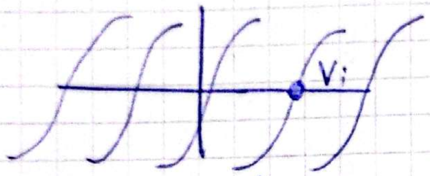
Problemas de valor inicial

10-10-24

Si derivamos una ecuación diferencial, conseguimos una familia de funciones que son solución.
Para fijar cual es, necesitamos fijar una condición llamada ~~condición~~ condición inicial. (valor)



mi función.

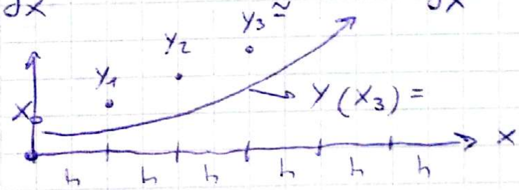
} Conjunto de soluciones de $\frac{dy}{dx}$

$Y_{(x_0)} = Y_0.$

Problema a solucionar:

$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ $\qquad$ $\frac{dy}{dx} = F(y)$

Discretizo x



$y_3 \to$ Aproximado

$Y(x_3) \to$ Exacto

"A partir de y_0 puedo aproximar el próximo valor".

$x_i = x_0 + i \cdot h$

17-10-24

1' $\frac{dy}{dx} = Y^2$ → Ec. d.f. no lineal

Ecuación diferencial Orden uno

Derivada primera

PVI. Método de Euler Explícito 22'

$$\left[y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \right] \qquad \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

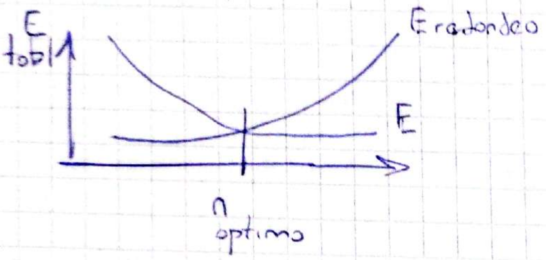
N → Cantidad de particiones del dominio que yo hago.

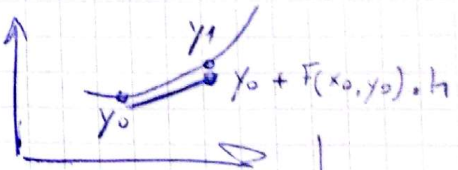
h → Paso.

$$\left[n = \frac{(x_n - x_0)}{h} \right] \rightarrow \frac{x_n - x_0}{n} = h$$

26'

Debo encontrar un balance entre menor h para más iteraciones, y menos iteraciones (mayor h) para minimizar el error de redondeo de cada paso.





El error nace de hacer la pendiente de la recta es constante, cuando en la función real es una curva.

36' Error:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{2} \cong \text{Error } y_1 \longrightarrow$$

la sumatoria de todos los errores en todos los puntos. → y suponiendo todas las derivadas segundas constantes.

$$E_{\text{Global } x_n} \cong \frac{1}{2} \frac{d^2y}{dx} (x_n - x_0) \cdot h$$

→ Si lo supongo constante → Logro una proporción lineal entre el tamaño de h y una error.

50' Ejercicio de física del paracaidista.

57' Planteo de la ecuación.

Si la ecuación era: $\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m} \cdot v$

Euler: $v_{i+1} = v_i + h\left(g - \frac{c}{m} \cdot v_i\right) \rightarrow v_0 = 0.$

Ejemplo en Excel 1° 00'

1° 07' → h crítico. → Si mi h es muy grande, Euler no converge → (pasos muy grandes)

1° 30' Crecimiento de solución o perturbación.

1° 38' $h < \frac{2}{\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|}$

1° 39' Euler implícito. → la función al final del paso.

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_{i+h}, y_{i+1})$$

↳ Me está pidiendo lo que necesita

Si la f fuese lineal podría simplemente despejar

→ si no es lineal podría iterar.

- Ejemplo con f lineal (prendido otra vez)

1° 41° $v_{i+1} = v_i + h\left(g - \frac{c}{m} v_{i+1}\right) \Rightarrow$

$$v_{i+1}\left(1 + h\frac{c}{m}\right) = v_i + h \cdot g$$

$$\left[v_{i+1} = \frac{v_i + h \cdot g}{1 + h \cdot \frac{c}{m}} \right]$$

Despejé (pudo porque la función era lineal).

1° 55' : Incondicionalmente estable.

24 - 10 - 2024

~~Runge-Kutta 2:~~

$$\cancel{y_1 = y_0 + \frac{1}{2}\left[h \cdot F(x_0, y_0) + h \cdot F(x_1 \ldots\right]}$$

Runge - Kutta 2: Orden 2

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}\left[\underbrace{h \cdot F(x_0, y_0)}_{g_1} + \underbrace{h \cdot F(x_0 + h,\ y_0 + \overbrace{h \cdot F(x_0, y_0)}^{g_1})}_{g_2}\right]$$

43' Aprendernos Eulers. El resto nos los dan.

42' Runge - Kutta Orden 4. → Condicionalmente estable (solo con una region de estabilidad).

$$y_{i+1} = y_i + \frac{g_1 + 2 g_2 + 2 g_3 + g_4}{6}$$

$$g_1 = h \cdot F(x_i \,.\, y_i)$$

$$g_2 = h \cdot F\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{g_1}{2}\right)$$

$$g_3 = h \cdot F\left(x_i + \frac{h}{2};\ y + \frac{g_2}{2}\right)$$

$$g_4 = h \cdot F(x_i + h;\ y_i + g_3)$$

51' Metodo del Trapecio / Crank - Nicolson. Orden 2

Incondicionalmente estable para todo h.

~~iteracion~~ $$y_{i+1} = y_i + h\left[\frac{F(x_i; y_i) + F(x_i + h;\ y_{i+1})}{2}\right]$$

55' Si tengo este metodo o Euler implicito con funciones no lineales, tengo que usar métodos iterativos para encontrar y_{i+1}.

Usamos esquema predictor - corrector.

Predictor / Corrector → Método implícito (iterativo). } Deben ser del mismo orden.

↓

Método explícito que me da una semilla para calcular y_{i+1}.

1° OK' ¿Y para ecuaciones diferenciales de orden mayor que 1?

↳ Transformamos la ec. dif. de 2do orden en 2 ec. dif. de primer orden.