Guía 6

Ejercicios

6.1 En cada uno de los siguientes casos, hallar una descomposición en valores singulares de la matriz A, determinar bases ortonormales de sus cuatro subespacios fundamentales y sus respectivas matrices de proyección.

(**a**) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$.

(**b**) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

(**c**) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

6.2 Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

(**a**) Hallar los valores singulares de A, bases ortonormales de sus cuatro subespacios fundamentales y sus respectivas matrices de proyección.

(**b**) Hallar una descomposición en valores singulares reducida de A.

6.3 Sean

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}.$$

Comprobar que $A = U\Sigma V^T$ es una descomposición en valores singulares de A y, a partir de ella, hallar la seudoinversa de Moore-Penrose de A; la matriz de proyección sobre $\text{fil}(A)$ y la matriz de proyección sobre $\text{col}(A)$.

6.4 En cada uno de los siguientes casos, hallar $A^\dagger$, la seudoinversa de Moore-Penrose de A, y determinar la solución por cuadrados mínimos de norma mínima de la ecuación $Ax = b$.

(**a**) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ y $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(**b**) $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es la matriz de rango 2 tal que $\begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \end{bmatrix}^T \in \operatorname{nul}(A)$ y

$$A \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{9} \end{bmatrix}$$

y $b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

(**c**) $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es la matriz definida por

$$A = \frac{2}{9} \begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

y $b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$.

6.5 Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(**a**) Hallar entre todos los $x \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen $\|x\| = 1$ aquellos que maximizan $\|T(x)\|$ y determinar el valor $\max\limits_{\|x\|=1} \|T(x)\|$.

(**b**) Hallar entre todos los $x \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen $\|x\| = 1$ aquellos que minimizan $\|T(x)\|$ y determinar el valor $\min\limits_{\|x\|=1} \|T(x)\|$.

6.6 Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que

(**a**) $\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = 25\sqrt{2}$, $\min\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = 15$, y $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(**b**) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{nul}(A)$, $v = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}^T$ es un autovector de $A^T A$ tal que $Av = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^T$, y $\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = 3\sqrt{2}$.

(**c**) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T \in \operatorname{nul}(A)$, $A \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 9 & 12 \end{bmatrix}^T$ y $\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = 12$.

: *¿A, es única?*

6.7 Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ la transformación definida por $T(x) = Ax$. En cada uno de los siguientes casos, caracterizar geométricamente y graficar la imagen por T de la circunferencia unitaria $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$.

(**a**) $A = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$.

(**b**) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

: *en cada caso, ¿qué significación geométrica tienen los $x \in S_1$ que maximizan (o minimizan) $\|T(x)\|$?, ¿qué representan los valores $\max\limits_{x \in S_1} \|T(x)\|$ y $\min\limits_{x \in S_1} \|T(x)\|$?*

6.8 Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ la transformación definida por $T(x) = Ax$. En cada uno de los siguientes casos, caracterizar geométricamente y graficar la imagen por T de la circunferencia unitaria $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$.

(**a**) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(**b**) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

: *en cada caso, si $A = U\Sigma V^T$ es una descomposición en valores singulares de A, ¿qué significación geométrica tienen las columnas de U?, ¿qué representan los valores singulares de A?*

6.9 Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la transformación definida por $T(x) = Ax$. En cada uno de los siguientes casos, caracterizar geométricamente y graficar la imagen por T de la circunferencia unitaria $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$.

(**a**) $A = 5\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 6 & -3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}$.

(**b**) $A = \frac{2}{9}\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \end{bmatrix}$.

(**c**) $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.
