Análisis Numérico (75.12, 95.04) Métodos Matematicos y Numericos (95.13)

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Métodos Directos

Temario:

- Triangulación Gaussiana
  - Sin pivoteo de filas
  - Con pivoteo de filas
- Normas matriciales
- Refinamiento Iterativo (Método Directo)
- Descomposición LU

Triangulación Gaussiana

El objetivo es convertir la matriz A en una matriz triangular superior para resolver x aplicando sustitución inversa.

$$Ax = b$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{vmatrix}$$

Triangulación Gaussiana: Ejemplo

El objetivo es convertir la matriz A en una matriz triangular superior para resolver x aplicando sustitución inversa.

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 2 \\ 10 \\ 44 \\ 190 \end{vmatrix}$$

$$[A, b] = \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 10 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 44 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 190 \end{array}\right|$$

Triangulación Gaussiana: Ejemplo

Calculo los multiplicadores para triangular la 1er columna:

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} \quad m_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} \quad m_{41} = \frac{a_{41}}{a_{11}}$$

$$[A,b] = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix}\middle|\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{matrix}\right|$$

$$E_2 = E_2 - m_{21}E_1 \quad E_3 = E_3 - m_{31}E_1 \quad E_4 = E_4 - m_{41}E_1$$

$$[A,b] = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \\ 1 & 16 & 81 & 256 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 2 \\ 10 \\ 44 \\ 190 \end{matrix}\right| \Rightarrow [A,b] = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 6 & 24 & 60 \\ 0 & 14 & 78 & 252 \end{matrix}\middle|\begin{matrix} 2 \\ 8 \\ 42 \\ 188 \end{matrix}\right|$$

Triangulación Gaussiana: Ejemplo

Calculo los multiplicadores para triangular la 2da columna:

$$m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} \quad m_{42} = \frac{a_{42}}{a_{22}}$$

$$[A, b] = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{matrix}\right|$$

$$E_3 = E_3 - m_{32}E_2 \qquad E_4 = E_4 - m_{42}E_2$$

$$[A, b] = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 6 & 24 & 60 \\ 0 & 14 & 78 & 252 \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} 2 \\ 8 \\ 42 \\ 188 \end{matrix}\right| \Rightarrow [A, b] = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 24 \\ 0 & 0 & 36 & 168 \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} 2 \\ 8 \\ 18 \\ 132 \end{matrix}\right|$$

Triangulación Gaussiana: Ejemplo

Calculo los multiplicadores para triangular la 3er columna:

$$m_{43} = \frac{a_{43}}{a_{33}}$$

$$[A,b] = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{matrix}\right|$$

$$E_4 = E_4 - m_{43}E_3$$

$$[A,b] = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 24 \\ 0 & 0 & 36 & 168 \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} 2 \\ 8 \\ 18 \\ 132 \end{matrix}\right| \Rightarrow [A,b] = \left|\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \\ 0 & 0 & 6 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 24 \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} 2 \\ 8 \\ 18 \\ 24 \end{matrix}\right|$$

Triangulación Gaussiana: Ejemplo

Aplico sustitución inversa:

$$[A, b] = \left|\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ (1) & 2 & 6 & 12 & 8 \\ (1) & (3) & 6 & 24 & 18 \\ (1) & (7) & (6) & 24 & 24 \end{array}\right|$$

$$x_4 = \frac{24}{24} = 1$$

$$x_3 = \frac{18 - 24x_4}{6} = -1$$

$$x_2 = \frac{8 - 12x_4 - 6x_3}{2} = 1$$

$$x_1 = \frac{2 - 4x_4 - 3x_3 - 2x_2}{1} = -1$$

Resolver por Gauss con y sin Pivoteo Parcial

Se tiene el siguiente SEL:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.0001 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Se desea resolver en una máquina que posee solo 3 dígitos de mantisa y redondeo por corte.

Sin Pivoteo Parcial

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.0001 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Aplico triangulación por Gauss: $E_3 = E_3 - m_{32}E_2$ $\quad m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{1}{0.0001} = 10000$

$$a'_{33} = a_{33} - m_{32}a_{23} = 1 - 10000 \ . \ 1 = -9999 \Rightarrow -9990$$

$$b'_3 = b_3 - m_{32}b_2 = 0 - 10000 \ . \ 1 = -10000$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.0001 & 1 \\ 0 & 0 & -9990 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -10000 \end{vmatrix}$$

$$x_3 = \frac{-10000}{-9990} = 1.001001001 \ldots \Rightarrow 1$$

$$x_2 = \frac{b_2 - x_3 \ a_{23}}{a_{22}} = \frac{1 - 1 \ . \ 1}{0.0001} = 0$$

$$x_1 = \frac{b_1 - x_3 \ a_{13} - x_2 \ a_{12}}{a_{11}} = \frac{1 - 1 \ . \ 1 - 0 \ . \ 1}{1} = 0$$

Con Pivoteo Parcial

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0.0001 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad E_2 \leftrightarrow E_3 \quad \Rightarrow \quad A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0.0001 & 1 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Aplico triangulación por Gauss: $E_3 = E_3 - m_{32}E_2$ $\quad m_{32} = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{0.0001}{1} = 0.0001$

$$a'_{33} = a_{33} - m_{32}a_{23} = 1 - 0.0001 \ . \ 1 = 0.9999 \Rightarrow 0.999$$

$$b'_3 = b_3 - m_{32}b_2 = 1 - 0.0001 \ . \ 0 = 1$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0.999 \end{vmatrix} \quad b = \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$x_3 = \frac{1}{0.999} = 1.001001001 \ldots \Rightarrow 1$$

$$x_2 = \frac{b_2 - x_3 \ a_{23}}{a_{22}} = \frac{0 - 1 \ . \ 1}{1} = -1$$

$$x_1 = \frac{b_1 - x_3 \ a_{13} - x_2 \ a_{12}}{a_{11}} = \frac{1 - 1 \ . \ 1 - (-1) \ . \ 1}{1} = 1$$

Conclusiones

1) Cual solución es Mejor? Porque?
2) Los multiplicadores grandes generan mas error de redondeo (mayor K(A))
3) Al pivotear se intenta llevar los números mas grandes a la diagonal (reduce los multiplicadores)

Normas Matriciales

$\|A\| > 0 \; si \; A \neq 0$

$\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$

$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

$\|A.B\| \leq \|A\|.\|B\|$

$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ norma p de un vector x

$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ norma infinito de la matriz A

$K(A) = \|A\|.\|A^{-1}\|$ número de condición de la matriz A

Refinamiento Iterativo

Se desea resolver el siguiente SEL con t=4 y redondeo por corte:

$$A = \begin{vmatrix} 31.69 & 14.31 \\ 13.11 & 5.890 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 45.00 \\ 19.00 \end{vmatrix}$$

$$Ax = b$$
$$b - Ax = r$$
$$A\hat{x} - Ax = r$$
$$A(\hat{x} - x) = r$$
$$A\delta_x = r$$

a) Resolver por Gauss sin pivoteo
b) Estimar el número de dígitos significativos de la solución obtenida
c) Efectuar el refinamiento iterativo de la solución
d) Repetir el punto c) sin utilizar doble precisión al evaluar el residuo
e) Resolver con toda la precisión de la calculadora y obtener conclusiones.

a) Resolver por Gauss sin pivoteo

$$A = \begin{vmatrix} 31.69 & 14.31 \\ 13.11 & 5.890 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 45.00 \\ 19.00 \end{vmatrix}$$

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{13.11}{31.69} = 0.4136$$

$$a'_{22} = a_{22} - m_{21} a_{12} = 5.890 - 0.4136\ .\ 14.31 = 5.890 - 5.918 = -0.028$$

$$b'_2 = b_2 - m_{21} b_1 = 19.00 - 0.4136\ .\ 45.00 = 19.00 - 18.61 = 0.3900$$

$$A = \begin{vmatrix} 31.69 & 14.31 \\ (0.4136) & -0.028 \end{vmatrix} \qquad b = \begin{vmatrix} 45.00 \\ 0.3900 \end{vmatrix}$$

$$x_2 = \frac{0.3900}{-0.028} = -13.92$$

$$x_1 = \frac{b_1 - x_2\ a_{12}}{a_{11}} = \frac{45.00 - (-13.92)\ .\ 14.31}{31.69} = \frac{45.00 + 199.1}{31.69} = \frac{244.1}{31.69} = 7.702$$

b) Estimo cantidad de dígitos con el residuo

$$r = b - A.x = \begin{vmatrix} 45.00 \\ 19.00 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 31.69 & 14.31 \\ 13.11 & 5.890 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 7.702 \\ -13.92 \end{vmatrix}$$

Efectúo este calculo con doble precisión por la cancelación de términos

$$r = \begin{vmatrix} 45.00 \\ 19.00 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 244.07638 - 199.1952 \\ 100.97322 - 81.9888 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.11882 \\ 0.01558 \end{vmatrix} \overset{t=4}{\Longrightarrow} \begin{vmatrix} 0.1188 \\ 0.01558 \end{vmatrix}$$

Ahora continuamos todo el cálculo con t=4. Resolvemos:

$$A.\delta x = r$$

$$\begin{vmatrix} 31.69 & 14.31 \\ 13.11 & 5.890 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.1188 \\ 0.01558 \end{vmatrix}$$

$$\delta x = \begin{vmatrix} -0.5370 \\ 1.198 \end{vmatrix}$$

c) Estimo cantidad de dígitos con el residuo

Antes de refinar verifico los dígitos de la solución:

$$K(A) \approx \frac{\|\delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} 10^t = \frac{1.198}{13.92} 10^4 \cong 860$$

$$p = \log_{10} K(A) \approx 2.9$$

$$q = t - p = 4 - 2.9 \approx 1.1$$

La solución tiene aproximadamente un dígito significativo. Es válido Refinar.
Calculo $x^{(1)}$:

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \delta x^{(0)} = \begin{vmatrix} 7.702 \\ -13.92 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -0.5370 \\ 1.198 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7.165 \\ -12.72 \end{vmatrix}$$

Esta solución tiene aproximadamente dos dígitos significativos (2q)

c) Efectúo el refinamiento iterativo

Refino nuevamente:

$$r^{(1)} = b - A.x^{(1)} = \begin{vmatrix} 45.00 \\ 19.00 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 31.69 & 14.31 \\ 13.11 & 5.890 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 7.165 \\ -12.72 \end{vmatrix}$$

Efectúo este calculo con doble precisión por la cancelación de términos

$$r^{(1)} = \begin{vmatrix} 45.00 \\ 19.00 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 227.05885 - 182.0232 \\ 93.93315 - 74.9208 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -0.03565 \\ -0.01235 \end{vmatrix} \overset{t=4}{\Longrightarrow} \begin{vmatrix} -0.03565 \\ -0.01235 \end{vmatrix}$$

Ahora continuamos todo el cálculo con t=4. Resolvemos:

$$A.\delta x^{(1)} = r^{(1)}$$

$$\delta x^{(1)} = \begin{vmatrix} 0.03739 \\ -0.08535 \end{vmatrix}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \delta x^{(1)} = \begin{vmatrix} 7.165 \\ -12.72 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.03739 \\ -0.08535 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7.202 \\ -12.80 \end{vmatrix}$$

Esta solución debería tener aproximadamente 3 dígitos significativos (3q)

d) Calcular el resuduo con t=4

$$r = b - A.x = \begin{vmatrix} 45.00 \\ 19.00 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 31.69 & 14.31 \\ 13.11 & 5.890 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 7.702 \\ -13.92 \end{vmatrix}$$

Ahora lo calculamos con t=4 para ver que ocurre

$$r = \begin{vmatrix} 45.00 \\ 19.00 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 244.0 - 199.1 \\ 100.9 - 81.98 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.1 \\ 0.08 \end{vmatrix}$$

$$A.\delta x = r$$

$$\begin{vmatrix} 31.69 & 14.31 \\ 13.11 & 5.890 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.1 \\ 0.08 \end{vmatrix}$$

$$\delta x = \begin{vmatrix} 0.6260 \\ -1.380 \end{vmatrix}$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \delta x^{(0)} = \begin{vmatrix} 7.702 \\ -13.92 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0.6260 \\ -1.380 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8.328 \\ -15.30 \end{vmatrix}$$

e) Conclusiones

La solución exacta es:

$$x = \begin{vmatrix} 7.200 \\ -12.80 \end{vmatrix}$$

- Se verifica que cada solución va ganando q dígitos significativos

$$x^{(0)} = \begin{vmatrix} 7.702 \\ -13.92 \end{vmatrix} \qquad x^{(1)} = \begin{vmatrix} 7.165 \\ -12.72 \end{vmatrix} \qquad x^{(2)} = \begin{vmatrix} 7.202 \\ -12.80 \end{vmatrix}$$

- La solución calculada en d) es peor que la original, dado que el residuo fue calculado con la misma precisión que la solución de la matriz
- El valor exacto de K(A) es 2169, lo cual parece muy distinto del valor estimado. Pero si tomamos $\log_{10}(2169) \approx 3.3$ Lo cual es una estimación aceptable.
- Se puede refinar iterativamente hasta alcanzar (casi) los t dígitos significativos

Descomposición LU

Se desea descomponer la matriz A tal que:

$$A = L.U$$

Siendo L una matriz triangular inferior (lower) y U una matriz triangular superior (upper).

$$L.U.x = b$$
$$L.y = b$$
$$U.x = y$$

Como calcular LU?

Se desea encontrar:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{vmatrix}$$

Elijo los $l_{ii} = 1$ (Doolittle)

$$a_{11} = l_{11}u_{11} \Rightarrow u_{11} = a_{11}$$
$$a_{12} = l_{11}u_{12} \Rightarrow u_{12} = a_{12}$$
$$a_{13} = l_{11}u_{13} \Rightarrow u_{13} = a_{13}$$

Como calcular LU?

Se desea encontrar:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{21} = l_{21}u_{11} \Rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = m_{21}$$

$$a_{22} = l_{21}u_{12} + l_{22}u_{22} \Rightarrow u_{22} = a_{22} - m_{21}a_{12}$$

$$a_{23} = l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} \Rightarrow u_{23} = a_{23} - m_{21}a_{13}$$

Como calcular LU?

Se desea encontrar:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{vmatrix}$$

$$a_{31} = l_{31}u_{11} \Rightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{a_{11}} = m_{31}$$

$$a_{32} = l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} \Rightarrow l_{32} = \frac{a_{32} - m_{31}a_{12}}{u_{22}} = m_{32}$$

$$a_{33} = l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33}u_{33} \Rightarrow u_{33} = a_{33} - m_{32}u_{23}$$

Como calcular LU?

Termina quedando:

$$L = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 \end{vmatrix} \qquad \mathrm{U} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{vmatrix}$$

Siendo U la matriz resultante de triangular por Gauss y L la matriz formada por los multiplicadores de dicho proceso.

Ejercicio

1° sin pivoteo

Sistema a resolver: $\left[\begin{array}{ccc|c} 2.15 & -0.924 & -1.29 & 1.22 \\ -4.12 & 2.29 & 0.294 & -3.56 \\ 1.01 & 0.872 & -3.25 & -0.972 \end{array}\right]$

Operación	Matriz
$f_2 \leftarrow f_2 - m_{21} f_1$ con $m_{21} = \frac{a21}{a11}$ $f_3 \leftarrow f_3 - m_{31} f_1$ con $m_{31} = \frac{a31}{a11}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 2.15 & -0.924 & -1.29 & 1.22 \\ [-1.92] & 0.516 & -2.18 & -1.22 \\ [0.470] & 1.31 & -2.64 & -1.55 \end{array}\right]$
$f_3 \leftarrow f_3 - m_{32} f_2$ con $m_{32} = \frac{a32}{a22}$	$\left[\begin{array}{ccc\|c} 2.15 & -0.924 & -1.29 & 1.22 \\ [-1.92] & 0.516 & -2.18 & -1.22 \\ [0.470] & [2.54] & 2.90 & 1.55 \end{array}\right]$

Ejercicio

$$U = \begin{bmatrix} 2.15 & -0.924 & -1.29 \\ 0 & 0.516 & -2.18 \\ 0 & 0 & 2.90 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1.92 & 1 & 0 \\ 0.470 & 2.54 & 1 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 1.22 \\ -1.22 \\ 1.55 \end{bmatrix}$$

Tenía SEL $A \cdot x = b$

Reemplazo $L \cdot U \cdot x = b$

Resolvemos $L \cdot y = b$ sustit directa

$U \cdot x = y$ sustit inversa

Ejercicio

$L \cdot y = b$: (si ya factoricé con A extendida, no hace falta calcular y)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1.92 & 1 & 0 \\ 0.470 & 2.54 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.22 \\ -3.56 \\ -0.972 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} y_1 = 1.22 \\ y_2 = -3.56 + 1.92 * y_1 = -1.22 \\ y_3 = -0.972 - 0.470 * y_1 - 2.54 * y_2 = 1.55 \end{cases}$$

$U \cdot x = y$:

$$\begin{bmatrix} 2.15 & -0.924 & -1.29 \\ 0 & 0.516 & -2.18 \\ 0 & 0 & 2.90 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.22 \\ -1.22 \\ 1.55 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = (1.22 + 0.924 * x_2 + 1.29 * x_3)/2.15 = 0.841 \\ x_2 = (-1.22 + 2.18 * x_3)/0.516 = -0.108 \\ x_3 = 1.55/2.90 = 0.534 \end{cases}$$

Solución sin pivoteo: $\begin{cases} x_1 = 0.841 \\ x_2 = -0.108 \\ x_3 = 0.534 \end{cases}$

Ejercicio

2° con pivoteo parcial: permutación de filas

Multiplicador: $m_{ij} = a_{ij} / a_{jj}$. Si el denominador (pivote) es pequeño → cancelación de términos.
Busco pivotes lo más grandes posibles intercambiando filas → permuta el término indep.

Ejercicio

Operación	Matriz
$f_1 \times f_2$	$\left[\begin{array}{ccc:c} -4.12 & 2.29 & 0.294 & -3.56 \\ 2.15 & -0.924 & -1.29 & 1.22 \\ 1.01 & 0.872 & -3.25 & -0.972 \end{array}\right]$
$f_2 \leftarrow f_2 - m_{21} f_1$ con $m_{21} = \frac{a21}{a11}$ $f_3 \leftarrow f_3 - m_{31} f_1$ con $m_{31} = \frac{a31}{a11}$	$\left[\begin{array}{ccc:c} -4.12 & 2.29 & 0.294 & -3.56 \\ [-0.522] & 0.271 & -1.14 & -0.638 \\ [-0.245] & 1.43 & -3.18 & -1.84 \end{array}\right]$
$f_2 \times f_3$	$\left[\begin{array}{ccc:c} -4.12 & 2.29 & 0.294 & -3.56 \\ [-0.245] & 1.43 & -3.18 & -1.84 \\ [-0.522] & 0.271 & -1.14 & -0.638 \end{array}\right]$
$f_3 \leftarrow f_3 - m_{32} f_2$ con $m_{32} = \frac{a32}{a22}$	$\left[\begin{array}{ccc:c} -4.12 & 2.29 & 0.294 & -3.56 \\ [-0.245] & 1.43 & -3.18 & -1.84 \\ [-0.522] & [0.190] & -0.536 & -0.288 \end{array}\right]$

Ejercicio

$$U=\begin{bmatrix}-4.12 & 2.29 & 0.294\\ 0 & 1.43 & -3.18\\ 0 & 0 & -0.536\end{bmatrix}\qquad L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -0.245 & 1 & 0\\ -0.522 & 0.190 & 1\end{bmatrix}\qquad y=\begin{bmatrix}-3.56\\ -1.84\\ -0.288\end{bmatrix}$$

$L\cdot y=b_P$: (si ya factoricé con A extendida, no hace falta calcular y)

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -0.245 & 1 & 0\\ -0.520 & 0.187 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3.56\\ -0.972\\ 1.22\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{cases}y_1=-3.56\\ y_2=-0.972+0.245*y_1=-1.84\\ y_3=1.22+0.520*y_1-0.187*y_2=-0.288\end{cases}$$

$U\cdot x=y$:

$$\begin{bmatrix}-4.12 & 2.29 & 0.294\\ 0 & 1.43 & -3.18\\ 0 & 0 & -0.536\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3.56\\ -1.84\\ -0.288\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{cases}x_1=(-3.56-2.29*x_2-0.294*x_3)/(-4.12)=0.851\\ x_2=(-1.84+3.18*x_3)/1.43=-0.0925\\ x_3=-0.288/(-0.536)=0.537\end{cases}$$

Solución con pivoteo parcial: $\begin{cases}x_1=0.851\\ x_2=-0.0925\\ x_3=0.537\end{cases}$

Ejercicio

Refinamiento iterativo (aplico al caso sin pivoteo)

Tengo el SEL $A \cdot x = b \longrightarrow b - A \cdot x = 0$

Pero $b - A \cdot \tilde{x} = r \neq 0$ (residuo)

Reemplazo $A \cdot x - A \cdot \tilde{x} = A \cdot (x - \tilde{x}) = A \cdot \delta\tilde{x} = r$ nuevo SEL

No hace falta resolver el SEL: para algo factoricé en L y U antes!

$$r = b - A \cdot \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.22 \\ -3.56 \\ -0.972 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2.15 & -0.924 & -1.29 \\ -4.12 & 2.29 & 0.294 \\ 1.01 & 0.872 & -3.25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.841 \\ -0.108 \\ 0.534 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000918 \\ -0.00476 \\ 0.00827 \end{bmatrix} \text{ (r con doble precisión)}$$

Ejercicio

$$A \cdot \delta\tilde{x} = L \cdot U \cdot \delta\tilde{x} = r \text{ con } U \cdot \delta\tilde{x} = \delta y$$

$L \cdot \delta y = r$: sustitución directa

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1.92 & 1 & 0 \\ 0.470 & 2.54 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta y_1 \\ \delta y_2 \\ \delta y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.000918 \\ -0.00476 \\ 0.00827 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \delta y_1 = 0.00918 \\ \delta y_2 = -0.00476 + 1.92 * \delta y_1 = -0.00300 \\ \delta y_3 = 0.00827 - 0.470 * \delta y_1 - 2.54 * \delta y_2 = 0.0155 \end{cases}$$

$U \cdot \delta\tilde{x} = \delta y$: sustitución inversa

$$\begin{bmatrix} 2.15 & -0.924 & -1.29 \\ 0 & 0.516 & -2.18 \\ 0 & 0 & 2.90 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta\tilde{x}_1 \\ \delta\tilde{x}_2 \\ \delta\tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.00918 \\ -0.00300 \\ 0.0155 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \delta\tilde{x}_1 = (0.00918 + 0.924 * \delta\tilde{x}_2 + 1.29 * \delta\tilde{x}_3) / 2.15 = 0.0108 \\ \delta\tilde{x}_2 = (-0.00300 + 2.18 * \delta\tilde{x}_3) / 0.516 = 0.0168 \\ \delta\tilde{x}_3 = 0.0155 / 2.90 = 0.0535 \end{cases}$$

Ejercicio

Solución refinada: $\begin{cases} \tilde{x}_1^{(1)} = \tilde{x}_1^{(0)} + \delta\tilde{x}_1^{(0)} = 0.852 \\ \tilde{x}_2^{(1)} = \tilde{x}_2^{(0)} + \delta\tilde{x}_2^{(0)} = -0.0914 \\ \tilde{x}_3^{(1)} = \tilde{x}_3^{(0)} + \delta\tilde{x}_3^{(0)} = 0.539 \end{cases}$

Estuvimos trabajando con precisión $t = 3$

Experimentalmente $K(A) = \dfrac{\|\delta\tilde{x}\|}{\|\tilde{x}\|} 10^t \approx 20$ (se calcula sólo una vez)

Calculo $p = \log_{10}(K(A)) \approx 1.3$

Dígitos de mejora $q = t - p \approx 1.7$

O sea que en cada refinamiento mejoraría 1 ó 2 dígitos. ¿Hasta cuándo? Hasta que el residuo se haga tan chico que se confunda con 0.

Si $q < 0$ no vale la pena refinar.

Consultas????