ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Primer recuperatorio
Duración: 3 horas.

Primer cuatrimestre – 2023
10/VI/23 – 9·00 hs.

Apellido y N mbres:

Legajo:

Curso·

---

1. En $\mathbb{R}\ [x]$ se consideran los subespacios $\mathbb{S}$ y $\mathbb{S}_2$ definidos por

$$\mathbb{S}_1 = \{p \in \mathbb{R}\ [x]\ .\ p(0) - p\ 1) = 0\},$$
$$\mathbb{S}_2 = \{p \in \mathbb{R}_3\ x] : p(1) \quad p(2) - 0\}.$$

Halla un bas de $\mathbb{R}_3\ x$ que contenga a un bas de $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}$ y a una base de $\mathbb{S}\ + \mathbb{S}$.

---

2. Se $\mathbb{W} = \left\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2}\ .\ A^T - A\right\}$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de as matrices simétri as d $\mathbb{R}^{2\times 2}$ y sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{W}$ la transformación lineal definida por

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde $\mathcal{B}$ es la bas de $\mathbb{R}^3$ d finida por $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right\}$ y $\mathcal{C}$ es la base de $\mathbb{W}$ definida por

$$C = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Hallar la preimagen por T de a m tri $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

---

3. S a $\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida po $\Pi(x) = Ax$, donde

$$A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Comprobar qu Π es una proyección y halla una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[\Pi]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

---

4. En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico se considera $P_{\mathbb{S}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal sobre el ubespacio

$$\mathbb{S} = \mathrm{g\ n}\left\{\begin{bmatrix}2 & 3 & 6\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}3 & -6 & 2\end{bmatrix}^T\right\}$$

Hallar todos los $x \in \mathbb{R}^3$ tale qu $P\ (x) - \begin{bmatrix}2 & 3 & 6\end{bmatrix}^T$ cu a d stancia al orig n sea igual a 25.

---

5. Entre toda las soluciones por mínimos cuadrados de la ecuación

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

determinar la de norma mínima.

1) Una base de S_1 es:

$$B_{S_1} = \{ x\cdot(x-1)^2 ,\ x\cdot(x-1)\cdot(x-2) \}$$

y $$B_{S_2} = \{ x\cdot(x-1)\cdot(x-2) ,\ (x-1)^2\cdot(x-2) \}$$

$$\Rightarrow B_{S_1 \cap S_2} = \{ x\cdot(x-1)\cdot(x-2) \}$$

linealmente independiente

y $$B_{\mathbb{R}_3[x]} = \{ x(x-1)(x-2),\ \underbrace{x(x-1),\ (x-1)(x-2)}_{B_{S_1+S_2}},\ 1 \}$$

2)

$$[A]^C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{busco } x \ / \ T(x) = A$$

o lo q' es igual

$$[T]_B^C (x)^B = [A]^C$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Si $(x)^B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{l} a + c = 1 \\ b + c = 2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - c \\ b = 2 - c \end{cases}$

$$x = (1-c)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (2-c)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

3)

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$A^2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}} \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \cancel{\frac{1}{3}\cdot 3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\end{pmatrix} = A \Rightarrow \Pi^2 = \Pi$$

$$B = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}_{B_{Nu(A)}}, \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}}_{B_{Col(A)}} \Big\}$$

4) Con el p.i canónico $S^\perp = gen\left\{\begin{pmatrix}6\\2\\-3\end{pmatrix}\right\}$

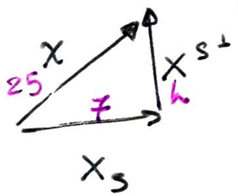
$$\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 3 & 6\\ 3 & -6 & 2\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}42\\14\\-21\end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix}6\\2\\-3\end{pmatrix}$$

Los x que busco son de la forma

$x = \underbrace{\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}}_{x_S} + \underbrace{\lambda \cdot \begin{pmatrix}6\\2\\-3\end{pmatrix}}_{x_{S^\perp}}$. Por otra parte $\left\|\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{49} = 7$

$\rightarrow \lambda^2 \cdot 49 = 576$

$\lambda^2 = \frac{576}{49}$



Pitagoras

$25^2 = 7^2 + h^2$

$h^2 = 576 \Rightarrow h = 24$

$$\Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \pm \sqrt{\frac{576}{49}} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \pm \frac{24}{7} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}}$$

5) La x de norma mínima está en Fil(A)

$$x \in \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow x = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = P_{\text{gen}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{12}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1° ec: $\quad \alpha \cdot (1+4+9) = \frac{12}{14}$

$$\alpha = \frac{12}{14^2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{49} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}$$