75:12 ANÁLISIS NUMÉRICO I

FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Primer Parcial – Primera Fecha

2do. Cuatrimestre 2014
15/Octubre/2014

Problema 1

Se pide calcular la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales mediante el método de Jacobi iterando hasta que la cota del error relativo sea inferior a 0.05 medida utilizando la norma infinita. Justificar las acciones adoptadas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ayuda: Aplicando el método de Jacobi, tal como está planteado el sistema, no se obtiene convergencia.

Problema 2

Se desea evaluar la raíz cúbica de 7 utilizando una calculadora que no tiene funciones científicas (solamente cuenta con las 4 operaciones elementales).

Para ello se propone plantear un esquema iterativo basado en el método de aproximaciones sucesivas y se pide que el mismo tenga un orden de convergencia lineal.

a) Calcular 7^(1/3) iterando hasta obtener 6 dígitos significativos correctos usando el esquema propuesto.
b) Verificar que el orden de convergencia es lineal a través del cálculo de la constante asintótica de convergencia λ mediante un ajuste efectuado a partir de los resultados del proceso iterativo.

Ayuda: Cuando hay convergencia lineal resulta que $\lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n} = \lambda$ siendo e el error de truncamiento.

Pregunta 1

Describa una metodología general para estimar el error de una solución numérica de una ecuación no lineal escalar.

Pregunta 2

Describa una metodología para estimar el error de una solución numérica de un sistema de ecuaciones lineales obtenida por un método de tipo directo.

Problema 1 Primero que nada tenemos que hacer que el sistema converja. Recordamos uno de los teoremas de convergencia que dice que si A es diagonal dominante entonces Jacobi y Gauss Seidel convergen.

$$A \text{ es diagonal dominante si } |a_{ii}| > \sum_{\forall j \neq i} |a_{ij}|$$

entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \to \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_4 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ahora que A es diagonal dominante procedemos aplicar el método de Jacobi:

$$\begin{cases} x_2^{(k+1)} = \dfrac{2 - x_2^{(k)}}{5} \\ x_1^{(k+1)} = \dfrac{1 - x_1^{(k)} + x_3^{(k)}}{4} \\ x_4^{(k+1)} = \dfrac{4 - 2x_4^{(k)}}{3} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{3 - 2x_4^{(k)}}{2} \end{cases}$$

Ahora tenemos que meter una semilla e iterar hasta que

$$\frac{\left|\left|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)}\right|\right|}{\left|\left|\vec{x}^{(k)}\right|\right|} < 0{,}05$$

Algoritmo 1 Ejercicio 1 resuelto en Octave. Están ordenados según $\vec{x} = [x_2, x_1, x_4, x_3]$.

```
k=1    x_k= 0.400 0.250 1.333 1.500   ERR_k= 1
k=2    x_k= 0.350 0.150 0.333 0.833   ERR_k=1.24
k=3    x_k= 0.370 0.163 0.778 1.333   ERR_k=0.42
k=4    x_k= 0.367 0.158 0.444 1.111   ERR_k=0.318
k=5    x_k= 0.368 0.158 0.593 1.278   ERR_k=0.152
k=6    x_k= 0.368 0.158 0.481 1.204   ERR_k=0.0984
k=7    x_k= 0.368 0.158 0.531 1.259   ERR_k=0.0522
k=8    x_k= 0.368 0.158 0.494 1.235   ERR_k=0.0321

Solucion exacta:   0.34211   0.28947   0.50000   1.25000
```

Ejercicio 2 Primero que nada buscamos la forma de convertir el problema en una ecuación no lineal para usar alguno de los métodos vistos en clase. Planteamos

$$\sqrt[3]{7} = x \Rightarrow x^3 - 7 = 0$$

Ahora podemos utilizar alguno de los métodos para la obtención de raíces de ecuaciones no lineales. Probamos con alguno de los métodos iterativos, como punto fijo. Definimos entonces

$$g(x) = x - x^3 + 7$$

Dado que $1^3 = 1$ y que $2^3 = 8$ entonces $\sqrt[3]{7} \in (1, 2)$. Probamos los teoremas de punto fijo, en particular aquel que dice que es necesario que $g(x) \in [1, 2] \, \forall x \in [1, 2]$. Es fácil ver que $g(1) = 7 \notin [1, 2] \Rightarrow$ el método no converge. Vamos entonces con un método que funciona siempre: bisección. Empezamos con el intervalo

$$I_0 = [1, 2]$$

y comenzamos a iterar como se muestra a continuación.

Algoritmo 2 Ejercicio 2 resuelto en Octave. En el paso número 18 se alcanzó la condición de obtener 6 dígitos significativos ✓.

```
k          Intervalo                Medio     f(intervalo)             f(medio)
1          (1.00000  2.00000)       1.50000  (−6.00000  1.00000)       −3.62500
2          (1.50000  2.00000)       1.75000  (−3.62500  1.00000)       −1.64062
3          (1.75000  2.00000)       1.87500  (−1.64062  1.00000)       −0.40820
4          (1.87500  2.00000)       1.93750  (−0.40820  1.00000)       0.27319
5          (1.87500  1.93750)       1.90625  (−0.40820  0.27319)       −0.07309
6          (1.90625  1.93750)       1.92188  (−0.07309  0.27319)       0.09864
7          (1.90625  1.92188)       1.91406  (−0.07309  0.09864)       0.01243
8          (1.90625  1.91406)       1.91016  (−0.07309  0.01243)       −0.03042
9          (1.91016  1.91406)       1.91211  (−0.03042  0.01243)       −0.00902
10         (1.91211  1.91406)       1.91309  (−0.00902  0.01243)       0.00170
11         (1.91211  1.91309)       1.91260  (−0.00902  0.00170)       −0.00366
12         (1.91260  1.91309)       1.91284  (−0.00366  0.00170)       −0.00098
13         (1.91284  1.91309)       1.91296  (−0.00098  0.00170)       0.00036
14         (1.91284  1.91296)       1.91290  (−0.00098  0.00036)       −0.00031
15         (1.91290  1.91296)       1.91293  (−0.00031  0.00036)       0.00002
16         (1.91290  1.91293)       1.91292  (−0.00031  0.00002)       −0.00014
17         (1.91292  1.91293)       1.91293  (−0.00014  0.00002)       −0.00006
18         (1.91293  1.91293)       1.91293  (−0.00006  0.00002)       −0.00002
19         (1.91293  1.91293)       1.91293  (−0.00002  0.00002)       0.00000
20         (1.91293  1.91293)       1.91293  (−0.00002  0.00000)       −0.00001
```

Entre el paso 17 y el 18 los primeros 6 dígitos significativos no cambian, por lo que se ha alcanzado la condición de corte.

FALTA DETERMINAR EL ORDEN DE COVERGENCIA!

Pregunta 1 Para estimar el error de una solución numérica no lineal escalar se puede utilizar

$$\varepsilon_k = \left| \frac{x_k - x_{k-1}}{x_k} \right|$$

ya que a medida que la solución se comienza a aproximar al valor verdadero entonces x_k y x_{k-1} cada vez se diferencian menos y ε_k nos habla de cuánto nos acercamos al valor verdadero entre el paso k y el $k-1$.

Pregunta 2 Para estimar el error de una solución obtenida por un método directo se puede introducir dicha solución en el sistema que atina a resolver y proceder de la siguiente manera

$$A\vec{x} = \vec{b} \to \text{obtengo } \vec{x}_1 \to A\vec{x}_1 = \vec{b}_1 \Rightarrow \vec{b} - \vec{b}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \Delta\vec{b}$$

A su vez

$$\vec{b} - \vec{b}_1 = A\vec{x} - A\vec{x}_1 = A\Delta\vec{x}$$

por lo tanto

$$A\Delta\vec{x} = \Delta\vec{b} \to \text{obtengo } \Delta\vec{x}$$

y de esta forma puedo estimar $\Delta\vec{x}$.