Episodio 17

Autovalores y Autovectores.
Primera Parte.

Departamento de Matemática
FIUBA

Autovalores y autovectores de matrices y transformaciones lineales

Vamos a trabajar con matrices cuadradas, $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y con endomorfismos $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$.

Tanto si trabajamos con matrices, como si trabajamos con transformaciones lineales nos puede interesar encontrar las " rectas", direcciones, que permaneces invariantes.
Esto quiere decir que buscaremos los vectores v en $\mathbb{K}^n$ o en $\mathbb{V}$ (según estemos trabajando con una matriz o una t.l), no nulos, tales que:
$Av = \lambda\, v$. o en el caso de la t.l. $T(v) = \lambda v,$ donde $\lambda \in \mathbb{K}$

$\mathbb{K}^{n\times n}$

$A \in \mathbb{K}^{n\times n}, X_0 \in \mathbb{K}^n$.

Muchas veces nos encontramos con sucesiones en $\mathbb{K}^n$:

$$\begin{aligned}
X_1 &= AX_0. \\
X_2 &= AX_1 \Longrightarrow X_2 = A^2X_0. \\
\vdots &= \vdots \\
X_n &= AX_{n-1} \Longrightarrow X_n = A^nX_0.
\end{aligned}$$

Si queremos anticipar el comportamiento de la sucesión para valores grandes de n, tenemos que tener una idea del comportamiento de las potencias de la matriz A.

Calcular la potencia n-ésima de una matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ suele ser engorroso.

Las matrices cuadradas en las que es más sencillo calcular las distintas potencias naturales, son las matrices diagonales, a las que en general notamos como $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

$$D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Es fácil verificar que entonces, $D^k = diag(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k)$

Otro caso no tan sencillo como este, pero sí mucho más sencillo que el general, es el de las matrices $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ que pueden *factorizarse* en la forma:
$A = Q\ D\ Q^{-1}$ con Q una matriz inversible y
$D = diag(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n)$.
Pues, si $A = Q\ D\ Q^{-1}$:

$$A^2 = A \cdot A = Q\ D\ (Q^{-1}Q)\ D\ Q^{-1} = Q\ D^2\ Q^{-1}$$
$$A^3 = A \cdot A \cdot A = Q\ D\ Q^{-1}Q\ D\ Q^{-1}\ Q\ D\ Q^{-1}$$
$$A^3 = A \cdot A \cdot A = Q\ D\ (Q^{-1}Q)\ D\ (Q^{-1}\ Q)\ D\ Q^{-1} = Q\ D^3\ Q^{-1}$$

En general entonces, si $n \in \mathbb{N}$:

$$A = Q\ D\ Q^{-1} \Longrightarrow A^n = Q\ D^n\ Q^{-1}$$

Veamos entonces qué relación tiene que existir entre la matriz A, la matriz Q y la matriz D para que esto sea posible.
Sean $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es una matriz inversible y $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n\times n}$.
Vamos a explicitar las columnas de la matriz Q:
$Q = [V_1| \ V_2| \ \dots |V_n], \ V_i \in \mathbb{K}^{n\times 1}$.

Entonces:

$$A = Q \ D \ Q^{-1} \Longleftrightarrow A \ Q = Q \ D$$

$$A[V_1| \ V_2| \ \dots |V_n] = [V_1| \ V_2| \ \dots |V_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

Ahora sólo tenemos que recordar que en el producto de dos matrices $\text{Col}_i(A\ B) = A\ Col_i(B),$ para cada i.
Entonces si en (1), igualando columna por columna, tenemos:

$$A\text{Col}_1(Q) = A\ V_1 = [V_1|\ V_2|\ \dots|V_n]\text{Col}_1(D) = [V_1|\ V_2|\ \dots|V_n]\begin{bmatrix}\lambda_1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

$$A\ V_1 = [V_1|\ V_2|\ \dots|V_n]\begin{bmatrix}\lambda_1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} = \lambda_1 V_1$$

Si repetimos esto para cada columna tendremos:

$$A\mathrm{Col}_i(Q) = A\ V_i = [V_1|\ V_2|\ \dots|V_n]\mathrm{Col}_i(D) = [V_1|\ V_2|\ \dots|V_n]\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$AV_i = \lambda_i V_i$$

entonces hemos encontrado la relación que tienen que cumplir las matrices Q y D para que $A = Q\ D\ Q^{-1}$

$$\boxed{\text{A}= \text{Q D Q}^{-1} \Leftrightarrow AV_i = \lambda_i V_i,\ \text{donde} V_i = \mathrm{Col}_i(Q)} \quad (2)$$

Entonces, otra vez aparece esta relación entre la matriz A, un vector de $\mathbb{K}^n$ y un escalar.

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

Definición: Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, un **autovalor** de A es un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que existe $v \in \mathbb{K}^n$, $v \neq 0$ que cumple $Av = \lambda v$. Se dice que v es **autovector** de A.

Calculo de autovalores y autovectores La primera pregunta entonces es cómo encontramos los autovalores y autovectores de una matriz A. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ es autovalor de A, por definición existe $v \neq 0_{\mathbb{K}^n}$ tal que $Av = \lambda v$

$$Av = \lambda v \Leftrightarrow (\lambda v - Av) = 0_{\mathbb{K}^n} \text{ y } \ v \neq 0_{\mathbb{K}^n}.$$

$$(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})\mathrm{v} = 0_{\mathbb{K}^\mathrm{n}} \text{ y } \ \mathrm{v} \neq 0_{\mathbb{K}^\mathrm{n}}.$$

Esto quiere decir que el sistema lineal homogéneo: $(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})\mathrm{X} = 0_{\mathbb{K}^\mathrm{n}}$ tiene infinitas soluciones pues sabemos que hay una solución que es no trivial.

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

Entonces, $\lambda \in \mathbb{K}$ es autovalor de $A \Leftrightarrow (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})$ no es inversible $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}) = 0.$
Además, v es autovector de A asociado al autovalor
$\lambda \Leftrightarrow (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})\mathrm{v} = 0_{\mathbb{K}^{\mathrm{n}}}$

Cálculo de autovalores y autovectores para $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$:

- Buscamos $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que $\det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}) = 0.$
- Para cada λ, los autovectores de A asociados a λ son $v \neq 0_{\mathbb{K}^n} / (\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})\mathrm{v} = 0_{\mathbb{K}^{\mathrm{n}}} \Leftrightarrow \mathrm{v} \in \mathrm{Nul}(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}).$

- Con la definición dada el resultado de (2), se puede enunciar diciendo :

> **$A = Q\ D\ Q^{-1}$ si cada columna de Q es un autovector de A asociado al autovalor λ, correspondiente en la matriz diagonal D, además Q inversible implica que existe una base de $\mathbb{K}^n$ formada por autovectores de A.**

- El conjunto de autovectores de A asociados a cada autovalor λ_0 son los vectores no nulos, solución del sistema homogéneo $(\lambda_0 \mathrm{I} - \mathrm{A})\mathrm{X} = 0_{\mathbb{K}^n}$. Se llama **Autoespacio de A asociado a** λ_0 al subespacio Nul$(\lambda_0 \mathrm{I} - \mathrm{A})$ y se nota:

$$S_{\lambda=\lambda_0} = \{v \in \mathbb{K}^n / Av = \lambda_0 v.\}$$

$$S_{\lambda=\lambda_0} = \{\text{autovectores de } A \text{ asociados a } \lambda_0\} \cup \{0_{K^n}.\}$$

Ejemplo: Dadas las siguientes matrices en $R^{2\times 2}$:

$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Encuentre autovalores y autovectores. ¿Alguna de ellas puede *factorizarse* en la forma $Q\ D\ Q^{-1}$?

Resolución:

$\boxed{\text{Para } A_1:}$

Para encontrar sus autovalores, buscamos $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}_1) = 0$.

$$\det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}_1) = \begin{vmatrix} (\lambda - 1) & -1 \\ -1 & (\lambda - 1) \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow |\lambda - 1| = 1 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 1$ o $\lambda - 1 = -1$.

$\boxed{\lambda = 2 \text{ o } \lambda = 0}$

Busquemos ahora los autovectores asociados a cada uno de estos autovalores.

Para encontrar los autovectores asociados a $\lambda = 2$ buscamos el conjunto de las soluciones del sistema homogéneo determinado por la matriz que queda de reemplazar λ por 2 en $(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}_1)$.

$S_{\lambda=2} = \mathrm{Nul}(2\mathrm{I} - \mathrm{A}_1)$. o sea las soluciones del sistema homogéneo determinado por la matriz que queda al reemplazar λ por 2 en $(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}_1)$.

$$S_{\lambda=2}: \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2+F_1]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2. \; S_{\lambda=2} = \mathrm{gen}\{[1\ 1]^T\}$$

Busquemos ahora $S_{\lambda=0}$. Otra vez, tenemos que buscar las soluciones de un sistema homogéneo que, en este caso, queda definido por la matriz:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow x_1 = -x_2, \; S_{\lambda=0} = \mathrm{gen}\{[-1\ \ 1]^T\}.$$

Para contestar si existen Q, matriz inversible y $D = diag(\lambda_1, \lambda_2)$ tal que $A_1 = Q\ D\ Q^{-1}$ sólo tenemos que recordar que para que esto sea posible las columnas de Q deben ser autovectores de A, obviamente l.i. pues Q debe ser una matriz inversible, rg(Q=2). En este caso vemos que esto es posible pues, por ejemplo, los vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ son autovectores de A linealmente independientes, el primero asociado al autovalor $\lambda_1 = 2$ y el segundo asociado a $\lambda_2 = 0$, entonces si construimos las matrices:
$Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, se cumple que:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Obviamente, esta factorización no es única.

$\boxed{\text{Para } A_2.}$

Como antes buscamos sus autovalores: $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}_2) = 0$.

$$\det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}_2) = \begin{vmatrix} (\lambda - 2) & -3 \\ 3 & (\lambda - 2) \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = -9$ (no tiene soluciones reales).
$(\lambda - 2)^2 = -9 \Leftrightarrow \lambda - 2 = 3i$ o $\lambda - 2 = -31$.

$\boxed{\lambda_1 = 2 + 3i \text{ y } \lambda_2 = 2 - 31 \Rightarrow A \text{ no tiene autovalores reales.}}$

Por lo tanto **no existen** Q y D en $\mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $A = Q\ DQ^{-1}$.

Para A_3.

Buscamos la ecuación que determina los autovalores $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que $\det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}_3) = 0$.

$$\det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}_3) = \begin{vmatrix} (\lambda - 2) & -3 \\ 0 & (\lambda - 2) \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$$

En este caso obtuvimos un único autovalor, pues $\lambda = 2$ es una raíz doble del polinomio anterior.

Busquemos los autovectores de A asociados a $\lambda = 2$:

Buscamos $\mathrm{Nul}(2\mathrm{I} - \mathrm{A}_3)$:

$S_{\lambda=2}$: $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = 0$ $S_{\lambda=2} = \mathrm{gen}\{[1\ 0]^T\}$

Entonces, en este caso tampoco conseguimos *factorizar* la matriz A en la forma $A = Q\,DQ^{-1}$ pues no existen dos autovectores l.i. para construir la matriz Q.

Definiciones

En todo que sigue, $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$

Se dice que A es **diagonalizable** si existe $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversible y $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que $A = Q\ D\ Q^{-1}$.

Por lo desarrollado al comienzo del episodio:
A es diagonalizable $\iff$ existe una base de K^n formada por autovectores de A.

Se llama **polinomio característico de** A, al polinomio de grado n, $P_A(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})$.

Los autovalores de A son las raíces de su polinomio característico.

Si λ_0 es autovalor de A, se llama **multiplicidad algebraica** de λ_0, a la multiplicidad de λ_0 como raíz del polinomio característico. (Se nota: m_λ.)

Recordemos: λ_0 es una raíz de multiplicidad m de P, si $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m Q(\lambda)$, con $Q(\lambda_0) \neq 0$.

Si λ_0 es autovalor de A, se llama **multiplicidad geométrica** de λ_0, a la dimensión de su autoespacio asociado. Notamos: $\mu_\lambda = \dim(\mathrm{Nul}(\lambda_0 \mathrm{I} - \mathrm{A}))$.

Observaciones

a. Si $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ es autovalor de $A \Rightarrow \mu_\lambda \geq 1$.
   (Trivial por definición de autovalor y autovector)
b. Si $\lambda = 0$ es autovalor de $A \Rightarrow S_{\lambda=0} = \mathrm{Nul}(A)$.
   Es inmediato pues $S_{\lambda=0} = \mathrm{Nul}(0\mathrm{I} - \mathrm{A}) = \mathrm{Nul}(-\mathrm{A}) = \mathrm{Nul}(\mathrm{A})$.
c. Si A es inversible $\lambda \neq 0, \forall\ \lambda$ autovalor de A.
   Pues A es inversible $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = n \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Nul}(A)) = 0 \Leftrightarrow$
   $\lambda = 0$ no es autovalor de A.
d. Sea $\{v_1,\ v_2,\ \dots,\ v_k\}$ un conjunto de autovectores de A asociados respectivamente a los autovalores $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots,\ \lambda_k$, tal que $(\lambda_i \neq \lambda_j \forall\ i \neq j) \Rightarrow \{v_1,\ v_2,\ \dots,\ v_k\}$ es l.i.

Demostración:

Vamos a demostrarlo por el ABSURDO.

Supongamos que el conjunto $\{v_1,\ v_2,\ \dots,\ v_k\}$ no es l.i $\Rightarrow$ será l.d.

Por el lema demostrado en el **Episodio 3.** de espacios vectoriales, sabemos que si el conjunto $\{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_k\}$ es l.d, existe un primer vector $v_m,\ 1 < m \leq m$ de manera tal que $\{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_{m-1}\}$ es l.i. y $\{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_{m-1},\ v_m\}$ es l.d. (Sabemos que $m > 1$ pues $\{v_1\}$ es l.d. sólo si $v_1 = 0_{\mathbb{K}^n}$ y esto es absurdo pues v_1 es autovector de A, por lo tanto $v_1 \neq 0_{\mathbb{K}^n}$)
Esto quiere decir que existen $\alpha_1, \ldots,\ \alpha_{m-1} \in\ \mathbb{K}$ tal que:

$$v_m = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{m-1} v_{m-1}. \quad (3)$$

$$\begin{aligned} Av_m &= A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{m-1} v_{m-1}). \\ Av_m &= \alpha_1 Av_1 + \alpha_2 Av_2 + \cdots + \alpha_{m-1} Av_{m-1}. \\ \lambda_m v_m &= \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + \alpha_{m-1} \lambda_{m-1} v_{m-1}. \quad (4) \end{aligned}$$

Si en (3), multiplicamos ambos miembros por λ_m, obtenemos:

$$\lambda_m v_m = \lambda_m \alpha_1 v_1 + \lambda_m \alpha_2 v_2 + \cdots + \lambda_m \alpha_{m-1} v_{m-1}. \quad (5)$$

Igualamos (4) y (5):

$$\alpha_1\lambda_1 v_1 + \alpha_2\lambda_2 v_2 + \cdots + \alpha_{m-1}\lambda_{m-1} v_{m-1} = \lambda_m\alpha_1 v_1 + \lambda_m\alpha_2 v_2 + \cdots + \lambda_m\alpha_{m-1} v_{m-1}$$

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m)v_1 + \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_m)v_2 + \cdots + \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)v_{m-1} = 0_{\mathbb{K}^n}$$

Como $\{v_1, v_2, \ldots, v_{m-1}\}$ es un conjunto l.i. los escalares de esta última combinación lineal deben ser todos nulos:

$$\begin{cases} \alpha_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_m)}_{\neq 0} = 0 \\ \alpha_2 \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_m)}_{\neq 0} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{m-1} \underbrace{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)}_{\neq 0} = 0 \end{cases}$$

Luego:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{m-1} = 0 \Rightarrow v_m = 0_{\mathbb{K}^m}$$

ABSURDO, pues $v_m \neq 0_{\mathbb{K}^m}$ por ser un autovector de A.El absurdo proviene de suponer que $\{v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_k\}$ es l.d.
Entonces $\{v_1,\ \ldots, v_k\}$ es l.i.

$$\boxed{\textbf{A autovalores distintos corresponden autovectores l.i.}}$$

FACULTAD DE INGENIERIA Universidad de Buenos Aires

Ya tenemos un resultado importante:

> Si una matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ tiene n autovalores distintos en $\mathbb{K} \Rightarrow A$ es diagonalizable.

Pues, como acabamos de demostrar, si A tiene n autovalores distintos, a autovalores distintos corresponden autovectores linealmente independientes, entonces existen n autovectores l.i. que formaran una base de K^n. Entonces podremos construir matrices Q y D tales que $A = Q\ D\ Q^{-1}$.✓

Propiedades sobre autovalores de $A \in K^{n\times n}$ (para la práctica):

- $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$. (Se consideran los autovalores con repetición.)
- $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i$. (Se consideran los autovalores con repetición.)
- Si λ autovalor de A asociado al autovector v:
  - $(\lambda^k + t)$ es autovalor de $(A^K + t\mathrm{I})$ asociado al autovector v.
  - Si A es inversible $\Rightarrow \frac{1}{\lambda}$ de A^{-1} asociado al autovector v.
- Si λ autovalor de $A \Rightarrow \lambda$ es autovalor de A^T.(Los autovectores no tienen porque ser los mismos.)

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Entonces nos queda por responder qué pasa si A, no tiene a autovalores distintos. Eso significa que el polinomio característico tiene raíces de multiplicidad mayor que 1.

Ejemplo:

Sean $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ matrices en $\mathbb{C}^{3\times 3}$. ¿Son diagonalizables A y B ?

Resolución:

Empecemos estudiando la matriz A:

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda\mathrm{I}-\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} (\lambda-5) & -1 & 0 \\ 0 & (\lambda-5) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1) \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda-5)^2$$

Los autovalores de A son $\lambda_1 = -1$, de multiplicidad algebraica $m_{\lambda_1} = 1$ y $\lambda_2 = 5$, de multiplicidad algebraica $m_{\lambda_2} = 2$.

Busquemos sus autovectores.

$\boxed{\lambda_1 = -1}$

$S_{\lambda=1}$ queda determinado por la matriz del sistema homogéneo:

$$\begin{bmatrix} -6 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_2 = 0 = x_1 \Rightarrow S_{\lambda=-1} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

$\boxed{\lambda_2 = 5}$

$S_{\lambda=5}$ queda determinado por la matriz del sistema homogéneo:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow x_3 = 0 \text{ y } x_2 = 0 \Rightarrow S_{\lambda=5} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Entonces, la matriz A **no es diagonalizable** pues sólo podemos conseguir dos direcciones linealmente independientes definidas por sus autovectores. No existe una base de $\mathbb{C}^3$ formada por autovectores de A.

Repitamos el estudio para la matriz B:

$$P_B(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{B}) = \begin{vmatrix} (\lambda - 2) & -3 & 0 \\ -3 & (\lambda - 2) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 5) \end{vmatrix}$$

$$P_B(\lambda) = (\lambda - 5)[(\lambda - 2)^2 - 9] = (\lambda - 5)((\lambda - 2) - 3)((\lambda - 2) + 3)$$
$$P_B(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 5)^2$$

Los autovalores de B son $\lambda_1 = -1$, de multiplicidad algebraica $m_{\lambda_1} = 1$ y $\lambda_2 = 5$, de multiplicidad algebraica $m_{\lambda_2} = 2$.
Busquemos sus autovectores.

$\boxed{\lambda_1 = -1}$

$S_{\lambda=-1}$ queda determinado por la matriz del sistema homogéneo:

$$\begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \Rightarrow x_3 = 0, \text{ y } x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_1 \Rightarrow$$

$$S_{\lambda=-1} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

$\boxed{\lambda_2 = 5}$

$S_{\lambda=5}$ queda determinado por la matriz del sistema homogéneo:

$$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2, \; x_3 \in \mathbb{R} \Rightarrow S_{\lambda=5} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Entonces la matriz B **es diagonalizable** pues existe una base de $\mathbb{C}^3$ formada por autovectores de B. Por ejemplo:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Podemos construir $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Y entonces se cumple que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Cuando los autovalores "se repiten" como raíces del polinomio característico no podemos asegurar, sólo con ese dato, si la matriz resultará diagonalizable o no. Necesitamos, estudiar algo más para poder predecirlo.

Semejanza de matrices

Definición: Sean A y B dos matrices en $\mathbb{K}^{n\times n}$, se dice que B es **semejante** a A si existe $Q \in \mathbb{K}^{n\times n}$ inversible, tal que $B = Q\,A\,Q^{-1}$.
Se nota: $B \sim A$.

Algunas consideraciones inmediatas:

- Con esta definición, las **matrices diagonalizables** son **matrices semejantes a una matriz diagonal** .
- La relación de semejanza es **reflexiva** , $A \sim A$ pues $A = \mathrm{I}\,\mathrm{A}\,\mathrm{I}$ y también **simétrica** pues $B \sim A \Leftrightarrow \exists Q$ tal que $B = Q\,A\,Q^{-1} \Leftrightarrow Q^{-1}\,B\,Q = A \Rightarrow A \sim B$.

- La relación de semejanza es **transitiva**:
  Si $B \sim A$ y $C \sim B \Rightarrow C \sim A$.
  Aplicando la definición, $B \sim A \Leftrightarrow B = Q\ A\ Q^{-1}$ y $C \sim B \Leftrightarrow$
  $C = H\ B\ H^{-1} = H\ Q\ A\ Q^{-1}\ H^{-1} = (H\ Q)\ A\ \underbrace{(Q^{-1}\ H^{-1})}_{(H\ Q)^{-1}}$.

  $C = (H\ Q)\ A\ (H\ Q)^{-1} \Rightarrow C \sim A. \checkmark$
- Si $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial de dimensión n y B y B' son bases de $\mathbb{V}$, para toda t.l. $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ se cumple que
  $[T]_{B'}^{B'} = M_B^{B'}[T]_B^B M_{B'}^B = M_B^{B'}[T]_B^B (M_B^{B'})^{-1}$

  Todas las representaciones matriciales de T con respecto a una misma base son semejantes entre sí.

- Si $B \sim A \Rightarrow A$ y B tienen los mismos autovalores con la misma multiplicidad algebraica y geométrica.

Demostración:

a. $B \sim A \Leftrightarrow B = Q\ A\ Q^{-1}$, entonces
$P_B(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{B}) = \det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{Q\ A\ Q^{-1}})$
$P_B(\lambda) = \det(\lambda Q Q^{-1} - Q\ A\ Q^{-1}) = \det(Q(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})\mathrm{Q}^{-1})$
$P_B(\lambda) = \det(Q)\det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A})\det(\mathrm{Q}^{-1})$
$P_B(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}) = \mathrm{P_A}(\lambda)$
Como A y B tienen el mismo polinomio característico entonces tienen los mismos autovalores con la misma multiplicidad algebraica.

b. Sea λ_0 autovalor de las matrices semejantes A y B, por cada v_0 autovector de A asociado al autovalor λ_0, $w_0 = Qv_0$ es autovector de B asociado a λ_0 y viceversa, por cada w_0 autovector de B asociado a λ_0 el vector $Q^{-1}w_0$ es autovector de A asociado a λ_0.
Si v_0 es autovector de A asociado a $\lambda_0 \Rightarrow Av_0 = \lambda_0 v_0$.

Como $B = Q\ A\ Q^{-1} \Rightarrow B\ Q = Q\ A \Rightarrow B\ Qv_0 = Q\ Av_0 \Rightarrow$ $B\ (Qv_0) = Q\ (\lambda_0 v_0) = \lambda_0 (Qv_0) \Rightarrow Qv_0$ es autovector de B asociado al autovalor λ_0.De la misma manera, si suponemos w_0 autovector de B asociado a λ_0 tenemos que

$$Bw_0 = Q\ A\ Q^{-1} w_0$$

$$\lambda_0 w_0 = Q\ A\ Q^{-1} w_0 \Rightarrow Q^{-1}(\lambda_0 w_0) = A\ (Q^{-1} w_0)$$
$$A\ (Q^{-1} w_0) = \lambda_0 (Q^{-1} w_0)$$

Por definición de autovector $(Q^{-1} w_0)$ es autovector de A asociado a λ_0. Por lo tanto hemos demostrado que la correspondencia de autovectores de A asociados a λ_0 es uno a uno con los autovectores de B asociados a λ_0, entonces la dimensión de los respectivos autoespacios es igual.Por lo tanto la multiplicidad geométrica de λ_0 como autovalor de A es igual a la multiplicidad geométrica de λ_0 como autovalor de B.

Vamos a demostrar ahora que si λ_0 es autovalor de A siempre se cumple que su multiplicidad algebraica, m_{λ_0}, es mayor igual que su multiplicidad geométrica ,μ_{λ_0}.

Si λ_0 es autovalor de $A \Rightarrow \boxed{\mu_{\lambda_0} \leq m_{\lambda_0}}$.

Demostración:

Sea A matriz de $n \times n$, y supongamos λ_0 autovalor de A con multiplicidad algebraica, $m_{\lambda_0} = m$ y multiplicidad geométrica, $\mu_{\lambda_0} = k$.

Como $m_{\lambda_0} = m \Rightarrow P(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^m Q(\lambda), Q(\lambda_0) \neq 0$.

Como $\mu_{\lambda_0} = k = \dim(S_{\lambda_0})$ entonces existe una base de S_{λ_0}, $B_{S_{\lambda_0}} = \{v_1, \ldots, v_k\}$, podemos extender esta base a una base de todo el espacio $\mathbb{K}^n$, $B = \{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$. Sea $Q = [v_1| \ldots |v_k|v_{k+1}| \ldots |v_n]$, claramente Q es inversible pues sus columnas forman una base de $\mathbb{K}^n$.

Calculemos

$$AQ = A[v_1|\dots|v_k|v_{k+1}|\dots|v_n]$$

Si explicitamos este producto columna a columna:

$$AQ = [Av_1|\dots|Av_k|Av_{k+1}|\dots|Av_n]$$

Reemplazamos $Av_i = \lambda_0 v_i$, para cada $i = 1, \dots, k$.

$$AQ = [\lambda_0 v_1|\dots|\lambda_0 v_k|w_1|\dots|w_{n-k}]$$

Si ahora multiplicamos por Q^{-1} m. a m, tenemos:

$$Q^{-1}AQ = Q^{-1}[\lambda_0 v_1|\lambda_0 v_2|\dots|\lambda_0 v_k|w_1|\dots|w_{n-k}]$$

Como $Q^{-1}Q = \mathrm{I} \Rightarrow \mathrm{Q^{-1}v_i = e_i}$, entonces:

$$Q^{-1}A\,Q = [\lambda_0 Q^{-1}v_1|\dots|\lambda_0 Q^{-1}v_k|Q^{-1}w_1|\dots|Q^{-1}w_{n-k}]$$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

$$Q^{-1}A\,Q = [\lambda_0 e_1|\dots|\lambda_0 e_k|u_1|\dots|u_{n-k}]$$

Conocemos algunas características del aspecto de esta matriz:

$$Q^{-1}A\,Q = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_0 & * & \dots & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & * & \dots & * \end{bmatrix}$$

Podemos expresar por bloques esta matriz de $n \times n$:

$$Q^{-1}A\,Q = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_0 \mathrm{I_k} & B \\ \hline 0 & E \end{array}\right]$$

Donde B es una matriz de $(k \times (n-k))$, E es una matriz de $(n-k) \times (n-k)$ A es semejante a la matriz $H = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_0 \mathrm{I_k} & B \\ \hline 0 & E \end{array}\right]$, pues cumple con la definición. Y por lo visto, sabemos que :

$$\boxed{\mathrm{P}_A(\lambda) = P_H(\lambda)} \; (6)$$

Veamos entonces qué podemos anticipar sobre el polinomio característico de H.

$$P_H(\lambda) = \det\left(\lambda \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I_k} & 0 \\ \hline 0 & \mathrm{I_{n-k}} \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c|c} \lambda_0 \mathrm{I_k} & B \\ \hline 0 & E \end{array}\right]\right)$$

$$P_H(\lambda) = \det\left(\left[\begin{array}{c|c} (\lambda-\lambda_0)\mathrm{I_k} & -B \\ \hline 0 & (\lambda \mathrm{I_{(n-k)}} - \mathrm{E}) \end{array}\right]\right)$$

$$P_H(\lambda) = \det\left((\lambda-\lambda_0)\mathrm{I_k}\right) \det\left(\lambda \mathrm{I_{(n-k)}} - \mathrm{E}\right)$$

$$P_H(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^k R(\lambda), \;\; \text{con } \mathrm{gr}(R) = n-k.$$

Entonces ahora podemos reemplazar en (6), lo que conocemos de los polinomios $P_A(\lambda)$ y $P_H(\lambda)$:

$$P_A(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^m Q(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^k R(\lambda) = P_H(\lambda) \; (7)$$

Recordemos que en esta igualdad $m = m_{\lambda_0}$, multiplicidad algebraica de λ_0, $k = \mu_{\lambda_0}$, multiplicidad geométrica de λ_0 y $Q(\lambda_0) \neq 0$. Esta condición de Q nos asegura que $(\lambda-\lambda_0)$ no divide al polinomio Q.

Entonces, de la igualdad (7):

$$(\lambda - \lambda_0)^m Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k R(\lambda)$$

Entonces $(\lambda - \lambda_0)^k$, divide a la expresión que está a la izquierda de la igualdad:
$(\lambda - \lambda_0)^k$ divide a $(\lambda - \lambda_0)^m Q(\lambda)$
y como $(\lambda - \lambda_0)$ no divide a $Q \Rightarrow (\lambda - \lambda_0)^k$ divide a $(\lambda - \lambda_0)^m$
Entonces: $k \leq m$.
O sea para cada autovalor de A se cumple:

$$\boxed{\mu_\lambda = \text{multip. geométrica} \leq m_\lambda = \text{multip. algebraica.}\checkmark}$$

Volvamos al problema de encontrar una **condición necesaria y suficiente** para poder asegurar que una matriz de $A \in K^{n \times n}$ es diagonalizable.

- Para poder asegurar que una matriz A es diagonalizable, tenemos que poder afirmar que existe una base de autovectores de K^n formada por autovectores de A.
- Ya sabemos que a autovalores distintos corresponden autovectores linealmente independientes. Como acabamos de demostrar que la multip geométrica de un autovalor es siempre menor o igual que su multiplicidad algebraica, sabemos que si un autovalor es raíz simple del polinomio característico obtendremos como autoespacio asociado a él un subespacio de dimensión 1.

- Entonces para construir una base de autovectores asociados a una matriz A, tendrá que cumplirse que si algún autovalor tiene multiplicidad algebraica mayor que uno podamos encontrar asociados a él tantos autovectores l.i. como su multiplicidad algebraica, esto es lo mismo que pedir que la dimensión de su autoespacio asociado sea igual a su multiplicidad algebraica. O sea se debe cumplir que **multiplicidad algebraica= multiplicidad geométrica** para cada autovalor de A.

Ejemplo:

Dada en $\mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & (\alpha-2) & 0 \\ 0 & (\alpha+2) & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Hallar <u>todos</u> los $\alpha \in \mathbb{R}$ para los cuales A resulta diagonalizable.

Resolución:

Empezamos, como siempre por calcular los autovalores de la matriz:

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I} - \mathrm{A}) = \begin{vmatrix} (\lambda-2) & (-\alpha+2) & 0 \\ 0 & (\lambda-\alpha-2) & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-3) \end{vmatrix}$$

$P_A(\lambda) = (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-\alpha-2) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lambda = 3,\ \text{o}\ \lambda = 2,\ \text{o}\ \lambda = \alpha + 2.$

Si $\alpha + 2 \neq 3$ y $\alpha + 2 \neq 2 \Rightarrow A$ tendrá tres autovalores distintos y , como a autovalores distintos corresponden autovectores l.i, la matriz resultará diagonalizable.

O sea ya sabemos qué pasa si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq 0$.
Podemos asegurar que:

$\boxed{\text{Si } \alpha \in \mathbb{R} - \{0,1\} \Rightarrow A \text{ resulta diagonalizable.}}$

Ahora entonces, tenemos que ver qué sucede si $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$.

$\boxed{\alpha = 0}$

Si $\alpha = 0 \Rightarrow$ ya sabemos que los autovalores de A serán $\lambda_1 = 2$ autovalor de multiplicidad algebraica 2 y $\lambda_2 = 3$ autovalor de multiplicidad 1.
Para saber si la matriz A resulta diagonalizable basta con calcular la multiplicidad geométrica de $\lambda_1 = 2$. Si su multiplicidad geométrica coincide con la algebraica será diagonalizable y sino no.

El autoespacio asociado a $\lambda_1 = 2$ es el subespacio de las soluciones del sistema homogéneo determinado por la matriz $2\mathrm{I} - \mathrm{A}$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow x_3 = 0 \text{ y } x_2 = 0 \Rightarrow \dim(S_\lambda = 2) = 1 \neq 2 =$$

Entonces si $\alpha = 0$ la matriz A **no es diagonalizable** pues la multiplicidad algebraica $\neq$ multiplicidad geométrica para $\lambda = 2$.

$\boxed{\alpha = 1}$

Si $\alpha = 1$ ya sabemos que los autovalores de A serán $\lambda_1 = 2$ de multiplicidad algebraica 1 y $\lambda_2 = 3$ de multiplicidad algebraica 2. Entonces, para saber si A es diagonalizable tenemos que chequear si coinciden la multiplicidad algebraica con la multiplicidad geométrica en este caso.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Analizamos las ecuaciones que definen al autoespacio $S_{\lambda=3}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz tiene rango 1, así que su nulo tiene dimensión 2. Entonces para $\lambda = 3$, en este caso, la multiplicidad geométrica = multiplicidad algebraica. Concluimos entonces que A es diagonalizable si $\alpha = 1$.

Entonces: $\boxed{A \textbf{ es diagonalizable } \forall \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}}$

Definición: Un subespacio $S \subseteq \mathbb{K}^n$ es un **subespacio invariante** de A (o **A-invariante**) si para todo vector $v \in S$ se cumple que $Av \in S$.

Comentarios:

a. Todo autoespacio de A es un subespacio A-invariante.

b. La recíproca no es cierto por supuesto.
Por ejemplo, tomemos la matriz B que analizamos en un ejemplo anterior.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

B es diagonalizable, sus autovalores son $\lambda = 5$, de multiplicidad algebraica y geométrica 2, y $\lambda = -1$ autovalor simple.

$$S_{\lambda=5} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$S_{\lambda=-1} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Claramente, $S_{\lambda=5}$ y $S_{\lambda=-1}$ son A-invariantes.
No son los únicos, tomemos por ejemplo el subespacio

$$S_1 = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow S_1 \text{ es A-invariante.}$$

Pues si $v \in S_1,\ v = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$Av = \alpha_1(-1) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2(5) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \in S_1.$$

Definición: Un subespacio $S \subseteq \mathbb{V}$ es un **subespacio invariante** de $T : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{V}$ transformación lineal (o **T-invariante**) si para todo vector $v \in S$ se cumple que $T(v) \in S$.

Comentarios:

a. El núcleo de una transformación lineal T es un subespacio T-invariante.

b. $\text{Im}(T)$ es un subespacio invariante de T.

c. En toda rotación de un plano alrededor de un eje ortogonal a él, el plano es un subespacio T-invariante.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires