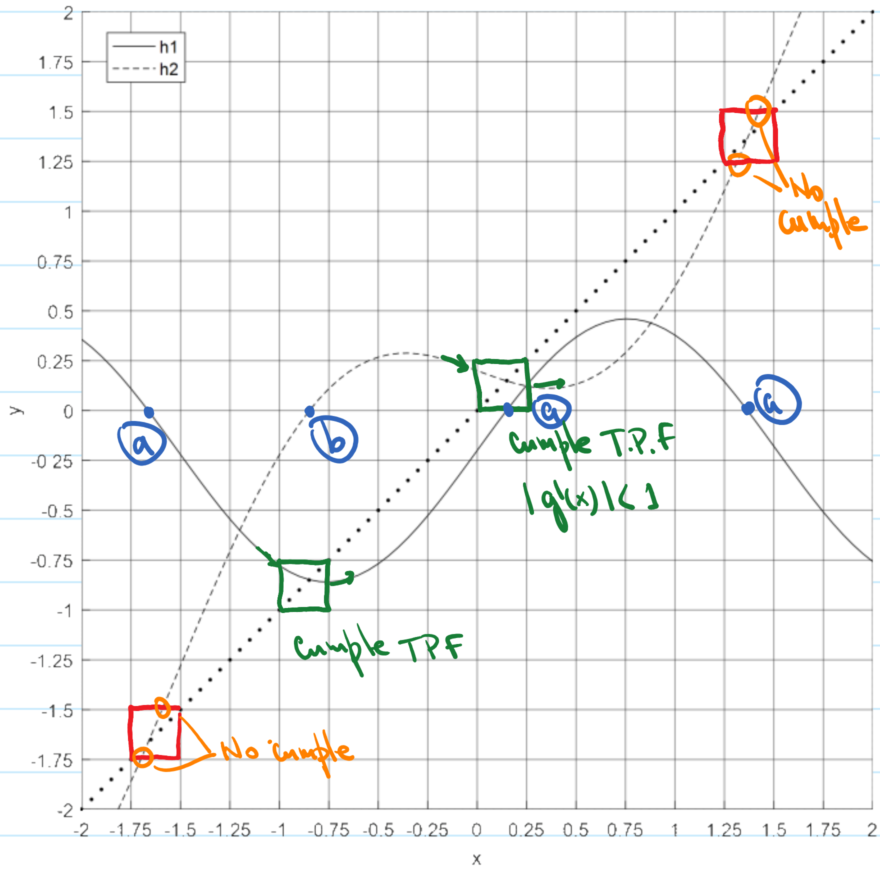


Observar que las grillas horizontal y vertical tienen la misma escala. Deberá utilizar esto para realizar estimaciones pertinentes. La línea de puntos es una ayuda visual que deberá saber interpretarse.

b) Repetir el mismo procedimiento pedido en a) para la función h_2.

a) $g(x) = x - h_1(x) = h_2(x)$ ✓





5