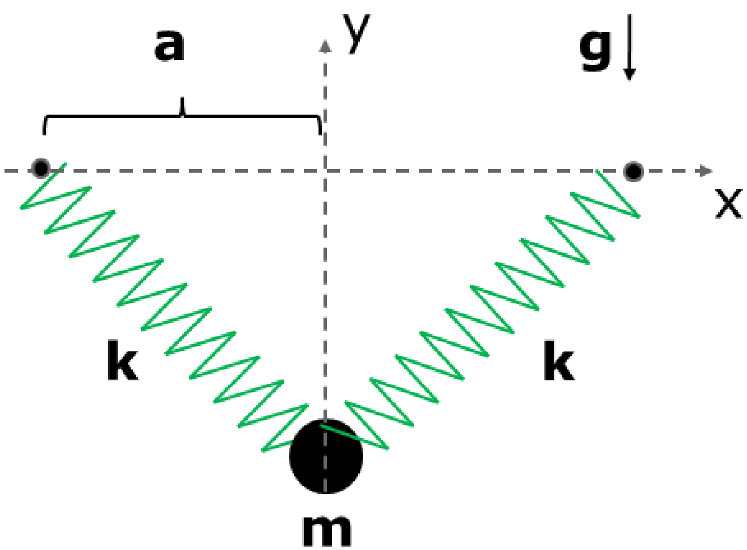
Ecuaciones no lineales (ENL)

Motivación

Resolver problemas de la Física/Ingeniería donde no existe solución analitica

Dado el siguiente sistema mecánico. Se pide estudiar el comportamiento de sus puntos de equilibrio respecto de sus parámetros:

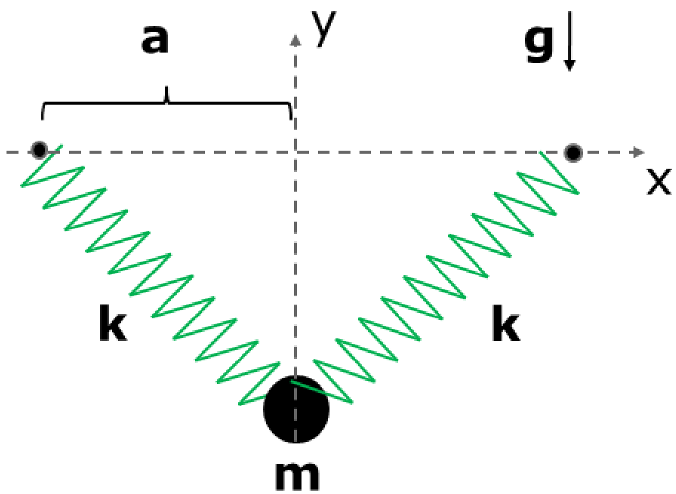


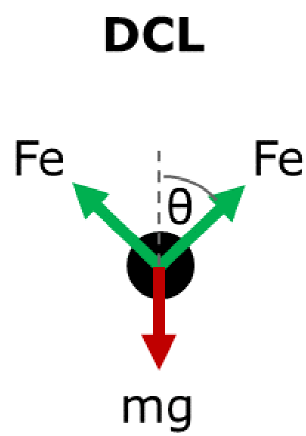
m	[kg]	masa de la partícula
k	[N/m]	constante elástica de los resortes
L_0	[m]	longitud natural de los resortes
a	[m]	mitad de la distancia entre extremos fijos de cada resorte
g	[m/ s^2]	9.81

- Hallar la fuerza elástica como función de la posición “y”.
- Encontrar la condición para obtener los puntos de equilibrio del sistema (estables e inestables).

Ecuaciones no lineales (ENL)

Motivación





$$Felastica = -k.\,estiramiento$$

$$estiramiento = \sqrt{y^2 + a^2} - L_0$$

$$F_{resultante} = 2(-k.\,estiramiento)\cos\theta - mg \;= -2k\left(\sqrt{y^2+a^2} - L_0\right)\frac{y}{\sqrt{y^2+a^2}} - mg$$

$$F_{resultante}(y) = -2ky\left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{y^2+a^2}}\right) - mg \;= ma = m\frac{d^2y}{dt^2}$$

PROBLEMA DE VALOR INICIAL (PVI)

para hallar puntos de equilibrio: $a = 0 \rightarrow \quad F_{resultante}(y) = 0$

$$-2ky\left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{y^2+a^2}}\right) - mg = 0$$

ECUACION NO LINEAL

Ecuaciones no lineales (ENL)

Objetivo

Hallar raíces o ceros de una función: f(x)=0 → x?

O en **n** dimensiones: f1(x1,x2,…,xn)=0
f2(x1,x2,…,xn)=0
fn(x1,x2,…,xn)=0 → x1, x2,…xn?

Cuando no se puede despejar **x** → métodos numéricos

Métodos aplicados a 1 variable

- Método de Bisección
- Método de Regula-Falsi (Posición Falsa)

métodos de **arranque**
→ siempre convergen

- Método de Punto Fijo
- Método de Newton-Raphson
- Método de la Secante

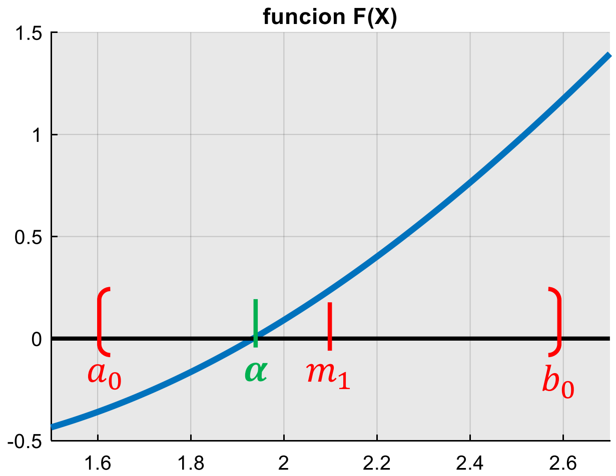
métodos de **convergencia**
→ NO siempre convergen

Ejercicio

Problema 2

Sea $f(x) = \frac{x^2}{4} - sen(x)$. Se desea encontrar la primera raíz positiva de F(x).

a) Hallar un intervalo de partida para utilizar el método de bisección.



$F(a_0) * F(b_0) < 0$ **?**

$F(1.6) = -0.36$
$F(2.6) = 1.17$ ✓

¿alcanza solo con esto para asegurar que el intervalo tiene una raíz? **NO**

$$m_1 = \frac{(b_0 + a_0)}{2} \Rightarrow m_{k+1} = \frac{(b_k + a_k)}{2}$$

cota de error pedida (5 decimales exactos) ➡ $\Delta m < 0.5 \, . \, 10^{-5}$

b) Estimar el número de aproximaciones necesarias para hallar la raíz con una tolerancia para el error absoluto de 0.02. Calcular la raíz.

Error de truncamiento? $|m_{k+1} - \alpha| \leq \Delta m_{k+1} = \frac{(b_k - a_k)}{2} = \frac{(b_0 - a_0)}{2^{k+1}} = \varepsilon$

$\varepsilon < 0.02$ ➡ $k + 1 > \frac{\ln[(b_0 - a_0)/\varepsilon]}{\ln 2}$ ➡ $k > 4.64 \sim$ **5**

*En los demás métodos k no se puede anticipar

Ejercicio

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	m_{k+1}	Δm_{k+1}	**Δm/m**
0	1.6	2.6	-0.36	1.17	2.1	0.5	0.23810
1	1.6	2.1	-0.36	0.24	1.85	0.25	0.13514
2	1.85	2.1	-0.11	0.24	1.975	0.125	0.06329
3	1.85	1.975	-0.11	0.06	1.9125	0.0625	0.03268
4	1.9125	1.975	-0.03	0.06	1.94375	0.03125	**0.01608**
5	1.91250	1.94375	-0.03	0.01	**1.92813**	**0.01563**	0.00810

Expresión del resultado para 6 iteraciones (k=5):

Δm = 0.02 → **m = 1.93 ± 0.02**

c) Si la tolerancia de 0.02 es sobre el error relativo, cuántas aproximaciones se requieren ?

Como quedaría expresado el resultado para 5 iteraciones (k=4)?

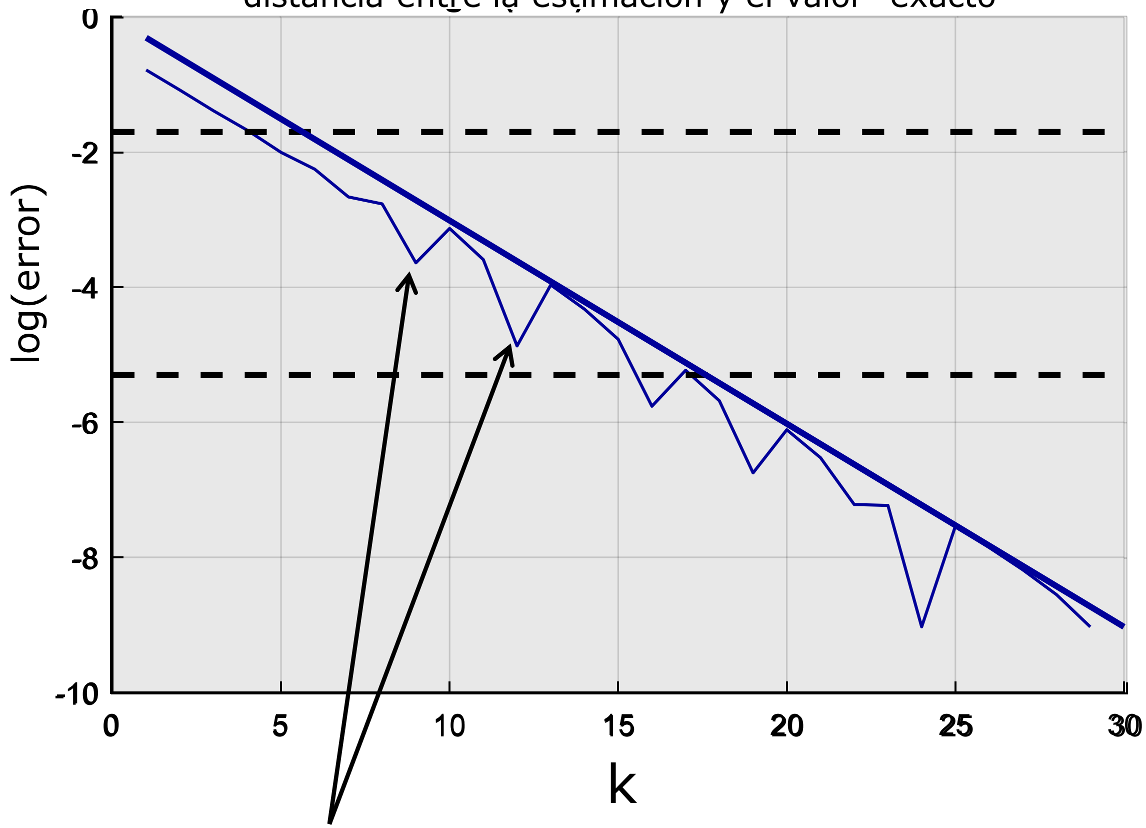
Δm/m = 0.02 → m = 1.94375 ± 0.03125 → **m = 1.94 ± 0.04**

Ejercicio

d) Sabiendo que la raíz buscada a 5 decimales correctos es α=1.93375 obtener conclusiones sobre la performance del método.

k	m	|1.93375 - m|
0	2.1	0.16625
1	1.85	0.08375
2	1.975	0.04125
3	1.9125	0.02125
4	1.94375	0.01000
5	1.92813	0.00563
6	1.93594	0.00219
7	1.93203	0.00172
8	1.93398	0.00023
9	1.93301	0.00074
10	1.93350	0.00025
11	1.93374	0.00001
12	1.93386	0.00011
13	1.93380	0.00005
14	1.93377	0.00002
15	1.93376	0.00001
16	1.93375	0.00000
17	1.93375	0.00000
18	1.93375	0.00000
19	1.93375	0.00000
20	1.93375	0.00000
21	1.93375	0.00000
22	1.93375	0.00000

distancia entre la estimación y el valor "exacto"



Iteraciones donde se acerca mas al valor exacto y luego se vuelve a alejar

Ejercicio

e) Estimar el orden de convergencia en forma experimental.

Def) si $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)^p}} = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\left|\underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}\right|}{\left|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}\right|^p} = \lambda$, entonces llamamos

λ : constante asintótica del error

p : orden de convergencia

Como no conocemos $\underline{x}$, en lugar del error $\varepsilon^{(k+1)} = \left|\underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}\right|$ usamos la diferencia entre las dos últimas iteraciones $\Delta x^{(k+1)} = \left|\underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^{(k)}\right|$, y decimos lo mismo:

$$\frac{\Delta x^{(k+1)}}{\Delta x^{(k)^p}} = \frac{\left|\underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^{(k)}\right|}{\left|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^{(k-1)}\right|^p} = \lambda \text{ (en escala log es una recta)}$$

por ejemplo
$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\Delta x^{(3)}}{(\Delta x^{(2)})^p} = \lambda \\[2ex] \dfrac{\Delta x^{(2)}}{(\Delta x^{(1)})^p} = \lambda \end{array}\right.$$

Despejando: $p = \dfrac{\ln\left(\Delta x^{(k+1)} / \Delta x^{(k)}\right)}{\ln\left(\Delta x^{(k)} / \Delta x^{(k-1)}\right)}$ (el método tiene que estar convirgiendo)

Ejercicio

e) Estimar el orden de convergencia en forma experimental.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	m_{k+1}	Δm_{k+1}	$\Delta m/m$
0	1.6	2.6	-0.36	1.17	2.1	0.5	0.23810
1	1.6	2.1	-0.36	0.24	1.85	0.25	0.13514
2	1.85	2.1	-0.11	0.24	1.975	0.125	0.06329
3	1.85	1.975	-0.11	0.06	1.9125	0.0625	0.03268
4	1.9125	1.975	-0.03	0.06	1.94375	0.03125	**0.01608**
5	1.91250	1.94375	-0.03	0.01	1.92813	**0.01563**	0.00810

Cálculo del orden de convergencia **p** y la tasa **λ** para tomando informacion de las primeras 4 filas:

$$\Delta x^{(3)} = \left|m^{(3)} - m^{(2)}\right| = |1.9125 - 1.975| = 0.0625$$
$$\Delta x^{(2)} = \left|m^{(2)} - m^{(1)}\right| = |1.975 - 1.85| = 0.125$$
$$\Delta x^{(1)} = \left|m^{(1)} - m^{(0)}\right| = |1.85 - 2.1| = 0.25$$

$$p = \frac{\ln\left(\Delta x^{(3)}/\Delta x^{(2)}\right)}{\ln\left(\Delta x^{(2)}/\Delta x^{(1)}\right)} = \frac{\ln(0.0625/0.125)}{\ln(0.125/0.25)} = \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.5)} = 1 \qquad \lambda = \frac{\Delta x^{(3)}}{(\Delta x^{(2)})^p} = \frac{0.0625}{(0.125)^1} = 0.5$$

En el Método de Bisección el orden de convergencia **p es exactamente 1** y la tasa **λ = 0.5** en todas las iteraciones.

Ejercicio

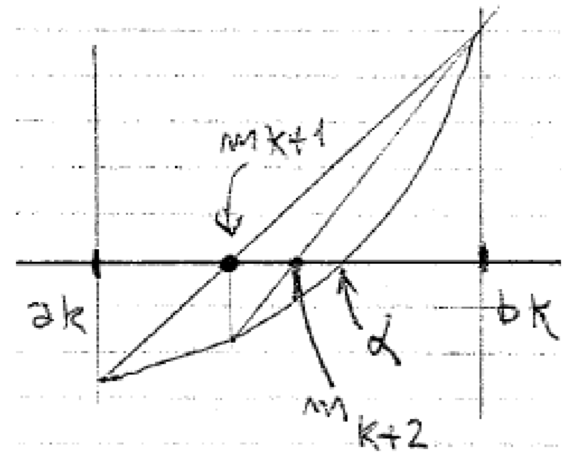
e) Estimar el orden de convergencia en forma experimental.

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	m_{k+1}	Δm_{k+1}	$\Delta m/m$	λ	p
0	1.6	2.6	-0.36	1.17	2.1	0.5	0.23810		
1	1.6	2.1	-0.36	0.24	1.85	0.25	0.13514		
2	1.85	2.1	-0.11	0.24	1.975	0.125	0.06329		
3	1.85	1.975	-0.11	0.06	1.9125	0.0625	0.03268	0.5	1
4	1.9125	1.975	-0.03	0.06	1.94375	0.03125	**0.01608**	0.5	1
5	1.91250	1.94375	-0.03	0.01	1.92813	**0.01563**	0.00810	0.5	1
6	1.92813	1.94375	-0.01	0.01	1.93594	0.00781	0.00404	0.5	1
7	1.92813	1.93594	-0.01	0.00	1.93203	0.00391	0.00202	0.5	1
8	1.93203	1.93594	0.00	0.00	1.93398	0.00195	0.00101	0.5	1
9	1.93203	1.93398	0.00	0.00	1.93301	0.00098	0.00051	0.5	1
10	1.93301	1.93398	0.00	0.00	1.93350	0.00049	0.00025	0.5	1
11	1.93350	1.93398	0.00	0.00	1.93374	0.00024	0.00013	0.5	1
12	1.93374	1.93398	0.00	0.00	1.93386	0.00012	0.00006	0.5	1
13	1.93374	1.93386	0.00	0.00	1.93380	0.00006	0.00003	0.5	1
14	1.93374	1.93380	0.00	0.00	1.93377	0.00003	0.00002	0.5	1
15	1.93374	1.93377	0.00	0.00	1.93376	0.00002	0.00001	0.5	1
16	1.93374	1.93376	0.00	0.00	1.93375	0.00001	0.00000	0.5	1
17	1.93375	1.93376	0.00	0.00	**1.93375**	0.00000	0.00000	0.5	1

Se requieren **18 iteraciones** para lograr la precisión de 5 decimales.

Ejercicio

4- Utilizar el método de Regula-Falsi para hallar la raíz del ejercicio 3. Realice varias aproximaciones, con el objeto de poder estimar experimentalmente el orden de convergencia del método. Compare sus resultados con los del ej. 3.



Método de Regula-Falsi:

$m_{k+1} = a_k - (b_k - a_k)*f(a_k)/(f(b_k) - f(a_k))$

luego **evaluar $f(m_{k+1})$** para elegir el próximo intervalo (ídem bisección).

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	m_{k+1}	Δm_{k+1}	$\Delta m/m$	λ	orden
0	1.6	2.6	-0.36	1.17	1.83439				
1	1.83439	2.6	-0.12	1.17	1.90762	0.07322	0.038385		
2	1.90762	2.6	-0.03	1.17	1.92713	**0.01951**	**0.010126**		
3	1.92713	2.6	-0.01	1.17	1.93209	0.00496	0.002568	0.29	1.03546
4	1.93209	2.6	0.00	1.17	1.93334	0.00125	0.000645	0.26	1.00898
5	1.93334	2.6	0.00	1.17	1.93365	0.00031	0.000161	0.25	1.00225
6	1.93365	2.6	0.00	1.17	1.93373	0.00008	4.04E-05	0.25	1.00056
7	1.93373	2.6	0.00	1.17	1.93375	0.00002	1.01E-05	0.25	1.00014
8	1.93375	2.6	0.00	1.17	**1.93375**	0.00000	2.53E-06	0.25	1.00004

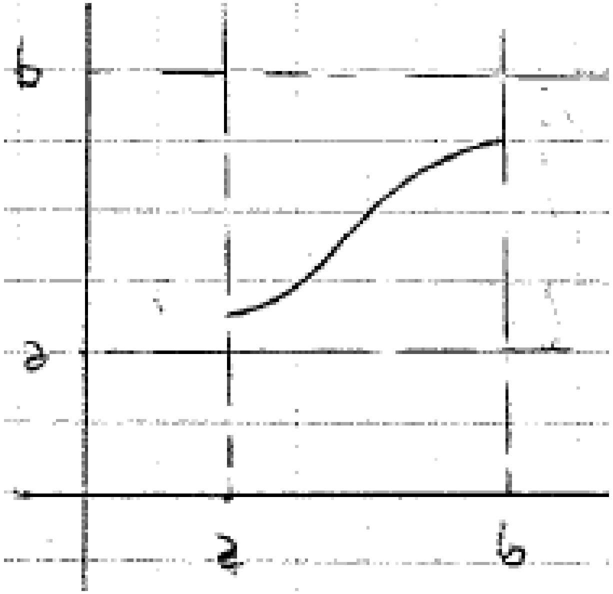
Se necesitaron **9 iteraciones** para llegar al valor exacto con 5 decimales, mientras que en el método de bisección se necesitaron 18. Si bien el orden de convergencia es prácticamente el mismo, la tasa **λ** es aproximadamente la mitad respecto de bisección.

Método de Punto Fijo

$\mathbf{x_p}$ es punto fijo de una función g(x) si $g(\mathbf{x_p})=\mathbf{x_p}$

Si $g(x) = x - \phi(x)\, f(x)$ entonces $\mathbf{x_p}$ es punto fijo de g y **raíz de f**

Condiciones



Si g(x) ε [a,b] para todo x ε [a,b] → entonces g tiene un punto fijo en [a,b]

Si |g'(x)|<1 para todo x ε [a,b] → entonces el punto fijo es único.

Para el ejercicio y eligiendo $\phi(x)=1$

$$g(x) = x - (x^2/4 - \text{sen}(x)) \rightarrow \quad X_{k+1} = x_k - (x_k^2/4 - \text{sen}(x_k))$$

otra G posible:

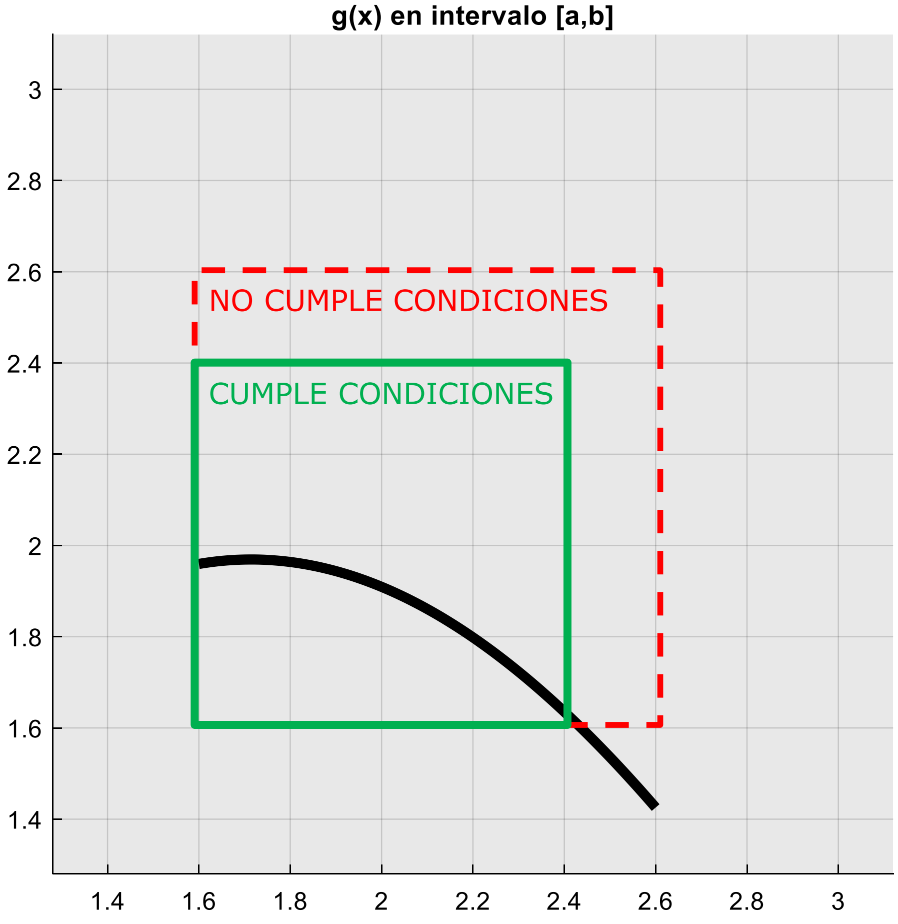
$$g(x) = 2\ \text{sen}(x)^{1/2}$$

Para comenzar se elige una semilla $\mathbf{x_k}$ perteneciente al intervalo [a,b] encontrado que satisfaga los supuestos.

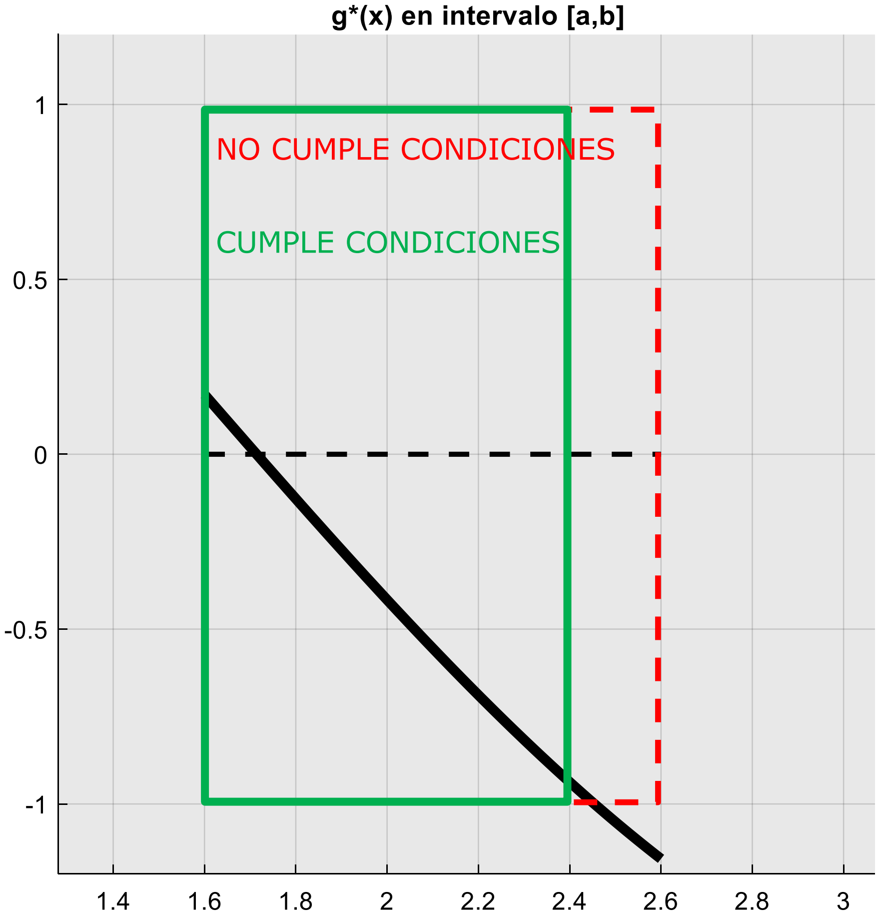
Método de Punto Fijo

Selección del intervalo [a.b] y elección de la semilla $\mathbf{x_k}$. Veníamos trabajando con el intervalo [a,b] = [1.6,2.6]:

$g(x) = x - [x^2/4 - \text{sen}(x)]$



$g'(x) = 1 - [x/2 - \cos(x)]$



Método de Punto Fijo

$g(x) = x - (x^2/4 - \text{sen}(x))$

$X_{k+1} = x_k - (x_k^2/4 - \text{sen}(x_k))$

Ejemplo para k=0:

$X_1 = x_0 - (x_0^2/4 - \text{sen}(x_0))$

$X_1 = 1.6 - (1.6^2/4 - \text{sen}(1.6)) =$ **1.95957**

k	X_k	$\Delta X=\lvert x_k-x_{k-1}\rvert$	$\Delta X/X_k$	λ	p
0	1.6				
1	$\boxed{1.95957}$	0.35957	0.18679		
2	1.92496	0.03461	**0.01787**		
3	1.93653	**0.01156**	0.00598	0.056	0.468
4	1.93286	0.00367	0.00190	0.390	1.046
5	1.93404	0.00119	0.00061	0.297	0.985
6	1.93366	0.00038	0.00020	0.332	1.005
7	1.93378	0.00012	0.00006	0.318	0.998
8	1.93374	0.00004	0.00002	0.323	1.001
9	1.93376	0.00001	0.00001	0.321	1.000
10	1.93375	0.00000	0.00000	0.322	1.000

Método de Newton-Raphson

Se lo puede considerar como un caso particular del Método de Punto Fijo:

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Para nuestra F(x): $x_{k+1} = x_k - \dfrac{\frac{x_k^2}{4} - sen(x_k)}{\frac{x_k}{2} - cos(x_k)}$

Siendo un Método de Punto Fijo se necesita una semilla que esté lo suficientemente cerca de la raíz (debiendo cumplir las condiciones sobre g y g'):

k	x_k	$\Delta X = \lvert x_k - x_{k-1} \rvert$	$\Delta X / X_k$	λ	p
0	1.6				
1	2.03364	0.43364	0.22369		
2	1.93856	0.09508	**0.04917**		
3	1.93377	**0.00479**	0.00248	0.493	1.969
4	1.93375	0.00001	0.00001	0.520	1.992
5	**1.93375**	0.00000	0.00000	0.542	2.000

Observar orden de convergencia ~ 2

Desventajas del método?
Requiere evaluar la derivada primera
en cada iteración → qué se puede hacer?

Método de la Secante

Se aproxima la derivada primera en el método de Newton-Raphson por una recta secante entre 2 puntos.

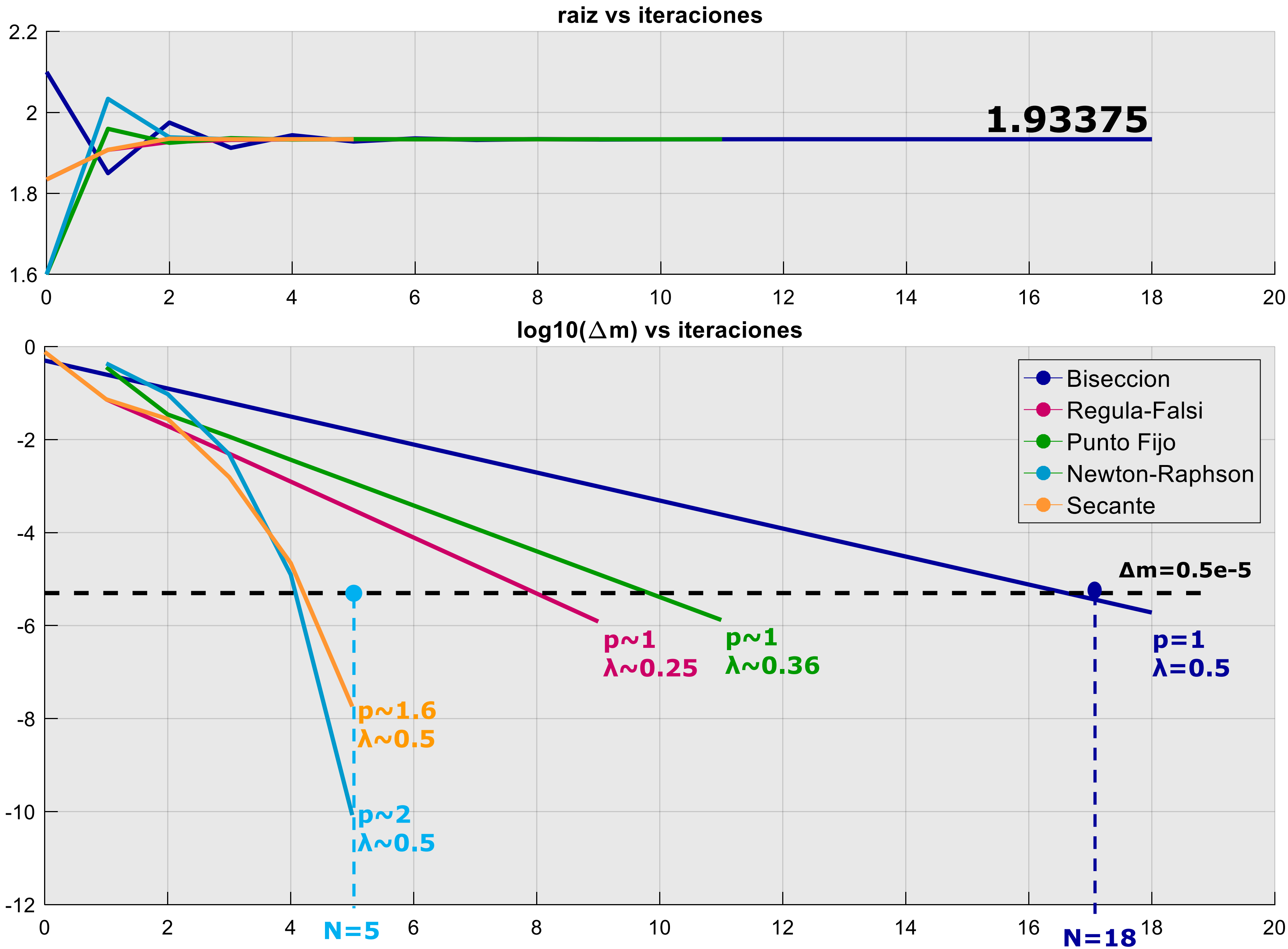
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad \Longrightarrow \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}}$$

Se necesitan 2 puntos de arranque. NO es necesario que encierren a la raíz como en Bisección y Regula-Falsi.

k	X_{k-1}	X_k	X_{k+1}	$\Delta m=\lvert X_{k+1}-X_k\rvert$	$\Delta m/m$	λ	p
0	1.6	2.6	1.83439	0.76561	0.41736		
1	2.6	1.83439	1.90762	0.07322	0.03839		
2	1.83439	1.90762	1.93528	0.02767	**0.01430**		
3	1.90762	1.93528	1.93373	**0.00155**	0.00080	0.310	1.477
4	1.93528	1.93373	1.93375	0.00002	0.00001	1.064	1.667
5	1.93373	1.93375	**1.93375**	0.00000	0.00000	0.5037	1.597

Observar orden de convergencia entre 1 y 2 (método supralineal)

Resumen

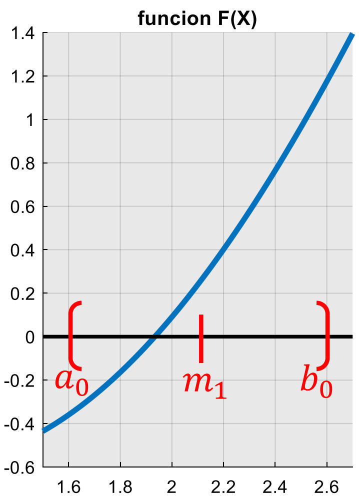


raiz vs iteraciones
1.93375
log10(Δm) vs iteraciones
Biseccion
Regula-Falsi
Punto Fijo
Newton-Raphson
Secante
Δm=0.5e-5
p~1
λ~0.25
p~1
λ~0.36
p=1
λ=0.5
p~1.6
λ~0.5
p~2
λ~0.5
N=5
N=18

Comparación de métodos

Tenemos los siguientes métodos aplicados a la ecuación no lineal F(x)=0:

BISECCION

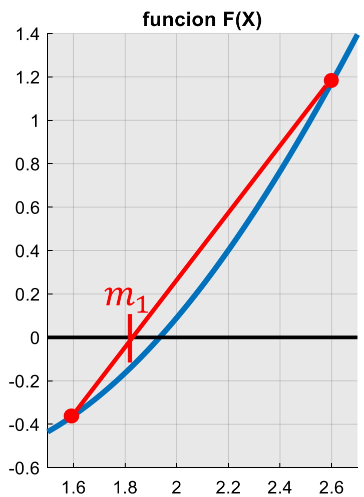


$$m_{k+1} = \frac{(b_k + a_k)}{2}$$

$F(a_k) * F(b_k) < 0$ **?**

λ = 0.5
p = 1
N = 18

REGULA-FALSI

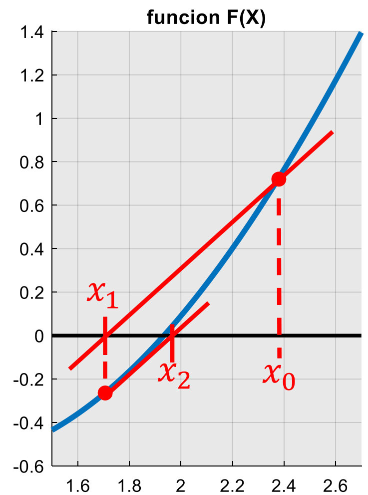


$$m_{k+1} = a_k - \frac{f(a_k)}{\frac{f(a_k) - f(b_k)}{b_k - a_k}}$$

$F(a_k) * F(b_k) < 0$ **?**

λ ~ 0.25
p ~ 1
N = 9

PUNTO FIJO

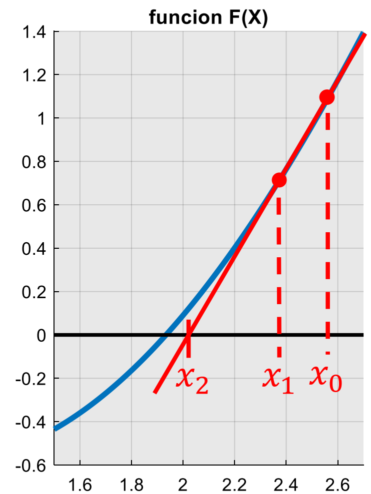


$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{1}$$

sin *control*

λ ~ 0.36
p ~ 1
N = 10

SECANTE

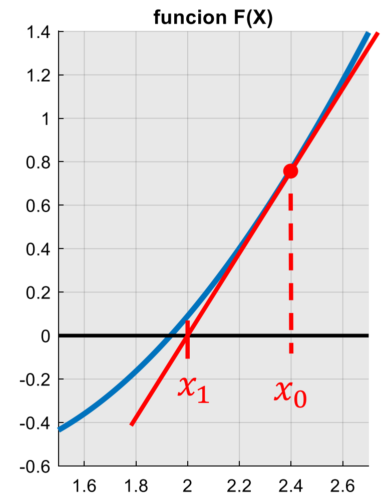


$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}}$$

sin *control*

λ ~ 0.5
p ~ 1.6
N = 6

NEWTON



$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

sin *control*

λ ~ 0.5
p ~ 2
N = 5

- Acercarse lo suficiente a la raíz para aplicar algún método de convergencia
- Asegurar convergencia

– INFORMACION / VELOCIDAD **+**

- Necesidad de refinar la solución
- Cuando se requiere resolver una ENL como parte de un problema mayor

Ejercicios varios

13. Obtener una fórmula iterativa de Newton-Raphson para hallar la raíz cúbica de un número positivo c.

$f(x) = x^3 - c$ $\quad$ $f(x) = 0$? $\quad$ $raiz = \sqrt[3]{c}$

Newton-Raphson: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ $\quad$ $f'(x) = 3x^2$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - c}{3x_k^2}$$

Se debe elegir un punto de arranque …

14. Obtener una fórmula iterativa de Newton-Raphson para hallar el arcsen(a) siendo dato el valor de a. Determinar arcsen(0.5) con 3 dígitos significativos.

19. Suponer que se quiere evaluar el logaritmo natural de un número a, pero la máquina de que se dispone no lo provee, aunque sí tiene implementada la función exponencial. Proponer un método para calcular ln(a) y evaluarlo utilizando aritmética de punto flotante con 4 dígitos de precisión, para a=1.2.