Transformaciones Lineales

Episodio 11.Rotaciones en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$,Proyecciones, Simetrías.

Álgebra Lineal
mfiuba@gmail.com

Departamento de Matemática
FIUBA

31 de mayo de 2020

Producto Escalar y Ángulo en $\mathbb{R}^n$

Si $X, Y \in \mathbb{R}^n$ se define producto escalar entre Y e Y:

$$X.\ Y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots \cdots + x_n y_n = X^T Y$$

Si X e Y son dos vectores no nulos en $\mathbb{R}^n$ se dice que θ es **el ángulo** que forman X e Y si :

$$\cos(\theta) = \frac{X.\ Y}{\|X\|\|Y\|}, \text{ con } 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Se nota $\alpha(X, Y) = \theta$

Rotación en $\mathbb{R}^2$

La rotación de un vector en el plano es el resultado de aplicar un movimiento que queda determinado por un **centro** y un **ángulo** sin cambiar su longitud. El centro es el punto alrededor del cual **se gira** el vector a lo largo de un ángulo, que llamaremos ángulo de giro.

El **centro** de las rotaciónes con las que vamos a trabajar siempre será el origen de $\mathbb{R}^2$ y el ángulo se medirá como positivo cuando se gira en sentido contrario a las agujas del reloj.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Empecemos entonces por definir una transformación lineal $R: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de manera tal que gire en un ángulo θ a cada vector de la base canónica y después verifiquemos que, efectivamente, estamos obteniendo la fórmula de una función que aplica una rotación a cada vector de $\mathbb{R}^2$.
Tomando la base canónica en $\mathbb{R}^2$ tendremos que definir una tl R:

$$R(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ con } a^2 + b^2 = 1$$

$$R(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = w = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \text{ con } c^2 + d^2 = 1$$

Buscamos que el ángulo formado por los vectores v con $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y w con $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sea θ, entonces escribimos:

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

$$\cos(\theta) = \frac{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}}{1 \ . \ 1} = a \ \Rightarrow a = \cos(\theta) \Rightarrow b^2 = 1 - a^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow b^2 = 1 - cos^2(\theta) \Rightarrow b = \pm\text{sen}(\theta)$, como se debe cumplir que el giro es de un ángulo menor o igual a $\pi \Rightarrow$ el vector v está en el primer o segundo cuadrante $\Rightarrow b \geq 0 \Rightarrow b = \text{sen}(\theta)$.

$$\cos(\theta) = \frac{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} . \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}}{1\ .\ 1} = a \Rightarrow a = \cos(\theta) \Rightarrow b^2 = 1 - a^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow b^2 = 1 - cos^2(\theta) \Rightarrow b = \pm\text{sen}(\theta)$, como se debe cumplir que el giro es de un ángulo menor o igual a $\pi \Rightarrow$ el vector v está en el primer o segundo cuadrante $\Rightarrow b \geq 0 \Rightarrow b = \text{sen}(\theta)$.

Análogamente, con $R(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})$ queda:

$d = \cos(\theta)$ y como $c^2 = 1 - d^2 = 1 - \cos^2(\theta) \Rightarrow c = \pm\cos(\theta)$

Ahora, si estamos rotando el vector $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ en un ángulo $\theta \leq \pi$ siempre deberá cumplirse que $c \leq 0 \Rightarrow c = -\text{sen}(\theta)$

Entonces resumiendo tenemos:

$$R(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) \end{pmatrix}$$

$$R(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Entonces la transformación que estamos buscando, ya quedó definida en la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y podemos encontrar su expresión general:

$$R(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = x_1 R(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) + x_2 R(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

$$R(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = x_1 \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Podemos expresar más comodamente la transformación lineal a través de su matriz con respecto a la base canónica:

$$R\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Es cuestión de hacer cuentas verificar que efectivamente $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ se cumple que :

$$\alpha\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \theta$$

Sólo se trata de desarrollar las cuentas con voluntad.

Rotación en $\mathbb{R}^3$

El movimiento de rotación queda definido como el movimiento que aplica un ángulo de giro a los vectores de un plano, alrededor de un eje, ortogonal a dicho plano. (El ángulo se considera positivo cuando el giro es en sentido contrario a las agujas del reloj.)

Rotación en $\mathbb{R}^3$

El movimiento de rotación queda definido como el movimiento que aplica un ángulo de giro a los vectores de un plano, alrededor de un eje, ortogonal a dicho plano. (El ángulo se considera positivo cuando el giro es en sentido contrario a las agujas del reloj.)

Vamos a presentar explicitamente los casos más sencillos, que serían las rotaciones de ángulo θ en sentido positivo alrededor de cada uno de los ejes coordenados.

Para cada caso, tal como hicimos para R^2 definiremos la transformación lineal, sobre la base canónica de $\mathbb{R}^3$, para cada una de las siguientes rotaciones:

- Rotación de ángulo θ en sentido positivo del plano xy alrededor del eje z.
- Rotación de ángulo θ en sentido positivo del plano xz alrededor del eje y.
- Rotación de ángulo θ en sentido positivo del plano yz alrededor del eje x.

- Rotación de ángulo θ en sentido positivo del plano xy alrededor del eje z.

Obviamente vamos a usar lo que ya trabajamos para $\mathbb{R}^2$.

Sabemos que el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ quedará fijo y los vectores canónicos del ejex y el eje y rotaran en el plano xy, en sentido antihorario, como antes:

$$R\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \operatorname{sen}(\theta)\\ 0\end{pmatrix}$$

$$R\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-\operatorname{sen}(\theta)\\ \cos(\theta)\\ 0\end{pmatrix}$$

$$R\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Obtenemos la matriz de rotación de ángulo θ alrededor del eje z :

$$R_{\theta,z} = \begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) & 0\\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

De la misma forma, podemos obtener las matrices de rotación de ángulo θ,en sentido positivo,con respecto al eje x y con respecto al eje y, respectivamente:

$$R_{\theta,x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$R_{\theta,y} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Proyectores

Vamos a definir proyector, formalmente, como un endomorfismo ($\Pi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$) en cualquier espacio vectorial $\mathbb{V}$ que cumple:

$$\Pi \circ \Pi = \Pi$$

Empecemos por algunas observaciones:

a $\boxed{\textbf{Si } w \in \textbf{Im}(\Pi) \Rightarrow \Pi(w) = w.}$

Pues si $w \in \text{Im}(\Pi) \Rightarrow \exists\, v \in \mathbb{V} \,/\; \Pi(v) = w$
Como $\Pi \circ \Pi = \Pi \Rightarrow (\Pi \circ \Pi)(v) = \Pi(v)$
$\Pi(\Pi(v)) = \Pi(v)$, reemplazando $\Pi(v)$ por w, queda:
$\Pi(w) = w;\ \forall\, w \in \text{Im}(\Pi).\checkmark$

b $\boxed{\mathbf{Nu(\Pi)\oplus\ Im(\Pi)=}\mathbb{V}}$

Supongamos que $v \in \text{Nu}(\Pi) \cap \text{Im}(\Pi)$.
Entonces, como $v \in \text{Im}(\Pi) \Rightarrow \Pi(v) = v$.
Como $v \in \text{Nu}(\Pi) \Rightarrow \Pi(v) = 0_{\mathbb{V}} \Rightarrow v = 0_{\mathbb{V}}$

b $\boxed{\mathbf{Nu(\Pi) \oplus Im(\Pi) = \mathbb{V}}}$

Supongamos que $v \in \text{Nu}(\Pi) \cap \text{Im}(\Pi)$.
Entonces, como $v \in \text{Im}(\Pi) \Rightarrow \Pi(v) = v$.
Como $v \in \text{Nu}(\Pi) \Rightarrow \Pi(v) = 0_{\mathbb{V}} \Rightarrow v = 0_{\mathbb{V}}$

Con esto demostramos que $\text{Nu}(\Pi)$ e $\text{Im}(\Pi)$ están en suma directa, para ver que su suma es $\mathbb{V}$, basta con aplicar el teorema de las dimensiones de $\text{Nu}(T)$ e $\text{Im}(T)$ para T transformación lineal.

$\dim(\text{Nu}(\Pi)) + \dim(\text{Im}(\Pi)) = \dim(\mathbb{V})$
y $\text{Nu}(\Pi) \oplus \text{Im}(\Pi) \subseteq \mathbb{V} \Rightarrow \text{Nu}(\Pi) \oplus \text{Im}(\Pi) = \mathbb{V}$.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Las dos observaciones anteriores nos permiten definir cómodamente cualquier proyección. Pues todo vector de $\mathbb{V}$ puede descomponerse en función de $\mathrm{Nu}(\Pi)$ y de $\mathrm{Im}(\Pi)$ de manera única. Definido el subespacio que va a ser $\mathrm{Im}(\Pi)$ y el subespacio que va a ser $\mathrm{Nu}(\Pi)$, queda definida una proyección "transversal", que se nota $\Pi_{S_1 S_2}$.
En los subíndices:
S_1 la imagen de Π y S_2 el Núcleo de Π.
Se lee la proyección sobre S_1 en la dirección de S_2.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Propiedad

En lo que sigue: $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial y S_1 y S_2 subespacios de $\mathbb{V}$, tal que $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{V}$

1. $\Pi_{S_1 S_2} + \Pi_{S_2 S_1} = I_{\mathbb{V}}$
   Como
   $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{V} \Rightarrow \forall\ v \in \mathbb{V},\ \exists n$ únicos v_1, v_2 tal que $v = v_1 + v_2$.
   Entonces:

$$\begin{aligned}
\Pi_{S_1 S_2}(v) &= \Pi_{S_1 S_2}(v_1 + v_2) \\
&= \Pi_{S_1 S_2}(v_1) + \Pi_{S_1 S_2}(v_2) \\
&= v_1 + 0_{\mathbb{V}} = v_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pi_{S_2S_1}(v) &= \Pi_{S_2S_1}(v_1 + v_2)\\ &= \Pi_{S_2S_1}(v_1) + \Pi_{S_2S_1}(v_2)\\ &= 0_{\mathbb{V}} + v_2 = v_2\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}[\Pi_{S_1S_2} + \Pi_{S_2S_1}](v) &= \Pi_{S_1S_2}(v) + \Pi_{S_2S_1}(v)\\ &= v_1 + v_2 = v \;\forall\; v \in \mathbb{V}.\end{aligned}$$

$\Pi_{S_1S_2} + \Pi_{S_1S_2} = \mathrm{I}_{\mathbb{V}} \checkmark$
$\Pi_{S_1S_2} = \mathrm{I}_{\mathbb{V}} - \Pi_{S_2S_1}$

Simetría

En base a la proyección, podemos encontrar rápidamente la fórmula para definir la **Simetría con respecto a S_1 en la dirección de S_2**:

$\sum_{S_1 S_2}(v) = v - 2\Pi_{S_2 S_1}(v)$ Es directo ver que:

- $\sum_{S_1 S_2}(v) = v \ \forall v \in S_1$
- $\sum_{S_1 S_2}(v) = -v \ \forall v \in S_2$

Por lo tanto resultará muy sencillo definir la simetría sobre una base de $\mathbb{V}$ que contenga simultáneamente una base de S_1 y de S_2.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Algunos Ejemplos

- Hallar la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano

  $S_1 = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ en la dirección de la recta dada

  por $S_2 = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

  Tal como vimos, la proyección buscada será una transformación lineal, que tiene como Núcleo el subespacio S_2 y como Imagen el subespacio S_1. Definimos la transformación lineal sobre la base de $\mathbb{R}^3$:

  $$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Definimos:
$T((1\ 1\ 1)^T) = (1\ 1\ 1)^T$
$T((1\ 2\ 0)^T) = (1\ 2\ 0)^T$
$T((1\ 2\ 1)^T) = (0\ 0\ 0)^T$
Con esto, la transformación lineal que buscamos queda definida. Si queremos encontrar su fórmula, en función de las coordenadas de un vector en la base canónica, un camino posible es:
$X \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow X =$
$\alpha(1\ 1\ 1)^T + \beta(1\ 2\ 0)^T + \gamma(1\ 2\ 1)^T$; con $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$
Resolvemos el sistema que queda de igualar coordenada a coordenada, triangulando la matriz correspondiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 1 & 2 & 2 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & -1 & 0 & x_3 - x_1 \end{array}\right)$$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Obtenemos:

$$\alpha = 2x_1 - x_2;$$
$$\beta = x_1 - x_3;$$
$$\gamma = -2x_1 + x_2 + x_3.$$

y queda:

$$T(x_1\ x_2\ x_3) = (2x_1 - x_2)T((1\ 1\ 1)^T) + (x_1 - x_3)T((1\ 2\ 0)^T) + (-2x_1 + x_2 + x_3)T((1\ 2\ 1)^T)$$

$$T((x_1\ x_2\ x_3)^T) = (2x_1 - x_2)(1\ 1\ 1)^T + (x_1 - x_3)(1\ 2\ 0)^T + (-2x_1 + x_2 + x_3)(0\ 0\ 0)^T$$

Finalmente obtenemos:

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 - x_3 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

De paso, obtuvimos:

$$[T]_E^E = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; E \text{ la base canónica de } \mathbb{R}^3$$

Para hallar $[T]_E^E$ también podríamos haber buscado $[T]_B^B$ y después multiplicar a izquierda y derecha por los cambios de base adecuados.(*Tarea para la noche insomne.*)

- Hallar la matriz respecto de la base canónica, de la simetría de $\mathbb{R}^3$ con respecto a $S_1 = \left\{(x_1\ x_2\ x_3)^T / 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\right\}$, en la dirección de la recta $S_2 = \text{gen}\left\{(1\ 1\ 1)^T\right\}$.
  Como dijimos antes, la forma más simple de definir una isometría es definir cuanto vale en una base de $\mathbb{R}^3$ que contiene simultáneamente una base de S_1 y de S_2. Primero entonces buscamos una base de S_1. Para encontrar los generadores, de la ecuación que define a S_1 sacamos que $x_3 = 2x_1 + x_2$ y $S_1 = \text{gen} = \left\{(1\ 0\ 2)^T,\ (0\ 1\ 1)^T\ \right\}$ (estos vectors son l.i.) El generador de S_2 es l.i. con los generadores de S_1, pues no cumple con la ecuación que define a S_1. Así que :
  $B = \left\{(1\ 0\ 2)^T,\ (0\ 1\ 1)^T,\ (1\ 1\ 1)^T\right\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$.

Sobre esta base es muy sencillo definir la simetría:
$F((1\ 0\ 2)^T) = (1\ 0\ 2)^T$;
$F((0\ 1\ 1)^T) = (0\ 1\ 1)^T$;
$F((1\ 1\ 1)^T) = -(1\ 1\ 1)^T$.

Aquí ya tenemos definida la simetría que buscamos sobre la base B y la matriz con respecto a este base es:

$$[F]_B^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Si queremos hallar $[F]_E^E$, tenemos:

$$[F]_E^E = M_B^E [F]_B^B M_E^B$$

$$M_B^E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \quad M_E^B = (M_B^E)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$[F]_E^E = M_B^E \, [F]_B^B \, M_E^B$$

Reemplazamos:

$$[F]_E^E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$[F]_E^E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sum\nolimits_{S_1 S_2} \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \checkmark$$