/

ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Evaluación integradora — Primer cuatrimestre – 2023
Duración: 3 horas. — 16/VIII/23 – 9:00 hs.

Apellido y Nombres:

Legajo:

Curso:

---

1. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son las bases de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente, definidas por

$$\mathcal{B} = \left\{1 + x^2, 1 + x, x + x^2\right\},$$
$$\mathcal{C} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T\right\}.$$

Hallar la preimagen por T del vector $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

---

2. Hallar, si existe, una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\det(A) = -1$ y

$$A^2 - 3A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

---

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$.

---

4. Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T$ son autovectores de A, $\det(A) = 18$, $\operatorname{traza}(A) = 8$, y $\sigma(A) \subset (0, +\infty)$.

---

5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación definida por $T(x) = Ax$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hallar y graficar la imagen por T de la esfera unitaria.

5to. Integrador – Álgebra II

16.08.2023

1

Sea $T: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$: $[T]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \{1+x^2,\ 1+x,\ x+x^2\}$ base de $\mathbb{R}_2[x]$

$C = \{(1\ 1\ 0)^T, (1\ 0\ 1)^T, (0\ 1\ 1)^T\}$ base de $\mathbb{R}^3$.

Hallar la preimagen por T del vector $(1\ 0\ 1)^T$.

Según los datos de la representación matricial de T: $T(1+x^2) = 1.(1\ 1\ 0)^T + 1(0\ 1\ 1)^T$

$= (1\ 2\ 1)^T$

$T(1+x) = (1\ 0\ 1)^T$

$T(x+x^2) = (1\ 1\ 0)^T + (1\ 0\ 1)^T + (0\ 1\ 1)^T$

$= (2\ 2\ 2)^T$

un vector de la preimagen de $(1\ 0\ 1)^T$ es $1+x$.

De la matriz de T se observa que $rg(T) = 2$

$\Rightarrow \dim(Nu\ T) = 1$

$p \in Nu\ T \iff C_B(p) \in Nul\ [T]_B^C$.

Determinamos $Nul\ [T]_B^C = \{x \in \mathbb{R}^3 : [T]_B^C\, x = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

Restando: $x_1 - x_2 = 0$; $x_1 = x_2$, $x_3 = -x_2$

$Nul\ [T]_B^C = gen\{(1\ 1\ -1)^T\}$

Luego un vector del núcleo de T: $p = 1 + \cancel{x^2} + 1 + \cancel{x} - \cancel{x} - \cancel{x^2}$

$Nu\ T = gen\{1\}$

Finalmente

$T^{-1}(1\ 0\ 1)^T = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p = 1 + x + k.1,\ k \in \mathbb{R}\}$

o bien $p = x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

16.08.2023

2 Hallar, si existe, una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$:

$\det A = -1$ y

$$A^2 - 3A + 2I = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

Sea $B = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$ y $p(A) = A^2 - 3A + 2I = B$.

Los autovalores de B: dado que $rg(B) = 1$

$\lambda_1 = 0$ es autovalor de B y de la traza $(B) = 6$

se concluye que $\lambda_2 = 6$ es el otro ava.

Los autoespacios:

$S_{\lambda_1 = 0}(B) = \text{Nul } B = \text{gen}\{(1\ -1)^T\}$ y como

$B^T = B$: $S_{\lambda_2 = 6}(B) = \text{gen}\{(1\ 1)^T\}$

Para cada ava λ de B existe un ava μ de A

tal que $\lambda = p(\mu)$:

Para $\lambda_1 = 0$: $0 = \mu^2 - 3\mu + 2$

$\mu_1 = 1$ ó $\mu_2 = 2$

Para $\lambda_2 = 6$: $6 = \mu^2 - 3\mu + 2$

$\mu^2 - 3\mu - 4 = 0$

$\mu_1 = 4$ ó $\mu_2 = -1$

Posibles espectros de A:

$\sigma(A) = \{\mu_1 = 1 ;\ \mu_2 = 4\}$

$\sigma(A) = \{\mu_1 = 1 ;\ \mu_2 = -1\}$

$\sigma(A) = \{\mu_1 = 2 ;\ \mu_2 = 4\}$

$\sigma(A) = \{\mu_2 = 2 ;\ \mu_2 = -1\}$

Dado que $\det A = \mu_1 \cdot \mu_2 = -1 \Rightarrow \sigma(A) = \{\mu_1 = 1 ;\ \mu_2 = -1\}$

Los autoespacios de A son los mismos que los de $p(A) = B$.

$$A = P D_A P^{-1} = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{vmatrix}$$

2 (cont.)

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

16.08.2023

3 Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$: $A = \begin{vmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{vmatrix}$

Hallar $\lim_{n\to\infty} A^n$.

1º) Los autovalores de A:

$$\det \begin{vmatrix} 0.7-\lambda & 0.3 \\ 0.2 & 0.8-\lambda \end{vmatrix} = (0.7-\lambda)(0.8-\lambda) - 0.3\cdot 0.2 =$$

$$= 0.56 - 0.7\lambda - 0.8\lambda + \lambda^2 - 0.06 =$$

$$= \lambda^2 - 1.5\lambda + 0.5 = 0 \iff \lambda_1 = 1 \quad \vee \quad \lambda_2 = 0.5$$

$$\lambda = \frac{1.5 \pm \sqrt{2.25 - 4\cdot 0.5}}{2} = \frac{1.5 \pm \sqrt{0.25}}{2} = \frac{1.5 \pm 0.5}{2}$$

$$\lambda_1 = 1 \quad ; \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}$$

2º) Los autoespacios de A:

$\cdot\ \lambda_1 = 1$ $\quad \begin{vmatrix} 0.7-1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.3 & 0.3 \\ 0.2 & -0.2 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} -0.3 & 0.3 \\ 0.2 & -0.2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} -x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 &= x_1 \end{aligned}$$

$$S_{\lambda_1 = 1}(A) = \text{gen}\{(1 \quad 1)^T$$

$\cdot\ \lambda_2 = \frac{1}{2}$ $\quad \begin{vmatrix} 0.7-0.5 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8-0.5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} 0.2x_1 + 0.3x_2 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 0 \\ 3x_2 &= -2x_1 \\ x_2 &= -\tfrac{2}{3}x_1 \end{aligned}$$

$$S_{\lambda_2 = \frac{1}{2}}(A) = \text{gen}\{(3 \quad -2)^T\}$$

A es diagonalizable ; $A = P D_A P^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/5 & -1/5 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto existen matrices G_1 y $G_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que

$A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2$ donde $G_1 = P E_1 P^{-1}$ donde

$G_2 = P E_2 P^{-1}$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/5 & -1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/5 & -1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/5 & -1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 1/5 & -1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -3/5 \\ -2/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$$A = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3/5 & -3/5 \\ -2/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$A^n = \left(1 \cdot G_1 + \frac{1}{2} G_2\right)^n$ como $G_i^2 = G_i$ y $G_i \cdot G_j = 0_{\mathbb{R}^{2\times 2}}$ $\forall\, i \neq j$

$$A^n = 1^n G_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n G_2 = G_1 + \frac{1}{2^n} G_2$$

$$A^n - G_1 = \frac{1}{2^n} G_2$$

$$\| A^n - G_1 \|_F = \left|\frac{1}{2^n}\right| \| G_2 \|_F = \frac{1}{2^n} \| G_2 \|_F$$

como $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^n} = 0$

entonces $\lim_{n \to \infty} \| A^n - G_1 \|_F = 0$

se dice que en tal caso (ver nota preliminar de guía TP4, pág 1) A^n tiende a G_1

G_1 es el límite de la sucesión $\{A^k\}_{k \in \mathbb{N}}$

En nuestro caso

$$\lim_{n \to \infty} A^n = G_1 = \begin{pmatrix} 2/5 & 3/5 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

---

ejercicio n 4.8 guía TP 4.

16.08.2023

4

Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

$(1\ 0\ 0)^T$, $(2\ 3\ 4)^T$ son avt de A

$\det A = 18$

traza $A = 8$

$\sigma(A) \subset (0, +\infty)$

$$\begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 18 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 8 \end{cases}$$

como $(1\ 0\ 0)^T$ y $(2\ 3\ 4)^T$ son avt de A y $A^T = A$

y estos vectores no son ortogonales, se concluye que pertenecen al mismo autoespacio y, dado que constituyen un conjunto linealmente independiente, el autoespacio asociado tiene, al menos, dimensión 2.

$$\begin{cases} \lambda_1^2 \cdot \lambda_2 = 18 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 8 \end{cases} \quad ; \quad \lambda_2 = 8 - 2\lambda_1$$

$$\lambda_1^2 (8 - 2\lambda_1) = 18$$

$$8\lambda_1^2 - 2\lambda_1^3 - 18 = 0 \quad ; \quad -\lambda_1^3 + 4\lambda_1^2 - 9 = 0$$

una raíz es $\lambda = 3$ ✓ $\qquad -27 + 36 - 9 = 0$ ✓

$9 \cdot \lambda = 18 \qquad \lambda = 2$

remp en la otra ecuación $\quad 2 \cdot 3 + 2 = 8$ verifica

$\sigma(A) = \{\lambda_1 = 3 \text{ (doble)}, \lambda_2 = 2\} \subset (0, +\infty)$ ✓

$S_{\lambda_1 = 3}(A) = \text{gen}\{(1\ 0\ 0)^T, (2\ 3\ 4)^T\} = \text{gen}\{(1\ 0\ 0)^T, (0\ 3\ 4)^T\}$

$S_{\lambda_2 = 2}(A) = \text{gen}\{(0\ -4\ 3)^T\}$

como A es simétrica, es diagonalizable ortogonalmente

$$A = P D_A P^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & -4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 4/5 \\ 0 & -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

16.08.2023

5\) Sea $T: R^3 \to R^2$ la transformación : $T(x) = Ax$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hallar y graficar la imagen por T de la esfera unitaria.

1º) rango $(A) = 1$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

los autovalores de A^TA:

$\sigma(A^TA) = \{\lambda_1 = 6 ; \lambda_2 = 0 \text{ (doble)}\}$; $\sigma_1 = \sqrt{6}$; $\sigma_2 = 0$

los autoespacios

- $\lambda_1 = 6$:

$$\begin{aligned} -4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

restando: $-6x_1 + 6x_2 = 0$ $\qquad x_2 = x_1$

reemplazando: $-2x_1 + 2x_3 = 0$ $\qquad x_3 = x_1$

- $\lambda_2 = 0$ $\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$$x_3 = -x_1 + x_2$$

$$S_{\lambda_2 = 0}(A^TA) = \text{gen}\{(1\ 0\ -1)^T, (1\ -2\ 1)^T\}$$
$$S_{\lambda_1 = 6}(A^TA) = \text{gen}\{(1\ 1\ 1)^T\}$$

2º) una DVS de $A = U\Sigma V^T$ es tal que

$$V = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} ; \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \quad U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & +1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

5 (cont.)

con el cambio de variable $x = Vy$ y teniendo :

$\| x \| = \| V y \| = \| y \|$

$z = Ax = AVy = U\Sigma (V^T V) y = U\Sigma y$

$z = u_1 \underbrace{\sigma_1 y_1}_{\omega_1}$ y $\omega_2 = 0$

$$y_1 = \frac{\omega_1}{\sigma_1}$$

teniendo $\| y \|^2 = 1$, la imagen de la esfera unitaria de $\mathbb{R}^3$ es

$\frac{\omega_1^2}{\sigma_1^2} \leq 1$; $\omega_1^2 \leq \sigma_1^2$; $|\omega_1| \leq \sqrt{6}$ segmento de extremos

$(\sqrt{3}, \sqrt{3})$ y $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ contenido en la recta $\text{Col } A = \text{gen}\{(1 \ \ 1)^T\}$