FECHA

Guia 3

		1	A	B							
		2	A	B	C	D T					
	◇	3									
?		4	A	B	C ✓	D ?	E ?	¿Area de triangulo?			
		5									
		6	A	B	C	D	E				
		7	A	B	C						
✓?		8	A	B	C	D ✓?					
		9									
		10	A	B	C						
	◇	11	A	B	C	D	E				
		12	A	B							
		13	A	B	C	D	E	F	G	H	
		14	A	B							
		15									
		16									
		17									
		18									
		19	A	B							
		20									
		21	A	B							
		22	A	B	C	D					
		23									

NOTA

Escaneado con CamScanner

~~3.2) $\langle x, y \rangle := y^T \cdot Gx$~~ ← ~~Verificar que define el producto interno en $\mathbb{R}^2$.~~

~~A) $G \in G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$~~

Repaso producto interno

Producto escalar en $\mathbb{R}^n$ → Producto interno canónico

- CBC: Producto escalar: $(1,2,3) \cdot (5,-1,2) = 1 \cdot 5 + 2(-1) + 3 \cdot 2 = 9$

- Ahora: $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 5 - 2 + 6 = 9$

Genéricamente: $\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 \cdot y_1 + \dots x_n \cdot y_n =$ Escalar

$\langle \, , \, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Número escalar

Con el canónico: $\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2$

Matriz de Gram:

$$G = \begin{pmatrix} \langle x, x \rangle & \langle x, y \rangle \\ \langle y, x \rangle & \langle y, y \rangle \end{pmatrix}$$

¿Para armar la matriz los elementos deben ser L.I.?

Para la base canónica

$$\begin{pmatrix} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle & \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle & \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para la base canónica y el p.i. canónico la matriz es la matriz identidad

$\langle \cdot, \cdot \rangle : k^n \times k^n \to k = \bar{y}^T x$

¿Qué significa la barra?

$$\underset{1 \times 3}{\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3 \times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} = \underset{1 \times 1}{9}$$

Base canónica y producto interno no canónico (por ejemplo)

$$\langle x, y\rangle = 2x_1 . y_1 - x_1 . y_2 - x_2 . y_1 + x_2 . y_2$$

$$G_E = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = 2.1.1 - 1.0 - 0.1 + 0.0 = 2$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\rangle = 2.1.0 - 1.1 - 0.0 + 0.1 = -1$$

No es simétrico ni matriz identidad.

$$\dots \quad \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = -1 \quad \left\langle \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\rangle = 1$$

¿Y con otra base? (P.I. canónico, y otro).

$$B = \left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}\right\} \qquad \underset{\text{canónico}}{G_B} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 26 \end{pmatrix}$$

$1.1 + 2.2 = 5$

$(1, 2)\cdot(5, -1) = 3$

$5 - 2 = 3$

$25 + 1 = 26$

$$\langle x, y\rangle = 2.x_1 . y_1 - x_1 . y_2 - x_2 . y_1 + x_2 . y_2$$

$$\underset{\text{no canónico}}{G_B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 61 \end{pmatrix} \qquad \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} . \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\rangle = 2.1.1 - 1.2 - 2.1 + 2.2 = 2$$

$$\dots \quad -1 \quad -1 \quad 61$$

Usando las matrices sacadas con las bases canónicas:

$$x_1 . y_1 + x_2 . y_2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$2x_1 . y_1 + \boxed{x_2 . y_2} - x_1 y_2 - x_2 . y_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

NOTA

HOJA N°

FECHA

Tincho:

3.2) Verifico solo G_4 porque incluye al resto.

G_4 $\langle x, y \rangle = y^T . Gx$

D) $G \in G_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} : a > 0, \det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} > 0 \right\}$

$\langle x, y \rangle = y^T \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} x$

Para comprobar que es P.I.:

i) 1) $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

2) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in V$

iii) $\langle x, x \rangle > 0$ si $x \neq 0$.

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\underbrace{(y_1 \quad y_2)}_{1\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}}_{2\times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{2\times 1} = (x_1 , x_2) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$(a.y_1 + b.y_2 \quad b.y_1 + c.y_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (a.x_1 + b.x_2 \quad bx_1 + c.x_2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{a.y_1.x_1} + \cancel{b.y_2.x_1} + \cancel{b.y_1.x_2} + \cancel{c.y_2.x_2} = \cancel{a.x_1.y_1} + \cancel{b.x_2.y_1} + \cancel{bx_1.y_2} + \cancel{c.x_2.y_2}$$

✓

- $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda . \langle x, y \rangle$

$$(y_1 \quad y_2) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} = \lambda . (y_1 \quad y_2) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$(a.y_1 + b.y_2 \quad b.y_1 + c.y_2) \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} = (\lambda.a.y_1 + \lambda.b.y_2 \quad \lambda.b.y_1 + \lambda.c.y_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda.a.y_1.x_1 + \lambda.b.y_2.x_1 + \lambda b.y_1.x_1 + \lambda.c.y_2.x_2 = \lambda.a.y_1.x_1 + \lambda.b.y_2.x_1 + \lambda.b.y_1.x_2 + \lambda.c.y_2.x_1$$

✓

NOTA

- $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0.$

T

NOTA

HOJA N°

FECHA

3.4) $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ $\mathbb{R}$-espacio euclídeo $\dim = 3$.

$\underset{\text{base}}{B} = \{ u_i : i \in I_3 \} \subset \{ u \in \mathbb{V} : \|u\| = 1 \}$

tal que $\|u_i + u_j\|^2 = 2 + \sqrt{3}$ y

$\|u_i - u_j\|^2 = 2 - \sqrt{3}$ para $i \neq j$.

Tanto:

$$\|u_i + u_j\|^2 = \langle u_i + u_j, u_i + u_j \rangle$$

$$2 + \sqrt{3} = \langle u_i, u_i \rangle + \langle u_i, u_j \rangle + \langle u_j, u_i \rangle + \langle u_j, u_j \rangle$$

$$\cancel{2} + \sqrt{3} = \cancel{1} + 2 \langle u_i, u_j \rangle + \cancel{1}$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} = \langle u_i, u_j \rangle} \quad i \neq j$$

$$\|u_i - u_j\|^2 = \langle u_i - u_j, u_i - u_j \rangle$$

$$2 - \sqrt{3} = \langle u_i, u_i \rangle - \langle u_i, u_j \rangle - \langle u_j, u_i \rangle + \langle u_j, u_j \rangle$$

$\otimes$

$$\cancel{2} - \sqrt{3} = \cancel{1} - 2 \langle u_i, u_j \rangle + \cancel{1}$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} = \langle u_i, u_j \rangle} \quad i \neq j$$

$\otimes$ $\|u_i\| = 1$ (según enunciado) $\rightarrow \|u_1\| = \sqrt{\langle u_1, u_1 \rangle} = 1 \Rightarrow \langle u_1, u_1 \rangle = 1$

$\rightarrow \|u_2\| = \sqrt{\langle u_2, u_2 \rangle} = 1 \Rightarrow \langle u_2, u_2 \rangle = 1$

$\rightarrow \|u_3\| = \cdots 1$

A)

$$G_B = \begin{pmatrix} \langle u_1, u_1 \rangle & \langle u_1, u_2 \rangle & \langle u_1, u_3 \rangle \\ \langle u_2, u_1 \rangle & \langle u_2, u_2 \rangle & \langle u_2, u_3 \rangle \\ \langle u_3, u_1 \rangle & \langle u_3, u_2 \rangle & \langle u_3, u_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix}$$

NOTA

Ana:

- $i \neq j$ → Forma polar: $\langle u_i, u_j \rangle = \frac{1}{4}\left(\|u_i + u_j\|^2 - \|u_i - u_j\|^2\right)$

$\langle u_1, u_2 \rangle = \frac{1}{4}\left(\|u_i + u_j\|^2 - \|u_i - u_j\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}-2+\sqrt{3}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\langle u_1, u_3 \rangle = \dots = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\langle u_2, u_3 \rangle = \dots = \boxed{\sqrt{3}/2}$

B) Hallar la matriz $\Theta := \left[\arccos\left(\langle u_i, u_j \rangle\right)\right] \begin{matrix} i \in I_3 \\ j \in I_3 \end{matrix}$

$$\theta = \arccos\left(\frac{\langle u_i, u_j \rangle}{\|u_i\| \|u_j\|}\right) = \arccos\left(\langle u_i, u_j \rangle\right)$$

Si $\overset{i=j}{\langle u_i, u_j \rangle} = 1$ y si $i \neq j$ $\langle u_i, u_j \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\arccos(1) = 0^\circ$ $\quad \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^\circ$ → ¡ Anotar tabla ángulos en radian con sen, cos, tg

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 30^\circ & 30^\circ \\ 30^\circ & 0^\circ & 30^\circ \\ 30^\circ & 30^\circ & 0 \end{pmatrix}$$

C) Construir Δ rectángulo con vértices:
- 0
- u_1
- $u_2 - \lambda u_1$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

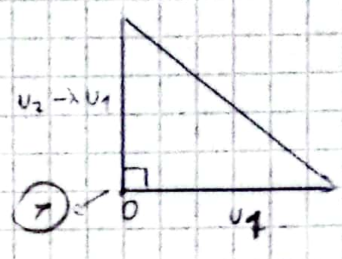
¿ $\cos \Theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$? (Episodio 13, pág. 24)

1

NOTA

¿ $\cos(90°) = 0$?

Ancho: $\langle v_2 - \lambda v_1 , v_2 \rangle = 0$



$\langle v_1 - v_1 \rangle - \langle \lambda v_1 , v_2 \rangle = 0$

$1 - \lambda \langle v_1 , v_2 \rangle = 0$

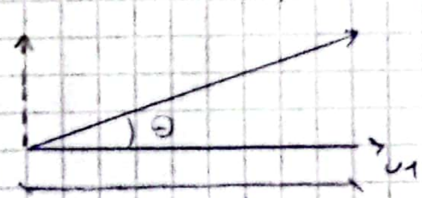
$1 - \lambda \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \lambda = \frac{2}{\sqrt{3}} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$

Vértices: $\left\{ 0, v_1 , v_2 - \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot v_1 \right\}$ (2)

Alto: $\langle v_2 - \lambda v_1 , v_1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle v_2 , v_1 \rangle - \lambda \langle v_1 , v_1 \rangle = 0$

$\langle v_2 , v_1 \rangle = \lambda \langle v_1 , v_1 \rangle$ ...

$\Rightarrow \frac{\langle v_2 , v_1 \rangle}{\| v_1 \|^2} = \lambda$



Proyección v_2 sobre v_1

$\|v_2\| \cos(\theta) = \frac{\langle v_2 , v_1 \rangle}{\| v_1 \|} \rightarrow$ proyección general $_{v_1}(v_2) = \frac{\langle v_2 , v_1 \rangle \cdot v_1}{\| v_1 \|^2}$

$\lambda = \frac{\sqrt{3}/2}{1^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ Vértices $\left\{ 0, v_1 , v_2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot v_1 \right\}$ (3)

(2), (3). Sí, es posible producir distintos triángulos.

HOJA Nº

FECHA

[Práctica proyección ortogonal, episodio 14, página 27.]

Sea S subespacio de V. Base S (ortogonal) $= \{v_1, v_2, .. v_k\}$

$$P_S(v) = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 + \frac{\langle v, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} \cdot v_2 + \dots + \frac{\langle v, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} \cdot v_k$$

"Proyección de v en el subespacio S"

Ejemplo: $S \in \mathbb{R}^3$ con P.I. canónico.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \right\}$$

A) Hallar $S^\perp$ / B) Hallar base ortogonal de S / C) $P_S\left((1 \ \ 2 \ \ 3)^T\right)$

D) $P_S\left((x_1 \ \ x_2 \ \ x_3)^T\right) \ \forall \ (x_1 \ \ x_2 \ \ x_3)^T \in \mathbb{R}^3$.

- A) Para hallar $S^\perp$: $x_1 - x_2 + x_3 = 0 \iff (1 \ \ {-1} \ \ 2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$

$$S = \left(gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \right)^\perp \Rightarrow S^\perp = gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \text{Base } S^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

- B) Para hallar base ortogonal de S, primero debo hallar una base de S:

$$x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \longrightarrow x_1 = x_2 - 2x_3 \longrightarrow S = gen \left\{ \overset{u}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{v}{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$$

Como u, v no son $\perp$, genero w ($w \perp v$).

$$w = u - c.v = u - \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} \cdot v$$

NOTA

$$w = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{\langle (1\ 1\ 0)^T, (-2\ 0\ 1)^T \rangle}{\| (-2\ 0\ 1) \|^2} \cdot \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\langle u, v \rangle = v^T \cdot u = (-2\ 0\ 1)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = -2$$

$$\left\| \begin{matrix}-2\\0\\1\end{matrix} \right\|^2 = (-2\ 0\ 1)\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} = 5$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \frac{(-2)}{5} \cdot \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4/5\\0\\-2/5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/5\\1\\2/5\end{pmatrix} = w$$

Base ortogonal de S $= \left\{ \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix} \right\}$

C) $P_S\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$ "Como $\dim(S^\perp) = 1$ y $P_S(v) = v - P_{S^\perp}(v)$, calculemos primero $P_{S^\perp}(v)$".

"Con la fórmula de proyección ortogonal:"

$$P_S\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right) = \frac{\langle (1\ 2\ 3)^\perp, (1\ -1\ 2)^\perp \rangle}{\| (1\ -1\ 2) \|^2} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$$

$$(1\ -1\ 2)\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = 1 + 1 + 4 = 6 \quad / \quad (1\ -1\ 2)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 1 - 2 + 6 = 5$$

$$P_{S^\perp} = \frac{5}{6}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/6\\-5/6\\10/6\end{pmatrix} \quad / \quad P_S\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - P_{S^\perp}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/6\\17/6\\8/6\end{pmatrix}$$

D)

1 $[P_S]_E^E$

NOTA

HOJA N°

FECHA

3.7) $\mathbb{R}^3$, PI $\langle \cdot , \cdot \rangle$ definido por:

$$\langle x, y \rangle = y^T \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} x$$

$S_1 = \{ x \in \mathbb{R}^3 \, . \, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$

$S_2 = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \, x_1 - x_3 = 0 \}$

A) Hallar las matrices con respecto a la base canónica de las proyecciones ortogonales de $\mathbb{R}^3$ sobre $S_1^{\perp}$ y $S_2^{\perp}$

$S_1 :$ $x_1 = -x_2 - x_3$ / $S_1 = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Dim = 2

$S_2 :$ $x_1 - x_3 = 0$ / $S_2 = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ Dim = 2

$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(S_1) + \dim(S_1^{\perp})$

$3 = 2 + \boxed{\dim(S_1^{\perp}) = 1}$

$\cdots \boxed{\dim(S_2^{\perp}) = 1}$

Buscamos generador de $S_1^{\perp}$.

$0 = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$0 = \underset{1\times3}{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$\underset{1\times3}{\left((-2-2) \quad (2+5) \quad 4\right)} \begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}$

$\left(-4a + 7b + 4c = 0\right)$

$0 = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$\left((-2) \quad (2+4) \quad 6\right) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$\left(-2a + 6b + 6c = 0\right)$

Resuelvo las ec.

NOTA

$$\begin{pmatrix} -4 & 7 & 4 \\ -2 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2F_2 \end{matrix} \Big\} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 6 \\ 0 & -5 & -8 \end{pmatrix}$$

$$-5 \cdot b - 8c = 0$$
$$-5b = 8c$$
$$-5/8 \; b = c$$

$$-2a + 6b + 6\left(-\frac{5}{8} b\right) = 0$$

$$-2a + \frac{9}{4} b = 0 \Rightarrow \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot b = a \Rightarrow \frac{9}{8} b = a$$

$$S_1^\perp = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}\right\}$$

$$¿S_2^\perp? \quad 0 = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 3} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{3\times 1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ 4x_2 + 6x_3 \end{pmatrix}$$

$$2x_1 - 2x_2 + 4x_2 + 6x_3 = 0$$

$$\boxed{2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 0}$$

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \\ 4x_2 + 6x_3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{0 = -2x_1 + 5x_2 + 4x_3}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} /2 \\ +F_1 \end{matrix} \Big\} \quad \begin{matrix} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ +7x_2 + 10x_3 = 0 \end{matrix}$$

$$10x_3 = -7x_2 \Rightarrow x_3 = -\frac{7}{10} x_2$$

$$x_1 + x_2 + 3\left(-\frac{7}{10} x_2\right) = 0$$

$$x_1 = +\frac{11}{10} x_2$$

$$S_2^\perp = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} \frac{11}{10} \\ 1 \\ -\frac{7}{10} \end{pmatrix}\right\}$$

$$S_2^\perp = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 11 \\ 10 \\ -7 \end{pmatrix}\right\}$$

NOTA

HOJA Nº

FECHA

Ana:

$$\left[P_{S_1^\perp}\right]_E^E = \left(\left[P_{S_1^\perp}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}\right]^E \; \left[P_{S_1^\perp}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}\right]^E \; \left[P_{S_1^\perp}\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\end{pmatrix}\right]^E \right)$$

$$P_{S_1^\perp}(x) = \frac{\langle x, \, gen(S_1^\perp) \rangle}{\| gen(S_1^\perp) \|^2} \cdot gen(S_1^\perp)$$

$$P_{S_1^\perp}(x) = \frac{\langle (x_1 \; x_2 \; x_3)^T, (9 \; 8 \; -5)^T \rangle}{\| (9 \; 8 \; -5)^T \|^2} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}9 & 8 & -5\end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} = 170$$

NOTA

HOJA N°

FECHA

3.7) B) Suponiendo matriz de Tincho

$\text{Dist}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, S_2^{\perp} \right\}$ Matriz: $\left[P_{S_2^{\perp}} \right]_E^E = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 11 & 0 & -11 \\ 10 & 0 & -10 \\ -7 & 0 & 7 \end{pmatrix}$

$$P_{S_2^{\perp}}(b) = \frac{1}{18} \cdot \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 11 & 0 & -11 \\ 10 & 0 & -10 \\ -7 & 0 & 7 \end{pmatrix}} \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}} = \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} -11 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\| P_{S_2^{\perp}}(b) \|^2 \Rightarrow \left\langle \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -11 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}, \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -11 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\longrightarrow$ ¿No puedo multiplicarlos directamente porque el producto interno NO es el canónico?

$$\frac{1}{18} \cdot \frac{1}{18} \cdot \begin{pmatrix} -11 & -10 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{324} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 \\ -10 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{1}{324} \cdot 36 = \frac{1}{9}$$

$$\sqrt{\frac{1}{9}} = \boxed{\frac{1}{3}} \checkmark$$

$\text{Dist}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, S_1^{\perp} \right\}$ Matriz: $\frac{1}{12} \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 8 & 8 & 8 \\ -5 & -5 & -5 \end{pmatrix} = \left[P_{S_1^{\perp}} \right]_E^E$

$$P_{S_1^{\perp}}(b) = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 8 & 8 & 8 \\ -5 & -5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 36 \\ 32 \\ -20 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 36 & 32 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 36 \\ 32 \\ -20 \end{pmatrix} = \frac{1}{144} \cdot 384 = \frac{8}{3}$$

$$\sqrt{\frac{8}{3}} = \boxed{\frac{2 \cdot \sqrt{6}}{3}} \checkmark \text{Ahora}$$

NOTA

X Tincho, Pig.

3.8) $G_B = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \{v_1\ v_2\ v_3\}$

A) Hallar $\left[P_{\underbrace{gen\{v_1, v_2\}}_{S}}\right]_B^B$

$$\left[P_S\right]_B^B = \begin{pmatrix} \left[P_S(v_1)\right]_B^B & \left[P_S(v_2)\right]_B^B & \left[P_S(v_3)\right]_B^B \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ } Porque v_1 y v_2 ya pertenecen a S!

(C) $P_S(v_3) = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2$ ⟶ ¿Porque proyección de v_3 en S pertenece a S?

Idem Ej 15 (pag 25)

$$\begin{cases} \langle v_1, v_3 - P_S(v_3) \rangle = 0 \rightarrow \langle v_1, v_3 \rangle - \langle v_1, P_S(v_3) \rangle = 0 \\ \langle v_2, v_3 - P_S(v_3) \rangle = 0 \rightarrow \langle v_2, v_3 \rangle - \langle v_2, P_S(v_3) \rangle = 0 \end{cases}$$

$\frac{1}{3} = \langle v_1, P_S(v_3) \rangle \qquad \frac{1}{4} = \langle v_2, P_S(v_3) \rangle$

$\frac{1}{3} = \langle v_1, a_1 v_1 + a_2 v_2 \rangle \qquad \frac{1}{4} = \langle v_2, a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2 \rangle$

$\frac{1}{3} = a_1 \cdot \langle v_1, v_1 \rangle + a_2 \langle v_1, v_2 \rangle \qquad \frac{1}{4} = a_1 \cdot \langle v_2, v_1 \rangle + a_2 \langle v_2, v_2 \rangle$

$\frac{1}{3} = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{4} = a_1 \frac{1}{2} + a_2 \frac{1}{3}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \times 6 \\ \times 12 \end{array} \Big\} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}_{-F_1} \Big\} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{-3F_2} \Big\} \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$a_2 = 1 \qquad 6a_1 + 1 = 0 \longrightarrow a_1 = -1/6$

$P_S(v_3) = a_1 \cdot v_1 + a_2 \cdot v_2$

$[P_S(v_3)]^B = \begin{pmatrix} -1/6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [P_S]^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/6 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

B) $P_S(v_3) = -\frac{1}{6} \cdot v_1 + v_2$ ✓?

C) Calcular $dist(v_3, S)$

$P_{S^\perp}(v_3) = v_3 - P_S(v_3) = \underbrace{v_3 + \frac{1}{6} v_1 - v_2}$

$[P_{S^\perp}(v_3)]^B = \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

¿ $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$?

$dist(v_3, S) = \| P_{S^\perp}(v_3) \| = \sqrt{\langle P_{S^\perp}(v_3), P_{S^\perp}(v_3) \rangle}$

Producto interno: $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{180}$

$\sqrt{\frac{1}{180}} = \left[Dist(v_3, S) = \frac{\sqrt{5}}{30} \right]$ ✓

D) Hallar todos los $v \in V$ tal que $dist(v, v_1) = dist(v, v_2)$.

$\langle v - v_1, v - v_1 \rangle = \langle v - v_2, v - v_2 \rangle$

$\langle v, v - v_1 \rangle + \langle -v_1, v - v_1 \rangle = \langle v, v - v_2 \rangle + \langle -v_2, v - v_2 \rangle$

$\cancel{\langle v, v \rangle} + \langle v, -v_1 \rangle + \langle -v_1, v \rangle + \langle -v_1, -v_1 \rangle = \cancel{\langle v, v \rangle} + \langle v, -v_2 \rangle + \langle -v_2, v_2 \rangle + \langle -v_2, v \rangle$

$-2 \langle v, v_1 \rangle + \underset{G_B}{1} = -2 \langle v, v_2 \rangle + \underset{G_B}{\frac{1}{3}}$

NOTA

$$\langle v, v_1 \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\langle v, v_1 \rangle = a_1 + \frac{1}{2} \cdot a_2 + \frac{1}{3} \cdot v_3$$

$$\langle v, v_2 \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\langle v, v_2 \rangle = \frac{1}{2} \cdot a_1 + \frac{1}{3} \cdot a_2 + \frac{1}{4} \cdot a_3$$

$$-2\left(a_1 + \frac{1}{2} \cdot a_2 + \frac{1}{3} \cdot a_3\right) + 1 = -2\left(\frac{1}{2} \cdot a_1 + \frac{1}{3} \cdot a_2 + \frac{1}{4} \cdot a_3\right) + \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} = -a_1 - \frac{2}{3} \cdot a_2 - \frac{1}{2} \cdot a_3 + 2 \cdot a_1 + a_2 + \frac{2}{3} \cdot a_3$$

$$\left\{ v \in V \;/\; \frac{2}{3} = a_1 + \frac{1}{3} \cdot a_2 + \frac{1}{6} \cdot a_3 \right\} \longrightarrow$$ Conjunto v dist con v_1 = dist con v_2.

¿ Respuesta suficiente?

HOJA N°

FECHA

3. (4) Rn A) $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Primero reviso si b pertenece a Col(A).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +F_1+F_2 \end{array} \Bigg\} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} +F_3 \\ +F_3 \\ \ \end{array} \Bigg\} \cancel{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)}$$

$$b \notin Col(A) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Resolver $A^T . A . x = A^T . b$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times 2 + F_1 \\ \times 2 - F_1 \end{array} \Bigg\} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ /3 \\ -\frac{F_2}{3} \end{array} \Bigg\} \cancel{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}}$$

$2x_3 = 4 \Rightarrow x_3 = 2$ $\quad \cancel{x_2 + x_3 = 2} \Rightarrow x_2 = 0$

$2 . x_1 \cancel{-1.0} + 1.2 = 0 \Rightarrow 2x_1 = -2 \Rightarrow \cancel{x_1 = -1}$. $\cancel{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}$

$$\cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} x_1 + x_3 &= 1 \\ x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned} \quad \cancel{\Rightarrow x_3 = 1 - x_1} \quad \cancel{\Rightarrow x_3 = 2 - x_2}$$

$$\cancel{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 - x_1 + 2 - x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

$x_1 = 1 - x_3$
$x_2 = 2 - x_3$

$$\begin{pmatrix} 1 - x_3 \\ 2 - x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Todas las soluciones por mínimos cuadrados son de la forma.

$$\boxed{\underbrace{gen \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{Nul(A)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{X_p} = \underset{x \in \mathbb{R}^3}{Arg.min.} \| b - A}$$

NOTA

Error cuadrático:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^3} \|b - Ax\|^2 = \|b - Ax_p\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2$$

$$(1 \quad -2 \quad 1)^T$$

$$\left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \right\|^2 = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = 3$$

Determinar la norma mínima:

$$\text{Base } F_i(A): \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times(-1) \\ -F_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{-0} & \cancel{1} \end{pmatrix}$$

$$\text{Base } F_i(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

23/10/23. Práctica. Ejercicio de Parcial:

Se considera el espacio euclídeo con P.I.

$$\langle x, y \rangle = y^T \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} x \quad 4$$

A) Calcular $\underbrace{dist(v, S)}_{1}$ con $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

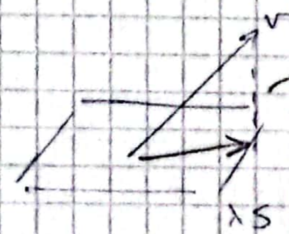
Definimos 1 como la norma de la proyección

$$S = \{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0 \}$$

Lo Es en $\mathbb{R}^3$ No hay nada que cambie el esp vect

B) Hallar todos los $x \in \mathbb{R}^3 / d(x, S) = d(x, S^\perp)$.

A)



$$\rightarrow \| v - P_{S}(v) \| = \| P_{S^\perp}(v) \|$$

$$d(v, S) = \| Proy_{S^\perp}(v) \|$$

$\dim(S) = 2$, $\dim(S^\perp) = 1$

Saco gen S: $S = gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$S^\perp = \left\{ w \in \mathbb{R}^3 / \left\langle w, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle w, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$$

Usamos esto porque NO estamos trabajando con prod. int. canónico!

$$\left\langle w, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = (1 \ -1 \ 0) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (3 \ -2 \ 2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0.$$

- $< w, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} > = (0 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{array}\right\} \cdots \left.\begin{array}{l} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{2} x_3 \end{array}\right\} S^{\perp} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

③

$$d^2(v,s) = \| \text{Proy}_{S^{\perp}}(v) \|^2 = \left\| \underbrace{\frac{< \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} >}{\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2}}_{k} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2 =$$

k → Escalar

$$= k^2 \cdot \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2$$

$$< \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} > = (-2 \ -1 \ 2) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \cdots = -10$$

② $$\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2 = < \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} > = (-2 \ -1 \ 2) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \cdots 10$$

$$\underbrace{\left(\frac{-10}{10}\right)^2}_{1} \underbrace{\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2}_{\substack{10 \\ ②}} = 1 \cdot 10 = d^2(v,s)$$

③

$$\boxed{d(v,s) = \sqrt{10}}$$ ✓

$v = P_S(v) + P_{S^{\perp}}(v)$ → Esta es otra forma, proyectando directamente sobre S.

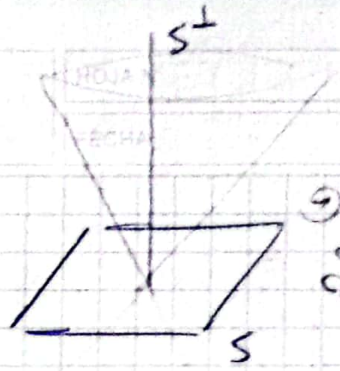
$P_{S^{\perp}}(v) = v - P_S(v)$

Voy a necesitar armar una base ortogonal de S.

NOTA

Encontrar todos

B) $x \in \mathbb{R}^3$ (1) / $d(x,S) = d(x, S^\perp)$



(1) Son dos conos.

$$d^2(x,S) = \left\| P_{S^\perp} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\|^2 = d^2(x, S^\perp) = \left\| P_S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\|^2$$

$$\left\| \frac{\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2 = \frac{-2x_1 - 2x_2 + 2x_3}{10} \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2$$

bueno uso la base de S directamente porque es ortogonal (si no lo fuese, debo buscar una base ortogonal)

$$d(x, S^\perp) = \left\| P_S \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right\| = \circledast$$

Antes de plantear esta forma, podemos ver otra opción →

$$\circledast \left\| \frac{\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2$$

Al ser ortogonales, podría haber aplicado Pitágoras ✓

$\longrightarrow$ Otra opción $x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Estos son TODOS $x \in \mathbb{R}^3$

$$P_S(x) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \| P_S(x) \|^2 = \left\| \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 =$$

Pitágoras porque son ortogonales: $\alpha^2 \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 + \beta^2 \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2$

$$P_{S^\perp}(x) = \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \| P_{S^\perp}(x) \|^2 = \gamma^2 \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \dots = 5$$

(*) Usando obviamente producto interno definido en la consigna.

$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = \dots = 5$$

$$\left\| \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^2 = 10$$

$$\| P_S(x) \|^2 = \| P_{S^\perp}(x) \|^2 \rightarrow \boxed{5 . \alpha^2 + 5 \beta^2 = 10 . \gamma^2}$$

b) Respuesta: Todos los $x \in \mathbb{R}^3 : x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

tal que $5 . \alpha^2 + 5 \beta^2 = 10 \gamma^2$

NOTA

Escaneado con CamScanner

(x es la solución)

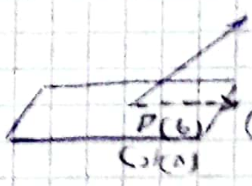
Cuadrados mínimos

$A \cdot x = b$ → Compatible → Determinado (x único)
↳ Indeterminado (no soluciones)

→ Incompatible (no existe solución) → $b \notin Col(A)$

Si no encontramos solución, buscamos soluciones aproximadas

$$A \cdot \hat{x} = Proy_{Col(A)}(b)$$



$b \notin Col(A)$, pero puedo ver su proyección

"No llego a b, pero me quedo en la sombra"

La proyección de b es la mínima distancia.

$$d(A.x,\ b)^2 \rightarrow \text{mínimo.}$$

Ejercicio de parcial sobre cuadrados mínimos.

5)

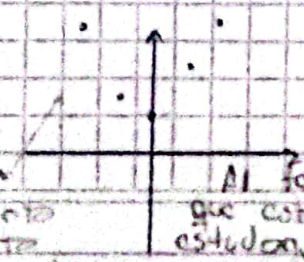
x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	3	5

Usando la técnica de CM ajustar la tabla mediante una recta y una parábola.

Recta: $y = a.x + b$ / Parábola: $a.x^2 + bx + c$.

$$\left.\begin{aligned} -2x + b &= 4 \\ -1x + b &= 2 \\ 0x + b &= 1 \\ \ldots \end{aligned}\right\}$$

Escrito matricialmente: $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$



INCOMPATIBLE.

Viendo esto nos damos cuenta que una recta no tiene sentido.

Al fenómeno que estamos estudiando puede que nos sirva una parábola.

No existe un único a, b.

$$\begin{pmatrix}4\\2\\1\\3\\5\end{pmatrix} \notin Col(A) \Rightarrow A \cdot \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\1\\3\\5\end{pmatrix}$$ no tiene solución.

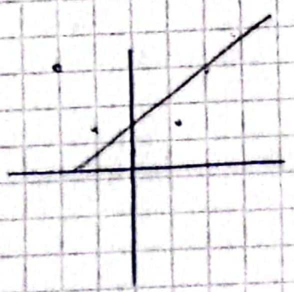
$$A^T \cdot A \cdot \hat{x} = A^T \cdot b$$

$$\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{a}\\ \tilde{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & -1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\2\\1\\3\\5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}10 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{a}\\ \tilde{b}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\15\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix}\tilde{a} = 3/10\\ \tilde{b} = 3\end{matrix}$$

check

$$\tilde{a} \cdot x + \tilde{b} = y \longrightarrow \frac{3}{10}x + 3 = y$$



Sol.: esta recta. Claramente trazar una recta no tiene sentido.