ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Primer parcial
Duración: 3 horas.

Segundo cuatrimestre – 2022
29/X/22 – 9:00 hs.

Apellido y Nombres:

Legajo:

Curso:

---

1. Sean $\mathbb{S}$, $\mathbb{T}$ y $\mathbb{U}$ los subespacios de $\mathbb{R}_4[x]$ definidos por

$$\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(3) = p(2) = p(1) = 0\},$$
$$\mathbb{T} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(6) = p(3) = p(1) = 0\},$$
$$\mathbb{U} = \left\{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(0) + p'(0) + \frac{1}{2!}p''(0) + \frac{1}{3!}p'''(0) + \frac{1}{4!}p''''(0) = 0\right\}.$$

Construir un base de $\mathbb{U}$ que contenga a una base de $\mathbb{T}$ y a una base de $\mathbb{S}$. ¿Es única? Si la respuesta es negativa, construir otra.

---

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ la transformación lineal definida por

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

donde $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son las bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}_2[x]$, respectivamente, definidas por

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \end{bmatrix}^T\right\},$$
$$\mathcal{C} = \left\{\frac{1}{2}x(x-1), -(x+1)(x-1), \frac{1}{2}(x+1)x\right\}.$$

Comprobar que el polinomio $6 + 3x$ pertenece a la imagen de T y determinar la preimagen por T del subespacio gen $\{6 + 3x\}$.

---

3. Sea Π la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$ en la dirección de la recta generada por $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$. Hallar la imagen por Π del subespacio $\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0\}$.

---

4. En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico se considera la matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ definida por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & -6 & 0 \\ 6 & 8 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcular la distancia del vector $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ al subespacio col(A).

---

5. Usando la técnica de mínimos cuadrados, ajustar los siguientes datos

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	3	5

mediante una parábola $y = ax^2 + bx + c$.

1)

$$B_S = \{(x-1)(x-2)(x-3), (x-1)(x-2)(x-3)(x-6)\}$$

$$B_T = \{(x-1)(x-3)(x-6), (x-1)(x-3)(x-6)(x-2)\}$$

$$U = \{p \in \mathbb{R}_4[x] \ / \ T_{4,x=0}(p)(1) = 0\} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] \ / \ p(1) = 0\}$$

grado centro

$$\Rightarrow B_U = \{(x-1)(x-2)(x-3)(x-6) \leftarrow B_{S \cap T}$$

$, (x-1)(x-2)(x-3)$ ← completa a base de S

$, (x-1)(x-3)(x-6)$ ← completa base T

$, x-1 \}$

- está en U porque $1-1=0$
- No está en $S+T$, porq' $S+T = \{p \ / \ p(1) = p(3) = 0\}$

y $3-1 \neq 0$

¿Es única? una base nunca es única.

y en estas condiciones puedo cambiar

$x-1$ por $2x-2$.

y sigue cumpliendo todo.

2) Busco primero la preimagen de $6+3x$ y luego me ocupo del $\text{gen}\{6+3x\}$

$$T(v) = 6+3x \quad , \; ¿v?$$

$$(T(v))^C = (6+3x)^C$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = [T]^C_B \, v^B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Gauss
$$\begin{cases} \alpha - \gamma = -1 \\ \beta + 2\gamma = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma - 1 \\ \beta = -2\gamma + 2 \end{cases}$$

C.A.:

$$3x+6 = a\left(\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x\right) - b(x^2-1) + c\left(\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x\right)$$
$$= \left(\tfrac{1}{2}a - b + \tfrac{1}{2}c\right)x^2 + \left(-\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}c\right)x + b$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} b = 6 \\ -\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}c = 3 \\ \tfrac{1}{2}a - b + \tfrac{1}{2}c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -a + c = 6 \\ a + c = 12 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 12 \end{matrix}}$$

$$v = \alpha\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = (\gamma-1)\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + (-2\gamma+2)\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v = \gamma\begin{pmatrix} 14 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} = \gamma\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Luego $6+3x \in \text{Im}(T)$ y

$$T^{-1}(\text{gen}\{6+3x\}) = \{v \in \mathbb{R}^3 \,/\, T(v) = \lambda \cdot (6+3x)\}$$
$$= \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -12 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}\right\}$$

Por linealidad

3)

$$\Pi : \begin{cases} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow [\Pi]_B^B = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\qquad}_{B}$$

$$S = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\right\} \qquad [\Pi]_E^E = C_B^E\,[\Pi]_B^B\,C_E^B$$

$$C_B^E = \begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&-1\\0&0&2\end{pmatrix} \xrightarrow{-1} \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix} = C_E^B$$

$$[\Pi]_E^E = \underbrace{\begin{pmatrix}2&0&-2\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{M} \cdot \frac{1}{2} \Leftarrow$$

$$\Rightarrow \Pi(S) = gen\left\{\Pi\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \Pi\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\right\} = gen\left\{M\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, M\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$$= gen\left\{\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}\right\} = gen\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

---

4)

$$Col(A) = gen\left\{\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-6\\2\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow Col(A)^\perp = gen\left\{\begin{pmatrix}-6\\-2\\3\end{pmatrix}\right\}$$

$$d\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, Col(A)\right) = \left\| P_{Col(A)^\perp}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\| = \left|\frac{\left\langle \begin{pmatrix}-6\\-2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix}-6\\-2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-6\\-2\\3\end{pmatrix}\right\rangle}\right| \left\|\begin{pmatrix}-6\\-2\\3\end{pmatrix}\right\|$$

$$= \frac{|-6-2-3|}{\left\|\begin{pmatrix}6\\-2\\3\end{pmatrix}\right\|} = \frac{11}{\sqrt{36+4+9}} = \frac{11}{\sqrt{49}} = \frac{11}{7}$$

---

5)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

rang Maximo · (planteo común)

multiplico por A^T:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 0 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 3 \\ 41 \end{pmatrix}$$

inversa

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{340}{700} & 0 & -\frac{100}{700} \\ 0 & \frac{70}{700} & 0 \\ -\frac{100}{700} & 0 & \frac{50}{700} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 3 \\ 41 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/7 \\ 21/70 \\ 55/70 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{P(x) = \frac{55}{70} x^2 + \frac{3}{10} x + \frac{10}{7}}$$