Presentación

Episodio 2.
Subespacios - Combinación Lineal

Álgebra Lineal
mfiuba@gmail.com

Departamento de Matemática
FIUBA

24 de septiembre de 2020

Demostrar que un conjunto es subespacio

Para probar que un conjunto es un subespacio, tendremos que chequear que cumple con las tres condiciones vistas:

a. $\mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in S$.

b. Si $u, v \in S \Rightarrow u + v \in S$.

c. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $u \in S \Rightarrow \lambda u \in S$.

Algunos ejemplos

Empecemos con un ejemplo familiar: el conjunto:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 / x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

¿es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, con la suma y producto por escalar habituales?.

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

Algunos ejemplos

Empecemos con un ejemplo familiar: el conjunto:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 / x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

¿es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, con la suma y producto por escalar habituales?.

Demostremos analíticamente que es un subespacio:

a. $\mathbb{O}_{\mathbb{R}^3} \in S$ ¿Por qué? Porque $\mathbb{O}_{\mathbb{R}^3} = (0\ 0\ 0)^T$ cumple la condición dada por la ecuación que define a este conjunto, pues $0 - 2.0 + 0 = 0$.

Algunos ejemplos

Empecemos con un ejemplo familiar: el conjunto:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 / x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

¿es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, con la suma y producto por escalar habituales?.

Demostremos analíticamente que es un subespacio:

a $\mathbb{O}_{\mathbb{R}^3} \in S$ ¿Por qué? Porque $\mathbb{O}_{\mathbb{R}^3} = (0\ 0\ 0)^T$ cumple la condición dada por la ecuación que define a este conjunto, pues $0 - 2.0 + 0 = 0$.

b Si $u, v \ \in S \Rightarrow u = (x_1\ x_2\ x_3)^T$, y $v = (y_1\ y_2\ y_3)T$ son dos vectores en $\mathbb{R}^3$ que cumplen la ecuación que define a S.

Algunos ejemplos

Empecemos con un ejemplo familiar: el conjunto:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 / x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

¿es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, con la suma y producto por escalar habituales?.

Demostremos analíticamente que es un subespacio:

a $\mathbb{O}_{\mathbb{R}^3} \in S$ ¿Por qué? Porque $\mathbb{O}_{\mathbb{R}^3} = (0\ 0\ 0)^T$ cumple la condición dada por la ecuación que define a este conjunto, pues $0 - 2.0 + 0 = 0$.

b Si $u, v \ \in S \Rightarrow u = (x_1\ x_2\ x_3)^T$, y $v = (y_1\ y_2\ y_3)T$ son dos vectores en $\mathbb{R}^3$ que cumplen la ecuación que define a S. Tenemos que verificar si la suma de estos dos puntos genéricos de S pertenece a S, $u + v = (x_1 + y_1\ x_2 + y_2\ x_3 + y_3)$.

Algunos ejemplos

Empecemos con un ejemplo familiar: el conjunto:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 / x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

¿es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, con la suma y producto por escalar habituales?.

Demostremos analíticamente que es un subespacio:

a $\mathbb{O}_{\mathbb{R}^3} \in S$ ¿Por qué? Porque $\mathbb{O}_{\mathbb{R}^3} = (0\ 0\ 0)^T$ cumple la condición dada por la ecuación que define a este conjunto, pues $0 - 2.0 + 0 = 0$.

b Si $u, v \ \in S \Rightarrow u = (x_1\ x_2\ x_3)^T$, y $v = (y_1\ y_2\ y_3)T$ son dos vectores en $\mathbb{R}^3$ que cumplen la ecuación que define a S. Tenemos que verificar si la suma de estos dos puntos genéricos de S pertenece a S, $u + v = (x_1 + y_1\ x_2 + y_2\ x_3 + y_3)$.

  Si reemplazamos en la ecuación de S, las correspondientes coordenadas:
  $(x_1+y_1)-2(x_2+y_2)+(x_3+y_3) = \underbrace{(x_1 - 2x_2 + x_3)}_{=0 \text{ pues } u \in S} + \underbrace{(y_1 - 2y_2 + y_3)}_{=0 \text{ pues } v \in S} = 0+0 = 0$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Algunos ejemplos

Empecemos con un ejemplo familiar: el conjunto:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^3 / x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

¿es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, con la suma y producto por escalar habituales?.

Demostremos analíticamente que es un subespacio:

a $\mathbb{O}_{\mathbb{R}^3} \in S$ ¿Por qué? Porque $\mathbb{O}_{\mathbb{R}^3} = (0\ 0\ 0)^T$ cumple la condición dada por la ecuación que define a este conjunto, pues $0 - 2.\,0 + 0 = 0$.

b Si $u, v \ \in S \Rightarrow u = (x_1\ x_2\ x_3)^T$, y $v = (y_1\ y_2\ y_3)T$ son dos vectores en $\mathbb{R}^3$ que cumplen la ecuación que define a S. Tenemos que verificar si la suma de estos dos puntos genéricos de S pertenece a S, $u + v = (x_1 + y_1\ x_2 + y_2\ x_3 + y_3)$.

Si reemplazamos en la ecuación de S, las correspondientes coordenadas:
$(x_1 + y_1) - 2(x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = \underbrace{(x_1 - 2x_2 + x_3)}_{=0 \text{ pues } u \in S} + \underbrace{(y_1 - 2y_2 + y_3)}_{=0 \text{ pues } v \in S} = 0 + 0 = 0$

c Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $u \in S$, $\lambda u = (\lambda x_1\ \lambda x_2\ \lambda x_3)^T \Rightarrow \in S$, pues
$\lambda x_1 - 2\lambda x_2 + \lambda x_3 = \lambda \underbrace{(x_1 - 2x_2 + x_3)}_{=0 \text{ pues } u \in S} = \lambda\, 0 = 0$

Algunos ejemplos

Como el Conjunto S cumple con las tres condiciones vistas podemos afirmar que es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Ahora bien, el subespacio S, también puede describirse explicitando la forma de las soluciones de la ecuación:

$$\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \Longleftrightarrow x_3 = -x_1 + 2x_2 \\
u \in S &\Longrightarrow u = (x_1\ x_2\ x_3)^T = (x_1\ x_2\ -x_1 + 2x_2)^T \\
u &= x_1\,(1\ 0\ -1)^T + x_2\,(0\ 1\ 2)^T,\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Algunos ejemplos

Como el Conjunto S cumple con las tres condiciones vistas podemos afirmar que es un subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Ahora bien, el subespacio S, también puede describirse explicitando la forma de las soluciones de la ecuación:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \iff x_3 = -x_1 + 2x_2 \\ u \in S &\implies u = (x_1\ x_2\ x_3)^T = (x_1\ x_2\ \ -x_1 + 2x_2)^T \\ u &= x_1\,(1\ 0\ \ -1)^T + x_2\,(0\ 1\ 2)^T,\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Notar que $(1 \quad 0 \quad -1)^T$ y $(0 \quad 1 \quad 2)^T$ pertenecen al subespacio vectorial S, y estamos haciendo sumas y productos por los escalares x_i (con $i = 1, 2$) con elementos que están en S.

Más ejemplos

Antes de dar nuestra próxima definición veamos en otro ejemplo, como hay *expresiones* que se repiten más allá de la naturaleza distinta de los elementos del espacio vectorial.

Más ejemplos

Antes de dar nuestra próxima definición veamos en otro ejemplo, como hay *expresiones* que se repiten más allá de la naturaleza distinta de los elementos del espacio vectorial.

Tomemos:

$$T = \{p \in \mathbb{R}_2[x] / p(1) = 0\},$$

veamos que es un subespacio de $\mathbb{R}_2[x]$, con la suma y el producto por escalar definidos.

a. El polinomio nulo $\mathbb{O}_{\mathbb{R}_2[x]}$ cumple obviamente la condición, pues $\mathbb{O}_{\mathbb{R}_2[x]}(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$, en particular $\mathbb{O}_{\mathbb{R}_2[x]}(1) = 0$.

Más ejemplos

Antes de dar nuestra próxima definición veamos en otro ejemplo, como hay *expresiones* que se repiten más allá de la naturaleza distinta de los elementos del espacio vectorial.

Tomemos:

$$T = \{p \in \mathbb{R}_2[x] / p(1) = 0\},$$

veamos que es un subespacio de $\mathbb{R}_2[x]$, con la suma y el producto por escalar definidos.

a. El polinomio nulo $\mathbb{O}_{\mathbb{R}_2[x]}$ cumple obviamente la condición, pues $\mathbb{O}_{\mathbb{R}_2[x]}(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$, en particular $\mathbb{O}_{\mathbb{R}_2[x]}(1) = 0$.

b. Si P y $Q \in T$ entonces el polinomio $P + Q$, cumple que:

$$(P + Q)(1) = P(1) + Q(1) = 0$$

Más ejemplos

Antes de dar nuestra próxima definición veamos en otro ejemplo, como hay *expresiones* que se repiten más allá de la naturaleza distinta de los elementos del espacio vectorial.

Tomemos:

$$T = \{p \in \mathbb{R}_2[x] / p(1) = 0\},$$

veamos que es un subespacio de $\mathbb{R}_2[x]$, con la suma y el producto por escalar definidos.

a. El polinomio nulo $\mathbb{O}_{\mathbb{R}_2[x]}$ cumple obviamente la condición, pues $\mathbb{O}_{\mathbb{R}_2[x]}(x) = 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$, en particular $\mathbb{O}_{\mathbb{R}_2[x]}(1) = 0$.

b. Si P y $Q \in T$ entonces el polinomio $P + Q$, cumple que:

$$(P + Q)(1) = P(1) + Q(1) = 0$$

c. Por último si tomamos $\lambda \in \mathbb{R}$ y $P \in T$, el polinomio $\lambda\, P$, cumple que:

$$(\lambda P)(1) = \lambda P(1) = \lambda\, 0 = 0$$

Más ejemplos

¿Cómo son los elementos de este subespacio?

Más ejemplos

¿Cómo son los elementos de este subespacio?

Si $P \in T$, entonces se cumplen:

- $P = a_2x^2 + a_1x + a_0$ por ser un elemento de $\mathbb{R}_2[x]$
- $P(1) = a_2 + a_1 + a_0 = 0, \Leftrightarrow a_0 = -a_2 - a_1.$

Más ejemplos

¿Cómo son los elementos de este subespacio?

Si $P \in T$, entonces se cumplen:

- $P = a_2x^2 + a_1x + a_0$ por ser un elemento de $\mathbb{R}_2[x]$
- $P(1) = a_2 + a_1 + a_0 = 0, \Leftrightarrow a_0 = -a_2 - a_1.$

Por lo tanto:

$$P = a_2x^2 + a_1x + (-a_2 - a_1) = a_2(x^2 - 1) + a_1(x - 1)$$

Más ejemplos

¿Cómo son los elementos de este subespacio?

Si $P \in T$, entonces se cumplen:

- $P = a_2x^2 + a_1x + a_0$ por ser un elemento de $\mathbb{R}_2[x]$
- $P(1) = a_2 + a_1 + a_0 = 0, \Leftrightarrow a_0 = -a_2 - a_1$.

Por lo tanto:

$$P = a_2x^2 + a_1x + (-a_2 - a_1) = a_2(x^2 - 1) + a_1(x - 1)$$

Entonces, $P \in T \Leftrightarrow P = a_2\,(x^2 - 1) + a_1;(x - 1)$, con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$.

Observación

Trabajamos con dos subespacios, uno de ellos, S en $\mathbb{R}^3$ y el otro, T en $\mathbb{R}_2[x]$, para los dos encontramos una forma (muy parecida) de describir los elementos que pertenecían a cada uno:

$$u \in S \Leftrightarrow u = x_1 \underbrace{(1\ 0\ \ -1)^T}_{\text{vector de } S} + x_2 \underbrace{(0\ 1\ 2)^T}_{\text{vector de } S},\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

$$P \in T \Leftrightarrow P = a_2 \underbrace{(x^2 - 1)}_{\text{vector de } T} + a_1 \underbrace{(x - 1)}_{\text{vector de } T},\quad \text{con } a_1, a_2 \in \mathbb{R}.$$

Combinación lineal

Definición: Un vector $w \in \mathbb{V} - \mathbb{K}$ espacio vectorial, es **combinación lineal** de un conjunto de vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ en $\mathbb{V}$, si existen escalares, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que:

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i}_{\text{notación}}.$$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Combinación lineal

Definición: Un vector $w \in \mathbb{V} - \mathbb{K}$ espacio vectorial, es **combinación lineal** de un conjunto de vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ en $\mathbb{V}$, si existen escalares, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que:

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i}_{\text{notación}} .$$

$\text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ representa el conjunto de todas las combinaciones lineales posibles entre los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Algunos resultados importantes

Observación: Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V} - \mathbb{K}$ espacio vectorial $\Rightarrow$ $\text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es siempre un subespacio de $\mathbb{V}$. Y se nombra como **el subespacio generado** por $v_1, \ldots v_n$.

Para demostrar que este conjunto es un subespacio, tendremos que probar:

a. $\mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in \text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Algunos resultados importantes

Observación: Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V} - \mathbb{K}$ espacio vectorial $\Rightarrow \text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es siempre un subespacio de $\mathbb{V}$. Y se nombra como **el subespacio generado** por $v_1, \ldots v_n$.

Para demostrar que este conjunto es un subespacio, tendremos que probar:

a. $\mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in \text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. De hecho: $\mathbb{O}_{\mathbb{V}} = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$. (Pues $0u = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ en todo espacio vectorial).

Algunos resultados importantes

Observación: Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V} - \mathbb{K}$ espacio vectorial $\Rightarrow \text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es siempre un subespacio de $\mathbb{V}$. Y se nombra como **el subespacio generado** por $v_1, \ldots v_n$.

Para demostrar que este conjunto es un subespacio, tendremos que probar:

a. $\mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in \text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. De hecho: $\mathbb{O}_{\mathbb{V}} = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$. (Pues $0u = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ en todo espacio vectorial).

b. Si $u, w \in \text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, quiero ver qué pasa con $u + v$:

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \text{ y } w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n,$$

con $\lambda_i, \beta_i \in \mathbb{K}, \forall i = 1, \ldots n$.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Algunos resultados importantes

Observación: Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V} - \mathbb{K}$ espacio vectorial $\Rightarrow \text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es siempre un subespacio de $\mathbb{V}$. Y se nombra como **el subespacio generado** por $v_1, \ldots v_n$.

Para demostrar que este conjunto es un subespacio, tendremos que probar:

a. $\mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in \text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. De hecho: $\mathbb{O}_{\mathbb{V}} = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$. (Pues $0u = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ en todo espacio vectorial).

b. Si $u, w \in \text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, quiero ver qué pasa con $u + v$:

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \text{ y } w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n,$$

con $\lambda_i, \beta_i \in \mathbb{K}, \forall i = 1, \ldots n$. Por lo tanto:

$$u + w = (\lambda_1 v_1 + + \cdots + \lambda_n v_n) + (\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n)$$

Aplicando la propiedad asociativa de la suma y agrupando términos:

$$u + w = (\lambda_1 + \beta_1)v_1 + + \cdots + (\lambda_n + \beta_n)v_n \ \in \text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Algunos resultados importantes

Observación: Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V} - \mathbb{K}$ espacio vectorial $\Rightarrow \text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es siempre un subespacio de $\mathbb{V}$. Y se nombra como **el subespacio generado** por $v_1, \ldots v_n$.

Para demostrar que este conjunto es un subespacio, tendremos que probar:

a. $\mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in \text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. De hecho: $\mathbb{O}_{\mathbb{V}} = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$. (Pues $0u = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ en todo espacio vectorial).

b. Si $u, w \in \text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, quiero ver qué pasa con $u + v$:

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \text{ y } w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n,$$

con $\lambda_i, \beta_i \in \mathbb{K}, \forall i = 1, \ldots n$. Por lo tanto:

$$u + w = (\lambda_1 v_1 + + \cdots + \lambda_n v_n) + (\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n)$$

Aplicando la propiedad asociativa de la suma y agrupando términos:

$$u + w = (\lambda_1 + \beta_1)v_1 + + \cdots + (\lambda_n + \beta_n)v_n \ \in \text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$

c. Si $u \in \text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, quiero ver qué pasa con $\lambda\, u$.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Algunos resultados importantes

Observación: Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V} - \mathbb{K}$ espacio vectorial $\Rightarrow \text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es siempre un subespacio de $\mathbb{V}$. Y se nombra como **el subespacio generado** por $v_1, \ldots v_n$.

Para demostrar que este conjunto es un subespacio, tendremos que probar:

a. $\mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in \text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. De hecho: $\mathbb{O}_{\mathbb{V}} = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$. (Pues $0u = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ en todo espacio vectorial).

b. Si $u, w \in \text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, quiero ver qué pasa con $u + v$:

$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \text{ y } w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n,$$

con $\lambda_i, \beta_i \in \mathbb{K}, \forall i = 1, \ldots n$. Por lo tanto:

$$u + w = (\lambda_1 v_1 + + \cdots + \lambda_n v_n) + (\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n)$$

Aplicando la propiedad asociativa de la suma y agrupando términos:

$$u + w = (\lambda_1 + \beta_1)v_1 + + \cdots + (\lambda_n + \beta_n)v_n \;\in \text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$

c. Si $u \in \text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, quiero ver qué pasa con $\lambda\, u$.

Tarea para el hogar.

Generadores y subespacios finitamente generados

De ahora en más los subespacios se presentarán por las condiciones que cumplen sus elementos o por un conjunto de vectores que lo genera.

- El subespacio S de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ se dice que está generado por los vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ si

$$S = gen\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$

- En este caso, $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ será un conjunto generador de S.
- Si S tiene un conjunto generador con finitos elementos entonces se dirá que S es finitamente generado.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Otra observación:

Si S es un subespacio de un $\mathbb{K}$- espacio vectorial $\mathbb{V}$ y $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subset S \Rightarrow \text{gen}\{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subseteq S$.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Otra observación:

Si S es un subespacio de un $\mathbb{K}$- espacio vectorial $\mathbb{V}$ y $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subset S \Rightarrow \text{gen}\{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subseteq S$.

Es una consecuencia directa de la definición de subespacio pues si S es un subespacio la combinación lineal de cualquier par de vectores de S está en S. Por lo tanto, si:

$$v \in \text{gen}\{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \Rightarrow v = \underbrace{\lambda_1 u_1}_{\in S} + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_k u_k$$

$$v = \underbrace{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2}_{\in S} + \cdots + \lambda_k u_k$$

Entonces: Si v es combinación lineal del conjunto $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$, se cumple que $v \in S$:

$$\text{gen}\{u_1, u_2, \ldots, u_k\} \subseteq S$$

El **conjunto generador de un subespacio no es único**. Es fácil verlo en los ejemplos anteriores.

- ¿Cómo pruebo que dos conjuntos distintos generan el mismo subespacio?

Tomemos un ejemplo, que es un caso particular del ejercicio **1.5**. Supongamos que nos preguntamos si los subespacios:

$$S = \text{gen}\left\{e^{3x}\cos(2x), e^{3x}\text{sen}(2x)\right\}$$

$$T = \text{gen}\left\{e^{(3+2i)x},\ e^{(3-2i)x}\right\}$$

que son subespacios del conjunto de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$, son en realidad el mismo subespacio en este $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

Recordemos:

- $e^{(3+2i)x} = e^{3x+i2x} = e^{3x}\cos(2x) + i\ e^{3x}\text{sen}(2x)$
- $e^{(3-2i)x} = e^{3x-i2x} = e^{3x}\cos(-2x) + i\ e^{3x}\text{sen}(-2x)$
- $e^{(3-2i)x} = e^{3x}\cos(2x) - i\ e^{3x}\text{sen}(2x)$

Para demostrar que dos subespacios son iguales, en esta etapa, vamos a demostrar la igualdad entre los conjuntos S y T.

Recordemos:

- $e^{(3+2i)x} = e^{3x+i2x} = e^{3x}\cos(2x) + i\ e^{3x}\operatorname{sen}(2x)$
- $e^{(3-2i)x} = e^{3x-i2x} = e^{3x}\cos(-2x) + i\ e^{3x}\operatorname{sen}(-2x)$
- $e^{(3-2i)x} = e^{3x}\cos(2x) - i\ e^{3x}\operatorname{sen}(2x)$

Para demostrar que dos subespacios son iguales, en esta etapa, vamos a demostrar la igualdad entre los conjuntos S y T.
Vamos a demostrar *la doble inclusión*. O sea, vamos a demostrar que se cumple $S \subseteq T$ y $T \subseteq S$.

a. Veamos que $S \subseteq T$:
El elemento $e^{3x}\cos(2x) \in T$ y $e^{3x}\text{sen}(2x) \in T$, pues

$$e^{3x}\cos(2x) = \frac{1}{2}(e^{(3+2i)x} + e^{(3-2i)x})$$

$$e^{3x}\text{sen}(2x) = \frac{1}{2i}(e^{(3+2i)x} - e^{(3-2i)x})$$

Entonces, como cada uno de los generadores de S está en T, entonces $S \subseteq T$ (1).

b. Veamos ahora que $T \subseteq S$:
Cada generador de T está en el subespacio S. Por definición de la exponencial compleja:

$$e^{(3+2i)x} = \underbrace{e^{3x}\cos(2x) + ie^{3x}\text{sen}(2x)}_{\text{c.l de generadores de } S}$$

$$e^{(3-2i)x} = \underbrace{e^{3x}\cos(2x) + ie^{3x}\text{sen}(2x)}_{\text{c.l de generadores de } S}$$

Entonces, también se cumple $T \subseteq S$ (2).

c. Luego por (1) y (2) $S = T$.

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

Situación interesante

¿Son verdaderas algunas de las siguientes afirmaciones ?

- $\mathbb{R}^2 = \text{gen}\left\{(1\ 1)^T\right\}$
- $\mathbb{R}^2 = \text{gen}\left\{(1\ 1)^T,\ (0\ 1)^T\right\}$
- $\mathbb{R}^2 = \text{gen}\left\{(1\ 1)^T,\ (0\ 1)^T,\ (2\ 3)^T\right\}$
- $\mathbb{R}^2 = \text{gen}\left\{(1\ 1)^T,\ (0\ 1)^T,\ (2\ 3)^T,\ (4\ 3)^T\right\}$

Debido a que salvo en el primer caso, en todos los otros casos la respuesta es que todas las afirmaciones son verdaderas. Esto nos induce a pensar que queremos encontrar un cantidad mínima de generadores para generar cada espacio vectorial. Esto es lo que veremos en el próximo episodio.