

Problemas de valor inicial (PVI)

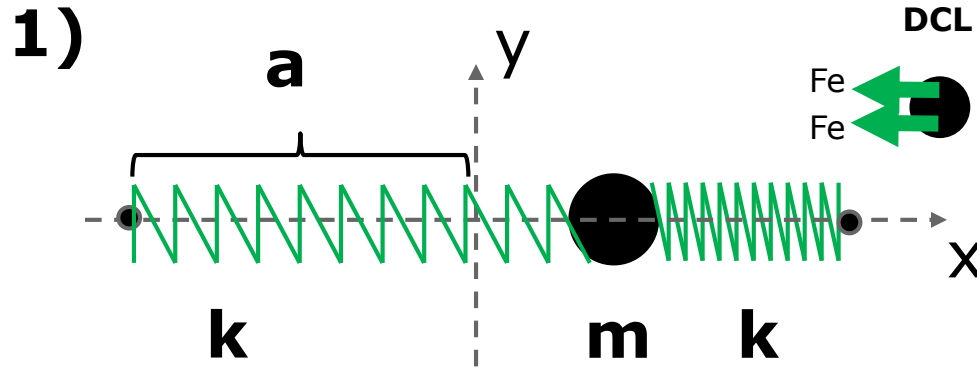
Objetivo

Resolver una ecuación diferencial por distintos métodos de paso simple y establecer comparaciones en cuanto al orden de precisión y la estabilidad de cada uno.

Métodos a aplicar

- Método de **Euler** (explícito)
- Método de **Euler Implícito**
- Método de **Runge-Kutta de orden 2** (RK2)
- Método de **Runge-Kutta de orden 4** (RK4)

Ejemplos de PVI

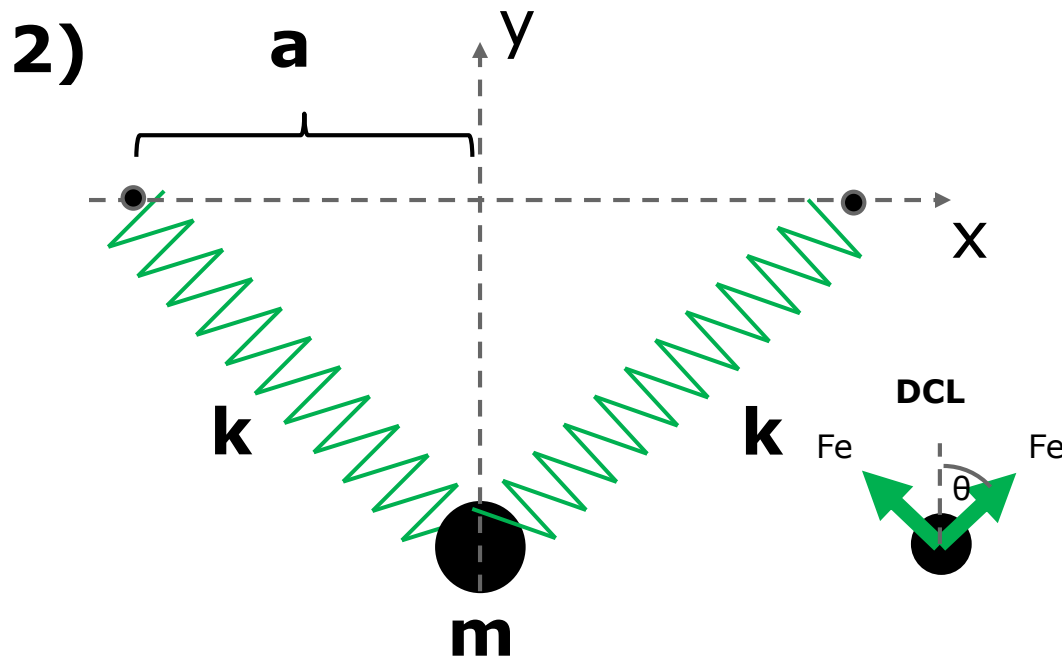


Felastica = $-k \cdot \text{estiramiento}$
estiramiento = x

$$-2kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$x'' + \frac{2k}{m}x = 0$$

PVI LINEAL



Felastica = $-k \cdot \text{estiramiento}$
estiramiento = $\sqrt{y^2 + a^2} - L_0$

$$-2ky \left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{y^2 + a^2}} \right) = m \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$y'' + \frac{2k}{m}y \left(1 - \frac{L_0}{\sqrt{y^2 + a^2}} \right) = 0$$

PVI NO LINEAL

PVI para modelos térmicos

Un cuerpo de masa **M**, calor específico **C** y superficie **S** está sumergido en un fluido a temperatura **T_∞**. La transferencia de calor por convección entre el fluido y el cuerpo viene dada por un coeficiente **hc**.

Si inicialmente la temperatura del cuerpo es **T₀** calcular la temperatura en función del tiempo T(t)

La ley que determina la temperatura del cuerpo en función del tiempo es la conservación de energía:

“La tasa de energía interna que absorbe o cede el cuerpo es proporcional a la diferencia de temperaturas en cada instante”

La energía interna es proporcional a la masa del cuerpo, a su calor específico **C** y a su temperatura en cada instante.

Cuanta mayor superficie → mayor flujo de calor “q” a transferir.

Se propone entonces una constante de proporcionalidad **hc** según las condiciones particulares del ambiente fluido:

Solución exacta? $T(t) = T_{\infty} + (T_0 - T_{\infty})e^{-\frac{h_c S}{mC}t}$

Otros ejemplos físicos análogos?

→ Circuito RC

→ Circuito RL

→ Caída de cuerpos en medio viscoso

Aplicamos métodos numéricos a la ecuación:

EULER (EXPLICITO)

$$U_{n+1} = U_n + h f(U_n, t_n)$$

$$U_{n+1} = U_n + h \left[-\frac{1}{\tau} (U_n - T_{\infty}) \right]$$

EULER IMPLICITO

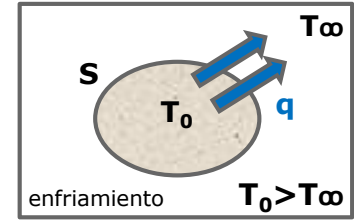
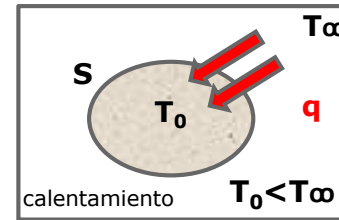
$$U_{n+1} = U_n + h f(U_{n+1}, t_{n+1})$$

$$U_{n+1} = U_n + h \left[-\frac{1}{\tau} (U_{n+1} - T_{\infty}) \right]$$

(requiere despejar)



$$U_{n+1} = \frac{U_n + \frac{h}{\tau} T_{\infty}}{1 + \frac{h}{\tau}}$$



$$\frac{dE_{int}}{dt} \sim (T - T_{\infty})$$

$$E_{int} = m \cdot C \cdot T$$

$$mC \frac{dT}{dt} = -h_c S (T - T_{\infty}) \quad \text{condición inicial } T(t=0) = T_0$$

$$T' + \frac{h_c S}{mC} T = \frac{h_c S}{mC} T_{\infty} = cte \quad \text{tiempo característico } \tau = \frac{mC}{h_c S}$$

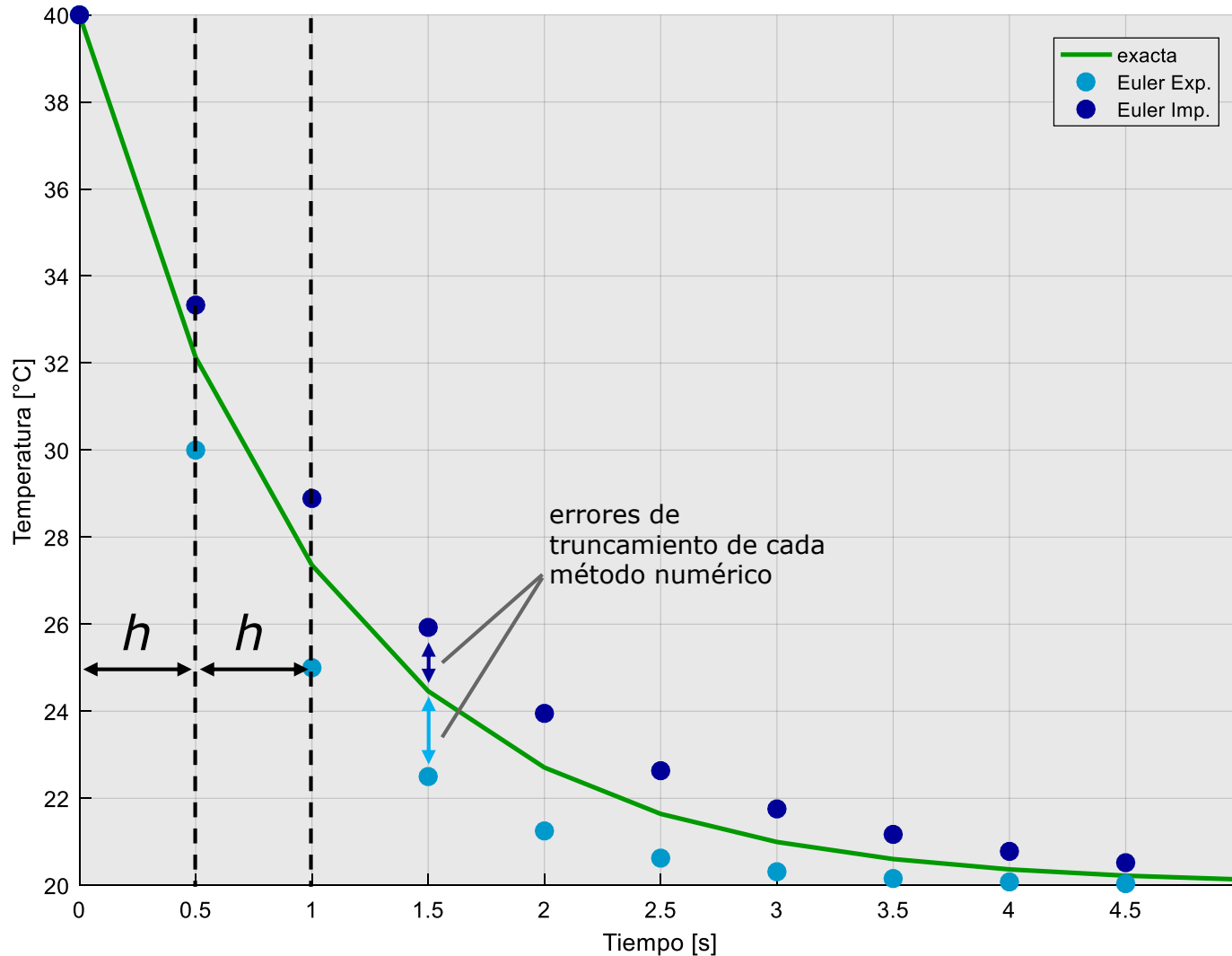
$$T' + \frac{1}{\tau} T = \frac{T_{\infty}}{\tau}$$

PVI LINEAL

(EDO 1ºorden con solución particular constante)

Comparación con la solución exacta

Soluciones numéricas vs analítica para $T_0 = 40^\circ\text{C}$, $T_\infty = 20^\circ\text{C}$ y $\tau = 1$.
Se utilizó $h = \tau/2 = 0.5$



Análisis de estabilidad

Se busca encontrar condiciones sobre el paso de tiempo de forma tal de garantizar que las posibles perturbaciones disminuyan con el avance temporal (solución estable). Se utiliza el método de las perturbaciones. **La estabilidad es una característica de la solución. Por lo tanto depende del método aplicado y de la ecuación diferencial a resolver**

EULER → $U_{n+1} = U_n + h f(U_n, t_n)$
(Explícito)

$$U_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = U_n + \varepsilon_n + h f(U_n + \varepsilon_n, t_n)$$

$$U_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = U_n + \varepsilon_n + h \left[-\frac{1}{\tau} (U_n + \varepsilon_n - T_\infty) \right]$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + h \left[-\frac{1}{\tau} \varepsilon_n \right]$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n \left(1 - \frac{h}{\tau} \right)$$

Se impone la condición:

$$\left| \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \left| 1 - \frac{h}{\tau} \right| < 1$$

$$-1 < 1 - \frac{h}{\tau} < 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} h > 0 \text{ (trivial)} \\ h < 2\tau \end{array} \right.$$

EULER → $U_{n+1} = U_n + h f(U_{n+1}, t_{n+1})$
IMPLÍCITO

$$U_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = U_n + \varepsilon_n + h f(U_{n+1} + \varepsilon_{n+1}, t_n)$$

$$U_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = U_n + \varepsilon_n + h \left[-\frac{1}{\tau} (U_{n+1} + \varepsilon_{n+1} - T_\infty) \right]$$

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + h \left[-\frac{1}{\tau} \varepsilon_{n+1} \right]$$

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n}{1 + \frac{h}{\tau}}$$

Se impone la condición:

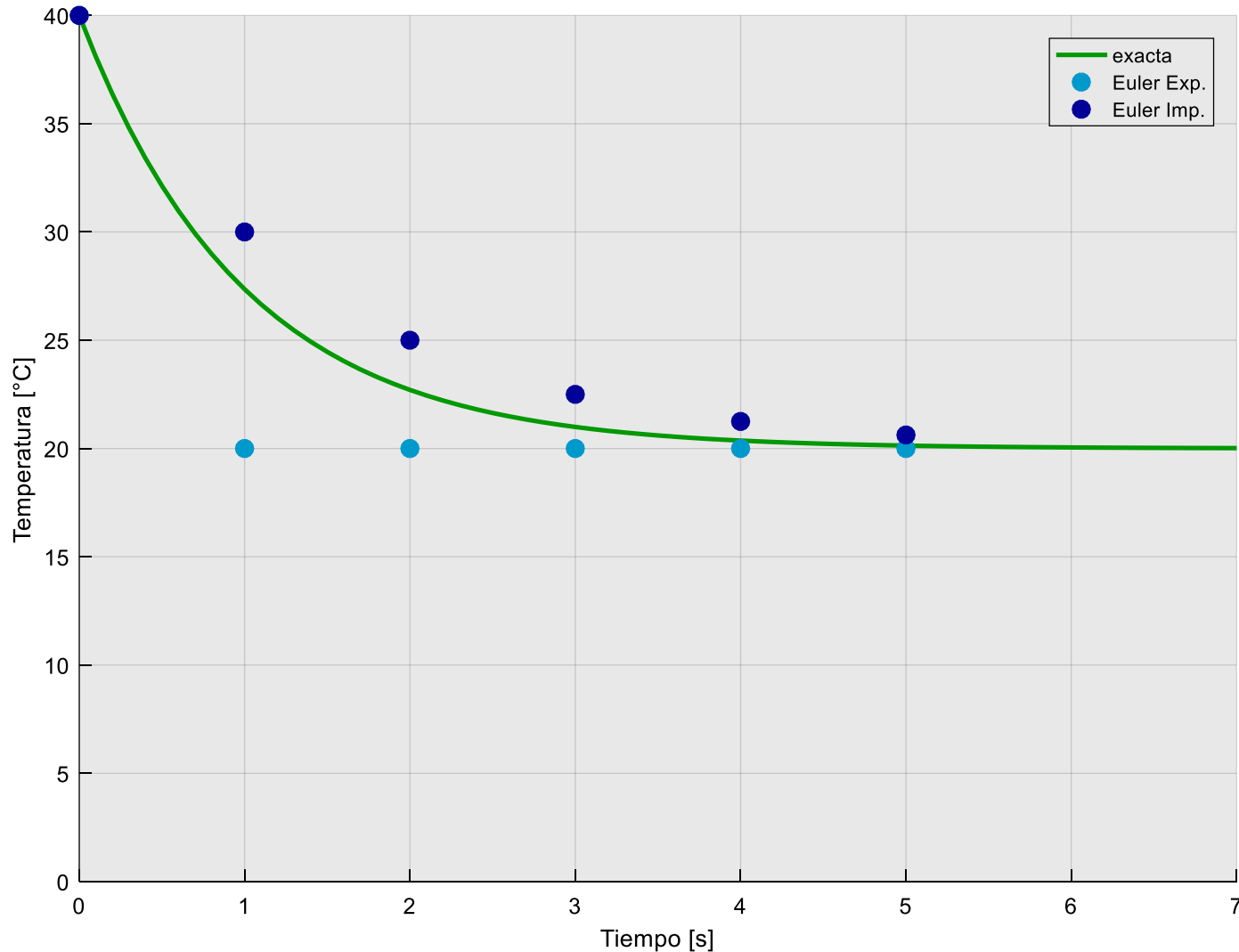
$$\left| \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{1}{1 + \frac{h}{\tau}} \right| < 1$$

Se puede observar claramente que la condición se satisface para todo $h > 0$

EULER IMPLÍCITO ES UN METODO INCONDICIONALMENTE ESTABLE (PARA CUALQUIER ECUACION DIFERENCIAL NO SOLO LAS LINEALES)

Estabilidad y paso de tiempo

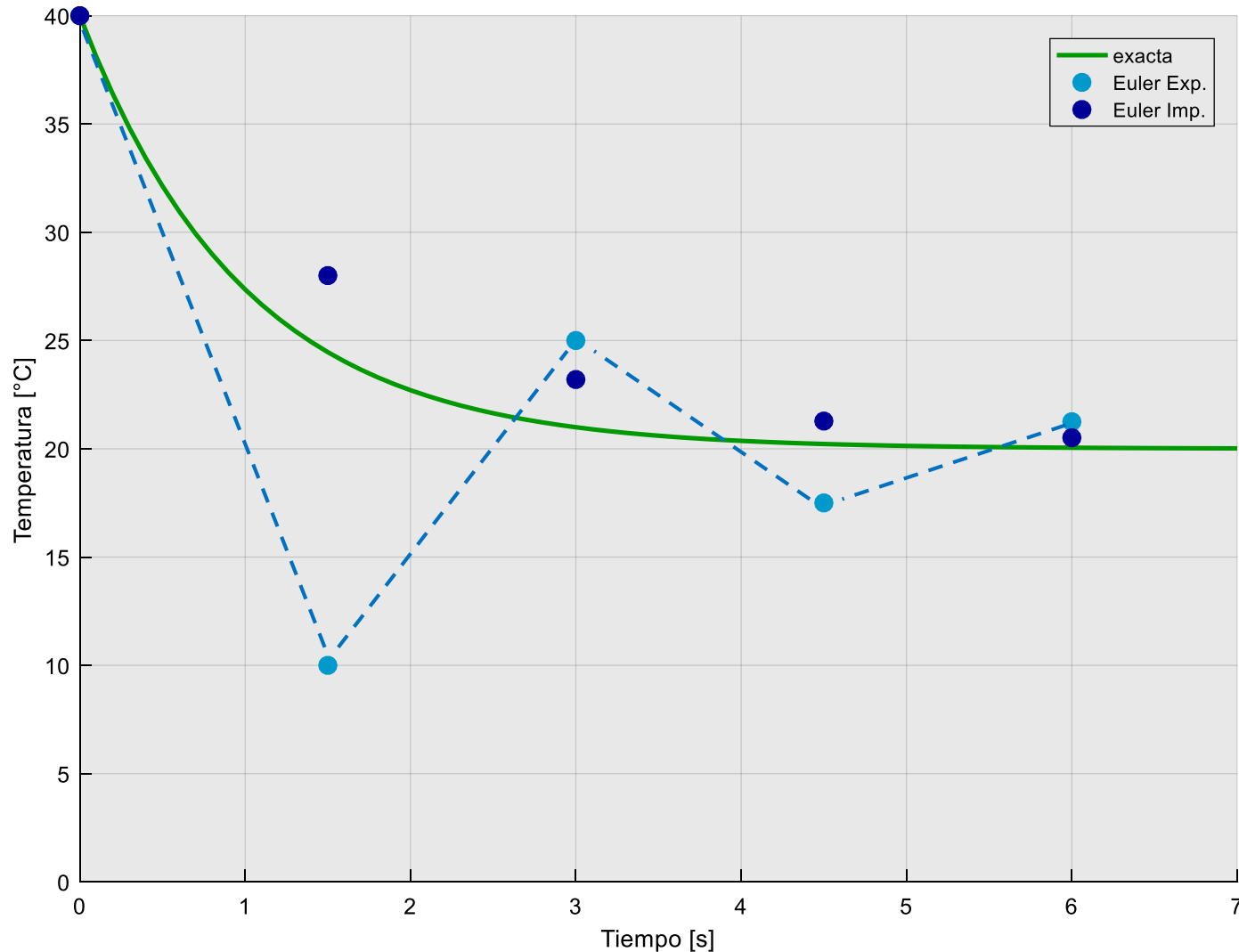
Resultados para $h=\tau$ ¿Qué sucede con el método explícito para este caso particular? ¿Sigue siendo estable el método? **SI**



Estabilidad y paso de tiempo

Resultados para $h=1.5\tau$. ¿Siguiendo siendo estable Euler Explicito?

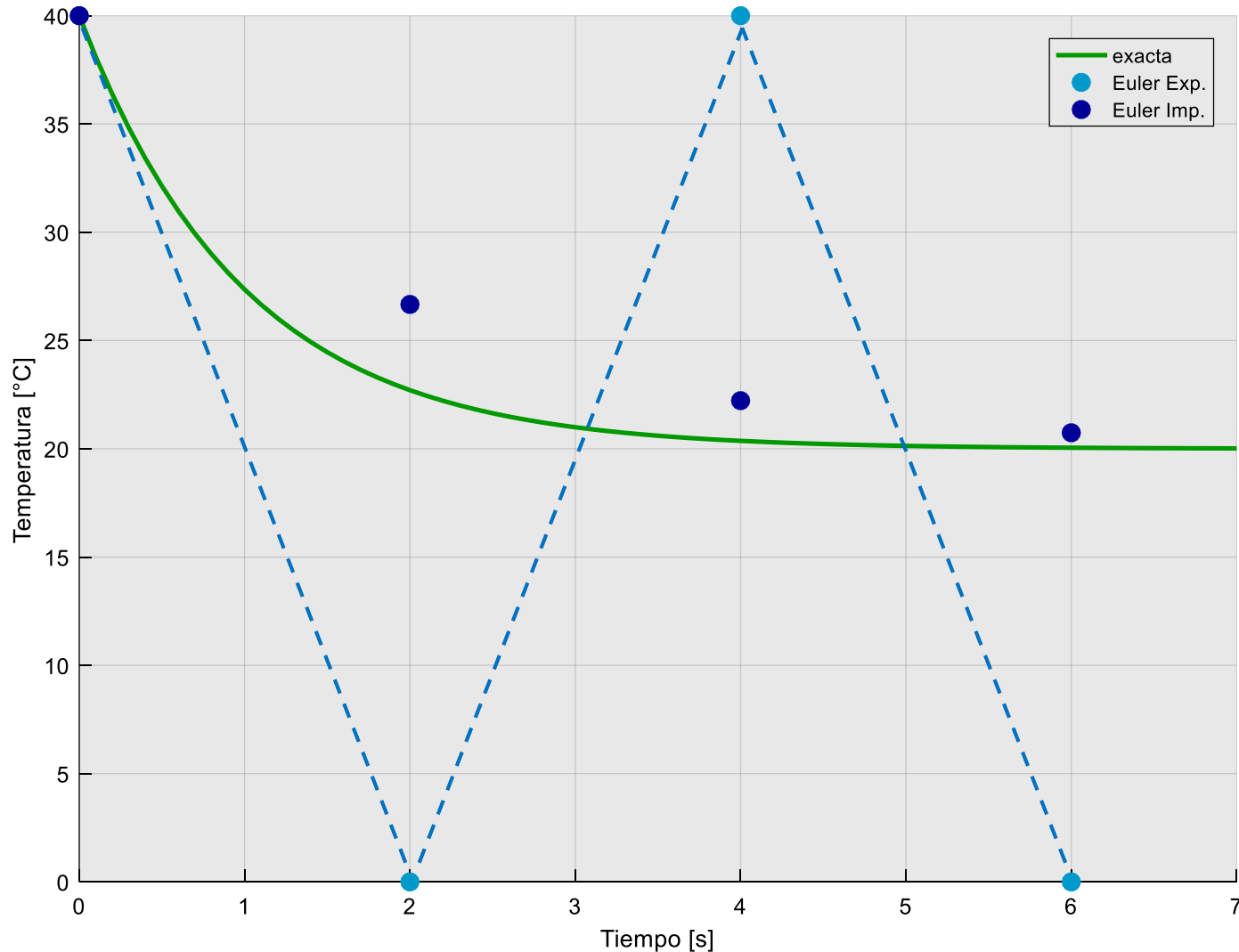
SI. Las perturbaciones se amortiguan en el tiempo



Estabilidad y paso de tiempo

Resultados para $h=2\tau$. ¿Sigue siendo estable Euler Explicito?

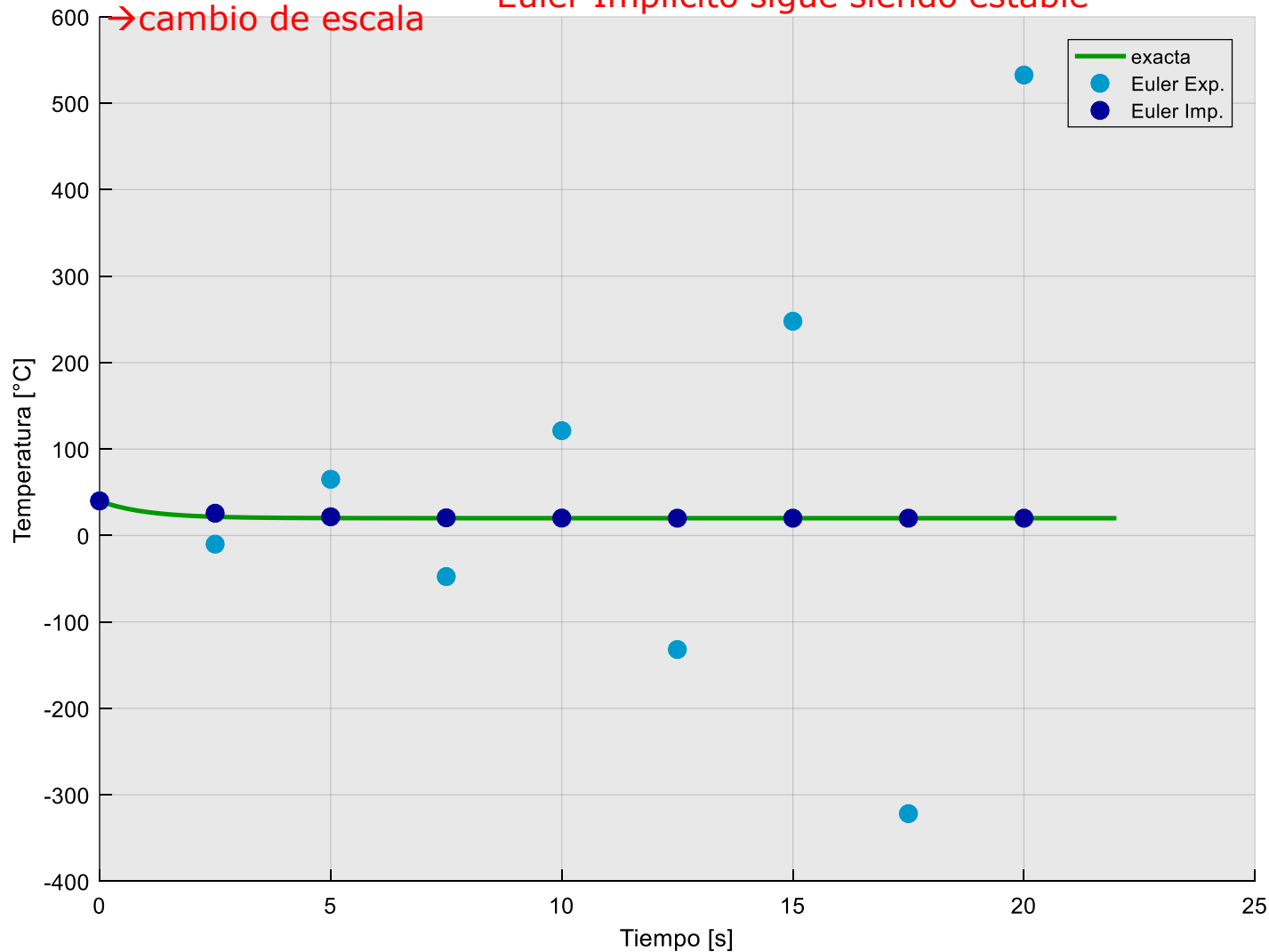
Las perturbaciones dejan de amortiguarse...



Estabilidad y paso de tiempo

Resultados para $h=2.5\tau$. ¿Sigue siendo estable Euler Explícito?

NO. Las perturbaciones no se amortiguan (divergen)
Euler Implícito sigue siendo estable



Metodo de Runge-Kutta de orden 2

Se discretiza la ecuación por el método de **Runge-Kutta de orden 2**

Un -> volumen
Tn -> coeficiente

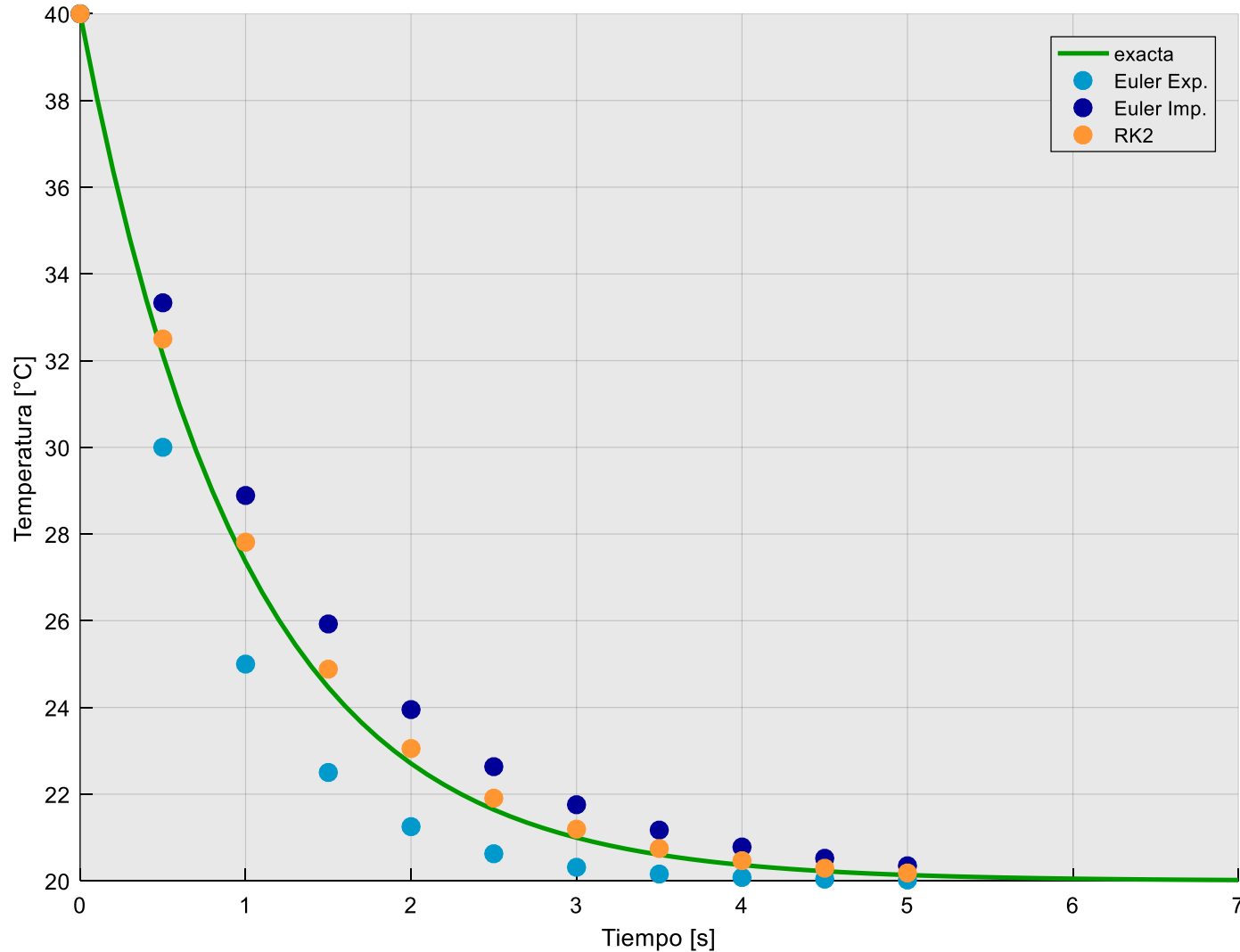
$$\begin{aligned} q_1 &= h f(U_n, t_n) & \longrightarrow & q_1 = h \left[-\frac{1}{\tau} (U_n - T_\infty) \right] \\ q_2 &= h f(U_n + q_1, t_{n+1}) & \longrightarrow & q_2 = h \left[-\frac{1}{\tau} \left(U_n + \overbrace{\left(-\frac{h}{\tau} (U_n - T_\infty) \right)}^{q_1} - T_\infty \right) \right] \\ U_{n+1} &= U_n + \frac{1}{2} (q_1 + q_2) & \longrightarrow & U_{n+1} = U_n \left(1 - \frac{h}{\tau} + \frac{1}{2} \frac{h^2}{\tau^2} \right) + T_\infty \left(\frac{h}{\tau} - \frac{1}{2} \frac{h^2}{\tau^2} \right) \end{aligned}$$

Condición de estabilidad: $\left| \frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n} \right| = \left| 1 - \frac{h}{\tau} + \frac{1}{2} \frac{h^2}{\tau^2} \right| < 1$

$$-\frac{h}{\tau} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{h}{\tau} \right) < 0 \qquad h < 2\tau \quad (\text{misma condición que Euler explicito})$$

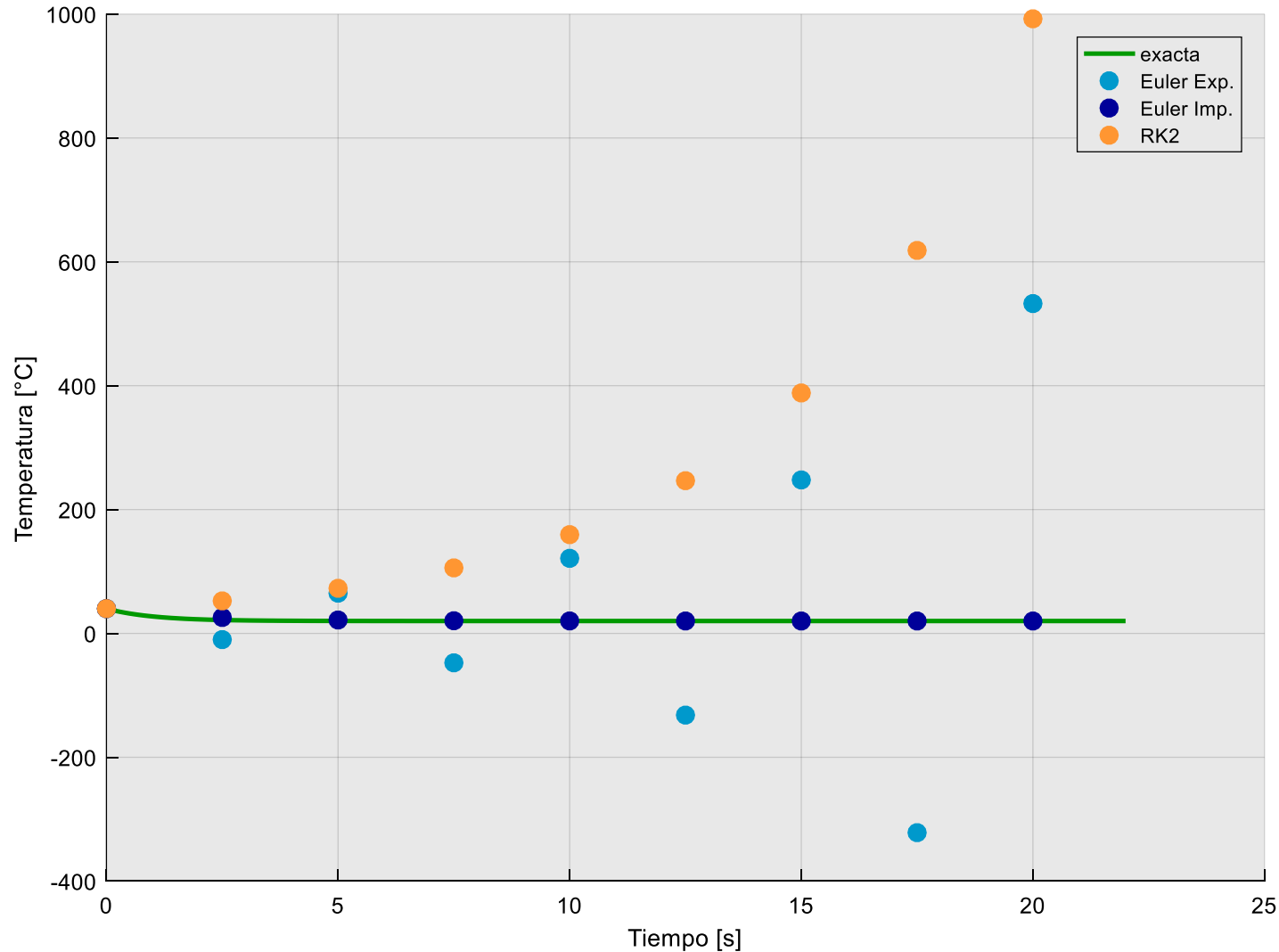
Comparación con la solución exacta

Grafico de los 3 métodos vistos hasta el momento para $h=\tau/2$



Soluciones aumentando el paso

Grafico de los 3 métodos vistos hasta el momento para $h=2.5\tau$



Método de Runge Kutta de orden 4

Se discretiza la ecuación por el método de **Runge-Kutta de orden 4**.
Encontrar la condición de estabilidad y compararla con los métodos anteriores.

$$q_1 = h f(U_n, t_n)$$

$$q_2 = h f\left(U_n + \frac{1}{2}q_1, t_{n+\frac{1}{2}}\right)$$

$$q_3 = h f\left(U_n + \frac{1}{2}q_2, t_{n+\frac{1}{2}}\right)$$

$$q_4 = h f(U_n + q_3, t_{n+1})$$

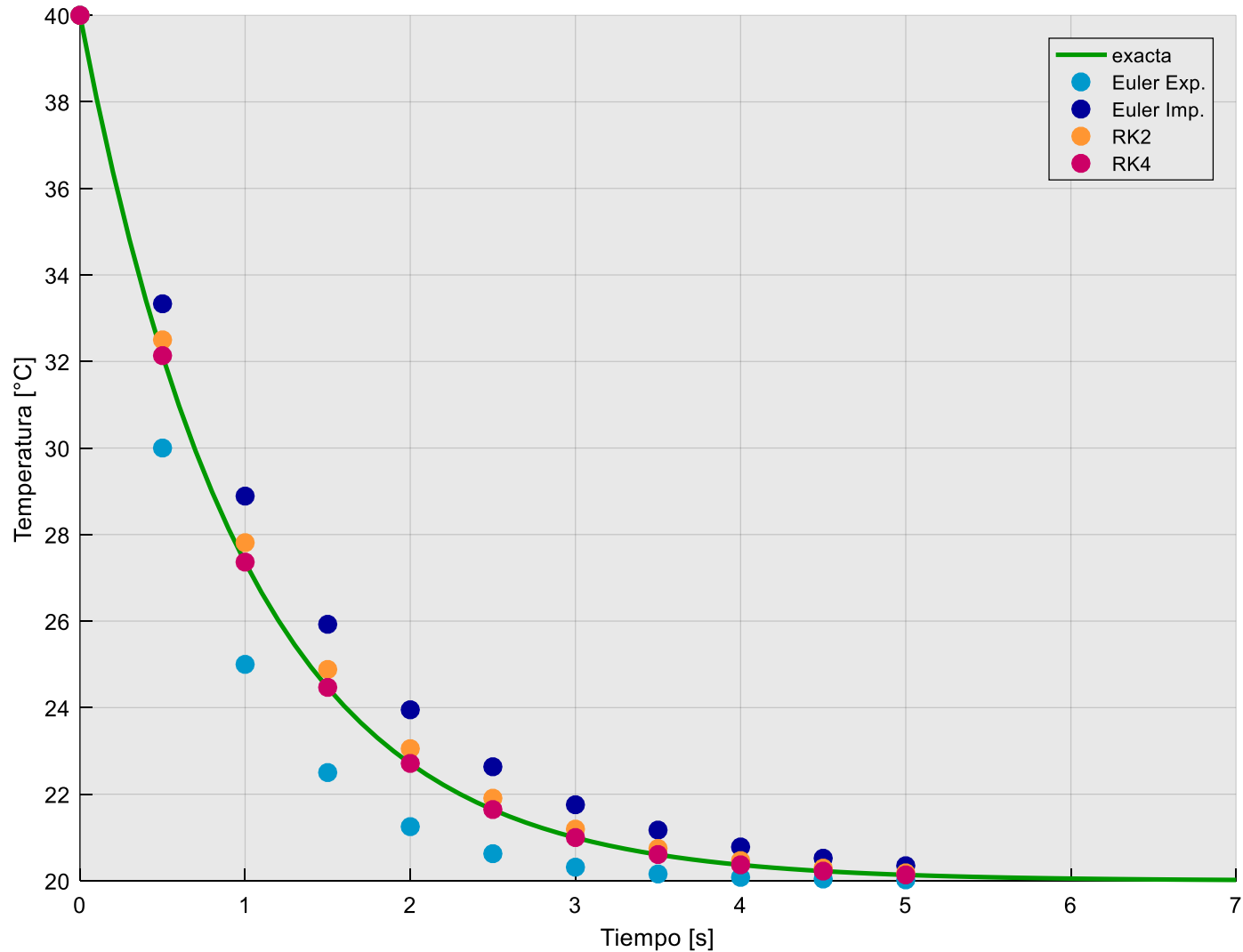
$$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{6}(q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4)$$

Es mas trabajoso pero es la misma idea que RK2

Notar que sigue siendo un método explícito y de paso simple!

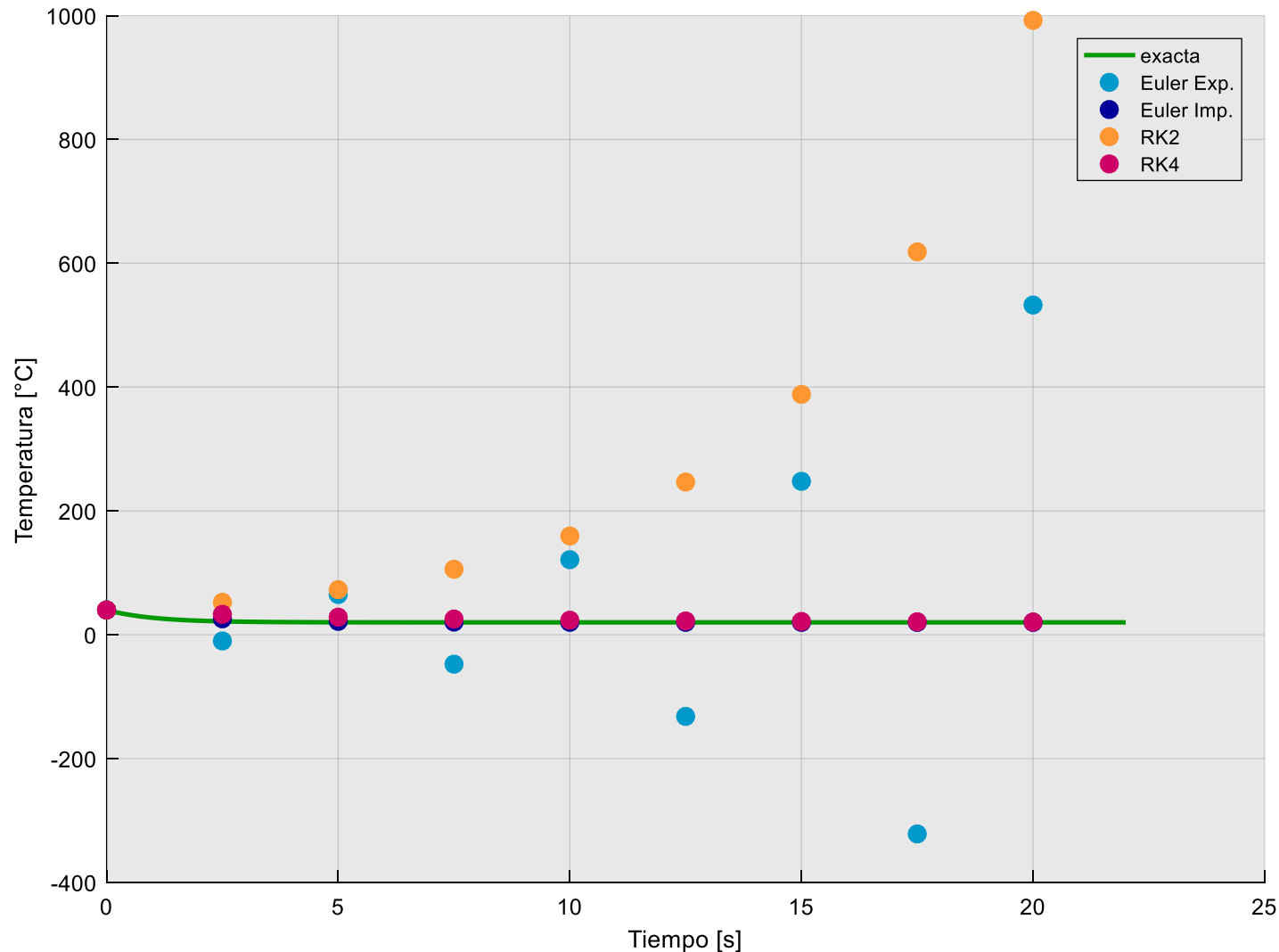
Comparación con la solución exacta

Grafico comparativo de los 4 métodos para $h=\tau/2$



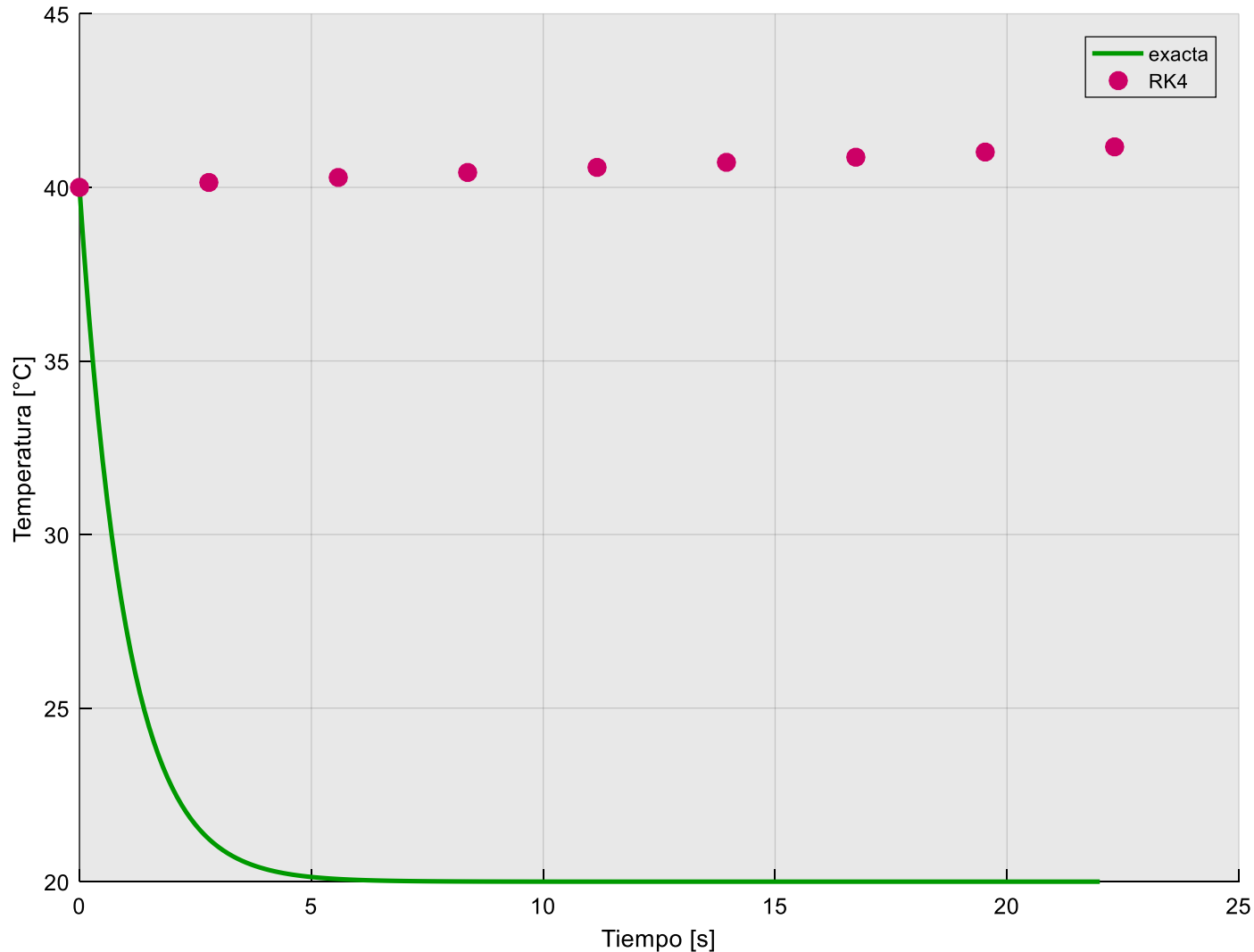
Soluciones aumentando el paso h

Grafico comparativo de los 4 métodos para $h=2.5\tau$.
Observar que EI y RK4 sigue siendo estable.



Condición de estabilidad para RK4

La inestabilidad en RK4 comienza aproximadamente en $h \sim 2.79\tau$.
(estudio experimental de la estabilidad)



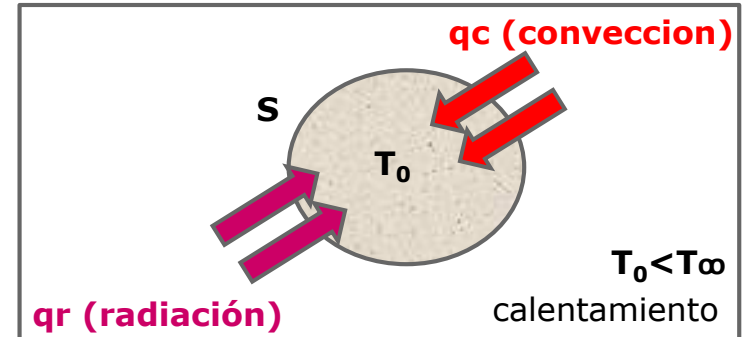
PVI térmico no lineal

Para el modelo térmico desarrollado anteriormente incluir el intercambio de calor por radiación y evaluar su efecto. Resolver por los métodos Euler Explícito e Implícito.

a) $T_{\infty} = 40^{\circ}\text{C}$ b) $T_{\infty} = 400^{\circ}\text{C}$

Datos: $m = 1\text{kg}$ $S = 100\text{cm}^2$ $C = 0.84\text{J/g}^{\circ}\text{C}$

$h_c = 10\text{W/m}^2\text{C}$ $T_0 = 20^{\circ}\text{C}$ $\epsilon = 0.85$



*Se debe trabajar con grados Kelvin!

$$-mC \frac{dT}{dt} = h_c S (T - T_{\infty}) + \underbrace{\epsilon \sigma S (T^4 - T_{\infty}^4)}_{\text{término de intercambio de calor radiativo}}$$

PVI NO LINEAL
(este caso no tiene solución analítica)

EULER EXPLICITO: $U_{n+1} = U_n + h \left[-\frac{h_c S}{mC} (U_n - T_{\infty}) - \frac{\epsilon \sigma S}{mC} (U_n^4 - T_{\infty}^4) \right]$

EULER IMPLICITO: $U_{n+1} = U_n + h \left[-\frac{h_c S}{mC} (U_{n+1} - T_{\infty}) - \frac{\epsilon \sigma S}{mC} (U_{n+1}^4 - T_{\infty}^4) \right]$

se debe resolver una ECUACION NO LINEAL
distinta en cada paso de tiempo

¿VENTAJAS Y DESVENTAJAS DE CADA METODO?

Implementación con el termino radiativo (no lineal)

EULER EXPLICITO:

VENTAJA:
La incógnita está despejada

DESVENTAJA:
Posible solución inestable

$$U_{n+1} = U_n + h \left[-\frac{h_c S}{mC} (U_n - T_\infty) - \frac{\varepsilon \sigma S}{mC} (U_n^4 - T_\infty^4) \right] \quad U_0 = T_0$$

$$n = 0 \quad U_1 = U_0 + h \left[-\frac{h_c S}{mC} (U_0 - T_\infty) - \frac{\varepsilon \sigma S}{mC} (U_0^4 - T_\infty^4) \right] \quad U_1 \checkmark$$

$$n = 1 \quad U_2 = U_1 + h \left[-\frac{h_c S}{mC} (U_1 - T_\infty) - \frac{\varepsilon \sigma S}{mC} (U_1^4 - T_\infty^4) \right] \quad U_2 \checkmark$$

Conclusión: la implementación es idéntica a la de una ecuación diferencial lineal

EULER IMPLICITO:

VENTAJA:
Incondicionalmente estable

DESVENTAJA:
Costo computación extra e implementación de ecuaciones no lineales

$$U_{n+1} = U_n + h \left[-\frac{h_c S}{mC} (U_{n+1} - T_\infty) - \frac{\varepsilon \sigma S}{mC} (U_{n+1}^4 - T_\infty^4) \right]$$

$$n = 0 \quad U_1 = U_0 + h \left[-\frac{h_c S}{mC} (U_1 - T_\infty) - \frac{\varepsilon \sigma S}{mC} (U_1^4 - T_\infty^4) \right] \quad U_1 \times$$

(no se puede despejar)

Algoritmo iterativo para resolver una ecuación no lineal DISTINTA en cada avance temporal (Newton-Raphson)

$$\begin{aligned} &\text{for } k=1:k_{\max} \\ &\quad U_1^{(k+1)} = U_1^{(k)} - \frac{F(U_1^{(k)})}{F'(U_1^{(k)})} \longrightarrow U_1 \checkmark \\ &\quad \text{criterio de corte para } U_1 \\ &\text{end} \end{aligned}$$

$$n = 1 \quad U_2 = U_1 + h \left[-\frac{h_c S}{mC} (U_2 - T_\infty) - \frac{\varepsilon \sigma S}{mC} (U_2^4 - T_\infty^4) \right] \quad U_2 \times$$

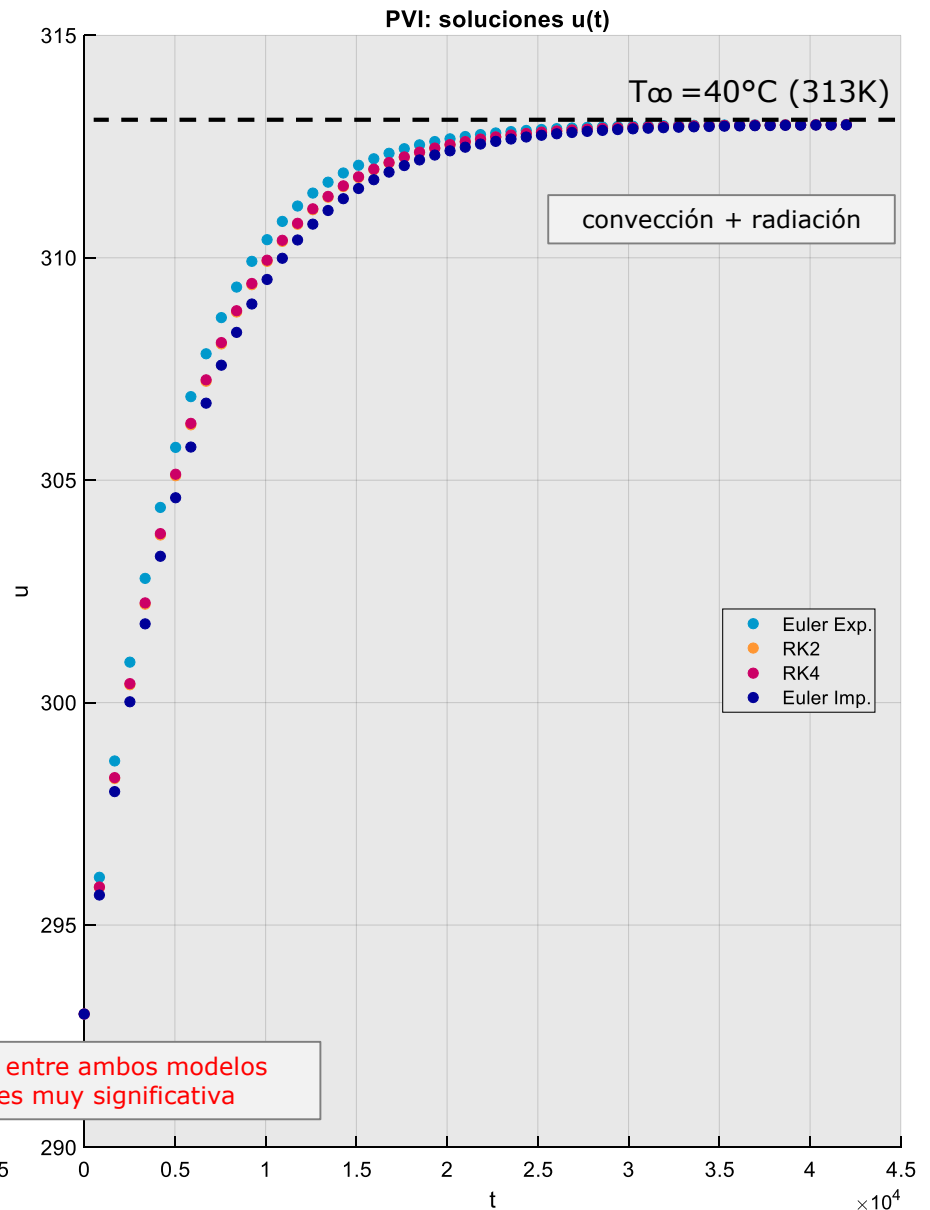
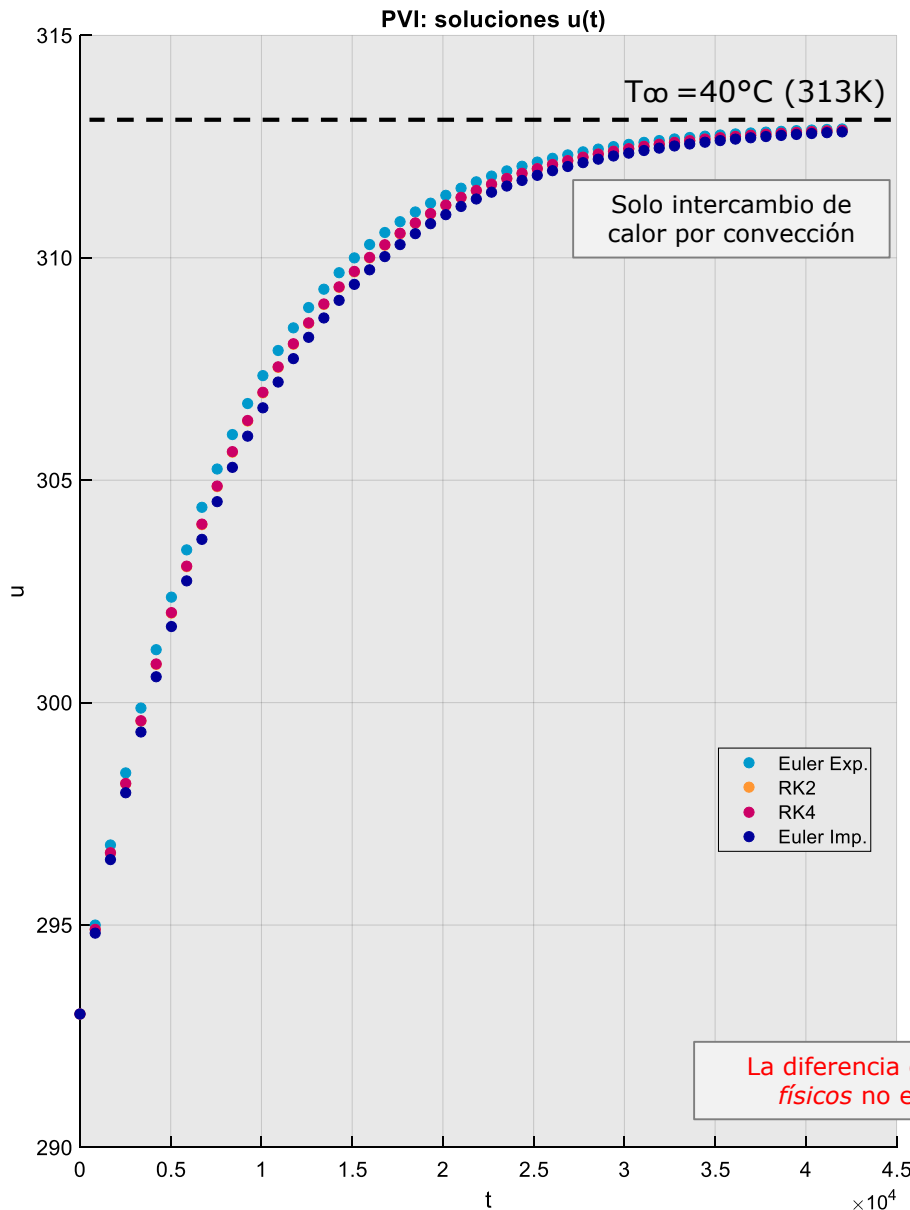
(no se puede despejar)

Ecuación no lineal distinta, pero con una estructura similar en cada avance temporal (conviene invertir en Newton Raphson)

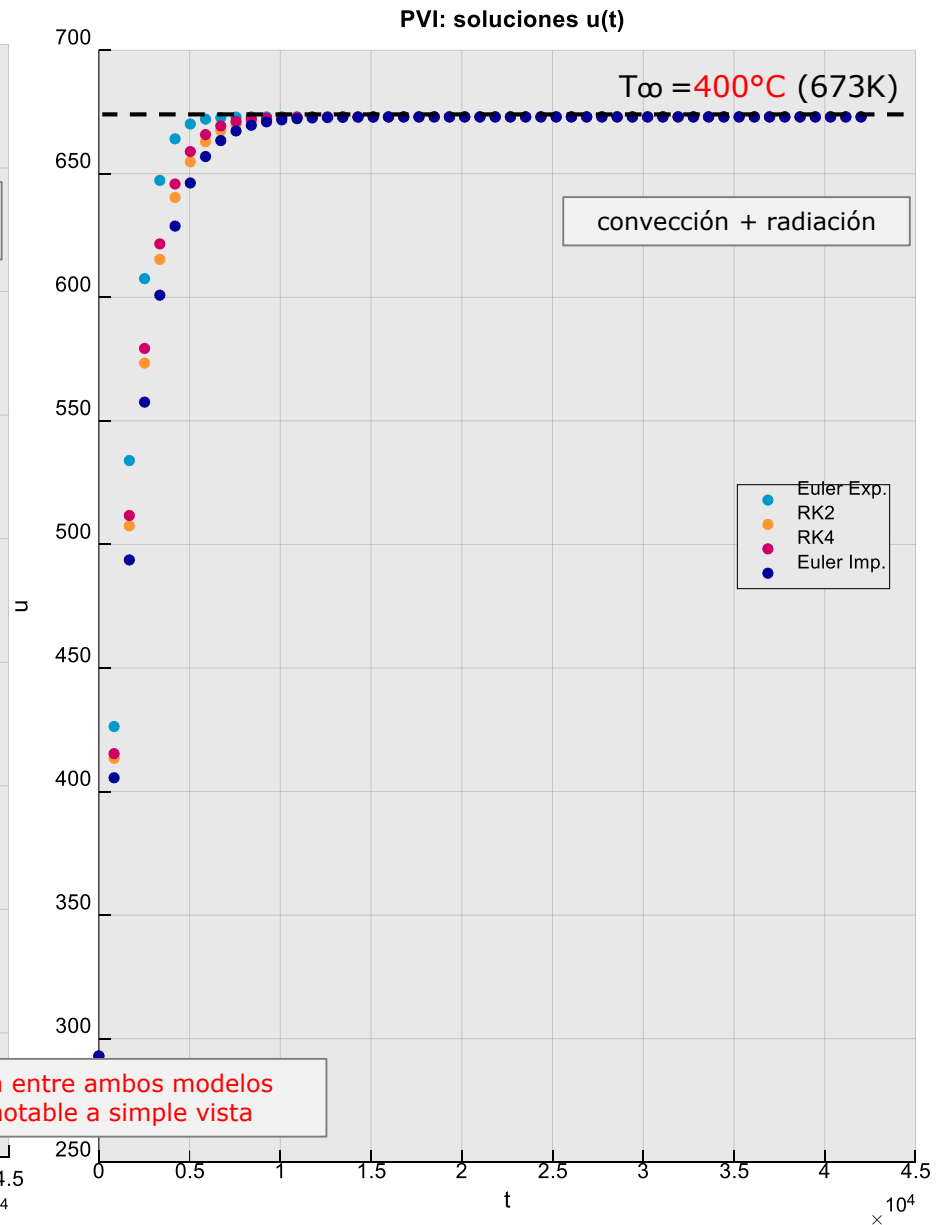
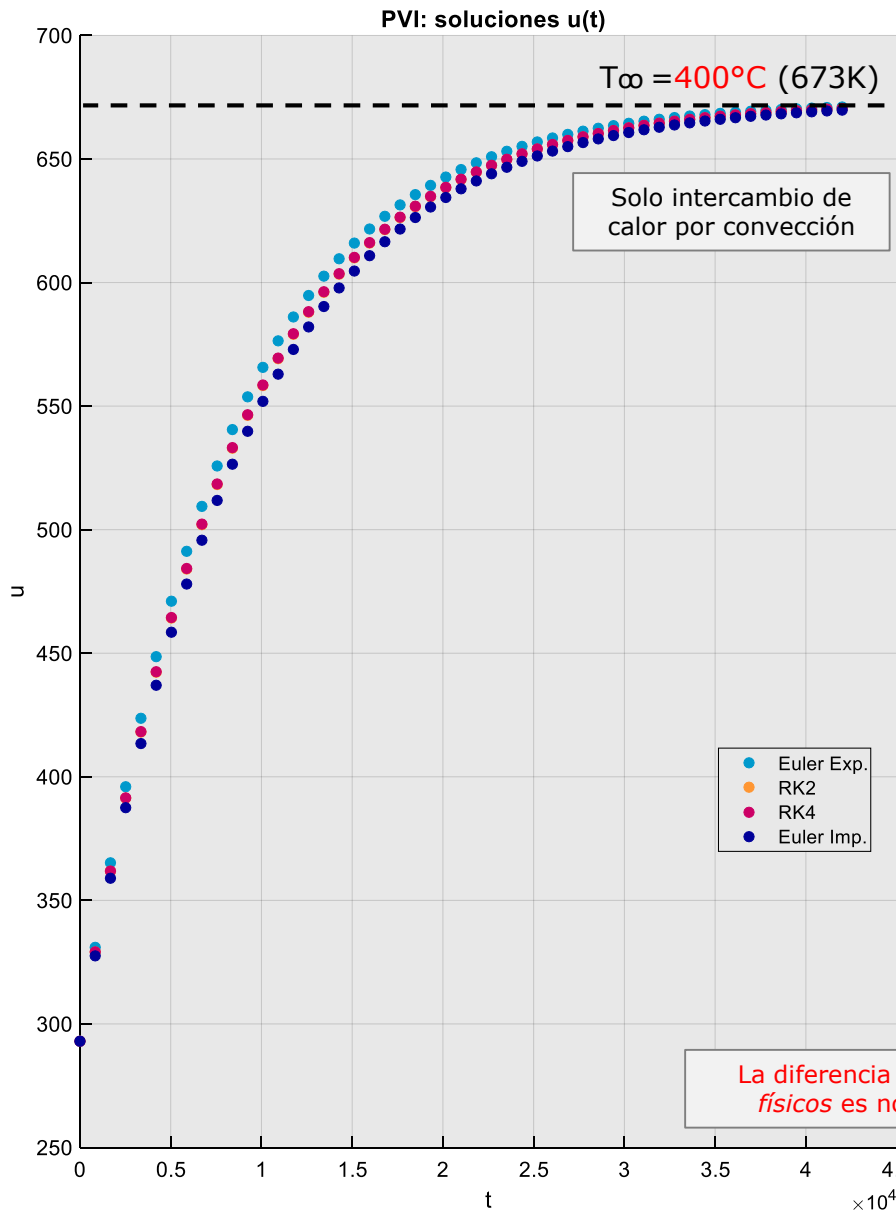
$$\begin{aligned} &\text{for } k=1:k_{\max} \\ &\quad U_2^{(k+1)} = U_2^{(k)} - \frac{F(U_2^{(k)})}{F'(U_2^{(k)})} \longrightarrow U_2 \checkmark \\ &\quad \text{criterio de corte para } U_2 \\ &\text{end} \end{aligned}$$

AMBOS METODOS TIENEN EL MISMO ORDEN DE PRECISIÓN. ES DECIR QUE EL ERROR DE TRUNCAMIENTO COMETIDO EN CADA AVANCE TEMPORAL TIENE EL MISMO ORDEN DE MAGNITUD $O(h^1)$

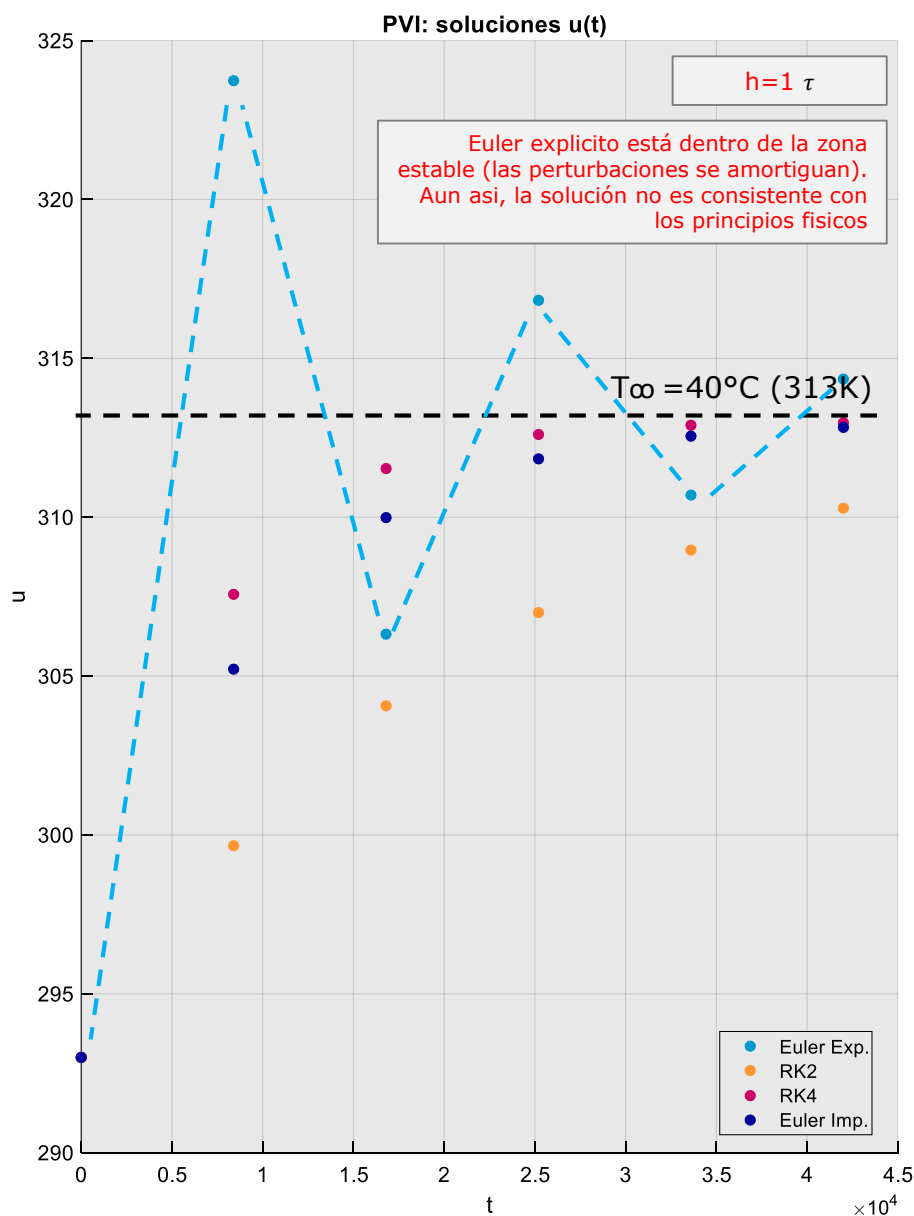
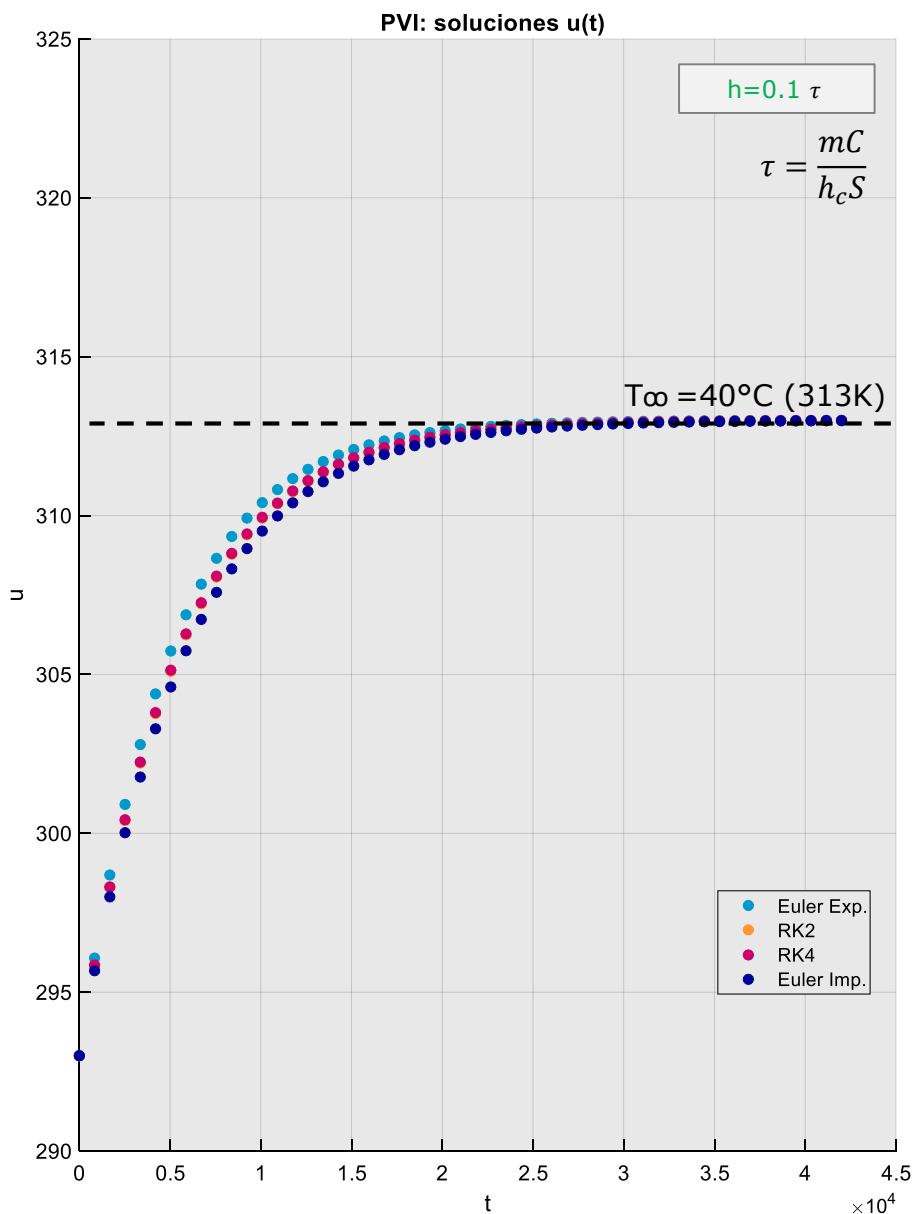
Convección vs Convección + Radiación



Convección vs Convección + Radiación

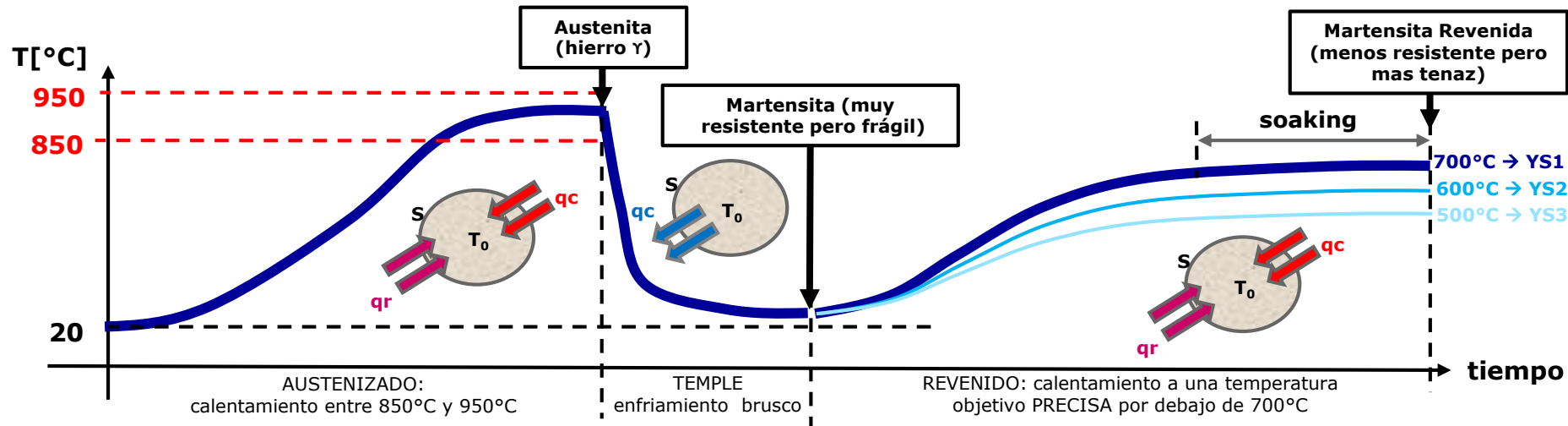
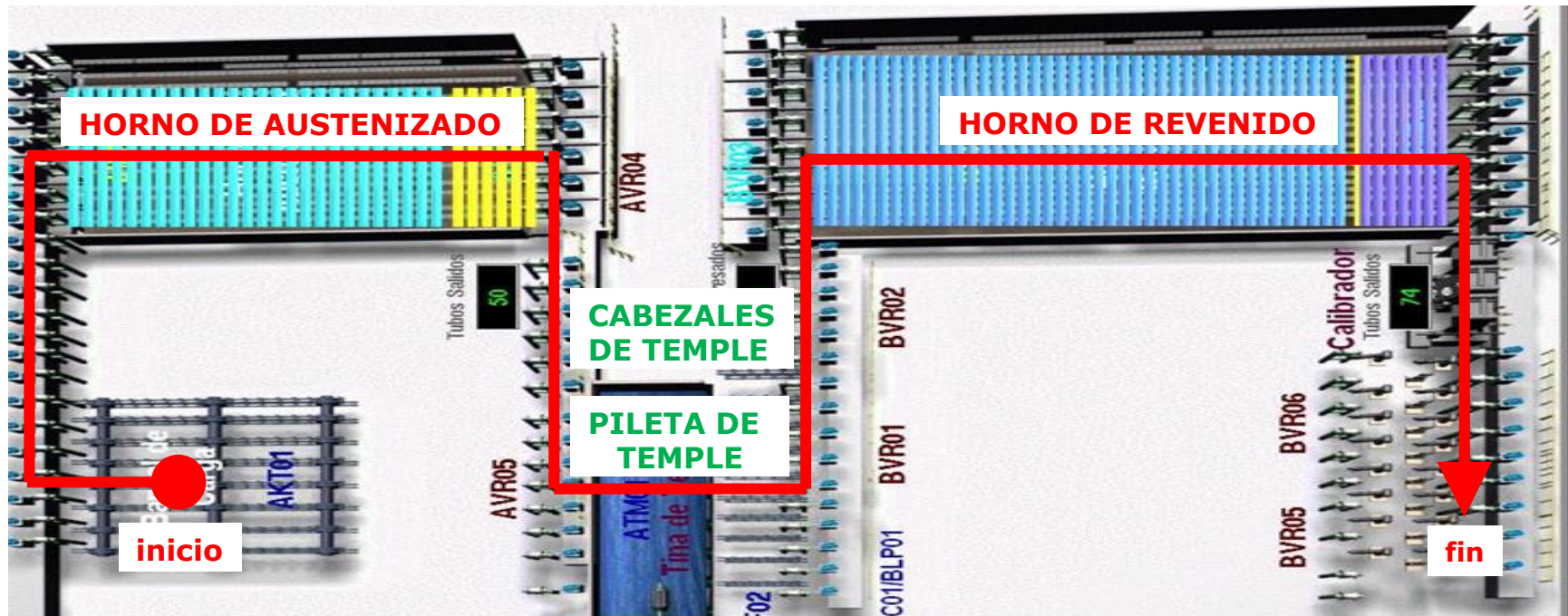


Soluciones para distintos avances temporales h (en ambos casos el modelo es con convección+ radiación)



Aplicación industrial

Se quiere modelizar el calentamiento y enfriamiento de tubos para realizarles el clásico tratamiento térmico de "Temple y Revenido". Los tubos avanzan a velocidad constante según el esquema:



Acercamiento a la realidad

Modelo básico: calentamiento con convección solamente:

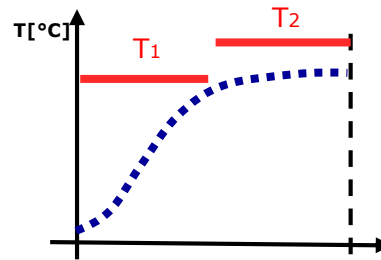
$$-mC \frac{dT}{dt} = h_c S(T - T_\infty)$$

1° agregado: las altas temperaturas requieren agregar la transferencia de calor por radiación

$$-mC \frac{dT}{dt} = h_c S(T - T_\infty) + \varepsilon \sigma S(T^4 - T_\infty^4)$$

2° agregado: el horno tiene zonas de control con diferente temperatura.

→ La temperatura ambiente dependerá del tiempo indirectamente.



$$T_\infty(x) = \begin{cases} T_1 & x \leq \frac{L}{2} \\ T_2 & x > \frac{L}{2} \end{cases} \quad x = v_0 t \quad \text{ya no hay posibilidad de solución analítica..}$$

$$-mC \frac{dT}{dt} = h_c S(T - T_\infty(v_0 t)) + \varepsilon \sigma S(T^4 - T_\infty^4(v_0 t))$$

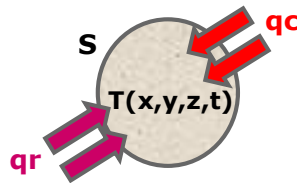
3° agregado: la capacidad calorífica **C** depende de la temperatura a cada instante. Aparte, para el austenizado existe un cambio de fase durante el calentamiento → incluir un calor latente.

T[°C]	C(T) [J/kgK]
100	470
200	500
300	520
500	510

Se necesita generar una relación continua entre C y T a través de una regresión lineal o interpolación de datos de tablas..

$$-mC(T) \frac{dT}{dt} = h_c S(T - T_\infty(v_0 t)) + \varepsilon \sigma S(T^4 - T_\infty^4(v_0 t))$$

4° agregado: se puede considerar que la temperatura T para cada instante es la misma en todo el cuerpo?

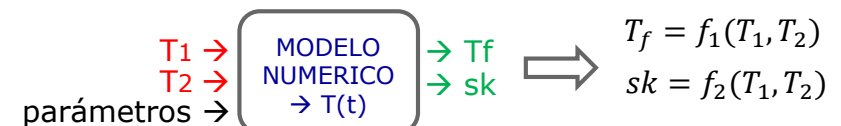
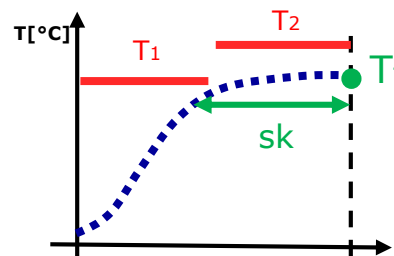


Si el material no se calienta de forma homogénea, se debe incluir un término de difusión

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T$$

ECUACION DIFERENCIAL EN DERIVADAS PARCIALES

5° agregado: el problema suele estar dado en forma inversa. Se requiere una dada temperatura final y se necesita definir las temperaturas de zonas T1 y T2



SISTEMA DE ECUACIONES NO LINEALES

Método de Runge Kutta de orden 4

Calcula 4 incrementos diferentes y hace un promedio pesado para el avance:

Genérico:

$$q_1 = h f(U_n, t_n)$$

$$q_2 = h f\left(U_n + \frac{1}{2}q_1, t_{n+\frac{1}{2}}\right)$$

$$q_3 = h f\left(U_n + \frac{1}{2}q_2, t_{n+\frac{1}{2}}\right)$$

$$q_4 = h f(U_n + q_3, t_{n+1})$$

$$U_{n+1} = U_n + \frac{1}{6}(q_1 + 2q_2 + 2q_3 + q_4)$$

Aplicado a: $U' = -U$

$$q_1 = h(-U_n)$$

$$q_2 = h\left[-\left(U_n + \frac{1}{2}\overbrace{h(-U_n)}^{q_1}\right)\right]$$

$$q_3 = h\left[-\left(U_n + \frac{1}{2}\overbrace{\left[h\left[-\left(U_n + \frac{1}{2}\overbrace{h(-U_n)}^{q_1}\right)\right]\right]}^{q_2}\right)\right]$$

$$q_4 = h\left[-\left(U_n + \overbrace{h\left[-\left(U_n + \frac{1}{2}\overbrace{\left[h\left[-\left(U_n + \frac{1}{2}\overbrace{h(-U_n)}^{q_1}\right)\right]\right]}^{q_2}\right)\right]}^{q_3}\right)\right]$$

$$U_{n+1} = \dots$$

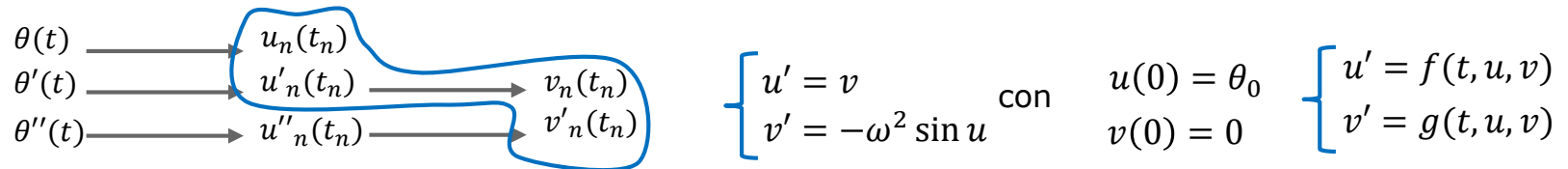
En la programación no hace falta hacer estos reemplazos!

Ejemplo de discretización para orden > 1

Supongamos ecuación diferencial de **orden 2**: $\theta'' + \omega^2 \sin \theta = 0$ con $\theta(0) = \theta_0$ y $\theta'(0) = 0$ ($\omega > 0$)

➡ $\theta'' = -\omega^2 \sin \theta = f(t, \theta, \theta')$

problema matemático problema numérico problema numérico en 2 variables u y v se lleva el problema a un sistema de ecuaciones diferenciales de **orden 1** la forma numérica general del sistema queda:



$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -\omega^2 \sin u \end{cases} \quad \text{con} \quad \begin{cases} u(0) = \theta_0 \\ v(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} u' = f(t, u, v) \\ v' = g(t, u, v) \end{cases}$$

Método de **Euler** (explícito) para el sistema:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n, v_n) \\ v_{n+1} = v_n + hg(t_n, u_n, v_n) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + hv_n \\ v_{n+1} = v_n + h[-\omega^2 \sin u_n] \end{cases}$$

en cada avance temporal se obtienen los pares ordenados (u_1, v_1) , luego (u_2, v_2) ...etc.

Método de **Euler Implícito** para el sistema:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}, v_{n+1}) \\ v_{n+1} = v_n + hg(t_{n+1}, u_{n+1}, v_{n+1}) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + hv_{n+1} \\ v_{n+1} = v_n + h[-\omega^2 \sin u_{n+1}] \end{cases}$$

Para $n=0$ y $h=1$: $\begin{cases} u_1 = u_0 + hv_1 \\ v_1 = v_0 + h[-\omega^2 \sin u_1] \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1 = \theta_0 + v_1 \\ v_1 = -\omega^2 \sin u_1 \end{cases}$ **SENL (se puede reducir a una ENL)**

Para $n=1$ y $h=1$: $\begin{cases} u_2 = u_1 + hv_2 \\ v_2 = v_1 + h[-\omega^2 \sin u_2] \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_2 = u_1 + v_2 \\ v_2 = v_1 - \omega^2 \sin u_2 \end{cases}$ **SENL (otro)**

Ejemplo de discretización para orden > 1

$$\left\{ \begin{array}{l} u' = v \\ v' = -\omega^2 \sin u \end{array} \right. \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} u' = f(t, u, v) \\ v' = g(t, u, v) \end{array} \quad \begin{array}{l} u(0) = \theta_0 \\ v(0) = 0 \end{array}$$

Método de **Runge Kutta de orden 2**:

$$\begin{aligned} q_1 &= h f(u_n, t_n) \\ q_2 &= h f(u_n + q_1, t_{n+1}) \\ u_{n+1} &= u_n + \frac{1}{2}(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

Para 2 variables:

$$\left. \begin{array}{l} q_{1u} = h f(u_n, v_n, t_n) \\ q_{2u} = h f(u_n + q_{1u}, v_n + q_{1v}, t_{n+1}) \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(q_{1u} + q_{2u}) \end{array} \right| \begin{array}{l} q_{1v} = h g(u_n, v_n, t_n) \\ q_{2v} = h g(u_n + q_{1u}, v_n + q_{1v}, t_{n+1}) \\ v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}(q_{1v} + q_{2v}) \end{array}$$

Para el problema planteado:

$$\left. \begin{array}{l} q_{1u} = h v_n \quad \overbrace{q_{1v}} \\ q_{2u} = h \left[v_n - \omega^2 h \sin u_n \right] \\ u_{n+1} = u_n + h v_n - \frac{\omega^2 h^2}{2} \sin u_n \end{array} \right| \begin{array}{l} q_{1v} = h (-\omega^2 \sin u_n) \quad \overbrace{q_{1u}} \\ q_{2v} = h \left[-\omega^2 \sin(u_n + h v_n) \right] \\ v_{n+1} = v_n - \frac{\omega^2 h^2}{2} \sin u_n - \frac{\omega^2 h^2}{2} \sin(u_n + h v_n) \end{array}$$

Resumen para orden 2

Ecuación diferencial de orden 2: $\theta'' + \omega^2 \sin \theta = 0$ con $\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \theta'(0) = 0 \end{cases}$

Euler	Euler Implícito	Runge-Kutta 2
$u_{n+1} = u_n + hf(t_n, u_n, v_n)$ $v_{n+1} = v_n + hg(t_n, u_n, v_n)$	$u_{n+1} = u_n + hf(t_{n+1}, u_{n+1}, v_{n+1})$ $v_{n+1} = v_n + hg(t_n, v_n)$	$q_{1u} = h f(u_n, v_n, t_n) \quad q_{2u} = h f(u_n + q_{1u}, v_n + q_{1v}, t_{n+1})$ $q_{1v} = h g(u_n, v_n, t_n) \quad q_{2v} = h g(u_n + q_{1u}, v_n + q_{1v}, t_{n+1})$ $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(q_{1u} + q_{2u}) \quad v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}(q_{1v} + q_{2v})$
$u_{n+1} = u_n + hv_n$ $v_{n+1} = v_n + h[-\omega^2 \sin u_n]$	$u_{n+1} = u_n + hv_{n+1}$ $v_{n+1} = v_n + h[-\omega^2 \sin u_{n+1}]$	$u_{n+1} = u_n + hv_n - \omega^2 h^2 \sin u_n$ $v_{n+1} = v_n - \frac{\omega^2 h^2}{2} \sin u_n - \dots$ $\quad - \frac{\omega^2 h^2}{2} \sin(u_n + hv_n)$

Estabilidad?

Estabilidad para sistemas + Euler

Estabilidad para Euler (explicito) en el sistema:
$$\begin{cases} u' = v & u(0) = \theta_0 \\ v' = -\omega^2 \sin u & v(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccc} u_{n+1} = u_n + hv_n & \xrightarrow{\text{perturbo}} & u_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = u_n + \varepsilon_n + h(v_n + \delta_n) \\ v_{n+1} = v_n + h[-\omega^2 \sin u_n] & \begin{array}{c} \varepsilon \ll u \\ \delta \ll v \end{array} & v_{n+1} + \delta_{n+1} = v_n + \delta_n - \omega^2 h \sin(u_n + \varepsilon_n) \end{array}$$

$$\underline{u_{n+1} + \varepsilon_{n+1}} = \underline{u_n + \varepsilon_n} + \underline{h(v_n + \delta_n)}$$

$$\boxed{\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + h\delta_n}$$

$$\underline{v_{n+1} + \delta_{n+1}} = \underline{v_n + \delta_n} - \underline{\omega^2 h \sin(u_n)} - \underline{\omega^2 h \cos(u_n) \varepsilon_n}$$

$$\boxed{\delta_{n+1} = \delta_n - \omega^2 h \cos(u_n) \varepsilon_n}$$

$$v_{n+1} + \delta_{n+1} = v_n + \delta_n - \omega^2 h \underbrace{\sin(u_n + \varepsilon_n)}$$

linealizar antes

Calculo auxiliar para linealizar:

$$\sin(u + \varepsilon) \rightarrow f(u) = \sin(u) \rightarrow f(u + \varepsilon)??$$

$$f(u + \varepsilon) \sim f(u) + \frac{df}{du} \varepsilon$$

$$\sin(u + \varepsilon) \sim \sin(u) + \cos(u) \varepsilon$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{n+1} \\ \delta_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h \\ -\omega^2 h \cos(u_n) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \delta_n \end{bmatrix}$$

Las perturbaciones están acopladas. Impongo las condiciones sobre los autovalores de la matriz de amplificación

Estabilidad para sistemas + Euler

$$\det[A - \lambda I] = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & h \\ -\omega^2 h \cos(u_n) & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1 - \lambda)^2 + \omega^2 h^2 \cos(u_n) = 0$$

$$(1 - \lambda)^2 = -\omega^2 h^2 \cos(u_n) \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm \omega h \sqrt{-\cos(u_n)}$$

La condición de estabilidad es sobre los autovalores: $|\lambda_{1,2}| < 1$

En este caso, ambos son números complejos

→ Se busca el modulo de todas formas: $|\lambda_{1,2}|^2 = 1 + \omega^2 h^2 \cos(u_n)$

→ AMBOS AUTOVALORES SON MAYORES A "1" EN MODULO. SIN EMBARGO LA ECUACION NO TIENE COMO PARTE DE SU SOLUCION UNA EXPONENCIAL NEGATIVA. ENTONCES NO PRESENTA INESTABILIDAD. SOLO SE INCREMENTA EL ERROR DE TRUNCAMIENTO EN CADA PASO h

¿Como cambia el análisis si la ecuación hubiera sido... $\theta'' + \omega^2 \theta = 0$ con $\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \theta'(0) = 0 \end{cases}$

O bien... $x'' + \omega^2 x = 0$ con $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$

PVI con ecuación rígida

Sea el problema rígido

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 1001 \cdot \frac{du}{dt} + 1000 \cdot u = 0 \quad u(0) = 1 \quad u'(0) = -1$$

- a) Convertir la ecuación diferencial en un sistema de ecuaciones de primer orden y discretizarlo mediante el método de Euler.
- b) Hallar la condición de estabilidad del problema numérico planteado, es decir, el valor de k_{\max} tal que $k < k_{\max}$.
- c) Con las condiciones iniciales dadas, la solución del problema es $u(t) = e^{-t}$, es decir que solo está activa la componente lenta. Mostrar que con $k > k_{\max}$ cualquier perturbación dispara la componente rápida que se amplifica tornando inestable el cálculo.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = -1001 \frac{dy}{dt} - 1000y \end{cases} \quad \text{con} \quad \text{CC} \begin{cases} y(0) = 1 \\ z(0) = \left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Euler:} \quad u_{n+1} &= u_n + h v_n & u_0 &= 1 \\ v_{n+1} &= v_n - h(1001 v_n + 1000 u_n) & v_0 &= -1 \end{aligned}$$

Perturbamos, simplificamos y reordenamos:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{n+1} \\ \delta_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h \\ -1000h & 1 - 1001h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_n \\ \delta_n \end{bmatrix} \quad \text{cuyos autovalores son } \begin{cases} \lambda_1 = 1 - h \\ \lambda_2 = 1 - 1000h \end{cases}$$

$$\text{Imponemos: } |\lambda_1| < 1 \rightarrow 0 < h < 2$$

$$|\lambda_2| < 1 \rightarrow 0 < h < 0.002$$

La estabilidad del problema está controlado por la “componente rápida”, es decir, por la variación brusca de la función cerca de la CC (λ_2). Fuera de esa región, la restricción sobre el paso se relaja (λ_1).