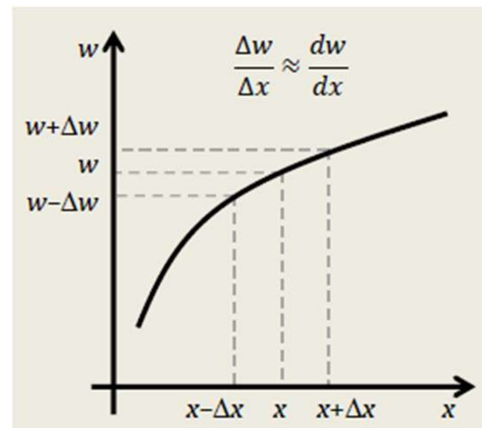
Métodos Matematicos y Numericos (95.13)

Errores

Fórmula general de Propagación

$y = F(x_1, x_2,\ldots, x_n)$

Se asume que los errores son pequeños y se hace un desarrollo en serie de Taylor de 1er orden:



$$\delta y \approx \left.\frac{\partial F}{\partial x_1}\right|_P \delta x_1 + \left.\frac{\partial F}{\partial x_2}\right|_P \delta x_2 + \cdots + \left.\frac{\partial F}{\partial x_n}\right|_P \delta x_n$$

Acotando la ecuación anterior queda lo siguiente:

Fórmula General de Propagación

$$\Delta y = \sum_{j=1}^{n} \left| \left.\frac{\partial F}{\partial x_j}\right|_P \right| \Delta x_j$$

Propagación de errores en operaciones elementales

Suma:

$$c = a + b$$

$$\Delta c = \left|\frac{\partial c}{\partial a}\right| \Delta a + \left|\frac{\partial c}{\partial b}\right| \Delta b$$

$$\Delta c = |1|\Delta a + |1|\Delta b$$

$$\Delta c = \Delta a + \Delta b$$

Error Relativo:

$$R_c = \frac{\Delta c}{|c|} = \frac{\Delta a + \Delta b}{|a+b|} = \frac{R_a|a| + R_b|b|}{|a+b|}$$

$$R_c = R_a \frac{|a|}{|a+b|} + R_b \frac{|b|}{|a+b|}$$

Propagación de errores en operaciones elementales

Resta:

$$c = a - b$$

$$\Delta c = \left|\frac{\partial c}{\partial a}\right| \Delta a + \left|\frac{\partial c}{\partial b}\right| \Delta b$$

$$\Delta c = |1|\Delta a + |-1|\Delta b$$

$$\Delta c = \Delta a + \Delta b$$

Error Relativo:

$$R_c = \frac{\Delta c}{|c|} = \frac{\Delta a + \Delta b}{|a-b|} = \frac{R_a|a| + R_b|b|}{|a-b|}$$

$$R_c = R_a \frac{|a|}{|a-b|} + R_b \frac{|b|}{|a-b|}$$

Si a y b son parecidos, Rc aumenta considerablemente

Propagación de errores en operaciones elementales

Ejemplo:

$$a = 100 \pm 1 \quad b = 99 \pm 1 \quad (aprox\ 1\%)$$
$$c = a + b$$
$$\Delta c = \Delta a + \Delta b = 2$$
$$c = 199 \pm 2$$
$$R_c = \frac{2}{199} \cong 0.01 \quad (aprox\ 1\%)$$

Otro:

$$c = a - b$$
$$\Delta c = \Delta a + \Delta b = 2$$
$$c = 1 \pm 2$$
$$R_c = \frac{2}{1} \cong 2 \quad (aprox\ 200\%)$$

Este efecto es lo que se conoce como "Cancelación de Terminos"

Propagación de errores en operaciones elementales

Multiplicación:

$$c = a.b$$

$$\Delta c = \left|\frac{\partial c}{\partial a}\right| \Delta a + \left|\frac{\partial c}{\partial b}\right| \Delta b$$

$$\Delta c = |b|\Delta a + |a|\Delta b$$

Error Relativo:

$$R_c = \frac{\Delta c}{|c|} = \frac{|b|\Delta a + |a|\Delta b}{|ab|} = \frac{\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta b}{|b|}$$

$$R_c = R_a + R_b$$

Propagación de errores en operaciones elementales

División:

$$c = \frac{a}{b}$$

$$\Delta c = \left|\frac{\partial c}{\partial a}\right| \Delta a + \left|\frac{\partial c}{\partial b}\right| \Delta b$$

$$\Delta c = \left|\frac{1}{b}\right| \Delta a + \left|-\frac{a}{b^2}\right| \Delta b$$

Error Relativo:

$$R_c = \frac{\Delta c}{|c|} = \frac{\left|\frac{1}{b}\right| \Delta a + \left|-\frac{a}{b^2}\right| \Delta b}{\left|\frac{a}{b}\right|} = \frac{\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta b}{|b|}$$

$$R_c = R_a + R_b$$

Guía 1 - Ejercicio 4

Se tienen los siguientes números correctamente redondeados:

$$x = 2.00 \quad y = 3.00 \quad z = 4.00$$

Estar "correctamente redondeados" implica que:

$$\Delta x = 0.005 \quad \Delta y = 0.005 \quad \Delta z = 0.005$$

a) Calcular:

$$c = 3x + y - z$$

$$\Delta c = 3\Delta x + \Delta y + \Delta z = 0.025$$

$$c = 5.00 \pm 0.025$$

Guía 1 - Ejercicio 4

b) Calcular:

Cuantos dígitos son correctos?

$$c = x\ sen\left(\frac{y}{40}\right) \approx 0.149859415\ldots$$

$$a = \frac{y}{40} = 0.075 \quad \rightarrow \quad \Delta a = \frac{\Delta y}{40} \approx 0.00013$$

$$b = sen(a) = 0.0749297\ldots$$

$$\Delta b = \left|\frac{db}{da}\right| \Delta a = |\cos(a)|\Delta a \approx 0.00013$$

$$c = x.b \quad \rightarrow \quad R_c = R_x + R_b = \frac{\Delta x}{|x|} + \frac{\Delta b}{|b|} \approx 0.0042$$

$$\Delta c = R_c|c| \approx 0.0007$$

$$c = 0.150 \pm 0.0007$$

Guía 1 - Ejercicio 4

b) (Forma Alternativa) Aplico la fórmula general en forma directa:

$$c = x\, sen\left(\frac{y}{40}\right) \approx 0.149859415\,...$$

$$\Delta c = \left|\frac{\partial c}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial c}{\partial y}\right| \Delta y$$

$$\Delta c = \left|sen(\frac{y}{40})\right| \Delta x + \left|\frac{x}{40}\cos(\frac{y}{40})\right| \Delta y$$

$$\Delta c = 0.07493\Delta x + 0.04986\Delta y \approx 0.0007$$

$$c = 0.150 \pm 0.0007$$

Ejercicio

Se tiene la expresión $y = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$

a) Calcular y para x=30, incluyendo su error absoluto. Suponer que la raíz cuadrada se conoce con 6 decimales correctos y que el error en x es despreciable.

b) Obtener una expresión matemáticamente equivalente a la anterior, pero mejor condicionada desde el punto de vista numérico, y recalcular el resultado con el nuevo error.

Ejercicio

a) Tenemos que para x=30 queda:

$$y = \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$y = \ln(30 - 29.983329) = -4.094084596\ldots$$

$$x = 30 \quad \Delta x = 0$$

Planteo que:

$$\mathrm{z} = \sqrt{x^2 - 1} \quad \Delta z = 0.5\ 10^{-6} = 0.0000005$$

$$y = \ln(x - z)$$

$$w = x - z = 0.017\ldots$$

$$\Delta w = \Delta z$$

$$y = \ln(w) \quad \rightarrow \quad \Delta y = \left|\frac{1}{w}\right| \Delta w = 0.3\ 10^{-4}$$

$$y = -4.09408 \pm 0.00003$$

Ejercicio

b) Para evitar cancelación de términos planteo:

$$y = \ln\left(\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\right) = \ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$y = -\ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$x = 30 \quad \Delta x = 0$$

$$\mathrm{z} = \sqrt{x^2 - 1} \quad \Delta z = 0.5\ 10^{-6} = 0.0000005$$

$$y = -\ln(x + z)$$

$$w = x + z = 59.983329$$

$$\Delta w = \Delta z$$

$$y = -\ln(w) \quad \rightarrow \quad \Delta y = \left|-\frac{1}{w}\right| \Delta w = 0.1\ 10^{-7}$$

$$y = -4.09406667 \pm 0.00000001$$

Ejercicio: Perturbaciones Experimentales

A.1) Se dispone de un algoritmo para computar la siguiente integral:

$$I(a, b) = \int_0^1 e^{\frac{-b.x}{(a+x^2)}}\, dx$$

Utilizando dicho algoritmo se obtuvo la siguiente tabla de resultados:

a	b	I
0,39	0,34	1,425032
0,40	0,32	1,408845
0,40	0,34	1,398464
0,40	0,36	1,388198
0,41	0,34	1,372950

Ahora bien, se midieron las cantidades físicas z e y, obteniéndose:

$z = 0{,}400 \pm 0{,}003$ $\qquad$ $y = 0{,}340 \pm 0{,}005$

Estimar el error en $I(z,y)$ y expresar el resultado final.

Ejercicio: Perturbaciones Experimentales

a	b	I
0,39	0,34	1,425032
0,40	0,32	1,408845
0,40	0,34	1,398464
0,40	0,36	1,388198
0,41	0,34	1,372950

$$\Delta I = \left|\frac{\partial I}{\partial z}\right| \Delta z + \left|\frac{\partial I}{\partial y}\right| \Delta y = \left|\frac{\partial I(z,y)}{\partial z}\right| \Delta z + \left|\frac{\partial I(z,y)}{\partial y}\right| \Delta y$$

$$\frac{\partial I(z,y)}{\partial z} \cong \frac{I(a+\Delta a, b) - I(a-\Delta a, b)}{2\Delta a} = \frac{1.372950 - 1.425032}{0.41 - 0.39} = -2.6041$$

$$\frac{\partial I(z,y)}{\partial y} \cong \frac{I(a, b+\Delta b) - I(a, b-\Delta b)}{2\Delta b} = \frac{1.388198 - 1.408845}{0.36 - 0.32} = -0.516175$$

$$\Delta I = \left|\frac{\partial I}{\partial z}\right| \Delta z + \left|\frac{\partial I}{\partial y}\right| \Delta y = 2.6041 \,.\, 0.003 + 0.516175 \,.\, 0.005 = 0.01039 \approx 0.011$$

$$I(0.40\,, 0.34) = 1.40 \pm 0.011$$

Punto Flotante

- IEEE-754 describe los formatos de punto flotante
- Posee una mantisa y un exponente, con un flag de signo para cada uno

Ejemplos (t=8,3):

π = +0,31415927e+001

0,00345 = +0,34500000e-002

-123456789,123 = -0,12345679e+009

Ley Asociativa

$v = (0{,}98765 + 0.012424) – 0.0065432$

$w = 0{,}98765 + (0.012424 – 0.0065432)$

Ley Asociativa (v = (0,98765 + 0.012424) – 0.0065432)

Número	Representación		Procesamiento
0,98765	0,98765 . 10e0		0,98765 . 10e0
0,012424	0,12424 . 10e-1	+	0,012424 . 10e0
	0,10001 . 10e1		1,000074 . 10e0
			0,10001 . 10e1
0,0065432	0,65432 . 10e-2	-	0,00065432 . 10e1
$\boxed{0{,}99356}$	0,99356 . 10e0		0,09935568 . 10e1

Ley Asociativa (w = 0,98765 + (0.012424 – 0.0065432))

Número	Representación	Procesamiento
0,012424	0,12424 . 10e-1	0,12424 . 10e-1
0,0.0065432	0,65432 . 10e-2	- 0,065432 . 10e-1
	0,58808 . 10e-2	0,058808 . 10e-1
		0,0058808 . 10e0
0,98765	0,98765 . 10e0	+ 0,98765 . 10e0
0,99353	0,99353 . 10e0	0,9935308 . 10e0

Consultas????