R1 2023 1C

jueves, 1 de junio de 2023 17:13

75.12 - 95.04 - 95.13 - METODOS MATEMATICOS Y NUMERICOS – PARCIAL – 5/6/23 TEMA 1

P1	P2	P3	P4	NOTA

Problema 1
Dada la grilla de pares ordenados X e Y:

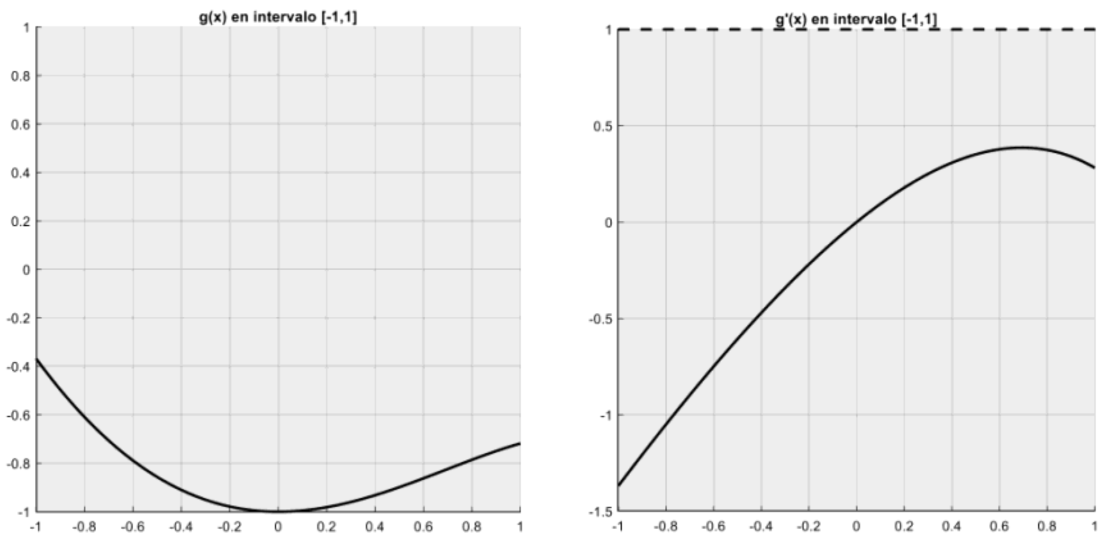
X	-1.0	0.0	1.0	2.0
Y	6.0	4.0	3.0	2.5

1a) De los 3 casos a continuación, indique en cuales es posible plantear un ajuste por cuadrados mínimos y obtener los coeficientes a través de un sistema lineal de ecuaciones. Justificar la elección de dicha función y las razones por las cuales descarta las otras dos opciones:

$$f_1(x) = a.cos(\text{bx}) \qquad f_2(x) = \frac{1}{ax+b} \qquad f_3(x) = a + \sin(bx)$$

Desarrollar la metodología vista en clase hasta obtener el sistema lineal pedido y resolverlo en forma directa con pivoteo parcial.
1b) Analizar la dimensión del sistema lineal a resolver si:
I. se agregan a la grilla otros 4 pares ordenados (X,Y) distintos.
II. se eliminan de la grilla 2 de los pares ordenados (X,Y)

Problema 2
Los gráficos indican un esquema de punto fijo $x = g(x)$ en el intervalo [-1,1] para hallar raíces de la función $f(x) = e^x - x^2$



2a) Indicar si en el intervalo graficado existe alguna raíz de *f*. En caso afirmativo, justificar si el intervalo graficado garantiza la convergencia por el Teorema de Punto Fijo. Si no la garantiza, proponer uno que sí lo haga y que sea de la mayor longitud posible.
2b) Hallar una raíz de *f* con 6 dígitos significativos. Para el cálculo, utilice estratégicamente el grafico anterior y elija un método de ecuaciones no lineales adecuado para la tolerancia pedida. Deberá documentar la tabla de iteraciones desarrollada.

Problema 3
3a) Se desea encontrar el punto de intersección entre las rectas $y = ax + b$ e $y = cx + d$ con $a \neq c$
Plantear la forma recursiva de los métodos de Jacobi y Gauss Seidel para la solución. Es decir: dar una expresión matricial donde las constantes a, b, c, y d son datos conocidos. Aparte se deberá señalar con supra-índice las iteraciones "k" y "k+1" donde corresponda.
3b) ¿Cuáles son las restricciones que deben cumplir los coeficientes a, b, c y d para garantizar la convergencia a la solución a través del criterio de diagonal dominante? Graficar en el plano *xy* las posibles combinaciones de rectas que cumplirían con el criterio de diagonal dominante.

Problema 4: Dado el siguiente SENL: $\begin{cases} xy = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$
4a) Hallar la forma recursiva que surge de aplicar Newton-Rapshon para SENL.
4b) De las siguientes semillas, indicar cuales elegiría y cuales descartaría para comenzar el proceso iterativo. Justificar:

$$(x_0, y_0) = (0{,}0) \qquad (x_0, y_0) = (0{,}1)$$
$$(x_0, y_0) = (1{,}2) \qquad (x_0, y_0) = (2{,}2)$$

Ej SEL Iter

jueves, 1 de junio de 2023 17:13

Problema 3

3a) Se desea encontrar el punto de intersección entre las rectas $y = ax + b$ e $y = cx + d$ con $a \neq c$

Plantear la forma recursiva de los métodos de Jacobi y Gauss Seidel para la solución. Es decir: dar una expresión matricial donde las constantes a, b, c, y d son datos conocidos. Aparte se deberá señalar con supra-índice las iteraciones “k” y “k+1” donde corresponda.

3b) ¿Cuáles son las restricciones que deben cumplir los coeficientes a, b, c y d para garantizar la convergencia a la solución a través del criterio de diagonal dominante? Graficar en el plano *xy* las posibles combinaciones de rectas que cumplirían con el criterio de diagonal dominante.

a)
$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx + d \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} -a & 1 \\ -c & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$

Jacobi:

$$x^{(k+1)} = \frac{y^{(k)} - b}{a}$$
$$y^{(k+1)} = c\,x^{(k)} + d$$

$$\begin{bmatrix} x^{k+1} \\ y^{(k+1)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1/a \\ c & 0 \end{bmatrix}}_{T_J} \begin{bmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b/a \\ d \end{bmatrix}$$

Gauss-Seidel:

$$x^{(k+1)} = \frac{y^{(k)} - b}{a}$$
$$y^{(k+1)} = c\,x^{(k+1)} + d$$

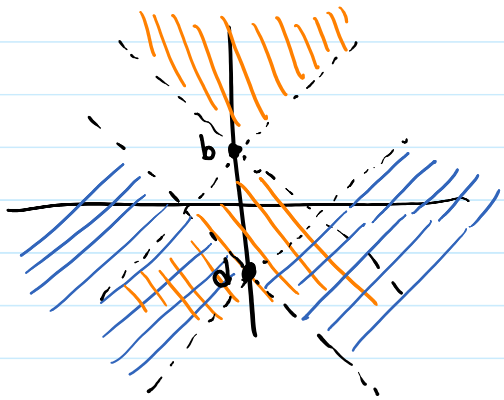
$$\begin{bmatrix} x^{k+1} \\ y^{(k+1)} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1/a \\ 0 & c/a \end{bmatrix}}_{T_{GS}} \begin{bmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b/a \\ -b/a \cdot c + d \end{bmatrix}$$

b) condiciones para diagonal dominante

$$\begin{cases} |a| > 1 \\ |c| < 1 \end{cases} \qquad -a + c \neq 0 \rightarrow a \neq c$$

$|a| > 1 \rightarrow$ pendientes "empinadas"

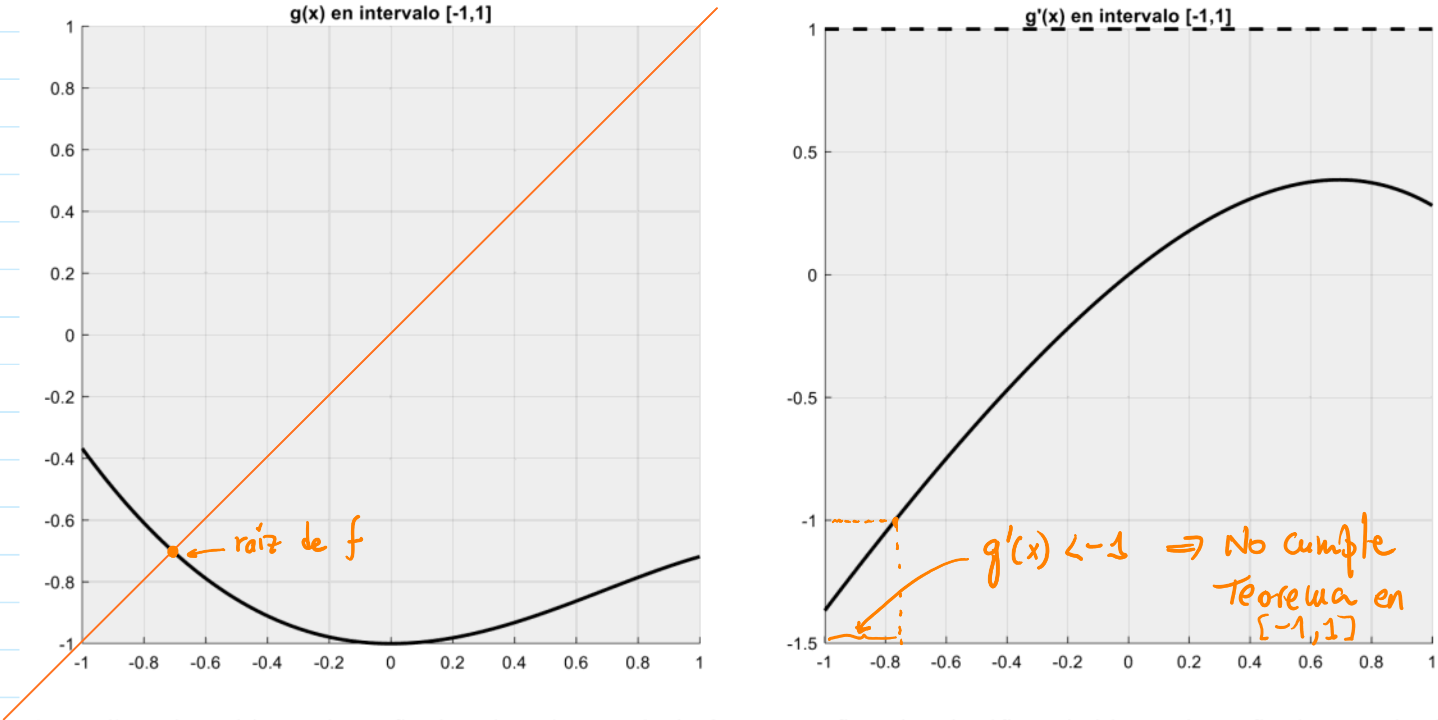
$|c| < 1 \rightarrow$ pendientes "leves"



c y d no tienen restricción.

Problema 2

Los gráficos indican un esquema de punto fijo $x = g(x)$ en el intervalo [-1,1] para hallar raíces de la función $f(x) = e^x - x^2$



2a) Indicar si en el intervalo graficado existe alguna raíz de *f*. En caso afirmativo, justificar si el intervalo graficado garantiza la convergencia por el Teorema de Punto Fijo. Si no la garantiza, proponer uno que sí lo haga y que sea de la mayor longitud posible.
2b) Hallar una raíz de *f* con 6 dígitos significativos. Para el cálculo, utilice estratégicamente el grafico anterior y elija un método de ecuaciones no lineales adecuado para la tolerancia pedida. Deberá documentar la tabla de iteraciones desarrollada.

a)
- raíz de $f \approx -0{,}7$.
- El intervalo $[-1, 1]$ no cumple la 2da condición del teorema de punto fijo.
- El intervalo $[\underbrace{-0{,}75}_{\text{valor aproximado según visualización del gráfico}}, 1]$ sí lo cumple

b) Para una tolerancia estricta de 6 dígitos mejor usar N-R desde el valor -0,7, visualmente apreciable en el gráfico.

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \rightarrow x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{e^{x^{(k)}} - x^{(k)2}}{e^{x^{(k)}} - 2x}$$

k	$x^{(k)}$
0	-0,7
1	-0,703472
2	-0,703467
3	-0,703467

mantiene todos los dígitos pedidos.

Ej ajuste

sábado, 10 de junio de 2023 11:47

P1	P2	P3	P4	NOTA

Problema 1
Dada la grilla de pares ordenados X e Y:

X	-1.0	0.0	1.0	2.0
Y	6.0	4.0	3.0	2.5

1a) De los 3 casos a continuación, indique en cuales es posible plantear un ajuste por cuadrados mínimos y obtener los coeficientes a través de un sistema lineal de ecuaciones. Justificar la elección de dicha función y las razones por las cuales descarta las otras dos opciones:

$$f_1(x) = a.cos(\mathrm{bx}) \qquad f_2(x) = \frac{1}{ax+b} \qquad f_3(x) = a + \sin(bx)$$

Desarrollar la metodología vista en clase hasta obtener el sistema lineal pedido y resolverlo en forma directa con pivoteo parcial.
1b) Analizar la dimensión del sistema lineal a resolver si:
I. se agregan a la grilla otros 4 pares ordenados (X,Y) distintos.
II. se eliminan de la grilla 2 de los pares ordenados (X,Y)

1a) Se descartan $f_1(x)$ y $f_3(x)$ por no ser estructuras lineales de coeficientes y no permitir un cambio de variable que habilite el planteo de un SEL.

$$f_2(x) = \frac{1}{ax+b} \Longrightarrow \frac{1}{f_2(x)} = a\underbrace{x}_{\varphi_1} + b.\underbrace{1}_{\varphi_0}$$

X	-1.0	0.0	1.0	2.0
Y	6.0	4.0	3.0	2.5
1/Y	0,16	0,25	0,33	0,40

$\varphi_0 \cdot \varphi_0 = 4.0$ $\qquad \varphi_0 \cdot \frac{1}{Y} = 1,15$

$\varphi_0 \cdot \varphi_1 = 2.0$

$\varphi_1 \cdot \varphi_1 = 6.0 \qquad \varphi_1 \cdot \frac{1}{Y} = 0{,}447$

$$\begin{bmatrix} 4.0 & 2.0 \\ 2.0 & 6.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}15 \\ 0{,}966 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4.0 & 2.0 \\ 0.0 & 5.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}15 \\ 0{,}391 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow \boxed{a = 0{,}0783}$

$\boxed{b = 0{,}248}$

b) La dimensión del SEL a resolver no cambia en ningun caso. Solo depende de la cantidad de coeficientes a ajustar

Ej SENL

sábado, 10 de junio de 2023 12:09

Problema 4: Dado el siguiente SENL: $\begin{cases} xy = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

4a) Hallar la forma recursiva que surge de aplicar Newton-Rapshon para SENL.

4b) De las siguientes semillas, indicar cuales elegiría y cuales descartaría para comenzar el proceso iterativo. Justificar:

$$(x_0, y_0) = (0,0) \qquad (x_0, y_0) = (0,1)$$
$$(x_0, y_0) = (1,2) \qquad (x_0, y_0) = (2,2)$$

a) $\bar{g}(\bar{x}) = \bar{x} - \bar{\bar{J}}^{-1} \cdot \bar{f}(\bar{x}) \qquad \bar{x} = (x, y)$

$f_1(x,y) = xy - 1$

$f_2(x,y) = x^2 + y^2 - 2$

$$\begin{bmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y^{(k)} & x^{(k)} \\ 2x^{(k)} & 2y^{(k)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x^{(k)} y^{(k)} - 1 \\ x^{(k)2} + y^{(k)2} - 2 \end{bmatrix}$$

b) Las semillas (0,0) y (2,2) generan una matriz jacobiana singular

→ La semilla (1,2) genera una matriz no diagonal ...

→ " " (0,1) genera " " diagonal ✓

más conveniente para invertir la matriz ...

(y mantenerla como matriz)

(y mantenerla como matriz
de punto fijo)