Episodio 4

Bases canónicas, propiedades importantes y Wronskiano

Álgebra Lineal
mfiuba@gmail.com

Departamento de Matemática
FIUBA

24 de septiembre de 2020

Recordemos

Definición: Sea $\mathbb{V} - \mathbb{K}$espacio vectorial, se dice que un conjunto $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{V}$ es **base** de $\mathbb{V}$ si cumple:

- $\text{gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} = \mathbb{V}$
- $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es l.i.

Definición: Si un conjunto finito $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es base de un K-espacio vectorial $\mathbb{V}$ se dice que **n** es la **dimensión** de $\mathbb{V}$. Se nota $\dim(\mathbb{V}) = \mathbf{n}$.

Aclaración: El subespacio nulo, $\{O_{\mathbb{V}}\}$, tiene dimensión 0.
Se dice que un espacio vectorial es de dimensión infinita si no es de dimensión finita.

Bases canónicas

- En $\mathbb{R}^n$ la base canónica es

$$E_{\mathbb{R}^n} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Que en forma más compacta, de ahora en más escribiremos:

$$E_{\mathbb{R}^n} = \{e_1, e_2, \ldots e_n\}, \text{ con } e_i \in \mathbb{R}^n / (e_i)_k = \delta_{ik}.$$

El conjunto cumple con la definición de base, pues:

$$X \in \mathbb{R}^n, X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n, \; \forall\, X \in \mathbb{R}^n.$$

Genera ✓

Además, si :

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n = \mathbb{O}_{\mathbb{R}^n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda_1,\ \lambda_2, \ldots,\ \lambda_n)^T = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0)^T \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0 \ldots \lambda_n = 0$$

Es l.i. ✓
Por lo tanto $E_{\mathbb{R}^n}$ es base de $\mathbb{R}^n$ y $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

- Si consideramos $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial, la base canónica es:
$$E_{\mathbb{C}^n-\mathbb{C}} = \{e_1, e_2, \ldots e_n\}$$
Si $X \in \mathbb{C}^n, X = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)^T$, con $x_i \in \mathbb{C},\ \forall\, 1 \leq i \leq n$.
$$X = \underbrace{x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n}_{\text{comb. lineal con escalares en } \mathbb{C}}$$
El conjunto genera $\mathbb{C}^n - \mathbb{C}$ ✓

La independencia lineal, se prueba como en el ejemplo anterior.
El conjunto es l.i. ✓
Por lo tanto $E_{\mathbb{C}^n-\mathbb{C}}$ es base de $\mathbb{C}^n - \mathbb{C}$ y $\dim(\mathbb{C}^n - \mathbb{C}) = n$

- Ahora consideremos $\mathbb{C}^n$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.
  ¿Cuál es la diferencia con el punto anterior?
  Las combinaciones lineales en este espacio vectorial sólo admiten escalares reales, entonces ya no podemos generar el espacio vectorial con los vectores $\{e_1, e_2, \dots e_n\}$
  Pues haciendo combinaciones lineales de estos vectores con números reales, sólo obtenemos vectores que en cada coordenada tienen un número real.
  $X \in \mathbb{C}^n \Leftrightarrow X = (x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)^T$
  Cada $x_k = a_k + ib_k,\ a_k,\ b_k \in \mathbb{R}$, entonces, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
X &= (x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)^T \\
&= (a_1 + ib_1,\ a_2 + ib_2,\ \dots,\ a_n + ib_n)^T \\
&= a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n + b_1 e_{i1} + b_2 e_{i2} + \cdots + b_n e_{in}
\end{aligned}$$

  Donde $e_{ik} \in \mathbb{C}^n / (e_{ik})_l = i.\delta_{kl}$

Entonces, $\forall X \in \mathbb{C}^n$ se cumple:

$$X = \underbrace{a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n + b_1 e_{i1} + b_2 e_{i2} + \cdots + b_n e_{in}}_{\text{c. l. de vectores en } \mathbb{C}^n \text{con escalares reales.}}$$

Entonces, en este espacio vectorial, $\mathbb{C}^n - \mathbb{R}$, la base más directa es

$$E_{\mathbb{C}^n - \mathbb{R}} = \{e_1, e_2, \ldots e_n, e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{in}\}$$

Ya vimos que $E_{\mathbb{C}^n - \mathbb{R}}$ genera $\mathbb{C}^n - \mathbb{R}$ ✓.

La independencia lineal también es directa pues si:

$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n \beta_n + \beta_1 e_{i1} + \beta_2 e_{i2} + \cdots + \beta_n e_{in} = \mathbb{O}_{C^n}$

Igualando coordenada a coordenada:

$\lambda_1 + i\beta_1 = 0, \lambda_2 + i\beta_2 = 0, \ldots \lambda_n + i\beta_n = 0.$

Así obtenemos:

$\lambda_1 =_2 = \cdots = \lambda_n = 0 = \beta_1 = \beta_2 = \ldots \beta_n.$

El conjunto es l.i. ✓

Por lo tanto, $E_{\mathbb{C}^n - \mathbb{R}}$ es base de $\mathbb{C}^n - \mathbb{R}$ y $\dim(\mathbb{C}^n - \mathbb{R}) = 2n$

- En $R^{m\times n}$, la base canónica, se nota:
  $E_{R^{m\times n}} = \{e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{1n}, e_{21}, \ldots e_{2n}, \ldots, e_{m1}, \ldots e_{mn}\}$

$$[e_{kl}]_{ij} = \begin{cases} 1 si & (i,j) = (k,l) \\ 0 \text{ si} & (i,j) \neq (k,l) \end{cases}, \ \forall\, 0 \leq \imath, k \leq$$

Tarea: chequear que
$E_{R^{m\times n}}$ genera $R^{m\times n}$ y es l.i.

Por lo tanto, es base de $R^{m\times n}$ y $\dim(R^{m\times n}) = m \times n$.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

- Estudiemos ahora $\mathbb{R}_n[x]$, el conjunto de los polinomios de grado menor o igual que n, junto con el polinomio nulo.
  La base canónica de $\mathbb{R}_n[X]$ será:
  $E_{\mathbb{R}_n[X]} = \{x^n, \ x^{n-1} \ \ldots, \ x, \ 1\}$

  Es inmediato que si $P \in \mathbb{R}_n[x]$:
  $P = \underbrace{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}_{\text{comb. lineal de } x^n, \ldots, x, 1}$, con $a_i \in \mathbb{R}$.

  Luego $E_{\mathbb{R}_n[x]}$ genera $\mathbb{R}_n[X]$ ✓
  La independencia lineal, también es directa pues:
  $\lambda_n x^n + \lambda_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \lambda_1 x + \lambda_0, 1 = \mathbb{O}_{\mathbb{R}_n[x]} \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow \lambda_n = \cdots = \lambda_1 = \lambda_0 = 0$, pues para que dos polinomios sean iguales, sus coeficientes deben ser iguales.
  El conjunto es l.i.✓
  Luego $E_{\mathbb{R}_n[x]}$ es base de $\mathbb{R}_n[X]$ y $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n + 1$.

Observaciones importantes

En lo que sigue $\mathbb{V}$ es un K-espacio vectorial con $\dim(\mathbb{V}) = n$.

1. Si $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ es l.i. $\Leftrightarrow k \leq n$.
   Esto es consecuencia directa de la propiedad demostrada en el Episodio anterior (cardinal de un conjunto l.i. $\leq$ cardinal de un conjunto generador). Como $\dim(\mathbb{V}) = n$, toda base tiene n elementos y como toda base es un conjunto generador de $\mathbb{V}$ se cumple que $k \leq n$.$\checkmark$
2. Si $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ genera $\mathbb{V} \Rightarrow m \geq n$.
   Es consecuencia de la observación ya citada, cualquier base de $\mathbb{V}$ tiene n elementos y es l.i, por lo tanto como este conjunto es generador de $\mathbb{V} \Rightarrow m \geq n$.$\checkmark$

3. Si $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es un conjunto l.i. en $\mathbb{V} \Rightarrow B$ es base. Supongamos que B no es base, como por hipótesis es un conjunto l.i, si no es base del espacio vectorial, será porque no genera $\mathbb{V} \Rightarrow \exists v \in \mathbb{V}$ tal que $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, v\}$ es l.i. Absurdo, pues como $\dim(\mathbb{V}) = n \Rightarrow$ todo conjunto l.i. **tiene a lo sumo** n elementos $\Rightarrow B$ genera $\mathbb{V}$ y por lo tanto es base.✓

4. Si $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, u_n\}$ es un conjunto generador de $\mathbb{V} \Rightarrow B$ es base de $\mathbb{V}$.
Otra vez, supongamos que B genera $\mathbb{V}$ y no es base $\Rightarrow B$ no es l.i.$\Rightarrow$ hay algún vector de B que es combinación lineal de los demás, supongamos, sin pérdida de generalidad, que es $u_n \Rightarrow \text{gen}\{u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}\} = \mathbb{V}$. Absurdo, pues como $\dim(V) = n$ todo conjunto generador **tiene por lo menos** n elementos. Luego B es l.i. y por lo tanto B es base. ✓

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

5 Si un subespacio $S \subset \mathbb{V} \Rightarrow \dim(S) \leq n$. (Tarea para el hogar)

6 Si un subespacio $S \subset \mathbb{V}$ y $\dim(S) = \dim(\mathbb{V}) \Rightarrow S = \mathbb{V}$.

Si $\dim(S) = \dim(\mathbb{V}) = n \Rightarrow \exists\ B_S = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ base de S de n elemmentos. Si suponemos que $S \neq \mathbb{V} \Rightarrow \exists w \in \mathbb{V}$ tal que $w \notin S$ Entonces, el conjunto $\{u_1, u_2, \dots, u_n, w\}$ resulta l.i. Absurdo pues como $\dim(\mathbb{V}) = n$, todo conjunto l.i. tiene **a lo sumo** n elementos. Como el absurdo viene de suponer $S \neq \mathbb{V} \Rightarrow S = \mathbb{V}$.✓

Independencia Lineal de funciones en $C^m(I)$

Supongamos que tenemos que analizar si un conjunto de funciones $\{\phi_1, \ \phi_2, \ldots, \ \phi_n\} \subset C^m(I), (m \geq n-1)$ es l.i.
Antes de seguir recordemos que $C^m(I)$ es el conjunto de las funciones de I en $\mathbb{R}$ que son m veces derivables con continuidad.

Para ver si las funciones son l.i. igualemos una combinación al elemento neutro del espacio vectorial:
$\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 + \cdots + \lambda_n\phi_n = \mathbb{O}_{C^m(I)} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lambda_1\phi_1(x) + \lambda_2\phi_2(x) + \cdots + \lambda_n\phi_n(x) = 0, \forall x \in I.$
Recordando que la derivada de una función constante en un intervalo es nula en ese intervalo y derivando m.a m. hasta obtener tantas ecuaciones como incognitas, se cumple $\forall x \in I$:

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

$$
\begin{aligned}
\lambda_1\phi_1(x) + \lambda_2\phi_2(x) + \cdots + \lambda_n\phi_n(x) &= 0 \\
\lambda_1\phi_1'(x) + \lambda_2\phi_2'(x) + \cdots + \lambda_n\phi_n'(x) &= 0 \\
\lambda_1\phi_1''(x) + \lambda_2\phi_2''(x) + \cdots + \lambda_n\phi_n''(x) &= 0 \\
\vdots &= \vdots \\
\lambda_1\phi_1^{(n-1)}(x) + \lambda_2\phi_2^{n-1}(x) + \cdots + \lambda_n\phi_n^{n-1}(x) &= 0
\end{aligned}
$$

Si escribimos este conjunto de ecuaciones en forma matricial, obtenemos :

$$\begin{pmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) & \dots & \phi_n(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) & \dots & \phi_n'(x) \\ \phi_1''(x) & \phi_2''(x) & \dots & \phi_n''(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \phi_1^{(n-1)}(x) & \phi_2^{(n-1}(x) & \dots & \phi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \forall x \in I.$$

Entonces, en particular, si $x = x_0$ el sistema:

$$\begin{pmatrix} \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) & \dots & \phi_n(x_0) \\ \phi_1'(x_0) & \phi_2'(x_0) & \dots & \phi_n'(x_0) \\ \phi_1''x_0) & \phi_2''x_0) & \dots & \phi_n''(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \phi_1^{(n-1)}(x_0) & \phi_2^{(n-1}(x_0) & \dots & \phi_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

El sistema homogéneo tiene solución única si y sólo si la matriz del sistema es inversible. esto es equivalente a pedir que su determinante sea no nulo.

$$\begin{vmatrix} \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) & \dots & \phi_n(x_0) \\ \phi_1'(x_0) & \phi_2'(x_0) & \dots & \phi_n'(x_0) \\ \phi_1''x_0) & \phi_2''x_0) & \dots & \phi_n''(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \phi_1^{(n-1)}(x_0) & \phi_2^{(n-1}(x_0) & \dots & \phi_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

Entonces encontramos una condición que nos permiter afirmar cuando un conjunto de n funciones son l.i. en $C^m(I)$, $m \geq n-1$.

Definición: Dado un conjunto de funciones $\{\phi_1,\ \phi_2, \dots,\ \phi_n\}$ con $\phi_i \in C^{(n-1)}(I) \forall\ 1 \leq i \leq n$ se llama **wronskiano** $\{\phi_1,\ \phi_2, \dots,\ \phi_n\}$ a:

$$W(\phi_1,\ \phi_2, \dots,\ \phi_n) = \begin{vmatrix} \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) & \dots & \phi_n(x_0) \\ \phi_1'(x_0) & \phi_2'(x_0) & \dots & \phi_n'(x_0) \\ \phi_1'' x_0) & \phi_2'' x_0) & \dots & \phi_n''(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \phi_1^{(n-1)}(x_0) & \phi_2^{(n-1}(x_0) & \dots & \phi_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

Teorema del Wronskiano

En el desarrollo anterior, hemos demostrado que :

Si $\{\phi_1,\ \phi_2, \ldots,\ \phi_n\} \subset C^{(n-1)}(I)$ y para algún $x_0 \in I$, se cumple $W(\phi_1,\ \phi_2, \ldots,\ \phi_n) \neq 0 \Rightarrow \{\phi_1,\ \phi_2, \ldots,\ \phi_n\}$ es linealmente independiente.

Si $\{\phi_1,\ \phi_2, \ldots,\ \phi_n\} \subset C^{(n-1)}(I)$ es un conjunto linealmente dependiente $\Rightarrow W(\phi_1,\ \phi_2, \ldots,\ \phi_n) = 0\ \forall x \in I$.

Aclaración: **El recíproco de este teorema no es verdadero** , existen funciones tales que $W(\phi_1,\ \phi_2, \ldots,\ \phi_n) = 0, \forall x \in I$, pero las funciones bf no son linealmente dependientes.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Ejemplos

a Verifique que el conjunto $\left\{e^{2x},\ e^{3x}\right\}$ es l.i. en $C^{\infty}(\mathbb{R})$.
Calculemos el wronskiano de estas dos funciones. Aquí:
$\phi_1(x) = e^{2x},\ \phi_2(x) = e^{3x}$
$\phi_1'(x) = 2e^{2x},\ \phi_2'(x) = 3e^{3x}$

$$W(e^{2x},\ e^{3x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix} = 3e^{5x} - 2e^{5x} = e^{5x} \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto, el conjunto $\left\{e^{2x},\ e^{3x}\right\}$ es l.i.

b Pruebe que el conjunto $\left\{x^3,\ x^2,\ x\right\}$ es l.i.usando el teorema del wronskiano.Aquí:
$\phi_1(x) = x^3,\ \phi_2(x) = x^2,\ \ \phi_3(x) = x$
$\phi_1'(x) = 3x^2,\ \phi_2'(x) = 2x,\ \ \phi_3'(x) = 1$
$\phi_1''(x) = 6x,\ \phi_2''(x) = 2,\ \phi_3''(x) = 0$

$$W(x^2,\ x,\ 1) = \begin{vmatrix} x^3 & x^2 & x \\ 3x^2 & 2x & 1 \\ 6x & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2x^3.$$

$$W(x^2,\ x,\ 1) = -2x^3 \neq 0\ \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Por lo tanto el conjunto $\left\{x^3,\ x^2,\ x\right\}$ es l.i.

c Analicemos la independencia o dependencia lineal del conjunto $\left\{x^3, \left|x^3\right|\right\} \subset C^2(\mathbb{R})$.
Si $\phi_1(x) = x^3$ y $\phi_2(x) = \left|x^3\right|$.

Una primera cuestión es que, teniendo en cuenta que

$$\phi_2(x) = |x^3| = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \geq 0 \\ -x^3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Quedaría como tarea ver que esta es dos veces derivable , con continuidad, en $x = 0$. Suponiendo que esa tarea ya esta hecha, si calculamos el $W(\phi_1, \phi_2)$, tenemos: $\phi_1'(x) = 3x^2$ y $\phi_1''(x) = 6x$

$$\phi_2' = \begin{cases} 3x^2 \text{ si } x \geq 0 \\ -3x^2 \text{ si } x < 0 \end{cases} \text{ y } \phi_2'' = \begin{cases} 6x \text{ si } x \geq 0 \\ -6x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Luego:

$$W(\phi_1, \phi_2) = \begin{vmatrix} x^3 & x^3 \\ 3x^2 & 3x^2 \end{vmatrix} = 0, \ \forall x \geq 0.$$

$$W(\phi_1, \phi_2) = \begin{vmatrix} x^3 & -x^3 \\ 3x^2 & -3x^2 \end{vmatrix} = 0, \ \forall x < 0.$$

$W(\phi_1,\ \phi_2) = 0$ y las funciones ϕ_1 y ϕ_2 son claramente l.i, pues no son una múltiplo de la otra.
Además de lo gráficamente, una de las primeras propiedades que vimos al definir independencia lineal, en el episodio anterior, fue que si un conjunto de dos elementos era l.d, entonces un elemento debía ser múltiplo del otro. Entonces:
Si es l.d:
$\exists\ k \in \mathbb{R}\ /\phi_2(x) = k\phi_1(x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow k = \phi_2(x)/\phi_1(x),\ \forall x$ tal que $\phi_1(x) \neq 0$.

En este caso, como $\phi_2/\phi_1 = 1$ si $x \geq 0$ y $\phi_2/\phi_1 = -1$ si $x < 0 \Rightarrow \nexists\ k/\phi_2(x) = k\phi_1(x)$. Por lo tanto $\{\phi_1,\ \phi_2\}$ es l.i. Tal como señalamos, puede ser que el wronskiano de un conjunto de funciones resulte nulo y las funciones ser l.i.

Por supuesto, si tomamos un conjunto de funciones l.d. el wronskiano con seguridad se va a anular.
Conclusión : Si $W(\phi_1,\ \phi_2, \ldots,\ \phi_n) = 0$, no puedo afirmar que las funciones sean l.d. o l.i. y tendré que estudiar la independencia lineal del conjunto con otras herramientas.