# 95.13 METODOS MATEMATICOS Y NUMERICOS

**FACULTAD DE INGENIERIA**
**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**

Santiago Langer
107912

## CUARTO INTEGRADOR

*2do cuatrimestre 2024*
*18 de Febrero de 2025*

**Problema 1** (4 puntos)
Dado el siguiente problema de valores de iniciales

$$\frac{dy}{dt} = \cos(y) + \frac{1}{2}t \quad \text{con} \quad y_{(0)} = -1$$

a) Discretizar este problema aplicando el método de Euler y calcular el valor aproximado de la solución en t=1. Utilizar un paso tal que haya que aplicar el método 4 veces. (1 punto)
b) Repetir el punto anterior usando el método de Euler Modificado y el método de Punto Medio (2 puntos)
c) Sabiendo que $y \cong 0{,}0568$ estimar los errores absolutos de las aproximaciones obtenidas anteriormente y comparar obteniendo conclusiones teniendo en cuenta los conceptos teóricos estudiados. (1 punto)

Ayuda: Si y'= f(t,y)

Euler: $u_{n+1} = u_n + k * f(t_n, u_n)$

Euler Modificado: $u_{n+1} = u_n + 0.5 * k \, [\, \overset{f_1}{f(t_n, u_n)} + f(t_n + k, u_n + k * f(t_n, u_n)) \,]$

Punto Medio: $u_{n+1} = u_n + k * f(t_n + 0{,}5 * k, u_n + 0.5 * k * \underbrace{f(t_n, u_n)}_{f_1})$

**Problema 2** (4 puntos)
Dado el siguiente problema de valores de contorno

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y + 2x = 0 \quad con \quad y_{(0)} = 0 \;;\; y_{(5)} = 5$$

Plantear su resolución numérica usando diferencias finitas centradas de segundo orden. A los efectos de numerar los nodos considerar que el dominio se divide en *N+1* tramos iguales.

a) Obtener la solución aproximada considerando *N=1*. (1 punto)
b) Obtener la solución aproximada considerando *N*=3 y usando algún método visto en el curso para resolver el sistema de ecuaciones resultante. (2 punto).
c) Discutir los cambios que habría que introducir en el planteo de la resolución numérica si se cambia una de las condiciones de borde, específicamente y'(5)=0 (1 punto)

**Pregunta 1** (1 punto)
Comparar los métodos de bisección y Newton indicando al menos dos aspectos del comportamiento de sus correspondientes procesos iterativos que son claramente distintos y contrapuestos indicando los motivos por los cuales ocurren esas diferencias. Indicar en qué casos elegiría uno o el otro?

**Pregunta 2** (1 punto)
Comparar los métodos de Lagrange y Newton indicando en qué casos conviene elegir uno o el otro.

***Criterio de aprobación: sumar 4 puntos entre los apartados a) y b) de cada ejercicio.***

Problema 2) H1. Santiago Langer 107912 18-02-25

19:13 2) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - y + 2x = 0$ $\quad y(0) = 0$

$y(5) = 5$

$y'' - y + 2x = 0$

PVC genérico: $y'' = p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y + r(x)$

$y'' = y - 2x \quad \rightarrow \quad q(x) > 0 \quad \forall x$

$\downarrow$

$$\frac{W_{i+1} - 2 \cdot W_i + W_{i-1}}{h^2} = y - 2x$$

$\times h^2 ($

$W_{i+1} - 2 \cdot W_i + W_{i-1} = h^2 \cdot W_i - 2 \cdot h^2 \cdot x_i$

$W_{i+1} + W_i(-2 - h^2) + W_{i-1} = -2 \cdot h^2 \cdot x_i$

A) $\frac{5-0}{1+1} = h = \frac{5}{2}$ $\rightarrow$ No hay limitaciones en h porque $p(x)$ no está presente.

a $\quad\quad$ b
0 $\quad$ 1 $\quad$ 2
x: 0 $\quad$ $\frac{5}{2}$ $\quad$ 5

$W_2 + W_1\left(-2 - \frac{25}{4}\right) + W_0 = -\frac{25}{2} \cdot x_1$

$5 + W_1\left(-\frac{33}{4}\right) + 0 = -\frac{25}{2} \cdot \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{145}{4} = \frac{33}{4} \cdot W_1$

$\boxed{W_1 = \frac{145}{33}} \longrightarrow$ Con $N = 1$.

B) Teniendo : $\left[ W_{i+1} + W_i \left(-2-h^2\right) + W_{i-1} = -2h^2 \cdot x_i \right]$

$N = 3$ $\qquad \frac{5}{3+1} = \frac{5}{4}$

$$\begin{array}{ccccc} W_0 & W_1 & W_2 & W_3 & W_4 \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{10}{4} & \frac{15}{4} & \frac{20}{4} \end{array}$$

Con $N = 3$ planteo una matriz $A$ $3 \times 3$ $\quad A \cdot w = b$

(para hacerlo generico seguiría la matriz tridiagonal y no reemplazaría h)

$$A = \begin{pmatrix} -2-\left(\frac{5}{4}\right)^2 & 1 & 0 \\ 1 & -2-\left(\frac{5}{4}\right)^2 & 1 \\ 0 & 1 & -2-\left(\frac{5}{4}\right)^2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -W_0 - 2\left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot x_1 \\ -2\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot x_2 \\ -W_4 - 2\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^2 \cdot x_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{57}{16} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{57}{16} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{57}{16} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -\frac{125}{32} \\ -\frac{125}{16} \\ -\frac{455}{16} \end{pmatrix} \quad \times -32$$

CA

$-\frac{25}{8} \cdot \frac{10}{4} = -\frac{125}{16}$

$$\begin{array}{ccc} W_1 & W_2 & W_3 \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 114 & -32 & 0 \\ -32 & 114 & -32 \\ 0 & -32 & 114 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 125 \\ 250 \\ 910 \end{pmatrix}$$

Usando GS:

$$W_{1_{i+1}} = \frac{32 \cdot W_{2_i} + 125}{114}$$

$$W_{2_{i+1}} = \frac{32 \cdot W_{1_{i+1}} + 32 \cdot W_{3_i} + 250}{114}$$

$$W_{3_{i+1}} = \frac{32 \cdot W_{2_{i+1}} + 910}{114}$$

(Pregunta 2 atrás)

P2) H2 Santiago Langer 107912 18-02-25

| O | $W_1$ | $W_2$ | $W_3$ |
|---|---|---|---|
| I | 1,09649 | 2,50077 | 8,68443 |
| II | 1,79846 | 5,13558 | 9,42401 |
| III | 2,53806 | 5,55076 | 9,54056 |
| IV | 2,65460 | 5,61619 | 9,55893 |
| V | 2,67297 | 5,626~~4~~50 | 9,56182 |

Semilla 0,0,0

4.1

$W_1 = 2,67297$
$W_2 = 5,62650$
$W_3 = 9,56182$

Solución aproximada cuando $N = 3$.

C) Cuando una de las condiciones de borde es el valor de la derivada, planteamos un nodo fantasma (un intervalo más allá del dominio original) y hacemos que la matriz sea $N+1 \times N+1$ (agregamos una incognita y una ecuación más).

Luego reemplazamos en la última línea a $y_{N+2}$ con $y_{N+2} = 2 . h . \gamma + y_N$,

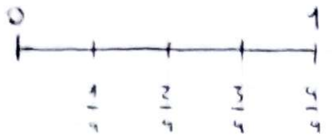
y ~~dassarkalto~~ planteamos la matriz.

Valor de la derivada.

Pregunta 2) En la mayoría de las situaciones puede ser más sencillo utilizar el método de Newton, mientras que podamos utilizar Lagrange cuando tenemos el valor de la derivada en un punto.

Problema 1) H1) Santiago Langer 18-02-25
107712

1) $\frac{\partial y}{\partial t} = \cos(y) + \frac{1}{2} \cdot t \qquad y(0) = -1$



$h = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$

A) $U_{N+1} = U_N + h \cdot \left(\cos(U_N) + \frac{1}{2} \cdot t_N\right)$

$U_1 = \overset{U_0}{-1} + \frac{1}{4}\left(\cos(-1) + \frac{1}{2} \cdot 0\right) = \boxed{-0,86492}$

$U_2 = -0,86492 + \frac{1}{4}\left(\cos(-0,86492) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) = \boxed{-0,67149}$

$U_3 = -0,67149 + \frac{1}{4}\left(\cos(-0,67\ldots) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{4}\right) = \boxed{-0,41327}$

$U_4 = -0,41327 + \frac{1}{4}\left(\cos(-0,41327) + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right) = \boxed{-0.09057}$

B) Euler modificado:

$U_{N+1} = U_N + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\left[\underbrace{\cos(U_N) + \frac{1}{2} \cdot t_N}_{F1} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{4}\right) + \cos\left(U_N + \frac{1}{4} \cdot F_1\right)}_{F_2}\right]$

$U_1)$ $F_1 = \cos(-1) + \frac{1}{2} \cdot 0 = 0,54030$

$F_2 = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{4}\right) + \cos\left(-1 + \frac{1}{4} \cdot 0,54030\right) = 0,77370$

$U_1 = -1 + \frac{1}{8}\left[0,54030 + 0,77370\right] = \boxed{-0,83575}$

$$U_{N+1} = U_N + \frac{1}{8}\left[\underbrace{\cos(U_N) + \frac{1}{2}\, t_N}_{F_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{4}\right) + \cos\left(U_N + \frac{1}{4}\cdot F_1\right)}_{F_2}\right]$$

$U_1 = -0{,}83575$

$t = \frac{1}{4}$ $\quad U_2)\quad F_1 = \cos(-0{,}83575) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = 0{,}79562$

$$F_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{4}\right) + \cos\left(-0{,}83575 + \frac{1}{4}\cdot 0{,}79562\right) = 1{,}05398$$

$$\left[\, U_2 = -0{,}60455 \,\right]$$

$U_3)\quad F_1 = \cos(-0{,}60455) + \frac{1}{4} = 1{,}07276$

$$F_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right) + \cos\left(-0{,}60455 + \frac{1}{4}\cdot 1{,}07276\right) = 1{,}31896$$

$$U_3 = -0{,}60455 + \frac{1}{8}\left(1{,}07276 + 1{,}31896\right) = \left[-0{,}30558\right]$$

$t = \frac{3}{4}$ $\quad U_4)\quad F_1 = \cos(-0{,}30558) + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = 1{,}32867$

$$F_2 = \frac{1}{2}\left(\cancel{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}}\right) + \cos\left(-0{,}30558 + \frac{1}{4}\cdot 1{,}32867\right) = 1{,}49965$$

$$U_4 = -0{,}30558 + \frac{1}{8}\left[1{,}32867 + 1{,}49965\right] = \left[0{,}04796\right]$$

20 40

P1, 1-2) Santiago Langer 107912 18-02-25

B') Punto medio: $F_1 = \cos(U_N) + \frac{1}{2} \cdot t$

$$F_2 = \cos\left(U_N + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot F_1\right) + \frac{1}{2}\left(t_N + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right)$$

$$U_{N+1} = U_N + \frac{1}{4} \cdot F_2$$

$t=0$ $U_1)$ $F_1 = \cos(-1) + \cancel{\frac{1}{2}} \cdot 0 = 0,54030$

$$F_2 = \cos\left(-1 + \frac{1}{8} \cdot 0,54030\right) + \frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{8}\right) = 0,65836$$

$$U_1 = -1 + \frac{1}{4} \cdot 0,65836 = \boxed{-0,83541}$$

$U_2)$ $F_1 = \cos(-0,83541) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = 0,79587$

$$F_2 = \cos\left(-0,83541 + \frac{1}{8} \cdot 0,79587\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 0,92871$$

$$U_2 = -0,83541 + \frac{1}{4} \cdot 0,92871 = \boxed{-0,60323}$$

$t=\frac{1}{2}$ $U_3)$ $F_1 = \cos(-0,60323) + \frac{1}{4} = 1,07350$

$$F_2 = \cos\left(-0,60323 + \frac{1}{8} \cdot 1,07350\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) = 1,20450$$

$$U_3 = -0,60323 + \frac{1}{4} \cdot 1,20450 = \boxed{-0,30210}$$

$t=\frac{3}{4}$ $U_4)$ $F_1 = \cos(-0,30210) + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = 1,32971$

$$F_2 = \cos\left(-0,30210 + \frac{1}{8} \cdot 1,32971\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{8}\right) = 1,42828$$

$$U_4 = -0,30210 + \frac{1}{4} \cdot 1,42828 = \boxed{0,05497}$$

# Index of comments

4.1 No converge a los valores esperados. Error de cálculo.