Problema 1

Precisión 4 decimales

LU doolittle S/PV

8 (OCHO)

Ignacio grassi 109329

$$\begin{pmatrix} 10^{-5} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$Ax=b$

$\underbrace{LUx}_{y}=b$

$\begin{cases} Ly=b \\ Ux=y \end{cases}$

Por Doolittle: $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m_{21} & 1 \end{bmatrix}$

$U = [\nabla]$

Triang. sup de gauss.

Triangulando A

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{1}{10^{-5}} = 100.000$$

$$m_{21}E_1 = [\,1 \quad 100.000\,]\ 100000$$

$$E_2 - m_{21}E_1 = [\,0 \quad -99.999\,]\ -100000$$

$$U = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 1 \\ 0 & -99.999 \end{bmatrix}\ -100000$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 100.000 & 1 \end{bmatrix}$$

$Ly=b$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 100.000 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} 1 \\ -100.000 \end{matrix}$$

$y_1 = 1$

$y_2 = -100.000\overset{1}{y_1}$

$Ux=y$

$$\begin{bmatrix} 10^{-5} & 1 \\ 0 & -99.999 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -100.000 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \frac{-100.000}{-99.999} = \overbrace{1,0000}^{4\,dec}1 = 1$$

$$x_1 = \frac{1-x_2}{10^{-5}} = \frac{1-1}{10^{-5}} = 0$$

b) con P_v

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 10^{-5} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \overset{\text{Vector de P.V.}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-5} & 1 \end{pmatrix}$$

$$p \rightarrow P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A' = PA$$

$Ax=b$

$\underbrace{PA}_{}x=Pb$

$A'x=B$

$LUx=B$

Y ahora resolvemos el mismo sistema pero con la matriz, y término independiente, pivotados.

Buscamos entonces la matriz A' descompuesta

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-5} & 1 \end{pmatrix} \qquad m_{21}E_1 = [\,10^{-5} \quad 10^{-5}\,]$$

redondeo simétrico

$$E_2 - m_{21}E_1 = [\,0 \quad \overbrace{0{,}99999}^{}\,]$$

$$m_{21} = \frac{10^{-5}}{1} = 10^{-5}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10^{-5} & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P \cdot b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y resolviendo los sistemas $\underbrace{LU}_{y}x = B$

$$Ly = B \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10^{-5} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = \dfrac{1 - \overset{y_1}{0}}{1} = 1 \end{array}$$

$$Ux = y \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \rightarrow x_2 = 1 \\ \rightarrow x_1 = \dfrac{-1 \cdot x_2}{1} = -1 \end{array}$$

c) $x^{a)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad x^{b)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

el resultado varía enormemente debido al pivoteo. En el primer caso no teníamos una matriz diagonal dominante y también "perdimos" apreciación con la imposición de 4 decimales.

Si en a) no hubiéramos tenido que redondear el x_2 al resolver $Ux = y$

$$x_2 = 1{,}00001 \xrightarrow[x_1 = \frac{1 - x_2}{10^{-5}}]{} x_1 = \frac{1 - 1{,}00001}{10^{-5}} = \frac{-1 \times 10^{-5}}{10^{-5}} = -1$$ que es el resultado que obtuvimos en b)

en cambio en b) tuvimos únicamente el error de redondeo al pasar de $\underbrace{0{,}9999}_{4\,dec}\underbrace{9}_{Red\ sim} \Rightarrow 1$

con lo que el resultado de b) tampoco es exacto

Ej 2 ENL

Ignacio grassi 109329

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{2x_n - 1{,}5}$$

$x_0 = 0{,}9$ a)

n	x	ε
0	0,9	–
1	2,7	1,8
2	1,8692307	0,8307693
3	1,560904	0,3083267
4	1,502287	0,058617
5	1,5000035	0,0022835

b) orden de convergencia

$$P = \frac{\ln(\varepsilon^{n+1}) - \ln(\varepsilon^{n})}{\ln(\varepsilon^{n}) - \ln(\varepsilon^{n-1})} = 1{,}955 \simeq 2$$

el numero de P hace referencia a la velocidad con la que convergemos al resultado, y dado que en 5 iteraciones nos aproximamos claramente al 1,5, se verifica el P=2

c) Dada la alta convergencia del método, suponemos $x^{n+1} = x^n - \frac{F(x^n)}{F'(x^n)}$ $= x^n - \frac{F(x^n)}{F(x_{n+1}) \dots}$ que nos encontramos en Newton raphson, donde la ec. a iterar es

$$g(x) = \frac{x_n F'(x_n) - F(x_n)}{F'(x_n)} = \frac{x_n F(x_n) - F(x_n)}{F'(x_n)} \qquad F(x) = x^2 - 1{,}5x$$

y de analizar el denom de x_{n+1}, buscamos una $F(x)$ que verifique $F'(x) = 2x - 1{,}5$, como lo hace la familia $F(x) = x^2 - 1{,}5x + C$, suponiendo $C = 0$

$$F(x) = x^2 - 1{,}5x$$

$$0 = x(x - 1{,}5)$$ raiz en 0 y en 1,5

$$g(x) = x - \frac{F(x)}{F'(x)} = \frac{xF'(x) - F(x)}{F'(x)}$$

$$g(x) = \frac{x(2x-1{,}5) - x^2 + 1{,}5x}{2x - 1{,}5} = \frac{2x^2 - \cancel{1{,}5x} - x^2 + \cancel{1{,}5x}}{2x - 1{,}5} = \frac{x^2}{2x - 1{,}5}$$

Problema 3

evaluamos la condición del problema a partir de

$K(A) = \|A\| \, \|A^{-1}\|$, Adoptando norma infinita.

rec. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 900 & -200 \\ -800 & 901 \end{bmatrix}$$

$|A| = 900 \cdot 901 - [-200 \cdot (-800)]$

$= 900$

$$A^{-1} = \frac{1}{900} \begin{bmatrix} 901 & 200 \\ 800 & 900 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}0025 & 0{,}5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

¿Cómo se obtuvo?

$$\|A\|_\infty = \max \begin{pmatrix} 600 \\ 1201 \end{pmatrix} = 1201$$

$K(A) = 1201 \cdot 3 = 3603$

$$\|A^{-1}\|_\infty = \max \begin{pmatrix} 1{,}5025 \\ 3 \end{pmatrix} = 3$$

como no se cumple que $1 \leq K(A) \leq 100$, entonces la matriz está mal condicionada.

el mal condicionamiento se genera cuando la matriz no es diagonal dominante, que en este caso se traduce a que el elemento mas grande de cada columna, (en módulo) ha de ser perteneciente a la diag principal al momento de triangular

el mecanismo causante del error será, en gauss, al calcular el multiplicador

$m_{21} = \frac{-800}{900} = -2$. Para que esté bien condicionado, el m_{21} debería ser mas pequeño.

el denom debería ser + grande

Diag dom si $|a_{ii}| \geq \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$

$A^{-1} \rightarrow$ elim. gaussiana.