31/10

Práctica Álgebra

(3.6) (4.2) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que tiene autovalores $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 5$ con autovectores asociados
$v_1 = [1, 1, -1]^T$, $v_2 = [2\ 2\ -1]^T$, $v_3 = [1\ 2\ -1]^T$, respectivamente

(a) Hallar base de Nul(A) y una base de Col(A)

$Nul(A) = gen\{[1\ 1\ -1]^T\}$ por ser el $[1\ 1\ -1]$ el autovector asociado al autovalor 0. $B_{Nul(A)} = \{[1\ 1\ -1]^T\}$ [illegible]

$A = P\Lambda P^{-1}$, $\Lambda = diag(0, 2, 5)$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Soy un boludo no tenía que buscar A.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 10 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -6 & 10 & 4 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ $B_{Col(A)} = \{[-1\ -6\ 3]^T, [5\ 10\ -5]^T, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\}$

Aparte ta mal xq la B_{Col} no es LI

(bien, no sé si pedía encontrarme explícito A)

(b) $Ax = v_2 + v_3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 4 & 3 \\ -6 & 10 & 4 & 4 \\ 3 & -5 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{+2F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & -2 \end{array}\right)$

$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 = 1 \to x_1 = \frac{1}{2} - x_3 \to x_3 = \frac{1}{2} - x_1 \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 = -2 \to 3x_1 - 5x_2 + 2x_1 - 1 = -1 \to 5x_1 - 5x_2 = -1 \to x_1 = \frac{1}{5} + x_2 \end{cases}$

$\boxed{\bar{X}_p = (1\ \ 6/5\ \ -1/2)}$ $x_2 = x_1 + \frac{1}{5}$

$\bar{X} = \bar{X}_p + Nul(A)$ Preguntar cómo se escribe.

(c)

(d) 14.2) (sin hallar A)

$B_{Nul(A)} = \{(1\ 1\ -1)^T\}$ Por ser $(1\ 1\ -1)^T$ el Autovector Asociado Al Autovalor $\lambda_1 = 0$.

Práctica mié 1/11

(1) Hallar, si existe, $A \in \mathbb{R}^{3\times3} / A^2 = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 3 \\ 3 & 4 & -3 \\ -3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$. Si existe, decidir si es único.

$\sigma(A^2) = \{\lambda \in \mathbb{R} / \det(A^2 - \lambda I) = 0\}$

$(-2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -3 \\ -3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \lambda_1 = -2$

$\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -3 \\ -3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = 0$

$(4-\lambda)^2 - 9$

$\lambda_2 = 1, \lambda_3 = 7$

A diag. $P(x) \to P(A) = \boxed{B}$ — Avec Ab coinciden con los de A; Avsi $\to \Lambda_B$

$\hookrightarrow x^2$

$\hookrightarrow 2x^2+6$

Si λ es Avsl de A $\Rightarrow$ $\Rightarrow P(\lambda)$ es Avsl de B.

$\boxed{A = P\Lambda_A P^{-1}}$

$\sigma(A^2) = \{-2, 1, 7\}$ ¿S_{-2}? $\to$ $Nul(A^2+2I)$ $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{+F_1} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & 6 & -3 \\ -3 & -6 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$\xrightarrow{+2F_1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $Nul(A^2+2I) = (0\ 0\ 0)^T$

$S_1 = Nul(A - I) \to \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ un $V \in S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$S_7 = Nul(A - 7I) \to \begin{pmatrix} -9 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$S_7 = \{(0\ 0\ 0)^T\}$

Papel de fibra de caña de azúcar.

Resuelve prop:

$$\det(A^2-\lambda I) = \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & 4-\lambda & -3 \\ -3 & -3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -3 \\ -3 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (-2-\lambda)\cdot[(4-\lambda)^2-9]$$

$\lambda = -2$

$(4-\lambda)^2 = 9$

$\lambda < {1 \atop 7}$

$$\det(A^2-\lambda I) = (1-x)[(-2-x)(7-x)+18]$$

$\sigma(A^2) = \{-2, 1, 7\}$

~~MDI~~

$\sigma(A^2) = \{1, 4\}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Delta_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$B_1 \quad B_{4,1}$

$A = P\Delta_A P^{-1}$ A no es única.

(2) Hallar $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tal que $A^2 - 3A + I = \begin{bmatrix} 10 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(a) y $tr(A) = 1$ ¿Es única?

(b) y $tr(A) = 11$ ¿Es única?

$\det(A^2 - 3A + I - \lambda I) = (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 10-\lambda & -3 \\ -3 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$(1-\lambda)[(10-\lambda)(2-\lambda) - 9] = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 \\ \lambda_3 = 11 \end{cases}$

$20 - 12\lambda + \lambda^2 = 9$

$11 - 12\lambda + \lambda^2 = 0$

$\dfrac{+12 \pm \sqrt{144-44}}{2} \quad \begin{cases} \dfrac{12 \pm 10}{2} & 11 \\ \dfrac{2}{2} & 1 \end{cases}$

$\sigma(A^2 - 3A + I) = \{1, 11\}$

$S_1 = Nul(A^2 - 3A) = Nul\begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$S_1 = Nul\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad S_1 = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$S_{11} = Nul(A^2 - 3A + I - 11I) = Nul\begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ -3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} = Nul\begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$S_{11} = gen\left\{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$p(\lambda_1) = 1 \to \lambda_1^2 - 3\lambda_1 + 1 = 1 \to \lambda_1^2 - 3\lambda = 0 \to \lambda_1(\lambda_1 - 3) = 0 \quad \begin{cases} \lambda_{11} = 0 \\ \lambda_{12} = 3 \end{cases}$

$p(\lambda_3) = 11 \to \lambda_3^2 - 3\lambda_3 + 1 = 11 \to \dfrac{3 \pm \sqrt{9-4\cdot-10}}{2} \to \dfrac{3 \pm 7}{2} \quad \begin{cases} \lambda_{31} = 5 \\ \lambda_{32} = -2 \end{cases}$

(a) $A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \begin{bmatrix} \boxed{0}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3}_2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} P^{-1}$

No es única ~~xq puedo intercambiar~~ ~~el $\boxed{}_1$ por el $\boxed{}_2$, por ejemplo~~

ó podría tomar $\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

ó $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

(b) ~~Análogamente tr(A) = 11~~

$A = P\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ en este caso sí es única

#Chequeado.

(el 3 decidirsi son equiv. el no encontré

(4.1) Hallar χ_A, Analizar si A es diagonalizable y, en caso de serlo hallar una matriz inversible $P \in \mathbb{R}^{3\times3}$ y una diagonal $\Delta \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tal que $A = P\Delta P^{-1}$

(a) $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

$\det(A - xI) = (-1-x)\det\begin{pmatrix} -4-x & -3 \\ 6 & 5-x \end{pmatrix}$

$= -(x+1)\left[(-4-x)(5-x)+18\right]$

$= -(x+1)(x^2-x-2)$

$-(x+1)(x+1)(x-2) = -(x+1)^2(x-2)$

$\sigma(A) = \{-1, 2\}$

$S_{-1} = \mathrm{Nul}(A+I) = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} = \mathrm{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

$S_2 = \mathrm{Nul}(A-2I) = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} -6 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix} \to \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$

A es diagonalizable y

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}}_{P} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\Delta} P^{-1}$$

(b) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 20 & 3 & 10 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ $\det(A - xI) = \det\begin{pmatrix} -3-x & 1 & -3 \\ 20 & 3-x & 10 \\ 2 & -2 & 4-x \end{pmatrix}$

$\xRightarrow{F_2-10F_3} \begin{pmatrix} -3-x & 1 & -3 \\ 0 & 23-x & -30+x \\ 2 & -2 & 4-x \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+2F_1]{} \begin{pmatrix} -3-x & 1 & -3 \\ 0 & 23-x & -30+x \\ -1+x & 0 & -2-x \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1-C_3} \begin{pmatrix} -x & 1 & -3 \\ 30-x & 23-x & -30+x \\ 1 & 0 & -2-x \end{pmatrix}$

$(-3-x)\cdot \cancel{\det}(23-x)(-2-x) + (-1+x)\left[(-30+x)+69-3x\right]$ $[39-2x]$

$(-3-x)(23-x)(-2-x) + (-1+x)(39-2x)$

$(-69+x^2+20x)(-2-x) + \left[-2x^2+41x-39\right]$

$-x^3-2x^2-20x^2-40x+69x+138-2x^2+41x-39$

$-x^3 \, \cancel{}\, x^2 + 70x + 99$

-24

Mal!!

calculé mal el det(A-xI)

(b) $\det(A-xI) = \det\begin{pmatrix} -3-x & 1 & -3 \\ 20 & 3-x & 10 \\ -4-2x & 0 & -2-x \end{pmatrix}$ F_3+2F_1

$\det(A-xI) = (-1)\det\begin{pmatrix} 20 & 10 \\ -4-2x & -2-x \end{pmatrix} + (3-x)\det\begin{pmatrix} -3-x & -3 \\ -4-2x & -2-x \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \underbrace{(-1)(\cancel{-40}-\cancel{20x}+\cancel{40}+\cancel{20x})}_{=0} + (3-x)[(-3-x)(-2-x)-(-4-2x)(-3)]$

$\Rightarrow (3-x)[(x^2+5x+6)-(6x+12)] = (3-x)(x^2-x-6)$

$= (3-x)(x+2)(x-3) = -(x-3)^2(x+2)$

$\sigma(A) = \{-2, 3\}$

$S_{-2} = Nul(A+2I) = Nul\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 20 & 5 & 10 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} = Nul\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{+4F_1}{=} Nul\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow Nul\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ +2 \\ +1 \end{pmatrix}\right\} = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ $-F_2$

$S_3 = Nul(A-3I) = Nul\begin{pmatrix} -6 & 1 & -3 \\ 20 & 0 & 10 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \overset{+3F_3}{=} Nul\begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = Nul\begin{pmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ $-F_2$

$\Rightarrow Nul\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$ A <u>no es</u> diagonalizable ya que $m(3) = 2 > \mu(3) = 1$

$\mu(3) = \dim(Nul(A-3I)) = 1$

(4.2) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ que tiene autovalores $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$ con autovectores asociados $v_1 = (1\ 1\ -1)^T, v_2 = (2\ 2\ -1)^T, v_3 = (1\ 2\ -1)^T$ respectivamente.

(a) Hallar base de Nul(A) y una de Col(A)

$B_{Nul(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ por ser $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ el autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = 0$.

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda_2 \cdot \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= 2\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 5\beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

obs: cualquier vector, luego de multiplicarse por A, puede expresarse como CL de v_2 y v_3.

$B_{Col}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ ya que ~~todo vector multiplicado por la matriz A puede expresarse como~~ esa base resulta la imagen de la T.L. definida por A.

Preguntar si está bien justificado

Nota Lun

!

(b) $Ax = v_2 + v_3$

$A(\frac{1}{2} v_2 + \frac{1}{5} v_3) = v_2 + v_3$ → Una x_p podría ser

$v_2 + v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\left[\bar{x}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/5 \\ 7/5 \\ -7/10 \end{pmatrix} \right]$$

(c) ~~sea~~ La sol. gral es $\bar{X} = \{ \bar{x}_p + Nul(A) \}$ ¿está bien escrito así? (ya que hay preguntar lunes)

(d) Sé que la Imagen de la T.L. definida por A es $B_{Col(A)}$ y v_1 es L.I. de $B_{Col(A)}$, ya que v_1 es un autovector correspondiente a un autovalor, y los vectores de $B_{Col(A)}$ también son autovectores de A. Entonces, $\nexists\ \alpha, \beta$ tales que $\alpha v_2 + \beta v_3 = v_1$.

Tmb chequear, misma duda que (~~d~~) en (a)

(4.3) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ / $Nul(A) = gen\{(1\ 0\ -1\ 0)^T\}$,
$Nul(A+I) = gen\{(0\ 1\ 0\ -1)^T\}$,
$Nul(A-2I) = gen\{(1\ 0\ 1\ 0)^T, (0\ 1\ 0\ 1)^T\}$

(a) A es diagonalizable ya que tiene 4 autovectores asociados a sus 3 autovalores. $\exists P \in \mathbb{R}^{4\times 4} / A = P\Lambda P^{-1}$ siendo $\Lambda = diag(0,-1,2,2)$

(b) $$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix} + A\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} = -1\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\\1\end{pmatrix}$$

(c) $Ax = [1\ 0\ 1\ 0]^T$

$$\Rightarrow A\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} \to \frac{1}{2}A\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} \to A\begin{bmatrix}1/2\\0\\1/2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\bar{X} = \left\{\begin{bmatrix}1/2\\0\\1/2\\0\end{bmatrix} + Nul(A)\right\}$$ Por enésima vez ¿estará bien expresado? Preguntar el lunes

(4.4)(a) $A^6[1\ 1\ 1\ 1]^T = A^6\underbrace{[1\ 0\ 1\ 0]^T}_{v_1} + A^6\underbrace{[0\ 1\ 0\ 1]^T}_{v_2} = 2^6\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} + 2^6\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$

Autoval asociado a v_1 y v_2 (autovecs)

$\Rightarrow = [64\ 64\ 64\ 64]$

(b) $A^7(1\ 1\ 1\ -1)^T = A^7[1\ 0\ 1\ 0]^T + A^7[0\ 1\ 0\ -1]^T$

$$= 2^7\underbrace{[1\ 0\ 1\ 0]^T}_{w_1} + (-1)^7\underbrace{[0\ 1\ 0\ -1]}_{w_2} = \begin{bmatrix}128\\-1\\128\\1\end{bmatrix}$$

Aval asociado a $w_1 = v_1$ — Aval asociado a w_2

(c) $A^4x = [1\ 0\ 1\ 0]^T$ / $\bar{x}_p = [\frac{1}{16}, 0, \frac{1}{16}, 0]^T$

$A^4[1\ 0\ 1\ 0]^T = 2^4[1\ 0\ 1\ 0]^T$ / $\bar{X} = \{\bar{x}_p + Nul(A)\}$

(Parece ok) ✓

(d) determinar el espectro de $A^{36} - A^{35}$. Resuelvo atrás

Escaneado con CamScanner

$\sigma(A^{36}-A^{35}) \qquad \sigma(A) = \{0, -1, 2\}$

$\sigma(A^{36}-A^{35}) = \{0^{36}-0^{35}, -1^{36}-(-1)^{35}, 2^{36}-2^{35}\}$

$\sigma(A^{36}-A^{35}) = \{0, 2, 34359738368\}$

(4.5) Determinar, en c/u de los casos $\sigma(A)$

(a) $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es una matriz diagonalizable tal que $tr(A) = -4$ y $\sigma(A^2+A) = \{1, 3, 8\}$ → lo vimos en la teórica, no tiene solución (la mal la corrigió)

(b) $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ es una matriz diagonalizable t/que $\det(A) = 6$ y $\{-2, 1\} \subset \sigma(A)$ y $-4 \in \sigma(A-3I)$

$p(\lambda) = \overset{\text{autovalor}}{\lambda} + 3 = -4 \to \lambda = -1 \qquad \Lambda = diag(-2, -1, 1, \cancel{\lambda_4}\,\beta)$

$\det(\Lambda) = \det(A) = 6$

$\Rightarrow -2 \cdot -1 \cdot 1 \cdot \beta = 6 \to \beta = 3$

$\sigma(A) = \{-2, -1, 1, 3\}$ Parece OK

(4.6) Hallar $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que cumpla → (b) $\det(A) = -1$
(c) $tr(A) = 6$

(a) $A^2 - 3A + 2I = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}}_{B}$; $\sigma(B) = \left\{ x \in \mathbb{R} : \det(Nul(B - xI)) = 0 \right\}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3-x & 3 \\ 3 & 3-x \end{vmatrix} = (3-x)^2 - 9 = \{0, 6\}$

$E_0 = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \quad E_6 = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$A^2 - 3A + 2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ $\quad p(\lambda_1) = 6 = \lambda_1^2 - 3\lambda_1 + 2 = \left\langle \begin{matrix} 4 \\ -1 \end{matrix} \right.$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ $\quad p(\lambda_2) = 0 = \lambda_2^2 - 3\lambda_2 + 2 \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right.$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \longrightarrow$ (a) Cualquier combinación de los λ_1, λ_2 halladas

(b) $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$ | (c) $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$

56P (4.7) Leer consigna gigante

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6/5 & -p \\ 1/2 & 3/5 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

(d) Hallar los p para los cuales ~~ext~~ la matriz del sist resulta diagonalizable

$$\det(\mathrm{Nul}(A) - xI)) = \begin{vmatrix} 6/5-x & -p \\ 1/2 & 3/5-x \end{vmatrix} = (6/5-x)(3/5-x)+p/2$$

$$\Rightarrow x^2 - 9/5\,x + 6/5 + p/2 = 0$$

$$\frac{\frac{9}{5} \pm \sqrt{\frac{81}{25} - 4\cdot\left(\frac{6}{5}\right)\cdot\frac{p}{2}}}{2} \to \frac{\frac{9}{5} \pm \sqrt{\frac{81}{25} - \frac{24p}{10}}}{2} \to \frac{\frac{9}{5} \pm \sqrt{\frac{81}{25} - \frac{69p}{25}}}{2}$$

$\frac{81}{25} - \frac{69p}{25} \geq 0 \to p \geq 1{,}35$ si $p \in (-\infty; 1{,}35)$ M es diagonalizable

si $p = 1{,}35 \to \sigma(M) = \{9/10\}$

$$\mathrm{Nul}(A - 9/10\, I) = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} 3/10 & 27/20 \\ 1/2 & -3/10 \end{pmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} 13/10 & 21/20 \\ 1/2 & -3/10 \end{pmatrix} = \mathrm{Nul}\begin{pmatrix} 8/10 & 0 \\ 1/2 & -3/10 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Dim}(\mathrm{Nul}(A - 9/10\, I)) = 0 < \mu(9/10) > n(9/10)$$

(d) $p \in (-\infty, 1{,}35)$

(e)(b) si $p = 0{,}175 \Rightarrow \lambda_1 = 1{,}7396$

$\lambda_2 =$

Ver Ver dps con la compu

(4.8) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ definida por $A = \begin{bmatrix} 0,7 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4 \end{bmatrix}$

(a) Hallar $\sigma(A)$ y comprobar que A es diagonalizable.

$$\det(A - xI) \rightarrow \begin{vmatrix} 0,7-x & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,5-x & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4-x \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\Rightarrow (0,7-x)\begin{vmatrix} 0,5-x & 0,2 \\ 0,4 & 0,4-x \end{vmatrix} - (0,2)\begin{vmatrix} 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,4-x \end{vmatrix} + (0,1)\begin{vmatrix} 0,3 & 0,5-x \\ 0,2 & 0,4 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow (0,7-x)(x^2 - 0,9x + 0,28) - (0,2)(-0,3x + 0,08) + (0,1)(0,2x + 0,02)$$

$$\Rightarrow -x^3 + 1,6x^2 + 0,21x - 0,196 + 0,06x - 0,016 + 0,02x + 0,002$$

$$-x^3 + 1,6x^2 + 0,29x - 0,210$$

$\sigma(A) \approx \{-0,40405; 0,30609; 1,69795\}$ (symbolab)

4.6 Hallar una $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que posea las siguientes props:

(a) $\underbrace{A^2 - 3A + 2I}_{B} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \det \begin{bmatrix} 3-x & 3 \\ 3 & 3-x \end{bmatrix}$, $\underbrace{(3-x)^2 - 9}_{\chi_{A^2-3A+2I-xI}(x)} < {6 \atop 0}$

$p(\lambda_1) = p(A) = 6$ $\quad \sigma_1(B) = \{6, 0\}$

$p(\lambda_2) = p(A) = 0$ $\quad S_0 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ $\quad S_6 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

$p(\lambda_1) = \lambda_1^2 - 3\lambda_1 + 2 = 6 \rightarrow < {4 \atop -1}$

$p(\lambda_2) = \lambda_2^2 - 3\lambda_2 + 2 = 0 \rightarrow < {1 \atop 2}$

(a) cualquier comb. de λ_1 y λ_2

(b) $\det(A) = -1 \rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$

(c) $\mathrm{tr}(A) = 6 \rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2$

Escaneado con CamScanner