Verde: Semana 11

Guia 4

. Episodio 17, ep. 17 epilogo, episodio 18.

↓

Ecuaciones diferenciales. ¿Entra? No.

		1	
✓	■	2	A B C D
✓		M 3	
✓	■	N 4	
		N 5	
✓	■	6	
✓N	■	7	A B C ✓ D (i) E ✓
	■	8	
		9	

Teórica 15/11/2021 → hasta ejercicio 6

NOTA

Ejercicio 17) Página 12)

Factorizar la matriz en forma $Q.D.Q^{-1}$.

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Buscamos $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que
$\det(\lambda . I - A_1) = 0$

¿Matriz identidad?

$\det(\lambda . I - A_1) = 0 = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 - 1 = 0$

$(\lambda - 1)^2 = 1 \Rightarrow |\lambda - 1| = 1 \longrightarrow \lambda - 1 = 1 \quad , \quad \lambda - 1 = -1$

$\lambda = 2 \quad , \quad \lambda = 0$

¿Autovalores?

Ahora busquemos los autovectores de cada autovalor:

"Buscamos el conjunto de soluciones del sistema homogéneo determinado por la matriz que da reemplazar λ en $(\lambda . I - A_1)$.

- $S_{\lambda=2} = \text{Nul}(2.I - A_1)$ $\quad \begin{pmatrix} 2-1 & -1 \\ -1 & 2-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \longrightarrow$ Resolviendo matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow x_1 - x_2 = 0$
$x_1 = x_2$

$S_{\lambda=2} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

- $S_{\lambda=0}$ $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow -x_1 - x_2 = 0$, $x_1 = -x_2$ $\longrightarrow S_{\lambda=0} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

¿Existen Q (matriz inversible) y D ($\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$)
tal que $A_1 = Q.D.Q^{-1}$?

Las columnas de Q deben ser autovectores de A L.I.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ son L.I. entonces $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Si $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces $A_1 = Q.D.Q^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Esta factorización no es única.

Probemos con $A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$

Buscamos $\lambda \in \mathbb{R}$: $\det(\lambda.I - A_2) = 0$.

$$\det(\lambda.I - A_2) = \begin{vmatrix} (\lambda-2) & -3 \\ 3 & (\lambda-2) \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 + 9 = 0$$

$(\lambda-2)^2 = -9 \longrightarrow$ Imposible en $\mathbb{R}$. (si en $\mathbb{C}$, pero no nos interesa). $\longrightarrow$ No existen Q y D tal que $A = Q.D.Q^{-1}$.

Probemos con $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 \\ 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)^2 = 0 \longrightarrow \lambda = 2$$

$\text{Nul}(2.I - A_3)$, $S_{\lambda=2}$: $\begin{pmatrix} 2-2 & -3 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$-3x_2 = 0 \longrightarrow S_{\lambda=2} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

Tampoco logramos factorizar A como $A = Q.D.Q^{-1}$ pues no existen 2 ~~valores~~ autovectores L.I. para construir Q.

NOTA

Escaneado con CamScanner

HOJA N°
FECHA

1/11/23

Ejercicio de la práctica.

A) Hallar todos los $k \in \mathbb{R}$ para los cuales $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix}$ tiene como autovalor $\Rightarrow k = 1$.

B) Para los valores de k hallados, ~~calcular los autovectores.~~ decidir si A resultó diagonalizable.

$|A - 1.I| = 0$ ← Esto viene de $A.v = 1.v$ ← Esto tiene que ser compatible indeterminado para tener una solución no nula

Determinante

$A.v - v = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow$

$\lambda = 1$.

$A.v - I.v = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow (A - I).v = 0_{\mathbb{R}^3}$

$|A - I| = 0$

Opero entre filas para simplificar sacar el determinante

$$\det\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ k & 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \dots = 1\,(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1+k & -3 \end{vmatrix}$$

$$-(3 + 3(1+k)) = 0 \Leftrightarrow \boxed{k = -2}$$

B) $k = -2 \rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$$X_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -3 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -3 \\ 1-2\lambda & 0 & -1-\lambda(-1-\lambda) \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

Si tengo matrices semejantes la traza y son iguales.

NOTA

④

Sabemos que para $k=2$, $\lambda = 1$ es autovalor de A.

"Teorema fundamental del álgebra" $\rightarrow$ $\chi_A(\lambda)$ tiene tres raíces complejas.

$\lambda_1 = 1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$

$\chi_A(\lambda)$ es grado 3.

Traza de $(A) = 1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -1$ $(0+0+-1)$

$\det(A) = \lambda_2 . \lambda_3 = \cancel{AD} -3$

$$\circledast \ \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -3 \\ 1-2\lambda & 0 & -1-\lambda-\lambda^2 \\ -2 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -3 \\ 1-2\lambda & -1-\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} =$$

$$-\left(-\lambda(-1-\lambda-\lambda^2) - (-3)(1-2\lambda)\right) = -\lambda(1+\lambda+\lambda^2) + 3(1-2\lambda) =$$

$$-\lambda^3 - \lambda^2 + 5\lambda \cancel{+} 3$$

$\chi(A) = \lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3$ $\longrightarrow$ Por estandard hacemos que el primer término sea positivo.

$\chi_A(1) = 0.$

Ruffini "$(\lambda - 1) \cdot (\lambda^2 + 2\lambda - 3) = \cancel{0}$

$$\underbrace{(\lambda-1).(\lambda-1)}_{\text{Raíz doble}}.(\lambda+3)$$

Para $\lambda = 1$

$(A - (1)I).v = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdots \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow rg = 2$$

$\dim(Nul) = 1 \Rightarrow \dim(S_{\lambda=1}) = 1$

No es diagonalizable.

Para que sea diagonalizable la dimensión geométrica y algebraica debe ser la misma.

Segundo ejercicio. 1/11/23

Encontrar bases B de $\mathbb{R}^3$ / $[T]_B^B$ sea diagonal

$T: \mathbb{R}^3 \underset{①}{\rightarrow} \mathbb{R}^3$ / $T(v) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} . x$ ②

Debo definir una base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$
Para que sea diagonal

Matriz diagonal, es la matriz que tiene todos ceros afuera de la diagonal.

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$[T(v_1)]^B \Rightarrow T(v_1) = a\, v_1$

$T(v_2) = b . v_2$

$T(v_3) = c . v_3$

a, b, c podrían ser cero.

v_1) $T(v_1) = A . v_1 = a . v_1$ → a es autovalor de A asociado a v_1.

$T(v_2) = A . v_2 = b . v_2$ " "

$T(v_3) = A . v_3 = c\ v_3$ " "

v_1, v_2, v_3 no nulos porque pertenecen a una base.

"Esto solo tiene sentido cuando estamos saliendo y entrando al mismo subespacio". ①

Entonces tenemos que buscar autovalores y autovectores de esta matriz ②.

Busco $\{a, b, c\} = \underset{\text{sigma}}{\sigma(A)}$ y autovectores asociados.

$$\left| \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} - \lambda . I \right| = 0$$

$\lambda_1 = 3$ → A simple vista, (por alguna razón) :p

$|\lambda A - \lambda I|^3$ $|\lambda - 3| \cdot \begin{vmatrix} -5-\lambda & 0 \\ 7 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 3)(-5-\lambda)(2-\lambda) = 0$

$\lambda_1 = 3 = a$
$\lambda_2 = -5 = b$
$\lambda_3 = 2 = c$

Para $\lambda = 3 \rightarrow Nul(A - 3.I) = \begin{pmatrix} 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

Esto no podía dar de rg = 3.

Si la matriz es así, el $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ estaría en en nulo de la matriz

Por esto no necesito las otras dos columnas.

Así, elijo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (podría haber elegido otro múltiplo). ③

+ 1/4

Busquemos v_2, v_3.

$\lambda_2 = -5 \longrightarrow Nul(A + 5.I) = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \end{pmatrix} = gen\left\{\begin{pmatrix} -1/4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ Así 7 se anula con otro 7.

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ ③

$\lambda_3 = 2 \quad Nul(A - 2I) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

Elijo $v_3 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

NOTA

$T(v_1) = 3\, v_1$

$T(v_2) = -5\, v_2$

$T(v_3) = 2\, v_3$

$B = \{ v_1, v_2, v_3 \}$

Así, encontré una base tal que

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = [T]_E^E = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = [T]_B^B$$

$$[T]_E^E = \underbrace{C_B^E}_{P} \cdot [T]_B^B \cdot \underbrace{C_E^B}_{P^{-1}} \qquad P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

Para buscar matriz A: $A = P\,D\,N^{-1}$ ~ $A = Q\,P\,Q^{-1}$

HOJA N°

FECHA

4.2) $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ → Autovalores $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

A) Hallar base Nul (A), base Col (A)

• Nul(A) Ep 17) P. 10) Para cada λ (autovalor), los autovectores de A asociados a λ son

$(\lambda . I - A) . v = 0_{k^n} \iff v \in Nul(\lambda I - A)$.

↳ ¿Autoespacio de A asociado a λ_0? Pag. 11

Si autovalor $\lambda_1 = 0$ → ~~Nul(~~ $v \in Nul(\cancel{0} I - A)$

$Nul(-A)$ ↳ (¿lo mismo que $Nul(A)$? ¿No?) ↓ Pag. 19

¿Cómo sabemos que el Nul tiene $dim = 1$?

Autovectores de $\lambda_0 = 0$ es $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$Nul(A) = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

• Col(A) → ¿Dim?

~~$rg(A) + dim(Nul(A)) =$~~

$dim(Col(A)) + dim(Nul(A)) = dim(K^n)$ $\mathbb{R}^3$

$2 + 1 = 3$

Discord: $A . v_2 = \lambda_2 . v_2 \to \lambda_2 . v_2 \in Col(A) \to A . x$

$A . v_3 = \lambda_3 . v_3 \to \lambda_3 . v_3 \in Col(A)$

Así, v_2 y v_3 forman base de Col (A).

$Col(A) = gen\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$

NOTA

B) $A \cdot x = v_2 + v_3$

$A \cdot v_2 = \lambda_2 \cdot v_2$

$A \cdot \dfrac{v_2}{\lambda_2} = v_2$

Esto siempre se cumple si A es diagonalizable.

$$A \cdot \left(\frac{v_2}{\lambda_2} + \frac{v_3}{\lambda_3} \right) = v_2 + v_3$$

$A \cdot \dfrac{v_3}{\lambda_3} = v_3$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} / 2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} / 5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/5 \\ 7/5 \\ -7/10 \end{pmatrix} = x_p$$

C) Todas las soluciones = Solución particular + Solución(es) Homogenea (0).

$$\bar{X} = x_p + x_h \Rightarrow \left[\bar{X} = x_p + Nul(A) \right]$$

D) $A \cdot x = v_1 \longrightarrow$ No tiene solución $v_1 \notin Col(A)$.

(¿porque pertenece al $Nul(A)$?).

↳ No puede pertenecer a ambos ¿No?).

Más fácil decir que v_1 no es CL de v_2 y v_3.

Esto dice: ¿No pertenecer a ambos? Su vector no puede ambos Nul o Col.

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Recordando: Existe} \\ A \cdot x = b \\ \text{si } b \in Col(A). \end{array}}$$

↳ Ej 1) 21).

NOTA

4.3) A) Sabemos que sus autovectores son

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} \to \text{Son L.I., entonces son base de } \mathbb{R}^4.$$

A) Como existen autovectores de A que forman la base, A es diagonalizable.

$$\hookrightarrow \underbrace{P^{-1}}_{\text{Matriz inversible}} . A . P = \underbrace{\Lambda}_{\text{Diagonal}} = \text{diag}(0, -1, 2, 2)$$

Sale de los autovalores de los autovectores $(A - I)$ λ

B) $$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} + A\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\\+1\end{pmatrix}$$

Según Naho.

C) $$A.x = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \longrightarrow A\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \frac{A}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Solución particular

$$A\begin{pmatrix}1/2\\0\\1/2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \longrightarrow \overline{X} = \left\{\begin{pmatrix}1/2\\0\\1/2\\0\end{pmatrix} + \text{Nul}(A)\right\}$$

4.4) A) $A^6 \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = A^6 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + A^6 \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \underset{64}{\underbrace{2^6}} \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + 2^6 \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}64\\64\\64\\64\end{pmatrix}$ ✓

→ ¿Y qué pasa cuando tenes que poner le coeficientes a los autovectores? (para formar el vector deseado)

B) $A^7 \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} = \underset{-1}{\underbrace{A^7}} \begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} + \underset{128}{\underbrace{A^7}} \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}128\\-1\\128\\1\end{pmatrix}$

C) $A^4 . x = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

Teniendo en cuenta 4.3) de Nachoi

$A^4 \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = 2^4 \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow A \begin{pmatrix}1/16\\0\\1/16\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

$\bar{X} = \left\{ \begin{pmatrix}1/16\\0\\1/16\\0\end{pmatrix} + Nul(A) \right\}$

D) ¿Espectro de $A^{36} - A^{35}$?

↳ "Conjunto de todos los autovalores de A".

$\sigma(A) = \{0, -1, +2\}$

$\sigma(A^{36} - A^{35}) = \{0^{36} - 0^{36}, (-1)^{36} - (-1)^{35}, 2^{36} - 2^{35}\}$

$\{0, \underset{2}{\underbrace{1 - (-1)}}, 34359738370\}$

4.6) A) $A^2 - 3A + 2I = B$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

Primero, busquemos el espectro de B.

$\sigma(B) = \text{Det}(\text{Nul}(B - xI))$

$\begin{vmatrix} 3-x & 3 \\ 3 & 3-x \end{vmatrix} \longrightarrow (3-x)^2 - 9 = 0$

$\cancel{9} - 6x + x^2 - \cancel{9} = 0$

$\rightarrow x_1 = 0, \; x_2 = 6$

Autovalores de B. $\{0, 6\} \longleftarrow$

"B es diagonalizable" $\longrightarrow$ ¡Misma cantidad de elementos que dim $\mathbb{R}^2$!

Construyamos un ¿polinomio? : $P = x^2 - 3x + 2$

$P(A) = B$

Dijo: " $\sigma(P(A)) = P(\sigma(A)) \longrightarrow$ Si λ es autovalor de A, $P(\lambda)$ es autovalor de $P(A)$"

Si λ es autovalor de A $\Rightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \in \sigma(B)$

"y los ~~autovalores~~ autovectores asociados son los mismos.

$p(A) \cdot v = p(\lambda)\, v$ "

- $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1, \; \lambda_2 = 2$
- $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 6 \rightarrow \lambda_1 = -1, \; \lambda_2 = 4$

Con un elemento de cada uno construyo posibles espectros de A.

Posibles $\sigma(A)$: $\{1, -1\}, \{1, 4\}$

$\{2, -1\}, \{2, 4\}$

Ahora buscamos los autovectores de B.

$S_{\lambda=6}$ $\text{Nul}\begin{pmatrix} 3-6 & 3 \\ 3 & 3-6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot f_1 \Big\} \ldots x_1 = x_2 \rightarrow \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Subespacio del autovalor $\rightarrow$ Subespacio nulo del autovalor - Subespacio generado por los autovectores del ese autovalor.

Si $\lambda = 0$ $\quad Nul \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \dots \rightarrow 3x_1 + 3x_2 = 0 \rightarrow x_1 = -x_2.$

$$gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Autovectores de } B.} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}}_{\text{Matriz diagonal.}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Eligo cualquier λ_1, λ_2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 5/2 & -3/2 \\ -3/2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

B) $\rightarrow$ Ahora $\det(A) = -1$. $\rightarrow$ El espectro $\{1, -1\}$ = det = -1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Det} = -1 \quad ✓$$

C) Traza $(A) = 6$. $\rightarrow$ Traza: Suma de los elementos de la diagonal de la matriz.

$\hookrightarrow$ Debemos elegir el espectro $\{2, 4\}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow 3 + 3 = 6 \quad ✓$$

NOTA

4.7) $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,2 & -p \\ 0,5 & 0,6 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

b) hallar los p para los cuales la matriz es diagonalizable.

hacemos como que buscamos los autovalores, dejando el valor de p para poder igualar a 0.

$\sigma(A) = \text{Det}(\text{Nul} - \lambda . I) \rightarrow \begin{vmatrix} 1,2-\lambda & -p \\ 0,5 & 0,6-\lambda \end{vmatrix}$

$(1,2-\lambda)(0,6-\lambda) - (0,5)(-p) = 0.$

$0,72 - 1,2\lambda - 0,6\lambda + \lambda^2 + 0,5p = 0$

$\underbrace{\lambda^2}_{a} \underbrace{-1,8}_{b} . \lambda + \underbrace{0,72 + 0,5.p}_{c} = 0. \rightarrow$ Resolvente (a mano).

$$\left[x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} \right]$$

$$\frac{1,8 \pm \sqrt{(-1,8)^2 - 4.1.(0,72+0,5p)}}{2.1}$$

CA

$-4(0,72 + 0,5p)$

$-\frac{72}{25} - 2p$

$$\frac{1,8 \pm \sqrt{9/25 - 18/5\, p}}{\cancel{2}} = 0$$

T

Dg:

E) $p = 0{,}175 \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1{,}2 & -0{,}175 \\ 0{,}5 & 0{,}6 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1{,}2 - x & -0{,}175 \\ 0{,}5 & 0{,}6 - x \end{vmatrix} \longrightarrow (1{,}2 - x)(0{,}6 - x) + \frac{7}{80}$

$\frac{18}{25} - 1{,}2x - 0{,}6x + x^2 + \frac{7}{80} = 0$

$x^2 - 1{,}8x + \frac{323}{400} = 0 \longrightarrow x_1 = \frac{19}{20}$

$x_2 = 17/20$

$B = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 \\ 0 & 0{,}85 \end{pmatrix}$

$\lambda = 0{,}95)$ $\begin{pmatrix} 0{,}25 & -0{,}175 \\ 0{,}5 & -0{,}35 \end{pmatrix} - 2F_1 \Big\} \begin{pmatrix} 1 & 0{,}7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $x_1 + 0{,}7x_2 = 0$

$10x_1 = -7x_2$

$\begin{pmatrix} -7 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\lambda = 0{,}85)$ $\begin{pmatrix} 0{,}35 & -0{,}175 \\ 0{,}5 & -0{,}25 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 350 & -175 \\ 50 & -25 \end{pmatrix} - 7F_1 \Big\} \begin{pmatrix} 350x_1 & -175x_2 = 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$350x_1 = 175x_2$

$2x_1 = 1x_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/27 & 2/27 \\ 10/27 & 7/27 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = P \cdot B^n \cdot P^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 \\ 0 & 0{,}85 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -1/27 & 2/27 \\ 10/27 & 7/27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{27} \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0 \\ 0 & 0{,}85 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -x_0 + 2y_0 \\ 10x_0 + 7y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

~~Ej~~ 4.8)

$$A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Hallar el espectro de A $\sigma(A)$, comprobar que A es diagonalizable

$$\sigma(A) = \det(A - \lambda . I) \qquad \begin{vmatrix} 0,7-\lambda & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,5-\lambda & 0,2 \\ 0,2 & 0,4 & 0,4-\lambda \end{vmatrix} \begin{matrix} 0,7-\lambda & 0,2 \\ 0,3 & 0,5-\lambda \\ 0,2 & 0,4 \end{matrix}$$

$$+(0,7-\lambda)(0,5-\lambda)(0,4-\lambda) + (0,2)^3 + (0,1)(0,3)(0,4)$$
$$-(0,2)(0,5-\lambda)(0,1) - (0,4)(0,2)(0,7-\lambda) - (0,4-\lambda)(0,3)(0,2) \ldots$$

$$q, \ \det(A - \lambda . I) = -x^3 + 1,6x^2 - 0,67x + 0,07$$

$$= 0 \longrightarrow x_1 = 1$$

$$\cancel{x_2 = \frac{-5 + 3\sqrt{2}}{10} / 7}$$

$$x_2 = \frac{3 + \sqrt{2}}{10} \cong 0,441$$

$$x_3 = \frac{3 - \sqrt{2}}{10} \cong 0,158$$