

# Matrices y sistemas lineales

## Definiciones y propiedades

### Matrices

Dados los números naturales  $m$  y  $n$ , una *matriz* de  $m$  filas y  $n$  columnas con coeficientes

reales es un arreglo rectangular  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ , donde  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ .

Llamamos *filas* de  $A$  a las  $n$ -uplas  $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$  con  $i = 1, \dots, m$ .

Llamamos *columnas* de  $A$  a las  $m$ -uplas  $A^{(j)} = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$  con  $j = 1, \dots, n$ .

Con esta notación,  $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix}$  y también  $A = (A^{(1)} A^{(2)} \dots A^{(n)})$ .

Al número que está en la fila  $i$  y la columna  $j$  de la matriz  $A$  lo llamamos *elemento  $ij$*  de  $A$  y lo notamos  $a_{ij}$ . Escribimos abreviadamente  $A = (a_{ij})$ .

Notamos  $\mathbb{R}^{m \times n}$  al conjunto de las matrices de  $m$  filas y  $n$  columnas con coeficientes reales.

Si  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , la *matriz transpuesta* de  $A$  es la matriz  $A^t \in \mathbb{R}^{n \times m}$  que tiene como filas a las columnas  $A$ .

Una matriz  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es *triangular superior (inferior)* si  $a_{ij} = 0$  para  $i > j$  ( $i < j$ , respectivamente) y es *diagonal* si  $a_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ .

En el conjunto  $\mathbb{R}^{m \times n}$ , están definidas la *suma* y el *producto por escalares* de la siguiente manera:

Si  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $k \in \mathbb{R}$ , entonces

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n} \qquad kA = (ka_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Es decir, suma y producto por escalares se calculan elemento a elemento.

Si  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times s}$ , se define el *producto* de  $A$  por  $B$  como

$$AB = C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times s}$$

donde  $c_{ij}$  es igual al producto escalar de la fila  $i$  de  $A$  por la columna  $j$  de  $B$

$$c_{ij} = (\text{fila } i \text{ de } A) \cdot (\text{columna } j \text{ de } B)$$

Es posible calcular  $AB$  si y solo si la cantidad de columnas de  $A$  coincide con la cantidad de filas de  $B$ .

*Propiedades del producto de matrices.*

■ Es asociativo:  $(AB)C = A(BC)$

■ Es distributivo con respecto a la suma:  $A(B + C) = AB + AC$   
 $(A + B)C = AC + BC$

■ La matriz *identidad*  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  verifica  $AI = IA$  para toda matriz cuadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . La matriz  $I$  es el elemento neutro para el producto en  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .

## Sistemas lineales

Un *sistema lineal* de  $m$  ecuaciones con  $n$  incógnitas es un conjunto de  $m$  ecuaciones en las variables  $x_1, \dots, x_n$  del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

donde las  $a_{ij}$  y las  $b_i$  representan constantes.

Cuando  $b_i = 0$  para todo  $i = 1, \dots, m$ , se dice que el sistema es *homogéneo*.

Una  $n$ -upla  $(s_1, \dots, s_n)$  es una solución del sistema si y solo si al reemplazar  $x_j$  por  $s_j$  para cada  $j = 1, \dots, n$ , se satisfacen cada una de las  $m$  ecuaciones.

Un sistema se dice *incompatible* si no tiene ninguna solución y *compatible* si tiene alguna solución.

Un sistema lineal homogéneo siempre es compatible:  $0 \in \mathbb{R}^n$  es una solución, que llamaremos la *solución trivial*.

Si un sistema compatible tiene una única solución es *determinado* y si tiene infinitas soluciones es *indeterminado*.

La *matriz de coeficientes* del sistema es  $A = (a_{ij})$  y la *matriz ampliada* o *matriz aumentada* del

sistema es  $(A|\mathbf{b}) = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$

Decimos que dos sistemas de ecuaciones son *equivalentes* cuando tienen el mismo conjunto de soluciones.

*Propiedad.* Las siguientes operaciones sobre las ecuaciones de un sistema dan lugar a un sistema equivalente al dado:

1. Multiplicar una de las ecuaciones por una constante no nula.
2. Intercambiar dos de las ecuaciones.
3. Sumar un múltiplo de una de las ecuaciones a otra ecuación.

Las operaciones anteriores sobre las ecuaciones se corresponden con las siguientes operaciones sobre las filas de la matriz aumentada del sistema. Se denominan *operaciones elementales sobre las filas*:

1. Multiplicar una de las filas por una constante no nula.
2. Intercambiar dos de las filas.
3. Sumar un múltiplo de una de las filas a otra fila.

Se dice que una matriz se encuentra en la forma *escalonada en las filas reducida* si se cumplen las siguientes condiciones:

1. Si una fila no consta únicamente de ceros, entonces su primer coeficiente no nulo es un 1 (a este 1 se lo denomina 1 principal).
2. Si existen filas que constan sólo de ceros (filas nulas), se agrupan en la parte inferior de la matriz.
3. Si dos filas sucesivas son no nulas, el 1 principal de la fila inferior se presenta más a la derecha que el 1 principal de la fila superior.
4. Cada columna que contenga un 1 principal tiene ceros en todas las demás posiciones.

Si una matriz tiene solo las propiedades 1., 2. y 3. se dice que está en la forma *escalonada en las filas*.

Diremos que dos matrices son equivalentes por filas si puede obtenerse una de la otra por medio de una sucesión finita de operaciones elementales sobre las filas.

El *método de eliminación de Gauss* para resolver sistemas lineales consiste en llevar la matriz aumentada del sistema planteado, vía la aplicación sistemática de operaciones elementales sobre sus filas, a la forma escalonada en las filas reducida. La resolución del sistema resultante, que es equivalente al original, es inmediata.

Llamamos *rango fila* (o *rango*) de la matriz  $A$  al número de filas no nulas que tiene la matriz escalonada en las filas reducida equivalente a  $A$ .

**Teorema de Rouché-Frobenius.** El sistema de matriz ampliada  $(A|\mathbf{b})$  es compatible si y solo si el rango de  $(A|\mathbf{b})$  es igual al rango de  $A$ .

Notación. El sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

puede escribirse  $AX = B$ , con

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times 1}.$$

En adelante, identificaremos  $X \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  con  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  y  $B \in \mathbb{R}^{m \times 1}$  con  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ . Así, el sistema se escribirá

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

*Propiedades.* Sean  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  ( $\mathbf{b} \neq 0$ ),

$$\mathbb{S}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = 0\} \quad \text{y} \quad \mathbb{S}_{\mathbf{b}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}.$$

a) Si  $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_0$  e  $\mathbf{y} \in \mathbb{S}_0$ , entonces  $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{S}_0$ . Si  $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_0$  y  $k \in \mathbb{R}$ , entonces  $k\mathbf{x} \in \mathbb{S}_0$ .

Esto dice que la suma de dos soluciones de un sistema homogéneo es también solución del mismo y que los múltiplos de una solución son también soluciones.

b) Si  $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_{\mathbf{b}}$  e  $\mathbf{y} \in \mathbb{S}_{\mathbf{b}}$ , entonces  $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathbb{S}_0$ .

Esto es, la diferencia entre dos soluciones de un sistema no homogéneo es solución del sistema homogéneo asociado.

c) Si  $\mathbf{s}$  es una solución particular del sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  (es decir,  $\mathbf{s} \in \mathbb{S}_{\mathbf{b}}$ ), entonces

$$\mathbb{S}_{\mathbf{b}} = \mathbb{S}_0 + \mathbf{s} = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{s}, \text{ con } \mathbf{x} \in \mathbb{S}_0\}.$$

Esto significa que cualquier solución del sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  puede obtenerse sumando una solución particular del sistema con una solución del sistema homogéneo asociado.

### Matrices inversibles

Una matriz cuadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es *inversible* si existe  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que  $AB = BA = I$ . Cuando  $B$  existe, es única. Se llama la *matriz inversa de  $A$*  y la notamos  $B = A^{-1}$ .

*Propiedad.* Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son inversibles, entonces  $AC$  es inversible y vale  $(AC)^{-1} = C^{-1}A^{-1}$ .

*Propiedad.* Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a)  $A$  es inversible.
- b)  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  tiene solución única, cualquiera sea  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ .
- c)  $A\mathbf{x} = 0$  tiene únicamente la solución trivial.
- d)  $A$  es equivalente por filas a  $I \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .