02.08.2023

1 Sea $(\mathbb{R}_2[x], \langle \cdot, \cdot \rangle)$ con el producto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\,q(x)\,dx$$

Hallar el polinomio de

$$S = \text{gen}\{3x^2 - 2x,\ 2x^2 + 3x\}$$

más cercano a $p(x) = 3x^2 - 5x + 3$.

02.08.2023

2 Determinar el conjunto de todos los $p \in \mathbb{R}$: $A = \begin{pmatrix} 3/2 & -p \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

es diagonalizable.

Ejercicio 3:

Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ la matriz simétrica tal que:

- $\text{Nul}(A - I) = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0\}$ y
- $\text{Tr}(A) = 2$

Hallar todos los $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $\lim\limits_{k\to\infty} A^k x = (0\ -2\ 1)^T$

Ejercicio 4:

Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ la matriz de rango 2 tal que

- $(2\ -6\ 3) \in \text{Nul}(A)$ y
- $A\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 & 0 \\ 0 & 2/9 \end{pmatrix}$; (1)

Hallar todas las soluciones por cuadrados mínimos de la ecuación $Ax = (1\ -1\ 1)^T$ y determinar la de norma mínima.

Ejercicio 5:

Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times3}$ tal que:

- $(-1\ 2\ 2)^T \in \text{Nul}(A)$
- $A(2\ -1\ 2)^T = (9\ \ 12)^T$
- $\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = 12$

09.08.2023

3er

1/ En $\mathbb{R}^3$ con el pie se considera

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & -3 & -6 & 0 \\ 8 & 8 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular $dist(v, \text{Col}\, A)$, $v = (-1\ -1\ \ 1)^T$.

2/ Hallar, si existe, una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\text{traza}(A) = -6$ y $A^2 + 3A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3:

Hallar la matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que:

- $\{(1\ 1\ 0)^T; (2\ 1\ 2)^T\} \subset \text{Nul}(A - \mathbb{I})$ y
- $\text{Tr}(A) = 1$

Ejercicio 4:

Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por:

$$A = \frac{2}{9}\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}(2\ -6\ \ 3) + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}(6\ \ 3\ \ 9)\ ; \quad (1)$$

Hallar todas las soluciones por cuadrados mínimos de la Ec. $Ax = (1\ 0\ -1)^T$ y determinar la de norma mínima

5/ Sea $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $S = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0\}$ en la dirección de la recta $T = \text{gen}\{(1\ 1\ 1)^T\}$.

Hallar y graficar la imagen por π de la esfera unitaria de $\mathbb{R}^3$.

EVALUACIÓN INTEGRADORA

13.12.2023

EJERCICIO 1

En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico se considera la matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ definida por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Calcular la distancia del vector $[1\ 1\ 4]^T$ al subespacio $\text{Col}(A)$

---

2. Hallar, si existe, una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que traza$(A) = -1$ y

$$A^2 + 5A = \begin{bmatrix} 18 & -12 \\ 24 & -18 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 3:

Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $(1\ 0\ -2)^T$ y $(-1\ 1\ 0)^T$ sean autovectores de A y $\det(A) = -2$ y $\text{Tr}(A) = 0$

EJERCICIO 4

Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 3 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

Hallar la pseudoinversa de Moore-Penrose de A

Ejercicio 5:

Sea $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} (4\ -7\ 4) + \begin{pmatrix} -9 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} (-1\ 4\ 8)\ ; \qquad (1)$$

Hallar, entre todos los $x \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen $\|x\| = 1$, aquellos que maximizan $\|T(x)\|$ y determinar

$$\max_{\|x\|=1} \|T(x)\|$$

20.12.2023

Ejercicio 1

Sea $\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la T.L. definida por $\Pi(x) = Ax$, donde:

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}(2\ 1\ 2)$$

comprobar que Π es una proyección y hallar una base B tal que:

$$[\Pi]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$A = \begin{vmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}B$$

Calcular $\lim\limits_{n\to\infty} A^n \begin{vmatrix} 6 \\ 7 \\ 6 \end{vmatrix}$

Ejercicio 3:

Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz simétrica que posee las siguientes propiedades: $\sigma(A) = \{1; 2\}$ y $Nul(A - \mathbb{I}) = gen\{(1\ 0\ {-1})^T\}$.

Calcular $A^2(1\ 1\ 1)^T$

4 Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

a) Hallar todas las soluciones por cuadrados mínimos de $Ax = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{vmatrix}$ y

b) Determinar la de norma mínima.

EJERCICIO 5

Sea $\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proyección sobre el plano $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_2 = 0\}$ en la dirección de la recta gen$\{[2\ 2\ 1]^T\}$. Hallar y graficar la imagen por Π de la esfera unitaria de $\mathbb{R}^3$

/

ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Evaluación integradora
Duración: 3 horas.

Primer cuatrimestre – 2023
16/VIII/23 – 9:00 hs.

Apellido y Nombres:

Legajo:

Curso:

1. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son las bases de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente, definidas por

$$\mathcal{B} = \left\{1 + x^2, 1 + x, x + x^2\right\},$$
$$\mathcal{C} = \left\{\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right\}.$$

Hallar la preimagen por T del vector $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$.

2. Hallar, si existe, una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\det(A) = -1$ y

$$A^2 - 3A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Hallar $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$.

4. Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\end{bmatrix}^T$ son autovectores de A, $\det(A) = 18$, $\operatorname{traza}(A) = 8$, y $\sigma(A) \subset (0, +\infty)$.

5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación definida por $T(x) = Ax$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hallar y graficar la imagen por T de la esfera unitaria.

ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Evaluación integradora
Duración: 3 horas.

Primer cuatrimestre – 2023
12/VII/23 – 9:00 hs.

Apellido y Nombres:

Legajo:

Curso:

1. Sea Π la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ en la dirección de la recta generada por $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Hallar la imagen por Π del triángulo de vértices e_1, e_2, e_3.

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Hallar todas las soluciones de la ecuación $\lim_{k\to\infty} A^k x = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T$.

3. Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que traza$(A) = 0$, $\begin{bmatrix} 8 & -1 & 4 \end{bmatrix}^T \in \text{nul}(A - I)$ y $\begin{bmatrix} -1 & 8 & 4 \end{bmatrix}^T \in \text{nul}(A + I)$.

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la isometría definida por $T(x) = Ux$, donde U es la matriz ortogonal definida por

$$U = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 1 & -4 \\ 1 & -8 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Comprobar que T es una rotación, determinar su eje y su ángulo de rotación.

5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$, donde

$$A = \frac{2}{9}\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Hallar y graficar la imagen por T de la esfera unitaria de $\mathbb{R}^3$.

ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Evaluación integradora
Duración: 3 horas.

Primer cuatrimestre – 2023
5/VII/23 – 9:00 hs.

Apellido y Nombres:

Legajo:

Curso:

1. En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico se considera el subespacio

$$\mathbb{S} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\right\}.$$

Sea $\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{S}$. Hallar todos los $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $\Pi(x) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}^T$ cuya distancia al origen sea igual a 10.

2. Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\operatorname{traza}(A) = 3$ y

$$A^2 + 2A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -7 & 10 \end{bmatrix}.$$

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz simétrica tal que $\operatorname{nul}(A - I) = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\right\}$ y $\operatorname{traza}(A) = \frac{5}{2}$. Hallar $\lim\limits_{k\to\infty} A^k \begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}^T$.

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la isometría definida por $T(x) = Ux$, donde U es la matriz ortogonal definida por

$$U = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -8 & -4 \\ -8 & 1 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Comprobar que T es una simetría ortogonal y determinar el subespacio respecto del cual se realiza la simetría.

5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$, donde

$$A = \frac{2}{9}\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 8 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 4 & -7 \end{bmatrix}.$$

Hallar entre todos los $x \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen $\|x\| = 1$, aquellos que minimizan $\|T(x)\|$ y determinar el valor $\min\limits_{\|x\|=1} \|T(x)\|$.