

Episodio 8

Intersección y Suma de Subespacios.

Álgebra Lineal
mfiuba@gmail.com

Departamento de Matemática
FIUBA

11 de octubre de 2020

Vamos a empezar por ver qué pasa si realizamos con subespacios las operaciones más elementales entre conjuntos que son la intersección y la unión.

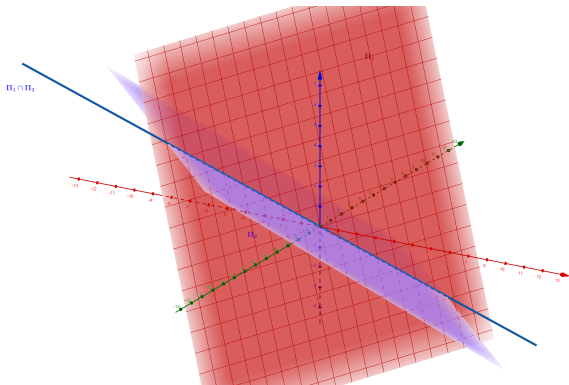
Recordemos, por las dudas: Si A y B son dos conjuntos cualesquiera:

- ▶ $A \cap B = \{x/x \in A \text{ y } x \in B\}$
- ▶ $A \cup B = \{x/x \in A \text{ o } x \in B\}$

¿Qué pasa cuando los conjuntos son subespacios?

¿Obtenemos otro subespacio al calcular el conjunto que resulta de intersectar dos subespacios o de unir dos subespacios?

Para ejemplificar, miremos el caso particular de buscar en \mathbb{R}^3 la intersección de dos planos que pasan por el origen.



En \mathbb{R}^3 , la intersección de dos planos, que contienen al origen, es una recta que pasa por el origen.

Para lo que sigue $S_1, S_2 \subset \mathbb{V}$ son subespacios de \mathbb{V} .

Observaciones:

Si $S_1, S_2 \subset \mathbb{V}$ son subespacios de $\mathbb{V} \Rightarrow S_1 \cap S_2$ es un subespacio de \mathbb{V} . (Sólo tenemos que demostrar que se cumplen las tres condiciones.)

Como S_1 y S_2 son subespacios

$$0_{\mathbb{V}} \in S_1 \text{ y } 0_{\mathbb{V}} \in S_2 \Rightarrow 0_{\mathbb{V}} \in S_1 \cap S_2. \quad \checkmark$$

Si u_1 y $u_2 \in S_1 \cap S_2$ esto quiere decir que:

$u_1, u_2 \in S_1 \Rightarrow u_1 + u_2 \in S_1$, porque S_1 es subespacio.

$u_1, u_2 \in S_2 \Rightarrow u_1 + u_2 \in S_2$, porque S_2 es subespacio.

Por lo tanto $u_1 + u_2 \in S_1 \cap S_2$. \checkmark

Por último, si $u \in S_1 \cap S_2$ y $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda u \in S_1$ y $\lambda u \in S_2$ (¿por qué?)

Luego $\lambda u \in S_1 \cap S_2$. \checkmark

Demostramos que:

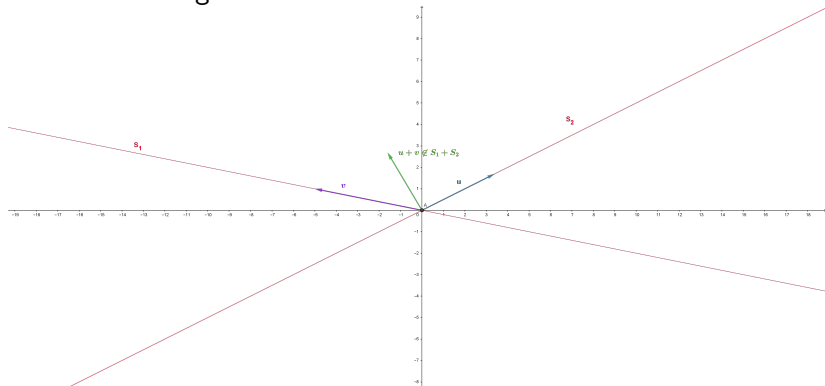
$$\text{Si } S_1, S_2 \subset \mathbb{V} \text{ son subespacios de } \mathbb{V} \Rightarrow S_1 \cap S_2 \text{ es un subespacio.}$$

- b. Si $T \subset \mathbb{V}$ es un subespacio de \mathbb{V} tal que $T \subset S_1$ y $T \subset S_2$, entonces $T \subset S_1 \cap S_2$.

A veces se dice que $S_1 \cap S_2$ es el subespacio "**más grande**" incluido a la vez en S_1 y S_2 , pues cualquier otro que contenga elementos que están en S_1 y en S_2 , está incluido en la intersección.

La demostración es inmediata, pues si $T \subset S_1$ y $T \subset S_2$, por lo tanto si $x \in T \Rightarrow x \in S_1$ y $x \in S_2 \Rightarrow x \in S_1 \cap S_2$, entonces $T \subset S_1 \cap S_2$.

Veamos ahora que pasa con la unión de subespacios. Otra vez miremos un caso muy sencillo: la unión de dos rectas que contienen al origen en \mathbb{R}^2 .



La única condición necesaria para probar que un conjunto es un subespacio que no se cumple siempre, es la de ser **cerrado** para la suma.

Por eso se define la **suma** de subespacios:

Definición: Si S_1 y S_2 son subespacios de un espacio vectorial \mathbb{V} , se llama **suma** de S_1 y S_2 al conjunto:

$$S_1 + S_2 = \{v \in V / v = s_1 + s_2, \text{ con } s_1 \in S_1 \text{ y } s_2 \in S_2\}$$

Observaciones:

- a. $S_1 + S_2$ es un subespacio. Tenemos que probar que se cumplen las tres condiciones que caracterizan a un subespacio.

En inmediato que $0_V = \underbrace{0_V}_{\in S_1} + \underbrace{0_V}_{\in S_2} \in S_1 + S_2$. ✓ Si

$u_1 \in S_1 + S_2$ y $u_2 \in S_1 + S_2$ tenemos que chequear si

$u_1 + u_2 \in S_1 + S_2$. Pero si

$u_1 \in S_1 + S_2 \Rightarrow$ existen $s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$, $u_1 = s_1 + s_2$ y lo mismo sucede con $u_2 \in S_1 + S_2$, existen t_1 y t_2 , tal que $u_2 = t_1 + t_2$.

Luego:

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= (s_1 + s_2) + (t_1 + t_2) \\ &= \underbrace{(s_1 + t_1)}_{\in S_1 \text{ pues es subespacio}} + \underbrace{(s_2 + t_2)}_{\in S_2 \text{ pues es subespacio}} \in S_1 + S_2. \checkmark \end{aligned}$$

Tarea para el hogar demostrar la tercera condición.

b. Si $S_1 = \text{gen}\{v_1 \dots v_k\}$ y $S_2 = \text{gen}\{w_1, \dots, w_m\} \Rightarrow$
 $\Rightarrow S_1 + S_2 = \text{gen}\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_m\}$

Pues $v \in S_1 + S_2 \iff v = s_1 + s_2$, pero como

$S_1 = \text{gen}\{v_1 \dots v_k\}$ y $S_2 = \text{gen}\{w_1, \dots, w_m\}$,

$s_1 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$ y

$s_2 = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m$; con $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{K}$.

Entonces

$$v = s_1 + s_2 = \underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m}_{\text{comb. lineal de } v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_m}$$

Por lo que $S_1 + S_2 = \text{gen}\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_m\}$. ✓

c. $(S_1 \cup S_2) \subset (S_1 + S_2)$. Es directo, queda como tarea.

- d. Todo subespacio que contiene a $S_1 \cup S_2$ incluye también a $S_1 + S_2$.

Sea $x \in S_1 + S_2$ y sea T un subespacio que contiene a $S_1 \cup S_2$, como $x \in S_1 + S_2 \rightarrow x = s_1 + s_2$ con $s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$, como T contiene a $S_1 \cup S_2$ $s_1 \in T$ y $s_2 \in T$, como además T es subespacio $\Rightarrow s_1 + s_2 = x \in T$.

Demostramos que $\forall x \in S_1 + S_2 \Rightarrow x \in T$, por lo tanto queda demostrado que $S_1 + S_2 \subset T$. ✓

Se dice que $S_1 + S_2$ es el "**menor**" subespacio que incluye a $S_1 \cup S_2$, pues cualquier otro subespacio que contenga a la unión forzosamente contiene a $S_1 + S_2$.

Ejemplo simple:

Dados los subespacios de \mathbb{R}^4 ,

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 + x_4 = 0, x_2 + x_3 = 0\} \text{ y}$$

$$S_2 = \text{gen}\{[1 \ 0 \ 1 \ 0]^T, [0 \ 0 \ 1 \ 1]^T\} \text{ encontrar } S_1 \cap S_2 \text{ y } S_1 + S_2.$$

Resolución:

Empecemos por buscar los puntos en común de S_1 y S_2 :

$$\text{Si } x \in S_2 \Rightarrow x = \alpha[1 \ 0 \ 1 \ 0]^T + \beta[0 \ 0 \ 1 \ 1]^T, \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Si además está en S_1 , tiene que cumplir sus ecuaciones. Entonces

$$\text{buscamos } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ tal que } x = [\alpha \ 0 \ \alpha + \beta \ \beta]^T \in S_1 \Leftrightarrow$$

$$\alpha - 0 + \beta = 0 \text{ y } 0 + (\alpha + \beta) = 0 \Leftrightarrow \beta = -\alpha.$$

$$\text{Por lo tanto } x \in S_1 \cap S_2 \Leftrightarrow x = [\alpha \ 0 \ 0 \ -\alpha]^T = \alpha[1 \ 0 \ 0 \ -1]^T.$$

$$\text{Entonces } S_1 \cap S_2 = \text{gen}\{[1 \ 0 \ 0 \ -1]^T\} \text{ y } \dim(S_1 \cap S_2) = 1.$$

Calculemos ahora $S_1 + S_2$, según lo que vimos en la observación **b**.
basta con construir un conjunto generador formado por los generadores de S_1 y S_2 .

De la definición de S_1 , despejando de la primera ecuación obtenemos: $x_1 = x_2 - x_4$.

Y de la segunda ecuación: $x_3 = -x_2$ $x \in S_1$ si

$x = [x_2 - x_4 \ x_2 \ -x_2 \ x_4]^T$ con $x_2, x_4 \in \mathbb{R}$.

$x \in S_1 \Leftrightarrow x = x_2[1 \ 1 \ -1 \ 0]^T + x_4[-1 \ 0 \ 0 \ 1]^T$

Por lo que $S_1 = \text{gen}\{[1 \ 1 \ -1 \ 0]^T, [-1 \ 0 \ 0 \ 1]^T\}$

Este conjunto es l.i, por lo que además sabemos que $\dim(S_1) = 2$.

Como ya encontramos $S_1 \cap S_2$, podemos encontrar una base de S_1 que contenga una base de $S_1 \cap S_2$, por ejemplo:

$B_{S_1} = \{[1 \ 1 \ -1 \ 0]^T, [1 \ 0 \ 0 \ -1]^T\}$.

Busquemos ahora una base de S_2 que contenga una base $S_1 \cap S_2$, por ejemplo: $B_{S_2} = \{[1 \ 0 \ 0 \ -1]^T, [0 \ 0 \ 1 \ 1]^T\}$.

Teniendo estas bases de S_1 y S_2 , resulta evidente que al formar el conjunto de generadores de $S_1 + S_2$, no vamos a repetir el generador de la intersección de los subespacios. Entonces obtenemos :

$$S_1 + S_2 = \text{gen}\{[1 \ 1 \ -1 \ 0]^T, [1 \ 0 \ 0 \ -1]^T, [0 \ 0 \ 1 \ 1]^T\}.$$

Obviamente $\dim(S_1 + S_2) = 3$.

Se cumple que :

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2)$$

Esta última igualdad se cumple para todo par de subespacios finitos.

Teorema: Dados S_1 y S_2 subespacios de dimensión finita, entonces:
 $\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2)$

Demostración:

Si $\dim(S_1) = n$, $\dim(S_2) = m$ y $\dim(S_1 \cap S_2) = k$, $k \geq 0$, vamos a demostrar que $\dim(S_1 + S_2) = n + m - k$.

La forma de demostrarlo será una generalización de la resolución del ejemplo.

Supongamos primero $k \geq 1$, entonces existe una base $B_{S_1 \cap S_2} = \{v_1, \dots, v_k\}$, podemos extender esa base a una base de S_1 , $B_{S_1} = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ y también a una base de S_2 , $B_{S_2} = \{v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_m\}$

Por lo visto sabemos que

$$S + T = \text{gen}\left\{ \underbrace{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n}_{n \text{ elementos}}, \underbrace{w_{k+1}, \dots, w_m}_{m-k \text{ elementos}} \right\}$$

Sólo tenemos que ver que este sistema de generadores es l.i.

Igualamos una combinación lineal a $0_{\mathbb{V}}$:

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \lambda_n v_n + \beta_1 w_{k+1} + \cdots + \beta_{m-k} w_m = 0_{\mathbb{V}} \quad (1)$$

$$\underbrace{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \lambda_n v_n}_{\in S_1} = \underbrace{-\beta_1 w_{k+1} - \cdots - \beta_{m-k} w_m}_{\in S_2}$$

Entonces: $-\beta_1 w_{k+1} - \cdots - \beta_{m-k} w_m \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\beta_1 w_{k+1} - \cdots - \beta_{m-k} w_m = \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_k v_k$$

$$0_{\mathbb{V}} = \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_k v_k + \beta_1 w_{k+1} + \cdots + \beta_{m-k} w_m$$

Como $\{v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_m\}$ es un conjunto l.i. pues es una base de S_2 concluimos que todos los escalares son nulos, en particular: $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_{m-k} = 0$.

Reemplazamos en (1).

Y obtenemos:

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \lambda_n v_n = 0_{\mathbb{V}}$$

Y de aquí, como $\{v_1, \dots, v_n\}$ es un conj. l.i. obtenemos que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$

Como los escalares $\beta_1, \dots, \beta_{m-k}, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ vienen de la combinación lineal (1), concluimos que

$\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n, w_{k+1}, \dots, w_m - k\}$ es l.i.

Entonces podemos afirmar que :

$$\dim(S_1 + S_2) = n + m - k = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2)$$

Queda como tarea para el hogar, verificar la fórmula cuando la intersección es el subespacio nulo, en ese caso no existe base de la intersección y directamente trabajamos con las bases de cada subespacio.

Suma directa de subespacios.

Por definición, cada elemento del subespacio $S_1 + S_2$, puede expresarse en la forma $v = s_1 + s_2$, con $s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$, pero esa descomposición no siempre es única.

En el ejemplo que vimos, si tomamos:

$$v = [2 \ 1 \ 0 \ 0]^T = \underbrace{[1 \ 1 \ -1 \ 0]^T}_{\in S_1} + \underbrace{[1 \ 0 \ 0 \ -1]^T}_{\in S_2} + \underbrace{[0 \ 0 \ 1 \ 1]}_{\in S_2}$$

$$v = [2 \ 1 \ 0 \ 0]^T = \underbrace{[2 \ 1 \ -1 \ -1]^T}_{\in S_1} + \underbrace{[0 \ 0 \ 1 \ 1]}_{\in S_2}$$

Pero también podemos escribir:

$$v = [2 \ 1 \ 0 \ 0]^T = \underbrace{[1 \ 1 \ -1 \ 0]^T}_{\in S_1} + \underbrace{[1 \ 0 \ 0 \ -1]^T + [0 \ 0 \ 1 \ 1]}_{\in S_2}$$

$$v = [2 \ 1 \ 0 \ 0]^T = \underbrace{[1 \ 1 \ -1 \ 0]^T}_{\in S_1} + \underbrace{[1 \ 0 \ 1 \ 0]^T}_{\in S_2}$$

Cuando cada $v \in S_1 + S_2$ puede descomponerse en forma única como suma de un elemento de S_1 y un elemento de S_2 , se dice que la suma es **directa**.

Definición: Se dice que la suma de S_1 y S_2 es **directa**, o que S_1 y S_2 están en suma directa si, para cada $v \in S_1 + S_2$ existen únicos $s_1 \in S_1$ y $s_2 \in S_2$ tal que $v = s_1 + s_2$.

Cuando la suma es directa, se nota: $S_1 \oplus S_2$

Observación:

S_1 y S_2 están en suma directa si y sólo si $S_1 \cap S_2 = \{0_{\mathbb{V}}\}$

\Rightarrow) Supongamos que S_1 y S_2 están en suma directa y sea $v \in S_1 \cap S_2$.

$$v \in S_1 \Rightarrow v = \underbrace{v}_{\in S_1} + \underbrace{0_v}_{\in S_2}, v \in S_2 \Rightarrow v = \underbrace{0_v}_{\in S_1} + \underbrace{v}_{\in S_2}.$$

Pero si S_1 y S_2 están en suma directa la descomposición es única, por lo tanto $v = 0_{\mathbb{V}} \Rightarrow S_1 \cap S_2 = \{0_{\mathbb{V}}\}$.✓

\Leftarrow) Ahora supongamos que $S_1 \cap S_2 = \{0_{\mathbb{V}}\}$ y sea $v \in S_1 + S_2$ tal que $v = s_1 + s_2$ y $v = t_1 + t_2$ con $s_1, t_1 \in S_1$ y $s_2, t_2 \in S_2$.

$$\text{Entonces: } v = s_1 + s_2 = t_1 + t_2 \Rightarrow \underbrace{s_1 - t_1}_{\in S_1} = \underbrace{t_2 - s_2}_{\in S_2}$$

$$S_1 \cap S_2 = \{0_{\mathbb{V}}\} \Rightarrow s_1 - t_1 = 0_{\mathbb{V}} = t_2 - s_2, s_1 = t_1 \text{ y } s_2 = t_2.$$

Demostremos que si $S_1 \cap S_2 = \{0_{\mathbb{V}}\} \Rightarrow S_1$ y S_2 están en suma directa.✓

- ▶ También se puede probar que si B_1 es base de S_1 y B_2 es base de S_2 , la suma $S_1 + S_2$ es directa si y sólo si $B = B_1 \cup B_2$ es l.i.
- ▶ Si \mathbb{V} es un espacio vectorial de dimensión finita y S es un subespacio de \mathbb{V} , existe un subespacio W tal que : $S \oplus W = \mathbb{V}$
 Si $S = \mathbb{V}$ o $S = \{0_{\mathbb{V}}\} \Rightarrow W = \{0_{\mathbb{V}}\}$ y $W = \mathbb{V}$ respectivamente.
 Si $1 \leq \dim S = k \leq n - 1$, existe una base $B_S = \{v_1, \dots, v_k\}$
 Sabemos que esta base puede extenderse a una base de \mathbb{V} , o sea, existen v_{k+1}, \dots, v_n tales que
 $B = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ es una base de \mathbb{V} .
 Entonces si consideramos $W = \text{gen}\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$, se cumple que $S \oplus W = \mathbb{V}$.
 De esta demostración es evidente que el subespacio W cumple $S \oplus W = \mathbb{V}$ no es único, para cualquier subespacio no trivial de \mathbb{V} .

Definición: Dado un subespacio $S \subset \mathbb{V}, \mathbb{K}$ espacio vectorial, se dice que W es un suplemento de S si $S \oplus W = \mathbb{V}$