09.08.2023

3ª

1. En $\mathbb{R}^3$ con el pie se considera

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & -6 & 0 \\ 8 & 8 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular $\operatorname{dist}(v, \operatorname{Col} A)$, $v = (-1\ -1\ \ 1)^T$.

1º.) Para determinar la dim (Col A) calculamos el Nul A.

$\operatorname{Nul} A = \{ x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0_{\mathbb{R}^3} \}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & -6 & 0 \\ 8 & 8 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -6 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 2 & 2 & 0 \\ \hline 3 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} 24 & 40 & 24 & 8 & 0 \\ -24 & -24 & -6 & -6 & 0 \\ \hline 0 & 16 & 18 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ \quad 8x_2 + 9x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Restando: $3x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 0$ dividiendo por 3

$x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$

$x_1 = x_2 + 2x_3$

$3(x_2 + 2x_3) + 5x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$; $8x_2 + 9x_3 + x_4 = 0$

$x_4 = -8x_2 - 9x_3$ $\quad \dim(\operatorname{Nul} A) = \dim(\operatorname{Col} A) = 2$

Para una base de Col A

$(5\ -3\ \ 8)^T - (3\ \ 3\ \ 8)^T = (2\ -6\ \ 0)^T$, un vector puede ser: $(1\ -3\ \ 0)^T$ y otro, $(1\ \ 0\ \ 2)^T$;

$B_{\operatorname{Col} A} = \{ (1\ -3\ \ 0)^T, (1\ \ 0\ \ 2)^T \}$

2º) $\operatorname{dist}(v, \operatorname{Col} A) = \| \operatorname{Proy}_{(\operatorname{Col} A)^\perp}(v) \|$.

Buscamos un vector ortogonal a los de Col (pvc)

$(1\ -3\ \ 0)^T \times (1\ \ 0\ \ 2)^T = (-6\ -2\ \ 3)^T$; $(\operatorname{Col} A)^\perp = \operatorname{gen}\{(-6\ -2\ \ 3)^T\}$

$$\| \operatorname{Proy}_{(\operatorname{Col} A)^\perp}(-1\ -1\ \ 1)^T \| = \frac{|\langle (-1\ -1\ \ 1)^T, (-6\ -2\ \ 3)^T \rangle|}{7} = \frac{1}{7}|11| = \frac{11}{7}$$

09.08.2023

2/ Hallar, si existe, una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que traza $(A) = -6$ y $A^2 + 3A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1º) Sea $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Sus autovalores:

$$\det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 9 = (1-\lambda-3)(1-\lambda+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (-2-\lambda)(4-\lambda) = -(2+\lambda)(4-\lambda) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 = 4 \quad ; \quad \lambda_2 = -2$$

Sea $f(A) = A^2 + 3A = B$ Entonces para cada autovalor λ de $f(A)$ existe un autovalor γ de A tal que $f(\gamma) = \lambda$.

Para $\lambda_1 = 4$: $f(\gamma) = \gamma^2 + 3\gamma = 4$

$$\gamma^2 + 3\gamma - 4 = 0$$

$$\gamma = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \begin{cases} \gamma = -4 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

Para $\lambda_2 = -2$: $f(\gamma) = \gamma^2 + 3\gamma = -2$

$$\gamma^2 + 3\gamma + 2 = 0$$

$$\gamma = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \begin{cases} \gamma = -1 \\ \gamma = -2 \end{cases}$$

Posibles espectros de A : $\{\gamma_1 = -4 \; ; \; \gamma_2 = -1\}$
$\{\gamma_1 = -4 \; ; \; \gamma_2 = -2\}$
$\{\gamma_1 = 1 \; ; \; \gamma_2 = -1\}$
$\{\gamma_1 = 1 \; ; \; \gamma_2 = -2\}$

de los cuales sólo el segundo verifica la condición traza $(A) = \gamma_1 + \gamma_2 = -4 - 2 = -6$.

luego $\sigma(A) = \{\gamma_1 = -4 \; ; \; \gamma_2 = -2\}$

2º) Los autoespacios de A son los mismos que los de B

2 (cont.)

El autoespacio de B asociado a $\lambda_1 = 4$

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_1 = x_2$$

$$S_{\lambda_1 = 4}(B) = S_{\mu_1 = -4}(A) = \text{gen}\{(1 \quad 1)^T\}$$

El autoespacio de B asociado a $\lambda_2 = -2$ es ortogonal al anterior por ser $B^T = B$:

$$S_{\lambda_2 = -2}(B) = S_{\mu_2 = -2}(A) = \text{gen}\{(-1 \quad 1)^T\}$$

Entonces existe $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, $P^{-1} = P^T$,

$$B = P D_B P^T$$

$$y \quad A = P D_A P^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= -1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 3:

Hallar la matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que:

- $\{(1\ 1\ 0)^T ; (2\ 1\ 2)^T\} \subset Nul(A - \mathbb{I})$ y
- $Tr(A) = 1$

$\{(1\ 1\ 0)^T ; (2\ 1\ 2)^T\} \subset gen\{(1\ 1\ 0)^T ; (2\ 1\ 2)^T\} = Nul(A - \mathbb{I})$

Entonces:

$\lambda = 1$ es autovalor doble de $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, simétrica, y el subespacio propio asociado es:

$S_{\lambda_1 = 1} = gen\{v_1 = (1\ 1\ 0)^T ; v_2 = (2\ 1\ 2)^T\}$

- Además, como $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es simétrica es diagonalizable y los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales entre sí.

i) como $Tr(A) = 1 = 1 + 1 + \lambda_2 = 1 \Rightarrow \lambda_2 + 1 = 0$

$\Rightarrow \boxed{\lambda_2 = -1}$

ii) el subespacio propio $S_{\lambda_2 = -1}$ tiene dimensión 1 y es ortogonal a $S_{\lambda = 1}$.

Sea $v_3 \in S_{\lambda_2 = -1}$ tal que $v_3 = (x_1\ x_2\ x_3)^T$

Entonces:

$(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 ;\ (1)$

$(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 ;\ (2)$

Resolviendo el sistema de Ecs. (1)-(2) resulta:

$v_3 = (2\ -2\ -1)^T$

$S_{\lambda_2 = -1} = gen\{v_3 = (2\ -2\ -1)^T\}$

Entonces:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad P = [v_1\ v_2\ v_3] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 1/9 & -1/9 & 4/9 \\ 2/9 & -2/9 & -1/9 \end{pmatrix}$$

La matriz A buscada es:

$$A = P \Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 1/9 & -1/9 & 4/9 \\ 2/9 & -2/9 & -1/9 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & -7 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 4:

Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por:

$$A = \frac{2}{9}\begin{pmatrix}-1\\8\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -6 & 3\end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix}4\\4\\-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 3 & 9\end{pmatrix} \; ; \; (1)$$

Hallar todas las soluciones por cuadrados mínimos de la Ec. $Ax = (1\ 0\ -1)^T$ y determinar la de norma mínima

- Notar que los vectores:

i) $(-1\ 8\ 4)\begin{pmatrix}4\\4\\-7\end{pmatrix} = 0$ son ortogonales

ii) $(2\ -6\ 3)\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix} = 0$ son ortogonales

Entonces, la Ec. (1) puede ser reescrita;

$$A = \frac{2}{9}\, 9\begin{pmatrix}-1/9\\8/9\\4/9\end{pmatrix} 7\left(\frac{2}{7}\ \ -\frac{6}{7}\ \ \frac{3}{7}\right) + \frac{1}{9}\, 9\begin{pmatrix}4/9\\4/9\\-7/9\end{pmatrix} 7\left(\frac{6}{7}\ \ \frac{3}{7}\ \ \frac{2}{7}\right)$$

$$A = \underbrace{14\begin{pmatrix}-1/9\\8/9\\4/9\end{pmatrix}\left(\frac{2}{7}\ \ -\frac{6}{7}\ \ \frac{3}{7}\right)}_{\sigma_1 u_1 v_1^T} + \underbrace{7\begin{pmatrix}4/9\\4/9\\-7/9\end{pmatrix}\left(\frac{6}{7}\ \ \frac{3}{7}\ \ \frac{2}{7}\right)}_{\sigma_2 u_2 v_2^T}$$

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}-1 & 4\\8 & 4\\4 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14 & 0\\0 & 7\end{pmatrix}\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2 & -6 & 3\\6 & 3 & 2\end{pmatrix} \; ; \; (2)$$

La Ec. (2) es una DVS reducida de A, siendo:

$$U_r = \begin{pmatrix}-1/9 & 4/9\\8/9 & 4/9\\4/9 & -7/9\end{pmatrix} \quad \Sigma_r = \begin{pmatrix}14 & 0\\0 & 7\end{pmatrix}; \quad V_r = \begin{pmatrix}2/7 & 6/7\\-6/7 & 3/7\\3/7 & 2/7\end{pmatrix}$$

La pseudoinversa de Moore - Penrose es:

$$A^{+} = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/14 & 0 \\ 0 & 1/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{+} = \frac{1}{441} \begin{pmatrix} 23 & 32 & -38 \\ 15 & -12 & -33 \\ 13/2 & 20 & -8 \end{pmatrix}}$$

La solución por cuadrados mínimos de norma mínima es:

$$\hat{x}_{min} = A^{+} b = \frac{1}{441} \begin{pmatrix} 23 & 32 & -38 \\ 15 & -12 & -33 \\ 13/2 & 20 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\hat{x}_{min} = \frac{1}{441} \begin{pmatrix} 61 \\ 48 \\ 29/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{882} \begin{pmatrix} 122 \\ 96 \\ 29 \end{pmatrix}}$$

- calculamos $Nul(A) = Nul(A^T A) = Fil(A)^{\perp}$

$Fil(A) = gen\{ \tilde{v}_1 = (2 \ -6 \ 3)^T ; \ \tilde{v}_2 = (6 \ 3 \ 2)^T \}$

$Nul(A)$ es el complemento ortogonal de $Fil(A)$

$Nul(A) = gen\{ (-3 \ 2 \ 6)^T \}$

$\therefore$

Todas las soluciones por cuadrados mínimos de la Ec. $Ax = (1 \ 0 \ -1)^T$ son:

$$\boxed{x = \frac{1}{882} \begin{pmatrix} 122 \\ 96 \\ 29 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} ; \quad \alpha \in \mathbb{R}}$$

09.08.2023

5/ Sea $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $S = \{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0 \}$ en la dirección de la recta $T = gen \{ (1\ 1\ 1)^T \}$.

Hallar y graficar la imagen por π de la esfera unitaria de $\mathbb{R}^3$.

1º) La transformación π

$$\pi(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in S \\ 0_{\mathbb{R}^3} & \text{si } x \in T \end{cases}$$

una base de S : $B_S = \{ (0\ 1\ 0)^T, (0\ 0\ 1)^T \}$

una base de T : $B_T = \{ (1\ 1\ 1)^T \}$

$B = B_S \cup B_T = \{ (0\ 1\ 0)^T, (0\ 0\ 1)^T, (1\ 1\ 1)^T \}$ base de $\mathbb{R}^3$

$$[\pi]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$. Para obtener $[\pi]_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^3}}$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "{[\pi]_B}"] & B \arrow[d, "P"] \\ \mathcal{E}_{\mathbb{R}^3} \arrow[u, "P^{-1}"] \arrow[r] & \mathcal{E}_{\mathbb{R}^3} \end{tikzcd}$$

$$[\pi]_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^3}} = P\,[\pi]_B\,P^{-1}$$

$$[\pi]_{\mathcal{E}_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

2º) $$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

los autovalores de $A^T A$:

$$\det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1+\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -2 \\ -1 & 1-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -(1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda - 1)\left[(2-\lambda)(1-\lambda) - 2 \right] =$$

(cont.) 09.08.2023

$= (\lambda - 1)(\cancel{2} - 3\lambda + \lambda^2 \cancel{- 2}) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 3)$

$\sigma(A^T A) = \{ \lambda_1 = 3 \; ; \; \lambda_2 = 1 \; ; \; \lambda_3 = 0 \}$.

Los valores singulares de A:

$\sigma_1 = \sqrt{3} \; ; \; \sigma_2 = 1 \; ; \; \sigma_3 = 0$.

Los autoespacios de $A^T A$:

- $\lambda_1 = 3$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-x_1 - 2x_2 = 0$
$x_1 = -2x_2$
$-x_1 - 2x_3 = 0$
$x_1 = -2x_3$

$\Rightarrow x_2 = x_3$

$S_{\lambda_1 = 3}(A^T A) = \text{gen}\{(-2 \;\; 1 \;\; 1)^T\}$

- $\lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 0$
$-x_2 - x_3 = 0$
$x_3 = -x_2$

$S_{\lambda_2 = 1}(A^T A) = \text{gen}\{(0 \;\; 1 \;\; -1)^T\}$

- $\lambda_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-x_1 + x_2 = 0$
$x_2 = x_1$
$-x_1 + x_3 = 0$
$x_3 = x_1$

$S_{\lambda_3 = 0}(A^T A) = \text{gen}\{(1 \;\; 1 \;\; 1)^T\}$

3º) La DVS de A: $A = U \Sigma V^T$

con $\Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $V = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$$u_1 = \frac{Av_1}{\sigma_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{Av_2}{\sigma_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} ; \; U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

5 [cont]

09.08.2023

con el cambio de variable $x = Vy$ y $\|x\| = \|Vy\| = \|y\|$

$$z = Ax = AVy = U\Sigma(V^T V)y = U\Sigma y$$

$$z = u_1 \underbrace{\sigma_1 y_1}_{\omega_1} + u_2 \underbrace{\sigma_2 y_2}_{\omega_2} \quad y \quad \omega_3 = 0$$

$$\omega_1 = \sigma_1 y_1 \quad ; \quad \omega_2 = \sigma_2 y_2$$

$$y_1 = \frac{\omega_1}{\sigma_1} \quad ; \quad y_2 = \frac{\omega_2}{\sigma_2}$$

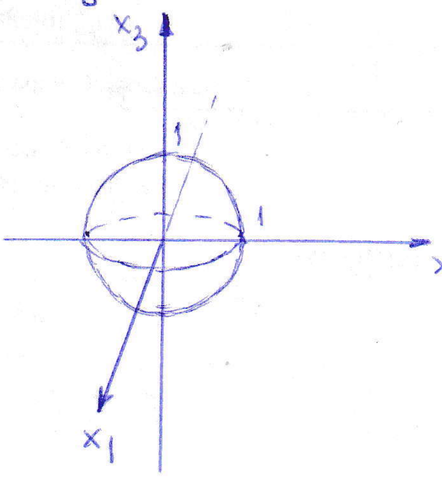
siendo $\|y\|^2 = 1$, la imagen de la esfera unitaria de $\mathbb{R}^3$ es $\frac{\omega_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\omega_2^2}{\sigma_2^2} \leq 1$

esto es $\frac{\omega_1^2}{3} + \omega_2^2 \leq 1$ elipse con su interior contenida en el plano

$$\text{Col } A = \text{gen}\{(0\ 1\ 0)^T, (0\ 0\ 1)^T\} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0\} = \pi$$

El eje mayor está dirigido por $u_1 = (0\ \ 1/\sqrt{2}\ \ 1/\sqrt{2})^T$ y su longitud es $2\sigma_1 = 2\sqrt{3}$

y el eje menor está dirigido por $u_2 = (0\ \ 1/\sqrt{2}\ \ -1/\sqrt{2})^T$ y su longitud es $2\sigma_2 = 2$



$\xrightarrow{\pi}$