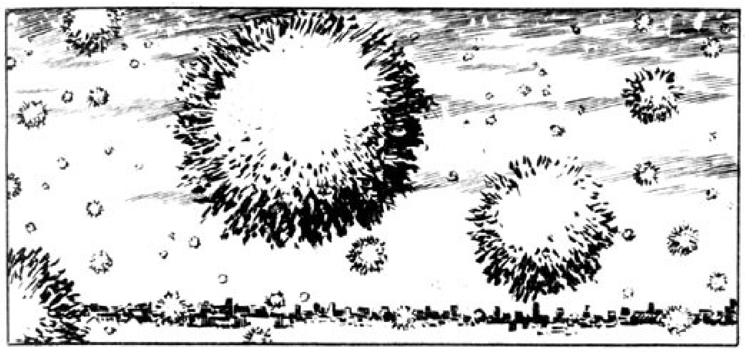
Álgebra II (Curso 23)
Primer cuatrimestre, 2021

# Notas en la emergencia sanitaria:

borradores para la clase del 5 de julio

Sebastian Grynberg



*El único héroe válido es el héroe "en grupo", nunca el héroe individual, el héroe solo.*

H. G. Oesterheld

## Índice

# 1. Matrices ortogonales

## 1.1. Introducción.

En todo lo que sigue consideraremos $\mathbb{R}^n$ con el producto interno canónico $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definido por $\langle x, y \rangle = y^T x$, donde $y^T$ es el traspuesto del vector $y$. De ser necesario, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ también designará el producto interno canónico de $\mathbb{C}^n$. En tal caso $\langle x, y \rangle = y^* x$, donde $y^* = \overline{y^T}$ es el traspuesto conjugado del vector $y$.

**Definición 1.1.** *Decimos que* $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz ortogonal *si*

$$U^T U = U U^T = I, \tag{1}$$

*o, equivalentemente, si* $U^{-1} = U^T$.

**Ejemplo 1.2.** Las matrices

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad S_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix},$$

con $\theta \in \mathbb{R}$, son matrices ortogonales.

**Ejemplo 1.3.** Las matrices

$$R_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

con $\theta \in \mathbb{R}$, son matrices ortogonales.

**Ejemplo 1.4.** Las matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

son matrices ortogonales.

**Ejemplo 1.5.** Las matrices

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

son matrices ortogonales.

**Nota Bene.** Nótese que escribiendo la matriz $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ como un sistema de vectores columna

$$U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix},$$

tenemos

$$U^T U = \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_1^T u_1 & u_1^T u_2 & \cdots & u_1^T u_n \\ u_2^T u_1 & u_2^T u_2 & \cdots & u_2^T u_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n^T u_1 & u_n^T u_2 & \cdots & u_n^T u_n \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Esto significa que $U$ es ortogonal si y solamente si

$$\langle u_j, u_i \rangle = u_i^T u_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Dicho en palabras, $U$ es ortogonal si y solamente sus columnas constituyen una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

Como $(U^T)^T = U$, la simetría de la condición (1) significa que $U$ es ortogonal si y solamente si $U^T$ también lo es. Como las columnas de $U^T$ son las filas de $U$, también resulta que $U$ es ortogonal si y solamente si sus filas constituyen una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.

Los argumentos anteriores se pueden resumir en el siguiente resultado.

**Lema 1.6.** *Sea $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$U$ es ortogonal.*
2. *$U$ es inversible y $U^{-1} = U^T$.*
3. *$U^T$ es ortogonal.*
4. *Las columnas de $U$ constituyen una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.*
5. *Las filas de $U$ constituyen una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.*

**Nota Bene.** Nótese que si $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz ortogonal, entonces

$$\det(U) \in \{-1, 1\}.$$

Esto es así porque $\det(U) \in \mathbb{R}$ y $\det(U^T) = \det(U)$. De $U^T U = I$ y la propiedad distributiva del determinante con respecto al producto de matrices, resulta que $1 = \det(U^T)\det(U) = \det(U)^2$. En consecuencia, $\det(U) \in \{-1, 1\}$.

**Lema 1.7** (Espectro)**.** *Si $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz ortogonal, entonces*

$$\sigma_{\mathbb{C}}(U) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(U - \lambda I) = 0\} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}.$$

*Demostración.* Sean $\lambda \in \sigma_{\mathbb{C}}(U)$ y $z \in \operatorname{nul}(U - \lambda I) \setminus \{0\}$. Como $Uz = \lambda z$ tenemos

$$\|Uz\| = |\lambda|\|z\|.$$

Por otra parte,

$$\|Uz\|^2 = \langle Uz, Uz \rangle = \overline{(Uz)^T} Uz = \overline{z^T U^T} Uz = \overline{z^T} U^T U z = \overline{z^T} z = \|z\|^2.$$

Como $z \neq 0$, de las igualdades $\|Uz\| = \|z\|$ y $\|Uz\| = |\lambda|\|z\|$, se deduce que $|\lambda| = 1$. $\square$

### 1.2. Caracterización geométrica.

**Teorema 1.8.** *Sea $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$U$ es ortogonal.*
2. *$U$ preserva longitudes: $\|Ux\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*
3. *$U$ preserva el producto escalar: $\langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.*

*Demostración.* Ejercicio. □

**Corolario 1.9** (Isometría)**.** *Si $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz ortogonal, entonces la transformación lineal $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ definida por $T(x) = Ux$ preserva las distancias y los ángulos entre vectores.*

**Ejemplo 1.10** (Simetrías ortogonales)**.** Sea $\mathbb{S}$ un subespacio propio de $\mathbb{R}^n$. La matriz $\Sigma$ de la simetría con respecto a $\mathbb{S}$ en la dirección de $\mathbb{S}^\perp$ es una matriz ortogonal.

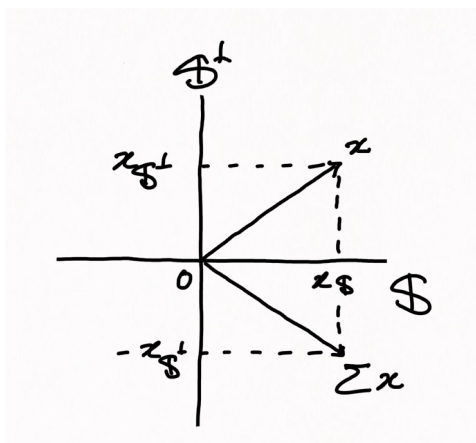



FIGURA 1. Por el Teorema de Pitágoras vale que $\|\Sigma x\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

### 1.3. El grupo ortogonal en $\mathbb{R}^2$.

**Objetivo.** Caracterizar las matices ortogonales de $2\times 2$.

**Desarrollo.** Consideramos una matriz ortogonal

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Como $U^{-1} = U^T$ y $\det(U) \in \{-1, 1\}$ hay dos casos posibles

1. **Caso** $\det(U) = 1$. En este caso, la relación $U^{-1} = U^T$ adopta la forma

$$\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

Como $d = a$ y $c = -b$, tenemos

$$U = \begin{bmatrix} a & -c \\ c & a \end{bmatrix}.$$

Como $a^2+c^2 = 1$, porque $\det(U) = 1$, tenemos que existe un único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $a = \cos\theta$ y $c = \operatorname{sen}\theta$. Por lo tanto,

$$U = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Geométricamente se trata de la rotación de ángulo $\theta$ en sentido antihorario.

2. **Caso** $\det(U) = -1$. En este caso, la relación $U^{-1} = U^T$ adopta la forma

$$\begin{bmatrix} -d & b \\ c & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

Como $d = -a$ y $c = b$, tenemos

$$U = \begin{bmatrix} a & c \\ c & -a \end{bmatrix}.$$

Como $a^2 + c^2 = 1$, porque $\det(U) = -1$, tenemos que existe un único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $a = \cos\theta$ y $c = \operatorname{sen}\theta$. Por lo tanto,

$$U = \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

Nótese que en este caso $U$ es simétrica. En consecuencia, $U^2 = I$. Geométricamente, esto significa que $U$ es una simetría ortogonal. Para encontrar la recta con respecto a la que se realiza la simetría basta identificar los puntos fijos de la misma. Este trabajo se llevó a cabo en el ínciso (**d**) del **Ejercicio 2.25**. Los resultados obtenidos en el inciso (**d**) significan que

$$\begin{aligned} \operatorname{nul}(U - I) &= \operatorname{gen}\left\{ \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \operatorname{sen}(\theta/2) \end{bmatrix} \right\}, \\ \operatorname{nul}(U + I) &= \operatorname{gen}\left\{ \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

En definitiva, $U$ es la simetría ortogonal con respecto a la recta generada por el vector $\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}^T$.

### 1.4. El grupo ortogonal en $\mathbb{R}^3$.

**Objetivo.** Caracterizar las matices ortogonales de $3 \times 3$.

**Desarrollo.** Consideramos una matriz ortogonal $U \in \mathbb{R}^{3\times3}$. Debido a que el polinomio característico de $U$ tiene grado 3, al menos tiene una raíz real. Hay dos casos posibles $1 \in \sigma(U)$ ó $1 \notin \sigma(U)$. En lo que sigue vamos a analizar el caso en que $1 \in \sigma(U)$. El otro caso se reduce a este reemplazando $-U$ por $U$.

1. **Caso** $\mu(1) = 3$**.** En este caso $U = I$.
2. **Caso** $\mu(1) = 2$**.** En este caso $-1 \in \sigma(U)$. De la relación $U^T = U^{-1}$ y la identidad $\langle Ux, y\rangle = \langle x, U^T y\rangle$, se deduce que $\operatorname{nul}(U - I) \perp \operatorname{nul}(U + I)$. En efecto, si $Ux = x$ y $Uy = -y$ podemos escribir

$$\langle x, y\rangle = \langle Ux, y\rangle = \langle x, U^{-1}y\rangle = \langle x, -y\rangle = -\langle x, y\rangle \iff \langle x, y\rangle = 0.$$

En este caso $U$ es diagonalizable y semejante a la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Geométricamente, esto significa que $U$ es la simetría ortogonal con respecto al plano $\mathrm{nul}(U - I)$.

3. **Caso** $\mu(1) = 1$. En este caso $\mathrm{nul}(U - I) = \mathrm{gen}\{v_1\}$ para algún $v_1$ de norma 1. Como $U$ preserva ángulos y longitudes, la isometría que $T(x) = Ux$ induce sobre el subespacio ortogonal a $v_1$ tiene que ser una rotación porque carece de puntos fijos. En tal caso existe una base ortonormal $\{v_2, v_3\}$ del subespacio ortogonal a $v_1$ tal que $v_3 = v_1 \times v_2$ y

$$\begin{aligned} Uv_2 &= \cos\theta v_2 + \operatorname{sen}\theta v_3, \\ Uv_3 &= -\operatorname{sen}\theta v_2 + \cos\theta v_3, \end{aligned}$$

para un único $\theta \in (0, 2\pi)$ Tenemos así que $U$ es semejante a la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Geométricamente, esto significa que $U$ es la rotación de ángulo $\theta$ en sentido antihorario alrededor del eje generado por el vector $v_1$.

**Lema 1.11.** *Sea $U \in \mathbb{R}^{3\times 3} \setminus \{I\}$ una matriz ortogonal tal que $1 \in \sigma(U)$. Sea $\mathbb{S}_1 = \mathrm{nul}(U - I)$ el autoespacio correspondiente al autovalor 1. Vale que*

1. *Si $\det(U) = 1$, entonces $U$ es una rotación alrededor del eje $\mathbb{S}_1$.*
2. *Si $\det(U) = -1$, entonces $U$ es la simetría ortogonal con respecto al plano $\mathbb{S}_1$.*

Si $1 \notin \sigma(U)$. Hay dos posibilidades:

1. **Caso** $\mu(-1) = 3$**.** En este caso $U = -I$.
2. **Caso** $\mu(-1) = 1$**.** En este caso $\mathrm{nul}(U + I) = \mathrm{gen}\{v_1\}$ para algún $v_1$ de norma 1. Extendemos $\{v_1\}$ a una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ $\{v_1, v_2, v_3\}$ tal que $v_3 = v_1 \times v_2$. Argumentando como en el caso $\mu(1) = 1$ podemos deducir que la matriz de la isometría $T(x) = Ux$ con respecto a la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Geométricamente, esto significa que $U$ es una rotación de ángulo $\theta$ en sentido antihorario alrededor del eje generado por el vector $v_1$ seguida de una simetría ortogonal con respecto al complemento ortogonal del eje de rotación.

**Lema 1.12.** *Sea $U \in \mathbb{R}^{3\times 3} \setminus \{-I\}$ una matriz ortogonal tal que $1 \notin \sigma(U)$. Sea $\mathbb{S}_{-1} = \mathrm{nul}(U + I)$ el autoespacio correspondiente al autovalor $-1$. Entonces, $U$ es una rotación alrededor del eje $\mathbb{S}_1$ seguida de una simetría ortogonal con respecto al plano $\mathbb{S}_1^\perp$. En particular, $\det(U) = -1$.*

**Método para hallar el ángulo de rotación.** Supongamos que $U \in \mathbb{R}^{3\times 3} \setminus \{I\}$ es una matriz ortogonal tal que $\det(U) = 1$. Sabemos que $U$ es una rotación de ángulo $\theta$ en sentido antihorario alrededor del eje $\operatorname{nul}(U - I)$. Para encontrar el ángulo de rotación primero se analiza la situación:

> Si se dispone de una base ortonormal $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $\{v_1\}$ es una base de $\operatorname{nul}(U - I)$ y $v_3 = v_1 \times v_2$, la matriz
>
> $$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$
>
> es una matriz ortogonal tal que $\det(P) = 1$ y
>
> $$UP = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$
>
> Se observa que $\theta$ satisface la ecuación
>
> $$1 + 2\cos\theta = \operatorname{tr}(U).$$
>
> Pero como esta ecuación admite dos soluciones en $(0, 2\pi)$, para identificar el ángulo $\theta$ se necesita determinar el signo de $\operatorname{sen}\theta$. Para eso basta observar que
>
> $$\det\left(\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & Uv_2 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{sen}\theta.$$
>
> Esto es así porque
>
> $$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & Uv_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cos\theta \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}.$$

El análisis precedente proporciona el método para hallar el ángulo de rotación $\theta$:

1. Hallar $v_1 \in \operatorname{nul}(U - I)$ tal que $\|v_1\| = 1$. Este vector genera el eje de rotación.
2. Hallar $v_2$ tal que $\|v_2\| = 1$ y $v_2 \perp v_1$.
3. Hallar $\theta \in (0, 2\pi)$ tal que

$$1 + 2\cos\theta = \operatorname{tr}(U) \ \text{ y } \ \operatorname{sen}\theta = \det\left(\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & Uv_2 \end{bmatrix}\right)$$

**Ejemplo 1.13.** Sea

$$U = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Caracterizar la isometría $T(x) = Ux$

**Resolución.** Lo primero es calcular el determinante de $U$: $\det(U) = 1$. Esto significa que $T$ es una rotación.

1. El eje de rotación de $T$ es el autoespacio fijo

$$\operatorname{nul}(U - I) = \operatorname{nul}\left(\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

El vector $v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ es un vector de norma 1 que genera el eje de rotación de $T$.

2. Para determinar el ángulo de rotación $\theta \in (0, 2\pi)$ primero elegimos un vector de norma 1 que sea ortogonal a $v_1$ por ejemplo, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. Sabemos que $\theta$ satisface

$$\cos\theta = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}(U) - 1) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3} - 1\right) = \frac{1}{3},$$

$$\operatorname{sen}\theta = \det\left(\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}\right) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Por lo tanto, $\theta = \arctan(-2\sqrt{2}) + 2\pi$. $\square$

## 2. Teorema espectral para matrices simétricas en $\mathbb{R}^{n\times n}$

**Definición 2.1.** *Decimos que* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz simétrica *si* $A^T = A$.

### 2.1. Resultado fundamental.

**Teorema 2.2.** *Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz simétrica, entonces existe una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ compuesta por autovectores de $A$.*

*Demostración.* Queda pendiente. Las ideas principales se presentan en la Sección 3. $\square$

**Consecuencias.** Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. De acuerdo con el Teorema 2.2 sabemos que existen $n$ números reales, no necesariamente distintos, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, y una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$, $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, tales que

$$A \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}}_{\Lambda}. \tag{3}$$

Dicho de otra manera, existen una matriz diagonal $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y una matriz ortogonal $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que

$$A = U\Lambda U^T. \tag{4}$$

**Definición 2.3.** *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Decimos que $A$* es diagonalizable ortogonalmente *si existen una matriz ortogonal $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y una matriz diagonal $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que*

$$A = U\Lambda U^T.$$

**Nota Bene.** Nótese que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es diagonalizable ortogonalmente, entonces $A$ es simétrica. Por otra parte, si $A$ es simétrica, el argumento expuesto más arriba implica que $A$ es diagonalizable ortogonalmente.

**Corolario 2.4.** *$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es simétrica si solo si $A$ es diagonalizable ortogonalmente.*

### 2.2. Descomposición espectral.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica con espectro $\sigma(A) = \{\lambda_j : j \in \mathbb{I}_k\}$. Como $A$ es diagonalizable ortogonalmente, existen $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal y $\Lambda \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que $A = U\Lambda U^T$. La matriz $U$ se puede organizar en $k$ bloques $U_j \in \mathbb{R}^{n\times\mu(\lambda_j)}$, $j \in \mathbb{I}_k$, de manera tal que las columnas de $U_j$ constituyan una base ortonormal del autoespacio $\text{nul}(A - \lambda_j I)$. Tenemos así que

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & \cdots & U_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 I_{\mu(\lambda_1)} & & & \\ & \lambda_2 I_{\mu(\lambda_2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k I_{\mu(\lambda_k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \\ \vdots \\ U_k^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 U_1 & \lambda_2 U_2 & \cdots & \lambda_k U_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \\ \vdots \\ U_k^T \end{bmatrix} = \lambda_1 U_1 U_1^T + \lambda_2 U_2 U_2^T + \cdots + \lambda_k U_k U_k^T. \end{aligned}$$

Nótese que, para cada $j \in \mathbb{I}_k$, la matriz $P_j = U_j U_j^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz con respecto a la base canónica de la proyección ortogonal sobre el autoespacio correspondiente al autovalor $\lambda_j$.

**Teorema 2.5** (Descomposición espectral)**.** *Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz simétrica con espectro $\sigma(A) = \{\lambda_j : j \in \mathbb{I}_k\}$, entonces*

$$A = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j P_j, \tag{5}$$

*donde $P_j$ es la matriz de la proyección ortogonal sobre el autoespacio correspondiente al autovalor $\lambda_j$.*

**Comentarios.** La descomposición espectral de $A$ es la expresión resumida de todas las propiedades geométricas de la matriz $A$:

1. Para cada $\lambda^* \in \sigma(A)$ vale que
$$\text{nul}(A - \lambda^* I)^\perp = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(A):\lambda\neq\lambda^*} \text{nul}(A - \lambda I).$$
Esto significa que dado un autovalor de $A$ sus autovectores son ortogonales a todos los autovectores que corresponden a los otros autovalores de $A$.
2. $\mathbb{R}^n$ se descompone en la suma directa de todos los autoespacios de $A$,
$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(A)} \text{nul}(A - \lambda I).$$
Esto significa que todo vector $x \in \mathbb{R}^n$ se descompone de manera única en la forma
$$x = \sum_{\lambda\in\sigma(A)} x_\lambda,$$
donde, para cada $\lambda \in \sigma(A)$, $x_\lambda \in \text{nul}(A - \lambda I)$. De hecho, $x_\lambda$ es la proyección ortogonal del vector $x$ sobre el autoespacio correspondiente al autovalor $\lambda$.

3. Si $x_\lambda$ designa la componente de $x$ correspondiente al autovalor $\lambda$, entonces

$$Ax_\lambda = \lambda x_\lambda.$$

Geométricamente, esto significa que la acción de $A$ sobre $\mathbb{R}^n$ consiste en lo siguiente: dilata las componentes del vector $x$ que corresponden a los autovalores de módulo mayor o igual que 1, contrae las componentes de $x$ que corresponden a los autovalores de módulo menor que 1. En el caso que se trate de autovalores negativos, esos cambios de escala están acompañados de un cambio en el sentido de la respectiva componente.

## 3. Esquema de la demostración (Método variacional)

En esta sección se presentan los pasos principales de la demostración del Teorema 2.2.

**Paso 1.** Sea $S_{n-1}$ la esfera unitaria de $\mathbb{R}^n$

$$S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}.$$

Consideramos la función $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi(x) = \langle Ax, x\rangle = x^T Ax.$$

Observamos que $\Phi$ es continua en $\mathbb{R}^n$ y que $S_{n-1}$ es un conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. En consecuencia $\Phi$ alcanza un máximo absoluto en algún $u_1 \in S_{n-1}$.

Consideramos ahora un vector $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrario pero fijo. La función $\varphi_x : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi_x(t) = \Phi\left(\frac{u_1 + tx}{\|u_1 + tx\|}\right)$$

es derivable y alcanza un máximo en $t = 0$. Por lo tanto,

$$\left.\frac{d}{dt}\varphi_x(t)\right|_{t=0} = 0.$$

Hacemos esa cuenta. Para eso observamos que

$$\begin{aligned}
\varphi_x(t) &= \left\langle A\left(\frac{u_1 + tx}{\|u_1 + tx\|}\right), \frac{u_1 + tx}{\|u_1 + tx\|}\right\rangle \\
&= \frac{\langle Au_1 + tAx, u_1 + tx\rangle}{\|u_1 + tx\|^2} \\
&= \frac{\langle Au_1, u_1\rangle + t\,\langle Au_1, x\rangle + t\,\langle Ax, u_1\rangle + t^2\,\langle Ax, x\rangle}{1 + 2t\,\langle u_1, x\rangle + t^2\|x\|^2}.
\end{aligned}$$

Utilizando las reglas de derivación obtenemos que

$$\frac{d}{dt}\varphi_x(t) = \frac{f(t)}{\|u_1 + tx\|^4},$$

donde

$$\begin{aligned}
f(t) =& (\langle Au_1, x\rangle + \langle Ax, u_1\rangle + 2t\,\langle Ax, x\rangle)\|u_1 + tx\|^2 \\
&- (2\,\langle u_1, x\rangle + 2t\|x\|)\,\langle Au_1 + tAx, u_1 + tx\rangle.
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\frac{d}{dt}\varphi_x(t)\bigg|_{t=0} = \frac{f(0)}{\|u_1\|^4} = \langle Au_1, x\rangle + \langle Ax, u_1\rangle - 2\langle u_1, x\rangle \langle Au_1, u_1\rangle .$$

Ahora recordamos que $A$ es simétrica, y por ese motivo vale que

$$\begin{aligned}\langle Au_1, x\rangle &= \langle u_1, Ax\rangle \\ &= \langle Ax, u_1\rangle\end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$\frac{d}{dt}\varphi_x(t)\bigg|_{t=0} = 0 \iff \langle Au_1, x\rangle - \langle Au_1, u_1\rangle \langle u_1, x\rangle = 0.$$

Escribiendo $\lambda_1 := \langle Au_1, u_1\rangle$ tenemos que

$$0 = \langle Au_1, x\rangle - \lambda_1 \langle u_1, x\rangle = \langle Au_1 - \lambda_1 u_1, x\rangle .$$

Como $x$ es arbitrario, se deduce que $Au_1 - \lambda_1 u_1 = 0$, y de allí que $Au_1 = \lambda_1 u_1$ donde $u_1 \neq 0$ porque $\|u_1\| = 1$. Esto significa que $\lambda_1$ es un autovalor de $A$ y que $u_1$ es un autovector asociado a $\lambda_1$.

**Paso 2.** Ahora observamos que las matices simétricas gozan de la siguiente propiedad.

**Lema 3.1.** *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Si $\mathbb{S}$ es un subespacio invariante por $A$, en el sentido de que $\{Ax : x \in \mathbb{S}\} \subset \mathbb{S}$, entonces $\mathbb{S}^\perp$ también es invariante por $A$.*

*Demostración.* Consideramos $x \in \mathbb{S}$ e $y \in \mathbb{S}^\perp$ y hacemos una cuenta

$$\langle Ay, x\rangle = \left\langle y, A^T x\right\rangle = \langle y, Ax\rangle = 0$$

porque $Ax \in \mathbb{S}$. □

**Paso 3.** Reiteramos el argumento del **Paso 1** restringiendo la función $\Phi$ al conjunto

$$\left\{x \in S_{n-1} : x \in u_1^\perp\right\}.$$

Etcétera ... □