HOJA N°
FECHA

Guía 1

✓ 1 ✓
2 A B C D ✓ E
✓ 3 A B C D ✓
4
5 A B ← ¡Determinarme!
✓ 6 A B C ✓ D E
7
8
✓ 9 ✓
10 A B C 1c
11 A B ✓ C
? 12 A ✓? B C
13
14 A B ✓ C 1c
15 A B ✓ C D 1c
✓ 16 ✓
19
20 Práctica 06/09
? 21 A B ✓/ C 1c ?
22
✓ 23 ✓
? 24 ?
25

NOTA

? 26 A B C ✓?

? 27 ? lagrange

28 A ✓ B C

✓ 29 ✓

? 30 A ? B

31

32 A ✓ B C

33

? 34 ✓ ?

? 35 ?

36

NOTA

HOJA N°

FECHA

1.1) $\cancel{(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}, \oplus)}$ $(\mathbb{R}^+_*, \oplus, \mathbb{R}, \odot)$

$v \oplus w = v.w$ $\quad a \odot v = v^a$

$\mathbb{O}_V = 1$ $\quad v^{-1}$ opuesto v

Conmutatividad: $v \oplus w = w \oplus v \to v.w = w.v$ ✓

Asociatividad: $u + (v+w) = (u+v)+w = u+v+w$

$u \cdot (v \cdot w) = (u.v).w = u.v.w$ ✓

Existencia del elemento neutro para la suma:

$\exists\, \mathbb{O}_V \in V \;/\; u + \mathbb{O}_V = \mathbb{O}_V + u = u$

$u.1 = 1.u = u$ ✓

$1.u = u \;/\; \forall u \in V : \quad u^1$ ✓

Existencia del inverso aditivo para todo elemento de V:

$\forall u \in V, \; \exists (-u) \in V \to u + (-u) = \mathbb{O}_V$

$u \cdot (u^{-1}) = 1$

$\cancel{u} \cdot \frac{1}{\cancel{u}} = 1$ ✓

$(\lambda.\beta).u = \lambda(\beta.u) \quad \forall \lambda, \forall \beta \in \mathbb{K} \;\; y \;\; \forall u \in V$

$(\lambda.\beta).u = \lambda(\beta.u) \longrightarrow \mathbb{R}$ ✓

$\lambda(u+v) = \lambda.u + \lambda.v \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \;\; y \;\; \forall u, v \in V.$

$\longrightarrow \mathbb{R}$ ✓

$(\lambda+\beta).u = \lambda.u + \beta.u \quad \forall \lambda, \beta \in \mathbb{R}\,(\mathbb{K}) \;\; y \;\; \forall u \in V \, (\mathbb{R}^+_*)$

✓

NOTA

1.2) $\left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$ ¿es subespacio de $\mathbb{R}^3$?

A) ¿ $0_v \in S$? $\quad a = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0_v = 0_{\mathbb{R}^3}$ ✓

B) $u, v \in S \rightarrow u + v \in S$

$a, b \in \mathbb{R} \rightarrow \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ 0 \\ a+b \end{bmatrix} \in S$ ✓

$(a+b) \in \mathbb{R}$

C) $u \in S$ y $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda . u \in S$

$k \in \mathbb{R} \quad k \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k.a \\ 0 \\ k.a \end{bmatrix} \quad k.a \in \mathbb{R}$ ✓

$\longrightarrow \in \mathbb{R}^3.$

Cumple las 3 propiedades, es subespacio de $\mathbb{R}^3$.

II) $\begin{bmatrix} a+b \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \quad a, b \in \mathbb{R}$ ¿ subespacio de $\mathbb{R}^3$?

A) $a = 0, b = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3}$ ✓

B) $\begin{bmatrix} a+b \\ 0 \\ a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c+d \\ 0 \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b+c+d \\ 0 \\ a+c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ✓

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$a+b+c+d \in \mathbb{R}, \quad a+c \in \mathbb{R}.$

C) $k \begin{bmatrix} a+b \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \quad k, a, b \in \mathbb{R}.$

$= \begin{bmatrix} k.(a+b) \\ 0 \\ k.a \end{bmatrix} \quad k.(a+b) \in \mathbb{R}.$ ✓

$k.a \in \mathbb{R}$ ✓

NOTA

T

Repasar sumatoria.

1.3) $A_1 = \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$ $\quad A_2 = \begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

$A_3 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix}2 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$

$$a_1\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix} = b\begin{bmatrix}2 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a_1 & a_1\\ -a_1 & -a_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}a_2 & -a_2\\ -a_2 & a_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}a_3 & 0\\ -a_3 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2b & -b\\ -2b & b\end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1 + a_2 + a_3 &= 2b\\ a_1 - a_2 + 0 &= b\\ -a_1 - a_2 - a_3 &= -2b\\ -a_1 + a_2 + 0 &= b\end{aligned}\right\} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ \cancel{1} & \cancel{-1} & \cancel{0} & \cancel{-1}\\ \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{-2}\\ -1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \times(-1)\\ \times(-1)\end{array}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix} + r_1 \Big\} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 2b$$

$$+2 \cdot a_2 + a_3 = 3b \quad \cancel{\Rightarrow a_3 = 3b - 2a_2}$$

$$\cancel{a_1 + a_2 + 3b - 2a_2 = b \Rightarrow a_1 - a_2 = -2b}$$

$$\cancel{b = -\frac{a_1}{2} + \frac{8a_2}{8} \Rightarrow b = -\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2}}$$

$$\cancel{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix} +}$$

$$\cancel{a_3 = 3b - 2a_2 \Rightarrow a_1 + a_2 + 3b - 2a_2 = 3b}$$

$a_1 - a_2 + a_3 = 2b$

$2.a_2 + a_3 = 3b \Rightarrow a_3 = 3b - 2.a_2$

$a_1 + a_2 + 3b - 2a_2 = 2b \Rightarrow b = -a_1 + a_2$

$$-\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad X$$

~~$a_1 = a_3$~~ $\cancel{a_1 + a_3 = 0}$ $\quad a_1 + a_3 = b$

$\cancel{a_2 + a_3 = 0} \quad a_2 + a_3 = 2b$

$\cancel{b = 0}$

$a_3 = b - a_1$

~~$a_3 = 2b$~~ $a_2 + b - a_1 = 2b \Rightarrow -a_1 + a_2 = b$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ +1 & +1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

B Si yo quiero un vector en particular, no pongo b, pongo el número.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + 0 &= -1 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= -2 \\ -x_1 + x_2 + 0 &= 1 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{-2} \\ \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{1} \end{array}\right)$$

$\Downarrow$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - F_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_2 + x_3 &= 3 \rightarrow 3 - 2x_2 = x_3 \end{aligned}$$

NOTA

HOJA N°

FECHA

$$x_1 + x_2 + 3 - 2x_2 = 2$$

$$x_1 - x_2 = -1 \Rightarrow 1 = -x_1 + x_2$$

Sistema compatible indeterminado.

$$B \in \text{gen}\{A_1, A_2, A_3\}$$

$$-1 + x_2 = x_1$$

$$3 - 2x_2 = x_3$$

$$(-1 + x_2) \cdot A_1 + x_2 \cdot A_2 + (3 - 2x_2) \cdot A_3 = B$$

- $x_2 = 0)$ $\quad -A_1 + 3A_3 = B$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

- $x_2 = 3)$ $\quad \underbrace{(-1 + 3)}_{2} \cdot A_1 + \underbrace{3 \cdot A_2}_{3} + \underbrace{(3 - \overset{6}{\cancel{2x_2}})A_3}_{-3} = B$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \checkmark$$

NOTA

B) $S := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : x_1 . A_1 + x_2 . A_2 + x_3 . A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\cancel{gen\{A_1, A_2, A_3\}}$

$gen \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\} \Leftrightarrow x_1 . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{-1} & \cancel{0} \\ \cancel{-1} & \cancel{1} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array} \right) - F_1 \Big\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$2x_2 + x_3 = 0 \longrightarrow [x_3 = -2x_2]$

$x_1 + x_2 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0$

$[x_1 = x_2]$

$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \longrightarrow gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ✓

C) $x_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \right) - F_1 \Big\} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\times(-1)}$$

$x_1 + x_2 = 1$

$2x_2 = 1$

$x_2 = 1/2$

$x_1 + 1/2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1/2$

NOTA Sist. comp. determinado.

T Podemos hacer hasta el 18.

HOJA Nº

FECHA

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$ ✓

D) $\{0\} \subsetneq \text{gen}\{A_i\} \subsetneq \text{gen}\{A_i, A_j\} = \text{gen}\{A_1, A_2, A_3$

"Contenido pero no es igual"

$x_1 = 0$ ✓

$x_1 . A_1 \rightarrow$ Si igualo el escalar x_1 a 0, ~~sino~~ me da cero

$\{0\} \subsetneq \text{gen}\{A_1\}$ - (no es igual porque el subespacio generado por gen$\{A_1\}$ ~~es~~ tiene más elementos que solo cero.

$\text{gen}\{A_i\} \subsetneq \text{gen}\{A_i, A_j\} \rightarrow$ Si el escalar de A_j es $=0$,

$x_1 . A_i = x_1 . A_i$ ✓

Pero si ~~A_j~~ $. x_2 \neq 0$,

el subespacio generado por gen $\{A_i, A_j\}$ es mayor que gen$\{A_i\}$

NOTA

1.5) A) Valores de $a \in \mathbb{R}$ para que:

$$\text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

Para que sean iguales deben generar al mismo subespacio. $\rightarrow$ Por ende $\begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix}$ debe ser "superfluo", es decir linealmente dependiente del resto de vectores

$$x_1 \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ 1 \end{pmatrix} \quad 1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -a \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} 1/a \\ \\ -2\,r_2 \end{matrix} \Bigg\} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3/a & 1/a \\ 1 & 2 & -a \\ 0 & -1 & 1+2a \end{array}\right) -r_1 \Bigg\}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3/a & 1/a \\ 0 & 2-3/a & -a-1/a \\ 0 & -1 & 1+2a \end{array}\right) \begin{matrix} \times a \\ \times a \\ \\ \end{matrix} \Bigg\} \left(\begin{array}{ccc} a & 3 & 1 \\ 0 & 2a-3 & -a^2-1 \\ 0 & -1 & 1+2a \end{array}\right)$$

NOTA

$$\cancel{\left(\begin{array}{cc|c} a & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -a \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times a \\ \times a \end{array} \Bigg\} \begin{pmatrix} a & 3 & 1 \\ a & 2a & -a^2 \\ 2a & 3a & a \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -F_1 \\ -\frac{3}{2}F_2 \end{array} \Bigg\} \begin{pmatrix} a & 3 & 1 \\ 0 & 2a-3 & -a^2- \\ \frac{1}{2}a & 0 & a+\frac{3}{2}a \end{pmatrix}}$$

$$\cancel{\begin{pmatrix} a & 3 & 1 \\ 0 & 2a-3 & -a^2-1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & a-\frac{3}{2}a^2-\frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -a \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times a \ -F_1 \\ \times a \ -2F_1 \end{array} \Bigg\} \begin{pmatrix} a & 3 & 1 \\ 0 & 2a-3 & -a^2-1 \\ 0 & 3a-6 & a-2 \end{pmatrix}$$

$\times(2a-3)-(3a-6)\cdot F_2$

(T) Practicar ~~ese~~ reducir matriz por Filas

$$\cancel{\begin{matrix} a & 3 & 1 \\ 0 & 2a-3 & -a^2-1 \\ 0 & -6 & -2 \end{matrix}}$$

$\cancel{(3a-6)(2a-3) =}$

$\cancel{6\cdot a^2 - 9a - 12a + 18}$

$\cancel{(a-2)\cdot(2a-3)}$

$\cancel{2a^2 - 3a - 4a + 6}$

$\cancel{(3a-6)(-a^2-1)}$

$\cancel{-3\cdot a^3 - 3a - 6\cdot a^2 + 6}$

$\cancel{2a^2 - 7a + 3\cdot a^3 + 3a + 6\cdot a^2}$

$\cancel{-4a \ 3\cdot a^3 + 8\cdot a^2 - 4\cdot a}$

$$\cancel{\left(\begin{array}{cc|c} a & 3 & 1 \\ 0 & 2a-3 & -a^2-1 \\ 0 & 0 & 3a^3+8a^2-4a \end{array}\right)}$$

$(3a-6)\cdot(2a-3) = 6a^2 - 9a - 12a + 18$

$6a^2 - 21a + 18$

$(2a-3)\cdot(3a-6) =$

$(a-2)\cdot(2a-3) = 2a^2-3a-4a+6$

$2a^2-7a+6$

$(-a^2-1)\cdot(3a-6) = -3a^3-6\cdot a^2-3a+6$

$2a^2-7a+6-(-3a^3-6a^2-3a+6) =$

$3a^3+8a^2-4a$

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & 3 & 1 \\ 0 & 2a-3 & -a^2-1 \\ 0 & 0 & 3a^3+8a^2-4a \end{array}\right)$$

$\rightarrow$ Para que sea compatible (o sea (1A) se pueda resolver)

$\downarrow$

$3a^3+8a^2-4a = 0.$

$2a-3 \neq 0$

$a \neq \frac{3}{2}$

Números irracionales :(

DETERMINANTE ! Para q. L.D.

de la matriz.

NOTA

De ecuación → subespacio generado

HOJA N°

FECHA

1.6) A) $S = \{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$x_1 = -2x_2 - 3x_3 \longrightarrow \begin{pmatrix} -2x_2 - 3x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Probando: $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ — $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$-3 + \cancel{2.0} + 3.1 = 0$

$-3 + 3 = 0$ ✓

$S = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

B) $S = \{ x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0 \}$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}} \underset{2\times 1}{=} \begin{matrix} y_{11} \\ y_{21} \end{matrix}$

$y_{11} = (1.x_1) + (2.x_2) + (3.x_3)$

$y = 3x_1 + 2.x_2 + x_3$

$\underset{2\times 1}{\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}}$

$A.x = 0 \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$

NOTA

$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-3.F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{/(-4)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \qquad x_2 + 2.x_3 = 0$$

$$\boxed{x_2 = -2.x_3}$$

$$x_1 - 2.2x_3 + 3x_3 = 0 \Rightarrow x_1 - x_3 = 0$$

$$\boxed{x_1 = +x_3}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} +1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad S = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} +1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

c) $S = \left\{ X \in \mathbb{R}^{2\times 2} : \overbrace{X \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}^{A} = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} X}^{B} \right\}$

$$\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}} \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \cancel{a}_{11} & \cancel{a}_{12} \\ \cancel{a}_{21} & \cancel{a}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.x_1 + 0.x_2 & 0x_1 + 3x_2 \\ 2.x_3 + 0x_4 & 0x_3 + 3x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & 3x_2 \\ 2x_3 & 3x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 21 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.x_1 + 0.x_3 & 2.x_2 + 0.x_4 \\ 0.x_1 + 3.x_3 & 0.x_2 + 3.x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 3x_3 & 3x_4 \end{pmatrix}$$

Se cumple que $A = B$ cuando $\begin{pmatrix} 2x_1 & 3x_2 \\ 2x_3 & 3x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 3x_3 & 3x_4 \end{pmatrix}$

$2x_1 = 2x_1$ → Siempre
$3x_4 = 3x_4$ ↗

$3x_2 = 2x_2$
$2x_3 = 3x_3$ → Si X es único

$x_2 = 0 \wedge x_3 = 0$

$S = \text{gen}\left\{\cancel{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}\right\}$

~~Si son dos vectores distintos~~

$$S = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

NOTA

HOJA N°

FECHA

B=

1.9) Si $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ son L.I.,
¿es el conjunto $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ LI? ↳ conjunto W

$w_1 = v_1 - 2v_2 + v_3 - v_4$

$w_2 = -4v_1 - 2v_2 + v_4$

$w_3 = 2v_1 + 3v_2 - v_3 - 3v_4$

$w_4 = 17v_1 - 10v_2 + 11v_3 + v_4$

Visto en clase 06/09.

Si $\{[w_1]^B, [w_2]^B, [w_3]^B, [w_4]^B\}$ es cjto L.i,
$\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ es Li

A

Marzo 2

$a.w_1 + b.w_2 + c.w_3 + d.w_4 = 0$
$\Updownarrow$
$a, b, c, d = 0$

$a.(v_1 - 2v_2 + v_3 - v_4) + b$

$v_1.(\overbrace{a - 3b - 4c + d}^{a}) + v_2(\overbrace{\cdots}^{b})$
$+ v_3 \cdots$

$d,$

$\alpha = 0$

$\beta = 0$

Para que en conjunto W sea LI.

$a.w_1 + b.w_2 + c.w_3 + d.w_4 = 0 \iff a, b, c, d = 0.$

$a(v_1 - 2v_2 + v_3 - v_4) + b(\cdots) + c(\cdots) + d(\cdots)$

$v_1(a - 4b + 2c + 17d) + v_2(-2a - 2b + 3c - 10d) + v_3(a - c + 11d)$
$+ v_4(-a + b - 3c + d) = 0$

NOTA $\alpha.v_1 + \beta.v_2 + \gamma.v_3 + \Delta.v_4 = 0 \iff a, b, c, d = 0.$

$\alpha = a - 4b + 2c + 17d = 0$

$\beta = -2a - 2b + 3c - 10d = 0$

$\gamma = a - c + 11d = 0$

$\Delta = -a + b - 3c + d = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 17 \\ -2 & -2 & 3 & -10 \\ 1 & 0 & -1 & 11 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Frente a esta matriz tenemos dos opciones para saber si $\alpha, \beta, \gamma, \nabla = 0$ (es decir w_i es L.I.)

1) Resolverlo y encontrar que su única solución es $= 0$.

2) Calcular el determinante y ver si es $\neq 0$. Si lo es, es L.I.

Opción 1: Es L.I.

Opción 2: $\det = -90 \neq 0$

$\downarrow$

Es L.I.

Opción 3: Si $\{[w_1]^B, [w_2]^B, [w_3]^B, [w_4]^B\}$ es LI

entonces $\{w_1, w_2, w_3, w_4$ es L.I$\}$ A.

T Estudiar propiedades determinante y L.I.

HOJA N°

FECHA

11) A)
$$\begin{vmatrix} 1 & sen(x) & cos(x) \\ 0 & cos(x) & -sen(x) \\ 0 & -sen(x) & -cos(x) \end{vmatrix} \begin{matrix} A & B \\ C & D \\ E & F \end{matrix}$$

$$-cos(x) . cos(x) - sen^2(x) = -cos^2_{(x)} - sen^2_{(x)} = -(1) \neq 0.$$

El conjunto es linealmente independiente.

~~B) 1+3.sen(x)-2.cos(x)~~

B)
$$\begin{vmatrix} 1+3.sen(x)-2.cos(x) & 3+5sen(x)-6cos(x) & -5sen(x)+6.cos(x) \\ 3.cos(x)+2.sen(x) & 5.cos(x)+6.sen(x) & -5cos(x)-6.sen(x) \\ -3.sen(x)+2cos(x) & -5.sen(x)+6.cos(x) & 5.sen(x)-6.cos(x) \end{vmatrix}$$

$+ (1+3.sen(x)-2cos(x))(5.cos(x)+6.sen(x))(5.sen(x)-6.cos(x))$

$+ (3+5sen(x)-6.cos(x))(-5.cos(x)-6.sen(x))(-3.sen(x)+2.cos(x))$

$+ (-5.sen(x)+6.cos(x))(3.cos(x)+2.sen(x))(-5.sen(x)+6cos(x))$

$- (-3.sen(x)+2.cos(x))(5.cos+6.sen(x))(-5.sen(x)+6.cos(x))$

$- (-5.sen(x)+6.cos(x))(-5.cos(x)-6.sen(x))(1+3.sen(x)-2.cos(x))$

$- (5.sen(x)+6.cos(x))(3.cos(x)+2.sen(x))(-5.sen(x)+6cos(x))$

Forget

NOTA

Escaneado con CamScanner

B) Determinar si es L.I.

$\{ 1+3.\text{sen}(x) - 2.\cos(x) \; ; \; 3+5.\text{sen}(x) - 6.\cos(x) \; ; \; -5\,\text{sen}(x) + 6.\cos(x) \}$

$\alpha\,(1+3.\text{sen}(x) - 2.\cos(x)) + \beta\,(3+5\,\text{sen}(x) - 6\cos(x)) + \gamma\,(-5.\text{sen}(x) + 6\cos(x)) = 0$

$\alpha + 3\alpha.\text{sen}(x) - 2.\alpha.\cos(x) + 3\beta + 5\,\beta.\text{sen}(x) - 6.\beta\cos(x) - 5\gamma.\text{sen}(x) + \gamma.6.\cos(x) = 0$

$\underline{1}.(\alpha + 3\beta) + \underline{\cos(x)}\,(-2\alpha - 6\beta + 6\gamma) + \underline{\text{sen}(x)}\,(3\alpha + 5\beta - 5\gamma) = 0.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & -6 & 6 \\ 3 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +2 f_1 \\ -3.f_1 \end{matrix} \Bigg\} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ya se que son $\neq 0$.

$\alpha = 0$

$\beta = 0$

$\gamma = 0$

Es L.I.

NOTA

1ra idea:
Wronskiano
(x) Aparentemente esto tmb ~~Lado~~ lo mismo que esto

$$W = \begin{pmatrix} 1 + a\cdot sen(x) + 3\cdot cos(x) & 4 + 5\cdot sen(x) + 7\cdot cos(x) & a + sen(x) + cos(x) \\ a\cdot cos(x) - 3\, sen(x) & 5\cdot cos(x) - 7\cdot sen(x) & cos(x) - sen(x) \\ -a\cdot sen(x) - 3\, cos(x) & -5\cdot sen(x) - 7\cdot cos(x) & -sen(x) - cos(x) \end{pmatrix}$$

2da idea:
$det_{(A)} = 0$.

$1 + a\, sen(x) + 3\cdot cos(x) \quad 4 + 5\, sen(x) + 7\cdot cos(x) \quad a + sen(x) + cos(x)$ (1×3)

$(1 \quad sen(x) \quad cos(x))$ 1×3

1×3 3×3 1×3 1×3

(A)

$$(1 \quad sen(x) \quad cos(x)) \begin{pmatrix} 1 & 4 & a \\ a & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix} = \quad = (1 + a\cdot sen(x) + 3\cdot cos(x) \quad 4 + 5\, sen(x) + 7\, cos(x) \quad a + sen(x) + cos(x))$$

¿Por qué puedo sacar esto? ¿Y solo calcular el det. de (A)

L.I.

12) ~~Wr~~ ~~$1 + 2\, sen(x) + 3\, cos(x)$~~

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & a \\ a & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 4 \\ a & 5 \\ 3 & 7 \end{matrix} = 5 + 12 + 7\cdot a^2 - 15a - 7 - 4a$$

$$7a^2 - 19a + 10 = 0$$

Determinante $= 0 \rightarrow$ L.D (lo que buscamos).

$$\boxed{a = 2 \qquad a = \frac{5}{7}}$$

(*) ¿Por qué?

B) $\{ 1 + 2ax + x^2 + 2.x^3,$
$2 + ax + 4.x^2 + 8.x^3,$
$x^2 + 2x^3 \}$

Hallar A para que el conjunto sea L.D.

$E_{\mathbb{R}^3[x]} = \{ x^3, x^2, x, 1 \}$

4,4

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \times 2 \\ -F_1 \\ -2.F_1 \end{array}\right]$$

4x3

$$\begin{matrix} 2 & 8 & 2 \\ 0 & a-8 & -2 \\ 0 & -14 & -4 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 & 2 & 8 \\ 2 & a & 0 & 2 & a \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$8 - 2a = 0$

$8 = 2a \Rightarrow \boxed{a = 4}$

$$\begin{pmatrix} 1 + 2ax + x^2 + 2x^3 & 2 + ax + 4.x^2 + 8.x^3 & x^2 + 2.x^3 \\ 2a + 2x + 6.x^2 & a + 8x + 24x^2 & 2x + 6.x^2 \\ 2 + 12x & 8 + 48x & 2 + 12x \end{pmatrix}$$

3x3

NOTA

Este "sistema de generadores" es $gen\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ pero con otro nombre? ¿O cual es la diferencia?

1.14) $S = \left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$

Hallar base del subespacio:

Algoritmo espacio filas:

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix} \begin{matrix}\\ -F_1\end{matrix} \Big\} \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix} \begin{matrix}\times(-1)\\ /2\end{matrix} \Big\}$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$gen = \{(1\ 1\ 0)^T, (0\ 1\ -1)^T\} = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

✓

Algoritmo espacio columnas:

$$\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \begin{matrix}/2\\ -(F_1/2)\\ +F_2\end{matrix} \Big\} \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ \cancel{0} & \cancel{2}\end{pmatrix} \begin{matrix}\\ \times(-1)\\ \end{matrix} \Big\} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ \cancel{0} & \cancel{1}\end{pmatrix} \rightarrow$$ 1era y segunda columna:

$$gen\left\{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

✓

B) $\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}\right\}$ Espacio Filas: $\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ -2 & 2 & -1\end{pmatrix} \begin{matrix}\\ -F_1\\ +F_1\end{matrix} \Big\} \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$gen\{(2\ -1\ 1), (0\ 1\ 0)\}$

~~Espacio columnas:~~ $\cancel{\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix} \begin{matrix}/2\\ +(F_1/2)\\ -(F_1/2)\end{matrix}}$

$\cancel{\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \begin{matrix}-F_2+2F_3\\ -F_3\\ /2\end{matrix} \Big\} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} /2 \\ \\ -(F_1/2) \end{matrix} \Bigg\} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +F_2 \Bigg\} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Bigg\} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$gen \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \checkmark$$

1.15) $S = \{ p \in \mathbb{R}_{2[x]} : p(1) = 0 \}$

$a_2 x^2 + a_1 . x + a_0 = 0 \rightarrow a_2 . 1 + a_1 . 1 + a_0 = 0.$

$a_2 + a_1 + a_0 = 0.$

$a_0 = -a_1 - a_2$

$a_2 . x^2 - a_2 + a_1 . x - a_1 = p(x)$

$a_2 (x^2 - 1) + a_1 (x - 1) = p(x)$

$p(x) \rightarrow p(1) = 0 \rightarrow gen \{ (x^2 - 1), (x - 1) \}$

$B = \{ (x^2 - 1), (x - 1) \} \rightarrow Dim = 2$

B) $S = \{ p \in \mathbb{R}_{3[x]} : p(1) = 0 , p(2) = 0 \}$

$a_3 . x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = p(x)$

$p(1) = a_3 . 1 + a_2 + a_1 + a_0 = 0$

$p(2) = 8 a_3 + 4 . a_2 + 2 a_1 + a_0 = 0$

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times 8 - F_1 \Bigg\} \begin{matrix} 8 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -6 & -7 \end{matrix}$$

$8 a_3 + 4 a_2 + 2 a_1 + a_0 = 0$

$4 a_2 + 6 a_1 + 7 a_0 = 0 \rightarrow \left[\frac{4}{4} a_2 = -\frac{6}{4} a_1 - \frac{7}{4} a_0 \right]$

$8 a_3 - 6 a_1 - 7 a_0 + 2 a_1 + a_0 = 0 \Rightarrow 8 a_3 - 4 a_1 - 6 a_0 = 0$

NOTA

$\frac{8}{8} a_3 = \frac{4}{8} a_1 + \frac{6}{8} a_0 \rightarrow \left[a_3 = \frac{1}{2} a_1 + \frac{3}{4} . a_0 \right]$

HOJA N°

FECHA

$a_2 = -\frac{3}{2} a_1 - \frac{7}{4} . a_0$ / $a_3 = \frac{1}{2} . a_1 + \frac{3}{4} . a_0$ / $a_1 = a_1$ / $a_0 = a_0$ /

$$\left(\frac{1}{2} . a_1 + \frac{3}{4} . a_0\right) x^3 + \left(-\frac{3}{2} . a_1 - \frac{7}{4} . a_0\right) x^2 + a_1 . x + a_0 = p(x)$$

$$p(x) = a_1 \left(\frac{1}{2} . x^3 - \frac{3}{2} x^2 + x\right) + a_0 \left(\frac{3}{4} x^3 - \frac{7}{4} x^2 + 1\right)$$

$$B = \left\{ \left(\frac{1}{2} x^3 - \frac{3}{2} x^3 + x\right) , \left(\frac{3}{4} x^3 - \frac{7}{4} x^2 + 1\right) \right\} \to \text{Dim} = 2$$

✓?

1.16) $\text{Subespacio} = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 / \frac{1}{2} . x_1 - a . x_3 + x_4 = 0 \right\}$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \\ a \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \right\}$$

~~$x_4 = -\frac{1}{2} x_1 + a x_3$~~

Para que la base genere un subespacio, debe ser compatible con la ecuación.

$\frac{1}{2} . a - a . \frac{1}{2} + 0 = 0$ ✓ / $\frac{1}{2} . 1 - a . 0 - \frac{1}{2} = 0$ ✓

$\frac{3}{2} . \frac{1}{2} - a . a + \frac{3}{2} = 0 \to \frac{9}{4} = a^2 \to a = -\frac{3}{2}$ / $a = \frac{3}{2}$

Para que sean base los elementos deben ser linealmente independientes:

NOTA

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \times 2 \\ \times 2 \; -F_1 \\ \times 2 \; -\frac{1}{3}F_1 \\ \times 2 \; -F_4 \; -F_2(2) \end{array} \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & \frac{-1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \times 2 \\ \times 2 \\ \times 3 \\ \end{array}$$

$$\begin{matrix} 3 & 9 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \longrightarrow$$

Cero sobre diagonal
↓
Compatible indeterminado
↓
Linealmente independiente.

$$A \neq -\frac{3}{2}) \quad \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-3}{2} \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ +F_1 \\ +(F_1/3) \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 2/3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -F_4 \\ \times 3 \, F_4 \\ F_3/2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ /6 \\ -2 \cdot F_2 \\ \end{array} \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

↓

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sistema compatible determinado.

↳ Linealmente independiente. ✓

NOTA

06/09/23

HOJA N°

FECHA

1.20) Subespacios:

A) $Col_{(A)} = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\-1\end{pmatrix}\right\}$

Estudio si $\left\{\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\-1\end{pmatrix}\right\}$ es L.I. $\rightarrow$ No lo ~~...~~ es.

$\begin{pmatrix}i\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\cdot i$

Si los escalares del esp. vect son $\mathbb{C}$.

Si fuesen $\mathbb{R}$ (y no puedo usar números complejos), ~~sería L.I.~~ sería L.I.

Entonces Base $Col_{(A)} = \left\{\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\right\}$

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\right\}$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $B = \left\{\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\-1\end{pmatrix}\right\}$ 2A

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R} \rightarrow rango_{(A)} = 2 \rightarrow N^{\circ}\ columnas_{(A)} = rg(A) + \dim(Nul_{(A)})$

$2 = 2 + 0$

$\dim(Nul_{(A)}) = 0 \longrightarrow Nul_{(A)} = \{0\}$

$\mathbb{K} = \mathbb{R} \rightarrow \dim(Col_{(A)}) = \dim(Fil_{(A)}) = 2$

$\rightarrow 2$ ¿2A?

B) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$Fil_{(A)} = \left\{\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i\\-1\end{pmatrix}\right\}$

$Fil_{(A)} = Col_{(A^T)}$

$Nul_{(A^T)} = Nul_{(A)}$

$[A = A^T]$ $\rightarrow$ (Tiene sentido si miramos A, que conocemos).

NOTA

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\quad B_{Col(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}$ $\quad$ Como $(A = A^T) \Rightarrow Col(A) = Fil(A)$

$$B_{Fil(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}$$

Nos queda por calcular ~~Nos falta~~ el subespacio nulo, veamoslo:

$$Nul(A) = \left\{ x \in \mathbb{C}^2 \,/\, A.x = 0 \right\}$$

$$x = \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} \in Nul(A)$$

Como $\dim(Nul(A)) = 1$

$$B_{Nul(A)} = B_{Nul(A^T)} = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

B) ¿$\exists\, x \in \mathbb{C}^2 \,/\, A.x = b$? Si existe, hallarlos todos.

Ya que $A \in \mathbb{C}^2$, $B \in \mathbb{C}^2$, entonces ¿$x \in \mathbb{C}^2$?

$\mathbb{K} = \mathbb{C}^2$ $\quad Col(A) = gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}$

Veo si $b \in Col(A)$.

Buscamos combinaciones lineales para ver si existe x tal que $A.x = b$:

$$\begin{pmatrix} 2 - 3i \\ 3 + 2i \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [\alpha = 2 - 3i] \\ \alpha . i = 2i - 3ii \\ [\alpha . i = 3 + 2i] \end{array} \right.$$

El resto está en foto.

19:58

HOJA Nº

FECHA

$$X = \begin{pmatrix} 2 - 3i \\ 0 \end{pmatrix} \qquad A \begin{pmatrix} 2 - 3i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Otra forma: $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 3i \\ 3 + 2i \end{pmatrix}$

$x_1 + i \cdot x_2 = 2 - 3i$

$\cancel{i\, x_1 - x_2 = 3 + 2i}$ → Se olvida de una (¿porque las dos ecuaciones son equivalentes?)

$x_1 + i \cdot x_2 = 2 - 3i$ → $\begin{cases} x_1 = 2 - 3i \\ x_2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

Respuesta: $X = X_{particular} + \lambda \cdot X_h$

$X_h \in Nul_{(A)}$

$X_p = \begin{pmatrix} 2 - 3i \\ 0 \end{pmatrix}$

$Nul(A) = gen\left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

[El 1.21 requiere hacer todo lo que ya

NOTA hicimos en este ejercicio.]

Ej que no esté en la guía)

Los subespacios vectoriales son espacios vectoriales.

$$\mathbb{V} = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

→ ¿Es L.I?

Veamoslo fijandonos si sus coordenadas son L.I. (suponiendo base canónica).

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

→ Al darme cuenta que este conjunto es L.D., puedo saber que el conjunto de matrices tmb. es L.D.

→ ~~Pue~~ Si fuesen 4 vectores, podría saber que es L.D. con el determinante.

Ahora que sabemos que es L.D., lo hacemos L.I.

$$\mathbb{V} = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \qquad W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$$

W es base de $\mathbb{V}$ por ser L.I.

↓

$\dim(\mathbb{V}) = 2$

$\dim(\mathbb{R}^{2\times 2}) = 4$

$\mathbb{V}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{V} \rightarrow \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right]^{\mathbb{V}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Coordenadas

$$1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

NOTA

Escaneado con CamScanner

HOJA N°

FECHA

~~I~~ $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ $\quad Col_{(A)} = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$

$b = \begin{pmatrix}1\\-7\\0\end{pmatrix}$ $\quad Nul_{(A)} = \left\{\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$

A) ¿Por qué $Ax = b$ es compatible?

B) ¿Por qué $Ax = b$ no tiene única solución?

$A \to 3\times3$ $\quad b \to 3\times1$ $\quad x = 3\times1$ $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

Columna i_A $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ $\quad$ Columna j_A $\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$

NOTA

1.21) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 10 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

Base de Col(A) : Algoritmo espacio ~~filas~~ columnas

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 10 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -F_1 \\ -2F_1 \\ -2F_1 \end{matrix} \Bigg\} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +F_2 \\ \\ \end{matrix} \Bigg\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Base} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dim = 3

Algoritmo espacio filas:

Base Fil(A)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 4 & 2 & 10 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2F_1 \\ /5 \\ -4F_1 \\ \\ \end{matrix} \Bigg\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times \\ \times \\ \\ \end{matrix} \Bigg\} \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Dim = 3

! Dim(Fil(A)) = Dim(Col(A)) = rg(A) ✓

$\searrow$ 3

Repasar rango de una matriz

NOTA

HOJA N°

FECHA

$$\underset{4\times5}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 10 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}} \underset{5\times1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nul:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 10x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_4 + x_5 &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 10 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix} \cdots$$

$$\cancel{\begin{matrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_4 &= 0 \\ x_2 + 5x_3 - 2x_4 \cancel{+ x_5} &= 0 \\ x_5 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_1 = -2x_2 - 4x_4 \quad / \quad 5x_3 = -x_2 + 2x_4$$

$$x_3 = -\frac{x_2}{5} + \frac{2}{5}x_4$$

$$\begin{pmatrix} -2x_2 - 4x_4 \\ x_2 \\ -\frac{1}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_4 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Nul(A) = gen \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad Dim(Nul(A)) = 2.$$

!

$$\begin{array}{ccccc} rg(A) & + & \dim(Nul(A)) & = & \text{Nro columnas de } A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 3 & + & 2 & = & 5 \end{array} \quad \checkmark$$

NOTA

$Nul(A^T)$: $\longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 4 & 2 & 10 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + x_4 &= 0 \longrightarrow x_1 = -2x_3 - x_4 \\ x_2 - x_3 &= 0 \longrightarrow x_3 = x_2 = -x_4 \\ x_2 + x_4 &= 0 \longrightarrow x_2 = -x_4 \end{aligned}$$

$$x_1 = -2(-x_4) - x_4 = x_4$$

$$\begin{pmatrix} x_4 \\ -x_4 \\ -x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \longrightarrow Dim = 1.$$

!

$$\underbrace{rg(A)}_{3} + \underbrace{Dim(Nul(A^T))}_{1} = \underbrace{\text{Nro columnas } A^T}_{4}$$

$$3 + 1 = 4 \quad \checkmark$$

B) $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ ¿existe $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ tal que $A \cdot x = b$?

Hallar todos los x.

!

Por propiedad b existirá si $b \in Col(A)$.

$$gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -F_1 \\ -2.F_1 \\ -2.F_1 \end{array} \left\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +2F_3 \\ -F_4 \\ \times(-1) \\ \\ \end{array} \right\}$$

NOTA

A

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Bigg\} \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 1 \end{array} \rightarrow 1.\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix}2\\3\\3\\4\end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\5\\7\end{pmatrix} \checkmark$$

(A)

$b \in Col(A) \Rightarrow A.x = b$ tiene solución.

↳ Además, como las columnas de A son L.D, existen infinitas soluciones x para b.

Episodio 6: página 10: Todas las soluciones x se expresan: $x = x_p + x_h$

Una "solución particular" tal que $A.x_p = b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 10 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Para saber $x_p \Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -5 & 10 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 1 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -F_1 \\ -2.F_1 \\ -2.F_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) + F_2 - F_4 \Bigg\} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} +2F_3 \\ \rightarrow 0 \; -10 \; 8 \; 0 \; 1 \end{array}$$

$x_1 + 2x_2 + 4x_4 = 3 \rightarrow \cancel{x_1 = 3 - 2(x_2 + 2x_4)}$

$-x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -1 \rightarrow \cancel{5x_3 = 1 - x_2 + 2x_4}$

$[x_5 = 1]$

$2x_2 = 3 - x_1 - 4x_4 \qquad -5x_3 + 2x_4 + 1 = x_2$

$2(-5x_3 + 2x_4 + 1) = 3 - x_1 - 4x_4$

NOTA $-10x_3 + 4x_4 + 2 = 3 - x_1 - 4x_4$

$x_1 - 10x_3 + 8x_4 = 1 \Rightarrow x_1 = 10x_3 - 8x_4 + 1$

$$\begin{pmatrix} 10x_3 - 8x_4 + 1 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{x_3 \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{x_h} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{x_p} = x$$

?

¿ $x_h \in Nul(A)$?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & \cancel{0} \\ 2 & 3 & -5 & 10 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix} \quad ¿\;\; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{x_p}$$

$1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1$

¿ ✓ ?

HOJA N°

FECHA

1.23) $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$

$$A.B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$rg(B) = 2$

Hallar base del $Nul(B)$.

¿ rango (AB)?

Rango de AB por método de Gauss:

Primero: triangular la matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +F_1 \\ +2.F_1 \end{matrix} \Bigg\} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$ 2 filas no nulas: rango = 2.

$rg(AB) = 2$.

¿ Nul (AB) ?

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 0 \qquad x_2 = x_1 - x_3$$
$$x_3 + x_4 = 0 \rightarrow x_4 = -x_3$$

$$Nul(AB) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 - x_3 \\ x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$gen(Nul(AB)) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow$$ ~~Dim(Nul)~~

$Dim(Nul(AB)) = 2.$

Según discord) Si $x \in Nul(B) \rightarrow B.x = 0$

$A . \underbrace{B . x}_{=0}$ ~~=~~ $A.0 = 0 \rightarrow x \in Nul(AB)$

$Nul(B) \subset Nul(AB)$

?

Si $dim(Nul(AB)) = 2 \Rightarrow dim(Nul(B))$ ~~=~~ $= 2$

Al tener la misma dimensión y estar uno incluido en el otro $\Big\}$ Entonces son el mismo subespacio

Entonces, la base de $Nul(AB)$ es tmb. la base del $Nul(B)$.

$$B_{Nul(B)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(Nunca uso dato rango(B) = 2) ?

1.24) $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ $B \in \mathbb{R}^{3\times4}$

$$AB = \begin{pmatrix} 10 & -10 & -5 & 5 \\ 11 & 11 & -4 & 7 \\ 11 & -11 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

$rg(A) = 3$ / $B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ / $B \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$

Hallar todas las soluciones para $B.x = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

¿ $rg(AB)$? $\begin{pmatrix} 10 & -10 & -5 & 5 \\ 1 & -1 & 1 & 12 \\ 1 & -1 & 0 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} /5 \\ \\ -F_3 \end{matrix} \Big\} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $rg = 3$

$rg(AB) = 3$

$rg(A) = 3$

NOTA

HOJA N°

FECHA

$Nul(AB)$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} 2.x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 12.x_4 = 0 \\ -x_3 + x_4 = 0 \end{array}$

$x_3 = x_4$

$2x_1 - 2x_2 \cancel{-x_3} \cancel{+x_3} = 0 \Rightarrow 2x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$

$x_1 - x_2 + x_3 + 12.x_3 = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = -13x_3$

$\cancel{x_1} - \cancel{x_1} = -13x_3 = 0$

$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow Nul(AB) = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$rg(AB) + dim(Nul(AB)) = $ Nro columnas AB

$3 + 1 = 4$ ✓

$\underset{3\times 4}{B}\ \underset{4\times 1}{x} = \cancel{b}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Propiedades: $Nul(B) \subseteq Nul(AB)$

$Col(AB) \subseteq Col(A)$

Si $rg(A) =$ Nro columnas de A

entonces $Col(AB) = Col(A)$.

¿ $x = Nul(B) + x_P$?

(A) $Nul(B) \subset Nul(AB) \longrightarrow$ " Un x que pertenece al subespacio nulo de B también pertenece al Nul(AB) ".

Si multiplicas una matriz por otra matriz inversible el rango de la matriz final es igual al de rango de la matriz que empezaste.

(B) $Nul(AB) \subset Nul(B) \longrightarrow ABx = 0 \longrightarrow AB.x.A^{-1} = 0.A^{-1}$

$B.x = 0 \longrightarrow x \in Nul(B)$

(A) y (B) $Nul(AB) = Nul(B)$.

$$\text{Nul}(B) = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

?

Solución particular: $\begin{pmatrix}5\\1\\4\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}5\\7\\6\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$

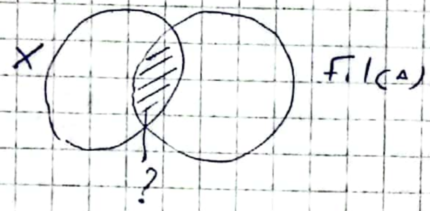
NOTA

1c - 1

c) ¿Hay algunas soluciones que también estén en el F.I ?

Busco $X \in F.I_{(A)}$ 1

2



$$F.I_{(A)} = gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= x_1 \\ 2\alpha + \beta &= x_2 \\ -\beta &= x_3 \\ \alpha &= x_4 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 2 & 1 & x_2 \\ 0 & -1 & x_3 \\ 1 & 0 & x_4 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & -1 & x_3 \\ 0 & 0 & x_4 - x_1 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & -2x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 & 0 & x_4 - x_1 \end{pmatrix}$$

El sist. es compatible si

$$-2 . x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_4 - x_1 = 0$$

2 $\begin{pmatrix} 4 - 2\alpha - \beta \\ \alpha \\ -1 + \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

5/04/23

25) Tiene que ser un $\mathbb{C}$ espacio vectorial.

$$\left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\}$$ (A)

esto es base de $\mathbb{R}^3$ → ¿Pero es base de $\mathbb{C}^3$?

Si tomamos espacio vectorial $\mathbb{R}$, no.

↳ Tenemos que sumarle los imaginarios.

$$\left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}i\\0\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\i\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\0\\i\end{bmatrix} \right\}$$

(A) es base de $\mathbb{C}^3$, con $\mathbb{C}$ espacio vectorial.

$$(3+5i) \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + i \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

---

25) ~~Tiene sentido analizar si el conjunto dado es base de $\mathbb{C}^3$ como $\mathbb{C}$ espacio vectorial.~~

~~Si fuese como $\mathbb{R}$ espacio vectorial, entonces "la respuesta es No y es inmediato".~~

↳ Esto es erroneo, porque tiene componentes complejos.

Tengo que ver que la dimensión sea 3.

(Tanto $\mathbb{R}$ como $\mathbb{C}$ pueden ser espacios vectoriales)

$$\left\{ \begin{bmatrix}2i\\1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\1+i\\1-i\end{bmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 2i & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1+i \\ 0 & 1 & 1-i \end{pmatrix} \overset{iF_2 \to F_2}{\Big\}} \begin{pmatrix} 2i & 1 & 0 \\ 2i & -i & i \\ 0 & 1+i & 1-i \end{pmatrix} (F_2 - F_1) \Big\}$$

$$\begin{pmatrix} 2i & i & 0 \\ 0 & -i+1 & i \\ 0 & i+1 & 1-i \end{pmatrix} F_3 + F_2 \Big\} \begin{pmatrix} 2i & 1 & 0 \\ 0 & -1\bar{\bar{i}} & i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Queda triangulada $\Rightarrow$ dim gen $\left\{ \begin{bmatrix}2i\\1\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\1+i\\1-i\end{bmatrix} \right\} = 3$

↳ Este espacio generado está contenido en $\mathbb{C}^3$.

1c - 2

$\mathbb{C}^3$ como $\mathbb{C}$ espacio vectorial tiene dimensión 3, por lo tanto, en este caso el conjunto dado es una base de $\mathbb{C}^3$

Me piden $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_B \right\}$ — ¿Base?

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1+i \\ 1-i \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2i\,\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 1 \\ \alpha_1 - \alpha_2 + (1+i)\,\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_2 + (1-i)\,\alpha_3 &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2i & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1+i & 0 \\ 0 & 1 & 1-i & 1 \end{array}\right) 2i\,F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2i & 2 & 0 & 1 \\ 2i & -2i & 2i-2 & 0 \\ 0 & 1 & 1-i & 1 \end{array}\right) F_2 - F_1 \left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} 2i & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2i-2 & 2i-2 & -1 \\ 0 & 1 & 1-i & 1 \end{array}\right) \right. F_2 + (2+2i)\,F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2i & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-i & 1 \\ 0 & 0 & 2i+2 & 2i+1 \end{array}\right)$$

CA

$2i - 2 + (2+2)(1-i)$

$2i + 2$

$$(2i+2)\,\alpha_3 = 2i+1$$

$$\alpha_3 = \left(\frac{2i+1}{2i+2}\right) \cdot \left(\frac{-2i+2}{-2i+2}\right) = \frac{4+4i-2i+2}{8}$$

"Multiplicar, dividir por el conjugado" — (para sacarnos de encima el denominador complejo)

$$\frac{6+2i}{8} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}i$$

La base es única, no puede haber otras coordenadas

α_3 es compleja

(T) Terminar. (no lo terminé aún)

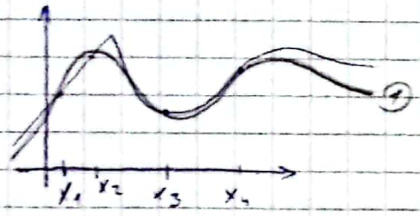
Esto es Análisis Numérico.

"cuando hay que ir a contracorriente, el mundo está hecho pedazos" } Hernan

27) Sea $X = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$ donde $x_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq n)$ (B)

↳ En este conjunto importa el orden.

(no es un polinomio).



Función continua. Quiero aproximarla con otra función (similar a como hacíamos con taylor) (1)

Voy a fabricar N polinomios que serán la base de los polinomios de lagrange.

(B) Para esto: definimos los siguientes polinomios (de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$)

$$L_i(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_1)(x_i-x_2)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

(Me salteo el i)

"Escrito con productoria"

$$= \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

Observación: $L_i(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_j \neq x_i \\ 1 & \text{si } x_j = x_i \end{cases}$ (porque es alguno de los x_j, y hace que ese paréntesis sea $= 0$.)

Proposición: $\{L_1(x), L_2(x) \dots L_n(x)\}$ es una base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ (C)

Demostración: $\alpha_1 . L_1(x) + \alpha_2 . L_2(x) \dots + \alpha_n . L_n(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x = x_1 \quad \alpha_1 . \underbrace{L_1(x_1)}_{=1} + \alpha_2 \underbrace{L_2(x_1)}_{=0} \dots \alpha_n \underbrace{L_n(x_1)}_{=0} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$ / El resto es cero.

$x = x_2 \quad \dots \quad \alpha_2 \underbrace{L_2(x_2)}_{=1} \dots \Rightarrow \alpha_2 = 0.$

1c - 3

⋮

$x = x_n \quad \alpha_n = 0$

Entonces esto es una base
↓
Base de Lagrange.

ⓒ ¿Cómo son las coordenadas en esa base?

Observación: Sea $p(x) \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$, entonces

$$p(x) = \alpha_1 . L_1(x) + \alpha_2 . L_2(x) \cdots + \alpha_n . L_n(x)$$

Ahora:

$$p(x_1) = \alpha_1 . L_1(x) + \alpha_2 . \underbrace{L_2(x)}_{=0} \cdots \alpha_n . \underbrace{L_n(x)}_{=0} = \alpha_1$$

$$p(x_2) = \alpha_2$$

⋮

$$p(x_n) = \alpha_n$$

Luego $p(x) = p(x_1) . L_1(x) + p(x_2) . L_2(x) \cdots + p(x_n) . L_n(x)$

o sea $[P(x)] = \begin{bmatrix} p(x_1) \\ p(x_2) \\ \vdots \\ p(x_n) \end{bmatrix}$ "eso me da las coordenadas"

"evalúo el polinomio en los n puntos, para construir la base de Lagrange"

Escaneado con CamScanner

2) b) a) $B = \left\{ p_0(x) = \frac{1}{2}(x-1).(x-2) \; , \; p_1(x) = -x(x-2) \; , \; p_2(x) = \frac{1}{2}x(x-1) \right\}$

¿Es base de $\mathbb{R}_2[x]$?

Hay que darse cuenta que esta es una base de Lagrange

$X = \{0, 1, 2\}$

$$p_0 = \frac{(x-1).(x-2)}{(0-1).(0-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{2} \quad ①$$ "es el mismo"

"se saltea uno"

$$p_1 = \frac{(x-0).(x-2)}{(1-0)(1-2)} = -x(x-2) \quad ②$$

$$p_2 = \frac{(x-0).(x-1)}{(2-0)(2-1)} = \frac{x.(x-1)}{2} \quad ③$$

Así me doy cuenta que
B es la base de Lagrange tomando como conjunto de partida $X = \{0, 1, 2\}$ → El orden es importante

c) Hallemos el vector de coordenadas:

$$[x^2 - x + 1]^B = \begin{bmatrix} 0^2 - 0 + 1 \\ 1^2 - 1 + 1 \\ 2^2 - 2 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

HOJA N°

FECHA

1.26) $p_1(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$

$p_2(x) = -x(x-2)$

$p_3(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$

A) Verificar que $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$.

$p_1(x) = \frac{1}{2}\cdot(x^2 - 2x - x + 2) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$

$p_2(x) = -x^2 + 2x$

$p_3(x) = \frac{1}{2}(x^2 - x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$

Todos pertenecen $\rightarrow \mathbb{R}_2[x]$.

$$\begin{pmatrix} 1/2 & -3/2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times 2 \\ \\ \times 2 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +F_1 \\ -F_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} {\scriptstyle +2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Es L.I.} \rightarrow \text{Dim} = 3$$

~~Comento~~ La base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ es de dim = 3, y esta base también lo es, por lo que B genera todo $\mathbb{R}_2[x]$.

NOTA

B) Ejemplo 1: $p(x) = x^2 + x + 1$

$P(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1 \qquad p(1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$

$p(2) = 2^2 + 2 + 1 = \cancel{5}\,7$

$$[p]^B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

¿Ampliar?

$$1.\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right) + 3\left(-x^2 + 2x\right) + 7\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\right)$$

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1 - 3x^2 + 6x + \frac{7}{2}x^2 - \frac{7}{2}x$$

$$x^2 + x + 1 = p(x) = x^2 + x + 1 \quad \checkmark$$

C) $p(x) = x^2 - x + 1 \qquad ¿[p]^B?$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times 2 \\ \times 2 \\ \\ \end{array} \Bigg\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +3.F_1 \\ -F_1 \end{array} \Bigg\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 & -7 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +F_3 \end{array} \Bigg\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -8 \end{array}\right)$$

$$\alpha - 2\beta + \gamma = 2$$
$$-2\beta + 4\gamma = -7$$
$$-5\gamma = -8 \rightarrow \gamma = 8/5$$

$$-2\beta + 4 \cdot \frac{8}{5} = -7 \Rightarrow -\frac{67}{5} = -2\beta \Rightarrow \beta = \frac{67}{10}$$

$$\alpha = 2 - \gamma + 2\beta = 2 - 8/5 + 2\left(\frac{67}{10}\right)$$

NOTA

HOJA Nº

FECHA

$$\boxed{\alpha = 1}$$

$$\frac{1}{2} - \beta + \frac{1}{2}\gamma = 1 \Rightarrow -\beta + \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\overset{\gamma}{\cancel{\beta}} - \frac{1}{2} = \beta$$

$$-\frac{3}{2} + 2\beta - \frac{1}{2}\gamma = -1 \Rightarrow 2\beta - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}$$

$$2\left(\frac{1}{2}\gamma - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\gamma - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}\gamma = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{\gamma = 3}$$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{\beta = 1} \qquad [p]^{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

NOTA

HOJA N°

FECHA

1. 28) A) • Hallar la matriz de cambio de base de coordenadas de la base B_1 en la base B_2.

• Determinar el vector de coordenadas de v en la base B_2.

A) B_1 : Base canónica de $\mathbb{R}^3$. $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$

$M_{B_1}^{B_2}$ es $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{B_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{B_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{B_2} \right)$ → Cada elemento de la base B_1, buscar su coordenada en la base B_2.

↓

"Matriz de cambio de base de $B_1 \Rightarrow B_2$"

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -5 & 0 \\ -2 & -6 & 6 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ -3.F_1 \\ +2.F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \alpha + 3\beta = 1 \\ -4\beta - 5\gamma = -3 \\ 3\gamma = 1 \end{array}$$

$\left[\gamma = \frac{1}{3} \right]$ $\quad -4\beta - \frac{5}{3} = -3 \Rightarrow 4\beta = \frac{4}{3} \Rightarrow \left[\beta = \frac{1}{3} \right]$

$\alpha + \cancel{3} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} = \cancel{1} \Rightarrow \left[\alpha = 0 \right]$ $\quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -5 & 1 \\ -2 & -6 & 6 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ -3.F_1 \\ +2.F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \alpha + 3\beta = 0 \\ 4\beta + 5\gamma = -1 \\ 6\gamma = 0 \end{array}$$

NOTA

$$4\beta = -1 \Rightarrow \left[\beta = \frac{-1}{4}\right] \qquad \alpha + 3\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\left[\alpha = \frac{3}{4}\right] \qquad \left[\gamma = 0\right]$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{B_2} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ -1/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -5 & 0 \\ -2 & -6 & 6 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -3f_1 \\ +2.f_1 \end{array} \Bigg\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \alpha + 3\beta = 0 \\ -4\beta - 5\gamma = 0 \\ 6\gamma = 1 \end{array}$$

$$\gamma = \frac{1}{6} \qquad -4\beta - \frac{5}{6} = 0 \Rightarrow -4\beta = \frac{5}{6}$$

$$\beta = -\frac{5}{24}$$

$$\alpha - \frac{3.5}{24} = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{5}{8} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^{B_2} = \begin{pmatrix} 5/8 \\ -5/24 \\ 1/6 \end{pmatrix}$$

$$\left[M^{B_2}_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 & 3/4 & 5/8 \\ 1/3 & -1/4 & -5/24 \\ 1/3 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 0 & 18 & 15 \\ 8 & -6 & -5 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right]$$

$$[v]^{B_1} \Rightarrow B_2 \longrightarrow \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 0 & 18 & 15 \\ 8 & -6 & -5 \\ 8 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} =$$

$$\downarrow$$

$$(v_1 \quad v_2 \quad v_3)^T$$

$$\frac{1}{24} \cdot \begin{pmatrix} 18v_2 + 15v_3 \\ 8v_1 - 6v_2 - 5v_3 \\ 8v_1 + 4v_3 \end{pmatrix} = [v]^{B_2}.$$

NOTA

HOJA N°

FECHA

1.29) $M_{B_1}^{B_2} \, [v]^{B_1} = [v]^{B_2}$

Tengo v y B_1, por lo que puedo sacar $[v]^{B_1}$.

Luego, con $M_{B_1}^{B_2} \cdot [v]^{B_1}$ obtengo $[v]^{B_2}$.

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 4/5 & 0 & 3/5 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times 5 \\ \\ \times 5 \end{matrix} \Bigg\} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 & \vdots & 25 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 4 \\ 4 & 0 & 3 & \vdots & 15 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \times 3 \; -4F_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 & \vdots & 25 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 25 & \vdots & -55 \end{pmatrix}$$

$3z_1 - 4z_3 = 25$

$1z_2 = 4$

$7 \cdot z_3 = -55 \Rightarrow z_3 = -\frac{55}{7}$

$3 \cdot z_1 - 4 \cdot \left(-\frac{55}{7}\right) = 25$

$\frac{395}{21} = z_1$

$$[v]^{B_1} = \begin{pmatrix} \frac{395}{21} \\ 4 \\ -\frac{55}{7} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 & \vdots & 25 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 5 & \vdots & -11 \end{pmatrix}$$

$5\gamma = -11 \Rightarrow \boxed{\gamma = -11/5}$

$\boxed{\beta = 4}$

$3\alpha - 4\left(-\frac{11}{5}\right) = 25 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{27}{5}}$

NOTA

$$[v]^{B_1} = \begin{pmatrix} 27/5 \\ 4 \\ -11/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 \\ 20 \\ -11 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{15} \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 10 & 10 & -5 \\ 11 & -10 & 2 \\ 2 & 5 & 14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 27 \\ 20 \\ -11 \end{pmatrix} = \frac{1}{75} \cdot \begin{pmatrix} 525 \\ 75 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = [v]^{B_2}$$

1.30) $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} \right\}$

$$M_{B_1}^{B_2} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}^{B_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix}^{B_2} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}^{B_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix} \right\} \qquad \cancel{\begin{pmatrix} a & d & g & 3 \\ b & e & h & 0 \\ c & f & i & 4 \end{pmatrix}}$$

$$5 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad 5 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$2 \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + 9 \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} + 11 \begin{pmatrix} g \\ h \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$5a = 3 \Rightarrow \boxed{a = 3/5}$ $\quad \boxed{5 \cdot b = 0}$ $\quad 5c = 4 \Rightarrow \boxed{c = 4/5}$

$5 \cdot 3/5 + 5 \cdot d = -1$

$5 \cdot d = -4 \Rightarrow \boxed{d = -4/5}$

$\cancel{5b} + 5e = 0 \Rightarrow \boxed{e = 0}$

$5 \cdot \frac{4}{5} + 5f = 7 \Rightarrow 5 \cdot f = 3 \Rightarrow \boxed{f = \frac{3}{5}}$

NOTA

$2 \cdot \frac{3}{5} + 9 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) + 11 \cdot g = 10$

$\frac{6}{5} - \frac{36}{5} + 11g = 10 \Rightarrow 11g = 16 \Rightarrow \boxed{g = \frac{16}{11}}$

$2 \cdot 0 + 9 \cdot 0 + 11 \cdot h = 5 \Rightarrow \boxed{h = \frac{5}{11}}$

$2 \cdot \frac{4}{5} + 9 \cdot \frac{3}{5} + 11 \cdot i = 9 \Rightarrow \frac{8}{5} + \frac{27}{5} + 11i = 9 \Rightarrow 11i = \cancel{X}\ 2$

$i = \frac{2}{11}$ $\quad \cancel{\boxed{i = \frac{15}{11}}}$

$$B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ 0 \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{16}{11} \\ 5/11 \\ \frac{2}{11} \end{pmatrix} \right\}$$

$\times$? ?

$M_{B_2}^{B_1} = M_{B_1}^{B_2}$

$B_2 = \{ v_1, v_2, v_3 \}$

$[3\ 0\ 4]^T = 5 v_1 \Rightarrow v_1 = [3/5\ \ 0\ \ 4/5]^T$

$[-1\ \ 0\ \ 7]^T = 5v_1 + 5v_2 = 5v_2 + [3\ 0\ 4]^T$

$5v_2 = [-1\ \ 0\ 7]^T - [3\ 0\ 4]^T = [-4\ \ 0\ \ 3]$

$v_2 = [-\frac{4}{5}\ \ 0\ \ 3/5]^T$

$[2\ \ 9\ \ 11]^T = 10 v_1 + 5 v_2 + 9 v_3 =$

$= [6\ 0\ 8]^T + [-4\ 0\ 3]^T + 9 v_3 \Rightarrow$

$9 v_3 = [2\ \ 9\ \ 11]^T - [6\ 0\ 8]^T - [-4\ 0\ 3]^T =$

$= [0\ \ 9\ \ 0]^T \Rightarrow v_3 = [0\ 1\ 0]^T$

HOJA N°

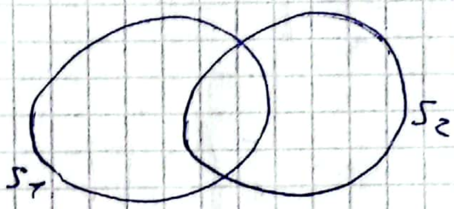
FECHA

1. 32) Hallar bases de:

I) el mayor subespacio contenido en ambos

II) el menor subespacio que los contiene.

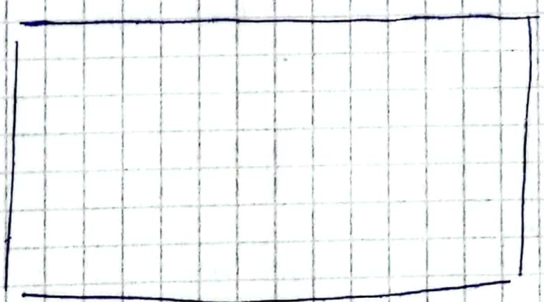
Si tenemos los subespacios



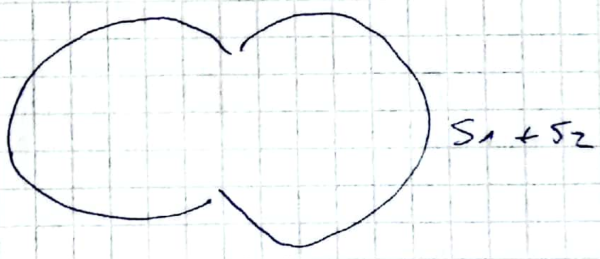
→ Este subespacio está contenido en ambos pero no es el mayor

→ Este está contenido en ambos y es el mayor

→ $S_1 \cap S_2$.



Este subespacio contiene a ambos pero no es el menor posible



Este contiene a ambos y es el menor posible

A) $S_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x_2 + x_3 + x_4 = 0 \right\}$ Ⓐ

$$S_1 = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \longrightarrow \text{Dim} = 3.$$

NOTA

(B)

- $S_2 := x \in \mathbb{R}^4 \quad \begin{array}{l} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{array} \quad gen \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Dim = 2.

- Intersección

$$\begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ 2\beta \\ \beta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} \alpha + 2\beta + \beta = 0 \\ \alpha = -3\beta \end{array} \Bigg\} \begin{pmatrix} 3\beta \\ -3\beta \\ 2\beta \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$S_1 \cap S_2 := gen \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Base del mayor subespacio contenido en ambos.

$$B_{May.} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- Suma: $S_1 + S_2 = gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cancel{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$

L.D. (probado en otra hoja).

$$B_{S_1+S_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

B) $$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

$S_1 := col(A)$

$S_2 := Nul(A).$

NOTA

HOJA N°

FECHA

$$Col(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -F_1 \\ -F_1 \\ -F_1 \\ -F_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -F_2 \\ -F_2 \\ -F_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ (A)}$$

$$Col(A) = gen \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$$

$Nul(A)$ (A)

$$-x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0$$
$$-x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 0$$
$$-x_4 + x_5 = 0 \Rightarrow x_4 = x_5$$

$$-x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_4 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_3 - x_4$$

$$-x_1 + (2x_3 - x_4) + x_3 - 2x_4 + x_4 = 0$$
$$3x_3 - 2x_4 = x_1$$

$$\begin{pmatrix} 3x_3 - 2x_4 \\ 2x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \overset{Nu(A)}{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(T) Terminar.

NOTA

1.34) $S_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 = 0\}$

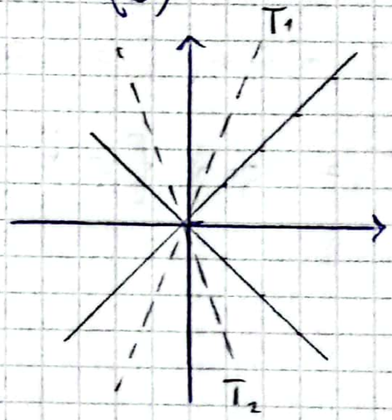
$S_2 := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0\}$

$S_1 \oplus T = S_2 \oplus T = \mathbb{R}^2$

$S_1 \cap T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad S_2 \cap T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$S_1: \; x_1 = x_2 \qquad \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$S_2: \; x_1 = -x_2 \qquad \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$



1.35) $S_1 := \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \qquad S_2 := \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$$S_1 \oplus T = S_2 \oplus T = \underbrace{\{x \in \mathbb{R}^4 / \overbrace{x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0}^{D}\}}_{\text{¿Esto significa que la suma directa da este subespacio?}}$$

Saco la intersección de S_1 y S_2 simplemente (porque es útil ?))

$S_1: \begin{pmatrix} \cancel{\alpha} \\ \cancel{2\alpha + \beta} \\ \cancel{2\alpha} \\ \cancel{\alpha - \beta} \end{pmatrix}$

$\cancel{S_2:} \quad \cancel{\begin{matrix} x_1 + x_2 \\ 2x_2 \\ x_4 + x_2 \\ 2x_1 \end{matrix}} \quad \begin{pmatrix} \cancel{1/2\, x_4 + 1/2\, x_2} \\ \cancel{x_2} \\ \cancel{1/2\, x_4 + 1/2\, x_2} \\ \cancel{x_4} \end{pmatrix}$

$\cancel{x_1 = x_2 + x_4}$

$\cancel{x_2 = x_2}$

$\cancel{x_3 = x_2 + x_4}$

$\cancel{x_4 = x_4}$

$\cancel{\alpha = 2\alpha + \beta + \alpha - \beta}$

$D: \quad x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 - x_3 + x_4$

$$\text{gen}\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \to \text{Dim}(D) = 3$$

$$\underset{\underset{\text{Dim}(S_2)}{\parallel}}{\text{Dim}(S_1)} + \text{Dim}(T) - \underbrace{\text{Dim}(S_1 \cap T)}_{0 \,\to\, \text{Por ser suma directa.}} = \text{Dim}(S_1 + T)$$

$$2 + \text{Dim}(T) = 3 \Rightarrow \text{Dim}(T) = 1.$$

$$T = \text{gen}\{v\}$$