Ejercicio 1

1

En $\mathbb{R}_3[x]$ se consideran los subespacios S_1 y S_2 definidos por

$$S_1 = \{ p \in \mathbb{R}_3[x] : \; p(0) = p(1) = 0 \}$$

$$S_2 = \{ p \in \mathbb{R}_3[x] : \; p(1) = p(2) = 0 \}$$

Hallar una base de $\mathbb{R}_3[x]$ que contenga a una base de $S_1 \cap S_2$ y a una base de $S_1 + S_2$

1º) Hallamos $S_1 \cap S_2$

Sea $p \in \mathbb{R}_3[x] : \; p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

entonces p debe cumplir (para pertenecer a $S_1 \cap S_2$):

$$\boxed{S_1 \cap S_2 = \{ p \in \mathbb{R}_3[x] : p(0) = 0 \, ; \, p(1) = 0 \, ; \, p(2) = 0 \}} \quad (1)$$

$p(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$

$p(1) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$

$p(2) = 0 \Rightarrow a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 0$

resolviendo el sistema resulta:

$a_0 = 0$

$a_1 = 2a_3$

$a_2 = -3a_3$

$\therefore$

$p \in S_1 \cap S_2 \,/\, p = 2a_3 x - 3a_3 x^2 + a_3 x^3 = a_3(2x - 3x^2 + x^3)$

$\therefore$

$S_1 \cap S_2 = \text{gen}\{2x - 3x^2 + x^3\} = \text{gen}\{x(x-1)(x-2)\}$

$\dim(S_1 \cap S_2) = 1$

2º) Por el Teorema de la dimensión:

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2)$$
$$= 2 + 2 - 1$$

$\dim(S_1+S_2) = 3$

3º) Hallamos S_1+S_2

- $S_1 = \text{gen}\{v_1 = x(x-1);\ v_2 = x^2(x-1)\}$

  $S_1 = \text{gen}\{v_1 = x^2-x;\ v_2 = x^3-x^2\}$

- $S_2 = \text{gen}\{v_3 = (x-1)(x-2);\ v_4 = (x-1)^2(x-2)\}$

  $S_2 = \text{gen}\{v_3 = x^2-3x+2;\ v_4 = x^3-4x^2+5x-2\}$

Entonces:

i) $v_4 = -2v_1 + v_2 - v_3$; no son L.I. los 4 polinomios

ii) $\{v_1 = x^2-x;\ v_2 = x^3-x^2;\ v_3 = x^3-4x^2+5x-2\}$ son L.I.

pues

$a(x^2-x)+b(x^3-x)+c(x^2-3x+2) = 0_{\mathbb{R}_2[x]} \Rightarrow$

$$\begin{cases} 2c=0 \\ -a-b-3c=0 \\ a+c=0 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow a=0;\ b=0;\ c=0$$

Entonces: una base de S_1+S_2 es:

$B_{S_1+S_2} = \{v_1 = x^2-x;\ v_2 = x^3-x^2;\ v_3 = x^2-3x+2\}$

4º) Hallamos la condición que define el subespacio S_1+S_2

Sea $p \in S_1+S_2 \ /\ p = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$

$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 = \alpha(x^2-x)+\beta(x^3-x^2)+\gamma(x^2-3x+2)$

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = 2\gamma \\ a_1 = -\alpha-\beta-3\gamma \\ a_2 = \alpha+\gamma \\ a_3 = \beta \end{array}\right\} \rightarrow \text{sumando m. a m. resulta:}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 = -2\gamma = -a_0 \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

$\therefore$

$$\boxed{\begin{array}{l} S_1 + S_2 = \{ p \in \mathbb{R}_3[x] : a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \} \\ S_1 + S_2 = \{ p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = 0 \} \end{array}} \quad (2)$$

Observación

Notar que tanto $S_1 + S_2$ como $S_1 \cap S_2$ cumplen la condición $p(1) = 0$ (ver Ecuaciones (1) y (2))

5º) Entonces, una base de $\mathbb{R}_3[x]$ que cumple lo pedido es:

$$\boxed{B = \{ v_1 = x(x-1);\ v_3 = (x-1)(x-2);\ v_5 = x(x-1)(x-2);\ 1 \}}$$

pues:

- $\{ x(x-1); (x-1)(x-2); x(x-1)(x-2) \}$ es base de $S_1 + S_2$ pues son 3 polinomios L.I. y cumplen la condición que define a $S_1 + S_2 = \{ p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = 0 \}$

- $\{ x(x-1)(x-2) \}$ es base de $S_1 \cap S_2$ pues cumple la condición que define a $S_1 \cap S_2$
$S_1 \cap S_2 = \{ p \in \mathbb{R}_3[x] : p(0) = p(1) = p(2) = 0 \}$

6º) Verificamos que los 4 vectores de la base B de $\mathbb{R}_3[x]$ son L.I.

$$a(x^2-x)+b(x^2-3x+2)+c(x^3-3x^2+x)+d.1=0_{\mathbb{R}_3[x]} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2b+d=0 \\ -a-3b+c=0 \\ a+b-3c=0 \\ c=0 \end{cases}$$

el determinante de la matriz del sistema es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$$

7º) Notar que la base B <u>NO</u> es única
otra posible base es:

$$B' = \{ x^2(x-1) ; (x-1)^2(x-2) ; x(x-1)(x-2) ; 1 \}$$

2. Sea $W = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A^T = A\}$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las matrices simétricas de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ y sea $T: \mathbb{R}^3 \to W$ la transformación lineal definida por:

$$[T]_B^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde B es la base de $\mathbb{R}^3$ definida por:

$B = \{(1\ 1\ 0)^T, (1\ 0\ 1)^T, (0\ 1\ 1)^T\}$ y C es la base de W definida por

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Hallar la preimagen por T de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$x \in \mathbb{R}^3$ pertenece a la preimagen de $A \iff C_B(x)$ verifica

$$[T]_B^C \, C_B(x) = C_C(A)$$

donde $C_B(x)$ es el vector de coordenadas de un vector x de la preimagen de A y $C_C(A)$ es el vector de coordenadas de la matriz A en la base C.

Para hallar este último escribimos A en términos de la base C: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y resolvemos el sistema

$$\begin{cases} 1 = a \\ 2 = b \\ 1 = c \end{cases}$$

llamando $C_B(x) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \alpha + \gamma = 1 \\ \beta + \gamma = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 1 - \gamma \\ \beta = 2 - \gamma \end{array}$$

$$C_B(x) = \begin{pmatrix} 1-\gamma \\ 2-\gamma \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

NOTA

los $x \in \mathbb{R}^3$ que pertenecen a la preimagen de A

son de la forma

$$x = (1-\gamma)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + (2-\gamma)\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

luego

$$T^{-1}(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}, \ \gamma \in \mathbb{R} \right\}$$

NOTA

Ejercicio 3:

Sea $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $\pi(x) = Ax$, donde

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad (1)$$

comprobar que π es una proyección y hallar una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[\pi]_{BB} = [\pi]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De la Ec. (1) se obtiene que:

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Para probar que π es una proyección basta con verificar que $\pi^2 = \pi \quad (\pi \circ \pi = \pi)$ (i.e. $A^2 = A$)

$$A^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A$$

Entonces:

$$\pi \circ \pi(x) = A[Ax] = A^2 x = Ax = \pi(x)$$

- Observación

Como A es una matriz de proyección resulta que $A = [\pi]_{EE}$, siendo E la base canónica de $\mathbb{R}^3$

2

- Vamos a hallar col (A) y Nul (A)

i) como $rg(A) = \dim[col(A)] = 1$ resulta:

$$\boxed{col(A) = gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}}$$

ii) $Nul(A) = \{ x \in \mathbb{R}^3 : Ax = 0 \}$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

$$\boxed{\begin{gathered} Nul(A) = \{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0 \} \\ Nul(A) = gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{gathered}}$$

$\dim[Nul(A)] = 2$

- como toda matriz de proyección proyecta sobre su espacio columna en la dirección de su espacio nulo vamos a considerar una base B de $\mathbb{R}^3$ formada por una base de Nul (A) y una base de col (A)

$$B = \{ \underbrace{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{base de } Nul(A)}; \underbrace{v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\text{base de } col(A)} \}$$

respecto de esta base B la proyección se define:

$$\begin{aligned} \Pi(v_1) &= 0_{\mathbb{R}^3} \\ \Pi(v_2) &= 0_{\mathbb{R}^3} \\ \Pi(v_3) &= v_3 \end{aligned} \Rightarrow [\Pi]_{BB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces, la base pedida es:

$$\boxed{B = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}}$$

Observación

Podemos verificar que $A = [\pi]_{EE}$ y $[\pi]_{BB}$ son matrices semejantes, pues:

$$[\pi]_{EE} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$M_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; matriz de cambio de base (de coordenadas) de la base B a la base E

$$(M_{BE})^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad [\pi]_{BB} = (M_{BE})^{-1}[\pi]_{EE}M_{BE}$$

$$[\pi]_{BB} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$

$$[\pi]_{BB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico se considera $P_{\mathbb{S}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal sobre el subespacio

$$\mathbb{S} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 \end{bmatrix}^T \right\}.$$

Hallar todos los $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $P_{\mathbb{S}}(x) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}^T$ cuya distancia al origen sea igual a 25.

Dado que S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión 2 se trata de un plano que pasa por el origen.

$S \oplus S^\perp = \mathbb{R}^3$, $\dim S + \dim S^\perp = 3 \Rightarrow \dim S^\perp = 1$

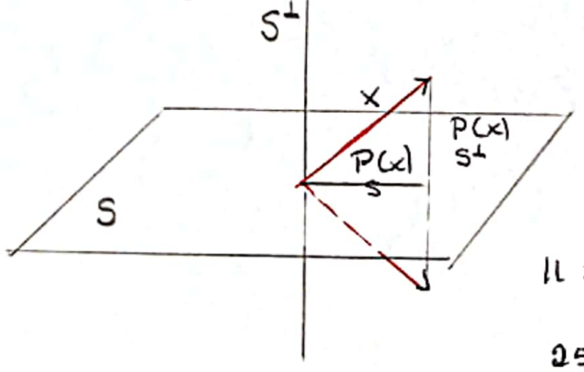
$S^\perp = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \langle x, [2\ 3\ 6]^T \rangle = 0, \langle x, [3\ -6\ 2]^T \rangle = 0 \} =$

$= \{ x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0, 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0 \}$

Al resolver el sistema $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ se obtiene $S^\perp = \text{gen}\{[6\ 2\ -3]^T\}$

$\forall x \in \mathbb{R}^3 : x = P_S(x) + P_{S^\perp}(x)$ y como la proyección de x sobre S tiene que ser el vector $[2\ 3\ 6]^T$

$x = [2\ 3\ 6]^T + \lambda [6\ 2\ -3]^T, \lambda \in \mathbb{R}$



Aplicando el teorema de Pitágoras:

$\|x\|^2 = \|[2\ 3\ 6]^T\|^2 + |\lambda|^2 \|[6\ 2\ -3]^T\|^2$

$25^2 = 49 + |\lambda|^2 49$

$\Rightarrow |\lambda|^2 = \frac{576}{49}$

$\Rightarrow |\lambda| = \frac{24}{7}$

Luego, los x que están a una distancia del origen de 25 y su proyección sobre S es $[2\ 3\ 6]^T$ son dos:

$$x = [2 \quad 3 \quad 6]^T + \frac{24}{7} [6 \quad 2 \quad -3]^T$$

y

$$x = [2 \quad 3 \quad 6]^T - \frac{24}{7} [6 \quad 2 \quad -3]^T$$

5. Entre todas las soluciones por cuadrados mínimos de la ecuación

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

determinar la de norma mínima.

1º) $$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 28 & 42 \\ 28 & 56 & 84 \\ 42 & 84 & 126 \end{pmatrix} = 14\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ 36 \end{pmatrix} = 12\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Las infinitas soluciones $\hat{x}$ por cuadrados mínimos de $Ax = b$ verifican $A^T A\,\hat{x} = A^T b$

$$14\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix} = 12\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\hat{x}_1 + 2\hat{x}_2 + 3\hat{x}_3 = \frac{6}{7}$$

$$\hat{x}_1 = \frac{6}{7} - 2\hat{x}_2 - 3\hat{x}_3 \quad ; \quad \hat{x} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} - 2\hat{x}_2 - 3\hat{x}_3 \\ \hat{x}_2 \\ \hat{x}_3 \end{pmatrix}$$

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

2º) La solución de norma mínima pertenece a $\mathrm{Fil}\, A = \mathrm{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$

$$k\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$k = \frac{6}{7} - 2\alpha - 3\beta \quad ; \quad k = \frac{6}{7} - 4k - 9k$$

$$2k = \alpha$$

$$3k = \beta \qquad 14k = \frac{6}{7} \; ; \; k = \frac{\cancel{6}^{\,3}}{\cancel{98}_{\,49}} = \frac{3}{49}$$

$$\hat{x}_{\text{mín}} = \frac{3}{49}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$