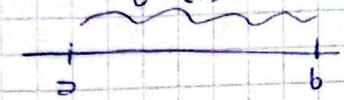
[Clase teórica. Diferencias Finitas para resolver problemas de valores de contorno.] 31/10/24

Son una derivada segunda y una función con
- la coordenada espacial
- la incognita
- la derivada primera de la incognita

$$y'' = F(x, y, y')$$

La ecuación es válida EN un dominio (unidimensional en nuestro caso).

¿$y(x)$?



$a$ $b$

$y(a) = \alpha$ ✓ $y(b) = \beta$ ✓

0 → Dato

N+1 → Dato.

o con una derivada primera

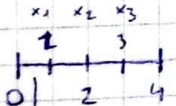
$y'(a) = \gamma$ ✓

Para esta clase de ecs necesitamos una ecuación de 2do orden, con dos condiciones
- por ejemplo dos datos.

Con más condiciones, mayor puede ser el orden de la ec. diferencial.

Agarramos el dominio y lo dividimos en partes discretas.

$x_1$ $x_2$ $x_3$



0 2 4

→ 4 partes } Partes = N + 1 → (por notación de un libro)
- N = 3

Los valores aproximados del medio se calculan con un sistema de ecuaciones.

h es el intervalo

18'

$x_i = x_0 + h \cdot i$

Paso. Diferencia entre puntos (cuanto menor paso, más precisión).

Así me quedan 3 incognitas y 3 ecuaciones

$$h = \frac{(b-a)}{N+1}$$

→ $N_0$ y $N+1$ conozco los valores.

Quiero descubrir $x_1, x_2, x_3$

Entonces no entra EDDP

20' P.V.C 1D Lineales

(1) $y'' = p(x)\, y' + q(x) \cdot y + r(x)$ $a \leq x \leq b$

Función lineal en $y'$ y en $y$.

¿Si es necesario multiplicamos todo por $-1$?

Si: $y(a) = \alpha$ , $y(b) = \beta$

23' condiciones $p(x), q(x), r(x)$. para existencia y unicidad de la solución. $\forall x \in [a,b]$

$q(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b]$

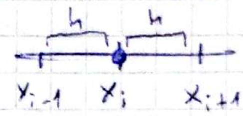
Operadores que aproximan las derivadas:

47' Derivada primera: $y'$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right| = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + O(h^2)$$

"Error de orden de $h^2$" → Ignorado si aproximo $y'$

30' . Operadores centrados




31/10/24. Parte 2.

9' Derivada segunda $y''$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right| = \frac{y(x_{i+1}) - 2 \cdot y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2)$$

"Error de orden 2"

10:50

(1) $y'' = p(x) \cdot y' + q(x) \cdot y + r(x)$

En Ejemplo: reemplazo derivadas por aproximaciones

$$\frac{y(x_{i+1}) - 2 \cdot y(x_i) + y(x_{i-1})}{h^2} = p(x_i) \frac{y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})}{2h} + q(x_i) \cdot y(x_i) + r(x_i) \underbrace{- \frac{h^2}{12}\left(2 \cdot p(x_i) \cdot y'''(\eta_i) - y^{(4)}(\xi_i)\right)}$$

Despreciamos este O de error ("oh"). ← y las y pasan a ser w

(operando un poco)

$$\frac{-w_{i+1} + 2w_i - w_{i-1}}{h^2} + p(x_i)\frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} + q(x_i) \cdot w_i = \underline{-r(x_i)}$$

Planteo el sist. de ec.

$w_0 = \alpha$
$w_{N+1} = \beta$
$i = 1, 2 \ldots N$

$\lambda$

Lo planteo así para dejar de este lado los datos

Planteo Factor común con $w_{i-1}$, $w_i$, $w_{i+1}$.

$$-\frac{w_{i+1}}{h^2} + \frac{w_{i+1}}{2h} \cdot p(x_i) + \frac{2w_i}{h^2} + q(x_i) \cdot w_i - \frac{w_{i-1}}{h^2} - \frac{w_{i-1}}{2h} \cdot p(x_i) = -r(x_i)$$

$\cdot h^2$ (para simplificar)

$$w_{i+1}\left(-1 + \frac{h}{2} \cdot p(x_i)\right) + 2w_i + h^2 \cdot w_i \cdot q(x) + w_{i-1} \cdot \left(-1 + \frac{h}{2} \cdot p(x_i)\right) = -r(x_i)$$

Tmb. cambio el signo de algunos paréntesis

$$w_{i+1}\left(+1 - \frac{h}{2} p(x_i)\right) + w_i\left(2 + h^2 \cdot q(x_i)\right) + w_{i-1}\left(+1 - \frac{h}{2} p(x_i)\right) = -h^2 r(x_i)$$

Entonces, si pienso el sistema de ecuaciones como

$$A \cdot w = b \qquad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{N-1} \\ w_N \end{pmatrix}$$

$$(\boxplus)(|) = (|)$$

Para la primera y última ecuación ya puedo aprovechar que conozco $w_0$ y $w_{N+1}$.

$$b = \begin{pmatrix} -h^2 \cdot r(x_i) + \left(1 - \frac{h}{2} \cdot p(x_i)\right) \cdot w_0 \\ -h^2 \cdot r(x_i) \\ -h^2 \cdot r(x_i) \\ -h^2 \cdot r(x_i) \\ \vdots \\ -h^2 \cdot r(x_i) + \left(1 - \frac{h}{2} \cdot p(x_i)\right) \cdot w_{i-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & \cdots \end{array} \\ \begin{array}{c} N=1 \\ N=2 \\ N=3 \\ \vdots \\ \end{array} & A = \begin{pmatrix} 2 + h^2 \cdot q(x_i) & 1 - \frac{h}{2} \cdot p(x_i) & 0 & 0 & 0 \\ 1 - \frac{h}{2} p(x_i) & 2 + h^2 \cdot q(x_i) & 1 - \frac{h}{2} \cdot p(x_i) & & \\ 0 & 1 - \frac{h}{2} \cdot p(x_i) & 2 + h^2 \cdot q(x_i) & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Matriz tridiagonal

$\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$

Escaneado con CamScanner

La matriz puede resolverse si $h < \frac{2}{L}$ Siendo L

$$L = \max_{a \le x \le b} |p(x)|$$

$h \geq \frac{2}{L}$ SOLO si $p(x) = 0$.

Ejemplo:

PVC: $5 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + 0{,}1 \cdot \frac{dy}{dx} - y + x = 0$ $\quad 0 \le x \le 0{,}5$

$y(0) = 1$

$y(0{,}5) = 2$

Si dividimos el dominio en N+1 partes
h nos queda:

$$h = \frac{0{,}5 - 0}{N+1}$$

Si despejamos para llegar a (1) $y'' = y' \cdot p(x) + y \cdot q(x) + r(x)$.

$$y'' = -\frac{0{,}1}{5} \cdot y' + \frac{y}{5} - \frac{x}{5} \longrightarrow p(x) = -0{,}02$$

$q(x) = 0{,}2$

$r(x) = -0{,}2\,x$

Son funciones. Varían a lo largo de x.

¿Tiene solución única? $h < \frac{2}{L} \longrightarrow L = \max|p(x)|$

$L = 0{,}02$

$\frac{2}{0{,}02} = 100$

$h < 100$

Si elegimos resolver con $N = 4$ $\quad h = \frac{0{,}5}{4+1} = 0{,}1$

$h < 100$ ✓

| $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 |

$x_1 = 0{,}1$

$x_2 = 0{,}2$

$x_3 = 0{,}3$

$x_4 = 0{,}4$

Planteo ~~Armar~~ sistema de ecuaciones

~~bien~~ $y'' = \dfrac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2}$ / $y' = \dfrac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}$

$$y'' = y' \cdot (-0{,}02) + y\,(0{,}2) + (-0{,}2)\,x$$

$$\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2} = -0{,}02\left(\frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}\right) + 0{,}2\,w_i - 0{,}2\,x_i$$

$\times h^2$

$$w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1} = \underbrace{-0.02 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot h}_{-0{,}001} \cdot w_{i+1} \underbrace{+\, 0{,}02 \cdot \tfrac{1}{2}\, h}_{+0{,}001} \cdot w_{i-1} + \underbrace{0{,}2\,h^2}_{0{,}002}\, w_i \underbrace{-\,0{,}2 \cdot h^2}_{-0{,}002} \cdot x_i$$

No transformar h si lo queremos genérico!

$$\boxed{1{,}001 \cdot w_{i+1} - 2{,}002 \cdot w_i + 1{,}001\, w_{i-1} = -0{,}002\, x_i}$$

Habiendo planteado la ecuación, planteo $Aw = B$

$$b = \begin{pmatrix} -0{,}002\, x_1 - 1{,}001 \cdot 1 \\ -0{,}002 \cdot x_2 \\ -0{,}002\, x_3 \\ -0{,}002\, x_4 - 1{,}001 \cdot 2 \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} -1{,}021 \\ -0{,}04 \\ -0{,}06 \\ -2{,}062 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -1{,}0012 \\ -0{,}0004 \\ -0{,}0006 \\ -2{,}0028 \end{pmatrix}$$

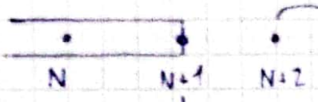
$$\begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -2{,}002 & 1{,}001 & & \\ 1{,}001 & -2{,}002 & 1{,}001 & \\ 0 & 1{,}001 & -2{,}002 & 1{,}001 \\ 0 & 0 & 1{,}001 & -2{,}002 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}0021 \\ -0{,}0004 \\ -0{,}0006 \\ -2{,}0028 \end{pmatrix}$$

Resuelvo el sistema de ecuaciones

23' ¿Y si la condición de borde es la derivada primera?

→ Nodo Fantasma.




$y'(b) = \gamma$ → Dato.

(2)

$y'(b) = \gamma = \frac{y_{N+2} - y_N}{2h}$ → Despejo para conseguir $y_{N+2}$ ; $y_{N+2} = 2.h.\gamma + y_n$

"N+1"

Entonces cuando plantee el sistema de ecuaciones de $1 \geq N+1$ (uno más que cuando era directo) (λ') en la última ecuación reemplazo $y_{N+2}$ por (2)

Ecuación genérica ya aproximada en la última línea (extra por ser dato derivado)

$$\frac{y_{(N+2)} - 2.y_{(N+1)} + y_{(N)}}{h^2} = P(x_{N+1})\left(\frac{y_{N+2} - y_N}{2h}\right) + Q(x_{N+1})\,y(x_{N+1}) + R(x_{N+1})$$

07-11-24
Repaso PVC
0' - 39'

$$y_{N+2} - 2.y_{N+1} + y_N = P_{N+1}\frac{h}{2}\left(y_{N+2} - y_N\right) + h^2.Q_{N+1}.y_{N+1} + R(x_{N+1}).h^2$$

$$-R_{x_{N+1}}.h^2 = \left(P_{N+1}.\frac{h}{2} - 1\right).y_{N+2} + \left(h^2.Q_{x_{N+1}} + 2\right).y_{N+1} + \left(-1 - P_{N+1}\frac{h}{2}\right)y_N$$

Reemplazo (2)

$$-R_{x_{N+1}}.h^2 = \left(P_{N+1}.\frac{h}{2} - 1\right)\left(2.h.\gamma + y_N\right) + \text{"} \quad \text{"}$$

$$\left[-R_{x_{N+1}}.h^2 - \left(P_{x_{N+1}}\frac{h}{2} - 1\right)2.h.\gamma = \left(h^2.Q + 2\right).y_{N+1} - 2.y_N\right]$$

Ahora con la ecuación fantasma extra, planteo una matriz con una fila y columna más. En la última fila $w_N$ será $-2$

Y el vector b en el último término tendrá

$$-h^2.R_{x_{N+1}} - \left(P_{x_{N+1}}\frac{h}{2} - 1\right).2.h.\gamma$$