[redacted]

95.10 | 75.12 | 95.13 | FIUBA // Primer Recuperatorio - 14/11/2019

Problema 1

Se desea calcular:

$$y = (a.a - b.b)^2$$

$$a = 2.71838 \pm 0.0002 \qquad b = 2.71818 \pm 0.0002$$

a) Evaluar el número de condición del problema y la cota de los errores absolutos inherentes propagados. Evaluar el término de estabilidad.

b) Proponer un problema alternativo equivalente que se vea menos afectado por los errores de redondeo justificando la propuesta.

c) Verificar experimentalmente lo analizado en a).

Problema 2

Dados los siguientes datos de medición del nivel de líquido en un tanque:

t_i	0.5	1	1.5
h_i	0.924	0.707	0.383

Se los desea representar mediante la función f(t) = cos(w*t). Hallar w aplicando la técnica de cuadrados mínimos, trabajando con 6 decimales de precisión. Resolver la ecuación no lineal resultante con un método cerrado.

Problema 3

El mal condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales ¿se debe a errores de truncamiento o errores de redondeo? Explicar el mecanismo que produce el mal condicionamiento. Utilizando Eliminación Gaussiana evaluar si el siguiente sistema se encuentra mal condicionado.

$$\begin{pmatrix} 400 & -200 \\ -800 & 401 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ -200 \end{pmatrix}$$

Problema 1:

6 (seis)

$$y = (a.a - b.b)^2$$

$$a = 2,71838 \pm 0,0002$$

$$b = 2,71818 \pm 0,0002$$

Producto

$$c = a.b$$

$$\Delta c = \frac{\partial c}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial c}{\partial b}\Delta b$$

$$\Delta c = b.\Delta a + a.\Delta b$$

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{b}{c}\Delta a + \frac{a}{c}\Delta b = \frac{\cancel{b}}{a\cancel{b}}\Delta a + \frac{\cancel{a}}{a.b}\Delta b$$

$$e_{r_c} = e_{r_a} + e_{r_b}$$

Resta

$$c = a - b$$

$$\Delta c = \frac{\partial c}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial c}{\partial b}\Delta b = 1.\Delta a - 1.\Delta b$$

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{\Delta a}{c} - 1.\frac{\Delta b}{c} = \frac{\Delta a}{a-b} - \frac{\Delta b}{a-b}$$

$$e_{r_c} = \frac{\Delta c}{c} = \Delta a.\frac{a}{a}.\frac{1}{(a-b)} - \Delta b.\frac{b}{b}.\frac{1}{(a-b)}$$

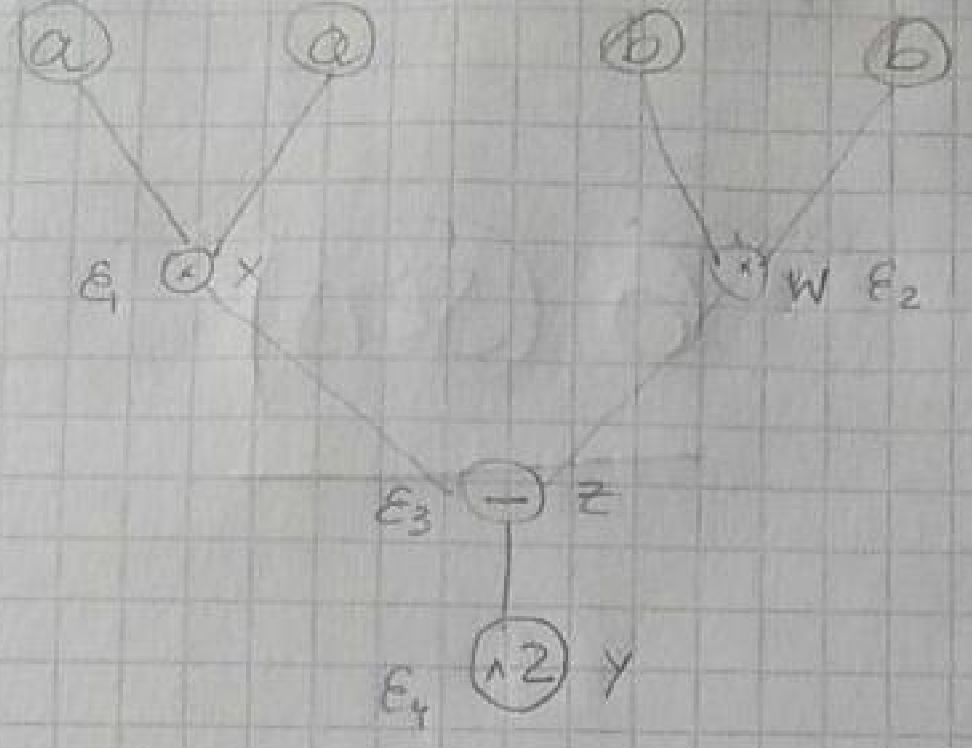
$$e_{r_c} = \frac{a}{(a-b)}e_{r_a} - \frac{b}{(a-b)}e_{r_b}$$

Potencia

$$c = a^2 \qquad \Delta c = \frac{\partial c}{\partial a}\Delta a = 2a.\Delta a$$

$$\frac{\Delta c}{c} = \frac{2a}{c}\Delta a = \frac{2\cancel{a}}{a^{\cancel{2}}}\Delta a = 2\frac{\Delta a}{a}$$

$$e_{r_c} = 2.e_{r_a}$$



$$y = (a.a - b.b)^2$$
$$y = (x - w)^2$$
$$y = (z)^2$$

$$e_{r_x} = e_{r_a} + e_{r_a} + \varepsilon_1 = 2\cdot(e_{r_a}) + \varepsilon_1$$
$$e_{r_w} = e_{r_b} + e_{r_b} + \varepsilon_2 = 2(e_{r_b}) + \varepsilon_2$$

$$e_{r_z} = \left(\frac{x}{x-w}\right)\cdot e_{r_x} - \left(\frac{w}{x-w}\right)\cdot e_{r_w} + \varepsilon_3$$

$$e_{r_z} = \left(\frac{a^2}{a^2-b^2}\right)\cdot(2.e_{r_a} + \varepsilon_1) - \left(\frac{b^2}{a^2-b^2}\right)(2.e_{r_b} + \varepsilon_2) + \varepsilon_3$$

$$e_{r_y} = 2\cdot e_{r_z} + \varepsilon_4$$

$$e_{r_y} = \left(\frac{2a^2}{a^2-b^2}\right)(2.e_{r_a} + \varepsilon_1) - \left(\frac{2b^2}{a^2-b^2}\right)(2.e_{r_b} + \varepsilon_2) + 2.\varepsilon_3 + \varepsilon_4$$

$$e_{r_y} = \underbrace{\left(\frac{2a^2}{a^2-b^2}\right)2.e_{r_a} - \left(\frac{2b^2}{a^2-b^2}\right)2.e_{r_b}}_{C_P} + \left(\frac{2a^2}{a^2-b^2}\right)\varepsilon_1 - \left(\frac{2b^2}{a^2-b^2}\right)\varepsilon_2 + 2.\varepsilon_3 + \varepsilon_4$$

$$\left(\frac{2a^2}{a^2-b^2}\right) = \frac{2\cdot(2{,}71838)^2}{(2{,}71838)^2 - (2{,}71818)^2} = 13592{,}40002$$

$$\left(\frac{2.b^2}{a^2-b^2}\right) = \frac{2\cdot(2{,}71818)^2}{(2{,}71838)^2 - (2{,}71818)^2} = 13590{,}40002$$

$$\Rightarrow C_P = (13592{,}4002)\cdot 2\cdot 0{,}0002 - (13590{,}40002)\cdot 2\cdot 0{,}0002$$

$C_P = 8\cdot 10^{-4} = 0{,}0008$ → es el número de condición del problema

$$T_E = \left(\frac{2a^2}{a^2-b^2}\right) - \left(\frac{2b^2}{a^2-b^2}\right) + 2 + 1$$

$$T_E = 13592{,}40002 - 13590{,}40002 + 2 + 1 = 5$$

Es el término de estabilidad.

NOTA

Calculo la cota de los errores absolutos inherentes propagados.

$$y = (a \cdot a - b \cdot b)^2$$

$a = 2{,}71838 \pm 0{,}0002$ $\qquad$ $b = 2{,}71818 \pm 0{,}0002$

$$\Delta y = \left|\frac{\partial y}{\partial a}\right| \cdot \Delta a + \left|\frac{\partial y}{\partial b}\right| \cdot \Delta b$$

$$\Delta y = \underbrace{|2(a \cdot a - b \cdot b) \cdot 2a| \, \Delta a}_{x} + \underbrace{|2 \cdot (a \cdot a - b \cdot b)(-2b)| \cdot \Delta b}_{z}$$

$$\Delta y = x + z$$

$$x = |4 \cdot [(2{,}71832)^2 - (2{,}71818)^2] \times 2{,}71838 \cdot| \cdot 0{,}0002 = 2{,}36458 \cdot 10^{-6}$$

$$y = |4 \cdot [(2{,}71838)^2 - (2{,}71818)^2] \times 2{,}71818| \cdot 0{,}0002 = 2{,}3644 \cdot 10^{-6}$$

$$\Delta y = 4{,}72 \times 10^{-6} = 0{,}00000472$$

Por convención expresamos la cota de errores absolutos con un solo decimal significativo.

Por lo que, la cota de los errores absolutos inherentes propagados es

$$\Delta y = 0{,}000005$$

b) $y = (a^2 - b^2)^2 = (a^2 - b^2)(a^2 - b^2)$

$$y = a^4 - b^2 a^2 - b^2 a^2 + b^4$$

$$\boxed{y = a^4 - 2b^2 a^2 + b^4}$$

$$\Delta y = \left|\frac{\partial y}{\partial a}\right| \Delta a + \left|\frac{\partial y}{\partial b}\right| \Delta b$$

$$\Delta y = |4a^3 - 4b^2 a| \Delta a + |4b^3 - 4a^2 b| \cdot \Delta b$$

$$\Delta y = 4|a^3 - b^2 a| \Delta a + 4|b^3 - 1a^2 b| \Delta b$$

$$\Delta y = 4[|(2{,}71838)^3 - (2{,}71818)^2 (2{,}71838)| \cdot 0{,}0002 + |(2{,}71818)^3 - (2{,}71838)^2 (2{,}71818)| \cdot 0{,}000$$

$$\Delta y = 4[5{,}91145 \times 10^{-7} + 5{,}911019 \times 10^{-7}]$$

$$\Delta y = 4{,}72 \times 10^{-6} \Rightarrow 0{,}000005 = \Delta y$$

La propuesta anterior no se ve menos afectado por los errores de redondeo

Debo buscar otra propuesta, en la cual se realicen menos operaciones, de manera tal que los errores de redondeo afecten menos.

NOTA

Problema 2

$$f(t) = \cos(w \times t)$$

t_i	h_i	$\cos(w \cdot t) = f(t)$
0,5	0,924	$\cos(w, 0{,}5)$
1	0,707	$\cos(w)$
1,5	0,383	$\cos(w \times 1{,}5)$

$$R^2 = (\cos(w \times 0{,}5) - 0{,}924)^2 + (\cos(w) - 0{,}707)^2 + (\cos(1{,}5w) - 0{,}383)^2$$ ✓

Debo minimizar $\underline{R^2} \Rightarrow$

$$\frac{dR^2}{dw} = 0 \Rightarrow$$ ✓

$$2[\cos(w \cdot 0{,}5) - 0{,}924](-\operatorname{sen}(0{,}5 \cdot w)) \cdot 0{,}5 + 2[\cos(w) - 0{,}707] \cdot (-\operatorname{sen}(w)) + 2 \cdot [\cos(1{,}5w) - 0{,}383] \times (-\operatorname{sen}(1{,}5w)) \cdot 1{,}5 = 0$$

$$0 = 0{,}924 \operatorname{sen}(0{,}5w) - \operatorname{sen}(0{,}5w) \cdot \cos(0{,}5w) - 2\operatorname{sen}(w)\cos(w) + 1{,}414 \operatorname{sen}(w) - 3\operatorname{sen}(1{,}5w) \cdot \cos(1{,}5w) + 1{,}149 \cdot \operatorname{sen}(1{,}5w)$$

Para resolver la ecuación no lineal anterior utilizo el método de la bisección:

$0 = f(w)$

Criterio de corte: $\varepsilon = |x^{k+1} - x^k| < 0{,}1$

Intervalo inicial $[a, b]$: $a = 0{,}5$; $f(a) < 0$; $b = 1$; $f(b) > 0$

$w_1 = 1 \Rightarrow$

$$f(1) = 0{,}442989 - 0{,}420735 - 0{,}909297 + 1{,}189839 - 0{,}211680 + 1{,}146122 = 1{,}237238 > 0$$

$$f(0{,}5) = 0{,}228601 - 0{,}239713 - 0{,}841471 + 0{,}677908 - 1{,}496242 + 0{,}783203 = -0{,}8877 < 0$$

$$x_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{1 + 0{,}5}{2} = 0{,}75 \to \varepsilon = 0{,}25 > 0{,}1$$

$$f(0{,}75) = 0{,}338436 - 0{,}340819 - 0{,}997495 + 0{,}963837 - 1{,}167110 + 1{,}036705 = -0{,}166446 < 0$$

$\Rightarrow$ el nuevo intervalo es $[0{,}75 ; 1]$

$$x_2 = \frac{0{,}75 + 1}{2} = 0{,}875 \to \varepsilon = 0{,}125 > 0{,}1$$

$$f(0{,}875) = 0{,}391477 - 0{,}383772 - 0{,}983986 + 1{,}085307 - 0{,}740880 + 1{,}110284 = 0{,}479 > 0$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{(0{,}75) + (0{,}875)}{2} = 0{,}8125$$

$$\varepsilon = |x^{k+1} - x^k| = 0{,}0625 < 0{,}1$$

$\Rightarrow \boxed{w = 0{,}875}$ por lo que la función que representa los datos es: $f(t) = \cos(0{,}875 \cdot t)$ ✓

Problema 3

El mal condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales se debe a errores de redondeo.

$$\begin{pmatrix} 400 & -200 \\ -800 & 401 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ -200 \end{pmatrix}$$

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = -\frac{800}{400} = -2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 400 & -200 & 200 \\ -800 & 401 & -200 \end{array}\right) \quad F_2 = F_2 - m_{21} \cdot F_1 = F_2 - (-2) F_1$$

$$F_2 = F_2 + 2 \cdot F_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 400 & -200 & 200 \\ 0 & 1 & 200 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow 400 \cdot x_1 - 200 \cdot x_2 = 200 \quad (I) \\ \Rightarrow 1 \cdot x_2 = 200 \Rightarrow x_2 = 200 \end{array}$$

en (I): $400 \cdot x_1 - 200 \cdot (200) = 200$

$$400 \cdot x_1 = 200 + 40000 = 40200$$

$$x_1 = 100{,}5$$

no se demuestra

¿K(A)?

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100{,}5 \\ 200 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 400 & -200 \\ -800 & 401 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100{,}5 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ -200 \end{pmatrix}$$

El sistema no se encuentra mal condicionado porque no hay errores de redondeo al resolverlo utilizando Eliminación Gaussiana.

El mecanismo que produce el mal condicionamiento de un sistema de ecuaciones lineales es:

Cuando una máquina resuelve un sistema de ecuaciones lineales, la misma posee una determinada cantidad de espacios denominados mantiza.

Por ejemplo, si la precisión de la máquina es de 4 decimales, y resuelvo el siguiente ejemplo

~

$$\begin{pmatrix} 4{,}15 & 2{,}03 \\ 6{,}02 & 1{,}05 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{6{,}02}{4{,}15} = 1{,}45060241$$

$$F_2 = F_2 - m_{21} F_1$$

como la precisión de la máquina es de 4 decimales, la máquina no almacena el número 1,45060241; solo almacena 1,4506.

Procediendo con la resolución del ejemplo, se arrastrarán errores de redondeo

Si un sistema de ecuaciones lineales se resuelve por un método indirecto, se pueden presentar errores de truncamiento porque esto implica el corte de un proceso de cálculo infinito cuando nos satisfaga.