ÁLGEBRA II 2021

ESPACIO VECTORIAL

- Conjunto $\mathbb{V}$ de vectores
- Conjunto $\mathbb{K}$ de escalares ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ o $\mathbb{K}=\mathbb{C}$)
- Una operación suma definida entre los elementos del conjunto $\mathbb{V}$, que cumple $u+v \in \mathbb{V}$.
- Una operación producto por escalar, que asocia a cada escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ y cada vector $u \in \mathbb{V}$ el vector $\lambda . u \in \mathbb{V}$

Propiedades

(I) $u+v=v+u, \quad \forall u,v \in \mathbb{V}$ (conmutatividad)

(II) $u+(v+w)=(u+v)+w=u+v+w, \quad \forall u,v,w \in \mathbb{V}$ (asociatividad)

(III) $\exists 0_V \in \mathbb{V} \, / \, u+0_V=0_V+u=u$ (existencia elemento neutro para la suma).

(IV) $\forall u \in \mathbb{V}, \exists (-u) \in \mathbb{V}$ tq $u+(-u)=0_V$ (existencia inverso aditivo para todo elemento de $\mathbb{V}$)

(V) $1.u=u, \quad \forall u \in \mathbb{V}$

(VI) $(\lambda.\beta)u=\lambda.(\beta.u), \quad \forall \lambda,\beta \in \mathbb{K}$ y $\forall u \in \mathbb{V}$

(VII) $\lambda(u+v)=\lambda.u+\lambda.v, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u,v \in \mathbb{V}$

(VIII) $(\lambda+\beta)u=\lambda.u+\beta u \quad \forall \lambda,\beta \in \mathbb{K}, \forall u \in \mathbb{V}$

PROPIEDADES ELEMENTALES

- El elemento neutro $0_V \in \mathbb{V}$ es único.
- El simétrico de un elemento $u \in \mathbb{V}$ es único.
- $0u=0_V, \quad \forall u \in \mathbb{V}$
- $\lambda . 0_V=0_V, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$.
- $\lambda u=0_V \Rightarrow \lambda=0$ o $u=0_V$.
- $(-1)u=(-u)$

Asamblea

Escaneado con CamScanner

Subespacios

Un subespacio de un $\mathbb{K}$ espacio vectorial $\mathbb{V}$, es un subconjunto $S \subset \mathbb{V}$, $S \neq \emptyset$ que resulta ser un espacio vectorial con la suma y el producto por escalar definidos.

Para S ser espacio vectorial debe cumplir:

- S resulta cerrado para las operaciones suma.
- S resulta cerrado para producto por escalar.

Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, se dice que $S \subset \mathbb{V}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ si cumple:

- $0_V \in S$.
- $u, v \in S \Rightarrow u+v \in S$
- Si $u \in S$ y $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda . u \in S$

Combinación Lineal

Un vector $w \in \mathbb{V}$-$\mathbb{K}$ espacio vectorial es combinación lineal de un conjunto de vectores $v_1, v_2, \dots, v_n$ en $\mathbb{V}$ si existen escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tales que:

$$w = \lambda_1 . v_1 + \lambda_2 . v_2 + \dots + \lambda_n . v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

- $gen\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ representa el conjunto de todas las combinaciones lineales posibles entre $v_1, v_2, \dots, v_n$.
  ↳ subespacio generado por $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Si $S = gen\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rightarrow$ Subespacio S de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ está generado por los vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

↳ $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es un conj. generador de S.

↳ si son finitos elementos $\Rightarrow$ S es finitamente generado.

→ Si en un conjunto un vector es C.L. de los anteriores, cuando se quiera escribir a cualquier vector del espacio vectorial como C.L de ese conjunto, la escritura NO ES ÚNICA.

Asamblea

Escaneado con CamScanner

Dependencia Lineal

Un conjunto de dos o más vectores, $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$-K espacio vectorial, es linealmente dependiente si alguno de sus elementos es C.L. de los demás.

↳ Si el conjunto está formado por un vector, se dice que es linealmente dependiente sii $v_1 = 0_V$.

Sino, el conjunto es linealmente independiente → sii $\lambda_1.v_1 + \lambda_2.v_2 + \dots + \lambda_n.v_n = 0_V \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Existe una única C.L. para escribir 0_V.

Si $\det(M) = 0 \Rightarrow$ LD
Si $\det(M) \neq 0 \Rightarrow$ LI

Observaciones

- Todo conjunto que contenga a 0_V es L.D.
- Si un conjunto tiene dos elementos $\{v_1, v_2\}$ es L.D. si $\exists k \in K / v_2 = k.v_1$.
- Si $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es un conjunto de vectores y v_k es CL de los demás vectores del conjunto, entonces $gen\{v_1, v_2, \dots, v_k\} = gen\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$.
- Si en un conjunto de vectores generadores de un subespacio no sobran elementos → Conjunto minimal de generadores

Lema Independencia Lineal

Si un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ con $v_1 \neq 0_V$ es l.d., siempre existe un mínimo k tal que

- $v_k \in gen\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$
- $\{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\}$ es Li.

Base

Un conjunto $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$-K espacio vectorial si:

- $gen\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = V$
- $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es LI

Si un conjunto finito $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ es base de un K espacio vectorial V se dice que n es la dimensión de V. Se nota: $\dim(V) = n$.

↳ El subespacio nulo, $\{0_V\}$, tiene dimensión = 0.

↳ Un espacio vectorial es de dimensión infinita si no es de dimensión finita.

Base Canónica

$$E_{\mathbb{R}^n} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$E_{\mathbb{R}^n} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ con $e_i \in \mathbb{R}^n / (e_i)_k = \delta_{ik}$

$\dim(\mathbb{R}^n) = n$

Observaciones Importantes

I.- Si $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es L.I. $\Rightarrow k \leq n$.

II.- Si $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ genera $\mathbb{V} \Rightarrow m \geq n$.

III.- Si $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ (n elementos) es LI $\Rightarrow B$ es base.

IV.- Si $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ (n elementos) es un conjunto generador de $V \Rightarrow B$ es base de V.

V.- Si un subespacio $S \subset \mathbb{V} \Rightarrow \dim(S) \leq n$.

VI.- Si un subespacio $S \subset \mathbb{V}$ y $\dim(S) = \dim(\mathbb{V}) \Rightarrow S = \mathbb{V}$

Wronskiano

Dado conjunto funciones $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ con $\phi_i \in C^{(n-1)}(I)\ \forall 1 \leq i \leq n$ se llama wronskiano $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ a:

$$W(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) = \begin{vmatrix} \phi_1(x_0) & \phi_2(x_0) & \cdots & \phi_n(x_0) \\ \phi_1'(x_0) & \phi_2'(x_0) & \cdots & \phi_n'(x_0) \\ \phi_1''(x_0) & \phi_2''(x_0) & \cdots & \phi_n''(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi_1^{(n-1)}(x_0) & \phi_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & \phi_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

- Si $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\} \subset C^{(n-1)}(I)$ y para algún $x_0 \in I$, se cumple $W(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) \neq 0 \Rightarrow \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ es L.I.
- Si $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\} \subset C^{(n-1)}(I)$ es un conjunto LD $\Rightarrow W(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) = 0\ \forall x \in I$

Asamblea

Escaneado con CamScanner

Guía 1: Espacios Vectoriales

1.1. Sean $V = \mathbb{R}^+_*$. Si la suma vectorial $\oplus$ y la multiplicación escalar $\odot$ se definen por

$$v \oplus w := vw,$$
$$\alpha \odot v := v^{\alpha}.$$

Verificar que $(V, \oplus, \mathbb{K}, \odot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, donde 1 es el vector cero y v^{-1} es el vector opuesto de v.

Para que sea $\mathbb{K}$-espacio vectorial, tiene que cumplirse 8 condiciones:

- **Conmutatividad**: $u \oplus v = v \oplus u$

$$\Rightarrow \boxed{u \oplus v} \underset{\text{definición}}{\doteq} u.v \underset{\text{conmutatividad en } \mathbb{R}}{=} v.u \underset{\text{definición}}{\doteq} \boxed{v \oplus u}$$

- **Asociatividad**: $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$

$$\Rightarrow \boxed{u \oplus (v \oplus w)} \underset{\text{definición}}{\doteq} u.(v.w) \underset{\text{asociatividad en } \mathbb{R}}{=} (u.v).w \underset{\text{definición}}{\doteq} \boxed{(u \oplus v) \oplus w}$$

- **Existencia Elemento Neutro**: $u \oplus 0_V = u$

$$\Rightarrow \boxed{u \oplus 0_V} \underset{\text{definición}}{\doteq} u.1 \underset{\text{por neutro en los } \mathbb{R}}{=} \boxed{u}$$

- **Opuesto**: $u \oplus (-u) = 0_V$

$$\Rightarrow \boxed{u \oplus (-u)} \underset{\text{definición}}{\doteq} u.u^{-1} = u.\frac{1}{u} \underset{\text{multiplicación en } \mathbb{R}}{=} 1 \underset{\text{definición}}{\doteq} \boxed{0_V}$$

- **Distributiva respecto de los escalares**: $(\alpha \oplus \beta) \odot u = \alpha \odot u + \beta \odot u$

$$\Rightarrow \boxed{(\alpha \oplus \beta) \odot u} \underset{\text{definición}}{=} u^{\alpha . \beta} \underset{\text{propiedad potencia en } \mathbb{R}}{=} u^{\alpha} . u^{\beta} \underset{\text{definición}}{\doteq} \alpha \odot u . \beta \odot u \underset{\text{definición}}{\doteq} \boxed{\alpha \odot u \oplus \beta \odot u}$$

• Distributiva respecto de los vectores: $\alpha \odot (u \oplus v) = \alpha \odot u \oplus \alpha \odot v$.

$\Rightarrow \boxed{\alpha \odot (u \oplus v)} \underset{\text{definición}}{\doteq} (u.v)^{\alpha} \underset{\text{propiedad potencia en } \mathbb{R}}{=} u^{\alpha}.v^{\alpha} \underset{\text{definición}}{\doteq} \boxed{\alpha \odot u \oplus \alpha \odot v}$

• Asociatividad respecto de los escalares: $\alpha \odot (\beta \odot u) = (\alpha \odot \beta) \odot u$

$\Rightarrow \boxed{\alpha \odot (\beta \odot u)} \underset{\text{definición}}{\doteq} (\beta \odot u)^{\alpha} \underset{\text{definición}}{\doteq} u^{\beta^{\alpha}} \underset{\text{definición}}{\doteq} u^{\alpha \odot \beta} \underset{\text{definición}}{\doteq} \boxed{(\alpha \odot \beta) \odot u}$

• $1u = u$

$\Rightarrow \boxed{1 \odot u} \underset{\text{definición}}{\doteq} u^{1} \underset{\text{potencia en } \mathbb{R}}{=} \boxed{u}$

1.2 Verificar las siguientes afirmaciones

a. El conjunto $\{[a\ 0\ a]^T : a \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow a[1\ 0\ 1]^T$

• $0_V \in S$

$\Rightarrow$ si $a=0 \Rightarrow [0\ 0\ 0]^T = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in S$ ✓

• $u+v \in S$ con $u, v \in V$

$u = a_1[1\ 0\ 1]^T \wedge v = a_2[1\ 0\ 1]^T$ con $a_1, a_2 \in K$

$\Rightarrow u+v = a_1[1\ 0\ 1]^T + a_2[1\ 0\ 1]^T = (a_1+a_2).[1\ 0\ 1]^T = a_3[1\ 0\ 1]^T$ con $a_3 \in K$ ✓

• $\lambda u \in S$ con $\lambda \in K$, $u \in V$

$\Rightarrow \lambda . a[1\ 0\ 1]^T = (\lambda a)[1\ 0\ 1]^T = a_4.[1\ 0\ 1]^T$ con $a_4 \in K$ ✓

b. El conjunto $\{[a+b\ \ 0\ \ a]^T : a, b \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$

• $0_V \in S$

$\Rightarrow$ si $a=b=0 \Rightarrow [0\ 0\ 0]^T = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^3} \in S$ ✓

• $u+v \in S$ con $u, v \in V$

$u = [a_1+b_1\ \ 0\ \ a_1]^T \wedge v = [a_2+b_2\ \ 0\ \ a_2]^T$ con $a_1, a_2, b_1, b_2 \in K$

$\Rightarrow u+v = [(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\ \ 0\ \ (a_1+a_2)]^T = [a_3+b_3\ \ 0\ \ a_3]^T$ con $a_3, b_3 \in K$ ✓

• $\lambda u \in S$ con $\lambda \in \mathbb{K}$, $u \in V$.

$\Rightarrow \lambda . [a+b \;\; 0 \;\; a]^T = [\lambda(a+b) \;\; 0 \;\; \lambda a]^T = [\lambda a + \lambda b \;\; 0 \;\; \lambda a]^T = [a_4 + b_4 \;\; 0 \;\; a_4]^T$ con $a_4, b_4 \in \mathbb{K}$ ✓

c- El conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} ; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times2}$.

• $0_{\mathbb{R}^{2\times2}} \in S$

$\Rightarrow$ si $a = b = c = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^{2\times2}} \Rightarrow 0_{\mathbb{R}^{2\times2}} \in S$ ✓

• $u + v \in S$ con $u, v \in V$

$u = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{bmatrix} \wedge v = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & c_2 \end{bmatrix}$ con $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow u + v = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ con $a_3, b_3, c_3 \in \mathbb{K}$ ✓

• $\lambda u \in S$ con $\lambda \in \mathbb{K}$, $u \in V$

$\Rightarrow \lambda . \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 & \lambda b_1 \\ \lambda b_1 & \lambda c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_4 & b_4 \\ b_4 & c_4 \end{bmatrix}$ ✓ con $a_4, b_4, c_4 \in \mathbb{K}$.

d- Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k x^k : a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}[x]$.

• $0_{\mathbb{R}[x]} \in S$

$\Rightarrow$ si $a_0 = a_1 = \dots = a_n = 0 \Rightarrow 0 + 0x + \dots + 0x^n = 0$ ✓

• $u + v \in S$ con $u, v \in V$.

$u = \sum_{k=0}^{n} a_{1k} x^k \wedge v = \sum_{k=0}^{n} a_{2k} x^k$ con $a_{1k}, a_{2k} \in \mathbb{K}$.

$u + v = \sum_{k=0}^{n} a_{1k} x^k + \sum_{k=0}^{n} a_{2k} x^k = \sum_{k=0}^{n} (a_{1k} x^k + a_{2k} x^k) = \sum_{k=0}^{n} ((a_{1k} + a_{2k}) x^k) = \sum_{k=0}^{n} a_{3k} x^k$ ✓ con $a_{1k}, a_{2k}, a_{3k} \in \mathbb{K}$

• $\lambda . u \in S$ con $\lambda \in \mathbb{K}$, $u \in V$.

$\lambda . \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k x^k) = \sum_{k=0}^{n} a_{4k} x^k$ ✓ con $a_4 \in \mathbb{K}$.

e- Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto de funciones $\left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(2k\pi t) + b_k \operatorname{sen}(2k\pi t)] : a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R} \right\}$ es un subespacio de $C^{\infty}(\mathbb{R})$.

• $0_{C^{\infty}(\mathbb{R})} \in S$

$\Rightarrow$ si $a_0 = a_1 = \dots = a_n = b_1 = \dots = b_n = 0 \Rightarrow \frac{0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [0 . \cos(2k\pi t) + 0 . \operatorname{sen}(2k\pi t)] = 0_{C^{\infty}(\mathbb{R})} \Rightarrow 0_{C^{\infty}(\mathbb{R})} \in S$ ✓

Escaneado con CamScanner

• $u+v \in S$ con $u, v \in V$

$$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k \cos(2k\pi t) + b_k \operatorname{sen}(2k\pi t)\right] \wedge v = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[c_k \cos(2k\pi t) + d_k \operatorname{sen}(2k\pi t)\right]$$ con $a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_0, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n \in \mathbb{R}$

$$u+v = \frac{a_0}{2} + \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[a_k \cos(2k\pi t) + b_k \operatorname{sen}(2k\pi t)\right] + \sum_{k=1}^{n}\left[c_k \cos(2k\pi t) + d_k \operatorname{sen}(2k\pi t)\right] =$$

$$= \frac{a_0+c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos(2k\pi t) + b_k \operatorname{sen}(2k\pi t) + c_k \cos(2k\pi t) + d_k \operatorname{sen}(2k\pi t)\right) =$$

$$= \frac{a_0+c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left((a_k+c_k) \cdot \cos(2k\pi t) + (b_k+d_k) \operatorname{sen}(2k\pi t)\right) = \frac{e_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left[e_k \cos(2k\pi t) + f_k \operatorname{sen}(2k\pi t)\right] \checkmark$$

• $\lambda \cdot u \in S$

$$\lambda \cdot \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos(2k\pi t) + b_k \operatorname{sen}(2k\pi t)\right)\right] = \frac{\lambda a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda\left(a_k \cos(2k\pi t) + b_k \operatorname{sen}(2k\pi t)\right) =$$

$$= \frac{\lambda \cdot a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \lambda a_k \cos(2k\pi t) + \lambda b_k \operatorname{sen}(2k\pi t) = \frac{g}{2} + \sum_{k=1}^{n} g \cos(2k\pi t) + h \operatorname{sen}(2k\pi t) \checkmark$$

1.3. Sean a y b dos números reales, arbitrarios pero fijos. Comprobar que los conjuntos de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$ definidos por $S_1 := \{e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\}$ y $S_2 := \{e^{(a+ib)x}, e^{(a-ib)x}\}$ generan el mismo $\mathbb{C}$-espacio vectorial

• $e^{(a+bi)x} = e^{ax+bix} = e^{ax}\cos(bx) + i \cdot e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$

• $e^{(a-bi)x} = e^{ax-bix} = e^{ax}\cos(-bx) + i \cdot e^{ax}\operatorname{sen}(-bx) = e^{ax}\cos(bx) - i e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$.

Veamos los elementos de S_1:

• $e^{ax}\cos(bx) = \frac{1}{2}\left(e^{(a+bi)x} + e^{(a-bi)x}\right)$.

• $e^{ax}\operatorname{sen}(bx) = \frac{1}{2i}\left(e^{(a+bi)x} - e^{(a-bi)x}\right)$.

→ Como el uno de los generadores de S_2 está en $S_1 \Rightarrow S_2 \subseteq S_1$.

Veamos los elementos de S_2:

• $e^{(a+bi)x} = e^{ax}\cos(bx) + i e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$.

• $e^{(a-bi)x} = e^{ax}\cos(bx) - i e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$

→ Como el uno de los generadores de S_1 está en $S_2 \Rightarrow S_1 \subseteq S_2$

Como $S_1 \subseteq S_2$ y $S_2 \subseteq S_1 \Rightarrow \boxed{S_1 = S_2}$

Escaneado con CamScanner

1.4. Sean $A_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$, $A_2=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$, $A_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$

a. Comprobar que $B \in gen\{A_1, A_2, A_3\}$ y hallar 3 maneras diferentes de representar B como C.L. de las matrices A_1, A_2 y A_3.

$B = \alpha_1 . A_1 + \alpha_2 . A_2 + \alpha_3 . A_3 \Rightarrow \begin{bmatrix}2 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix} = \alpha_1 . \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix} + \alpha_2 . \begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} + \alpha_3 . \begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix}$

$$\hookrightarrow \begin{cases} 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \\ -1 = \alpha_1 - \alpha_2 \\ -2 = -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \\ 1 = -\alpha_1 + \alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2$ (I) $\wedge$ $\alpha_1 - \alpha_2 = -1$
$\alpha_1 = -1 + \alpha_2$ (II)

(II) en (I): $-1 + \alpha_2 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2$
$-1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 2$
$\alpha_3 = 2 + 1 - 2\alpha_2$
$\alpha_3 = 3 - 2\alpha_2$

$\Rightarrow B = \alpha_1 . A_1 + \alpha_2 . A_2 + \alpha_3 . A_3$
$\boxed{B = (-1+\alpha_2) A_1 + \alpha_2 A_2 + (3 - 2\alpha_2) A_3} \to$ C.L

Hay ∞ posibilidades. Le asigno valores a α_2:

- $\alpha_2 = 0 \Rightarrow B = -A_1 + 3A_3$.
- $\alpha_2 = 1 \Rightarrow B = A_2 + A_3$.
- $\alpha_2 = 2 \Rightarrow B = A_1 + 2A_2 - A_3$

b. Hallar un sistema de generadores del subespacio S de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$S := \{[x_1 \ x_2 \ x_3]^T : x_1 A_1 + x_2 A_2 + x_3 A_3 = 0_{\mathbb{R}^{2\times 2}}\}$$

$\hookrightarrow x_1 \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix} + x_2 . \begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{bmatrix} = 0_{\mathbb{R}^{2\times 2}}$

$\begin{bmatrix}x_1 & x_1\\ -x_1 & -x_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}x_2 & -x_2\\ -x_2 & x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}x_3 & 0\\ -x_3 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

sistema homogéneo
$$\hookrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ (I) $\wedge$ $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$
$\alpha_1 = \alpha_2$ (II)

(II) en (I): $\alpha_2 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$
$\alpha_3 = -2\alpha_2$.

$\Rightarrow \alpha_2 A_1 + \alpha_2 . A_2 - 2\alpha_2 . A_3 = 0_{\mathbb{R}^{2\times 2}} \Rightarrow \boxed{gen\{(1, 1, -2)^T\}}$

Lo es base por ser L.I

Aysambiea

Escaneado con CamScanner

2. Representar c/una de las matrices A_i como C.L. de las otras dos.

- $\underline{A_1 = a.A_2 + b.A_3}$

$$\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix} = a.\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix} + b.\begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a&-a\\-a&a\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b&0\\-b&0\end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases}a+b=1\\-a=1\\-a-b=-1\\a=-1\end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}1&1&1\\-1&0&1\\-1&-1&-1\\1&0&-1\end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\\0&0&0\end{array}\right]$$

$$a=-1 \wedge b=2 \Rightarrow \boxed{A_1 = -A_2 + 2A_3}$$

- $\underline{A_2 = a.A_1 + b.A_2}$

$$\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix} = a.\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a&a\\-a&-a\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b&0\\-b&0\end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases}a+b=1\\a=-1\\-a-b=-1\\-a=1\end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}1&1&1\\1&0&-1\\-1&-1&-1\\-1&0&1\end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}-1&0&1\\0&-1&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{array}\right]$$

$$-a=1 \wedge -b=-2$$
$$a=-1 \quad b=2 \Rightarrow \boxed{A_2 = -A_1 + 2A_3}$$

- $\underline{A_3 = a.A_1 + b.A_2}$

$$\begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix} = a.\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix} + b.\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&0\\-1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a&a\\-a&-a\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b&-b\\-b&b\end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases}a+b=1\\a-b=0\\-a-b=-1\\-a+b=0\end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}1&1&1\\1&-1&0\\-1&-1&-1\\-1&1&0\end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}-2&0&-1\\0&-2&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{array}\right]$$

$$-2a=-1 \wedge -2b=-1$$
$$a=\frac{1}{2} \quad b=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{A_3 = \frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_2 = \frac{1}{2}(A_1+A_2)}$$

Escaneado con CamScanner

1.5 Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $S=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ un conj. de vectores de $\mathbb{V}\setminus\{0\}$. Sabiendo que $2v_1-v_2-v_3=0$ y $2v_1+v_3-v_4=0$, hallar todos los subconjuntos de S que pueden ser un sist. de generadores minimal del subespacio generado por S.

$S=\{(v_1,v_2,v_3,v_4)\in\mathbb{V} / 2v_1-v_2-v_3=0 \wedge 2v_1+v_3-v_4=0\}$

$\hookrightarrow \begin{cases} 2v_1-v_2-v_3=0 \\ 2v_1+v_3-v_4=0 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 0 \end{array}\right]$

- $2v_1+v_3-v_4=0 \quad \wedge \quad 2v_2+4v_3-2v_4=0.$

$2v_1+v_3=v_4$ (I) $\qquad 2v_2+4v_3=2v_4.$

$\qquad v_2+2v_3=v_4.$ (II)

C.L de v_2 y v_3.

(I) en (II) : $v_2+2v_3=2v_1+v_3$

$v_2=2v_1-v_3$ $\rightarrow S=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}=\{v_1,\cancel{2v_1-v_3},v_3,\cancel{v_2+2v_3}\}$

$=\boxed{gen\{v_1,v_3\}}$

- $2v_1+v_3-v_4=0 \quad \wedge \quad 2v_2+4v_3-2v_4=0.$

$v_3=v_4-2v_1 \rightarrow 2v_2+4(v_4-2v_1)-2v_4=0.$

$2v_2+4v_4-8v_1-2v_4=0$

$2v_2+2v_4-8v_1=0.$

$2v_4-8v_1=-2v_2.$

$-v_4+4v_1=v_2.$ $\rightarrow S=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}=\{v_1,\cancel{-v_4+4v_1},\cancel{v_4-2v_1},v_4\}$

$=\boxed{gen\{v_1,v_4\}}$

- $2v_1+v_3-v_4=0$ (I) $\wedge \quad 2v_2+4v_3-2v_4=0$

$2v_2+4v_3=2v_4.$

$v_2+2v_3=v_4$ (II).

(II) en (I) : $2v_1+v_3-v_2-2v_3=0$

$2v_1-v_3-v_2=0.$

$2v_1-v_2=v_3.$ $\rightarrow S=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}=\{v_1,v_2,\cancel{2v_1-v_2},\cancel{v_2+2v_3}\}$

$=\boxed{gen\{v_1,v_2\}}$

- $2v_1+v_3-v_4=0$ (I) $\wedge \quad 2v_2+4v_3-2v_4=0.$

$2v_2+4v_3=2v_4.$

$v_2+2v_3=v_4$ (II)

(II) en (I): $2v_1+v_3-v_2-2v_3=0.$

$2v_1-v_3-v_2=0.$

$-v_3-v_2=-2v_1.$

$\frac{v_3}{2}+\frac{v_2}{2}=v_1$ $\rightarrow S=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}=\{\cancel{\frac{v_2}{2}+\frac{v_3}{2}},v_2,v_3,\cancel{v_2+2v_3}\}$

$=\boxed{gen\{v_2,v_3\}}$

Asamblea

Escaneado con CamScanner

• $2v_1+v_3-v_4=0$ (I) $\wedge$ $2v_2+4v_3-2v_4=0$

$2v_2 - 2v_4 = -4v_3$

$-\frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_4 = v_3$ (II)

(II) en (I): $2v_1 - \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_4 - v_4 = 0$

$2v_1 - \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_4 = 0$

$2v_1 = \frac{v_2+v_4}{2}$

$v_1 = \frac{v_2+v_4}{4}$ $\rightarrow S=\{v_1,v_2,v_3,v_4\} = \{\frac{v_2+v_4}{4}, v_2, -\frac{1}{2}v_2+\frac{1}{2}v_4, v_4\}$

$= \boxed{\text{gen}\{v_2,v_4\}}$

• $2v_1+v_3-v_4=0$ $\wedge$ $2v_2+4v_3-2v_4=0$ (II)

$v_3-v_4=-2v_1$ $\quad$ $4v_3-2v_4=-2v_2$

$-2v_3+v_4=v_2$

$-\frac{v_3}{2}+\frac{v_4}{2}=v_1$ (I)

$\rightarrow S=\{v_1,v_2,v_3,v_4\} = \{\frac{-v_3+v_4}{2}, -2v_3+v_4, v_3, v_4\} \Rightarrow \boxed{\text{gen}=\{v_3,v_4\}}$

1.6. En c/uno de los sigs. casos describir al subespacio S mediante un sist. generadores minimal.

a. $S=\{x\in\mathbb{R}^3: x_1+2x_2+3x_3=0\}$ $\rightarrow$ 3 incógnitas, 1 ecuación $\rightarrow$ 2 parámetros

$x_1+2x_2+3x_3=0$

$x_1=-2x_2-3x_3$ $\rightarrow$ Si $[x_1\ x_2\ x_3]^T\in S \Rightarrow [x_1\ x_2\ x_3]^T = [-2x_2-3x_3\ \ x_2\ \ x_3]^T$

$= x_2(-2,1,0)^T + x_3(-3,0,1)^T$.

$S=\langle(-2\ 1\ 0)^T, (-3\ 0\ 1)^T\rangle$ $\rightarrow$ como es L.I $\Rightarrow \boxed{B=\{(-2\ 1\ 0)^T, (-3\ 0\ 1)^T\}}$

$\rightarrow \dim(S)=2$

b. $S=\{x\in\mathbb{R}^3: Ax=0\}$, donde $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 2}$

$A.x=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ 3 incógnitas, 2 ecuaciones $\rightarrow$ 1 parámetro.

$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\3x_1+2x_2+x_3=0\end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\3&2&1&0\end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}-4&0&4&0\\0&-4&-8&0\end{array}\right]$

$-4x_1+4x_3=0$ $\quad\wedge\quad$ $-4x_2-8x_3=0$.

$x_3=x_1$ $\quad\quad$ $-2x_3=x_2$ $\quad\rightarrow [x_1\ x_2\ x_3]^T = [x_1\ -2x_1\ x_1]^T = x_1.[1\ -2\ 1]^T$.

$\boxed{B=\{(1\ -2\ 1)^T\}}$

$\dim(S)=1$

Asamblea

Escaneado con CamScanner

c. $S=\left\{X\in\mathbb{R}^{2\times 2} : X\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}X\right\} \to X=\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}2x_1&3x_2\\2x_3&3x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1&2x_2\\3x_3&3x_4\end{bmatrix}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases}2x_1=2x_1 & \checkmark\\ 3x_2=2x_2 & \to x_2=0\\ 2x_3=3x_3 & \to 0=x_3\\ 3x_4=3x_4 & \checkmark\end{cases}$$

$$X=\begin{bmatrix}x_1&0\\0&x_4\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{B=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}} \to \dim(S)=2$$

d. $S=\left\{p\in\mathbb{R}_3[x] : \int_{-1}^{1}p(x)\,dx=0 \,\wedge\, \int_{-1}^{1}x\,p(x)\,dx=0\right\}$

$p(x)=d_0+d_1x+d_2x^2+d_3x^3$ con d_0, d_1, d_2 y $d_3\in\mathbb{R}$

- $\int_{-1}^{1} d_0+d_1x+d_2x^2+d_3x^3\,dx=\int_{-1}^{1}d_0\,dx+\int_{-1}^{1}d_1x\,dx+\int_{-1}^{1}d_2x^2\,dx+\int_{-1}^{1}d_3x^3\,dx=$

$$=d_0(x)\Big|_{-1}^{1}+d_1\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1}+d_2\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}+d_3\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{1}=2d_0+\frac{2}{3}d_2\doteq 0.$$

- $\int_{-1}^{1}x(d_0+d_1x+d_2x^2+d_3x^3)\,dx=\int_{-1}^{1}d_0x+d_1x^2+d_2x^3+d_3x^4\,dx=\int_{-1}^{1}d_0x\,dx+\int_{-1}^{1}d_1x^2\,dx+\int_{-1}^{1}d_2x^3\,dx+\int_{-1}^{1}d_3x^4\,dx$

$$=d_0\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-1}^{1}+d_1\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{1}+d_2\left(\frac{x^4}{4}\right)\Big|_{-1}^{1}+d_3\left(\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}d_1+\frac{2}{5}d_3\doteq 0$$

$$\begin{cases}2d_0+\frac{2}{3}d_2=0 \to d_0=-\frac{1}{3}d_2\\ \frac{2}{3}d_1+\frac{2}{5}d_3=0 \to d_1=-\frac{3}{5}d_3\end{cases} \to p(x)=d_0+d_1x+d_2x^2+d_3x^3=-\frac{1}{3}d_2-\frac{3}{5}d_3x+d_2x^2+d_3x^3$$

$$=d_2\left(-\frac{1}{3}+x^2\right)+d_3\left(-\frac{3}{5}x+x^3\right).$$

$S=\text{gen}\left\{x^2-\frac{1}{3},\ x^3-\frac{3}{5}x\right\}$ → ¿es base?

↳ ¿es LI?

- Planteo Wronskiano

$$W=\begin{bmatrix}x^2-\frac{1}{3} & x^3-\frac{3}{5}x\\ 2x & 3x^2-\frac{3}{5}\end{bmatrix} \to \det(W)=\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(3x^2-\frac{3}{5}\right)-(2x)\left(x^3-\frac{3}{5}x\right)$$

$$=3x^4-\frac{3}{5}x^2-x^2+\frac{1}{5}-2x^4+\frac{6}{5}x^2=x^4-\frac{2}{5}x^2+\frac{1}{5}$$

→ Son LI pq $\det(W)\neq 0$.

$$\boxed{B=\left\{x^2-\frac{1}{3},\ x^3-\frac{3}{5}x\right\}}$$

↳ $\dim(S)=2$

Asamblea

Escaneado con CamScanner

c.- $S = \{y \in C^{\infty}(\mathbb{R}) : y' - \lambda y = 0\}$ donde $\lambda \in \mathbb{R}$.

EDO: $\frac{dy}{dx} - \lambda y = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \lambda y \rightarrow \frac{1}{y} dy = \lambda dx \rightarrow \ln|y| = \lambda x + C_1 \rightarrow y = e^{\lambda x + C_1} \rightarrow y = e^{\lambda x} \cdot k$.

$\boxed{B = \{k \cdot e^{\lambda x}\}}$

$\hookrightarrow \dim(S) = 1$

Subespacio Columna de A: Col(A)

Sea $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ó $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) con columnas $A_1, A_2, \dots, A_n$. Si $x \in \mathbb{K}^n$ entonces el producto de A y x, denotado por Ax es la C.L. de las columnas de A.

$$Ax = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n$$

Col(A) es el conjunto de todas las C.L. de las columnas de la matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$.

$$Col(A) = \{ y \in \mathbb{K}^m : y = Ax, x \in \mathbb{K}^n \}$$

Si $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ tiene r columnas L.I., la dimensión del espacio columna es el rango de A:

$$\dim[Col(A)] = r = \text{rango}(A)$$

Subespacio Fila de A: Fil(A)

Fil(A) es el conjunto de todas las C.L. de las filas de la matriz $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Cada fila de A puede interpretarse como un vector de $\mathbb{K}^n$.

$$Fil(A) = \{ x \in \mathbb{K}^n : x = A^T u, u \in \mathbb{K}^m \}$$

$$Fil(A) = Col(A^T)$$

Como el rango de A también es el número de filas L.I., resulta:

$$\dim[Fil(A)] = \dim[Col(A)]$$

Subespacio Nulo de A: Nul(A)

Nul(A) es el conjunto de todas las soluciones de la ecuación $Ax = 0_{\mathbb{K}^m}$, esto es:

$$Nul(A) = \{ x \in \mathbb{K}^n : Ax = 0_{\mathbb{K}^m} \}$$

<u>Teorema de las dimensiones</u>

$$\boxed{\dim[Col(A)] + \dim[Nul(A)] = \dim(\mathbb{K}^n)}$$

ó

$$\boxed{\text{rango}(A) + \dim[Nul(A)] = n \rightarrow n^\circ \text{ columnas } A}$$

ó

$$\boxed{\dim[Fil(A)] + \dim[Nul(A^T)] = \dim(\mathbb{K}^n)}$$

ó

$$\boxed{\text{rango}(A) + \dim[Nul(A^T)] = m \rightarrow n^\circ \text{ ~~columnas~~ filas } A}$$

Escaneado con CamScanner

El sistema $Ax=b$ tiene solución sii $b \in Col(A)$

$\hookrightarrow$ $Ax=b$ tiene solución única $\Leftrightarrow$ las columnas de A constituyen conjunto L.I $\Leftrightarrow$ $Nul(A)=\{0_{K^n}\}$.

$\hookrightarrow$ $Ax=b$ tiene ∞ soluciones $\Leftrightarrow$ las columnas de A forman un conjunto L.D $\Leftrightarrow$ $Nul(A)\neq\{0_{K^n}\}$.

Vector de Coordenadas

El vector en K^n dado por $[\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_n]^T$ se denomina vector de coordenadas del vector v y se indica:

$$v^B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Por ej, yo tengo $B=\left\{M_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}, M_2=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}, M_3=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}, M_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$ y $M=\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}$.

Quiero hallar cómo obtener M en la base B, es decir $[M]^B \Rightarrow \alpha_1.M_1+\alpha_2.M_2+\alpha_3.M_3+\alpha_4.M_4=M$.

En este caso el sist. de las ecuaciones lineales es:

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=1 \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = -1 \\ \alpha_1+\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 = 2 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&1 \\ 1&1&1&0&-1 \\ 1&1&0&0&0 \\ 1&0&0&0&2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&0&2 \\ 0&1&0&0&-2 \\ 0&0&1&0&-1 \\ 0&0&0&1&2 \end{array}\right]$$

$\alpha_1=2, \alpha_2=-2, \alpha_3=-1, \alpha_4=2 \Rightarrow [M]^B=[2\ -2\ -1\ 2]^T$

Matriz Cambio de Base

Tengo dos bases y deseo una matriz general que me permita cambiar de una base a la otra.

Ej: tengo dos bases: $B_1=\left\{\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\right\}$ y $B_2=\left\{\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\right\}$.

- Cada vector de la B_1 lo expreso en la B_2

$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right]^{B_2}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}$ y $\left[\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\right]^{B_2}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{7}{12}\end{pmatrix}$.

- Armo una matriz con las columnas como esos vectores de coordenadas.

$$M=\begin{pmatrix}-1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 7/12\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Es la matriz de cambio de base: $M_{B_1}^{B_2}=([v_1]^{B_2}\ [v_2]^{B_2} \dots [v_n]^{B_2})$

$\Rightarrow [v]^{B_2}=M_{B_1}^{B_2}.[v]^{B_1}$

Asamblea

Escaneado con CamScanner

• Las matrices de cambio de base son inversibles

$$\Rightarrow \left(M_{B_1}^{B_2}\right)^{-1} \cdot \left(M_{B_1}^{B_2} \cdot [V]^{B_1}\right) = M_{B_1}^{B_2} \cdot [V]^{B_2}$$

$$\left(\left(M_{B_1}^{B_2}\right)^{-1} \cdot M_{B_1}^{B_2}\right) \cdot [V]^{B_1} = M_{B_1}^{B_2} \cdot [V]^{B_2}$$

• $\left(M_{B_1}^{B_2}\right)^{-1} \cdot M_{B_2}^{B_1} = I_{n \times n} \Rightarrow \left(M_{B_1}^{B_2}\right)^{-1} = M_{B_2}^{B_1}$

Polinomios de Lagrange

$$p_i(x) = \prod_{k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} = \frac{x - x_1}{x_i - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_i - x_2} \cdots \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_i - x_n}$$

$1 \leq i,\ k \leq n+1$

Polinomio de grado n para n+1 puntos

Ejercicios.

1.9 Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Se considera un conjunto de vectores L.I $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset V$ y se definen w_1, w_2, w_3 y w_4 mediante:

$$w_1 := v_1 - 2v_2 + v_3 - v_4;$$

$$w_2 := -4v_1 - 2v_2 + v_4;$$

$$w_3 := 2v_1 + 3v_2 - v_3 - 3v_4;$$

$$w_4 := 17v_1 - 10v_2 + 11v_3 + v_4;$$

¿El conjunto $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ es LI?

$$a.w_1 + b.w_2 + c.w_3 + d.w_4 = 0 \Rightarrow a.\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\-1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-4\\-2\\0\\1\end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix}2\\3\\-1\\-3\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}17\\-10\\11\\1\end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} a - 4b + 2c + 17d = 0 \\ -2a - 2b + 3c - 10d = 0 \\ a - c + d.11 = 0 \\ -a + b - 3c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{matrix} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=0 \end{matrix} \checkmark \Rightarrow \text{LI}$$

1.10 Determinar cuáles de los sigs. conjuntos son L.I. en su correspondiente espacio vectorial.

a. El subconjunto $\left\{\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\5\\-6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-5\\6\end{bmatrix}\right\}$ de $\mathbb{R}^3$

$$a.v_1 + b.v_2 + c.v_3 = 0 \Rightarrow a.\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix}3\\5\\-6\end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix}0\\-5\\6\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} a + 3b = 0 \\ 3a + 5b - 5c = 0 \\ -2a - 6b + 6c = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -5 & 0 \\ -2 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0 \Rightarrow \text{LI} \checkmark$$

b. El subconjunto $\{1 + 3x - 2x^2,\ 3 + 5x - 6x^2,\ -5x + 6x^2\}$ de $\mathbb{R}[x]$.

$a.p_1 + b.p_2 + c.p_3 = 0 \Rightarrow$ Calculo el $\det(W)$.

$$W = \begin{pmatrix} 1 + 3x - 2x^2 & 3 + 5x - 6x^2 & -5x + 6x^2 \\ 3 - 4x & 5 - 12x & -5 + 12x \\ -4 & -12 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\det(W) = (-4).\left((3 + 5x - 6x^2).(-5 + 12x) - (5 - 12x)(-5x + 6x^2)\right) -$$
$$(-12).\left((1 + 3x - 2x^2)(-5 + 12x) - (3 - 4x)(-5x + 6x^2)\right) +$$
$$(12).\left((1 + 3x - 2x^2).(5 - 12x) - (3 - 4x)(3 + 5x - 6x^2)\right).$$

$$= (-4).\left((-15 + 36x - 25x + 60x^2 + 30x^2 - 72x^3) - (-25x + 30x^2 + 60x^2 - 72x^3)\right) -$$
$$(-12).\left((-5 + 12x - 15x + 36x^2 + 10x^2 - 24x^3) - (-15x + 18x^2 + 20x^2 - 24x^3)\right) +$$
$$(12).\left((5 - 12x + 15x - 36x^2 - 10x^2 + 24x^3) - (9 + 15x - 18x^2 - 12x - 20x^2 + 24x^3)\right)$$

Asamblea

Escaneado con CamScanner

$= (-4).(-15+11x+90x^2-72x^3)+(-25x+90x^2-72x^3))-(-12).((-5-3x+46x^2-24x^3)-(15x+38x^2-24x^3))+$

$(12).((9+3x-46x^2+24x^3)-(9+3x-38x^2+24x^3))$

$= (-4).(-15+36x)+(12).(-5-18x+8x^2)+(12).(-4-8x^2) = 60+(-144)x-60-216x+96x^2-48-96x^2 =$

$= -48-360x \neq 0 \Rightarrow LI$ ✓

e. El subconjunto $\left\{\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3 & 5\\ -6 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & -5\\ 6 & 0\end{bmatrix}\right\}$ de $\mathbb{R}^{2\times2}$.

$a.M_1+b.M_2+c.M_3=0 \Rightarrow a.\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 0\end{bmatrix}+b.\begin{bmatrix}3 & 5\\ -6 & 0\end{bmatrix}+c.\begin{bmatrix}0 & -5\\ 6 & 0\end{bmatrix}=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}a & 3a\\ -2a & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3b & 5b\\ -6b & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -5c\\ 6c & 0\end{bmatrix}=0$

$\Rightarrow \begin{cases} a+3b=0 \\ 3a+5b-5c=0 \\ -2a-6b+6c=0 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 0 & 0\\ 3 & 5 & -5 & 0\\ -2 & -6 & 6 & 0\end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right]$

$a=0 \wedge b=0 \wedge c=0 \Rightarrow LI$ ✓

1.11. Determinar cuáles de los sigs. conjuntos de funciones son L.I.

a. $F=\{1, sen(x), cos(x)\}$

$a.1+b.sen(x)+c.cos(x)=0 \rightarrow$ Calculo W y $det(W)$.

$W=\begin{pmatrix}1 & sen(x) & cos(x)\\ 0 & cos(x) & -sen(x)\\ 0 & -sen(x) & -cos(x)\end{pmatrix} \rightarrow det(W)=1.((cos(x).(-cos(x)))-(-sen(x).(-sen(x))))=$

$=(-cos^2(x)-sen^2(x))=-1\neq0.$

$\Rightarrow \boxed{F \text{ es } LI}$

b. $S=\{1+3sen(x)-2cos(x), 3+5sen(x)-6cos(x), -5sen(x)+6cos(x)\}$.

$a.(1+3sen(x)-2cos(x))+b.(3+5sen(x)-6cos(x))+c.(-5sen(x)+6cos(x))=0$

$a+3a\,sen(x)-2a\,cos(x)+3b+5b\,sen(x)-6b\,cos(x)-5c\,sen(x)+6c\,cos(x)=0$

$sen(x)(3a+5b-5c)+cos(x)(-2a-6b+6c)+(a+3b)=0.$

$\begin{cases} 3a+5b-5c=0 \\ -2a-6b+6c=0 \\ a+3b=0 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}3 & 5 & -5 & 0\\ -2 & -6 & 6 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 0\end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right]$

$a=0 \wedge b=0 \wedge c=0 \Rightarrow \boxed{S \text{ es } LI}$

c. $G = \{1+2\,sen(x)+3\cos(x),\ 4+5\,sen(x)+7\cos(x),\ 2+sen(x)+\cos(x)\}$.

$a\cdot(1+2\,sen(x)+3\cos(x)) + b(4+5\,sen(x)+7\cos(x)) + c(2+sen(x)+\cos(x)) = 0.$

$a + 2a\,sen(x) + 3a\cos(x) + 4b + 5b\,sen(x) + 7b\cos(x) + 2c + c\,sen(x) + c\cos(x) = 0$

$sen(x)(2a+5b+c) + \cos(x)(3a+7b+c) + (a+4b+2c) = 0.$

$$\begin{cases} 2a+5b+c=0 \\ 3a+7b+c=0 \\ a+4b+2c=0 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$-a+2c=0 \ \wedge\ -b-c=0.$
$2c=a \qquad -c=b.$

$\rightarrow [a\ b\ c]^T = [2c\ \ -c\ \ c]^T = c[2\ -1\ 1]^T.$

$Gen = \langle (2\ -1\ 1)^T \rangle$

1.12. Hallar todos los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales los sigs. subconjuntos son L.D. en su correspondiente espacio vectorial.

a. $\{1+\alpha\,sen(x)+3\cos(x),\ 4+5\,sen(x)+7\cos(x),\ \alpha+sen(x)+\cos(x)\}$ con $C^{\infty}(\mathbb{R})$.

$\alpha\cdot(1+\alpha\,sen(x)+3\cos(x)) + \beta(4+5\,sen(x)+7\cos(x)) + \gamma(\alpha - sen(x)+\cos(x)) = 0$

$$W = \begin{pmatrix} 1+\alpha\,sen(x)+3\cos(x) & 4+5\,sen(x)+7\cos(x) & \alpha+sen(x)+\cos(x) \\ \alpha\cos(x)-3\,sen(x) & 5\cos(x)-7\,sen(x) & \cos(x)-sen(x) \\ -\alpha\,sen(x)-3\cos(x) & -5\,sen(x)-7\cos(x) & -sen(x)-\cos(x) \end{pmatrix}$$

$\det(W) = (1+\alpha\,sen(x)+3\cos(x))\cdot\big(((5\cos(x)-7\,sen(x))\cdot(-sen(x)-\cos(x))) - ((-5\,sen(x)-7\cos(x))(\cos(x)-sen(x)))\big) -$
$(4+5\,sen(x)+7\cos(x))\cdot\big(((\alpha\cos(x)-3\,sen(x))(-sen(x)-\cos(x))) - ((-\alpha\,sen(x)-3\cos(x))\cdot(\cos(x)-sen(x)))\big)$
$(\alpha+sen(x)+\cos(x))\cdot\big(((\alpha\cos(x)-3\,sen(x))(-5\,sen(x)-7\cos(x))) - ((-\alpha\,sen(x)-3\cos(x))\cdot(5\cos(x)-7\,sen(x))\big)$

$= (1+\alpha\,sen(x)+3\cos(x))\cdot\big((-5\,sen x\cos x - 5\cos^2 x + 7\,sen^2(x) + 7\cos(x)\,sen(x)) - (-5\,sen(x)\cos(x) + 5\,sen^2(x)$
$-7\cos^2(x) + 7\cos x\,sen x)\big) + (4+5\,sen(x)+7\cos x)\cdot\big((-\alpha\cos x\,sen - \alpha\cos^2 x + 3\,sen^2 x + 3\,sen x\cos x) - (-\alpha\,sen\cos + \alpha\,sen^2$
$-3\cos^2(x) + 3\cos(x)\,sen(x))\big) + (\alpha+sen x+\cos x)\big((-5\alpha\,sen\cos - 7\alpha\cos^2 + 15\,sen^2 + 21\,sen\cos) - (-\alpha 5\,sen\cos + 7\alpha\,sen^2$
$-15\cos^2 + 21\cos\,sen)$

$= (1+\alpha\,sen x+3\cos x)(\underbrace{2\cos^2(x)+2\,sen^2(x)}_{2}) - (4+5\,sen x+7\cos x)(\underbrace{-\alpha\cos^2 x + 3\,sen^2 x + \alpha\,sen^2 x + 3\cos^2 x}_{3})$
$+ (\alpha+sen x+\cos x)(\underbrace{8\cos^2 x + 8\,sen^2 x}_{8})$

$= (2+2\alpha\,sen x + 6\cos x) - (12+15\,sen x + 21\cos x) + (8\alpha + 8\,sen(x) + 8\cos(x))$

$= 2-12+8\alpha + 2\alpha\,sen x - 15\,sen x + sen(x) + 6\cos x - 21\cos x + 8\cos(x) =$

$= -10 + 8\alpha + 2\alpha\,sen(x) - 14\,sen x - 7\cos(x) = 0$

Asamblea

Escaneado con CamScanner

$= -10 - 14\,\text{sen}\,x - \cancel{7\cos x} + 8a + 2a\,\text{sen}\,x = 0$

$= -10 - 14\,\text{sen}\,x - \cancel{7\cos x} + a(8 + 2\,\text{sen}\,x) = 0.$

$\alpha(1 + a\,\text{sen}(x) + 3\cos(x)) + \beta.(4 + 5\,\text{sen}(x) + 7\cos(x)) + \gamma.(a + \text{sen}(x) + \cos(x)) = 0.$

$\alpha + \alpha a\,\text{sen}(x) + 3\alpha\cos(x) + 4\beta + 5\beta\,\text{sen}(x) + 7\beta\cos(x) + a\gamma + \gamma\,\text{sen}(x) + \gamma\cos(x) = 0.$

$(\alpha + 4\beta + a\gamma) + (\alpha a + 5\beta + \gamma)\,\text{sen}(x) + (3\alpha + 7\beta + \gamma)\cos(x) = 0.$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta + a\gamma = 0 \\ \alpha a + 5\beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 7\beta + \gamma = 0 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & a & 0 \\ a & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \det = 1.(5-7) - a.(4-7a) + 3(4-5a) \overset{\text{L.D.}}{=} 0$$

$= -2 - 4a + 7a^2 + 12 - 15a = 0.$

$10 - 19a + 7a^2 = 0. \rightarrow \boxed{a = 2}$ $\rightarrow \boxed{a = 5/7}$

b. $\{1 + 2ax + x^2 + 2x^3,\ 2 + ax + 4x^2 + 8x^3,\ x^2 + 2x^3\}$ en $\mathbb{R}_3[x]$.

$\alpha.(1 + 2ax + x^2 + 2x^3) + \beta(2 + ax + 4x^2 + 8x^3) + \gamma.(x^2 + 2x^3) = 0$

$\alpha + \alpha 2ax + \alpha x^2 + \alpha 2x^3 + 2\beta + a\beta x + 4\beta x^2 + 8\beta x^3 + \gamma x^2 + 2\gamma x^3 = 0$

$x^2(\alpha + 4\beta + \gamma) + x^3(\alpha.2 + 8\beta + 2\gamma) + x(2\alpha.a + a\beta) + (\alpha + 2\beta) = 0.$

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + 8\beta + 2\gamma = 0 \\ 2a\alpha + a\beta = 0 \\ \alpha + 2\beta = 0 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 2 & 0 \\ 2a & a & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2a & a & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7a & -2a & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7a & -2a & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -7a & -2a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3a}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \det = 1.(4a - a) = 3a = 0. \rightarrow \underline{a = 0 \text{ el conjunto es L.I.}}$$

c. $\left\{\begin{bmatrix}1&1\\a&1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2&a\\4&2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3a+1&3\\-4&3a+1\end{bmatrix}\right\}$ en $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

$$\alpha\begin{bmatrix}1&1\\a&1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}2&a\\4&2\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}3a+1&3\\-4&3a+1\end{bmatrix}=0.$$

$$\begin{cases}\alpha+2\beta+(3a+1)\gamma=0\\ \alpha+a\beta+3\gamma=0\\ a\alpha+4\beta+(-4)\gamma=0\\ \alpha+2\beta+(3a+1)\gamma=0\end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3a+1&0\\1&a&3&0\\a&4&-4&0\\ \cancel{1}&\cancel{2}&\cancel{3a+1}&\cancel{0}\end{array}\right]$$

$$\det=1(-4a-12)-1(-8-12a-4)+1a(6-3a^2-a)=0.$$
$$-4a-12+8+12a+4+6a-3a^3-a^2=0.$$
$$14a-a^2-3a^3=0$$
$$a(14-a-3a^2)=0. \rightarrow a=0 \lor a=2 \lor a=-\frac{7}{3}$$

1.14. En c/uno de los sigs casos, hallar dos bases del subespacio generado por el sist. de generadores S: la primera utilizando el algoritmo espacio filas y la segunda utilizando el algoritmo espacio columnas.

a. $S=\left\{\underset{v_1}{\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}}\right\}$

- $\begin{bmatrix}v_1^T\\v_2^T\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&1\\2&1&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1/2&1/2\\0&-1&1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1/2&1/2\\0&1&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$

$B=\{(1\ 0\ 1)^T, (0\ 1\ -1)^T\}$

- $[v_1\ v_2]=\begin{pmatrix}0&2\\-1&1\\1&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\\0&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1\\0&2\\ \cancel{0}&\cancel{2}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1\\0&2\\0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1\\0&1\\0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$

$B=\{(0\ -1\ 1)^T, (2\ 1\ 1)^T\}$

b. $S=\left\{\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}\right\}$ en $\mathbb{R}^3$.

- Espacio filas:

$$\begin{pmatrix}2&-1&1\\2&0&1\\-2&2&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&0\\-2&2&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&0\\ \cancel{0}&\cancel{1}&\cancel{0}\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow B=\{(2\ 0\ 1)^T, (0\ 1\ 0)^T\}$$

Escaneado con CamScanner

• Espacio Columnas:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \{(2\ -1\ 1)^T, (2\ 0\ 1)^T\}$$

c. $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ en $\mathbb{R}^3$.

• Espacio filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \{(1\ 0\ 1)^T, (0\ 1\ -5)^T\}.$$

• Espacio columnas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \{(1\ 0\ 1)^T, (2\ 1\ -3)^T\}$$

1.15 Hallar una base y determinar la dimensión de c/uno de los sgs subespacios

a. $S = \{ p \in \mathbb{R}_2[x] : p(1) = 0 \}$

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \Rightarrow p(1) = a_0 + a_1 + a_2 \doteq 0.$

Despejo: $a_0 = -a_1 - a_2 \Rightarrow p(x) = (-a_1 - a_2) + a_1 x + a_2 x^2 = a_1(-1+x) + a_2(-1+x^2).$

$S = \langle (-1+x), (-1+x^2) \rangle \to$ ¿son LI?

Planteo Wronskiano: $\begin{pmatrix} -1+x & -1+x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix}$

$\det(W) = (-2x + 2x^2) - (-1 + x^2) = -2x + 2x^2 + 1 - x^2 = 1 - 2x + x^2 \neq 0$ ✓ $\Rightarrow$ Son LI.

$\Rightarrow B = \{(-1+x), (-1+x^2)\}$ $\dim(S) = 2$

b. $S = \{ p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = 0, p(2) = 0 \}$;

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3. \Rightarrow p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \doteq 0 \wedge p(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 \doteq 0$

$a_0 = -a_1 - a_2 - a_3.$

$-a_1 - a_2 - a_3 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 0.$

$a_1 + 3a_2 + 7a_3 = 0.$

$a_1 = -3a_2 - 7a_3$

$a_0 = +3a_2 + 7a_3 - a_2 - a_3$

$a_0 = 2a_2 + 6a_3.$

$p(x) = 2a_2 + 6a_3 + (-3a_2 - 7a_3)x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$

$p(x) = a_2(2 - 3x + x^2) + a_3(6 - 7x + x^3)$

$S = \langle (2 - 3x + x^2), (6 - 7x + x^3) \rangle \to$ ¿son LI?

Asamblea

EJERCICIOS

Pl. wronskiano: $\begin{pmatrix} 2-3x+x^2 & 6-7x+x^3 \\ -3+2x & -7+3x^2 \end{pmatrix}$

$\det(W) = ((2-3x+x^2)\cdot(-7+3x^2) - (-3+2x)(6-7x+x^3)) = (-14+6x^2+21x-9x^3-7x^2+3x^4) - (-18+21x-3x^3+12x$
$-14x^2+2x^4) = (-14+21x-x^2-9x^3+3x^4) + 18-33x+14x^2+3x^3-2x^4 = 4-12x+13x^2-6x^3+x^4 \neq 0.$

$\Rightarrow$ son LI $\Rightarrow B = \{(2-3x+x^2), (6-7x+x^3)\}$. $\dim(S) = 2$.

c- $S = \{p \in \mathbb{R}_3[x] : 18p(0) = 3p''(0) + 2p'''(0),\ 6p'(0) = 6p''(0) - p'''(0)\}$.

$p(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 \rightarrow p(0) = d_0$

$p'(x) = d_1 + 2d_2x + 3d_3x^2 \rightarrow p'(0) = d_1$.

$p''(x) = 2d_2 + 6d_3x \rightarrow p''(0) = 2d_2$

$p'''(x) = 6d_3 \rightarrow p'''(0) = 6d_3$

$\Rightarrow 18d_0 = 6d_2 + 12d_3 \quad \wedge \quad 6d_1 = 12d_2 - 6d_3$
$18d_0 - 12d_3 = 6d_2 \qquad d_1 = 2d_2 - d_3$.
$3d_0 - 2d_3 = d_2$.

$\Rightarrow d_1 = 2\cdot(3d_0 - 2d_3) - d_3$.
$d_1 = 6d_0 - 4d_3 - d_3$
$d_1 = 6d_0 - 5d_3$

$p(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 = d_0 + (6d_0 - 5d_3)x + (3d_0 - 2d_3)x^2 + d_3x^3$.
$= d_0 + 6xd_0 - 5xd_3 + 3x^2d_0 - 2x^2d_3 + d_3x^3$.
$= d_0(1 + 6x + 3x^2) + d_3(-5x - 2x^2 + x^3)$

$S = \langle (1+6x+3x^2), (-5x-2x^2+x^3) \rangle \rightarrow$ ¿son LI?

$W = \begin{pmatrix} 1+6x+3x^2 & -5x-2x^2+x^3 \\ 6+3.2x & -5-4x+3x^2 \end{pmatrix}$

$\det(W) = (1+6x+3x^2)\cdot(-5-4x+3x^2) - (6+6x)(-5x-2x^2+x^3) = (-5-4x+3x^2-30x-24x^2+18x^3-15x^2-12x^3+9x^4) -$
$(-30x-12x^2+6x^3-30x^2-12x^3+6x^4) = (-5-34x-36x^2+6x^3+9x^4) - (-30x-42x^2-6x^3+6x^4) =$
$= -5-4x+\ 6x^2+12x^3+3x^4 \neq 0 \rightarrow$ son LI.

$\Rightarrow B = \{(1+6x+3x^2), (-5x-2x^2+x^3)\}$. $\dim(S) = 2$

d- $S = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(1) = 0,\ p'(1) = 0,\ p''(1) = 0\}$.

$p(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2 + d_3x^3 + d_4x^4 \rightarrow p(1) = d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 0$. (I)
$p'(x) = d_1 + 2d_2x + 3d_3x^2 + 4d_4x^3 \rightarrow p'(1) = d_1 + 2d_2 + 3d_3 + 4d_4 = 0$. (II)
$p''(x) = 2d_2 + 6d_3x + 12d_4x^2 \rightarrow p''(1) = 2d_2 + 6d_3 + 12d_4 = 0$. (III)
$\hookrightarrow d_2 = -3d_3 - 6d_4$

En (II): $d_1 + 2\cdot(-3d_3 - 6d_4) + 3d_3 + 4d_4 = 0 \rightarrow d_1 - 6d_3 - 12d_4 + 3d_3 + 4d_4 = 0 \rightarrow d_1 - 3d_3 - 8d_4 = 0$.
$\rightarrow d_1 = 3d_3 + 8d_4$.

Asamblea

Escaneado con CamScanner

En (1): $\alpha_0 + 3\alpha_3 + 8\alpha_4 + (-3\alpha_3) - 6\alpha_4 + \alpha_4 = 0$

$\alpha_0 \quad + 3\alpha_4 \quad = 0.$

$\alpha_0 \quad = -3\alpha_4.$

$p(x) = -3\alpha_4 + (3\alpha_3 + 8\alpha_4)x + (-3\alpha_3 - 6\alpha_4)x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4.$

$p(x) = -3\alpha_4 + 3x\alpha_3 + 8x\alpha_4 - 3x^2\alpha_3 - 6x^2\alpha_4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4.$

$p(x) = \alpha_3(3x - 3x^2 + x^3) + \alpha_4(-3 + 8x - 6x^2 + x^4).$

$S = \langle (3x - 3x^2 + x^3), (-3 + 8x - 6x^2 + x^4) \rangle$. $\Rightarrow$ ¿son LI?

$$W = \begin{pmatrix} 3x - 3x^2 + x^3 & -3 + 8x - 6x^2 + x^4 \\ 3 - 6x + 3x^2 & 8 - 12x + 4x^3 \end{pmatrix}$$

$\det(W) = (3x - 3x^2 + x^3)(8 - 12x + 4x^3) - (3 - 6x + 3x^2)(-3 + 8x - 6x^2 + x^4) =$

$= (24x - 36x^2 + 12x^4 - 24x^2 + 36x^3 - 12x^5 + 8x^3 - 12x^4 + 4x^6) - (-9 + 24x - 18x^2 + 3x^4 + 18x - 48x^2 + 36x^3 - 6x^5$

$- 9x^2 + 24x^3 - 18x^4 + 3x^6) = (24x - 60x^2 + 44x^3 - 12x^5 + 4x^6) + 9 - 42x + 75x^2 - 60x^3 + 15x^4 + 6x^5 - 3x^6 =$

$= 9 - 18x + 15x^2 - 16x^3 + 15x^4 - 6x^5 + x^6 \neq 0 \Rightarrow$ Son LI.

$B = \{(3x - 3x^2 + x^3), (-3 + 8x - 6x^2 + x^4)\}$. $\dim(S) = 2$.

1.16. Hallar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los que el conjunto $B_\alpha = \{[\alpha \ \frac{3}{2} \ \frac{1}{2} \ 0]^T, [1 \ \frac{3}{2} \ 0 \ -\frac{1}{2}]^T, [\frac{3}{2} \ 0 \ \alpha \ \frac{3}{2}]^T\}$ es una base del subespacio $S_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^4 : \frac{1}{2}x_1 - \alpha x_3 + x_4 = 0\}$.

• Analizo si los vectores cumplen con la condición de S_α:

• $\frac{1}{2}\cdot\alpha - \frac{1}{2}\alpha + 0 = 0$. ✓ • $\frac{1}{2} 1 - 0 - \frac{1}{2} = 0$ ✓ • $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} - \alpha^2 + \frac{3}{2} = 0.$

$\frac{3}{4} + \frac{3}{2} - \alpha^2 = 0.$

$\alpha^2 = \frac{9}{4}$

$\alpha = \pm 3/2.$

$\Rightarrow$ Si $\alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow B_\alpha = \{[3/2 \ 3/2 \ 1/2 \ 0]^T, [1 \ 3/2 \ 0 \ -1/2]^T [3/2 \ 0 \ 3/2 \ 3/2]^T\}.$

$\alpha_1 . [3/2 \ 3/2 \ 1/2 \ 0]^T + \alpha_2 [1 \ 3/2 \ 0 \ -1/2]^T + \alpha_3 [3/2 \ 0 \ 3/2 \ 3/2]^T = 0.$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}\alpha_1 + \alpha_2 + \frac{3}{2}\alpha_3 = 0 \\ \frac{3}{2}\alpha_1 + \frac{3}{2}\alpha_2 = 0 \\ \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{3}{2}\alpha_3 = 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{3}{2}\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3/2 & 1 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 3/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 3/2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 3/2 & 1 & 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \text{No son LI.}$$

$\Rightarrow$ Si $\alpha = -\frac{3}{2} \Rightarrow B_\alpha = \{[-3/2 \ 3/2 \ 1/2 \ 0]^T, [1 \ 3/2 \ 0 \ -1/2]^T, [3/2 \ 0 \ -3/2 \ 3/2]^T\}.$

$\alpha_1 . [-3/2 \ 3/2 \ 1/2 \ 0]^T + \alpha_2 . [1 \ 3/2 \ 0 \ -1/2]^T + \alpha_3 [3/2 \ 0 \ -3/2 \ 3/2]^T.$

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}d_1 + d_2 + \frac{3}{2}d_3 = 0 \\ \frac{3}{2}d_1 + \frac{3}{2}d_2 = 0 \\ \frac{1}{2}d_1 - \frac{3}{2}d_3 = 0 \\ -\frac{1}{2}d_2 + \frac{3}{2}d_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -3/2 & 1 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 3/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & -3/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & 3/2 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \text{son LI.}$$

$$\boxed{B = \{[-3/2\ \ 3/2\ \ 1/2\ \ 0]^T, [1\ \ 3/2\ \ 0\ \ -1/2]^T, [3/2\ \ 0\ \ -3/2\ \ 3/2]^T\}}$$

1.17. Sean $d_0, d_1 \in \mathbb{R}$. Sabiendo que el espacio solución de ecuación dif. lineal homogénea de orden 2 $y'' + d_1 y' + d_0 y = 0$ tiene dimensión 2, comprobar que:

a. Cualesquiera sean $d, b \in \mathbb{R}$ con $d \neq b$, el conjunto de funciones $\{e^{dx}, e^{bx}\}$ es una base del espacio solución de la ecuación $y'' - (d+b)y' + dby = 0$.

- $\phi_1(x) = e^{dx}$, $\phi_1'(x) = de^{dx}$, $\phi_1''(x) = d^2 e^{dx}$
- $\phi_2(x) = e^{bx}$, $\phi_2'(x) = be^{bx}$, $\phi_2''(x) = b^2 e^{bx}$.

→ Me fijo si son solución

- $d^2 e^{dx} - (d+b) \cdot de^{dx} + dbe^{dx} = d^2 e^{dx} - d^2 e^{dx} - bde^{dx} + bde^{dx} = 0$ ✓
- $b^2 e^{bx} - (d+b) \cdot be^{bx} + dbe^{bx} = b^2 e^{bx} - dbe^{bx} - b^2 e^{bx} + dbe^{bx} = 0$ ✓

→ Son LI? Wronskiano: $\begin{pmatrix} e^{dx} & e^{bx} \\ de^{dx} & be^{bx} \end{pmatrix}$ y $\det(W) = be^{dx+bx} - de^{dx+bx} \neq 0$.

$(b-d)e^{dx+bx} \neq 0$.

$b - d \neq 0$ $\quad e^{dx+bx} \neq 0$ ✓

$b \neq d$

Mientras que $d \neq b$, no importan sus valores:

$B_S = \{e^{dx}, e^{bx}\} \rightarrow \dim(S) = 2$.

b. Para cualquier $d \in \mathbb{R}$, el conj. de funciones $\{e^{dx}, xe^{dx}\}$ es una base del espacio solución de la ecuación: $\frac{d^2y}{dx^2} - 2d\frac{dy}{dx} + d^2 y = 0$.

- $\phi_1(x) = e^{dx}$, $\phi_1'(x) = de^{dx}$, $\phi_1''(x) = d^2 e^{dx}$.
- $\phi_2(x) = xe^{dx}$, $\phi_2'(x) = dxe^{dx}$, $\phi_2''(x) = d^2 xe^{dx}$

Asamblea

Escaneado con CamScanner

- Me fijo si son solución.
  - $d^2 e^{dx} - 2d\, de^{dx} + d^2 e^{dx} = 0$ ✓
  - $d^2 x e^{dx} - 2.\, d\, dx e^{dx} + d^2 x e^{dx} = 0$ ✓
- ¿Son LI?

$$W = \begin{pmatrix} e^{dx} & xe^{dx} \\ de^{dx} & dxe^{dx} \end{pmatrix}$$

$\det(W) = dx e^{dx+dx} - dx e^{dx+dx} = 0 \ldots$

$d.\, e^{dx} + \beta x e^{dx} = 0$

$\underbrace{e^{dx}}_{\neq 0}(d) + \underbrace{xe^{dx}}_{\neq 0}(\beta) = 0. \Rightarrow LI$ ✓.

$B_S = \{e^{dx}, xe^{dx}\}$, $\dim(S) = 2$

e- Cualesquiera sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$, el conjunto de funciones $\{e^{dx}\cos(bx), e^{dx}\operatorname{sen}(bx)\}$ es una base del espacio solución de la ecuación $\frac{d^2y}{dx^2} - 2d\frac{dy}{dx} + (d^2+b^2)y = 0.$

$\phi_1(x) = e^{dx}\cos(bx)$

$\phi_1'(x) = de^{dx}\cos(bx) - e^{dx}\operatorname{sen}(bx)b$

$\phi_1''(x) = a^2 e^{dx}\cos(bx) - de^{dx}\operatorname{sen}(bx)b - dbe^{dx}\operatorname{sen}(bx) - e^{dx}b^2\cos(bx) = d^2 e^{dx}\cos(bx) - 2dbe^{dx}\operatorname{sen}(bx) - e^{dx}b^2\cos(bx).$

$\phi_2(x) = e^{dx}\operatorname{sen}(bx)$

$\phi_2'(x) = de^{dx}\operatorname{sen}(bx) + e^{dx}\cos(bx)b$

$\phi_2''(x) = d^2e^{dx}\operatorname{sen}(bx) + de^{dx}\cos(bx).b + dbe^{dx}\cos(bx) - be^{dx}\operatorname{sen}(bx)b = d^2e^{dx}\operatorname{sen}(bx) + 2dbe^{dx}\cos(bx) - b^2e^{dx}\operatorname{sen}(bx).$

¿Son solución?

- $d^2e^{dx}\cos(bx) - 2dbe^{dx}\operatorname{sen}(bx) - b^2e^{dx}\cos(bx) - 2d^2e^{dx}\cos(bx) + 2dbe^{dx}\operatorname{sen}(bx) + d^2e^{dx}\cos(bx) + b^2e^{dx}\cos(bx) = 0.$ ✓
- $d^2e^{dx}\operatorname{sen}(bx) + 2dbe^{dx}\cos(bx) - b^2e^{dx}\operatorname{sen}(bx) - 2d^2e^{dx}\operatorname{sen}(bx) - 2dbe^{dx}\cos(bx) + d^2e^{dx}\operatorname{sen}(bx) + b^2e^{dx}\operatorname{sen}(bx) = 0.$ ✓

¿Son LI?

$$W = \begin{bmatrix} e^{dx}\cos(bx) & e^{dx}\operatorname{sen}(bx) \\ de^{dx}\cos(bx) - e^{dx}\operatorname{sen}(bx)b & de^{dx}\operatorname{sen}(bx) + e^{dx}\cos(bx)b. \end{bmatrix}$$

$\det(W) = (e^{2dx}\, d.\cos(bx).\operatorname{sen}(bx) + e^{2dx}\cos^2(bx)b) - (de^{2dx}\operatorname{sen}(bx)\cos(bx) - e^{2dx}\operatorname{sen}^2(bx)b)$

$= 2be^{2dx}(\cos^2(bx) + \operatorname{sen}^2(bx)) = 2be^{2dx} \neq 0 \rightarrow$ son LI.

~~Ambos~~ $B_S\{e^{dx}\cos(bx), e^{dx}\operatorname{sen}(bx)\} \rightarrow \dim(S) = 2$

Escaneado con CamScanner

1.18- En c/uno de los sigs casos, hallar y graficar la solución $y \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ de la ec. dif indicada que satisface las sigs. condiciones: $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

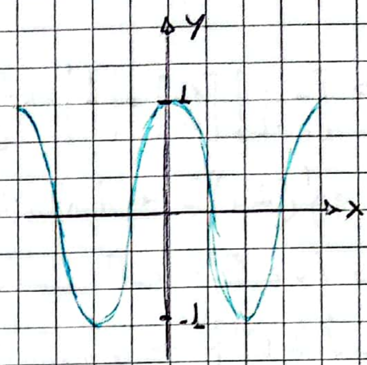
ii. $y''+4y=0$ → satisface $y''-2\alpha y'+(\alpha^2+b^2)y=0$ con $\alpha=0$ y $b=\pm 2$

• El conj. sol. es: $B_s=\{e^{\alpha x}\cos(bx),\ e^{\alpha x}\operatorname{sen}(bx)\}=\{\cos(2x),\operatorname{sen}(2x)\}$

$y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:\quad y(x)=\alpha\cos(2x)+\beta\operatorname{sen}(2x) \to y(0)=\alpha=1.$

$y'(x)=-2\alpha\operatorname{sen}(2x)+2\beta\cos(2x) \to y'(0)=\beta=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow y(x)=\cos(2x)+\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$



1.19- Sea $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que $col(A)=gen\{[1\ 2\ 3]^T,[1\ -1\ 2]^T\}$ y $nul(A)=gen\{[-2\ 1\ 0]^T\}$, y sea $b=[1\ -7\ 0]^T$.

a- Explicar por qué el sist. lineal $Ax=b$ es compatible.

$Ax=b \to \alpha.a_1+\beta.a_2+\gamma.a_3=0.$ $\quad Ax=b$ tiene solución si b es CL de las columnas de A.

Columnas de A

Col(A) tiene dim $=2$ → uno de las columnas a_1,a_2,a_3 se puede escribir como CL de las restantes.

$\alpha.(1\ 2\ 3)^T+\beta.(1\ -1\ 2)^T=(1\ -7\ 0)^T$

$$\begin{cases}1\alpha+1\beta=1\\ 2\alpha-1\beta=-7\\ 3\alpha+2\beta=0\end{cases} \to \left[\begin{array}{cc|c}1&1&1\\2&-1&-7\\3&2&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&-3&-9\\0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c}1&1&1\\0&1&3\\0&0&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c}1&0&-2\\0&1&3\\0&0&0\end{array}\right]$$

$\alpha=-2$ v $\beta=3$

→ $Ax=b$ es compatible (tiene sol) ya que $b\in Col(A)$ porque existen α y β tal que: $-2.(1\ 2\ 3)^T+3(1\ -1\ 2)^T=(1\ -7\ 0)^T$

b. Explicar por qué el sist. lineal $Ax=b$ no puede tener sol. única.

$Ax=b$ ∞ soluciones ⇔ las columnas de A forman un conj. LD ya que rango$(A)=2<$ nº de columnas ⇔

→ $Nul(A)\neq\{0_v\}$

Asamblea

Escaneado con CamScanner

1.20. Hallar una base de c/uno de los 4 subespacios fundamentales de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$$

Sea $b = \begin{bmatrix} 2-3i \\ 3+2i \end{bmatrix}$. ¿existe $x \in \mathbb{C}^2$ tal que $Ax = b$? Si la rta es afirmativa hallar todas las soluc. del sist. $Ax = b$

- $Col(A) = \{ y \in \mathbb{C}^2 : y = Ax, x \in \mathbb{C}^2 \}$

$Ax = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} i \\ -1 \end{bmatrix} x_2 \to$ ¿Son LI? No $\to (1\ i)^T = k(i\ -1)^T \quad \exists k = -i.$

$B_{Col(A)} = \{ (1\ i)^T \} \to \dim[Col(A)] = 1 = \text{rango} A$

- $Fil(A) = \{ x \in \mathbb{C}^2 : x = A^T v,\ v \in \mathbb{C}^2 \}$, $Fil(A) = Col(A^T)$

$B_{Fil(A)} = \{ (1\ i)^T \} \to \dim[Fil(A)] = 1$

- $Nul(A) = \{ x \in \mathbb{C}^2 : Ax = 0_{\mathbb{C}^2} \} \to \underset{1}{\text{rango}(A)} + \dim[Nul(A)] = \text{n}^o$ columnas A.

$1 + \dim[Nul(A)] = 2$

$\dim[Nul(A)] = 1.$

$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$x_1 + ix_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -ix_2. \quad \to [x_1\ x_2]^T = [-i\ \ 1]^T.$

$B = \{ [-i\ \ 1]^T \} \to$ también para $Nul(A^T)$.

- $Ax = b$

$\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3i \\ 3+2i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix} x_2 = \begin{pmatrix} 2-3i \\ 3+2i \end{pmatrix}$

$Ax = b$ tiene solución $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{C}^2$ tq b es C.L. de las columnas de $A \Leftrightarrow b \in Col(A)$ (por def. $Col(A)$).

$\begin{cases} x_1 + ix_2 = 2-3i \\ ix_1 - x_2 = 3+2i \end{cases} \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 2-3i \\ i & -1 & 3+2i \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & i & 2-3i \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$x_1 + ix_2 = 2-3i$

$x_1 = 2-3i - ix_2 = 2 - i(3+x_2) \Rightarrow x = (x_1, x_2) = (2-i(3+x_2), x_2) = (2-3i, 0) + x_2(-i, 1) \to \infty$ soluciones.

Asamblea

Escaneado con CamScanner

1.21. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ la matriz definida por $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 10 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Hallar una base de cada uno de los 4 subespacios fundamentales de la matriz A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 10 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 4 & 2 & 10 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$Fil(A) = \{(1\ 2\ 0\ 4\ 0)^T, (0\ 1\ 5\ -2\ 1)^T, (0\ 0\ 0\ 0\ 1)^T\} \Rightarrow dim[Fil(A)] = 3.$

$Col(A) = \{(1\ 1\ 2\ 2)^T, (0\ 1\ -1\ 0)^T, (0\ 1\ 0\ 1)^T\} \Rightarrow dim[Col(A)] = 3.$

Nul(A)

$x_1 + 2x_2 + 4x_4 = 0 \ \wedge \ x_2 + 5x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \ \wedge \ x_5 = 0$

$x_1 = -2x_2 - 4x_4$

$x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0.$

$5x_3 = 2x_4 - x_2.$

$x_3 = \frac{2}{5}x_4 - \frac{x_2}{5}$

$(x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5) = (-2x_2 - 4x_4\ \ x_2\ \ \frac{2}{5}x_4 - \frac{x_2}{5}\ \ x_4\ \ 0) = x_2(-2\ 1\ -\frac{1}{5}\ 0\ 0) + x_4(-4\ 0\ \frac{2}{5}\ 1\ 0).$

$Nul(A) = \{(-2\ 1\ -\frac{1}{5}\ 0\ 0)^T, (-4\ 0\ \frac{2}{5}\ 1\ 0)^T\} \Rightarrow dim[Nul(A)] = 2.$

Nul(A^T)

$x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \ \wedge \ x_2 - x_3 = 0 \ \wedge \ x_2 + x_4 = 0.$

$x_2 = x_3 \qquad x_4 = -x_2.$

$x_1 + x_2 + 2x_2 - 2x_2 = 0.$

$x_1 = -x_2$

$\Rightarrow (x_1\ x_2\ x_3\ x_4) = (-x_2\ x_2\ x_2\ -x_2) = x_2(-1\ 1\ 1\ -1)$

$Nul(A^T) = \{(-1\ 1\ 1\ -1)^T\} \Rightarrow dim[Nul(A^T)] = 1.$

b. Sea $b = (3\ 5\ 5\ 7)^T$. ¿Existe $x \in \mathbb{R}^5$ tq $Ax = b$? Si existe, hallar las soluciones de $Ax = b$.

• Si $b \in Col(A) \Rightarrow Ax = b$ tiene solución.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\alpha_1 = 3 \ \wedge \ \alpha_3 = 1 \ \wedge \ \alpha_2 + 1 = 2.$

$\alpha_2 = 1 \quad \Rightarrow Ax = b$ tiene solución

Asamblea

Escaneado con CamScanner

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & -5 & 10 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 1 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_5 = 1 \wedge \quad x_2 + 5x_3 - 2x_4 + x_5 = 2 \quad \wedge \quad x_1 + 2x_2 + 4x_4 = 3$

$x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 1 = 2. \qquad x_1 = 3 - 2x_2 - 4x_4.$

$x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 1.$

$5x_3 = 1 + 2x_4 - x_2$

$x_3 = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}x_4 - \frac{x_2}{5}$

$$(x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5) \to \left(3 - 2x_2 - 4x_4 \,\middle|\, x_2 \,\middle|\, \frac{1}{5} + \frac{2}{5}x_4 - \frac{x_2}{5} \,\middle|\, x_4 \,\middle|\, 1\right)$$

$$\to \left(3\ 0\ \tfrac{1}{5}\ 0\ 1\right) + \underbrace{x_2\left(-2\ 1\ -\tfrac{1}{5}\ 0\ 0\right) + x_4\left(-4\ 0\ \tfrac{2}{5}\ 1\ 0\right)}_{Nul(A)}$$

Sol: $\left(3\ 0\ \frac{1}{5}\ 0\ 1\right) + gen\left\{\left(-2\ 1\ -\frac{1}{5}\ 0\ 0\right), \left(-4\ 0\ \frac{2}{5}\ 1\ 0\right)\right\}$

c- Con el mismo b, ¿existe $x \in fil(A)$ tq $Ax=b$? Si la rta es af., hallar todas las soluc. del sist.

$Ax=b \in fil(A)$.

$\alpha_1.(1\ 2\ 0\ 4\ 0) + \alpha_2.(0\ 1\ 5\ -2\ 1) + \alpha_3.(0\ 0\ 0\ 0\ 1) = \beta_1.(-2\ 1\ -\frac{1}{5}\ 0\ 0) + \beta_2(-4\ 0\ \frac{2}{5}\ 1\ 0) + (3\ 0\ \frac{1}{5}\ 0\ 1)$

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\beta_1 + 4\beta_2 = 3 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 - \beta_1 = 0 \\ 5\alpha_2 + \frac{1}{5}\beta_1 - 2/5\,\beta_2 = 1/5 \\ 4\alpha_1 - 2\alpha_2 - \beta_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \end{cases} \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 1/5 & -2/5 & 1/5 \\ 4 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \beta_1 & \beta_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -18 & -33 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -33/5 & -17/5 \end{array}\right) \end{array}$$

$-\frac{33}{5}\beta_2 = -\frac{17}{5}$

$\boxed{\beta_2 = \frac{17}{33}}$

$\to -18\beta_1 - 17 = -24$

$-18\beta_1 = -7. \to$

$\boxed{\beta_1 = \frac{7}{18}}$

$\alpha_3 + 5.\frac{7}{18} + 8.\frac{17}{33} = 7.$

$\alpha_3 + \frac{35}{18} + \frac{136}{33} = 7.$

$\boxed{\alpha_3 = \frac{185}{198}}$

$\to \alpha_2 - 5.\frac{7}{18} - 8.\frac{17}{33} = -6.$

$\alpha_2 - \frac{35}{18} - \frac{136}{33} = -6.$

$\alpha_2 = -6 + \frac{1201}{198}$

$\alpha_2 = -\frac{1188}{198} + \frac{1201}{198}$

$\boxed{\alpha_2 = \frac{13}{198}}$

$\alpha_1 + 2\left(\frac{7}{18}\right) + 4.\left(\frac{17}{33}\right) = 3.$

$\alpha_1 + \frac{14}{18} + \frac{68}{33} = 3.$

$\alpha_1 + \frac{281}{99} = \frac{297}{99}.$

$\boxed{\alpha_1 = \frac{16}{99}}$

$\Rightarrow Sol = \left[\frac{16}{99}\ \ \frac{13}{198}\ \ \frac{185}{198}\ \ \frac{7}{18}\ \ \frac{17}{33}\right]$

Asamblea

Escaneado con CamScanner

1.22. Lucas y Facu resolvieron el sist. lineal $Ax=b$ donde

$$A=\begin{bmatrix}1&0&2&1\\1&1&1&1\end{bmatrix} \qquad b=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$$

Lucas encontró

$$S_L=[1\ 0\ 0\ 0]^T+gen\{\overset{L_1}{[1\ 0\ 0\ -1]^T},\ \overset{L_2}{[0\ 1\ 1\ -2]^T}\}$$

y Facu

$$S_F=[0\ 1\ 1\ 0]^T+gen\{\overset{F_1}{[2\ -1\ -1\ 0]^T},\ \overset{F_2}{[-3\ 1\ 1\ 1]^T}\}$$

¿Alguno halló la rta correcta?

Averiguo $Col(A)$:

$$A^T=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\\1&2\\\cancel{1}&\cancel{1}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\\cancel{0}&\cancel{2}\\0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&1\\1&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix} \qquad Col(A)=\{[0\ 1]^T,\ [1\ 0]^T\}$$

Para que $Ax=b$ tenga solución $\Rightarrow b\in Col(A)$

$$\left[\begin{array}{cc|c}0&1&2\\1&0&2\end{array}\right]\to \begin{array}{l}x_2=2\\x_1=2\end{array} \checkmark \Rightarrow Ax=b \text{ tiene solución}$$

¿Cuál es?

$$\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&2&1&2\\1&1&1&1&2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&2&1&2\\0&1&-1&0&0\end{array}\right] \qquad \begin{array}{l}x_1+2x_3+x_4=2\\x_1=2-2x_3-x_4\end{array} \wedge \begin{array}{l}x_2-x_3=0\\x_2=x_3\end{array}$$

$X=[x_1\ x_2\ x_3\ x_4]=[2-x_3-x_4\ \ x_3\ \ x_3\ \ x_4]=(2\,0\,0\,0)+x_3(-1\,1\,1\,0)+x_4(-1\,0\,0\,1)\Rightarrow$ M solución

¿Es válida la de los muchachos?

$Nul(A)=\{[-2\ 1\ 1\ 0]^T, [-1\ 0\ 0\ 1]^T\}\Rightarrow$ Mía. Pero los muchachos tienen otros vectores. ¿Es lo mismo?

- $A.L_1=Nul$ ✓
- $A.L_2=Nul$ ✓
- $A.F_1=Nul$ ✓
- $A.F_2=Nul$ ✓ $\Rightarrow$ Verifiqué que sus generadores generan $Nul(A)$.

$\Rightarrow$ Verifico que $A.$sol-part$=b$.

- $A.$sol-part-$L=b$ ✗ $\Rightarrow A.$sol-part-$L=\binom{1}{1}$
- $A.$sol-part-$F=b$ ✓

$\Rightarrow$ Facu halló la rta correcta.

Asamblea

Escaneado con CamScanner

1.23 - Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ dos matrices tales que:

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

donde rango(B) = 2. Hallar una base de Nul(B).

Teorema de las dimensiones: $\dim[Nul(B)] = n^o \text{ col. } B - \text{rango}(B)$

$$\dim[Nul(B)] = 4 - 2 = 2$$

$$x \in \mathbb{R}^4 \,/\, Bx = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow x \in Nul(B)$$

$$A(Bx) = A \cdot 0_{\mathbb{R}^3} = 0_{\mathbb{R}^3} \quad \Rightarrow \text{si } x \in Nul(B) \Rightarrow x \in Nul(AB)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{0} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$-x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \quad \wedge \quad x_3 + x_4 = 0$

$x_3 = -x_4$

$-x_1 + x_2 + 2(-x_4) + x_4 = 0$

$-x_1 + x_2 - 2x_4 + x_4 = 0$

$-x_1 + x_2 - x_4 = 0$

$x_2 = x_1 + x_4$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 + x_4 \\ -x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Nul(AB) = gen\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$Nul(B) \subseteq Nul(AB)$

$\dim[Nul(B)] = 2 \quad \dim[Nul(AB)] = 2$

$$\Rightarrow Nul(B) = Nul(AB)$$

$$\boxed{B_{Nul(B)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}$$

Escaneado con CamScanner

1.24. Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times4}$ dos matrices tales que:

$$AB = \begin{pmatrix} 10 & -10 & -5 & 5 \\ 11 & -11 & -4 & 7 \\ 11 & -11 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

donde rango$(A) = 3$, y B satisface que:

$$B[1\ 1\ 1\ 1]^T = [0\ 3\ 1]^T, \quad B[1\ 0\ 1\ 0]^T = [5\ 7\ 6]^T.$$

Hallar todas las soluciones del sist. $Bx = [5\ 1\ 4]^T$.

$$AB = \begin{bmatrix} 10 & -10 & -5 & 5 \\ 11 & -11 & -4 & 7 \\ 11 & -11 & -5 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 10 & -10 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 3/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nul(A)

$2x_1 + (-2)x_2 + (-x_3) + x_4 = 0$ (I) $\wedge$ $x_3 + x_4 = 0$

$x_3 = -x_4$ (II)

(II) en (I): $2x_1 - 2x_2 + x_4 + x_4 = 0$

$2x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 0$

$x_1 = x_2 - x_4$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Nul}(A) = \{[1\ 1\ 0\ 0]^T, [-1\ 0\ -1\ 1]^T\}$$

$\dim[\text{Nul}(A)] = 2.$

$\alpha \cdot (0\ 3\ 1)^T + \beta \cdot (5\ 7\ 6)^T = (5\ 1\ 4)^T$

$$\begin{cases} 5\beta = 5 \\ 3\alpha + 7\beta = 1 \\ \alpha + 6\beta = 4 \end{cases} \to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 5 & 5 \\ 3 & 7 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 7 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$3\alpha + 7\beta = 1$ (I) $\wedge$ $5\beta = 5$

$\beta = 1$ (II)

$$\Rightarrow -2(1\ 1\ 1\ 1)^T + (1\ 0\ 1\ 0)^T = (-1\ -2\ -1\ -2)^T$$

(II) en (I): $3\alpha + 7 = 1$

$3\alpha = -6$

$\alpha = -2$

Sol: $(-1\ -2\ -1\ -2)^T + \{(1\ 1\ 0\ 0)^T, (-1\ 0\ -1\ 1)^T\}$

Asamblea

Escaneado con CamScanner

1.25. Sean $B = \left\{ \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1+i \\ 1-i \end{bmatrix} \right\}$ y $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Comprobar que B es una base de $\mathbb{C}^3$ y determinar el vector de coordenadas de v respecto de la base B

¿Es B una base? Lo averiguo

$$a.B_1 + b.B_2 + c.B_3 = 0 \Rightarrow a.\begin{bmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b.\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c.\begin{bmatrix} 0 \\ 1+i \\ 1-i \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} 2i.a + 2b = 0 \\ 1.a + (-1)b + (1+i)c = 0 \\ 1.b + (1-i)c = 0 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2i & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1+i & 0 \\ 0 & 1 & 1-i & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2i & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1+i & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \text{ SCD}$$

Comprobado ✓

Busco α, β, γ tq $v = \alpha.B_1 + \beta.B_2 + \gamma.B_3 \rightarrow [1\ 0\ 1] = \alpha.[2i\ 1\ 0]^T + \beta.[2\ -1\ 1]^T + \gamma[0\ 1+i\ 1-i]$

$$\begin{cases} 2i.\alpha + 2\beta = 1 \\ 1.\alpha + (-1)\beta + (1+i)\gamma = 0 \\ 1.\beta + (1-i)\gamma = 1 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2i & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1+i & 0 \\ 0 & 1 & 1-i & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2i & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1+i & 1+i & i/2 \\ 0 & 0 & 1 & (3+i)/4 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{(3+i)}{4}} \Rightarrow \begin{aligned} (-1+i)\beta + (1+i)\gamma &= \frac{i}{2} \\ (-1+i)\beta + (1+i).\frac{(3+i)}{4} &= \frac{i}{2} \\ (-1+i)\beta + \frac{1}{2} + i &= \frac{i}{2} \\ \boxed{\beta = \frac{i}{2}} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 2i.\alpha + 2\beta &= 1 \\ 2i.\alpha + i &= 1 \\ 2i\alpha &= 1-i \\ \boxed{\alpha = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i} \end{aligned}$$

El vector de coordenadas $\boxed{[v]^B = \left[\frac{3}{4} + \frac{i}{4} \quad \frac{i}{2} \quad -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right]^T}$

Escaneado con CamScanner

1.26 Sean $p_1(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$, $p_2(x) = -x(x-2)$, y $p_3(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$.

a. Verificar q' $B = \{p_1, p_2, p_3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$

b. Observar q' para cualquier polinomio $p \in \mathbb{R}_2[x]$ el vector de coordenadas de p respecto de la base B es $[p]^B = \begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p(2) \end{bmatrix}$.

c. Hallar el vector de coordenadas de $p(x) = x^2 - x + 1$ en la base B.

a. $\alpha . p_1(x) + \beta . p_2(x) + \gamma . p_3(x) = 0 \Rightarrow \alpha . \frac{1}{2}(x-1)(x-2) + \beta . (-x).(x-2) + \gamma . \frac{1}{2} x.(x-1) = 0$.

$\alpha . \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 2) + \beta . (-x^2 + 2x) + \gamma . \frac{1}{2}(x^2 - x) = 0$.

$\alpha . \frac{1}{2} x^2 + \alpha(-\frac{3}{2}x) + \alpha + \beta . (-x^2) + \beta . 2x + \gamma . \frac{x^2}{2} + \gamma(-x) = 0$.

$x^2\left(\frac{\alpha}{2} - \beta + \frac{\gamma}{2}\right) + x\left(-\frac{3}{2}\alpha + 2\beta - \gamma\right) + (\alpha) = 0$.

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{2} - \beta + \frac{\gamma}{2} = 0 \\ -\frac{3}{2}\alpha + 2\beta - \gamma = 0 \\ \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha = 0} \Rightarrow \boxed{\beta = 0} \Rightarrow \boxed{\gamma = 0}$$

B es una base ✓

b. $p(x) = \left(\alpha . \frac{1}{2}(x-1)(x-2) + \beta . (-x)(x-2) + \gamma . \frac{1}{2} x(x-1)\right) \rightarrow$ generado por B.

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = \frac{\alpha}{2}(x-1)(x-2) + \beta(-x)(x-2) + \frac{\gamma}{2} x(x-1)$

$$\left.\begin{aligned} p(0) &= a_0 = \alpha \\ p(1) &= a_0 + a_1 + a_2 = \beta \\ p(2) &= a_0 + 2a_1 + 4a_2 = \gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow [p]^B = [a_0 \quad a_0 + a_1 + a_2 \quad a_0 + 2a_1 + 4a_2]$$

c. $p(0) = 1$, $p(1) = 1$, $p(2) = 3$

$\boxed{[p(x)]^B = [1 \; 1 \; 3]^T}$

¿Cómo hallar Col(A)?

$$\begin{bmatrix} \ell & \ell & \ell \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \to \text{gen}\{Col1 \quad Col2 \quad Col3\}$$

↳ ¿son LI? Me fijo → Los q' sean LI son base

¿Cómo hallar Fil(A)?

$$\begin{bmatrix} Fil\ 1 \\ Fil\ 2 \\ Fil\ 3 \end{bmatrix} \to \text{gen}\{Fil1 \quad Fil2 \quad Fil3\}$$

↳ ¿son LI? Me fijo "

- rango [Fil(A)] = rango [Col(A)]
- rango (A) = nº filas LI = nº columnas LI
  rg(A)
- nul(B) ⊂ nul(AB)
- Col(AB) ⊂ Col(A)
- si col(B) ∩ nul(A) . ⇒ nul(A) = nul(AB)
- si rg(B) = n ⇒ col(AB) = col(A)

¿Cómo ver si es <u>base</u>?

$B = \{B_1 \quad B_2 \quad B_3\}$

$\alpha . B_1 + \beta . B_2 + \gamma . B_3 = 0$ si $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

$[B_1 \quad B_2 \quad B_3 \mid 0]$

<u>¿Y con p(x)?</u>

$\alpha . p_1(x) + \beta . p_2(x) + \gamma . p_3(x) = 0$.

$x^2(ddd) + x(bbb) + (ccc)$.

$=0 \quad =0 \quad =0$.

$$\begin{cases} ddd = 0 \\ bbb = 0 \\ ccc = 0 \end{cases} \to \text{Triangulo}$$

Asamblea

Escaneado con CamScanner

1.28. En c/uno de los sigs. casos hallar la matriz de cambio de coordenadas de la base $B_1 = \{v_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ en la base B_2 y determinar el vector de coordenadas de $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$ en la base B_2.

a. B_1 es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y B_2 es la base de $\mathbb{R}^3$ def. por:

$$B_2 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\hookrightarrow B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Si $[v]^{B_1} = [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]^T \Rightarrow v = \alpha_1 [1 0 0]^T + \alpha_2 [0 1 0]^T + \alpha_3 [0 0 1]^T$

$$[v]^{B_2} = \alpha_1 [1 0 0]^{B_2} + \alpha_2 [0 1 0]^{B_2} + \alpha_3 [0 0 1]^{B_2}$$

• $[1 0 0]^{B_2} \Rightarrow [1 0 0] = \alpha . [1\ 3\ {-2}]^T + \beta . [3\ 5\ {-6}]^T + \gamma [0\ {-5}\ 6]^T$

$$\begin{cases} 1\alpha + 3\beta + 0\gamma = 1 \\ 3\alpha + 5\beta + (-5)\gamma = 0 \\ -2\alpha + (-6)\beta + 6\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -5 & 0 \\ -2 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 6 & 2 \end{array}\right]$$

$\alpha = 0 \Rightarrow \beta = \frac{1}{3} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{[1 0 0]^{B_2} = [0\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}]^T}$

• $[0 1 0]^{B_2} \Rightarrow [0 1 0] = \alpha . [1\ 3\ {-2}]^T + \beta . [3\ 5\ {-6}]^T + \gamma . [0\ {-5}\ 6]^T$

$$\ldots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -5 & 1 \\ -2 & -6 & 6 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

$\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \beta = -\frac{1}{4} \Rightarrow \gamma = 0 \Rightarrow \boxed{[0 1 0]^{B_2} = [\frac{3}{4}\ {-\frac{1}{4}}\ 0]^T}$

• $[0 0 0]^{B_2} \Rightarrow [0 0 1] = \alpha [1\ 3\ {-2}]^T + \beta [3\ 5\ {-6}]^T + \gamma [0\ {-5}\ 6]^T$

$$\ldots \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -5 & 0 \\ -2 & -6 & 6 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \end{array}\right]$$

$\alpha = \frac{15}{24} \Rightarrow \beta = \frac{-5}{24} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{6} \Rightarrow \boxed{[0 0 1]^{B_2} = [\frac{15}{24}\ \frac{-5}{24}\ \frac{1}{6}]^T}$

$\Rightarrow [v]^{B_2} = \alpha_1 . [0\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{3}]^T + \alpha_2 . [\frac{3}{4}\ {-\frac{1}{4}}\ 0]^T + \alpha_3 . [\frac{15}{24}\ \frac{-5}{24}\ \frac{1}{6}]^T$

$$[v]^{B_2} = \begin{bmatrix} 0 & 3/4 & 15/24 \\ 1/3 & -1/4 & -5/24 \\ 1/3 & 0 & 1/6 \end{bmatrix} . [v]^{B_1}$$

$\hookrightarrow (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)^T$

Asamblea

Escaneado con CamScanner

b. $B_1=\{1,x,x^2\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ y B_2 es la base de $\mathbb{R}_2[x]$ definida por

$B_2=\{1+2x+x^2,\ 2+5x,\ 3+3x+8x^2\}$

$[v]^{B_1}=[d_1\ d_2\ d_3]^T \to v=d_1.(1)+d_2.(x)+d_3(x^2)$

$[v]^{B_2}=d_1.(1)^{B_2}+d_2.(x)^{B_2}+d_3(x^2)^{B_2}$

• $(1)^{B_2} \to 1=d_1.(1+2x+x^2)+d_2.(2+5x)+d_3.(3+3x+8x^2)$

$1=d_1+2d_1x+d_1x^2+2d_2+5d_2x+3d_3+3d_3x+8d_3x^2$

$1=x^2(d_1+8d_3)+x(2d_1+5d_2+3d_3)+(d_1+2d_2+3d_3)$

$$\begin{cases} d_1+8d_3=0 \\ 2d_1+5d_2+3d_3=0 \\ d_1+2d_2+3d_3=1 \end{cases} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & -13 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 & 1 \end{array}\right]$$

$\frac{1}{5}d_3=1 \to 5d_2-13.5=0 \to d_1+8d_3=0$

$\boxed{d_3=5}$ $\qquad d_2=\frac{65}{5}$ $\qquad d_1+40=0$

$\boxed{d_2=13}$ $\qquad \boxed{d_1=-40}$

$$\boxed{[1]^{B_2}=[-40\ \ 13\ \ 5]^T}$$

• $[x]^{B_2} \to x=d_1.(1+2x+x^2)+d_2(2+5x)+d_3(3+3x+8x^2)$

$x=x^2(d_1+8d_3)+x(2d_1+5d_2+3d_3)+(d_1+2d_2+3d_3)$

$$\begin{cases} d_1+8d_3=0 \\ 2d_1+5d_2+3d_3=1 \\ d_1+2d_2+3d_3=0 \end{cases} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & -13 & 1 \\ 0 & 0 & 1/5 & -2/5 \end{array}\right]$$

$\frac{1}{5}d_3=-\frac{2}{5}$ $\qquad 5d_2+26=1$ $\qquad d_1-16=0$

$\boxed{d_3=-2}$ $\qquad 5d_2=-25$ $\qquad \boxed{d_1=16}$

$\boxed{d_2=-5}$

$$\boxed{[x]^{B_2}=[16\ \ -5\ \ -2]^T}$$

• $[x^2] \to x^2=\ldots$

$x^2=x^2(\ldots)+x(\ldots)+(\ldots)$

$$\begin{cases} d_1+8d_3=1 \\ 2d_1+5d_2+3d_3=0 \\ d_1+2d_2+3d_3=0 \end{cases} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & -13 & -2 \\ 0 & 0 & 1/5 & -1/5 \end{array}\right]$$

$\frac{1}{5}d_3=-\frac{1}{5}$ $\qquad 5d_2+13=-2$ $\qquad d_1-8=1$

$d_3=-1$ $\qquad 5d_2=-15$ $\qquad \boxed{d_1=9}$

$d_2=-3$

$[x^2]^{B_2}=[9\ -3\ -1]^T$

Asamblea

Escaneado con CamScanner

$[v]^{B_2} = d_1 \cdot [-40\ 13\ 5]^T + d_2\,[16\ -5\ -2]^T + d_3\,[9\ -3\ -1]^T$

$$[v]^{B_2} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{[v]^{B_1}}_{[d_1\ d_2\ d_3]^T}$$

c. $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ = la base canónica de $R^{2\times2}$ y B_2 es la base de $R^{2\times2}$ definida por

$$B_2 := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 27 \end{bmatrix} \right\}$$

$[v]^{B_1} = [d_1\ d_2\ d_3\ d_4]^T \Rightarrow v = d_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$[v]^{B_2} = d_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{B_2} + d_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{B_2} + d_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{B_2} + d_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{B_2}$$

- $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{B_2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = d_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + d_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + d_4 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 27 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} 1d_1 + 1d_2 + 1d_3 + 1d_4 = 1 \\ 1d_2 + 2d_3 + 3d_4 = 0 \\ 1d_2 + 4d_3 + 9d_4 = 0 \\ 1d_2 + 8d_3 + 27d_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 27 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

$d_2 = d_3 = d_4 = 0, \quad d_1 = 1$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{B_2} = [1\ 0\ 0\ 0]^T}$$

- $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{B_2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = d_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + d_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + d_4 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 27 \end{bmatrix}$

$$\{ \dots \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 27 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{array}\right]$$

$6d_4 = 2 \qquad 2d_3 + 2 = -1 \qquad d_2 - 3 + 1 = 1 \qquad d_1 + 3 - \frac{3}{2} + \frac{1}{3} = 0$

$d_4 = \frac{1}{3} \qquad d_3 = -3/2 \qquad d_2 = 3 \qquad d_1 = -29/6$

$d_1 = -\frac{29}{6}$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^{B_2} = \left[-\frac{29}{6}\ \ 3\ \ -\frac{3}{2}\ \ \frac{1}{3}\right]^T}$$

- $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{B_2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = d_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + d_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + d_4 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 27 \end{bmatrix}$

$$\{ \dots \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 27 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -3 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$6d_4 = -3 \qquad 2d_3 - 3 = 1 \qquad d_2 + 4 - \frac{3}{2} = 0 \qquad d_1 - \frac{5}{2} + 2 - \frac{1}{2} = 0$

$d_4 = -\frac{1}{2} \qquad d_3 = 2 \qquad d_2 = -\frac{5}{2} \qquad d_1 = 1$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{B_2} = \left[1\ \ -\frac{5}{2}\ \ 2\ \ -\frac{1}{2}\right]^T}$$

Asamblea

Escaneado con CamScanner

$$\bullet \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{B_2} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = d_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d_2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + d_3 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} + d_4 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 27 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \ldots \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 27 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 1 \end{array}\right]$$

$6d_4 = 1$ $\quad$ $2a_3 + 1 = 0$ $\quad$ $d_2 - 1 + \frac{1}{2} = 0$ $\quad$ $d_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 0$

$d_4 = \frac{1}{6}$ $\quad$ $d_3 = -\frac{1}{2}$ $\quad$ $d_2 = \frac{1}{2}$ $\quad$ $d_1 = -\frac{1}{6}$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{B_2} = \begin{bmatrix} -1/6 & 1/2 & -1/2 & 1/6 \end{bmatrix}^T}$$

$$[V]^{B_2} = d_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + d_2 \begin{bmatrix} -\frac{29}{6} & 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^T + d_3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^T + d_4 \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}^T$$

$$[V]^{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & -29/6 & 1 & -1/6 \\ 0 & 3 & -5/2 & 1/2 \\ 0 & -3/2 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1/3 & -1/2 & 1/6 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{[V]^{B_1}}_{\rightarrow (d_1\ d_2\ d_3\ d_4)^T}$$

1.29. Sea B_1 la base de $\mathbb{R}^3$ def. por $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{bmatrix} \right\}$ y sea B_2 la base de $\mathbb{R}^3$ tq.

la matriz de cambio de coord. de la base B_1 en la base B_2 es

$$M_{B_1}^{B_2} = \frac{1}{15} \cdot \begin{bmatrix} 10 & 10 & -5 \\ 11 & -10 & 2 \\ 2 & 5 & 14 \end{bmatrix}$$

Hallar el vector de coord. de $v = [5\ 4\ 3]^T$ en base B_2.

$[V]^{B_1} \to [5\,4\,3]^T = d_1 . [3/5\ \ 0\ \ 4/5]^T + d_2\ [0\ \ 1\ \ 0]^T + d_3\ [-4/5\ \ 0\ \ 3/5]^T$

$$\begin{cases} \frac{3}{5} d_1 + 0\, d_2 + \left(-\frac{4}{5}\right) d_3 = 5 \\ 0\, d_1 + 1\, d_2 + 0\, d_3 = 4 \\ \frac{4}{5} d_1 + 0\, d_2 + \frac{3}{5} d_3 = 3 \end{cases} \to \left[\begin{array}{ccc|c} 3/5 & 0 & -4/5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 4/5 & 0 & 3/5 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 3/5 & 0 & -4/5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5/3 & -11/3 \end{array}\right]$$

$\frac{5}{3} d_3 = -\frac{11}{3}$ $\quad \boxed{d_2 = 4}$ $\qquad \frac{3}{5} d_1 - \frac{4}{5}\left(-\frac{11}{5}\right) = 5$

$\boxed{d_3 = -\frac{11}{5}}$ $\qquad \frac{3}{5} d_1 + \frac{44}{25} = 5 \quad \to \quad \boxed{[V]^{B_1} = \left[\frac{21}{5}\ \ 4\ \ -\frac{11}{5}\right]^T}$

$\frac{3}{5} d_1 = \frac{81}{25}$

$\boxed{d_1 = \frac{21}{5}}$

$M_{B_1}^{B_2} . [v]^{B_1} = [v]^{B_2}$

$$\frac{1}{15} \begin{bmatrix} 10 & 10 & -5 \\ 11 & -10 & 2 \\ 2 & 5 & 14 \end{bmatrix} . \left[\frac{21}{5}\ \ 4\ \ -\frac{11}{5}\right]^T = \frac{1}{15} . \begin{bmatrix} 105 \\ 15 \\ 0 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

1.30. Sea B_1 la base de $\mathbb{R}^3$ def. por $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix} \right\}$.

a. Hallar B_2 de $\mathbb{R}^3$ tq. $M_{B_1}^{B_2} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

$$= \left([V_1]^{B_2}\ [V_2]^{B_2}\ [V_3]^{B_2} \right)$$

$$= \left([3\,0\,4]^{B_2}\ [-1\,0\,7]^{B_2}\ [2\,9\,11]^{B_2} \right)$$

Imagino B_2 tq $B_2 = \{w_1\ w_2\ w_3\}$

Recordo q $[V]^B \Rightarrow V = \alpha_1 . \beta_1 + \alpha_2 . \beta_2 + \alpha_3 . \beta_3 \ldots$

Asamblea

Escaneado con CamScanner

- $[V_1]^{B_2} \to V_1 = \alpha_1 . w_1 + \alpha_2 . w_2 + \alpha_3 . w_3$

$[3\ 0\ 4]^T = \alpha_1 . w_1 + \alpha_2 . w_2 + \alpha_3 w_3$

- $[V_2]^{B_2} \to [-1\ 0\ 7]^T = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \beta_3 w_3$.
- $[V_3]^{B_2} \to [2\ 9\ 11]^T = \gamma_1 w_1 + \gamma_2 w_2 + \gamma_3 w_3$

Y $M_{B_1}^{B_2} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$

$\begin{cases} [3\ 0\ 4]^T = 5w_1 \\ [-1\ 0\ 7]^T = 5w_1 + 5w_2 \\ [2\ 9\ 11]^T = 10w_1 + 5w_2 + 9w_3 \end{cases}$ $\to \left[\frac{3}{5}\ 0\ \frac{4}{5}\right]^T = w_1 \to [3\ 0\ 4]^T + 5w_2 = [-1\ 0\ 7]^T$

$5w_2 = [-4\ 0\ 3]^T$

$w_2 = \left[-\frac{4}{5}\ 0\ \frac{3}{5}\right]^T$

$[2\ 9\ 11]^T = [6\ 0\ 8]^T + [-4\ 0\ 3]^T + 9w_3$.

$[2\ 9\ 11]^T = [2\ 0\ 11]^T + 9w_3$.

$[0\ 9\ 0]^T = 9w_3$

$[0\ 1\ 0]^T = w_3$

$\Rightarrow B_2 = \left(\left[\frac{3}{5}\ 0\ \frac{4}{5}\right]^T, \left[-\frac{4}{5}\ 0\ \frac{3}{5}\right]^T, [0\ 1\ 0]^T\right)$

b. Sea $\mathcal{E}$ base canónica de $\mathbb{R}^3$. Hallar $M_{\mathcal{E}}^{B_2}$ (de $\mathcal{E}$ a B_2) y para $\forall x \in \mathbb{R}^3$ det. la exp. del vector de coordenadas de x en la base B_2

$\mathcal{E} = ([1\ 0\ 0]^T, [0\ 1\ 0]^T, [0\ 0\ 1]^T)$

- $[1\ 0\ 0]^{B_2} \to [1\ 0\ 0]^T = \alpha_1 \left[\frac{3}{5}\ 0\ \frac{4}{5}\right]^T + \alpha_2 . \left[-\frac{4}{5}\ 0\ \frac{3}{5}\right]^T + \alpha_3 [0\ 1\ 0]^T$

$\begin{cases} \frac{3}{5}\alpha_1 - \frac{4}{5}\alpha_2 = 1 \\ \alpha_3 = 0 \\ \frac{4}{5}\alpha_1 + \frac{3}{5}\alpha_2 = 0 \end{cases} \to \dots \to [1\ 0\ 0]^{B_2} = \left[\frac{3}{5}\ -\frac{4}{5}\ 0\right]^T$

- $[0\ 1\ 0]^{B_2} \to [0\ 1\ 0]^T = \alpha_1 . \left[\frac{3}{5}\ 0\ \frac{4}{5}\right]^T + \alpha_2 \left[-\frac{4}{5}\ 0\ \frac{3}{5}\right]^T + \alpha_3 [0\ 1\ 0]^T$

$\dots \to [0\ 1\ 0]^{B_2} = [0\ 0\ 1]^T$

- $[0\ 0\ 1]^{B_2} \to [0\ 0\ 1]^T = \alpha_1 \left[\frac{3}{5}\ 0\ \frac{4}{5}\right]^T + \alpha_2 \left[-\frac{4}{5}\ 0\ \frac{3}{5}\right]^T + \alpha_3 [0\ 1\ 0]^T$.

$\dots \to [0\ 0\ 1]^{B_2} = \left[\frac{4}{5}\ \frac{3}{5}\ 0\right]$

$\Rightarrow [x]^{B_2} = x_1 . \left[\frac{3}{5}\ -\frac{4}{5}\ 0\right]^T + x_2 . [0\ 0\ 1]^T + x_3 \left[\frac{4}{5}\ \frac{3}{5}\ 0\right]^T$

$[x]^{B_2} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_3 \\ -\frac{4}{5}x_1 + \frac{3}{5}x_3 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Asamblea

Escaneado con CamScanner

Operaciones entre subespacios

Intersección: $S = S_1 \cap S_2 = \{v \in V : v \in S_1 \wedge v \in S_2\}$ $\Rightarrow$ Subespacio "$\oplus$ grande"

Suma $S = S_1 + S_2$ $\Rightarrow$ Subespacio "$\oplus$ chico"

↳ **Directa**: para $\forall v \in S_1 + S_2$ existen únicos $s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$ tq $v = s_1 + s_2$ $\Rightarrow S_1 \oplus S_2$.

- $S_1 \cap S_2$

  ↳ escribo ecuaciones
  triangulo
  $[x_1\ x_2\ x_3\ x_4] = \dots$
  dim = cant. vectores

- $S_1 + S_2$

  ↳ Averiguo base S_1, base S_2, los junto y averiguo cuáles son LI.

- $\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2)$

- $\dim(\mathbb{V}^k)$ - ecuaciones = $\dim(S)$

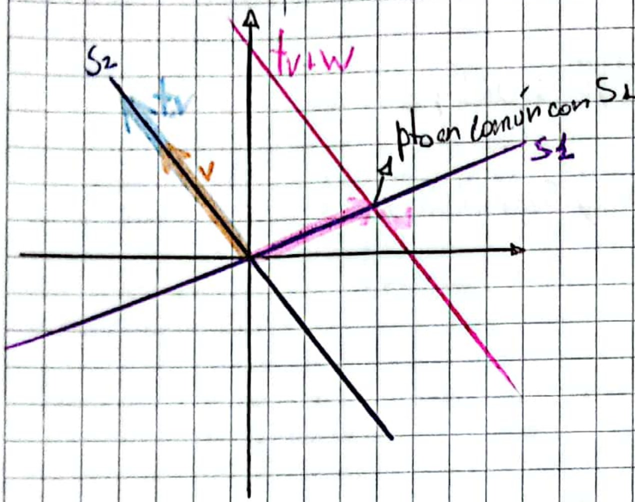
  Ej: $\dim(\mathbb{R}^4)$ - ecuaciones = $\dim(S)$

- Hallo base S_1: $[x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T$ en función ecuaciones.

Escaneado con CamScanner

1.31. Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y sean S_1 y S_2 subespacios de $\mathbb{V}$ tq ninguno contiene al otro. Comprobar q para cualquier pareja de vectores v y w tq $w \in S_1 \setminus S_2$ y $v \in S_2 \setminus S_1$, la recta $\mathbb{L}$ q pasa por w y es paralela a v $\Rightarrow$ $\mathbb{L} := \{tv + w,\ t \in \mathbb{R}\}$ tiene un único pto en común con S_1 y ninguno con S_2.

Comprobar q $\mathbb{V}$ no puede ser la unión de dos subespacios propios.



- $\mathbb{L}$ sólo tiene pto común con S_1 y no con S_2
- $\mathbb{V}$ no puede ser igual a $S_1 \cup S_2$ pq sino $\mathbb{L}$ tendría q estar totalmente contenida en la unión.

1.32. Para las sigs. elecciones de subespacio S_1 y S_2 del espacio vectorial $\mathbb{V}$, hallar una base del mayor subespacio contenido en ambos y otra del menor subespacio q los contiene.

a. S_1 y S_2 son los subespacios de $\mathbb{R}^4$ def. por:

$$S_1 := \{[x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T \in \mathbb{R}^4 : x_2 + x_3 + x_4 = 0\} \rightarrow 1 \text{ ecuación}$$

$$S_2 := \left\{[x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}\right\} \rightarrow 2 \text{ ecuaciones}$$

$\rightarrow$ $\dim(\mathbb{V}^k) - \text{ecuaciones} = \dim(S)$

$\rightarrow \mathbb{R}^4$

- $\dim(S_1) = 3$ • $\dim(S_2) = 2$.
- S_1: $x_4 = -x_2 - x_3 \rightarrow [x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T = [x_1\ x_2\ x_3\ {-x_2}{-x_3}]^T = x_1[1\ 0\ 0\ 0]^T + x_2[0\ 1\ 0\ {-1}]^T + x_3[0\ 0\ 1\ {-1}]^T$
- S_2: $x_1 = -x_2 \wedge x_3 = 2x_4 \rightarrow [x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T = [-x_2\ x_2\ 2x_4\ x_4]^T = x_2[-1\ 1\ 0\ 0]^T + x_4[0\ 0\ 2\ 1]^T$.
- $\underline{S_1 \cap S_2}$

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \rightarrow$$

$x_3 - 2x_4 = 0$ $\quad$ $x_2 + 2x_4 + x_4 = 0$ $\quad$ $x_1 - 3x_4 = 0$

$x_3 = 2x_4$ $\quad$ $x_2 = -3x_4$ $\quad$ $x_1 = 3x_4$

$$[x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T = [3x_4\ {-3x_4}\ 2x_4\ x_4]^T = x_4[3\ {-3}\ 2\ 1]^T$$

$B = \{[3\ {-3}\ 2\ 1]^T\} \rightarrow \dim(S_1 \cap S_2) = 1.$

- $\underline{S_1 + S_2}$

$\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2) = 3 + 2 - 1 = 4.$

Asamblea
Escaneado con CamScanner

El subespacio está generado por $[1\,0\,0\,0]^T, [0\,1\,0\,\text{-}1]^T, [0\,0\,1\,\text{-}1]^T, [\text{-}1\,1\,0\,0]^T, [0\,0\,2\,1]^T$.

Veo ⁴⁄₄ q' son LI:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix} \Rightarrow$$ Los primeros 4 son LI.

$$B(S_1+S_2) = \{[1\,0\,0\,0]^T, [0\,1\,0\,\text{-}1]^T, [0\,0\,1\,\text{-}1]^T, [\text{-}1\,1\,0\,0]^T\}$$

b. S_1 y S_2 son subespacios de $\mathbb{R}^5$ def por $S_1 := col(A)$ y $S_2 := nul(A)$ con A:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

· Averiguo Nul(A)

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -4 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$-x_4 = -x_5$
$x_4 = x_5$

$-x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_4 = 0$
$-x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$
$2x_3 - x_4 = x_2$

$-x_1 + 2x_3 - x_4 + x_3 - 2x_4 + x_4 = 0$
$x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 0$
$3x_3 - 2x_4 = x_1$

$$[x_1\; x_2\; x_3\; x_4\; x_5]^T = [3x_3 - 2x_4 \quad 2x_3 - x_4 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_4]^T = x_3[3\,2\,1\,0\,0]^T + x_4[\text{-}2\,\text{-}1\,0\,1\,1]^T$$

$$B(Nul(A)) = \{[3\,2\,1\,0\,0]^T, [\text{-}2\,\text{-}1\,0\,1\,1]^T\}$$

$\dim[Nul(A)] = 2 \rightarrow \dim[Col(A)] + \dim[Nul(A)] = \dim(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^5$

$\dim[Col(A)] + 2 = 5$

$\dim[Col(A)] = 3$.

· Averiguo Col(A)

$$A^T = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & -4 & -5 & -6 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix}$$

$$Col(A) = \{[\text{-}1\,\text{-}1\,\text{-}1\,\text{-}1\,\text{-}1]^T, [0\,\text{-}1\,\text{-}1\,\text{-}1\,\text{-}1]^T, [0\,0\,\text{-}1\,\text{-}2\,\text{-}2]^T\}$$

$\hookrightarrow \dim[Col(A)] = 3$.

Escaneado con CamScanner

$S_1 = \left\{ [-1\ -1\ -1\ -1\ -1]^T, [0\ -1\ -1\ -1\ -1]^T, [0\ 0\ -1\ -2\ -2]^T \right\}$

$S_2 = \left\{ [3\ 2\ 1\ 0\ 0]^T, [-2\ -1\ 0\ 1\ 1]^T \right\}$

• $\underline{S_1 \cap S_2} \to [x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5]^T = x$.

$$\begin{cases} x = a[-1\ -1\ -1\ -1\ -1]^T + b[0\ -1\ -1\ -1\ -1]^T + c[0\ 0\ -1\ -2\ -2]^T \\ x = d[3\ 2\ 1\ 0\ 0]^T + e[-2\ -1\ 0\ 1\ 1]^T \end{cases}$$

$\hookrightarrow [-a\ \ -a-b\ \ -a-b-c\ \ -a-b-2c\ \ -a-b-2c] = [3d-2e\ \ 2d-e\ \ d\ \ e\ \ e]$

$$\begin{cases} -a-3d+2e=0 \\ -a-b-2d+e=0 \\ -a-b-c-d=0 \\ -a-b-2c-e=0 \\ \cancel{-a-b-2c-e=0} \end{cases} \to \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$b = c \to \begin{array}{l} -b+d-e=0 \\ -b+d-e=0 \\ -b+d = e \end{array} \qquad \begin{array}{l} -a-3d+2e=0 \\ -3d+2e = a \\ -3d+2d-2b = a \\ -d-2b = a \end{array}$$

$[-d-2b\ \ b\ \ b\ \ d\ \ -b+d]^T = b[-2\ 1\ 1\ 0\ -1]^T + d[-1\ 0\ 0\ 1\ 1]^T$

$B(S_1 \cap S_2) = \left\{ [-2\ 1\ 1\ 0\ -1]^T, [-1\ 0\ 0\ 1\ 1]^T \right\} \to \dim(S_1 \cap S_2) = 2$.

• $\underline{S_1 + S_2}$

$\hookrightarrow \dim(S_1+S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2)$

$\dim(S_1+S_2) = 3 + 2 - 2$

$\dim(S_1+S_2) = 3$

Generado por $S_1 \cup S_2 \to$ veo si son LI.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{bmatrix} \to \text{los primeros 3 son LI}$$

$B(S_1+S_2) = \left\{ [-1\ -1\ -1\ -1\ -1]^T, [0\ -1\ -1\ -1\ -1]^T, [0\ 0\ -1\ -2\ -2]^T \right\}$

Asamblea

Escaneado con CamScanner

c. $S_1 := \text{gen}\{[1\ 0\ 2\ 1]^T, [1\ 1\ 1\ 1]^T\} \to LI$

$S_2 := \text{gen}\{[4\ 2\ 2\ 0]^T, [2\ 0\ 2\ 0]^T\} \to LI$

$\mapsto$ Son base

• $S_1 \cap S_2$

$a[1\ 0\ 2\ 1]^T + b.[1\ 1\ 1\ 1]^T = c.[4\ 2\ 2\ 0]^T + d.[2\ 0\ 2\ 0]^T$

$$\begin{cases} a+b-4c-2d=0 \\ b-2c=0 \\ 2a+b-2c-2d=0 \\ a+b=0 \end{cases} \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$4c+2d=0$ $\quad b-2c=0$ $\quad a+b-4c-2d=0$

$2c+d=0$ $\quad b=2c$ $\quad a+2c-4c+4c=0$

$d=-2c$ $\quad a=-2c$.

$[a\ b\ c\ d]^T = [-2c\ \ 2c\ \ c\ \ -2c]^T = c[-2\ 2\ 1\ -2]$

$B(S_1 \cap S_2) = \{[-2\ 2\ 1\ -2]^T\}$

$\mapsto \dim(S_1 \cap S_2) = 1$.

• $S_1 + S_2$

$\mapsto \dim(S_1+S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2)$

$\dim(S_1+S_2) = 2 + 2 - 1$

$\dim(S_1+S_2) = 3$

Lo genera $S_1 \cup S_2 \Rightarrow$ Averiguo cual está demás.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$B(S_1+S_2) = \{[1\ 0\ 2\ 1]^T, [1\ 1\ 1\ 1]^T, [4\ 2\ 2\ 0]^T\}$

1.33. Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times4}$ dos matrices tq:

$AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ donde $rg(B) = 2$. Hallar una base del subespacio $nul(B) + \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1+x_2=0, x_3+x_4=0\}$

• $S = nul(B) + \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1+x_2=0, x_3+x_4=0\}$

$dim(\mathbb{R}^4) - ecuaciones = dim$

$4 - 2 = dim$

$2 = dim$

$rg(\cdot) + dim(Nul(B)) = n°\ col.\ A$

$2 + dim(Nul(B)) = 4$

$dim(Nul(B)) = 2$

∴ $nul(B) = \{x \in \mathbb{R}^4 : Bx = 0\,\mathbb{R}^3\} \to A.Bx = A.0\mathbb{R}^3$

$(AB)x = 0\mathbb{R}^3$

∴ $nul(B) \subseteq nul(AB)$

$\quad dim \leq 2$

$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

$-x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \qquad 3x_3 + 3x_4 = 0$

$-x_1 + x_2 - 2x_4 + x_4 = 0 \qquad x_3 = -x_4$

$-x_1 + x_2 + x_4 = 0$

$x_2 = x_4 + x_1$

$x_1[1\ 1\ 0\ 0]^T + x_4[0\ 1\ -1\ 1]^T$

$B(Nul(B)) = \{[1\ 1\ 0\ 0]^T, [0\ 1\ -1\ 1]^T\} \to dim(Nul(B)) = 2 \Rightarrow B[Nul(B)] = B[Nul(AB)]$

• $\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1+x_2=0; x_3+x_4=0\}$

$\quad x_1 = -x_2 \qquad x_3 = -x_4 \quad \to [x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T = [-x_2\ x_2\ -x_4\ x_4]^T = x_2[-1\ 1\ 0\ 0]^T + x_4[0\ 0\ -1\ 1]^T$

$S = \{\underbrace{[1\ 1\ 0\ 0]^T, [0\ 1\ -1\ 1]^T}_{nul(B)}, [-1\ 1\ 0\ 0]^T, [0\ 0\ -1\ 1]^T\} \to$ ¿son LI?

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \dots [d_1\ d_2\ d_3\ d_4]^T = d_4[\frac{1}{2}\ -1\ \frac{1}{2}\ 1]^T$

B_{S}: $S = \{[1\ 1\ 0\ 0]^T, [0\ 1\ -1\ 1]^T, [-1\ 1\ 0\ 0]^T\}$.

Asamblea

1.34. Sean S_1 y S_2 subespacios de $\mathbb{R}^2$ tq: $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 = 0\}$, $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0\}$.
Hallar subespacio T de $\mathbb{R}^2$ tq $S_1 \oplus T = S_2 \oplus T = \mathbb{R}^2$. ¿Es único?

• **S_1**

$x_1 = x_2 \Rightarrow \{[1\ 1]^T\}$

• **S_2**

$x_1 = -x_2 \Rightarrow \{[-1\ 1]^T\}$

• **$S_1 \cap S_2$**

$a \cdot [1\ 1]^T = b[-1\ 1]^T$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ a-b=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$[0\ 0]^T \Rightarrow$ Son LI

• **$S_1 + S_2$**

Lo genera $S_1 \cup S_2$: $\{[1\ 1]^T, [-1\ 1]^T\}$ $\hookrightarrow$ son LI
$\hookrightarrow \dim(S_1 + S_2) = 2$!

$g_{S_1+S_2} = [0\ 2]^T$.

1.35. Sean $S_1 = gen\{[1\ 2\ 2\ 1]^T, [0\ 1\ 0\ -1]^T\}$, $S_2 = gen\{[1\ 0\ 1\ 2]^T, [1\ 2\ 1\ 0]^T\}$.
Construir subespacio T de $\mathbb{R}^4$ tq $S_1 \oplus T = S_2 \oplus T = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$. ¿Es único?

$dim(S_1) = dim(S_2) = 2$

- $S_1 \to x = [\alpha \quad 2\alpha+\beta \quad 2\alpha \quad \alpha-\beta]$
- $S_2 \to x = [\alpha+\beta \quad 2\beta \quad \alpha+\beta \quad 2\alpha]$

- ¿$S_1 \subseteq S$? ¿$\alpha - 2\alpha - \beta + 2\alpha - \alpha + \beta = 0$? ✓ $\Rightarrow S_1 \subseteq S$
- ¿$S_2 \subseteq S$? ¿$\alpha+\beta - 2\beta + \alpha + \beta - 2\alpha = 0$? ✓ $\Rightarrow S_2 \subseteq S$

- $\underline{S_1 \cap S_2}$

$\alpha \cdot [1\ 2\ 2\ 1]^T + \beta [0\ 1\ 0\ -1]^T = \gamma \cdot [1\ 0\ 1\ 2]^T + \theta \cdot [1\ 2\ 1\ 0]^T$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \quad \alpha - \gamma - \theta = 0 \ \wedge\ \beta + 2\gamma = 0 \ \wedge\ \gamma + \theta = 0$$

$\alpha = 0 \qquad \beta - 2\theta = 0 \qquad \gamma = -\theta$

$\beta = 2\theta$

$[\alpha\ \beta\ \gamma\ \theta]^T = [0\ 2\ -1\ 1]^T$

1.36.