75:12 ANÁLISIS NUMÉRICO I

FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Primer Recuperatorio

1er Cuatrimestre 2010
29/May/2010

Ejercicio 1. Se dispone de los siguientes algoritmos algebraicamente equivalentes para determinar el valor de z a partir de x e y:

$$z = sen\left[(x^3 - y^3) + \pi/2\right]; \quad z = \cos\left[(x-y).(x^2 + xy + y^2)\right]$$

a) Demostrar que efectivamente son algebraicamente equivalentes.
b) Obtener una expresión de la cota del error de redondeo para cada uno de los dos algoritmos, en función de la unidad de máquina.
c) Comparar las cotas de error obtenidas, para el caso particular de x = 27,54, y=27,49. Concluir cual de los dos algoritmos es más estable desde el punto de vista numérico.

Ejercicio 2. En un circuito electrónico se realiza una medición a la salida de una de sus etapas y se obtienen los siguientes valores de tensión en función del tiempo:

Tiempo (seg)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
Tensión (V)	3,712	2,322	1,307	1,210	1,349	1,710	1,740	1,555	1,317	1,160	1,110

Se desea hallar la relación de tensión (V) en función del tiempo (t), para lo cual se propone utilizar la siguiente ley $V = C_1 \cdot e^{-\tau_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{-\tau_2 \cdot t} + C_3 \cdot e^{-\tau_3 \cdot t} \cdot sen(2 \cdot t + \phi)$

a) Utilizando el método de cuadrados mínimos, determinar los valores de C1, C2 y C3.
b) Se propone ahora, utilizar una función de ajuste tal que la constante C1 = 0. Determine los nuevos valores de C2 y C3.
c) Obtenga los valores del error cuadrático total para los puntos a) y b). Compare ambos resultados y realice una apreciación personal de los valores obtenidos.

Datos: $\tau_1 = 7; \quad \tau_2 = 0,1; \quad \tau_3 = 0,5; \quad \phi = \pi/2 \qquad e_T = \sum_{i=1}^{n} \left(f_i - f_i^*\right)^2$

Pregunta 1

Suponga que utiliza el método de Netwon-Raphson para hallar la raíz de una ecuación no lineal con una precisión dada. Al obtener el orden del método en forma experimental obtiene un valor de 2,9. Justifique este resultado explicando las posibles razones del mismo.

Pregunta 2

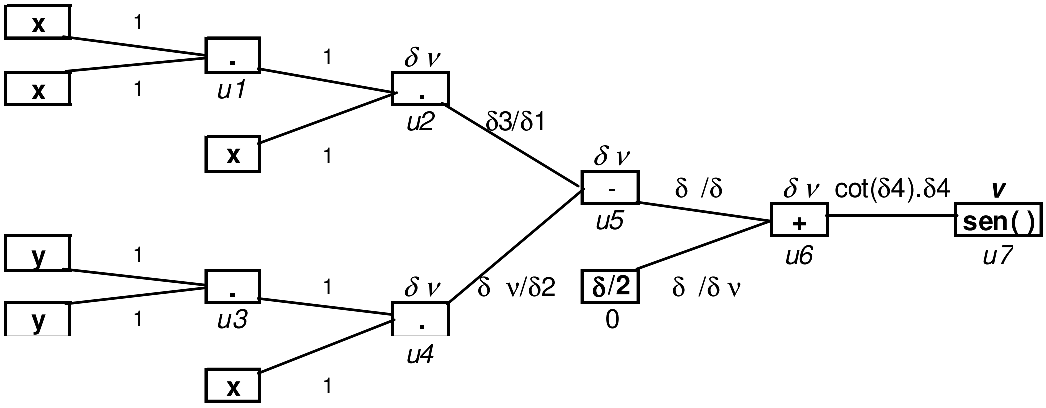
Se utiliza el método SOR para resolver una serie de SEL caracterizados por una única matriz *A*. Indique cómo procede para determinar el parámetro de sobre-relajación.

Resolución

Ejercicio 1.

b)

Algoritmo 1: $v = sen\left[(x^3 - y^3) + \pi/2\right]$

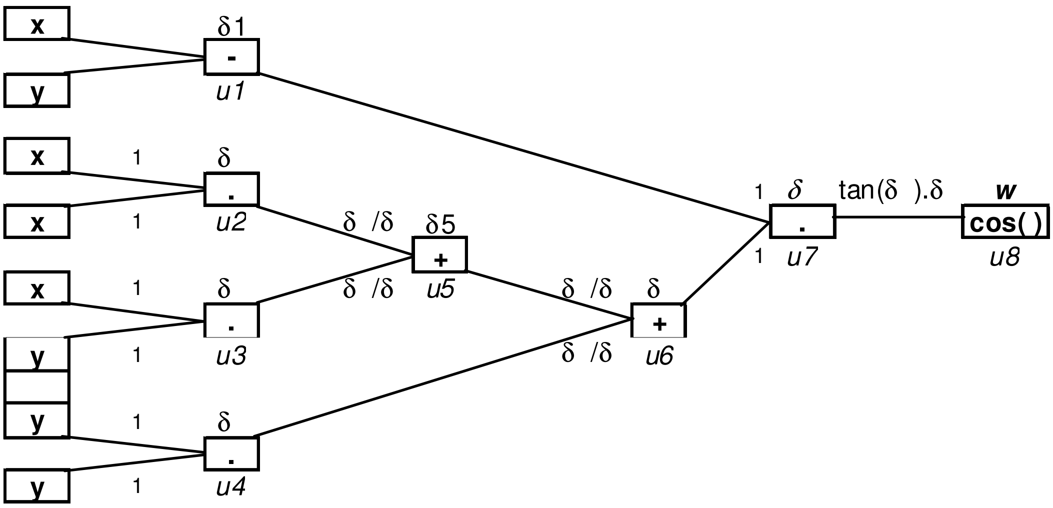


$$rv = \left\{\left[(\mu_1+\mu_2).\frac{\xi_3}{\xi_1} + (\mu_3+\mu_4).\left(-\frac{\xi_3}{\xi_2}\right) + \mu_5\right].\frac{\xi_4}{\xi_3} + \mu_6\right\}\cot(\xi_4).\xi_4 + \mu_7$$

$|\mu_i| \le |\mu|$ y sacando factor común μ

$$\boxed{Rv \le \mu.\left\{1 + |\cot(\xi_4)|.|\xi_4|\left[1 + \left|\frac{\xi_4}{\xi_3}\right| + 2.\left|\frac{\xi_4}{\xi_2}\right| + 2.\left|\frac{\xi_4}{\xi_1}\right|\right]\right\}}$$

Algoritmo 2: $w = \cos\left[(x-y).(x^2 + xy + y^2)\right]$



$$rw = \left[\mu_1 + \left(\mu_2.\frac{\varphi_5}{\varphi_2} + \mu_3.\frac{\varphi_5}{\varphi_3} + \mu_5\right).\frac{\varphi_6}{\varphi_5} + \mu_4.\frac{\varphi_6}{\varphi_4} + \mu_6 + \mu_7\right].\tan(\varphi_7).\varphi_7 + \mu_8$$

$|\mu_i| \le |\mu|$ y sacando factor común μ

$$\boxed{Rw \le \mu.\left[1 + |\tan(\varphi_7).\varphi_7|\left(\left|\frac{\varphi_6}{\varphi_2}\right| + \left|\frac{\varphi_6}{\varphi_3}\right| + \left|\frac{\varphi_6}{\varphi_4}\right| + \left|\frac{\varphi_6}{\varphi_5}\right| + 3\right)\right]}$$

c) Reemplazando los valores de x e y del enunciado obtenemos:

$$\mathbf{Rv \cong 94\ \mu}$$

$$\mathbf{Rw \cong 581\ \mu}$$

El primer algoritmo es numéricamente más estable.

Ejercicio 2.

f = C1 * Exp(-7*t) + C2 * Exp (-0,1*t) + C3 * Exp (-0,5*t) * sen(2*t +fi)

t	F
0	3,712
0,5	2,322
1	1,307
1,5	1,210
2	1,349
2,5	1,710
3	1,740
3,5	1,555
4	1,317
4,5	1,160
5	1,110

f1	f2	f3
1,0000	1,0000	1,0000
0,0302	0,9512	0,4208
0,0009	0,9048	-0,2524
0,0000	0,8607	-0,4676
0,0000	0,8187	-0,2405
0,0000	0,7788	0,0813
0,0000	0,7408	0,2142
0,0000	0,7047	0,1310
0,0000	0,6703	-0,0197
0,0000	0,6376	-0,0960
0,0000	0,6065	-0,0689

f1 = Exp(-7*t) ; f2 = Exp (-0,1*t) ; f3 = Exp (-0,5*t) * sen(2*t +fi)

a) Por método de cuadrados mínimos se obtiene el siguiente sistema a resolver.

$$\begin{vmatrix} 1,0009 & 1,0296 & 1,0125 \\ 1,0296 & 7,0104 & 0,7706 \\ 1,0125 & 0,7706 & 1,6013 \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathbf{C1} \\ \mathbf{C2} \\ \mathbf{C3} \end{matrix} \begin{vmatrix} 3,7833 \\ 15,2615 \\ 3,9707 \end{vmatrix}$$

Resolviendo por Gauss con pivoteo parcial

C1 = 0,576
C2 = 19,64
C3 = 1,171

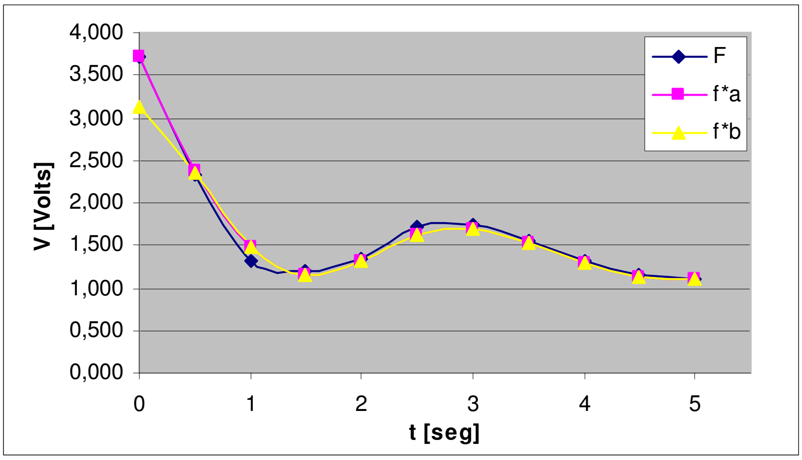
b) Se resuelve con la misma matriz anterior, quitando fila 1 y columna 1.

$$\begin{vmatrix} 7,0104 & 0,7706 \\ 0,7706 & 1,6013 \end{vmatrix} \begin{matrix} \mathbf{C2'} \\ \mathbf{C3'} \end{matrix} \begin{vmatrix} 15,2615 \\ 3,9707 \end{vmatrix}$$

Resolviendo por Gauss con pivoteo parcial

C2' = 2,011
C3' = 1,512

c)
f*a se obtiene utilizando los valores C1, C2 y C3 obtenidos. => **e_a = 0,048546**
f*b se obtiene utilizando los valores C2' y C3' obtenidos. => **e_b = 0,380201**



Es importante notar, que si bien el error obtenido con la segunda función es casi diez veces mayor, esta diferencia es debida solamente al salto producido en t=0, ya que para el resto de los valores, las aproximaciones se comportan de la misma manera. Esto puede verse gráfica y numéricamente.
Esto se debe a que la f1 solo tiene influencia hasta t = 1 seg., dado que su constante de tiempo provoca su rápido decaimiento y consecuente anulación.

Pregunta 1.

Aquí se apunta a que el alumno se de cuenta que obtener el orden del método en forma experimental solo devuelve una aproximación, que en algunos casos puede ser mal interpretada. En particular en el caso planteado ocurre que se obtuvo el valor de la raíz en pocas iteraciones (posiblemente a la baja precisión buscada o bien por la rapidez del método al utilizar una semilla adecuada), y se estimó el orden del método con las mismas. Al utilizar los errores sucesivos de estas iteraciones, el orden del método resulta superior al valor teórico.

Pregunta 2.

Dado que no especifica mayores detalles de cómo obtener el ω, se considera correcta la respuesta de la búsqueda en forma teórica (teniendo en cuenta las condiciones que debe cumplir la matriz) como también la búsqueda en forma práctica (imponiendo una tolerancia e iterando con valores de ω entre 0 y 2).

Puntaje

Ejercicio	Puntaje
1.a	0,5
1.b	2
1.c	1,5
2.a	2
2.b	0,5
2.c	1,5
P1	1
P2	1