Ejercicio 1

martes, 21 de junio de 2022 09:21 p. m.

1. Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales vale que:

$$\text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\a\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-3\\a\end{bmatrix}\right\} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\a\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-3\\a\end{bmatrix}\right\},$$

Para probar que $S_1 = \text{gen}\{(1\ a\ 2)^T, (1\ 3\ 2)^T, (3\ -3\ a)^T\}$
es igual a $S_2 = \text{gen}\{(1\ a\ 2)^T, (3\ -3\ a)^T\}$
hay que probar la doble inclusión: $S_1 \subseteq S_2$ y $S_2 \subseteq S_1$.

- $S_2 \subseteq S_1$ se cumple por la definición de S_1 y S_2 $\forall a \in \mathbb{R}$.

Para hallar los valores de "a" tales que $S_1 \subseteq S_2$ observar que la dimensión de S_1 es, al menos, 2 cualquiera sea el valor de "a".
Entonces para que $S_1 \subseteq S_2$ el conjunto generador de S_1 debe ser linealmente dependiente,
esto es la combinación lineal

$$\alpha(1\ a\ 2)^T + \beta(1\ 3\ 2)^T + \gamma(3\ -3\ a)^T = 0_{\mathbb{R}^3}$$

debe ser tal que los escalares α, β, γ no sean todos cero.
Se cumplirá si el sistema

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 3\gamma &= 0 \\ a\alpha + 3\beta - 3\gamma &= 0 \\ 2\alpha + 2\beta - a\gamma &= 0 \end{aligned}$$

tiene soluciones no triviales. Teniendo en cuenta que este sistema es siempre compatible, para que tenga soluciones no triviales debe ser

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ a & 3 & -3\\ 2 & 2 & -a\end{pmatrix} = 0 \iff a = 3 \text{ ó } a = 6$$

Rpta: $S_1 = S_2 \iff a = 3$ ó $a = 6$.

Ejercicio 2

martes, 21 de junio de 2022 09:33 p. m.

2. Sea Π la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el plano $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ en la dirección de la recta $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_3 = 0\}$.Hallar la imagen por Π del triángulo de vértices $[2 \quad 1 \quad 0]^T$, $[1 \quad 1 \quad 1]^T$, $[1 \quad 0 \quad 1]^T$.

Un conjunto generador de $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ es

$S_1 = \text{gen}\{(1 \ 1 \ 0)^T, (0 \ 1 \ 1)^T\}$

y un conjunto generador de S_2 : $S_2 = \text{gen}\{(0 \ 1 \ 0)^T\}$

Entonces $S_1 \oplus S_2 = \mathbb{R}^3$ y $B_{\mathbb{R}^3} = B_{S_1} \cup B_{S_2} = \{(1 \ 1 \ 0)^T, (0 \ 1 \ 1)^T, (0 \ 1 \ 0)^T\}$

$$\Pi(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in S_1 \\ 0_{\mathbb{R}^3} & \text{si } x \in S_2 \end{cases}$$

$$[\Pi]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para obtener $[T]_{E_{\mathbb{R}^3}}$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "{[T]_B}"] & B \arrow[d, "P"] \\ E_{\mathbb{R}^3} \arrow[u, "P^{-1}"] \arrow[r] & E_{\mathbb{R}^3} \end{tikzcd}$$

$$[T]_{E_{\mathbb{R}^3}} = P\,[T]_B\,P^{-1}$$

con $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

luego $[\Pi]_{E_{\mathbb{R}^3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\Pi_{S_1S_2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$: $T(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$$\Pi\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \quad \Pi\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \ ; \quad \Pi\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La proyección del triángulo de vértices $(2 \ 1 \ 0)^T$, $(1 \ 1 \ 1)^T$, $(1 \ 0 \ 1)^T$ es el segmento

$$(x_1 \ x_2 \ x_3)^T = (2 \ 2 \ 0)^T + t\left((1 \ 2 \ 1)^T - (2 \ 2 \ 0)^T\right)$$

$$(x_1 \ x_2 \ x_3)^T = (2 \ 2 \ 0)^T + t(-1 \ 0 \ 1)^T \quad t \in [0,1]$$

es decir, el segmento de extremos $(2 \ 2 \ 0)^T$ y $(1 \ 2 \ 1)^T$.

Ejercicio 3

martes, 21 de junio de 2022 09:49 p. m.

3. Hallar la solución de la ecuación diferencial $y'' - 5y' + 6y = 5e^{2x}$ tal que $y(0) = 0, y'(0) = 0$.

1º) Resolvemos $y'' - 5y' + 6y = 0$ (1)

el polinomio característico : $r^2 - 5r + 6 = 0$

cuyas raíces son : $r_1 = 3$; $r_2 = 2$

La solución general de (1) : $y_H : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

2º) Como una base de soluciones de (1) es $\{e^{3x}, e^{2x}\}$

donde e^{2x} figura en el segundo miembro de

$$y'' - 5y' + 6y = 5e^{2x} \qquad (2)$$

una solución particular es $y_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y_p = Axe^{2x}$

$y'_p = Ae^{2x} + 2Axe^{2x}$; $y''_p = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$

$y''_p = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$

Reemp en (1)

$$4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - 5(Ae^{2x} + 2Axe^{2x}) + 6Axe^{2x} = 5e^{2x}$$

$$4A + \cancel{4Ax} - 5A \cancel{-10Ax} + \cancel{6Ax} = 5$$

$$-A = 5 \qquad A = -5$$

3º) La solución particular del PVi :

$y(0) = C_1 + C_2 = 0$

$y'(x) = 3C_1 + 2C_2 - 5$ resulta $C_1 = 5$; $C_2 = -5$

4º) La solución del PV.i.

$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} - 5xe^{2x}$

$y(0) = C_1 + C_2 = 0$

$y'(x) = 3C_1 e^{3x} + 2C_2 e^{2x} - 5e^{2x} + x e^{2x}$.

$C_1 = 5$; $C_2 = -5$

$y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : y(x) = 5e^{3x} - 5e^{2x} - 5xe^{2x}$

Ejercicio 4

martes, 21 de junio de 2022 10:05 p. m.

4. Se considera el espacio euclídeo $(\mathbb{R}_2[x], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

Calcular la distancia del polinomio x^2 al subespacio gen$\{1, x\}$.

Si $S = \text{gen}\{1, x\}$: dim $S = 2$ y como $S \oplus S^{\perp} = \mathbb{R}_2[x]$ y dim $|\mathbb{R}_2[x]| = 3$ $\Rightarrow$ dim $S^{\perp} = 1$. Es más conveniente proyectar sobre $S^{\perp}$, ya que, por otra parte, el conjunto $\{1, x\}$ no es una BOG de S con el pi dado.

Un vector ortogonal a 1 y a x : $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ cumple

$\langle 1, a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \rangle = \int_0^1 (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)\,dx = 0$ $\quad a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{3}a_2 = 0 \quad (1)$ d

$\langle x, a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \rangle = \int_0^1 (a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3)\,dx = 0$ $\quad \frac{1}{2}a_0 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{4}a_2 = 0 \quad (2)$

operando resulta:

$$a_2 = -a_1 \quad \text{y} \quad a_0 = -\frac{1}{6}a_1$$

$$S^{\perp} = \text{gen}\left\{-\frac{1}{6} + x - x^2\right\}$$

$$\text{dist}(x^2, S) = \|P_{S^{\perp}}(x^2)\| = \frac{|\langle x^2, -\frac{1}{6} + x - x^2\rangle|}{\|-\frac{1}{6} + x - x^2\|} = \frac{1}{\sqrt{180}} = \frac{\sqrt{5}}{30}$$

Ejercicio 5

martes, 21 de junio de 2022 10:05 p. m.

5. Hallar la solución por mínimos cuadrados de norma mínima de la ecuación

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

De todas las soluciones de $A x = b$ por cuadrados mínimos que verifican

$$A^T A \hat{x} = A^T b$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{donde} \quad \hat{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 7/3 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}$$

la de norma mínima $\hat{x}_{\text{mín}}$ es la $\hat{x}$ que $\in$ Fil A = gen$\{(1\ 0\ 2)^T, (-1\ 2\ 0)^T\}$

$\hat{x}_{\text{mín}}$ será CL de estos generadores de Fil A :

$$\hat{x}_{\text{mín}} = \begin{pmatrix} 4/3 - 2c \\ 7/3 - c \\ c \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ; determinamos } c :$$

$$c = 5/6$$

luego $$\hat{x}_{\text{mín}} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 7/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{6} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 3/2 \\ 5/6 \end{pmatrix}$$