P1 2023 1C

jueves, 18 de mayo de 2023 16:23

75.12 - 95.04 - 95.13 - METODOS MATEMATICOS Y NUMERICOS – PARCIAL – 15/5/23 TEMA 1

P1	P2	P3	P4	NOTA

Problema 1
Dada la grilla de pares ordenados X e Y:

X	-1.0	0.0	1.0	2.0
Y	0.40	1.0	2.8	7.4

1a) Seleccionar una de las siguientes tres funciones que permite plantear un ajuste por cuadrados mínimos y obtener los coeficientes a través de un sistema lineal de ecuaciones. Justificar la elección de dicha función y las razones por las cuales descarta las otras dos opciones:

$f_1(x) = \sin(ax).\cos(bx)$ $\qquad f_2(x) = ae^{bx}$ $\qquad f_3(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$

Desarrollar la metodología vista en clase hasta obtener el sistema lineal pedido y resolverlo en forma directa con pivoteo parcial.
1b) Indicar si el sistema lineal obtenido en 1a) garantizaba la convergencia por el método de Gauss- Seidel

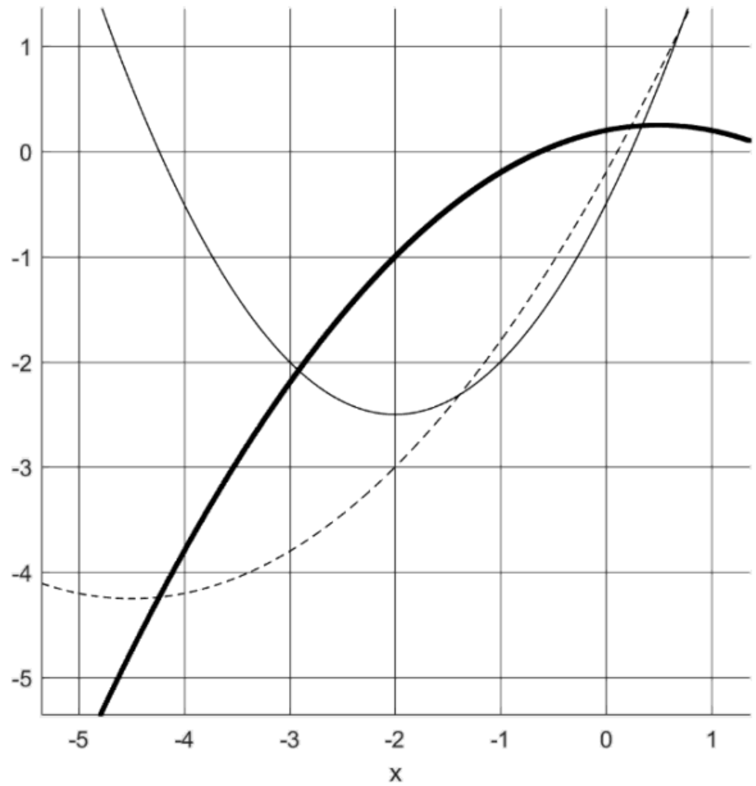
Problema 2: El gráfico indica tres funciones distintas. Una de ellas es f y las otras dos son g1 y g2, las cuales se construyeron a partir de f para realizar dos diferentes esquemas de punto fijo. Observar que las grillas horizontal y vertical tienen la misma escala. Deberá utilizar esto para realizar estimaciones pertinentes.

2a) Deducir cuál de las tres curvas es f. Mirando el gráfico únicamente, dar un resultado aproximado de las raíces visibles de f con la mejor precisión que permita la grilla. Se pide un valor representativo y una cota de error absoluto para cada caso.

2b) Para cada raíz de *f* analizar y justificar si g1 y g2 garantizan la convergencia según Teorema de punto fijo. En los casos donde se garantice la convergencia, indicar el intervalo más angosto posible según la grilla y el intervalo más ancho posible según la grilla.

Ejemplos adecuados de intervalos:
[xa, xb] a informar: (-4 , -3) | (-4 , 0)

Ejemplos **inadecuados** de intervalos [xa, xb] a informar:
(0.33 , 1.33) | (-2.5 , -1.5).



Problema 3:
a) Se desea encontrar puntos de intersección entre una parábola genérica $y = ax^2 + bx + c$ y una recta genérica $y = mx + d$. Plantear la forma recursiva de método de Newton Raphson aplicado a SENL (sistemas de ecuaciones no lineales) para hallar las posibles soluciones. Es decir: dar una expresión matricial donde las constantes a, b, c, m y d son datos conocidos. Aparte se deberá señalar con supra-índice las iteraciones "k" y "k+1" donde corresponda.
b) Explicar que situación/es podría/n ocurrir si en lugar del método de Newton Raphson se aplicará una matriz jacobiana distinta con coeficientes constantes para todas las iteraciones.

Problema 4: Dado el SEL $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$
a) Hallar las formas recursivas de Jacobi y Gauss-Seidel
b) En base a los criterios de convergencia, definir si se converge a la solución al aplicar alguno de ambos métodos.

Ej 1

jueves, 18 de mayo de 2023 16:24

Problema 1
Dada la grilla de pares ordenados X e Y:

P1	P2	P3	P4	NOTA

X	-1.0	0.0	1.0	2.0
Y	0.40	1.0	2.8	7.4

1a) Seleccionar una de las siguientes tres funciones que permite plantear un ajuste por cuadrados mínimos y obtener los coeficientes a través de un sistema lineal de ecuaciones. Justificar la elección de dicha función y las razones por las cuales descarta las otras dos opciones:

$f_1(x) = \sin(ax).\cos(bx)$ $\quad f_2(x) = ae^{bx}$ $\quad f_3(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$

Desarrollar la metodología vista en clase hasta obtener el sistema lineal pedido y resolverlo en forma directa con pivoteo parcial.
1b) Indicar si el sistema lineal obtenido en 1a) garantizaba la convergencia por el método de Gauss- Seidel

1a) $f_1(x)$ no tiene una estructura lineal. $\Rightarrow$ SENL

$f_2(x)$ tampoco pero se puede linealizar

$f_3(x)$ tiene estructura lineal pero demasiados coeficiente para la grilla pedida $\Rightarrow$ SEL inteterminado

$$\ln f_2(x) = \underbrace{\ln a}_{a'} + bx$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \varphi_0(x) &= 1 \\ \varphi_1(x) &= x \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{bmatrix} \varphi_0\cdot\varphi_0 & \varphi_0\cdot\varphi_1 \\ \varphi_1\cdot\varphi_0 & \varphi_1\cdot\varphi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_0\cdot \ln f_2 \\ \varphi_1\cdot \ln f_2 \end{bmatrix}$$

$\varphi_0\cdot\varphi_0 = 4 \qquad \varphi_0\cdot f_2 = 2{,}1148$

$\varphi_1\cdot\varphi_0 = 2 \qquad \varphi_1\, f_2 = 5{,}9489$

$\varphi_1\,\varphi_1 = 6$

ya está hecho el pivoteo parcial $\longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}1148 \\ 5{,}9489 \end{bmatrix}$

$$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{2}{4} = 0.5$$

$$f_2 \to f_2 - m_{21} \cdot f_1 \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 2 & 2,1148 \\ 0 & 5 & 4,8915 \end{array}\right]$$

$$\to b = \frac{4,8915}{5} = \boxed{0,97783}$$

Solucion para T1 y T3

$$a' = 0,0395 \qquad a = e^{a'} = \boxed{1,0403}$$

Para T2 y T4

a	0.9193
b	1.0569

b) al ser diagonal dominante se puede aplicar cualquier metodo iterativo

Ej 2

jueves, 18 de mayo de 2023 17:08

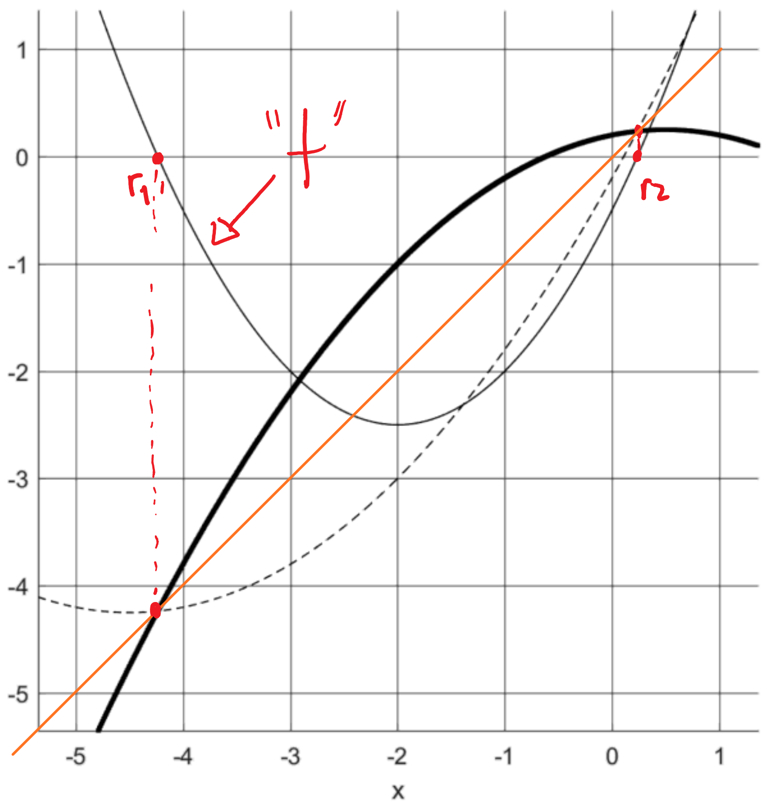
Problema 2: El gráfico indica tres funciones distintas. Una de ellas es f y las otras dos son g1 y g2, las cuales se construyeron a partir de f para realizar dos diferentes esquemas de punto fijo. Observar que las grillas horizontal y vertical tienen la misma escala. Deberá utilizar esto para realizar estimaciones pertinentes.

2a) Deducir cuál de las tres curvas es f. Mirando el gráfico únicamente, dar un resultado aproximado de las raíces visibles de f con la mejor precisión que permita la grilla. Se pide un valor representativo y una cota de error absoluto para cada caso.

2b) Para cada raíz de f analizar y justificar si g1 y g2 garantizan la convergencia según Teorema de punto fijo. En los casos donde se garantice la convergencia, indicar el intervalo más angosto posible según la grilla y el intervalo más ancho posible según la grilla.

Ejemplos adecuados de intervalos:
[xa, xb] a informar: (-4 , -3) | (-4 , 0)

Ejemplos **inadecuados** de intervalos [xa, xb] a informar:
(0.33 , 1.33) | (-2.5 , -1.5).



a)

$r_1 = -4{,}5 \pm 0.5$

$r_2 = 0.5 \pm 0.5$

g1 (punteada) : garatiza en r1 en [-5,-4] → mas angosto
" " " " [-5,-2] → " ancho
No garantiza r2

g2 (gruesa) : No garantiza en r1
garantiza en r2 en [0,1] → mas angosto
" " " " [-2,1] → " ancho

Ej 3

jueves, 18 de mayo de 2023 17:18

Problema 3:

a) Se desea encontrar puntos de intersección entre una parábola genérica $y = ax^2 + bx + c$ y una recta genérica $y = mx + d$. Plantear la forma recursiva de método de Newton Raphson aplicado a SENL (sistemas de ecuaciones no lineales) para hallar las posibles soluciones. Es decir: dar una expresión matricial donde las constantes a, b, c, m y d son datos conocidos. Aparte se deberá señalar con supra-índice las iteraciones "k" y "k+1" donde corresponda.

b) Explicar que situación/es podría/n ocurrir si en lugar del método de Newton Raphson se aplicará una matriz jacobiana distinta con coeficientes constantes para todas las iteraciones.

a)

$$f_1(x,y) = y - ax^2 - bx - c = 0$$
$$f_2(x,y) = y - mx - d = 0$$

$$\begin{bmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2ax^{(k)} - b & 1 \\ -m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^{(k)} - ax^{(k)2} - bx^{(k)} - c \\ y^{(k)} - mx^{(k)} - d \end{bmatrix}$$

b)
- Podría converger a la solución con un orden menor a 2 (muy posiblemente orden 1) como si fuera un método de Punto Fijo
- Podría no converger porque el Jacobiano no es el indicado o hacerse singular (no inversible)
- Podría converger a otra raiz

Ej 4

jueves, 18 de mayo de 2023 17:24

Problema 4: Dado el SEL $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

a) Hallar las formas recursivas de Jacobi y Gauss-Seidel

b) En base a los criterios de convergencia, definir si se converge a la solución al aplicar alguno de ambos métodos.

a)
$$x_1 + x_2 = 4$$
$$x_1 - x_2 = 2$$

$$x_1^{(k+1)} = 4 - x_2^{(k)}$$
$$x_2^{(k+1)} = -2 + x_1^{(k)}$$
→ Jacobi

$$x_1^{(k+1)} = 4 - x_2^{(k)}$$
$$x_2^{(k+1)} = -2 + x_1^{(k+1)}$$
→ gauss-seidel

b) • La matriz A No es diagonal dominante

→ No hay información → busco radio espectral para Jacobi

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k+1)} \\ x_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{matriz } T} \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix}$$

$$\det(T - \lambda I) = 0 \longrightarrow \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

$$|\lambda_{1,2}| = 1$$

Los autovalores no son estrictamente menores a 1

$\to$ Jacobi No converge $\Rightarrow$ G.S. No converge .