75.12/95.04 ANÁLISIS NUMÉRICO I
95.13 MÉTODOS MATEMÁTICOS Y NUMÉRICOS
CB 051 MODELACIÓN NUMÉRICA

FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

EXAMEN INTEGRADOR – 2do Cuatrimestre 2024 - SEGUNDA FECHA

17/Diciembre/2024

Problema 1 (4 puntos)
Dado el siguiente problema de valores de contorno

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\,y + 2\,x = 0 \quad con \quad y_{(0)} = 1 \ ; \ y_{(6)} = 4$$

Plantear su resolución numérica usando diferencias finitas centradas.

a) Expresar el sistema de ecuaciones resultantes en forma matricial. Considerar que el dominio se divide en *N+1* tramos. (1 punto)
b) Resolver el caso de *N*=3 usando métodos vistos en el curso para resolver el sistema de ecuaciones.
c) Discutir las posibles restricciones para h (tamaño del intervalo de discretización) en este caso justificando teóricamente la respuesta. (1 punto)

Problema 2
Dado el siguiente problema de valores iniciales

$$\frac{dy}{dt} = 1 - y \ \ con\ y_{(0)} = 0$$

a) Determine el valor aproximado de y para t=1 utilizando el método de Euler explícito. Utilizar un paso h tal que haya que aplicar el método 2 veces y verificar que con dicho paso el problema resulta ser fuertemente estable (1 punto).
b) Determine el valor aproximado de y para t=1 utilizando el método de Punto Medio (2 puntos) con el mismo paso usado en el punto anterior.
c) Verificar que la solución es $y = 1 - e^{-t}$ y en función de ello calcular el error obtenido con cada método. Comparar los errores obteniendo conclusiones justificadas teóricamente. (1 punto)

Ayuda:
Siendo $\boldsymbol{y' = f(t,y)\ \ F1 = h\,f(t_i, y_i)\ ;\ F2 = h\,f\left(t_i + \frac{1}{2}h,\ y_i + \frac{1}{2}\ F1\right)\ ;\ y_{i+1} = \ y_i + F2\ ;}$

Pregunta 1 (1 punto)
Si se desea integrar numéricamente una función cuyos valores vienen dados en una tabla equiespaciada, indicar cuál de los métodos estudiados no se puede utilizar explicando el motivo de ello.

Pregunta 2 (1 punto)
Explicar de qué se trata la Extrapolación de Richardson e indicar como quedaría la expresión del valor extrapolado si se aplica al Método de Euler.

Criterio de aprobación: reunir en total 4 puntos considerando exclusivamente los puntos a) y b) de cada problema o de un mismo problema si fuera posible.

Cavaliere

17/12/24

Daniel Mamani
109932
Curso 3 _ Práctica 19hs

2 Cuatrimestre
2024

Problema 2 (PVI)

$\frac{ds}{dt} = 1 - s$ con $s_0 = 0$

a) Determinar el valor aproximado de s para $t=1$ usando Euler explícito. Usar h tal que se necesiten 2 iteraciones y verificar con ese h que el problema es fuertemente estable.

Como piden 2 iteraciones ($N=2$), entonces $h = t/N = 1/2 = 0,5$

Discretizo la ecuación con la siguiente fórmula:

$$U_{n+1} = U_n + h\, f(U_n, t_n) \qquad U_n = s_n,\ U_{n+1} = s_{n+1}$$

Aplicado a la ecuación se obtiene:

$f(U_n, t_n) = 1 - s \Rightarrow U_{n+1} = U_n + h(1 - s_n)$

Resuelvo

$$s_1 = s_0 + h(1 - s_0) \Rightarrow s_1 = 0 + 0,5(1-0) = 0,5$$

$$s_2 = s_1 + h(1 - s_1) \Rightarrow s_2 = 0,5 + 0,5(1-0,5) = 0,75$$

Para $t=1$ $s(1) \approx 0,75$

Para verificar que con $h = 0,5$ el problema es estable analizo la condición de estabilidad del método usado:

$U_{n+1} = s_n + h(1 - s_n) \rightarrow s_{n+1} = s_n + h - h s_n \rightarrow s_{n+1} = (1-h)s_n + h$

Con esto el valor del factor de amplificación del problema es $(1-h)$.
Para que el problema sea estable se debe cumplir la siguiente condición:

$$|1 - h| \leq 1$$

$-1 \leq 1 - h$ $\qquad$ $1 - h \leq 1$

$0 \leq h$ $\qquad$ $h \leq 2$

$$0 \leq h \leq 2$$

Como el paso elegido ($h=0,5$) cumple con la condición $0 \leq h \leq 2$ el problema resulta estable.

b) Determinar el valor aproximado de s para $t=1$ usando el método de Punto Medio con el h anterior

Discretizo la ecuación usando lo siguiente:

$U_{n+1} = U_n + F_2 \qquad F_2 = h f(t_n + 1/2 h, U_n + 1/2 F_1) \qquad F_1 = h f(t_n, U_n)$

NOTA

Aplicado a la ecuación se obtiene:

$F_1 = h(1 - U_n)$ $\quad F_2 = h(1 - (U_n + F_1))$ $\quad U_{n+1} = U_n + F_2$

Resuelvo:

$y_1 = y_0 + 0{,}5(1 - (y_0 + (0{,}5(1 - y_0)))) \Rightarrow y_1 = 0 + 0{,}5(1 - (\overset{0{,}5}{0 + 0{,}5})) = 0{,}25$

$y_2 = y_1 + 0{,}5(1 - (y_1 + (0{,}5(1 - y_1)))) \Rightarrow y_2 = 0{,}25 + 0{,}5(1 - (0{,}25 + (0{,}5(1 - 0{,}25))))$

$y_2 = 0{,}25 + 0{,}5(1 - 0{,}625) \Rightarrow y_2 = 0{,}25 + 0{,}1875 = 0{,}4375 \approx 0{,}44$

c) Verificar que $y = 1 - e^{-t}$ es la solución y en función de ella calcular el error obtenido con cada método. Comparar errores obteniendo conclusiones justificadas teóricamente.

Para verificar que $y = 1 - e^{-t}$ es solución de $y' = 1 - y$ reemplazo y en la EDO y evalúo con $t = 0$

$y = 1 - e^{-t} \Rightarrow y' = 1 - (1 - e^{-t})$ $\quad t = 0$ ~~$\Rightarrow y' = 1 - (1 - e^{0}) \Rightarrow y' = 1$~~

$y = 1 - e^{-0} = 1 - 1 = 0$ $\quad$ teníamos que $y_0 = 0$, entonces se puede observar que $y = 1 - e^{-t}$ es la solución de la EDO porque cumple con la condición inicial brindada por el enunciado.

Pregunta 1

Si los valores de la función vienen dados en una tabla equiespaciada no se puede usar el método de la cuadratura de Gauss porque este método requiere que la expresión de la función para evaluarla en diferentes ptos.

Daniel Marazzi
109932
Curso 7_Práctica 19hs

2° cuatrimestre
FECHA 2024

Problema 1. (PVC)

$\frac{d^2y}{dx^2} - 3y + 2x = 0$ con $y_0 = 1$; $y_6 = 4$ $\quad \overset{Li}{0} \le x \le \overset{Ls}{6}$

a) Discretizo la ecuación usando:

$y'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$ $\quad x = Li + h \cdot i = h \cdot i$

Aplico a la ecuación obteniendo:

$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} - 3y_i = -2x$

Multiplico por h^2 y reacomodo:

$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} - h^2 3y = -h^2 2x$

$y_{i+1}(1) + y_i(-2-h^2 3) + y_{i-1}(1) = -h^2 2x$

$$\begin{bmatrix} (-2-h^2 3) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & (-2-h^2 3) & 1 & & \\ 0 & 1 & (-2-h^2 3) & & \\ \cdots & & & & \\ & & & & (-2-h^2 3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ \\ \vdots \\ \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -h^2 2x - (1) y_0 \\ -h^2 2x \\ \vdots \\ \vdots \\ -h^2 2x - (1) y_{N+1} \end{bmatrix}$$

b) $N = 3 \Rightarrow h = Ls - Li / N+1 \Rightarrow h = 6/4 = 1{,}5$

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$
$0 \quad 1{,}5 \quad 3 \quad 4{,}5 \quad 6$

$n=0 \quad x=0 \quad y_0 = 1 \quad | \quad n=4 \quad x=6 \quad y_4 = 4$

$n=1 \quad x=1{,}5 \quad y_2 + y_1(-2-(2.25)3) + \overset{1}{y_0} = -6{,}75 \Rightarrow y_2 + y_1(-8{,}75) = -7{,}75$

$n=2 \quad x=3 \quad y_3 + y_2(-8{,}75) + y_1 = \cancel{-13{,}5} \; -13{,}5$

$n=3 \quad x=4{,}5 \quad \underbrace{y_4}_{4} + y_3(-8{,}75) + y_2 = -20{,}25 \Rightarrow -8{,}75 y_3 + y_2 = -24{,}25$

$$\begin{bmatrix} -8{,}75 & 1 & 0 \\ 1 & -8{,}75 & 1 \\ 0 & 1 & -8{,}75 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7{,}75 \\ -13{,}5 \\ -24{,}25 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} y_1^{k+1} = \cancel{y_2^k - 7{,}75} \div y_2^k / 8{,}75 \\ \quad = \boxed{+y_2^k + 7{,}75 / 8{,}75} \\ y_2^{k+1} = \frac{+y_1^{k+1} + y_3^k + 13{,}5}{8{,}75} \\ y_3^{k+1} = \frac{+y_2^{k+1} + 24{,}25}{8{,}75} \end{cases}$$

K	y_1	y_2	y_3
0	0	0	0
1	0,885714	1,644882	2,959325
2	1,043609	2,003764	3,000430
3	1,114716	2,013160	3,001504
4	1,115790	2,013405	3,001532

$s_1 \simeq 1{,}113790$ $s_2 \simeq 2{,}013405$ $s_3 \approx 3{,}001532$

c) Analizo estabilidad:

$|-2-h^2 3| \leq 1$

$-1 < -2-3h^2$ $-2-3h^2 \leq 1$