

**75.12 / 95.04 ANÁLISIS NUMÉRICO I**  
**95.13 MÉTODOS MATEMÁTICOS Y NUMÉRICOS**  
**CB051 MODELACIÓN NUMÉRICA**FACULTAD DE INGENIERÍA  
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**2do. Recuperatorio**  
*1er. Cuatrimestre 2024*  
*2/Julio/2024***9****Problema 1**

Dada la función  $f(x) = 1 - a e^{-ax}$  con  $a > 3$  se realizó una iteración con el método de Newton-Raphson partiendo de  $x_0 = 0$  y se obtuvo el valor  $4/25$ .

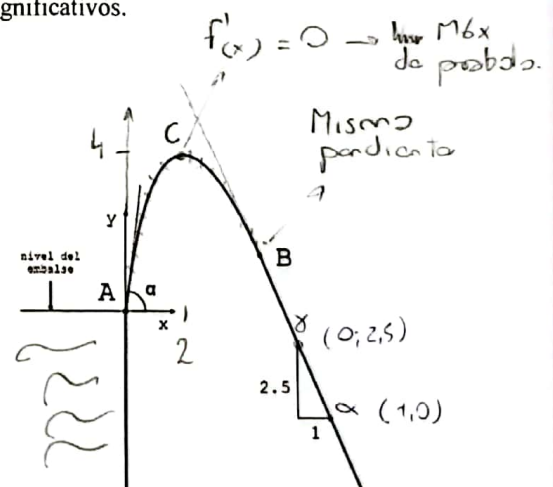
A partir de la información anterior hallar la raíz de  $f(x)$  con al menos 4 dígitos significativos.

**Problema 2**

La figura de la derecha representa el perfil de un vertedero de una central hidroeléctrica, esquematizado mediante dos líneas rectas y una parábola que une los puntos identificados como A y B. En el punto B la parábola empalma perfectamente con la línea recta.

La cresta del vertedero (punto más alto de la estructura) se encuentra a 4 m por sobre el nivel del embalse y a una distancia horizontal de 2 m de la pared en contacto con el agua del embalse.

Se pide obtener la ecuación de la parábola aplicando los métodos de interpolación vistos en la materia y, a partir de dicha ecuación, calcular el ángulo  $\alpha$  en grados y la ubicación del punto B referida al sistema de coordenadas indicado en la figura.

**Pregunta 1**

Dada una función  $f(x)$  y una aproximación  $\alpha^*$  de  $\alpha$  que es una de sus raíces, indicar cómo se puede estimar una cota de  $|\alpha^* - \alpha|$ . Se aclara que se desconoce el método utilizado para obtener  $\alpha^*$  pero se dispone de una expresión para calcular la derivada primera de  $f$ . Justificar la metodología.

**Pregunta 2**

Indicar cómo se puede estimar el error cometido al resolver un sistema de ecuaciones lineales mediante el método de eliminación de Gauss.

*Resposta*

Santiago Langer

Problema 1.  
107912

1)  $f(x) = 1 - a \cdot e^{-ax}$

NR:  $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1 - a \cdot e^{-ax}}{a^2 \cdot e^{-ax}}$$

$$f'(x) = -a \cdot (-a) \cdot e^{-ax}$$

$$f'(x) = a^2 \cdot e^{-ax}$$

| k | $x_k$ | $x_{k+1}$ |
|---|-------|-----------|
| 0 | 0     | 0.16      |

Calculos auxiliares  $\Rightarrow a = 5$

$$f(x) = 1 - 5 \cdot e^{-5x}$$

$$f'(x) = 25 \cdot e^{-5x}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1 - 5 \cdot e^{-5x}}{25 \cdot e^{-5x}}$$

| k | $x_k$    | $x_{k+1}$ | $f(x_k)$  |
|---|----------|-----------|-----------|
| 0 | 0        | 0.16      | -4        |
| 1 | 0.16     | 0.270978  | -1.246645 |
| 2 | 0.270978 | 0.321796  | -0.289878 |
| 3 | 0.321796 | 0.321887  | -0.781445 |
| 4 | 0.321887 | 0.321887  | 0.899519  |
| 5 | 0.321887 | 0.321887  | -2.263851 |

⊗ Error de calculo

|   |          |          |
|---|----------|----------|
| 2 | 0.270978 | 0.315925 |
| 3 | 0.315925 | 0.321796 |
| 4 | 0.321796 | 0.321887 |
| 5 | 0.321887 | 0.321887 |

La raíz de la función es 0.321887.



Calculos auxiliares.

$$\frac{0 - 1 - a \cdot e^0}{a^2 \cdot e^0} = \frac{4}{25}$$

$$-1 + a = \frac{4}{25} \cdot a^2$$

$$\frac{4}{25} \cdot a^2 - a + 1 = 0 \rightarrow \textcircled{a_1 = 5}, \quad a_2 = \frac{5}{4}$$

$a > 3$



2) Hermite

$$H(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_1)$$

VER DIBUJO  
EN ENUNCIADO

|   | x | f(x) | f'(x) |
|---|---|------|-------|
| A | 0 | 0    | ?     |
| C | 2 | 4    | 0     |
| B | ? | ?    | -2,5  |

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Pendiente recta B:} \\ \cancel{\frac{1-0}{2-0}} \quad -\frac{2,5}{1} = -2,5 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} C_0 \\ f[x_A] \\ f[x_c] \\ f[x_c] \\ f[x_B] \\ f[x_B] \end{array} \quad \begin{array}{l} C_1 \\ f[x_A, x_c] = 2 \\ f[x_c, x_c] = 0 \\ f[x_c, x_B] = \\ f[x_B, x_B] = -2,5 \end{array} \quad \begin{array}{l} C_2 \\ f[x_A, x_c, x_c] = 1 \end{array}$$

$$f[x_A, x_c] = \frac{4 - 0}{2 - 0} = 2$$

$$f[x_A, x_c, x_c] = \frac{0 - 2}{2 - 0} = -1$$

$$\left[ H(x) = 0 + 2 \cdot (x - 0) - 1 \cdot (x - 0)(x - 2) \right]$$

$$2x - 1[x^2 - 2x] \rightarrow H(x) = -x^2 + 4x$$

$$H(0) = 0 \quad \checkmark$$

$$H(2) = 4 \quad \checkmark$$

$$H'(x) = -2x + 4 \rightarrow -2x + 4 = -2,5$$

$$+2x = 6,5$$

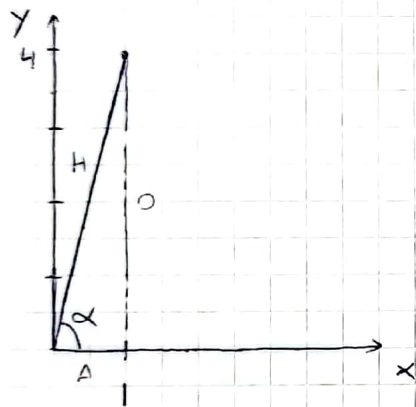
$$x = 3,25$$

$$\begin{aligned}
 H(3.25) &= 2 \cdot 3.25 - [3.25^2 - 2 \cdot 3.25] \\
 &= 3.25^2 + 4 \cdot 3.25 \\
 &= 10.5625 + 13 = 2.4375
 \end{aligned}$$

El punto B está en  $(3.2500; 2.4375)$ .

¿Ángulo de A?  $\rightarrow$  ¿Pendiente en A?

$$H'(x) = -2x + 4 \rightarrow H'(0) = 4$$



SOHCAHTOA

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{OP}{Ay} = \frac{4}{1}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\alpha} &= 75.9638^\circ = \\
 &75^\circ 57' 49.52''
 \end{aligned}$$

8:15

Santiago Langer

Preguntas  
107912

Pregunta 2) Al usar el método directo de eliminación de Gauss, podemos calcular el residuo, identificar el error y refinar la solución.