ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Evaluación integradora
Duración: 3 horas.

Primer cuatrimestre – 2023
5/VII/23 – 9:00 hs.

Apellido y Nombres:

Legajo:

Curso:

---

1. En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico se considera el subespacio

$$\mathbb{S} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\right\}.$$

Sea $\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{S}$. Hallar todos los $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $\Pi(x) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}^T$ cuya distancia al origen sea igual a 10.

---

2. Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que traza$(A) = 3$ y

$$A^2 + 2A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 10 \end{bmatrix}.$$

---

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz simétrica tal que $\operatorname{nul}(A - I) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\right\}$ y traza$(A) = \frac{5}{2}$. Hallar $\lim\limits_{k\to\infty} A^k \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}^T$.

---

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la isometría definida por $T(x) = Ux$, donde U es la matriz ortogonal definida por

$$U = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Comprobar que T es una simetría ortogonal y determinar el subespacio respecto del cual se realiza la simetría.

---

5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$, donde

$$A = \frac{2}{9}\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 8 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 4 & -7 \end{bmatrix}.$$

Hallar entre todos los $x \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen $\|x\| = 1$, aquellos que minimizan $\|T(x)\|$ y determinar el valor $\min\limits_{\|x\|=1} \|T(x)\|$.