ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Evaluación integradora
Duración: 3 horas.

Primer cuatrimestre – 2023
12/VII/23 – 9:00 hs.

Apellido y Nombres:

Legajo:

Curso:

---

1. Sea Π la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ en la dirección de la recta generada por $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. Sea $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Hallar la imagen por Π del triángulo de vértices e_1, e_2, e_3.

---

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Hallar todas las soluciones de la ecuación $\lim_{k\to\infty} A^k x = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T$.

---

3. Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que traza$(A) = 0$, $\begin{bmatrix} 8 & -1 & 4 \end{bmatrix}^T \in \text{nul}(A - I)$ y $\begin{bmatrix} -1 & 8 & 4 \end{bmatrix}^T \in \text{nul}(A + I)$.

---

4. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la isometría definida por $T(x) = Ux$, donde U es la matriz ortogonal definida por

$$U = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 1 & -4 \\ 1 & -8 & -4 \\ -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Comprobar que T es una rotación, determinar su eje y su ángulo de rotación.

---

5. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$, donde

$$A = \frac{2}{9}\begin{bmatrix} -1 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Hallar y graficar la imagen por T de la esfera unitaria de $\mathbb{R}^3$.