1. Hallar todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales vale que:

$$\overbrace{\text{gen}\left\{\underset{v_1}{\begin{bmatrix}1\\a\\2\end{bmatrix}}, \underset{v_2}{\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{bmatrix}3\\-3\\a\end{bmatrix}}\right\}}^{S_1} = \overbrace{\text{gen}\left\{\underset{v_1}{\begin{bmatrix}1\\a\\2\end{bmatrix}}, \underset{v_3}{\begin{bmatrix}3\\-3\\a\end{bmatrix}}\right\}}^{S_2},$$

Para que $S_1 = S_2$ $\quad v_2$ debe ser CL de v_1 y v_3

$$\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\a\\2\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\-3\\a\end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \alpha + 3\beta &= 1 \\ a\alpha - 3\beta &= 3 \\ 2\alpha + a\beta &= 2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ a & -3 & 3 \\ 2 & a & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F_2 - aF_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3-3a & 3-a \\ 0 & a-6 & 0 \end{array}\right)$$

$$(a-6)\beta = 0 \qquad a = 6 \ \vee \ \beta = 0$$

Si $a = 6$ $\qquad (-3-18)\beta = 3-6 \qquad \beta = 1/7$

$$\alpha = 1 - 3/7 = 4/7$$

$$\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} = 4/7\begin{pmatrix}1\\6\\2\end{pmatrix} + 1/7\begin{pmatrix}3\\-3\\6\end{pmatrix} \qquad \boxed{a = 6}$$

Si $\beta = 0 \Rightarrow (-3-3a)\cdot 0 = 3 - a \Rightarrow$

$$\boxed{a = 3} \qquad \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

$$\alpha = 1$$

Otra forma $\{v_1, v_2, v_3\}$ debe ser LD $\Rightarrow$

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ a & 3 & -3\\ 2 & 2 & a\end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (3a+6) - (a^2+6) + 3(2a-6) = 0$$

$$-a^2 + 9a - 18 = 0 \Rightarrow a = 3 \ \vee \ a = 6$$

2. Sea Π la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el $\overset{S_1}{\text{plano}}$ $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ en la dirección de la $\overset{S_2}{\text{recta}}$ $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_3 = 0\}$. Hallar la imagen por Π del triángulo de vértices $[2\ \ 1\ \ 0]^T$, $[1\ \ 1\ \ 1]^T$, $[1\ \ 0\ \ 1]^T$.

$\Pi_{S_1 S_2}$

$$S_1 = \text{gen}\left\{\underset{v_1}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}\underset{v_2}{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}\right\} \qquad S_2 = \text{gen}\left\{\underset{v_3}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}}\right\}$$

$$\Pi_{S_1 S_2}(v_1) = v_1 \qquad \Pi_{S_1 S_2}(v_2) = v_2 \qquad \Pi_{S_1 S_2}(v_3) = 0$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

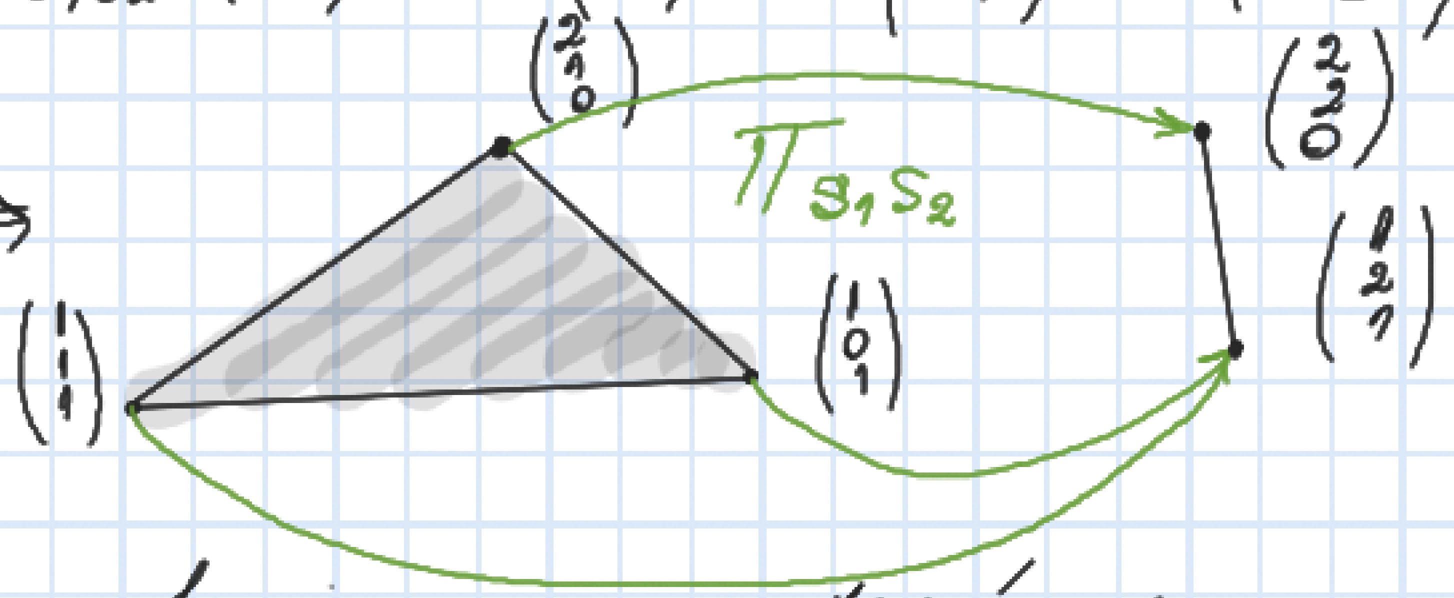
$$\alpha = x \qquad \beta = z \qquad \alpha + \beta + \gamma = y$$

$$\gamma = y - x - z$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (y - x - z) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \pi_{S_1 S_2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+z \\ z \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$



La imagen del triángulo es el segmento de extremos $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad 0 \leq t \leq 1$$

---

3. Hallar la solución de la ecuación diferencial $y'' - 5y' + 6y = 5e^{2x}$ tal que $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Homogénea $\quad y'' - 5y' + 6y = 0$

$$r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3) = 0$$

$$y_h = k_1 e^{3x} + k_2 e^{2x}$$

$$y_p = a\,x\,e^{2x}$$

e^{2x} satisface la homogénea

$$y_p' = a e^{2x} + 2a x e^{2x}$$

$$y_p'' = 2a e^{2x} + 2a e^{2x} + 4a x e^{2x}$$

$$\left(4a e^{2x} + \cancel{4a x e^{2x}}\right) - 5a e^{2x} - \cancel{10 a x e^{2x}} + \cancel{6 a x e^{2x}} = 5e^{2x}$$

$$-a e^{2x} = 5e^{2x} \Rightarrow a = -5$$

$$y = k_1 e^{3x} + k_2 e^{2x} - 5x e^{2x}$$

$$y(0) = k_1 + k_2 = 0 \quad (1)$$

$$y' = 3k_1 e^{3x} + 2k_2 e^{2x} - 5e^{2x} - 10x e^{2x}$$

$$y'(0) = 3k_1 + 2k_2 - 5 = 0 \quad (2)$$

(1) y (2) $\qquad k_1 = 5 \qquad k_2 = -5$

$$y = 5e^{3x} - 5e^{2x} - 5x e^{2x}$$

4. Se considera el espacio euclídeo $(\mathbb{R}_2[x], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle x, y\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

Calcular la distancia del polinomio x^2 al subespacio gen$\{1, x\}$.

$\{1, x\}$ no es una BOG no se puede aplicar la fórmula

$$S^\perp = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : \langle p, 1\rangle = \langle p \cdot x\rangle = 0\}$$

$$\int_0^1 (a+bx+cx^2) \cdot 1\, dx = a + b/2 + c/3 = 0$$

$$\int_0^1 (a+bx+cx^2)\, x\, dx = a/2 + b/3 + c/4 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 6a + 3b + 2c = 0 \\ 6a + 4b + 3c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} b + c = 0 \\ 6a + b = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l} b = -c \\ a = -1/6\, b \end{array}$$

Elijo $a = 1 \quad b = -6 \quad c = 6$

$$S^\perp = \text{gen}\{1 - 6x + 6x^2\}$$

$$x^2 = \underbrace{\overset{1/6}{\alpha}(1-6x+6x^2)}_{\in S^\perp} + \underbrace{\overset{-1/6}{\beta} \cdot 1 + \overset{1}{\gamma}\, x}_{\in S} \Rightarrow$$

$$P_{S^\perp}(x^2) = 1/6 - x + x^2$$

Otra forma

$$P_{S^\perp}(x^2) = \frac{\langle x^2, (1-6x+x^2)\rangle}{\|(1-6x+x^2)\|^2}(1-6x+x^2)$$

$$d(x^2, S) = \|1/6 - x + x^2\| =$$

$$= \left(\int_0^1 (1/6 - x + x^2)^2 dx\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{180}} =$$

$$\boxed{= \frac{\sqrt{5}}{30}}$$

5. Hallar la solución por mínimos cuadrados de norma mínima de la ecuación

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$A \quad x \quad = B$$

$$B \notin Col(A) \Rightarrow \quad A\hat{x} = \text{Proy}_{Col(A)} B$$

$$A^T A \hat{x} = A^T B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

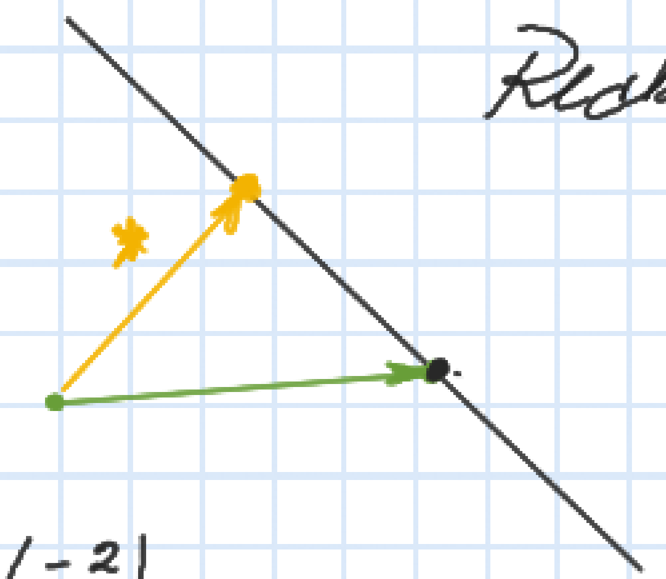
$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} F_2 + F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 7 \\ \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{7} \end{array}\right) \Rightarrow \hat{x} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 7/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in Nul(A)}$$

De todas las soluciones la de norma mínima* $\in Fil(A)$ (es decir es $\perp$ a $Nul(A)$)

$$(4/3 - 2x_3)(-2) + (7/3 - x_3)(-1) + x_3 \cdot 1 = 0$$

$$-8/3 + 4x_3 - 7/3 + x_3 + x_3 = 0 \qquad \Rightarrow x_3 = 5/6$$



Recta que pasa por $\begin{pmatrix} 4/3 \\ 7/3 \\ 0 \end{pmatrix}$ y tiene la dirección del $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ que es generador del $Nul(A)$

$\Rightarrow \hat{x}$ de norma mínima

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 7/3 \\ 0 \end{pmatrix} + 5/6 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 3/2 \\ 5/6 \end{pmatrix}$$