Guía 4

Preliminares

En todo lo que sigue

1. $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.
2. $\mathbb{K}^n$ es el $\mathbb{K}$-espacio euclídeo canónico y $\|\cdot\|$ designa su norma inducida.
3. Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de vectores en $\mathbb{K}^n$ y $x \in \mathbb{K}^n$, decimos que x_k *tiende a* x, cuando
$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x\| = 0.$$
En tal caso x se llama *el límite de la sucesión* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y se denota por $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x$.
4. $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{K}^{n\times n} \times \mathbb{K}^{n\times n} \to \mathbb{K}$ designa el producto interno canónico en $\mathbb{K}^{n\times n}$ definido por $\langle A, B\rangle := \operatorname{tr}(B^*A)$ y $\|A\|_F := \sqrt{\langle A, A\rangle}$ designa su norma inducida, llamada la *norma de Frobenius.*
5. Si $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de matrices en $\mathbb{K}^{n\times n}$ y $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, decimos que A_k *tiende a* A, cuando
$$\lim_{k\to\infty} \|A_k - A\|_F = 0.$$
En tal caso A se llama *el límite de la sucesión* $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y se denota por $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$.

Definiciones

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.

1. $\lambda \in \mathbb{K}$ se llama un *autovalor de* A, cuando existe un vector no nulo $x \in \mathbb{K}^n$ tal que $Ax = \lambda x$. En tal caso, el vector x se llama un *autovector de* A *correspondiente al autovalor* λ.
2. El conjunto de todos los autovalores de A se llama *el espectro de* A, y se lo denota mediante $\sigma(A)$.
3. Si $\lambda \in \sigma(A)$, el subespacio $\mathbb{S}_\lambda := \operatorname{nul}(A - \lambda I)$ se llama el *autoespacio correspondiente a* λ. La dimensión de $\mathbb{S}_\lambda$ se llama la *multiplicidad geométrica de* λ y la se denotaremos mediante $\mu(\lambda)$.
4. El polinomio $\chi_A(x) = \det(A - xI)$ se denomina *el polinomio característico de* A. Nótese que $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} : \chi_A(\lambda) = 0\}$.
5. La *multiplicidad algebraica* de $\lambda \in \sigma(A)$ es su multiplicidad como raíz del polinomio característico de A y la designaremos mediante $m(\lambda)$:
$$m(\lambda) = \max\left\{k \in \mathbb{N} : \chi_A(x) = (x-\lambda)^k q(x),\ \text{con } q \in \mathbb{K}[x]\right\}.$$
6. Si $B \in \mathbb{K}^{n\times n}$, decimos que A *es semejante a* B cuando existe una matriz inversible $P \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tal que $A = PBP^{-1}$.
7. Decimos que A es diagonalizable cuando A es semejante a una matriz diagonal.

8. Dados $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, utilizaremos la notación $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ para designar a la matriz diagonal
$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}$$
9. Dadas p matrices $A_i \in \mathbb{K}^{n_i \times n_i}$, con $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$, utilizaremos la notación $A = \operatorname{diag}(A_1, A_2, \dots, A_p)$ para designar a la matriz diagonal en bloques
$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_p \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^{n\times n}.$$

Algunas propiedades

Matrices diagonalizables.

1. Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:
   a) A es diagonalizable.
   b) Existe una base $\mathbb{K}^n$ compuesta por autovectores de A.
   c)
   $$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} \operatorname{nul}(A - \lambda I).$$
   d)
   $$\chi_A(x) = \prod_{\lambda \in \sigma(A)} (x - \lambda)^{\mu(\lambda)}.$$
2. Si $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ es diagonalizable y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{K}^n$ compuesta por autovectores de A correspondientes a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, respectivamente, entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ vale que
   $$A^k \left(\sum_{j=1}^n c_j v_j \right) = \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j^k v_j,$$
   donde $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{K}$.

Teorema espectral.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ una matriz con espectro $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q\}$. A es diagonalizable si y sólo si existen matrices $G_1, G_2, \dots, G_q \in \mathbb{K}^{n\times n}$ tales que

$$A = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2 + \cdots + \lambda_k G_q, \tag{1}$$

donde las G_i tienen las siguientes propiedades

- G_i es la proyección sobre $\operatorname{nul}(A - \lambda_i I)$ en la dirección de $\operatorname{col}(A - \lambda_i I)$.
- $G_i G_j = 0$ para $i \neq j$.
- $G_1 + G_2 + \cdots + G_q = I$.

El desarrollo (1) se denomina la *descomposición espectral* de A, y las G_i se llaman los *proyecciones espectrales* asociadas.

Ejercicios

4.1 En cada uno de los siguientes casos, hallar el polinomio característico de la matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, analizar si la misma es diagonalizable, y en caso de serlo hallar una matriz inversible $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y una matriz diagonal $\Lambda \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que $A = P\Lambda P^{-1}$:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 20 & 3 & 10 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

4.2 🛑 Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que tiene autovalores $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$ con autovectores asociados

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T, \; v_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T, \; v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T,$$

respectivamente.

(**a**) Hallar una base de $\mathrm{nul}(A)$ y una base de $\mathrm{col}(A)$.

(**b**) Hallar una solución particular de la ecuación $Ax = v_2 + v_3$.

(**c**) Hallar todas las soluciones de la ecuación $Ax = v_2 + v_3$

(**d**) Explicar por qué la ecuación $Ax = v_1$ no tiene solución.

☞: *Si se halla la expresión de A, el ejercicio se auto-destruye y no sirve para nada.*

4.3 Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ una matriz tal que

$$\begin{aligned} \mathrm{nul}(A) &= \mathrm{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T, \right\}, \\ \mathrm{nul}(A+I) &= \mathrm{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T \right\}, \\ \mathrm{nul}(A-2I) &= \mathrm{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}. \end{aligned}$$

(**a**) ¿A es diagonalizable?

(**b**) Calcular $A\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$.

(**c**) Hallar las soluciones de la ecuación $Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$

4.4 🛑 Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la matriz definida en el ejercicio anterior.

(**a**) Calcular $A^6 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

(**b**) Calcular $A^7 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$.

(**c**) Hallar las soluciones de la ecuación $A^4 x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.

(**d**) Determinar el espectro de $A^{36} - A^{35}$.

4.5 Determinar, en cada uno de los siguientes casos, $\sigma(A)$.

(**a**) $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es una matriz diagonalizable tal que $\operatorname{tr}(A) = -4$ y $\sigma(A^2 + 2A) = \{-1, 3, 8\}$.

(**b**) $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ es una matriz diagonalizable tal que $\det(A) = 6$ y $\{-2, 1\} \subset \sigma(A)$ y $-4 \in \sigma(A - 3I)$.

4.6 Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que posea las siguientes propiedades:

(**a**) $A^2 - 3A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

(**b**) $A^2 - 3A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ y $\det(A) = -1$.

(**c**) $A^2 - 3A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ y $\operatorname{tr}(A) = 6$.

4.7 Dos especies comparten el mismo ecosistema. La primera, la *presa*, se multiplicaría indefinidamente si estuviera sola. La segunda, la *depredadora*, se alimenta de la presa, por lo que si se quedara sola se extinguiría por falta de alimentos. La evolución de la cantidad de individuos de las dos especies x_n, y_n se puede modelar por un sistema de ecuaciones en diferencias,

$$\begin{cases} x_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{10}\right) x_n - p y_n & \text{(ecuación de evolución de la presa)}, \\ y_{n+1} = \frac{1}{2} x_n + \left(1 - \frac{4}{10}\right) y_n & \text{(ecuación de evolución de la depredadora)}, \end{cases}$$

donde $p > 0$, que se denomina el *parámetro de predación.*

(**a**) Notar que en la primera ecuación, el coeficiente $1 + \frac{2}{10}$ significa que en ausencia de la segunda (i.e., $y_n = 0$), la primera especie crece a una tasa del 20 % por unidad de tiempo; mientras que el coeficiente $-p$ significa que la presencia de la segunda (i.e., $y_n > 0$) contribuye negativamente al crecimiento de la primera.

(**b**) Notar que en la segunda ecuación, el coeficiente $1 - \frac{4}{10}$ significa que en ausencia de la primera (i.e. $x_n = 0$), la segunda especie se extingue a una tasa del 40 % por unidad de tiempo; mientras que el coeficiente $\frac{1}{2}$ significa que la presencia de la primera (i.e., $x_n > 0$) contribuye al crecimiento de la segunda: cada pareja de individuos de la primera contribuye a la existencia de un nuevo individuo de la segunda en el siguiente ciclo.

(**c**) Notar que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale que

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 & -p \\ 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

donde $\begin{bmatrix} x_0 & y_0 \end{bmatrix}$ representa las cantidades iniciales de individuos de las dos especies.

(**d**) Hallar los valores de p para los cuales la matriz del sistema resulta diagonalizable.

(**e**) Para cada $p \in \{0.175, 0.16, 0.1\}$ analizar el comportamiento a largo plazo de las dos especies.

4.8 Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definida por

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

(**a**) Hallar el espectro de A y comprobar que A es diagonalizable.

(**b**) Usando la descomposición espectral de A comprobar que existe $M \in \mathbb{R}^+_*$ tal que

$$\|A^n - G_1\|_F \leq M \left(\frac{3+\sqrt{2}}{10} \right)^n,$$

donde G_1 es la matriz de la proyección sobre $\mathrm{nul}(A-I)$ en la dirección de $\mathrm{col}(A-I)$. Utilizar este resultado para concluir que

$$\lim_{n\to\infty} A^n = G_1.$$

4.9 Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definida por

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 7 & 6 & 6 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(**a**) Comprobar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|A^n\|_F}{2^n} > 0$$

y concluir que no existe $\lim_{n\to\infty} A^n$.

(**b**) Comprobar que el conjunto $\left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \lim_{k\to\infty} A^n x = 0 \right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y hallar una base del mismo.

(**c**) Comprobar que el conjunto $\mathbb{S} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \text{existe } \lim_{k\to\infty} A^n x \right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y hallar una base del mismo.

(**d**) Comprobar que $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T \in \left\{ \lim_{k\to\infty} A^n x : x \in \mathbb{S} \right\}$ y hallar todas las soluciones de la ecuación $\lim_{k\to\infty} A^n x = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T$.
