# ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Evaluación integradora
Duración: 3 horas.

Primer cuatrimestre – 2023
12/VII/23 – 9:00 hs.

Apellido y Nombres:

Legajo:

Curso:

**1.** Sea $\Pi$ la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ en la dirección de la recta generada por $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Hallar la imagen por $\Pi$ del triángulo de vértices $e_1, e_2, e_3$.

**2.** Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Hallar todas las soluciones de la ecuación $\lim_{k\to\infty} A^k x = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T$.

**3.** Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que traza$(A) = 0$, $\begin{bmatrix} 8 & -1 & 4 \end{bmatrix}^T \in \text{nul}(A - I)$ y $\begin{bmatrix} -1 & 8 & 4 \end{bmatrix}^T \in \text{nul}(A + I)$.

**4.** Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la isometría definida por $T(x) = Ux$, donde $U$ es la matriz ortogonal definida por

$$U = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 1 & -4 \\ 1 & -8 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Comprobar que $T$ es una rotación, determinar su eje y su ángulo de rotación.

**5.** Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$, donde

$$A = \frac{2}{9}\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Hallar y graficar la imagen por $T$ de la esfera unitaria de $\mathbb{R}^3$.

## Ejercicio 1

Sea $\pi$ la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $S_1$ / $S_1 = \{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0 \}$ en la dirección de la recta generada por $(1\ 0\ 1)^T$. Sea $\{e_1; e_2; e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Hallar la imagen por $\pi$ del triángulo de vértices $e_1, e_2, e_3$.

1º) Una base de $S_1$ es: $B_{S_1} = \left\{ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

2º) Una base de $S_2 = \text{gen}\{(1\ 0\ 1)^T\}$ es: $B_{S_2} = \left\{ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

3º) Consideramos la base $B$ de $\mathbb{R}^3$:

$$B = \{ \underbrace{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{B_{S_1}}; \underbrace{v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B_{S_2}} \}$$

y definimos la proyección respecto de la base $B$:

$$\begin{aligned} \pi(v_1) &= v_1 \\ \pi(v_2) &= v_2 \\ \pi(v_3) &= 0 \end{aligned} \Rightarrow [\pi]_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

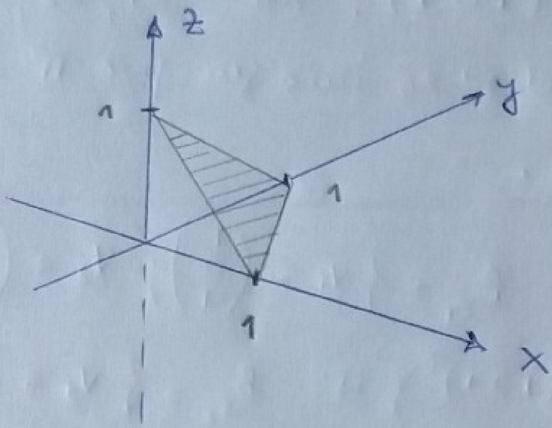
4º) Hallamos la matriz de la proyección respecto de la base $E$ (base canónica de $\mathbb{R}^3$)

$$[\pi]_{EE} = (M_{EB})^{-1} [\pi]_{BB}\ M_{EB}$$

$$(M_{EB})^{-1} = M_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$[\pi]_{EE} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

El triángulo de vértices $e_1, e_2, e_3$ es:




$$\pi(e_1) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

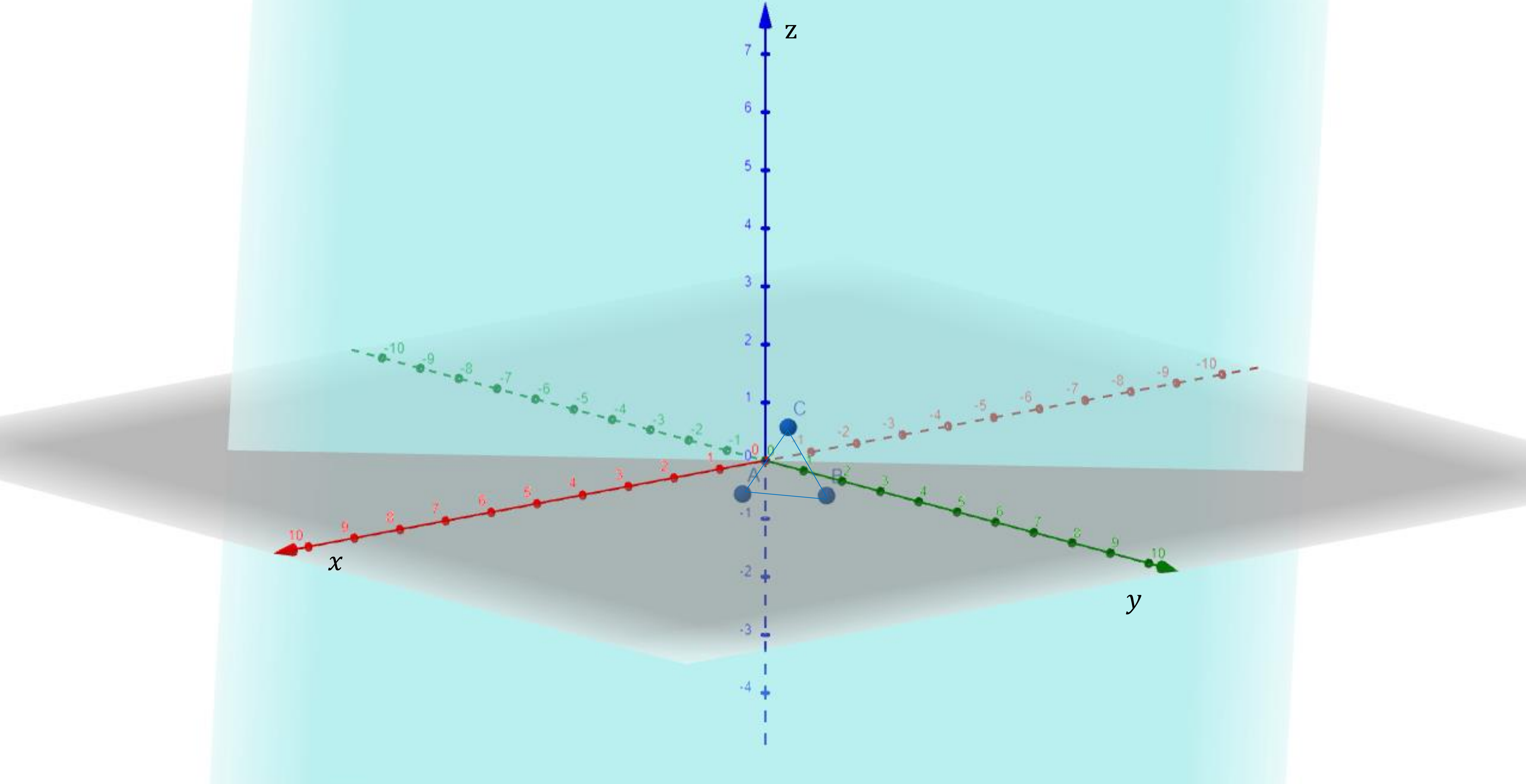
$$\pi(e_2) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\pi(e_3) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$\pi(e_1)$; $\pi(e_2)$; $\pi(e_3)$ } son tres puntos $\in S$, que no se hallan alineados

La imagen por $\pi$ del triángulo de vértices $e_1, e_2, e_3$ es el triángulo de vértices $A = (1/2 \;\; 0 \;\; -1/2)^T$; $B = (-1/2 \;\; 1 \;\; 1/2)^T$; $C = (-1/2 \;\; 0 \;\; 1/2)^T$

$S_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$



EJERCICIO 2:

Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Hallar todas las soluciones de la ecuación

$$\lim_{k \to \infty} A^k x = [3 \quad 3 \quad 0]^T .$$

Resolución:

Calculamos los avas y aves de A:

$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)(-\lambda) = 0$$

$\sigma(A) = \{ \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 3, \ \lambda_3 = 1 \}$

$S_{\lambda_1 = 0}(A) = \{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_3 = 0, \ x_3 = 0 \}$

$S_{\lambda_1 = 0}(A) = \text{gen}\{ [0 \quad 1 \quad 0]^T \}$

$S_{\lambda_2 = 3}(A) = \{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_3, \ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \} =$

$= \{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_3, \ x_2 = x_3 \}$

$S_{\lambda_2 = 3}(A) = \text{gen}\{ [1 \quad 1 \quad 1]^T \}$

$$S_{\lambda_3=1}(A) = \{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2, x_3 = 0 \}$$

$$S_{\lambda_3=1}(A) = \text{gen}\{ [1 \ 1 \ 0]^T \}$$

Por consiguiente existe una base de $\mathbb{R}^3$ compuesta por autovectores de $A$.

$$B = \{ v_1 = [0 \ 1 \ 0]^T, v_2 = [1 \ 1 \ 1]^T, v_3 = [1 \ 1 \ 0]^T \}$$

$$A v_1 = 0_{\mathbb{R}^3}, \quad A v_2 = 3 v_2, \quad A v_3 = v_3$$

$\forall x \in \mathbb{R}^3$: $x = a[0 \ 1 \ 0]^T + b[1 \ 1 \ 1]^T + c[1 \ 1 \ 0]^T$, $a, b$ y $c \in \mathbb{R}$

Sabemos que si $x \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ es tal que $Ax = \lambda x$ entonces $A^k x = \lambda^k x$, $k \in \mathbb{N}$

Entonces $\forall x \in \mathbb{R}^3$

$$A^k x = A^k (a[0 \ 1 \ 0]^T + b[1 \ 1 \ 1]^T + c[1 \ 1 \ 0]^T) =$$

$$= a \, 0_{\mathbb{R}^3} + b \, 3^k [1 \ 1 \ 1]^T + c[1 \ 1 \ 0]^T$$

y para que $\lim_{k \to \infty} A^k x$ exista y sea finito

$b = 0$, $a \in \mathbb{R}$

Luego $\lim_{k \to \infty} A^k x = \lim_{k \to \infty} c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ de donde $c = 3$

De modo que todos los $x \in \mathbb{R}^3$ que cumplen lo pedido son:

$$X = a[0 \quad 1 \quad 0]^T + [3 \quad 3 \quad 0]^T, \; a \in \mathbb{R}$$

EJERCICIO 3

Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ tal que $tr(A) = 0$, $[8 \; -1 \; 4]^T \in Nul(A - I)$ y $[-1 \; 8 \; 4]^T \in Nul(A + I)$

A es simétrica sii A es diagonalizable ortogonalmente sii la multiplicidad algebraica y geométrica de cada autovalor coinciden

$\boxed{\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1}$ son avas de A y como $tr(A) = 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = 0}$

$S_{\lambda_1=1}(A) = Nul(A - I)$, $S_{\lambda_2=-1}(A) = Nul(A + I)$

Como asociados a avas distintos de una matriz simétrica le corresponden aves ortogonales $S_{\lambda_3=0}(A) = gen\{v\}$ donde

$\langle v, [8 \; -1 \; 4]^T\rangle = 0$, $\langle v, [-1 \; 8 \; 4]^T\rangle = 0$

$S_{\lambda_3=0}(A) = gen\{[4 \quad 4 \quad -7]^T\}$

$$P = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 8 & -1 & 4 \\ -1 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & -7 \end{bmatrix} \qquad D_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y $A = P\,D_A\,P^T$

$$A = \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 8 & -1 & 4 \\ -1 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -1 & 4 \\ -1 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{7}{9} & 0 & \frac{4}{9} \\ 0 & -\frac{7}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & 0 \end{bmatrix}$$

OBSERVACIÓN

La matriz A se puede obtener a partir de una diagonalización que no sea ortogonal.

Considerando $Q = \begin{bmatrix} 8 & -1 & 4 \\ -1 & 8 & 4 \\ 4 & 4 & -7 \end{bmatrix}$, $D_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

y $A = Q\,D_A\,Q^{-1}$

12.03.2023

4. Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la isometría definida por: $T(x) = Ux$, donde $U$ es la matriz ortogonal:

$$U = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 1 & -4 \\ 1 & -8 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

comprobar que $T$ es una rotación, determinar su eje y su ángulo de rotación.

i) $U$ es una matriz ortogonal tal que $\det U = 1$:

$$u_1 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} ; \quad u_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} ; \quad u_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\|u_1\| = 1 ; \quad \|u_2\| = 1 ; \quad \|u_3\| = 1$$

$$y \ \langle u_1, u_2 \rangle \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{81}(1 \ -8 \ -4)\begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = (-8-8+16) \cdot \frac{1}{81} = 0$$

pic de $\mathbb{R}^3$

$$\langle u_1, u_3 \rangle = \frac{1}{81}(-4 \ -4 \ 7)\begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{81}(32-4-28) = 0$$

$$\langle u_2, u_3 \rangle = \frac{1}{81}(-4 \ -4 \ 7)\begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{81}(-4+32-28) = 0 \ \checkmark$$

$$\det U = \frac{1}{729}\left[-8(-56-16) - 1(7-16) - 4(-4-32)\right] =$$

$$= \frac{1}{729}(576+9+144) = \frac{1}{729} \cdot 729 = 1 \ \checkmark$$

ii) Sea $A = \begin{vmatrix} -8 & 1 & -4 \\ 1 & -8 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{vmatrix}$ $\sigma(A) = \{\lambda_1 = 9 ; \ \lambda_2 = -9 \text{ (doble)}\}$

$\Rightarrow \sigma(U) = \{\gamma_1 = 1 ; \ \gamma_2 = -1 \text{ (doble)}\}$.

El eje de rotación será el autoespacio asociado a

$$\gamma_1 = 1 : \quad \left\{ \begin{array}{l} -17x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 - 17x_2 - 4x_3 = 0 \\ -4x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \end{array} \right. ; \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$x_3 = -2x_1 - 2x_2 : \quad -17x_1 + x_2 - 4(-2x_1 - 2x_2) = 0$$

$$-17x_1 + x_2 + 8x_1 + 8x_2 = 0$$

$$-9x_1 + 9x_2 = 0 ; \quad \begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ x_3 = -4x_2 \end{array}$$

$S_{\gamma_1 = 1}(U) = \text{gen}\{(1 \ 1 \ -4)^T\}$

es el eje de rotación.

La matriz de rotación

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad 0 \le \theta < 2\pi$$

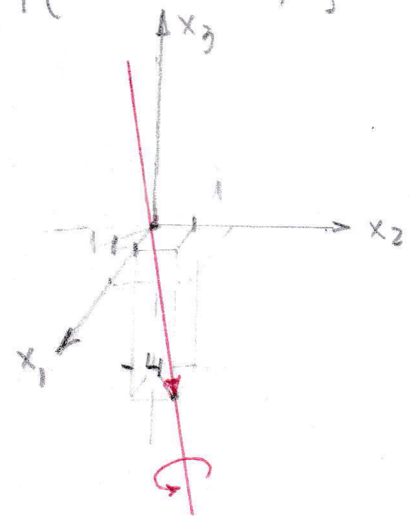
es semejante a $U$ : $\operatorname{tr}[T]_B = 1 + 2\cos\theta = \operatorname{tr}(U)$

$$1 + 2\cos\theta = -\frac{8}{9} - \frac{8}{9} + \frac{7}{9} = -\frac{9}{9} = -1$$

$$2\cos\theta = -2 \quad ; \quad \cos\theta = -1$$

$$\Rightarrow \quad \theta = \pi$$

Se trata de una rotación de eje gen$\{(1 \;\; 1 \;\; -4)^t\}$
y ángulo $\theta = \pi$




Obs puede interpretarse como una simetría ortogonal respecto de la recta gen$\{(1 \;\; 1 \;\; -4)^t\}$

12. 07. 2023

5. Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$, donde:

$$A = \frac{2}{9}\begin{pmatrix}-1\\8\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 3 & 2\end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix}4\\4\\-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -6 & 3\end{pmatrix} \qquad (1)$$

Hallar y graficar la imagen por $T$ de la esfera unitaria de $\mathbb{R}^3$.

A partir de la expresión (1) podemos expresar $A$ mediante la forma de producto exterior:

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T$$

donde $u_1$ es la primera columna de la matriz $U$ de la DVS de $A$: $A = U\Sigma V^T$ y $u_2$ la segunda columna de $U$, mientras que $v_1$ y $v_2$ son la primera y segunda columna de $V$, respectivamente. $\sigma_1$ es el mayor valor singular de $A$ y $\sigma_2$ el siguiente: $\sigma_1 \geq \sigma_2$.

Dado que $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ se deduce que el tercer valor singular de $A$ es $\sigma_3 = 0$

$$A = 2\cdot 7\begin{pmatrix}-1/9\\8/9\\4/9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6/7 & 3/7 & 2/7\end{pmatrix} + 1\cdot 7\begin{pmatrix}4/9\\4/9\\-7/9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2/7 & -6/7 & 3/7\end{pmatrix}$$

luego $\sigma_1 = 14$ ; $\sigma_2 = 7$

$$u_1 = \begin{pmatrix}-1/9\\8/9\\4/9\end{pmatrix} \qquad u_2 = \begin{pmatrix}4/9\\4/9\\-7/9\end{pmatrix}$$

La imagen por $T$ de la esfera unitaria $\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\} = S$ resulta mediante el cambio de variable $x = Vy$

$\|x\| = \|Vy\| = \|y\|$.

$T(S) = \{z \in \mathbb{R}^3 : z = Ax \quad x \in S\}$

$z = U\Sigma(V^TV)y = U\Sigma y = \sigma_1 u_1 y_1 + \sigma_2 u_2 y_2$

$$= \underbrace{(\sigma_1 y_1)}_{\omega_1} u_1 + \underbrace{(\sigma_2 y_2)}_{\omega_2} u_2 + \underbrace{0}_{\omega_3} \cdot u_3$$

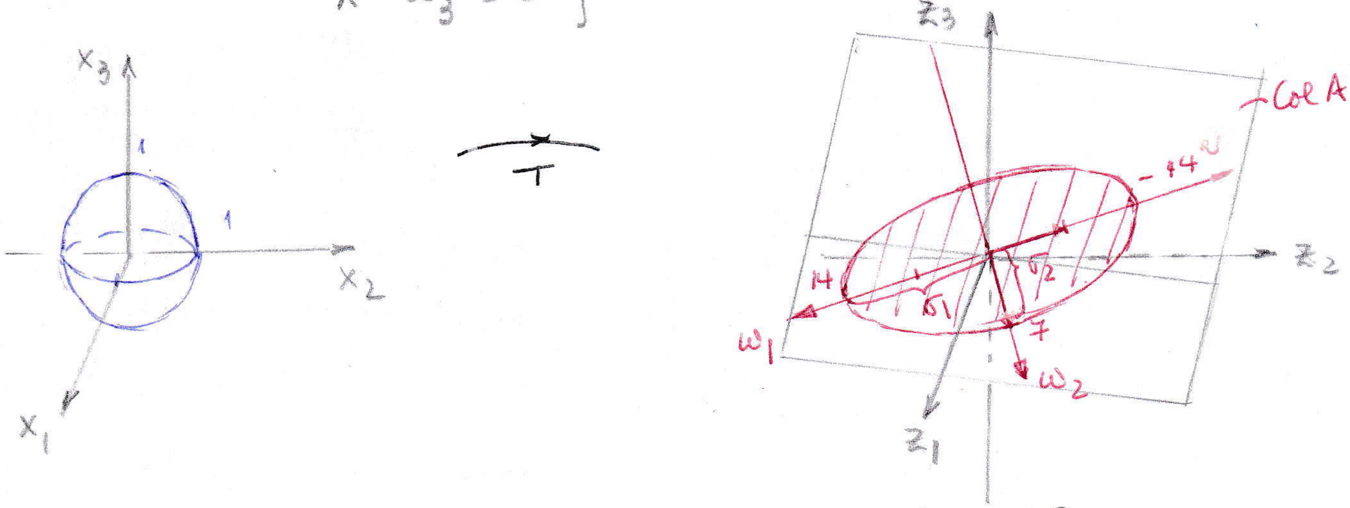
$$y_1 = \frac{\omega_1}{\sigma_1} \qquad y_2 = \frac{\omega_2}{\sigma_2} \qquad \omega_3 = 0$$

y como $\|y\| = 1 \iff \|y\|^2 = 1$

resulta $\dfrac{\omega_1^2}{\sigma_1^2} + \dfrac{\omega_2^2}{\sigma_2^2} \leq 1 \quad \wedge \quad \omega_3 = 0$

la imagen por T de la esfera unitaria es el conjunto

$$T(S) = \{ z \in \mathbb{R}^3 : z = \omega_1 u_1 + \omega_2 u_2 \ \wedge \ \frac{\omega_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\omega_2^2}{\sigma_2^2} \leq 1 \ \wedge \ \omega_3 = 0 \}$$




$$T(S) = \{ z \in \mathbb{R}^3 , z = \omega_1 u_1 + \omega_2 u_2 \ \wedge \ \frac{\omega_1^2}{14^2} + \frac{\omega_2^2}{7^2} \leq 1 \} \ \wedge \ \omega_3 = 0$$