Parcial resuelto Algebra II del 28-5-22

Una posible resolución[1].

---

1. Como las dimensiones de $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ coinciden, buscar el suplemento común tiene sentido. Ya que la suma debe dar $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$, lo primero es ver quien es tal subespacio, por ejemplo ubicando sus generadores. Primeramente vamos a calcular la intersección, $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$, si ésta tiene dimensión uno, entonces la de la suma será tres, y si la intersección es la trivial, la suma será todo $\mathbb{R}^4$. Igualando dos vectores genéricos de $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$:

$$\alpha \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\alpha \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix} - \delta \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = 0,$$

en forma matricial, el sistea queda:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \mapsto_{Gauss-Jordan} \begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

de donde se deduce

$$\begin{aligned} \alpha + \beta - 2\gamma - \delta = 0 & \qquad \cdots \\ \beta - \gamma = 0 \mapsto & \qquad \cdots \\ 2\gamma + \delta = 0 & \qquad \delta = -2\gamma \end{aligned}$$

información que reemplazando en el vector genérico de arriba (en el miembro derecho de la primera ecuación) nos dice que la intersección es

$$\gamma \begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix} - 2\gamma \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

o sea que $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2 = gen \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\}$, con este dato podemos considerar bases de los subespacios

[1] Cualquier error u omision avisar a gpalau@fi.uba.ar

de forma que luego nos resulte fácil conseguir una base del subespacio suma suma:

$$B_{\mathbb{S}_1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_{\mathbb{S}_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

notar que en los últimos vectores de cada base son simplemente otro vector de cada subespacio linealmente independiente con el primero. Luego una base de la suma es

$$B_{\mathbb{S}_1+\mathbb{S}_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Como se deduce de las dimensiones de los subespacios, el suplemento común $\mathbb{T}$ debe ser de dimensión uno. Como queremos que $\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2$, podría pensar que puedo tomar un $\mathbb{T}$ tal que su base sea $B_{\mathbb{T}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ pero un $\mathbb{T}$ así no cumpliría $\mathbb{S}_2 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2$. Una opción para que esto no pase es (como vimos en clase) sumar los últimos vectores de las bases de $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$. Entonces:

$$\mathbb{T} = gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = gen \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

este suplemento no es único, pues puedo tomar otro que tenga como generador otra combinación lineal no nula de los últimos dos vectores básicos de $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$, por ejemplo:

$$\mathbb{T} = gen \left\{ 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = gen \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

---

2. Lo primero que voy a haremos es poner la ecuación que queremos resolver en coordenadas de la base C, o sea

$$T(p) = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \mapsto [T(p)]^C = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}^C,$$

Por otra parte sabemos que la matriz de T en bases B, C funciona de la siguiente forma $[T]_B^C(p)^B = (T(p))^C$ que como sabemos es $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}^C$, entonces calculemos eso

$$\begin{pmatrix}6\\6\\6\end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

resolviendo quedan $\alpha = 6$, $\beta = 6$ (sale a ojo) y $\gamma = 0$. Entonces teniendo en cuenta los comentarios de más arriba, y llamando $(p)^B = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ legamos al sistema:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix},$$

que triangulando termina dando $a = 6$, $b + c = 0$, de forma que $(p)^B = \begin{pmatrix}6\\b\\-b\end{pmatrix}$, y usando estas coordenadas obtenemos que

$$\begin{aligned}
p(x) &= 6(1+x) + b(1-x) - b(1-x+x^2)\\
p(x) &= -bx^2 + 6x + 6 \qquad \text{con } b \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

---

3. Una base del plano (llamemosle Π) respecto al cual simetrizamos es $B_\Pi = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} \right\}$ (sale a ojo de la ecuación). Y nosotros debemos transformar el subespacio $x_3 = 0$ (llamemosle $\mathbb{S}$), que también paso a generadores y lo escribo como

$$\mathbb{S} = gen \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\},$$

y como sabemos para $\Sigma(\mathbb{S}) = gen \left\{ \Sigma \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \Sigma \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$.

Para calcular $\Sigma \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ debemos descomponer al $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ como suma de un vector en Π (que llamaré u_Π) y otro en la recta generada por el $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ que llamaré u_R,

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = u_\Pi + u_R,$$

en estas condiciones la simetría aplica cambiando el signo del vector que vive en la recta

$$\Sigma \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = u_\Pi - u_R,$$

calculemos de una vez u_Π y u_R:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} &= u_\Pi + u_R\\ &= \left(a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right) + c\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

de acá sale que $a = 1$ (este se ve a ojo), $b = -\frac{1}{3}$ y $c = \frac{2}{3}$, resultando entonces

$$\begin{aligned}u_\Pi &= \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}\\ u_R &= \frac{2}{3}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix},\end{aligned}$$

y como se había dicho, $\Sigma\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ es la resta de estos vectores:

$$\Sigma\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-\frac{4}{3}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}.$$

Repitiendo el mismo procedimiento uno puede ver que

$$\Sigma\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix},$$

para concluir que

$$\Sigma(\mathbb{S}) = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\-\frac{4}{3}\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}\right\} = gen\left\{\begin{pmatrix}3\\-4\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

---

4. Como sabemos la distancia de un vector a un subespacio se puede calcular o bien proyectando sobre el propio subespacio, o bien sobre el ortogonal

$$d\left(\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}, \mathbb{S}\right) = \left\|\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix} - P_\mathbb{S}\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}\right\| = \left\|P_{\mathbb{S}^\perp}\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}\right\|,$$

en este caso usaremos $P_{\mathbb{S}^\perp}\begin{pmatrix}3\\3\\1\end{pmatrix}$ motivados en el hecho de que $1 = dim(\mathbb{S}^\perp) < dim(\mathbb{S}) = 2$. Para hallar $\mathbb{S}^\perp = gen\{u\}$, tenemos en cuenta que se deben cumplir las condiciones de ortogonalidad (en las que llamamos $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$):

$$0 = \langle u, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 3a - 2b + 2c$$
$$0 = \langle u, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 2a + 2b + 3c$$

con ambos generadores de $\mathbb{S}$, notar que $\mathbb{S} = gen \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Este sistema de ecuaciones para a, b y c tiene una recta de soluciones con generador (que tomaremos como u) $u = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Luego usamos la formula de proyección a un subespacio de dimensión 1:

$$P_{\mathbb{S}^\perp} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle}{\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-10}{10} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

en donde los productos internos que figuran arriba fueron calculados mediante el producto interno del enunciado, es decir vía la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Para terminar hay que calcular la norma de esta proyección:

$$d\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbb{S} \right) = \left\| P_{\mathbb{S}^\perp} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle}$$
$$= \sqrt{\langle \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle} = \sqrt{10}$$

---

5. Si la recta $y = mx + b$ ajustara todos los datos de la tabla perfectamente, entonces

$$m(-2) + b = -2$$
$$m(-1 + b = -1$$
$$\vdots$$
$$m2 + b = 5,$$

que en forma matricial quedaría

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},$$

dicho sistema es incompatible como se puede ver fácilmente (hecho que responde a que no hay recta que pase por todos los puntos de la tabla ya que no están alineados). La receta de mínimos cuadrados consiste en multiplicar por la traspuesta de la matriz a ambos lados de la ecuación para lograr un sistema compatible:

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 6 \end{pmatrix},$$

de donde sale que $m = \frac{23}{10}$ y $b = \frac{6}{5}$, o sea la recta es $y = \frac{23}{10}x + \frac{6}{5}$

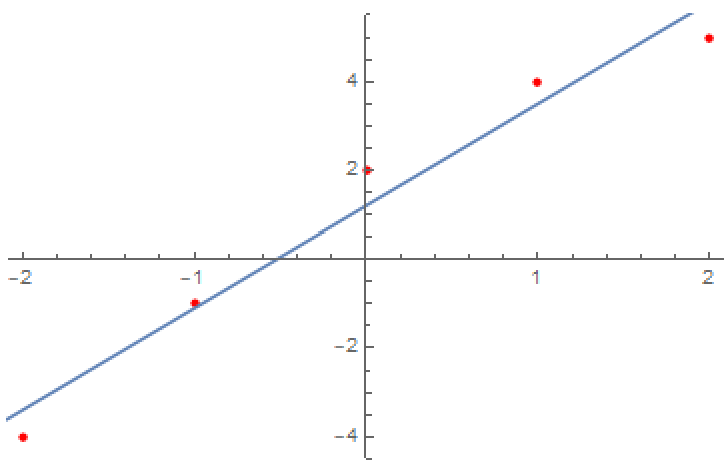

Figura 1: Regresión lineal.