ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Evaluación integradora
Duración: 3 horas.

Primer cuatrimestre – 2023
5/VII/23 – 9:00 hs.

Apellido y Nombres:

Legajo:

Curso:

---

1. En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico se considera el subespacio

$$\mathbb{S} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\right\}.$$

Sea $\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{S}$. Hallar todos los $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $\Pi(x) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}^T$ cuya distancia al origen sea igual a 10.

---

2. Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que traza$(A) = 3$ y

$$A^2 + 2A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 10 \end{bmatrix}.$$

---

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz simétrica tal que $\operatorname{nul}(A - I) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\right\}$ y traza$(A) = \frac{5}{2}$. Hallar $\lim\limits_{k\to\infty} A^k \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}^T$.

---

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la isometría definida por $T(x) = Ux$, donde U es la matriz ortogonal definida por

$$U = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Comprobar que T es una simetría ortogonal y determinar el subespacio respecto del cual se realiza la simetría.

---

5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$, donde

$$A = \frac{2}{9}\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 8 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 4 & -7 \end{bmatrix}.$$

Hallar entre todos los $x \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen $\|x\| = 1$, aquellos que minimizan $\|T(x)\|$ y determinar el valor $\min\limits_{\|x\|=1} \|T(x)\|$.

Ejercicio 1:

En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico se considera el subespacio $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$.
Sea $\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre S.
Hallar todos los $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $\Pi(x) = (4\ -2\ 4)^T$ cuya distancia al origen es igual a 10.

- El subespacio ortogonal a S es:

$$\boxed{S^{\perp} = \text{gen}\{(2\ 2\ -1)^T\}}$$

- $\forall x \in \mathbb{R}^3$ se puede expresar en forma única como:

$$x = P_S(x) + P_{S^\perp}(x)$$

$$x = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad ; (1)$$

Además

$$d(x, 0_{\mathbb{R}^3}) = \|x - 0_{\mathbb{R}^3}\| = \|x\| \Rightarrow d^2(x, 0_{\mathbb{R}^3}) = \|x\|^2 = 100$$

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = (4\ -2\ 4)\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha^2 (2\ 2\ -1)\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 100$$

$$36 + \alpha^2 9 = 100 \Rightarrow \alpha^2 9 = 64 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{64}{9} = \boxed{\alpha = \pm \frac{8}{3}}$$

Entonces, reemplazando en (1), los $x \in \mathbb{R}^3$ que cumplen lo pedido son:

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \pm \frac{8}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

$$x = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 28 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad x = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -4 \\ -22 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2:

Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que:

- $Tr(A) = 3$
- $A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 10 \end{pmatrix} = p(A) = B$

1º) Hallamos autovalores y autovectores de B

$\det(B - \mu \mathbb{I}) = 0 \Rightarrow \mu_1 = 8$
$\mu_2 = 3$

$\sigma(B) = \{ \mu_1 = 8 ; \mu_2 = 3 \}$

$S_{\mu_1 = 8} = gen \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}; \quad S_{\mu_2 = 3} = gen \left\{ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$\Lambda_B = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad P = [v_1 \, v_2] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}; \quad P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$

2º) Usamos el siguiente teorema:

Dado un polinomio $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k$ y una matriz $A \in K^{n\times n}$, entonces:

1) Si λ es autovalor de A asociado al autovector v $\Rightarrow$ $p(\lambda)$ es autovalor de $p(A) = B$ asociado al mismo autovector v

2) Para cada autovalor μ de $p(A) = B$ existe un autovalor λ de A tal que $p(\lambda) = \mu$.

Entonces hallamos los posibles autovalores de A:

$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda$

para $\mu_1 = 8$

$$\lambda_1^2 + 2\lambda_1 = 8 \Rightarrow \lambda_1^2 + 2\lambda_1 - 8 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2}$$

$$\lambda_1 = \frac{-2 \pm 6}{2} \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \text{ó} \\ \lambda_1 = -4 \end{cases} \quad ; \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

para $\mu_2 = 3$:

$$\lambda_2^2 + 2\lambda_2 = 3 \Rightarrow \lambda_2^2 + 2\lambda_2 - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{-2 \pm 4}{2} \begin{cases} \lambda_2 = 1 \\ \text{ó} \\ \lambda_2 = -3 \end{cases} \quad ; \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

como $Tr(A) = 3$, entonces:

$$\lambda_1 = 2 \; ; \; \lambda_2 = 1 \quad ; \quad \Lambda_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3º) si definimos:

$$A = P \Lambda P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/5 & 1/5 \\ 7/5 & -2/5 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 \\ -7/5 & 12/5 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 3:

Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ la matriz simétrica tal que:

i) $Nul(A - \mathbb{I}) = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$

ii) $Tr(A) = \frac{5}{2}$

Hallar $\lim_{k\to\infty} A^k (0\ 9\ 0)^T$

- De la condición i) se obtiene que $\lambda = 1$ es autovalor de la matriz A y como:

$$S_{\lambda=1} = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\} = gen\left\{v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}; v_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

Entonces $\lambda = 1$ es autovalor doble de A; $(\dim S_{\lambda=1}) = 2$

- como $Tr(A) = \frac{5}{2} = 2\lambda_1 + \lambda_2 \Rightarrow 2.1 + \lambda_2 = \frac{5}{2}$

$\Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 1/2}$

- como A es simétrica, los autovectores de A asociados a autovalores distintos son ortogonales, entonces:

$$S_{\lambda_2 = 1/2} = gen\left\{v_3 = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$\therefore$ El espectro de A es:

$$\sigma(A) = \{\lambda_1 = 1 \text{ (doble)}; \lambda_2 = 1/2 \text{ (simple)}\}$$

- como $B = \{v_1 = (1\ 2\ 0)^T; v_2 = (0\ 2\ 1)^T; v_3 = (2\ -1\ 2)^T\}$

Es base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de A resulta:

$$\begin{pmatrix}0\\9\\0\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma = 0 & ; \quad (1) \\ 2\alpha + 2\beta - \gamma = 9 & ; \quad (2) \\ \beta + 2\gamma = 0 & ; \quad (3) \end{cases}$$

de (1) y (3):

$\alpha - \beta = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \beta}$

$\alpha = -2\gamma$

$\beta = -2\gamma$

de (2):

$-4\gamma - 4\gamma - \gamma = 9 \Rightarrow -9\gamma = 9 \Rightarrow \boxed{\gamma = -1} \Rightarrow \boxed{\alpha = \beta = 2}$

$\therefore$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = 2v_1 + 2v_2 - v_3$$

$$A^k \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = 2A^k v_1 + 2A^k v_2 - A^k v_3$$

$$A^k \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = 2(1)^k v_1 + 2(1)^k v_2 - \left(\frac{1}{2}\right)^k v_3$$

$$\lim_{k \to \infty} A^k \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = 2v_1 + 2v_2 = 2(v_1 + v_2) = 2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\boxed{\lim_{k \to \infty} A^k \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Ejercicio 4:

Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la isometría definida por $T(x) = \mathcal{U}x$, donde $\mathcal{U}$ es la matriz ortogonal definida por:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Comprobar que T es una simetría ortogonal y determinar el subespacio respecto del cual se realiza la simetría

1º) Para comprobar que T es simetría ortogonal:

Se debe verificar que:

i) $\mathcal{U}^T = \mathcal{U}$ (se cumple, pues $\mathcal{U}$ es simétrica)

ii) $\mathcal{U}^2 = \mathbb{I}$; $\mathcal{U}^2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix} \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix} = \mathbb{I}$

2º) Como $\mathcal{U}$ es una simetría ortogonal, sus autovalores sólo pueden ser $\lambda = 1$ ó $\lambda = -1$

Además:

$\left.\begin{array}{ll} Tr(\mathcal{U}) = 1 > 0 \;; & \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \det(\mathcal{U}) = -1 \;; & \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow$ el espectro de $\mathcal{U}$ es:

$$\boxed{\sigma(\mathcal{U}) = \{\lambda_1 = 1 \text{ (doble)}; \lambda_2 = -1 \text{ (simple)}\}}$$

Entonces, existe una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ $B = \{v_1; v_2; v_3\}$ respecto de la cual, la matriz asociada a T resulta:

$[T]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; y como $[T]_{BB}$ es diagonal

La base B es la base ortonormal de autovectores de U y el subespacio respecto del cual se realiza la simetría ortogonal es el subespacio propio asociado a $\lambda_1 = 1$

Es decir, $S_{\lambda_1} = Nul(A - \mathbb{I})$

. sea $X = (x_1\ x_2\ x_3)^T \in Nul(A - \mathbb{I})$, entonces se debe cumplir que: $UX = 1X$

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 - 8x_2 - 4x_3 &= 9x_1 \\ -8x_1 + x_2 - 4x_3 &= 9x_2 \\ -4x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= 9x_3 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{aligned} 8x_1 + 8x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 8x_1 + 8x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow$$

$$\boxed{S_{\lambda_1=1} = \{ x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \}}$$

Es el subespacio respecto del cual se raliza la simetría.

que también se puede expresar:

$$S_{\lambda_1=1} = Gen\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Ejercicio 5

Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la T.L. definida por $T(x) = Ax$, donde:

$$A = \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$$

Hallar, entre todos los $x \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen $\|x\| = 1$, aquellos que minimizan $\|T(x)\|$ y determinar el valor $\min\limits_{\|x\|=1} \|T(x)\|$

La matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que:

$$A = \frac{2}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 8 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 4 & -7 \end{pmatrix} \quad ; \quad (1)$$

Vamos a reescribir la ec. (1):

$$A = \frac{2}{9}\, 7 \begin{pmatrix} 2/7 \\ -6/7 \\ 3/7 \end{pmatrix} 9 \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} + \frac{1}{9}\, 7 \begin{pmatrix} 6/7 \\ 3/7 \\ 2/7 \end{pmatrix} 9 \begin{pmatrix} 4/9 & 4/9 & -7/9 \end{pmatrix}$$

$$A = \underbrace{14}_{\sigma_1}\underbrace{\begin{pmatrix} 2/7 \\ -6/7 \\ 3/7 \end{pmatrix}}_{u_1}\underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{8}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}}_{v_1^T} + \underbrace{7}_{\sigma_2}\underbrace{\begin{pmatrix} 6/7 \\ 3/7 \\ 2/7 \end{pmatrix}}_{u_2}\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & -\frac{7}{9} \end{pmatrix}}_{v_2^T}$$

$$A = \underbrace{\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}_{U_r}\underbrace{\begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}}_{\Sigma_r}\underbrace{\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -1 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & -7 \end{pmatrix}}_{V_r^T} \quad ; \quad (2)$$

La Ec. (2) es una DVS reducida de A

- Como $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tiene dos valores singulares no nulos entonces $rg(A) = 2 = \dim[Col(A)] = \dim[Fil(A)]$

$\sigma_1 = 14$; $\sigma_2 = 7$

Entonces, una base ortonormal de $Fil(A)$ es:

$$BON_{Fil(A)} = \left\{ V_1 = \begin{pmatrix} -1/9 \\ -8/9 \\ 4/9 \end{pmatrix} ; V_2 = \begin{pmatrix} 4/9 \\ 4/9 \\ -7/9 \end{pmatrix} \right\}$$

- Entonces A^TA tiene un autovalor nulo : $\lambda = 0$ cuyo subespacio propio $S_{\lambda=0} = Nul(A^TA) = Nul(A)$ es el complemento ortogonal de $Fil(A)$

Entonces: $Nul(A) = gen\left\{ V_3 = \begin{pmatrix} -8/9 \\ 1/9 \\ -4/9 \end{pmatrix} \right\} = Nul(A^TA)$

y $\sigma_3 = 0$ es el menor valor singular de A.

- Entonces:

$$\min_{\|X\|=1} \|T(X)\| = \min_{\|X\|=1} \|AX\| = \sigma_{min} = 0$$

y se produce en $X = \pm \left(-\frac{8}{9} \quad \frac{1}{9} \quad -\frac{4}{9} \right)^T$