# Álgebra II

**1.** Se considera el espacio euclídeo $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle x, y\rangle = y^T \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} x.$$

Hallar la matriz con respecto a la base canónica de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre el subespacio $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$ y calcular la distancia del vector $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T$ al subespacio $\mathbb{S}$.

**2.** Hallar la solución de la ecuación diferencial $y'' - 5y' + 6y = 2xe^{3x}$ tal que $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

**3.** Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por $\mathbb{S}_1 = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\right\}$ y $\mathbb{S}_2 = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\right\}$. Construir un subespacio $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{S}_2 \oplus \mathbb{T} = \{x \in \mathbb{R}_4 : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$. ¿Es único? Si no, construir otro.

**4.** Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

donde $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son las bases de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente, definidas por $\mathcal{B} = \{x^2+x+1, x+1, 1\}$ y $\mathcal{C} = \left\{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T\right\}$. Hallar $T^{-1}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T\right)$.

# Álgebra II

---

**1.** Sea $(\mathbb{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ el $\mathbb{R}$-espacio euclídeo respecto del cual el triángulo de vértices

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} -6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

es un triángulo equilátero de área $2\sqrt{3}$.

Calcular la distancia del vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ al subespacio $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$.

---

**2.** Sea $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ el $\mathbb{R}$-espacio euclídeo canónico. Hallar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^3$ equidistantes a los subespacios

$$\mathbb{S}_1 = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \text{ y } \mathbb{S}_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$$

y describirlo geométricamente.

---

**3.** Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz de rango 1 tal que $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \in \text{col}(A^T)$ y $A \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$. Hallar todos los vectores $b \in \mathbb{R}^3$ para los cuales $\hat{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$ sea una solución por cuadrados mínimos de la ecuación $Ax = b$.

---

**4.** Resolver la ecuación diferencial $y'' + 2y' - 3y = 0$ y hallar las condiciones iniciales para que $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

# ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Primer parcial (Diferida) | Segundo cuatrimestre – 2021
Duración: 3 horas. | 16/11/21 – 9:00 hs.

---

Apellido y Nombres:

---

Legajo:

---

**1.** Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ los subespacios de $\mathbb{R}_2[x]$ definidos por

$$\mathbb{S}_1 = \text{gen}\left\{2 + x,\, 2 - 2x + x^2\right\} \text{ y } \mathbb{S}_2 = \text{gen}\left\{3 + 2x + 2x^2,\, 1 + 2x^2\right\}.$$

Hallar una base de $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$.

---

**2.** Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -3 & 15 & 6 \\ 6 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

donde $\mathcal{B}$ y $\mathcal{E}$ son las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas por

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T\right\},$$
$$\mathcal{E} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\right\}.$$

Hallar el conjunto solución de la ecuación $T(x) = \begin{bmatrix} 13 & 12 & 18 \end{bmatrix}^T$.

---

**3.** Hallar la solución de la ecuación diferencial $y'' - 6y' + 25y = 0$ tal que $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

---

**4.** Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un $\mathbb{R}$-espacio euclídeo de dimensión 3 y sea

$$\mathcal{B} = \{u_i : i \in \mathbb{I}_3\} \subset \{u \in \mathbb{V} : \|u\| = 1\}$$

una base de $\mathbb{V}$ tal que $\|u_i + u_j\|^2 = 2$ y $\|u_i - u_j\|^2 = 2$ para cada $i \neq j$. Calcular la distancia del vector $2u_1 + u_2 + 2u_3$ al subespacio gen $\{u_1 - u_3, 2u_1 + 2u_2 - u_3\}$.

---

**5.** Hallar las soluciones por mínimos cuadrados de la ecuación

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

# ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Primer parcial
Duración: 3 horas.

Primer cuatrimestre – 2022
28/V/22 – 9:00 hs.

---

Apellido y Nombres:

---

Legajo:

---

Curso:

---

**1.** Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por

$$\mathbb{S}_1 = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right\},$$
$$\mathbb{S}_2 = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T\right\}.$$

Construir un subespacio $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{S}_2 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$. ¿Es único? Si la respuesta es negativa, construir otro.

---

**2.** Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix},$$

donde $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son las bases de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente, definidas por

$$\mathcal{B} = \left\{1 + x, 1 - x, 1 - x + x^2\right\},$$
$$\mathcal{C} = \left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\right\}.$$

Hallar el conjunto solución de la ecuación $T(p) = \begin{bmatrix}6 & 6 & 6\end{bmatrix}^T$.

---

**3.** Sea $\Sigma$ la simetría de $\mathbb{R}^3$ con respecto al plano $\left\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\right\}$ en la dirección de la recta generada por $\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}^T$. Hallar la imagen por $\Sigma$ del subespacio $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}$.

---

**4.** Se considera el espacio euclídeo $\left(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$ con el producto interno definido por

$$\langle x, y\rangle = y^T \begin{bmatrix}3 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix} x.$$

Calcular la distancia del vector $\begin{bmatrix}3 & 3 & 1\end{bmatrix}^T$ al subespacio $\mathbb{S} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\right\}$.

---

**5.** Usando la técnica de mínimos cuadrados, ajustar los siguientes datos

| $x$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | -4 | -1 | 2 | 4 | 5 |

mediante una recta $y = mx + b$.

# ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Segundo recuperatorio
Duración: 3 horas.

Primer cuatrimestre – 2022
13/VII/22 – 9:00 hs.

---

Apellido y Nombres:

Legajo:

Curso:

---

**1.** Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por

$$\mathbb{S}_1 = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \right\},$$
$$\mathbb{S}_2 = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \right\}.$$

Construir un subespacio $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{S}_2 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{R}^4$. ¿Es único? Si la respuesta es negativa, construir otro.

---

**2.** Sea $\mathbb{V} = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A^T = A \right\}$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de la matrices simétricas de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ y sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

donde $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son las bases de $\mathbb{V}$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente, definidas por

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$
$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}.$$

Hallar el conjunto solución de la ecuación $T(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

---

**3.** Sea $\Sigma$ la simetría de $\mathbb{R}^3$ con respecto al plano $\left\{ x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \right\}$ en la dirección de la recta generada por $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$. Hallar la imagen por $\Sigma$ del subespacio $\left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0 \right\}$.

---

**4.** Se considera el espacio euclídeo $\left(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$ con el producto interno definido por

$$\langle x, y \rangle = y^T \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x.$$

Calcular la distancia del vector $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}^T$ al subespacio $\mathbb{S} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0 \right\}$.

---

**5.** Usando la técnica de mínimos cuadrados, ajustar los siguientes datos

| $x$ | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | -4 | -1 | 2 | 4 | 5 |

mediante una recta $y = mx + b$.

# ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Primer parcial — Segundo cuatrimestre – 2022

Duración: 3 horas. — 29/X/22 – 9:00 hs.

Apellido y Nombres:

Legajo:

Curso:

**1.** Sean $\mathbb{S}$, $\mathbb{T}$ y $\mathbb{U}$ los subespacios de $\mathbb{R}_4[x]$ definidos por

$$\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(3) = p(2) = p(1) = 0\},$$
$$\mathbb{T} = \{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(6) = p(3) = p(1) = 0\},$$
$$\mathbb{U} = \left\{p \in \mathbb{R}_4[x] : p(0) + p'(0) + \frac{1}{2!}p''(0) + \frac{1}{3!}p'''(0) + \frac{1}{4!}p''''(0) = 0\right\}.$$

Construir un base de $\mathbb{U}$ que contenga a una base de $\mathbb{T}$ y a una base de $\mathbb{S}$. ¿Es única? Si la respuesta es negativa, construir otra.

**2.** Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ la transformación lineal definida por

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix},$$

donde $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son las bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}_2[x]$, respectivamente, definidas por

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -3 & 2 & 6 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \end{bmatrix}^T \right\},$$
$$\mathcal{C} = \left\{ \frac{1}{2}x(x-1), -(x+1)(x-1), \frac{1}{2}(x+1)x \right\}.$$

Comprobar que el polinomio $6 + 3x$ pertenece a la imagen de $T$ y determinar la preimagen por $T$ del subespacio $\text{gen}\{6 + 3x\}$.

**3.** Sea $\Pi$ la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $\left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\right\}$ en la dirección de la recta generada por $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$. Hallar la imagen por $\Pi$ del subespacio $\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0\}$.

**4.** En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico se considera la matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ definida por

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & -6 & 0 \\ 6 & 8 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcular la distancia del vector $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ al subespacio $\text{col}(A)$.

**5.** Usando la técnica de mínimos cuadrados, ajustar los siguientes datos

| $x$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4 | 2 | 1 | 3 | 5 |

mediante una parábola $y = ax^2 + bx + c$.

# ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Segundo recuperatorio
Duración: 3 horas.

Segundo cuatrimestre – 2022
14/XII/22 – 9:00 hs.

---

Apellido y Nombres:

---

Legajo:

---

Curso:

---

**1.** Sean $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ y $\mathbb{T} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T\right\}$. Hallar, si es posible, una base de $\mathbb{R}^4$ que contenga, a la vez, a una base de $\mathbb{S}$ y a una base de $\mathbb{T}$.

---

**2.** Sea $\Pi$ la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0\}$ en la dirección de la recta generada por $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$. Hallar la imagen por $\Pi$ del subespacio $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$.

---

**3.** Hallar la solución de la ecuación diferencial $y'' + 9y = 5\cos(3x)$ tal que $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

---

**4.** En $\mathbb{R}^2$ con el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definido por

$$\langle x, y \rangle = y^T \begin{bmatrix}2 & 1 \\ 1 & 4\end{bmatrix} x$$

se considera $\Pi$ la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^2$ sobre el subespacio $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 + 5x_2 = 0\}$. Hallar todos los $x \in \mathbb{R}^2$ tales que $\Pi(x) = \begin{bmatrix}-5 & 3\end{bmatrix}^T$ cuya distancia al subespacio $\mathbb{S}$ sea igual a 1.

---

**5.** Se considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}.$$

Hallar todas las soluciones por cuadrados mínimos de la ecuación $Ax = \begin{bmatrix}2 & 2 & 2\end{bmatrix}^T$ y determinar la de norma mínima.