75:12 ANÁLISIS NUMÉRICO I

FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

PRIMER RECUPERATORIO

2do Cuatrimestre 2012
21/Nov/2012

Problema 1
Se desea encontrar el valor de la función en el punto x = 1.21 a partir de las siguientes mediciones:

x	1	1.5	2	2.5
F(x)	6.87	4.61	3.28	4.54

a) Para ello, obtenga el polinomio interpolante de Newton de grado 2 [$N_2(x)$] utilizando los datos de la tabla e indique el valor de $N_2(1.21)$.

b) Obtenga una expresión del error cometido y su valor en x = 1.21 al representar los puntos de la tabla mediante el polinomio de grado 2 obtenido en a). Indique de qué tipo de error se trata.

c) Indique alguna expresión del polinomio interpolante de grado 3 de Lagrange [$L_3(x)$] y el valor que se obtiene al evaluarlo en x = 1.21.

Problema 2
Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x + y - 5z &= 3 \\ 8x + 2.5y + 1.2z &= 67.9 \\ 3x - 9y + 4z &= 1 \end{aligned}$$

a) Analice la convergencia del sistema para los métodos de Jacobi y Gauss Seidel.

b) Resuelva el sistema convergente mediante ambos métodos hasta una precisión relativa del 10%.

c) Estimar experimentalmente el orden de convergencia de cada método y justificar su comportamiento

d) Indique cómo puede saber qué método (Jacobi, Gauss Seidel y SOR) converge mas rápido en base al análisis de las condiciones de convergencia.

Pregunta 1
Explique que es el efecto de cancelación de términos y proponga al menos 2 medidas para intentar solucionarlo o mitigarlo.

Pregunta 2
Indique una ventaja y una desventaja de utilizar el método de la Secante frente al método de Newton Raphson.

Problema 1 El polinomio interpolador de Newton tiene la forma

$$p_n^{\text{Newton}}(x) = d_0 + d_1\,(x - x_0) + d_2\,(x - x_0)\,(x - x_1) + \cdots + d_n\,(x - x_0)\,(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})$$

donde d_i es la diferencia dividida i-ésima que se obtiene como en la siguiente tabla:

$$\text{Diferencias divididas} \rightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc}
x & f(x) & & & & & \\
1 & \overbrace{\boxed{6{,}87}}^{d_0} & & & & & \\
1{,}5 & 4{,}61 & \searrow\!\!\to & \frac{4{,}61-6{,}87}{1{,}5-1} = \overbrace{\boxed{-4{,}52}}^{d_1} & & & \\
2 & 3{,}28 & \searrow\!\!\to & \frac{3{,}28-4{,}61}{2-1{,}5} = -2{,}66 & \searrow\!\!\to & \frac{-2{,}66+4{,}52}{2-1} = \overbrace{\boxed{1{,}86}}^{d_2} & \\
2{,}5 & 4{,}54 & \searrow\!\!\to & \frac{4{,}54-3{,}28}{2{,}5-2} = 2{,}52 & \searrow\!\!\to & \frac{2{,}52+2{,}66}{2{,}5-1{,}5} = 5{,}18 & \searrow\!\!\to \; \frac{5{,}18-1{,}86}{2{,}5-1} = \overbrace{\boxed{2{,}21}}^{d_3}
\end{array} \right.$$

Una vez que se han obtenido todas las diferencias divididas simplemente resta armar el polinomio

$$p_3^{\text{Newton}}(x) = 6{,}87 + (x-1)\,(-4{,}52) + (x-1)\,(x-1{,}5)\,1{,}86 + (x-1)\,(x-1{,}5)\,(x-2)\,(2{,}21)$$

Me confundí, pensé que pedían el polinomio de grado 3. Lo bueno es que con Newton no hay problema en añadir o quitar puntos. Simplemente se borra la última parte y se obtiene lo pedido

$$p_2^{\text{Newton}}(x) = 6{,}87 + (x-1)\,(-4{,}52) + (x-1)\,(x-1{,}5)\,1{,}86$$

FALTA LO DEL ERROR!!!!!!

La expresión general del polinomio de Lagrange es la siguiente:

$$p_n^{\text{Lagrange}}(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) L_{nk}(x) \qquad L_{nk} \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Como nos piden el polinomio de grado 3 entonces fijamos $n = 3$ y procedemos a calcular los $L_{3k}, k \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$\left\{ \begin{aligned}
L_{30} &= \cancel{\frac{x-x_0}{x_0-x_0}}\,\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\,\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\,\frac{x-x_3}{x_0-x_3} = -\frac{4}{3}\,(x-1{,}5)\,(x-2)\,(x-2{,}5)\\
L_{31} &= \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\,\cancel{\frac{x-x_1}{x_1-x_1}}\,\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\,\frac{x-x_3}{x_1-x_3} = 4\,(x-1)\,(x-2)\,(x-2{,}5)\\
L_{32} &= \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\,\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\,\cancel{\frac{x-x_2}{x_2-x_2}}\,\frac{x-x_3}{x_2-x_3} = -4\,(x-1)\,(x-1{,}5)\,(x-2{,}5)\\
L_{33} &= \frac{x-x_0}{x_3-x_0}\,\frac{x-x_1}{x_3-x_1}\,\frac{x-x_2}{x_3-x_2}\,\cancel{\frac{x-x_3}{x_3-x_3}} = \frac{4}{3}\,(x-1)\,(x-1{,}5)\,(x-2)
\end{aligned} \right.$$

El polinomio de Lagrange queda expresado entonces como

$$\begin{aligned}
p_3^{\text{Lagrange}} =& -6{,}87 \times \frac{4}{3}\,(x-1{,}5)\,(x-2)\,(x-2{,}5) + 4{,}61 \times 4\,(x-1)\,(x-2)\,(x-2{,}5) + \\
&+ 3{,}28 \times (-4)\,(x-1)\,(x-1{,}5)\,(x-2{,}5) + 4{,}54 \times \frac{4}{3}\,(x-1)\,(x-1{,}5)\,(x-2)
\end{aligned}$$

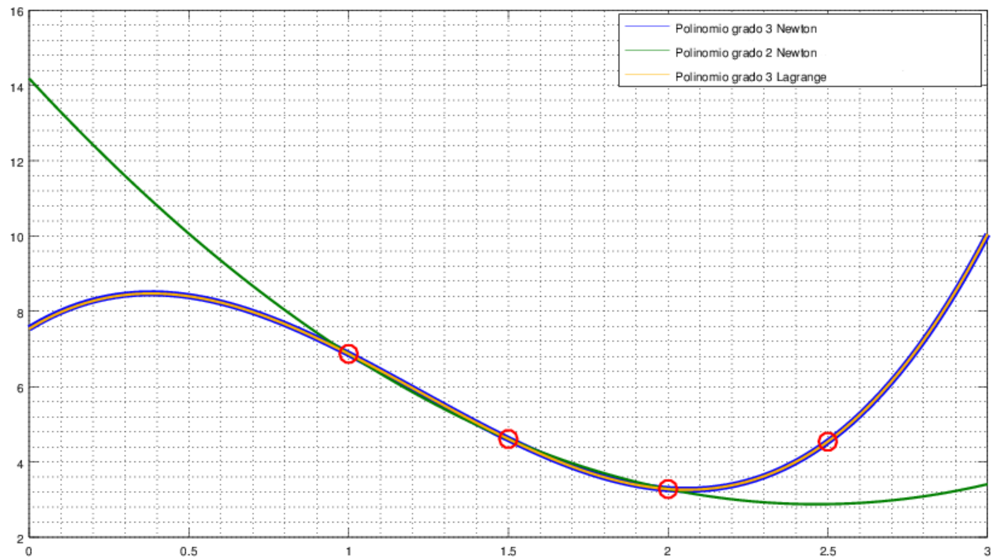

Figura 1: Polinomios obtenidos en el ejercicio 1. Los puntos rojos son los puntos a interpolar.

Problema 2 El sistema se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 8 & 2{,}5 & 1{,}2 \\ 3 & -9 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 67{,}9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Si permutamos filas y columnas de forma que la matriz se vuelva estrictamente diagonal dominante entonces el sistema convergerá en ambos métodos (hay un teorema que lo dice). Reacomódese entonces el sistema como

$$\begin{bmatrix} 8 & 2{,}5 & 1{,}2 \\ 3 & -9 & 4 \\ 1 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 67{,}9 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

para obtener una matriz estrictamente diagonal dominante ✓, es decir

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}| \qquad i \in \{1,2,3\}$$

De esta forma ambos métodos se pueden utilizar para resolver este sistema.

Ahora que se garantizó la convergencia procedemos al cálculo de la siguiente manera

$$\text{Jacobi} \rightarrow \begin{cases} x_{k+1} = \dfrac{67{,}9 - 2{,}5y_k - 1{,}2z_k}{8} \\ y_{k+1} = \dfrac{1 - 3x_k - 4z_k}{-9} \\ z_{k+1} = \dfrac{3 - x_k - y_k}{-5} \end{cases}$$

$$\text{Gauss-Seidel} \rightarrow \begin{cases} x_{k+1} = \dfrac{67{,}9 - 2{,}5y_k - 1{,}2z_k}{8} \\ y_{k+1} = \dfrac{1 - 3x_{k+1} - 4z_k}{-9} \\ z_{k+1} = \dfrac{3 - x_{k+1} - y_{k+1}}{-5} \end{cases}$$

La condición de corte de las iteraciones es pedir que

$$\frac{||\vec{v}_k - \vec{v}_{k-1}||}{||\vec{v}_k||} < 0{,}1 \rightarrow \text{Condición de corte}$$

donde $\vec{v}_k = [x_k, y_k, z_k]$. Al realizar los cálculos se obtiene lo siguiente

Algoritmo 1 Valores de las distintas iteraciones del ejercicio 2.

```
k        (x,y,z)                    Error relativo
0        10.000 10.000 10.000        --
1        3.863 7.667 3.400          1.589
2        5.582 2.688 1.706          0.308
3        7.392 2.508 1.054          0.245
4        7.546 2.821 1.380          0.020
Por Gauss-Seidel:
k        (x,y,z)                    Error relativo
0        10.000 10.000 10.000        --
1        3.863 5.621 1.297          1.589
2        6.536 2.644 1.236          0.409
3        7.476 2.930 1.481          0.126
4        7.350 2.997 1.469          0.017

Orden de convergencia Jacobi = 1.328
Orden de convergencia Gauss-Seidel = 1.422
```

Para estimar el orden de convergencia utilizamos la formula

$$p \approx \frac{\ln|\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k| - \ln|\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}|}{\ln|\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}| - \ln|\vec{x}_{k-1} - \vec{x}_{k-2}|}$$

Más arriba están los valores obtenidos en las iteraciones realizadas. Para Jacobi se obtuvo $p_{\mathrm{J}} \approx 1{,}328$ y Gauss Seidel $p_{\mathrm{GS}} \approx 1{,}422$.

Para saber qué método convergerá más rápido se pueden comparar los órdenes de convergencia estimados. Aquel que tenga un mayor orden de convergencia será el más rápido.

Pregunta 1 El efecto de cancelación de términos es aquel que se produce al realizar una operación de resta de dos números muy parecidos pero distintos. El efecto que produce es el de generar un resultado con un error relativo muy grande. Supongamos que x_1 y x_2 son los dos números a restar, cada uno con su Δx_i. Entonces el error relativo de la operación será

$$\varepsilon_{\text{Resta}} \overset{\text{def}}{=} \frac{\Delta\text{Resta}}{\text{Resta}} = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{x_1 - x_2} \underset{x_1 \to x_2}{\longrightarrow} \infty$$

donde se observa claramente que si $x_1 \approx x_2 \Rightarrow \varepsilon_{\text{Resta}} \uparrow\uparrow$. Para evitar este fenómeno se pueden modificar las operaciones de modo tal que no haya que hacer restas de números parecidos, como por ejemplo la operación

$$v^2 - w^2 = \begin{cases} (v+w)\,(v-2) \\ (v \times v) - (w \times w) \end{cases}$$

es conveniente hacerla de la primera forma y no de la segunda. Otra forma de reducir el impacto de la cancelación de términos es aumentar la precisión de los cálculos.

Pregunta 2

Ventaja Dado que el método de la secante aproxima la derivada con una derivada discreta, no es necesaria la obtención de la derivada de la función.

Desventaja Se pierde el orden 2 del método de Newton-Raphson.