Guia 5 . Episodio 19, ep. 20,

?

1 ✓

2 A B C

3

4

5

6

7

8

9

5.1) Comprobar que las matrices son ortogonales

A) $U_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad U_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

Por definición, una matriz $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es ortogonal si verifica $Q^T . Q = I$. / equivalentemente si $U^{-1} = U^T$

$U_1^T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad U_1^T . U_1 = \frac{1}{5} . \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{25} . \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

$U_2^T = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow U_2^T . U_2 = \frac{1}{5} . \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓

Las matrices son ortogonales.

B) Caracterizar la isometría ¿rotación?

¿simetría ortogonal?

Discord Álgebra: " rotación $\rightarrow$ determinante $= 1$ $\quad \rightarrow$ Ver msg de discord
simetría $\rightarrow$ det $= -1$ " (aclaración) = Eko.

Resuelto digi: $Det(U_1) = \ldots = 1$ $\Big\}$ $T(x) = U_1 . x$ es una rotación

Teniendo en cuenta $U = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \cos\theta = 3/5 \\ \operatorname{sen}\theta = -4/5 \end{cases} =$

Los cosenos son positivos en el I y IV cuadrantes, y el seno es negativo en el III y IV cuad.

$\theta \cong 53° 7'$

¿?

II	I
III	IV

Para que esté en el VI cuadrante necesito que $\theta_{rot} = 360° - 53° 7' =$
$306° 52'$

La isometría definida por A es una rotación de $306° 52'$.

¿Entonces busco el ángulo en el IV cuadrante?

$v_2 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \longrightarrow \det = -1 \longrightarrow$ A define una simetría.

Dgi: " Si ~~m~~ un vector v pertenece al eje de simetría, entonces $A.v = v$.

↳ Entonces, el eje de simetría es el generado por el autoespacio asociado al autovalor 1. "

$$Nul\,(A - 1.I) = Nul\begin{pmatrix} 4/5 - 1 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 - 1 \end{pmatrix} = Nul\begin{pmatrix} -1/5 & 3/5 \\ 3/5 & -9/5 \end{pmatrix}$$

Armando el sistema de ecuaciones y resolviendo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +3.f_1 \end{matrix} \Bigg\} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow -x_1 + 3x_2 = 0 \Rightarrow 3x_2 = x_1$$

Eje de simetría: ~~$gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$~~ $gen\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

A es una simetría ortogonal con respecto a la recta generada por $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ~~$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$~~.

HOJA Nº

FECHA

5.2) A) $$U_1 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -6 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \text{¿Es ortogonal?}$$

$U_1^T \cdot U_1 = I$?

$$\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -6 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -6 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{49}\cdot\begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

U_1 es ortogonal.

¿rotación o simetría ortogonal? ¿determinante?

$\mathrm{Det}(U_1) = 1. \longrightarrow$ Rotación.

Digi:

El eje rotación es generado por el autovector asociado al autovalor 1

$$\mathrm{Nul}(A - 1I) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 & -6 & 3 \\ -6 & -10 & -2 \\ 3 & -2 & -13 \end{pmatrix} \rightarrow$$ Desarrollo el sistema de ecuaciones igualando a cero.

$$\left(\begin{matrix} -5 & -6 & 3 \\ -6 & -10 & -2 \\ 3 & -2 & -13 \end{matrix}\right) \begin{matrix} \\ \cdot 5 - 6 f_1 \\ \cdot 2 + f_2 \end{matrix} \quad \left(\begin{matrix} -5 & -6 & 3 \\ 0 & 14 & 8 \\ 0 & -14 & -28 \end{matrix}\right) \begin{matrix} \\ /2 \\ + f_2 \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} -5 & -6 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}$$

$$\ldots \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} x_1 - 3x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 3x_3 \\ x_2 &= -2x_3 \end{aligned}$$

$$\mathrm{gen}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

↳ Busquemos su normal $\overset{9}{3 \cdot 3} + (-2)(-2) + 1 \cdot 1 = 14$

$$\frac{v}{\|v\|} = v_{normal} \qquad \begin{pmatrix} 3/\sqrt{14} \\ -2/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{14} \end{pmatrix} \rightarrow \cancel{\begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{14}}{14} \\ \frac{-2\sqrt{14}}{14} \\ \frac{1\sqrt{14}}{14} \end{pmatrix}} \quad \begin{pmatrix} 3/\sqrt{14} \\ -2/\sqrt{14} \\ 1/\sqrt{14} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\|v\| = 1$$

NOTA

Autovalores de A) $\quad Nul(A - \lambda . I) = \sigma(A)$

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -6 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2/7 - \lambda & -6/7 & 3/7 \\ -6/7 & -3/7 - \lambda & -2/7 \\ 3/7 & -2/7 & -6/7 - \lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} 2/7 - \lambda & -6/7 \\ -6/7 & -3/7 - \lambda \\ 3/7 & -2/7 \end{matrix}$$

$$+ \left(\frac{2}{7} - \lambda\right)\left(-\frac{3}{7} - \lambda\right)\left(-\frac{6}{7} - \lambda\right)^{(1)} + \left(-\frac{6}{7}\right)\left(-\frac{2}{7}\right)\left(\frac{3}{7}\right)^{(2)} + \frac{3}{7}\left(-\frac{6}{7}\right)\left(-\frac{2}{7}\right)^{(3)}$$

$$- \left(\frac{3}{7}\right)\left(-\frac{3}{7} - \lambda\right)\left(\frac{3}{7}\right) - \left(-\frac{2}{7}\right)\left(-\frac{2}{7}\right)\left(\frac{2}{7} - \lambda\right) - \left(-\frac{6}{7} - \lambda\right)\left(-\frac{6}{7}\right)\left(-\frac{6}{7}\right)$$

$$(1) \quad \Big(-\frac{6}{49} \underbrace{- \frac{2}{7}\lambda + \frac{3}{7}}_{1/7\,\lambda} + \lambda^2\Big)\left(-\frac{6}{7} - \lambda\right) \longrightarrow \frac{36}{343} - \frac{6}{49}\cdot\lambda - \frac{6}{7}.\lambda^2 + \frac{6}{49}.\lambda$$

$$+ \frac{1}{7}.\lambda^2 - \lambda^3 \quad (1)$$

$(2)\ \frac{36}{343} \qquad (3)\ \frac{18}{343}$

$$+ \quad -\lambda^3 - \frac{5}{7}.\lambda^2 + \frac{90}{343}$$

$$+ \left(+\frac{27}{343} + \frac{9}{49}\lambda\right) + \left(-\frac{8}{343} + \frac{4}{49}.\lambda\right) + \left(+\frac{36}{49}\lambda + \frac{216}{343}\right)$$

$$= -\lambda^3 - \frac{5}{7}.\lambda^2 + \lambda + \frac{325}{343} = 0$$

$x_1 =$

$x_2 =$ Número complejo

$x_3 =$ Número complejo

?

5.2) B) $v_2 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$ $\quad v_2 \cdot v_2^T = I$

$$\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -6 \end{pmatrix} = \frac{1}{49}\begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Det}(v_2) = 1 \longrightarrow$ Rotación

Buscamos el eje de rotación es generado por el autovecto correspondiente al autovalor = 1.

$$\mathrm{Nul}(v_2 - I) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -9 & 6 & 3 \\ 6 & -4 & -2 \\ -3 & 2 & -13 \end{pmatrix}$$

Resuelvo el sistema de ecuaciones igualas a cero:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ -3 & 2 & -13 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ +r_1 \\ -r_1 \end{matrix} \Bigg\} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} -3x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{matrix}$$

$2x_2 = 3x_1$

$\mathrm{gen}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ Eje de rotación

Vector con norma = 1 : $\sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$

$v_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{13} \\ 3/\sqrt{13} \\ 0 \end{pmatrix}$

Una vez que tengo el vector directo de norma 1, ¿busco un ortogonal?

Por ejemplo $v_2 = \begin{pmatrix} -3/\sqrt{13} \\ 2/\sqrt{13} \\ 0 \end{pmatrix}$?

$v_3 = v_1 \times v_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Con v_1, v_2, v_3 puedo construir P

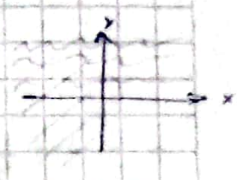
$$\begin{pmatrix} 2/\sqrt{13} & -3/\sqrt{13} & 0 \\ 3/\sqrt{13} & 2/\sqrt{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{T} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ 0 & \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.857 & -0.515 \\ 0 & 0.515 & -0.857 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{Según DC Algebra!} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6/7 & -\sqrt{13}/7 \\ 0 & \sqrt{13}/7 & -6/7 \end{pmatrix}$$

$\cos\theta = -6/7$

$\text{sen} = \sqrt{13}/7$



$\theta = 148^\circ\ 59'$ ✓?

El ángulo está en el II cuadrante.

c) $u_3 = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ -6 & -2 & -3 \\ 3 & -6 & -2 \end{pmatrix}$

¿Es ortogonal? ¿$u_3^T \cdot u_3 = I$?

$$\frac{1}{49}\begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$\text{Det}(u_3) = -1 \longrightarrow$

NOTA