NÚMEROS COMPLEJOS

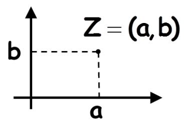


figura 1

Un número complejo se define como un par ordenado (a,b) de números reales, teniendo en cuenta que:

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c \text{ y } b = d$$

Existe una identificación natural entre $\mathbb{C}$ y el plano $\mathbb{R}^2$. (figura 1)
Usualmente al número $z = (a,b)$ se lo expresa en la forma $z = a + bi$, y esa expresión se denomina la ***forma binómica*** de z.
a es la parte real de z, y b es su parte imaginaria:

$$\begin{cases} a = Re(z) \text{ es la parte real de } z. \\ b = Im(z) \text{ es la parte imaginaria de } z. \end{cases}$$

Si z y w son dos números complejos, entonces:

$$z = w \iff \begin{cases} Re(z) = Re(w) \\ Im(z) = Im(w) \end{cases}$$

Observar que tanto $Re(z)$ como $Im(z)$ son números reales.
$a = a + 0i$ es un número complejo para cualquier número real a, por lo tanto podemos considerar que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$
Los números que tienen su parte real nula se denominan imaginarios puros.

Suma y producto de números complejos

Sean (a,b) y (c,d) dos números complejos. Definimos:

a) $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$ b) $(a,b).(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$

Si utilizamos la forma binómica de los números:

a) $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$ b) $(a+bi).(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$

Ejemplos

1. $i.i = (0+1i).(0+1i) = -1$

2. $(3-2i).(5+i) = (3+(-2)i).(5+1i) = (3.5-(-2).1) + (3.1+(-2).5)\,i = 17 - 7i$

3. $(3-4i) + i(-2+7i) = 3 - 4i - 2i + 7i^2 = 3 - 4i - 2i - 7 = -4 - 6i$

Propiedades

Sean z, u, y w números complejos. Entonces:

- ***El producto y la suma son asociativos:***
  $z.(u.w) = (z.u).w = z.u.w$
  $z + (u + w) = (z + u) + w = z + u + w$

- ***El producto y la suma son conmutativos:***
  $z.u = u.z$ y $z + u = u + z$

- ***Propiedad distributiva:*** $z.(u + w) = z.u + z.w$

- Si $z.w = 0 \Rightarrow z = 0$ o $w = 0$

Regla del paralelogramo

La suma de números complejos se realiza sumando partes reales entre sí y partes imaginarias entre sí.

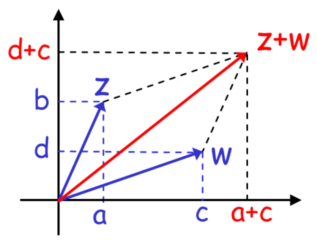


figura 2

Observación

Vemos que para multiplicar dos números basta aplicar la propiedad distributiva y recordar que $i^2 = -1$

Inverso multiplicativo: z^{-1}

Dado $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, llamaremos $z^{-1} = \dfrac{1}{z}$ al único número complejo que verifica:

$$z.z^{-1} = z^{-1}.z = 1$$

z^{-1} es el inverso multiplicativo del número z.

Ejemplos

1. $i.(-i) = 1 \Rightarrow i^{-1} = -i$

2. $(1+2i).(\frac{1}{5} - \frac{2i}{5}) = 1 \Rightarrow (1+2i)^{-1} = \frac{1}{5} - \frac{2i}{5}$ y $(\frac{1}{5} - \frac{2i}{5})^{-1} = 1 + 2i$

Conjugado

El número conjugado de $z = a + bi$ se define como $\overline{z} = a - bi$ (figura 3)

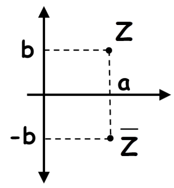


figura 3

Propiedades del conjugado

Sean z y w dos números complejos:

a) $\overline{\overline{z}} = z$

b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

c) $\overline{z.w} = \overline{z}.\overline{w}$

d) Si $z \neq 0$ entonces $\overline{z^{-1}} = \frac{1}{\overline{z}}$

e) $z + \overline{z} = 2\,Re(z)$

f) $z - \overline{z} = 2i\,Im(z)$

0.1 Módulo

El módulo del número z es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Observación

Si aplicamos el ***Teorema de Pitágoras*** al triángulo de vértices 0, $a + 0i$, y $(a + bi)$ (figura 4 (**1**)), vemos que la longitud de la hipotenusa es $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Es decir que $|z|$ es la distancia de $z = a + bi$ al origen.

El módulo de un número es la distancia del número al origen, y el módulo de la diferencia entre dos números es la distancia entre los números restados (figura 4 (**2**)).

figura 4

Propiedades del módulo

Sean z y w dos números complejos:

a) $|z| \geq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Y $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

b) $|z.w| = |z|.|w|$

c) Si $z \neq 0$ entonces $|\frac{1}{z}| = |z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$

d) $z.\overline{z} = |z|^2$

Desigualdad triangular

Sean z y w dos números complejos, entonces:

$$\boxed{|z + w| \leq |z| + |w|}$$

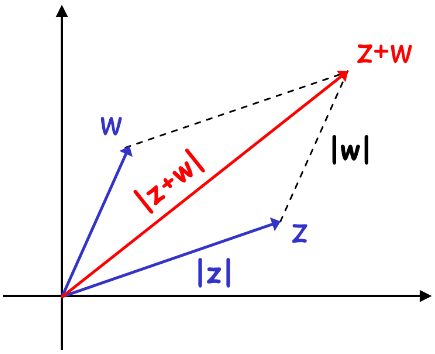


figura 5

Ejemplo

Calcular el módulo de los siguientes números complejos:

1. $|2 - 3i| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

2. $|i.(\overline{4 + 3i}).(6 + 8i)^{-1}| = |i|.|(\overline{4 + 3i})|.|(6 + 8i)^{-1}| = |i|.|(4 + 3i)|.\dfrac{1}{|6 + 8i|} =$

$= 1.\sqrt{4^2 + 3^2}.\dfrac{1}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{100}} = \dfrac{1}{2}$

Observación

Con el producto definido anteriormente, si $z = a + ib$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{1}{a + bi}.\left(\frac{a - bi}{a - bi}\right) = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}\,i = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Dicho de otra manera:

$$\boxed{z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}}$$

División de números complejos

Sean z y w dos números complejos, $w \neq 0$

$$\frac{z}{w} = z.\frac{1}{w} = z.w^{-1} = z.\frac{\overline{w}}{|w|^2}$$

Ejemplos

i) $\displaystyle \frac{1+3i}{4-2i} = (1+3i).\underbrace{\left(\frac{\overline{4-2i}}{|4-2i|^2}\right)}_{=(4-2i)^{-1}} = (1+3i).\frac{4+2i}{20} = \frac{-2+14i}{20} = \frac{-1}{10} + \frac{7}{10}i$

ii) $\displaystyle \frac{2-3i}{4+3i} = \frac{2-3i}{4+3i}.\underbrace{\left(\frac{\overline{4+3i}}{\overline{4+3i}}\right)}_{=1} = \frac{(2-3i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{-1-18i}{16+9} = \frac{-1}{25} + \frac{-18}{25}i$

Ejemplo

Hallar todos lo $z \in \mathbb{C}$ tales que:

1. $\displaystyle \frac{z-2i}{1+i} = \frac{z+i}{5-2i}$
2. $z.(\overline{z}-8) = 3+2i$

Resolución

1. $\displaystyle \frac{z-2i}{1+i} = \frac{z+i}{5-2i} \Leftrightarrow (z-2i)(5-2i) = (1+i)(z+i) \Leftrightarrow 5z-4-2zi-10i = z-1+i+zi \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow 5z-2zi-z-zi = -1+i+4+10i \Leftrightarrow z.(5-2i-1-i) = 3+11i \Leftrightarrow z.(4-3i) = 3+11i \Leftrightarrow$

   $\displaystyle \Leftrightarrow z = \frac{3+11i}{4-3i} = \frac{-21+53i}{25} = \frac{-21}{25} + \frac{53}{25}i$

2. $z.(\overline{z}-8) = 3+2i$

   Como en esta ecuación aparecen z y $\overline{z}$, es necesario recurrir a la forma binómica del número z.

   Si $z = a+bi \Rightarrow \overline{z} = a-bi$. Reemplazando en la ecuación:

   $z.(\overline{z}-8) = 3+2i \Leftrightarrow (a+bi).((a-bi)-8) = 3+2i \Leftrightarrow (a+bi).((a-8)-bi) = 3+2i \Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow (a(a-8)+b^2) + ((a-8)b-ab)i = 3+2i \Leftrightarrow (a(a-8)+b^2) + -8bi = 3+2i$

   Sabemos que:

$$z = w \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z) = Re(w) \\ Im(z) = Im(w) \end{cases}$$

entonces:

$$(a(a-8)+b^2) + -8bi = 3+2i \Leftrightarrow \begin{cases} a(a-8)+b^2 = 3 \\ -8b = 2 \end{cases}$$

De la segunda ecuación resulta que $b = \dfrac{2}{-8} = \dfrac{-1}{4}$. Reemplazando en la primera ecuación: $a(a-8) + \dfrac{1}{16} = 3 \Leftrightarrow a(a-8) - \dfrac{47}{16} = 0 \; (a \in \mathbb{R})$

La ecuación tiene dos raices: $a = \dfrac{16 \pm \sqrt{303}}{4}$, que dan lugar a dos soluciones de la ecuación original:

$$z_1 = \frac{16+\sqrt{303}}{4} + \frac{-1}{4}\,i \qquad\qquad z_2 = \frac{16-\sqrt{303}}{4} + \frac{-1}{4}\,i$$

Raíces de una ecuación cuadrática

Se trata de resolver ecuaciones del tipo

$$a\,z^2 + b\,z + c = 0 \quad \text{donde } a, b, c \in \mathbb{C}, \text{ y } a \neq 0$$

Basta observar que $a\,z^2 + b\,z + c = a\left(\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{c}{a}\right)$. Entonces:

$$a\,z^2 + b\,z + c = 0 \Leftrightarrow a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2a\,z + b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow (2a\,z + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Esto significa que z es una raíz de la ecuación $\Leftrightarrow$ el número $(2a\,z + b)$ es una de las raíces cuadradas de $b^2 - 4ac$.

Si hallamos ω tal que $\omega^2 = b^2 - 4ac$, entonces la otra raíz cuadrada de $b^2 - 4ac$ es $-\omega$ y por lo tanto

$$(2a\,z + b)^2 = b^2 - 4ac \Leftrightarrow 2a\,z + b = \pm\omega \Leftrightarrow z = \frac{-b \pm \omega}{2a}$$

si $a \neq 0$, las raíces de la ecuación $a\,z^2 + b\,z + c = 0$ son:

$$z_1 = \frac{-b+\omega}{2a} \quad y \quad z_2 = \frac{-b-\omega}{2a}$$

donde ω es una raíz cuadrada de $b^2 - 4ac$.

Si $\omega = 0$ entonces la ecuación $a\,z^2 + b\,z + c = 0$ tiene una única solución $z = \dfrac{-b}{2a}$

Ejemplos

1. Dar la forma binómica de todos los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^2 = 2i$.

   Vamos a resolverlo usando coordenadas cartesianas.
   Si $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + i2xy$
   Si queremos que $z^2 = 2i$ entonces:

$$x^2 - y^2 + i2xy = 2i \Leftrightarrow \begin{cases} Re(x^2 - y^2 + i2xy) = Re(2i) \\ Im(x^2 - y^2 + i2xy) = Im(2i) \end{cases}$$

   Obtenemos dos ecuaciones: $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = 2 \Rightarrow xy = 1 \end{cases}$

   Se puede obtener una ecuación adicional para facilitar los cálculos:

$$z^2 = 2i \Rightarrow |z^2| = |2i| \Rightarrow |z|^2 = 2$$

   Por lo tanto tenemos

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \\ xy = 1 \end{cases}$$

   Sumando las primeras dos ecuaciones: $2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow |x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
   Restando las dos ecuaciones: $2y^2 = 2 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow |y| = 1 \Rightarrow y = \pm 1$
   Si recordamos que $xy = 1$, vemos que sólo hay dos combinaciones posibles

$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -1 \\ x = -1 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

   Es decir que la ecuación tiene dos soluciones: $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = -1 - i = -z_1$

2. Hallar las raíces de $z^2 - z + 1 - i = 0$.
   En este caso $a = 1,\ b = -1,\ c = 1 - i$
   $b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.1.(1 - i) = 1 - 4 + 4i = -3 + 4i$
   El paso siguiente es calcular las raíces cuadradas de $-3 + 4i$.
   Sea $\omega = x + iy \in \mathbb{C}\ /\omega^2 = -3 + 4i \Rightarrow \omega^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i\,2xy = -3 + i\,4$
   además $x^2 + y^2 = |\omega|^2 = |\omega^2| = |-3 + i\,4| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \Rightarrow\ x^2 + y^2 = 5$
   Entonces

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \Rightarrow xy = 2 \end{cases}$$

sumando la primera y la segunda: $2x^2 = -3 + 5 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
restando la primera menos la segunda: $2y^2 = 5 - (-3) = 8 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$
Como $xy = 2 > 0$, las raíces cuadradas son:

$$\omega = 1 + 2i \quad y \quad -\omega = -1 - 2i$$

Por último calculamos las raíces de la ecuación propuesta:

$$z_1 = \frac{-b + \omega}{2a} = \frac{1 + (1 + 2i)}{2} = 1 + i \qquad z_2 = \frac{-b - \omega}{2a} = \frac{1 - (1 + 2i)}{2} = -i$$

3. Hallar las raíces de $(z + 2 - 3i)\,(z - \frac{4i}{3}) = 0$

   Esta expresión ya está factorizada, es decir que "el trabajo ya está hecho".

   $(z + 2 - 3i)\,(z - \frac{4i}{3}) = 0 \Leftrightarrow (z + 2 - 3i) = 0$ ó $(z - \frac{4i}{3}) = 0 \Leftrightarrow z = -2 + 3i$ ó $z = \frac{4i}{3}$

Observaciones

Cuando la cuadrática no está completa , es decir cuando tenemos una ecuación del tipo $a\,z^2 + c = 0$, se puede usar la fórmula poniendo $b = 0$ pero se complican las cuentas. Se resuelve poniendo $z^2 = -\frac{c}{a}$.

Si recordamos algunos casos de factoreo se puede simplificar la resolución de los ejercicios. Si a y b son números complejos entonces

1. Cuadrado de un binomio

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

2. Diferencia de cuadrados

$$a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b) \qquad a^2 + b^2 = (a + ib)\,(a - ib)$$

Representar en el plano complejo

1. $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 3\}$

2. $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 3 \text{ y } Re(z) = 1\}$

3. $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) = Im(z)\}$

4. $\{z \in \mathbb{C} : Re(z) \leq Im(z)\}$

5. $\{z \in \mathbb{C} : |z| = |z - (-3 + 3i)|\}$
   Observar que $|z - 0| = |z - (-3 + 3i)|$ si la distancia de z a $(-3 + 3i)$ es igual a la distancia de z al origen.

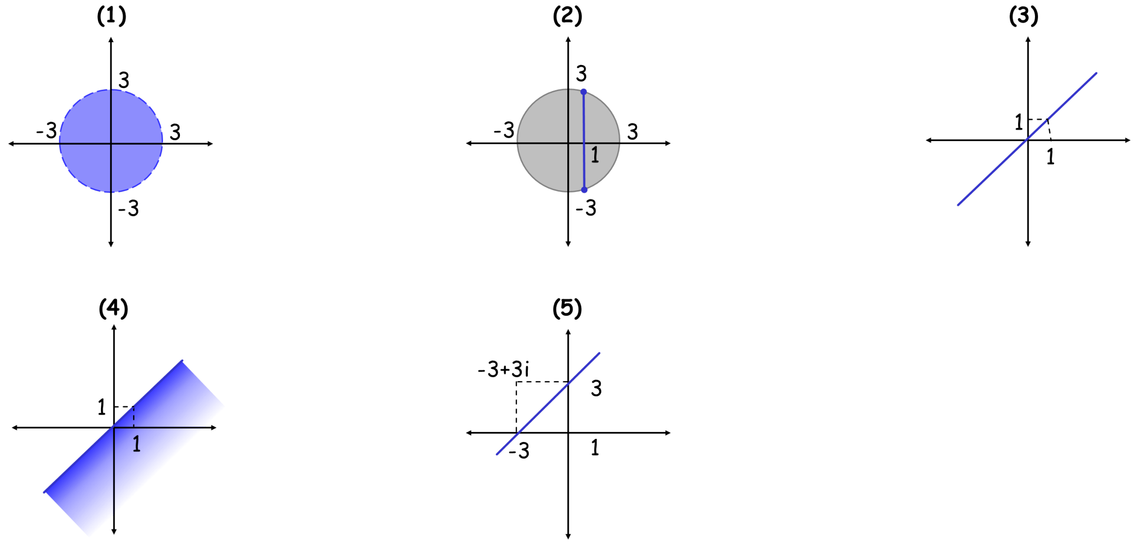


figura 6: En cada caso la solución es el conjunto pintado de azul.

Argumento de un número complejo

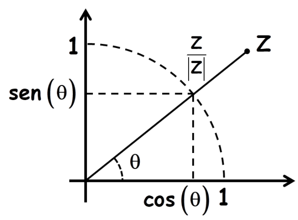


figura 7

Sea $z \in \mathbb{C}$ cualquiera, pero distinto de cero.

$$\left|\frac{z}{|z|}\right| = \left|\frac{1}{|z|} z\right| = \frac{1}{|z|}|z| = 1$$

por lo tanto la distancia desde $\left|\frac{z}{|z|}\right|$ al origen es igual a 1, y en consecuencia $\frac{Z}{|Z|}$ está en la circunferencia de centro cero y radio 1.

Entonces existe un único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $\dfrac{Z}{|Z|} = \cos(\theta) + isen(\theta)$, o lo que es lo mismo:

$$\boxed{Z = |Z|(\cos(\theta) + isen(\theta))}$$

Esto dice que el número Z queda determinado por su módulo y el ángulo θ.
Observar que:

$$\boxed{\text{El número } z = 0 \text{ no tiene argumento.}}$$

Ejemplo

Sea $Z = 1 + i$

$|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{z}{|z|} = \dfrac{1 + i}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

El número θ verifica las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ sen(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

y entonces $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ (figura 8).

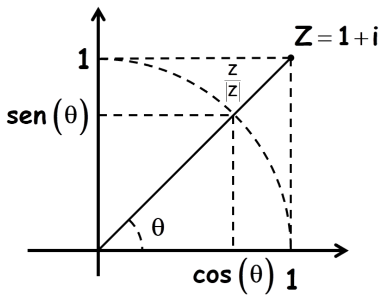


figura 8

Definición

El ***argumento*** de un número complejo como el único número $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que

$$Z = |Z|(\cos(\theta) + isen(\theta))$$

Escribiremos. $arg(z) = \theta$

Notación de Euler

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ definimos

$$\boxed{e^{i\alpha} = (\cos(\alpha) + isen(\alpha))}$$

Con la notación de Euler, $arg(z)$ es el único número en $[0, 2\pi)$ tal que $z = |z|e^{i\,Arg(z)}$.
Observar que:

$$e^{i\theta} = e^{i\varphi} \Leftrightarrow \cos(\theta) = \cos(\varphi) \;\text{ y }\; sen(\theta) = sen(\varphi) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \;\text{ tal que } \theta = \varphi + 2k\pi.$$

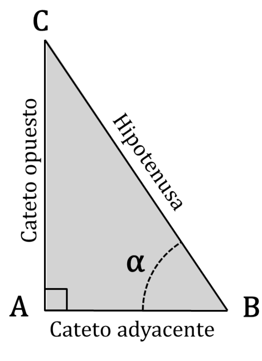
(las funciones $sen(x)$ y $\cos(x)$ no son biyectivas!)

REPASO DE TRIGONOMETRÍA

Definiciones

Consideremos el triángulo rectángulo de la figura 9. Llamaremos:

- ***Cateto adyacente*** (al ángulo α) al lado $\overline{AB}$
- ***Cateto opuesto*** (al ángulo α) al lado $\overline{AC}$
- ***Hipotenusa*** al lado $\overline{BC}$ opuesto al ángulo recto.



Y definimos las razones trigonométricas del ángulo como:

1. Seno del ángulo α: $sen(\alpha) = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$
2. Coseno del ángulo α: $\cos(\alpha) = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{CB}}$
3. Tangente del ángulo α: $\tan(\alpha) = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$

$sen(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, y $\tan(\alpha)$ son números, sin unidades.

Observación

Las razones trigonométricas sólo están definidas para ángulos α tales que $\alpha < 90°$, porque el ángulo debe determinar un triángulo rectángulo.
Y como la hipotenusa es el lado más largo de un triángulo rectángulo, tenemos que $0 < sen(\alpha) < 1$ y $0 < \cos(\alpha) < 1$ para cualquier ángulo α tal que $\alpha < 90°$.

Proposición

Las razones trigonométricas de un ángulo α dependen unicamente de la amplitud del ángulo, y no del triángulo al que pertenecen.

Circunferencia trigonométrica

La ***"Circunferencia Trigonométrica"*** es una circunferencia de radio 1 centrada en el origen $(0;0)$ de un sistema de coordenadas en el plano, a la que llamaremos $\mathcal{C}$ (figura 10 (a)). Para definir sen(t) y cos(t) para un número real t cualquiera, procedemos de la siguiente manera:

- Sea $P(t)$ (para cualquier número t), al punto al que se llega recorriendo sobre $\mathcal{C}$, a partir del punto $(1;0)$, una longitud de arco igual a $|t|$; en sentido positivo (antihorario) si $t \geq 0$, y en sentido negativo (horario) si $t \leq 0$.

- $P(t) = (X(t); Y(t))$ es un punto en el plano con dos coordenadas (figura 10). Definimos:

  a) $\cos(t) = X(t)$ b) $sen(t) = Y(t)$

  Es decir que $P(t) = (\cos(t), sen(t))$. Quedan así definidas dos funciones:

  a) $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ b) $sen : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Como el punto $P(t) = (\cos(t), sen(t)) \in \mathcal{C}$, es inmediato que:

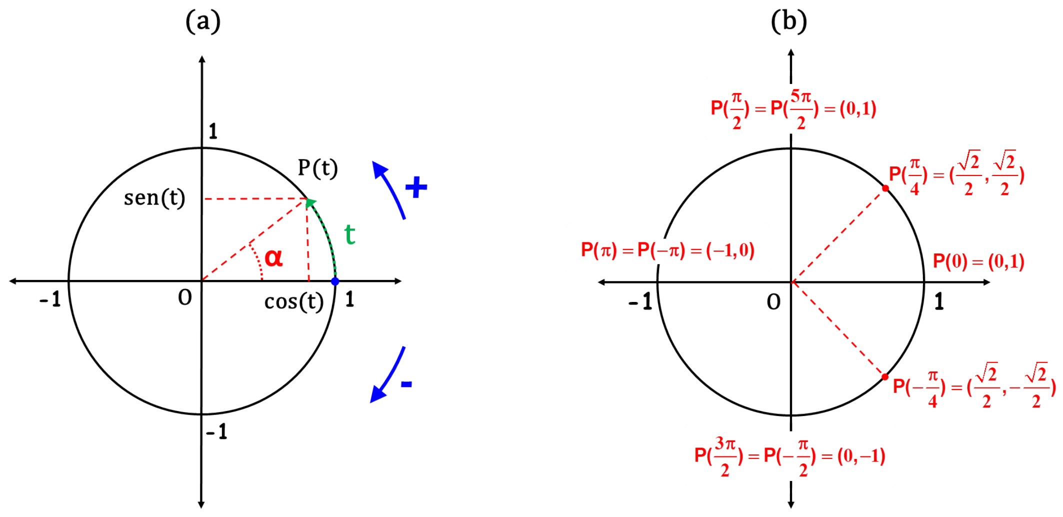


figura 10

i) $sen^2(t) + \cos^2(t) = 1 \;\; \forall t \in \mathbb{R}$

ii) $-1 \leq sen(t) \leq 1 \;\; \forall t \in \mathbb{R}$

iii) $-1 \leq \cos(t) \leq 1 \;\; \forall t \in \mathbb{R}$

Ejemplos

Observando la figura 10, y teniendo en cuenta que el perímetro de la circunferencia C es igual a 2π, tenemos:

- $P(0) = (1,0) \Rightarrow \begin{cases} sen(0) = 0 \\ \cos(0) = 1 \end{cases}$

- $P(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow \begin{cases} sen(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

- $P(\frac{\pi}{2}) = P(\frac{5\pi}{2}) = (0,1) \Rightarrow \begin{cases} sen(\frac{\pi}{2}) = sen(\frac{5\pi}{2}) = 1 \\ \cos(\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{5\pi}{2}) = 0 \end{cases}$

- $P(\pi) = P(-\pi) = (-1,0) \Rightarrow \begin{cases} sen(\pi) = sen(-\pi) = 0 \\ \cos(\pi) = \cos(-\pi) = -1 \end{cases}$

- $P(\frac{3\pi}{2}) = P(\frac{-\pi}{2}) = (0,-1) \Rightarrow \begin{cases} sen(\frac{3\pi}{2}) = sen(-\frac{\pi}{2}) = -1 \\ \cos(\frac{3\pi}{2}) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$

- $P(\frac{-\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow \begin{cases} sen(-\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

¿Cómo se relaciona esto con los ángulos?

Aunque los ángulos son objetos geométricos, los números se conectan con ellos cuando medimos su amplitud.
La unidad de medida de ángulos más conocida es el gradosexagesimal, y le sigue en popularidad el radián. Recordemos sus definiciones:

- Un ángulo mide un grado ($1°$) si es la noventa-ava parte ($\frac{1}{90}$) de un ángulo recto. Así, un ángulo recto mide $90°$, un ángulo llano mide $180°$, y en general, la amplitud de cualquier ángulo mide entre $0°$ y $360°$.

- Un ángulo mide un radián si centrado en cualquier circunferencia subtiende un arco cuya longitud coincide con el radio de la circunferencia.

Como el perímetro de una circunferencia de radio R mide $P = 2\pi R$, entonces un ángulo completo de $360°$ mide 2π radianes.
Para pasar de un sistema de medida a otro se usa que

a) 1 radián$=\dfrac{180^\circ}{\pi}$ b) $1° = \dfrac{\pi}{180}$ radianes

Así en la figura 11, el ángulo de amplitud α mide t radianes.

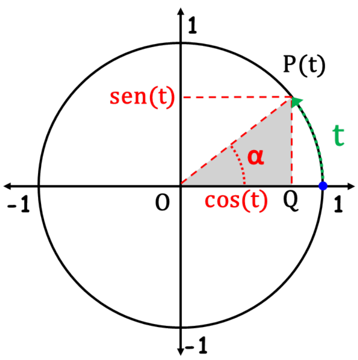


figura 11

Si consideramos el triángulo rectángulo $\triangle\{OQP(t)\}$, entonces:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\overline{OQ}|}{|\overline{OP(t)}|} = \frac{|\overline{OQ}|}{1} = \cos(t) \quad \text{y} \quad sen(\alpha) = \frac{|\overline{QP(t)}|}{|\overline{OP(t)}|} = \frac{|\overline{QP(t)}|}{1} = sen(t)$$

Es decir que para ángulos entre $0°$ y $90°$ las dos definiciones coinciden.

Fórmulas importantes

1. $sen(\alpha \pm \beta) = sen(\alpha)\cos(\beta) \pm sen(\beta)\cos(\alpha)$

2. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp sen(\alpha)sen(\beta)$

La función seno

Como dijimos queda definida una función $sen : \mathbb{R} \to [0,1]$ (figura 12) con las siguientes propiedades:

1. $sen(-t) = -sen(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$, como se ve en la circunferencia trigonométrica (figura 10).
2. $sen(t + 2\pi) = sen(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$, o también $sen(t + 2k\pi) = sen(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$, y $\forall k \in \mathbb{Z}$.
   En particular se deduce que la función seno no es inversible.

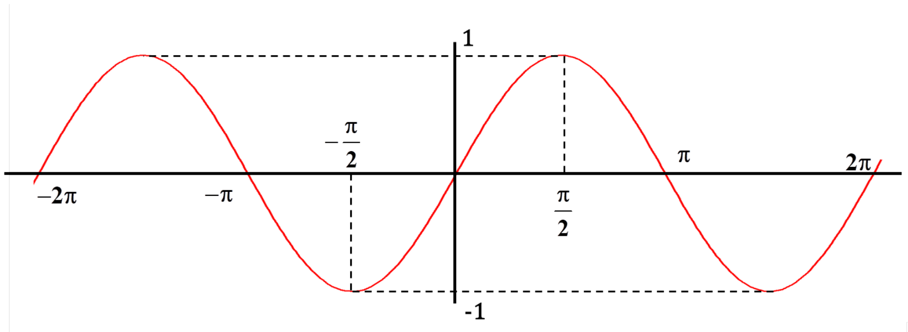


figura 12

Arcsen

Si consideramos la función seno con el dominio restringido, es decir $sen : [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$, entonces la función sí es inversible.
Es decir: existe otra función $arcsen : [-1,1] \to [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tal que:

$$\begin{cases} arcsen(sen(t)) = t\ \forall t \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ sen(arcsen(s)) = s\ \forall s \in [-1,1] \end{cases}$$

Observar que el $arcsen$ de cualquier número es un ángulo que está en el intervalo $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Será bueno tener esto en cuenta en el momento de los cálculos.

La función coseno

Como dijimos queda definida una función $\cos : \mathbb{R} \to [0,1]$ (figura 13) con las siguientes propiedades:

1. $\cos(-t) = \cos(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$, como se ve en la circunferencia trigonométrica (figura 10).
2. $\cos(t+2\pi) = \cos(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$, o también $\cos(t+2k\pi) = \cos(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$, y $\forall k \in \mathbb{Z}$.
   En particular se deduce que la función coseno no es inversible.

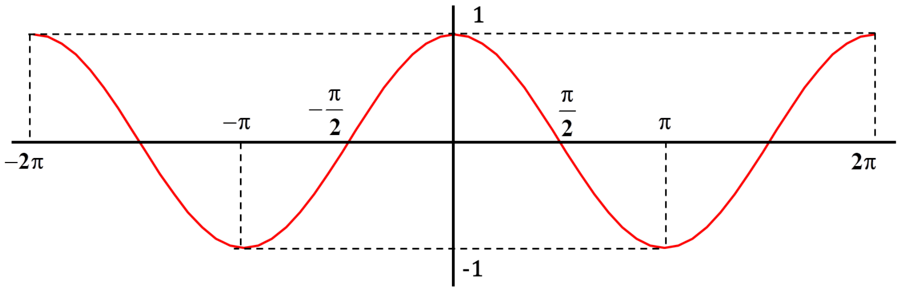


figura 13

Arcos

Si consideramos la función coseno con el dominio restringido, es decir $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$, entonces la función sí es inversible.
Es decir, existe otra función $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ tal que:

$$\begin{cases} \arccos(\cos(t)) = t\ \forall t \in [0,\pi] \\ \cos(\arccos(s)) = s\ \forall s \in [-1,1] \end{cases}$$

Observar que el arccos de cualquier número es un ángulo que está en el intervalo $[0,\pi]$. Será bueno tener esto en cuenta en el momento de los cálculos.

La función tangente

Definimos la tangente de un número t como $\tan(t) = \dfrac{sen(t)}{\cos(t)}$

Veamos algunas observaciones sobre esta nueva función:

1. La función $\tan(t)$ no está definida en los puntos en los que se anula el denominador:

$$\cos(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ con } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow dom(\tan(t)) = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

2. $\tan(-t) = \dfrac{sen(-t)}{\cos(-t)} = \dfrac{-sen(t)}{\cos(t)} = -\tan(t)\ \forall t \in \mathbb{R} - \{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

3. $\tan(t+\pi) = \dfrac{sen(t+\pi)}{\cos(t+\pi)} = \dfrac{-sen(t)}{-\cos(t)} = \tan(t)\ \forall t \in \mathbb{R} - \{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

   La función tangente es $\pi-$periódica. En particular no es inyectiva, y por lo tanto no es inversible.

4. Cuando $t > \frac{\pi}{2}$ y está cerca de $\frac{\pi}{2}$, el $\cos(t)$ está cerca de cero y es negativo y el $sen(t)$ está cerca de 1. Luego:

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^+} \tan(t) = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{sen(t)}{\cos(t)} = -\infty$$

Cuando $t < \frac{\pi}{2}$ y está cerca de $\frac{\pi}{2}$, el $\cos(t)$ está cerca de cero y es positivo y el $sen(t)$ está cerca de 1. Luego:

$$\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^+} \tan(t) = \lim_{t \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{sen(t)}{\cos(t)} = +\infty$$

Teniendo en cuenta estos resultados y la periodicidad de la función concluimos que todas las rectas verticales de ecuación $t = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ son asíntotas verticales de la función

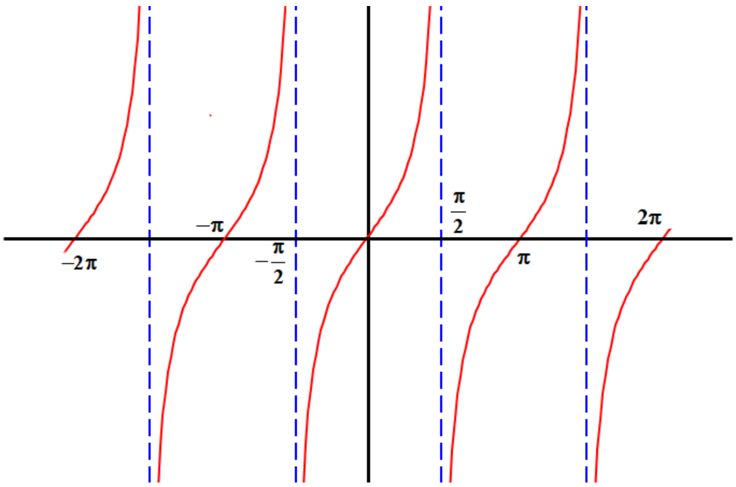


figura 14

En la figura 14 se muestra un gráfico aproximado de la función tangente, en el que se ve claramente que no es inversible.
La función con dominio restrigido $\tan : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ sí es inversible. Es decir, existe otra función $\arctan : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tal que:

$$\begin{cases} \arctan(\tan(t)) = t \ \forall t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \tan(\arctan(s)) = s \ \forall s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Forma Polar y Forma Binómica

Sea $z \in \mathbb{C}$

$z = a + ib$: ***"Forma Binómica"***

$z = |z|(\cos(arg(z)) + isen(arg(z)))$: ***"Forma Polar"***

Veamos cómo se relacionan las dos expresiones. Si un número z está escrito en forma polar y en forma binómica, entonces:
$z = a + ib = |z|(\cos(arg(z)) + isen(arg(z))) = |z|\cos(arg(z)) + i|z|sen(arg(z))$
y en consecuencia:

$$\begin{cases} a = |z|\cos(arg(z)) \\ b = |z|sen(arg(z)) \end{cases}$$

Estas ecuaciones permiten calcular a y b si conocemos $|z|$ y $arg(z)$.

Veamos cómo calcular $arg(z)$ en función de a y b. Se puede trabajar con las mismas ecuaciones:

$$\begin{cases} \cos(arg(z)) = \dfrac{a}{|z|} \\ sen(arg(z)) = \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

y despejar $arg(z)$. O se puede recurrir al siguiente truco:

$$\left.\begin{array}{l} a = |z|\cos(arg(z)) \\ b = |z|sen(arg(z)) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{|z|sen(arg(z))}{|z|\cos(arg(z))} = \frac{sen(arg(z))}{\cos(arg(z))} = tan(arg(z))$$

Entonces:

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \tan(arg(z)) = \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

Ejemplos

1. Sin calcular $Re(z)$ e $Im(z)$, representar en el plano:

   (a) $z_1 = \cos(\frac{\pi}{2}) + isen(\frac{\pi}{2})$

   (b) $z_2 = 3(\cos(\frac{2\pi}{3}) + isen(\frac{2\pi}{3}))$

   (c) $z_3 = 2(\cos(\frac{5\pi}{4}) + isen(\frac{5\pi}{4}))$

   Los tres números están dados en forma polar, por lo tanto:

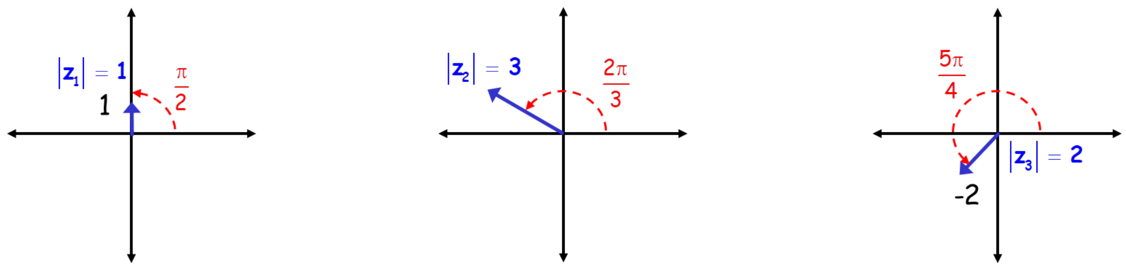


figura 15

$arg(z_1) = \frac{\pi}{2}$
y $|z_1| = 1$

$arg(z_2) = \frac{2\pi}{3}$
y $|z_2| = 3$

$arg(z_2) = \frac{5\pi}{4}$
y $|z_2| = 2$

2. Representar en el plano complejo:

   (a) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| \leq 2 \;\; y \;\; arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}\}$

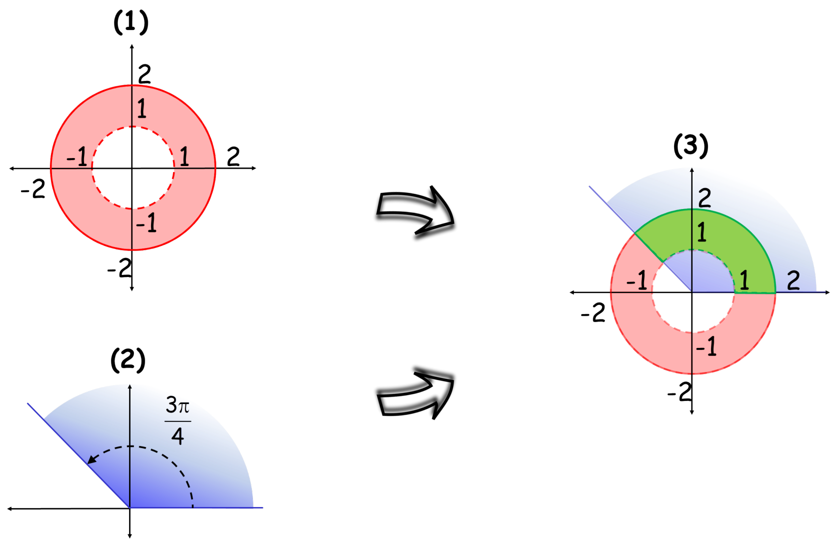


figura 16

En la figura 16 (1) se muestra pintado de rojo el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| \leq 2\}$
En la figura 16 (2) se muestra pintado de azul el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : arg(z) \leq \frac{3\pi}{4}\}$
En la figura 16 (3) se muestra pintado de verde el conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| \leq 2 \;\; y \;\; arg(z) \leq \tfrac{3\pi}{4}\}$$

que es la intersección de los dos conjuntos anteriores.

   (b) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| \leq 2 \;\; y \;\; arg(z) \geq \frac{3\pi}{4}\}$

   (c) $\{z \in \mathbb{C} : 1 < Re(z) \leq 2 \;\; y \;\; arg(z) = \frac{\pi}{4}\}$

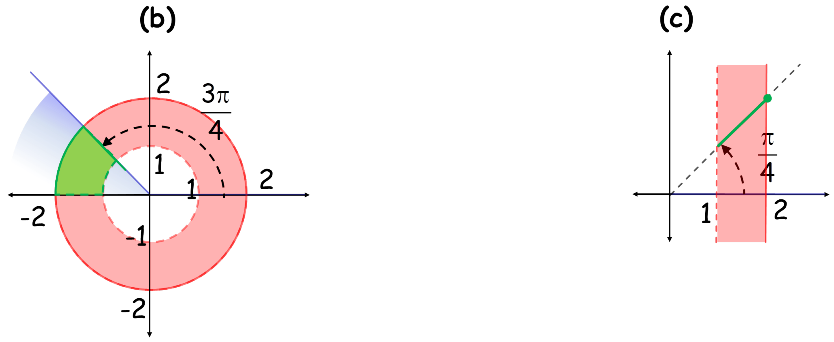


figura 17: Los conjuntos están pintados en verde.

Ejemplos

Hallar módulo y argumento de z, y expresar a z con la notación exponencial.

1. $z_1 = 5(\cos(\frac{5\pi}{4}) + isen(\frac{5\pi}{4}))$
   El número z_1 está expresado en forma polar, por lo tanto $arg(z_1) = \dfrac{5\pi}{4}$ y $|z_1| = 5$

   $$\boxed{z_1 = 5.e^{i\frac{5\pi}{4}}}$$

2. $z_2 = -5(\cos(\frac{5\pi}{4}) + isen(\frac{5\pi}{4}))$
   El número z_2 no está expresado en forma polar porque $|z_2|$ no puede ser negativo.
   Observando que $z_2 = -z_1$ podemos concluir que:

   ◇ $|z_2| = |-z_1| = |z_1| = 5$

   ◇ $arg(z_2) = \dfrac{\pi}{4}$ (figura 18) $\boxed{z_2 = 5.e^{i\frac{\pi}{4}}}$

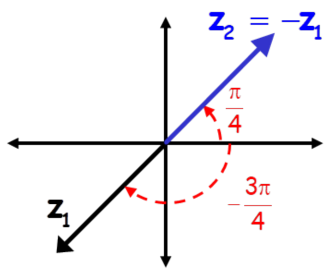


figura 18

3. $z_3 = 4(\cos(\frac{2\pi}{3}) - isen(\frac{2\pi}{3}))$
   El número z_3 no está expresado en forma polar porque el término $isen(\frac{2\pi}{3})$ debería estar sumando.
   Como $\cos(\frac{2\pi}{3}) = \cos(-\frac{2\pi}{3})$ y $-sen(\frac{2\pi}{3}) = sen(-\frac{2\pi}{3})$, entonces:

$$z_3 = 4(\cos(\tfrac{2\pi}{3}) - isen(\tfrac{2\pi}{3})) = 4(\cos(-\tfrac{2\pi}{3}) + isen(-\tfrac{2\pi}{3})).$$

Pero esta tampoco es la forma polar de z_3 porque el ángulo es negativo.
Hay que hallar un ángulo $\alpha \in [0, 2\pi)$ tal que $\cos(-\frac{2\pi}{3}) = \cos(\alpha)$ y $sen(-\frac{2\pi}{3})) = sen(\alpha)$

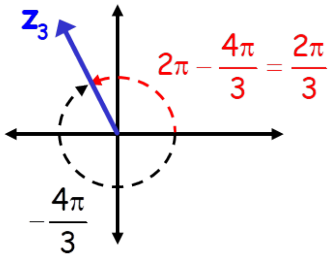


figura 19

- $|z_3| = 4$
- $arg(z_3) = \dfrac{4\pi}{3}$ (figura 19)

$$\boxed{z_3 = 4.e^{i\frac{4\pi}{3}}}$$

4. $z_4 = \sqrt{3} - i$
Como $|\sqrt{3} - i| = 2$, debe ser:

$$\begin{cases} \cos(arg(z_4)) = \dfrac{a}{|z_4|} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ sen(arg(z_4)) = \dfrac{b}{|z_4|} = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$$

$sen(arg(z_4)) = -\dfrac{1}{2}$, entonces según la figura 20:

$$arg(z_4) = \alpha_1 = \pi - \underbrace{arcsen(-\frac{1}{2})}_{=-\frac{\pi}{6}} = \frac{7\pi}{6} \qquad \text{o} \qquad arg(z_4) = \alpha_2 = 2\pi + arcsen(-\frac{1}{2}) = \frac{11\pi}{6}$$

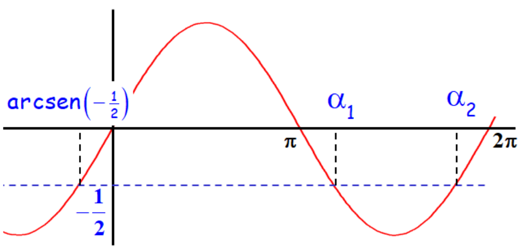


figura 20

- $\cos(\alpha_1) = \cos(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos(\alpha_2) = \cos(\frac{11\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$!

Resumiendo:

◇ $|z_4| = 2$

◇ $arg(z_4) = \frac{11\pi}{6}$ $\boxed{z_4 = 4.e^{i\frac{11\pi}{6}}}$

5. $z_5 = -1 + \sqrt{3}i$

   $\tan(arg(z_5)) = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$, entonces según la figura 21:

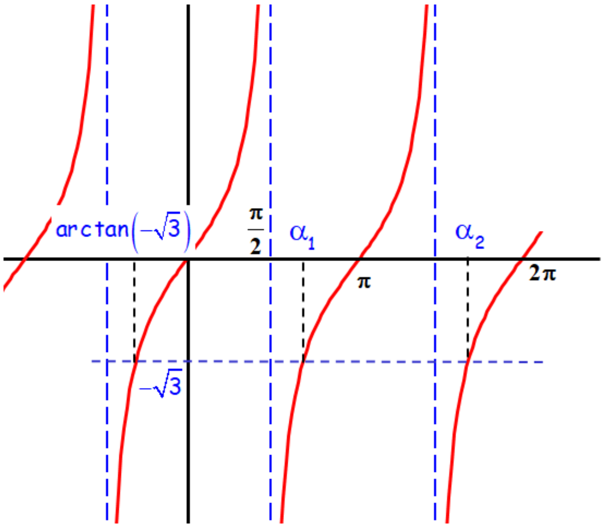


figura 21

$$arg(z_5) = \alpha_1 = \underbrace{\arctan(-\sqrt{3})}_{=-\frac{\pi}{3}} + \pi = \frac{2\pi}{3} \quad \text{o} \quad arg(z_5) = \alpha_2 = \arctan(-\sqrt{3}) + 2\pi = \frac{5\pi}{3}$$

Como $Re(z_5) < 0$ e $Im(z_5) > 0$, el número z_5 está en el tercer cuadrante, eso significa que:

$$\frac{\pi}{2} < arg(z_5) < \pi$$

Y por lo tanto $arg(z_5) = \alpha_1 = \arctan(-\sqrt{3}) + \pi = \frac{2\pi}{3}$.

Resumiendo:

◇ $|z_5| = 2$

◇ $arg(z_5) = \frac{2\pi}{3}$ $\boxed{z_5 = 2.e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

0.2 Teorema de De Moivre

Sean $z, \omega \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $\omega \neq 0$
Si $z = \rho\,(\cos(\alpha) + i\,sen(\alpha))$ y $\omega = \tau\,(\cos(\beta) + i\,sen(\beta))$, con ρ, $\tau \in \mathbb{R}_{>0}$ y α, $\beta \in \mathbb{R}$, entonces:

1. $z\,\omega = \rho\,\tau\,(\cos(\alpha+\beta) + i\,sen(\alpha+\beta))$

2. $z^{-1} = \rho^{-1}\,(\cos(-\alpha) + i\,sen(-\alpha))$

3. $\overline{z} = \rho\,(\cos(-\alpha) + i\,sen(-\alpha))$

4. $\dfrac{z}{\omega} = \dfrac{\rho}{\tau}\,(\cos(\alpha-\beta) + i\,sen(\alpha-\beta))$

5. $z^n = \rho^n\,(\cos(n\,\alpha) + i\,sen(n\,\alpha))$ con $n \in \mathbb{Z}$

Que también puede expresarse con la notación de Euler como:

1. $(\rho e^{i\alpha})\,(\tau e^{i\beta}) = \rho\,\tau\,e^{i(\alpha+\beta)}$
2. $(\rho e^{i\alpha})^{-1} = \rho^{-1}\,e^{-i\alpha}$
3. $\overline{\rho e^{i\alpha}} = \rho\,e^{-i\alpha}$
4. $\dfrac{\rho e^{i\alpha}}{\tau e^{i\beta}} = \dfrac{\rho}{\tau}\,e^{i(\alpha-\beta)}$
5. $(\rho e^{i\alpha})^n = \rho^n\,e^{in\alpha}$

Demostración

$$z = \rho\,(\cos(\alpha) + i\,sen(\alpha)) = \rho e^{i\alpha} \quad \text{y} \quad \omega = \tau\,(\cos(\beta) + i\,sen(\beta)) = \tau e^{i\beta}$$

1. Basta hacer la cuenta

   $z\omega = (\rho\,(\cos(\alpha) + i\,sen(\alpha))).(\tau\,(\cos(\beta) + i\,sen(\beta))) =$

   $\rho\tau\,[(\cos(\alpha) + i\,sen(\alpha))(\cos(\beta) + i\,sen(\beta))] =$

   $= \rho\tau\,[(\cos(\alpha)\cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta)) + i(\cos(\alpha)sen(\beta) + \cos(\beta)sen(\alpha))]$

   $= \rho\tau\,[(\cos(\alpha+\beta) + i\,sen(\alpha+\beta))] = \rho\tau\,e^{i\alpha+\beta}$

2. Como z^{-1} es el único número complejo que multiplicado por z da 1, será suficiente mostrar que $z.[\rho^{-1}\,(\cos(-\alpha) + i\,sen(-\alpha))] = 1$, lo que resulta inmediato a partir de lo expresado en el punto anterior.

3. Basta observar que z y $\overline{z}$ tienen el mismo módulo, y que $\overline{z}$ es un múltiplo positivo de z^{-1}, y que en consecuencia les corresponde el mismo ángulo.

4. $\dfrac{z}{\omega} = z\,\dfrac{1}{\omega} = [\rho\,(\cos(\alpha) + i\,sen(\alpha))]\,[\dfrac{1}{\tau}\,(\cos(-\beta) + i\,sen(-\beta))] = \dfrac{\rho}{\tau}\,(\cos(\alpha-\beta) + i\,sen(\alpha-\beta))$

5. Aplicando el punto 1:

$z^2 = z.z = \rho\,(\cos(\alpha) + i\,sen(\alpha))\;\rho\,(\cos(\alpha) + i\,sen(\alpha)) = \rho^2\,(\cos(2\alpha) + i\,sen(2\alpha))$

$z^3 = z.z^2 = \rho\,(\cos(\alpha) + i\,sen(\alpha))\;\rho^2\,(\cos(2\alpha) + i\,sen(2\alpha)) = \rho^3\,(\cos(3\alpha) + i\,sen(3\alpha))$

$$\vdots$$

$z^n = z.z^{n-1} = \rho\,(\cos(\alpha) + i\,sen(\alpha))\;\rho^{n-1}\,(\cos((n-1)\alpha) + i\,sen((n-1)\alpha))$

$$\Rightarrow\; z^n = \rho^n\,(\cos(n\alpha) + i\,sen(n\alpha))$$

Ejemplos

1. Consideremos los números complejos:

$$z = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad\qquad w = \sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

- ◇ $z.w = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})\;(2e^{i\frac{\pi}{6}}) = 2\sqrt{2}\;e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6})} = 2\sqrt{2}\;e^{i\frac{5\pi}{12}}$
- ◇ $\dfrac{z}{w} = \dfrac{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\,e^{i\frac{\pi}{6}}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\;e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{12}}$
- ◇ $\overline{z} = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$
- ◇ $z^4 = (\sqrt{2})^4\;e^{i\frac{4\pi}{4}} = 4(cos(\pi) + i\;sen(\pi)) = -4$

2. Al multiplicar un número complejo por un número real positivo ($a \neq 1$) sólo modificamos su módulo (figura 22).

$$\text{Si } z \in \mathbb{C} - \{0\} \text{ y } a > 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} |a.z| = |a|.|z| = a.|z| \\ arg(a.z) = \underbrace{arg(a)}_{=0} + arg(z) + 2k\pi = arg(z) + 2k\pi = arg(z) \end{cases}$$

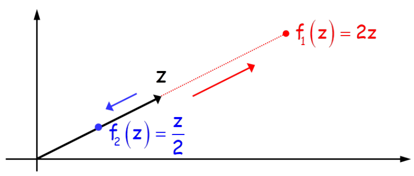


figura 22

Si $a > 1$ "agranda", y si $a > 1$ "achica".
Al número a se lo suele llamar factor de escala.

3. Al multiplicar un número complejo por otro número complejo de módulo 1 ($A \neq 1$) sólo modificamos su argumento.
$|A| = 1 \Rightarrow A = e^{i\alpha}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $z = |z|\,e^{i\theta} \Rightarrow A.z = e^{i\alpha}.(|z|e^{i\theta}) = |z|e^{i(\alpha+\theta)}$
Por ejemplo si $A = e^{i\frac{\pi}{4}}$, es fácil ver que al multiplicar los puntos del plano por A, éstos rotan 45° en sentido antihorario (figura 23).

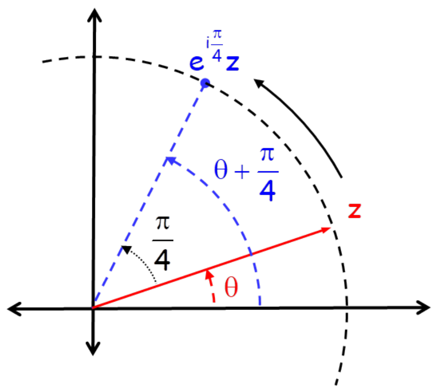


figura 23

Observación

El teorema de De Moivre dice que $(\rho e^{i\alpha})\,(\tau e^{i\beta}) = \rho\,\tau\, e^{i(\alpha+\beta)}$, pero en general no es cierto que $arg(z.w) = arg(z) + arg(w)$. Veamos el siguiente ejemplo:

- ⋄ $z = -i \ \Rightarrow \ arg(z) = \dfrac{3\pi}{2}$
- ⋄ $w = -1 + i \ \Rightarrow \ arg(w) = \dfrac{3\pi}{4}$

y $arg(z.w) = arg((-i).(-1+i)) = arg(i+1) = \dfrac{\pi}{4} \neq arg(z) + arg(w)$

Lo que si se desprende del teorema de De Moivre, es que

$$\boxed{\exists k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } arg(z.w) = arg(z) + arg(w) + 2k\pi}$$

y en consecuencia

$$\boxed{arg(z^n) = n.arg(z) + 2j\pi \text{ para algún } j \in \mathbb{Z}}$$

Ejemplo

Hallar la forma binómica y la forma polar de $z = \dfrac{(\sqrt{3}-i)^7}{(-1+\sqrt{3}i)^5}$

$(\sqrt{3}-i) = 4.e^{i\frac{11\pi}{6}}$ y $(-1+\sqrt{3}i) = 2.e^{i\frac{2\pi}{3}}$ (ver ejemplos de la página 19)

- $(\sqrt{3}-i) = 4.e^{i\frac{11\pi}{6}} = 4(\cos(\frac{11\pi}{6}) + isen(\frac{11\pi}{6})) \Rightarrow$

  $(\sqrt{3}-i)^7 = 4^7(\cos(7.\frac{11\pi}{6}) + isen(7.\frac{11\pi}{6}) = 4^7(\cos(\frac{77\pi}{6}) + isen(\frac{77\pi}{6}) = 4^7(\cos(\frac{5\pi}{6}) + isen(\frac{5\pi}{6})$[1]

- $(-1+\sqrt{3}i) = 2.e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + isen(\frac{2\pi}{3})) \Rightarrow$

  $(-1+\sqrt{3}i)^5 = 2^5(\cos(5.\frac{2\pi}{3}) + isen(5.\frac{2\pi}{3})) = 2^5(\cos(\frac{10\pi}{3}) + isen(\frac{10\pi}{3})) = 2^5(\cos(\frac{4\pi}{3}) + isen(\frac{4\pi}{3}))$[2]

[1] $\frac{77\pi}{6} = 12\pi + \frac{5\pi}{6}$
[2] $\frac{10\pi}{3} = 2\pi + \frac{4\pi}{3}$

Entonces:

$$z = \frac{(\sqrt{3}-i)^7}{(-1+\sqrt{3}i)^5} = \frac{4^7(\cos(\frac{5\pi}{6}) + isen(\frac{5\pi}{6})}{2^5(\cos(\frac{4\pi}{3}) + isen(\frac{4\pi}{3})} = \frac{4^7}{2^5}\left(\cos(\tfrac{5\pi}{6} - \tfrac{4\pi}{3}) + isen(\tfrac{5\pi}{6} - \tfrac{4\pi}{3})\right) =$$

$$= \frac{4^7}{2^5}\left(\cos(-\tfrac{\pi}{2}) + isen(-\tfrac{\pi}{2})\right) = \frac{4^7}{2^5}\left(\underbrace{\cos(\tfrac{3\pi}{2})}_{=0} + i\underbrace{sen(\tfrac{3\pi}{2})}_{=-1}\right) = -i\frac{4^7}{2^5}$$

- ◇ La forma polar de z es: $z = \frac{4^7}{2^5}\left(\cos(\frac{3\pi}{2}) + isen(\frac{3\pi}{2})\right)$
- ◇ La forma binómica de z es: $z = 0 + \left(-i\frac{4^7}{2^5}\right) = -i\frac{4^7}{2^5} \quad (Re(z) = 0)$