Presentación

Episodio 1.Espacios Vectoriales

Álgebra Lineal
mfiuba@gmail.com

Departamento de Matemática
FIUBA

24 de septiembre de 2020

Presentación

- ¿Por qué? Ustedes se han encontrado con conjuntos de *elementos* donde tiene sentido, o es necesario trabajar, sumando elementos de ese conjunto o multiplicando elementos de ese conjunto por un escalar, obteniendo siempre otro elemento de ese conjunto.
- Eso sucedió cuando trabajaron con vectores en $\mathbb{R}^2$ o en $\mathbb{R}^3$: la suma de dos vectores de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, daba por resultado otro vector de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ respectivamente. Lo mismo pasaba cuando calculábamos múltiplos de un vector.

- También sucedió, cuando estudiaron funciones, aprendieron a sumar funciones con la definición:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall x \in Dom(f) \cap Dom(g)$$

y también a multiplicar una función por un escalar:

$$(kf)(x) = kf(x),\ \forall x \in Dom(f) \text{ y } \forall x \in \mathbb{R}.$$

- También sucedió, cuando estudiaron funciones, aprendieron a sumar funciones con la definición:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\ \forall x \in Dom(f) \cap Dom(g)$$

y también a multiplicar una función por un escalar:

$$(kf)(x) = kf(x),\ \forall x \in Dom(f) \text{ y } \forall x \in \mathbb{R}.$$

- Si además las funciones eran continuas, obtenías otra función continua; si las funciones eran derivables obtenías otra función derivable.

En todos estos casos, la suma de elementos de un conjunto $\mathbb{V}$ y el producto de un elemento de ese conjunto por un número, siempre daba como resultado otro elemento de ese conjunto. Las cosas quedaban *encerradas* , no se escapaban del conjunto en el que estábamos trabajando.

En todos estos casos, la suma de elementos de un conjunto $\mathbb{V}$ y el producto de un elemento de ese conjunto por un número, siempre daba como resultado otro elemento de ese conjunto. Las cosas quedaban *encerradas* , no se escapaban del conjunto en el que estábamos trabajando.

- Estudiaremos las propiedades comunes de este tipo de sistemas que constan de un conjunto de elementos, que vamos a llamar $\mathbb{V}$, donde se define una suma y un producto por escalar (elementos de un conjunto numérico) de forma tal que sus resultados nunca se *escapan* del conjunto dado.

En todos estos casos, la suma de elementos de un conjunto $\mathbb{V}$ y el producto de un elemento de ese conjunto por un número, siempre daba como resultado otro elemento de ese conjunto. Las cosas quedaban *encerradas* , no se escapaban del conjunto en el que estábamos trabajando.

- Estudiaremos las propiedades comunes de este tipo de sistemas que constan de un conjunto de elementos, que vamos a llamar $\mathbb{V}$, donde se define una suma y un producto por escalar (elementos de un conjunto numérico) de forma tal que sus resultados nunca se *escapan* del conjunto dado.
- Si hacemos un esfuerzo de abstracción y estudiamos las propiedades comunes de estos sistemas, tendremos resultados que serán inmediatamente válidas tanto para el conjunto de funciones, como para el conjunto de vectores, matrices, polinomios, entre otros.

En todos estos casos, la suma de elementos de un conjunto $\mathbb{V}$ y el producto de un elemento de ese conjunto por un número, siempre daba como resultado otro elemento de ese conjunto. Las cosas quedaban *encerradas* , no se escapaban del conjunto en el que estábamos trabajando.

- Estudiaremos las propiedades comunes de este tipo de sistemas que constan de un conjunto de elementos, que vamos a llamar $\mathbb{V}$, donde se define una suma y un producto por escalar (elementos de un conjunto numérico) de forma tal que sus resultados nunca se *escapan* del conjunto dado.
- Si hacemos un esfuerzo de abstracción y estudiamos las propiedades comunes de estos sistemas, tendremos resultados que serán inmediatamente válidas tanto para el conjunto de funciones, como para el conjunto de vectores, matrices, polinomios, entre otros.

Vamos entonces a definir formalmente qué es un espacio vectorial.

Definición de Espacio Vectorial

Un espacio vectorial, consta de:

- Un conjunto $\mathbb{V}$ de objetos que llamaremos vectores;

Definición de Espacio Vectorial

Un espacio vectorial, consta de:

- Un conjunto $\mathbb{V}$ de objetos que llamaremos vectores;
- Un conjunto $\mathbb{K}$ de escalares ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$);

Definición de Espacio Vectorial

Un espacio vectorial, consta de:

- Un conjunto $\mathbb{V}$ de objetos que llamaremos vectores;
- Un conjunto $\mathbb{K}$ de escalares ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$);
- Una operación, llamada suma, definida entre los elementos del conjunto $\mathbb{V}$, que cumple $u + v \in \mathbb{V}$;

Definición de Espacio Vectorial

Un espacio vectorial, consta de:

- Un conjunto $\mathbb{V}$ de objetos que llamaremos vectores;
- Un conjunto $\mathbb{K}$ de escalares ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$);
- Una operación, llamada suma, definida entre los elementos del conjunto $\mathbb{V}$, que cumple $u + v \in \mathbb{V}$;
- Una operación llamada producto por escalar, que asocia a cada escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ y cada vector $u \in \mathbb{V}$ el vector $\lambda.u \in \mathbb{V}$.

Definición de Espacio Vectorial

Un espacio vectorial, consta de:

- Un conjunto $\mathbb{V}$ de objetos que llamaremos vectores;
- Un conjunto $\mathbb{K}$ de escalares ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$);
- Una operación, llamada suma, definida entre los elementos del conjunto $\mathbb{V}$, que cumple $u + v \in \mathbb{V}$;
- Una operación llamada producto por escalar, que asocia a cada escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ y cada vector $u \in \mathbb{V}$ el vector $\lambda.u \in \mathbb{V}$.

Además las operación suma y producto por escalar deberán cumplir:

- $u + v = v + u, \quad \forall u, v \in \mathbb{V}$ (conmutatividad);

Definición de Espacio Vectorial

Un espacio vectorial, consta de:

- Un conjunto $\mathbb{V}$ de objetos que llamaremos vectores;
- Un conjunto $\mathbb{K}$ de escalares ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$);
- Una operación, llamada suma, definida entre los elementos del conjunto $\mathbb{V}$, que cumple $u + v \in \mathbb{V}$;
- Una operación llamada producto por escalar, que asocia a cada escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ y cada vector $u \in \mathbb{V}$ el vector $\lambda.u \in \mathbb{V}$.

Además las operación suma y producto por escalar deberán cumplir:

- $u + v = v + u, \quad \forall u, v \in \mathbb{V}$ (conmutatividad);
- $u + (v + w) = (u + v) + w = u + v + w, \quad \forall u, v, w \in \mathbb{V}$ (asociatividad);

Definición de Espacio Vectorial

Un espacio vectorial, consta de:

- Un conjunto $\mathbb{V}$ de objetos que llamaremos vectores;
- Un conjunto $\mathbb{K}$ de escalares ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$);
- Una operación, llamada suma, definida entre los elementos del conjunto $\mathbb{V}$, que cumple $u + v \in \mathbb{V}$;
- Una operación llamada producto por escalar, que asocia a cada escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ y cada vector $u \in \mathbb{V}$ el vector $\lambda.u \in \mathbb{V}$.

Además las operación suma y producto por escalar deberán cumplir:

- $u + v = v + u, \quad \forall u, v \in \mathbb{V}$ (conmutatividad);
- $u + (v + w) = (u + v) + w = u + v + w, \quad \forall u, v, w \in \mathbb{V}$ (asociatividad);
- $\exists\ \mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in \mathbb{V} / u + \mathbb{O}_{\mathbb{V}} = \mathbb{O}_{\mathbb{V}} + u = u$ (Existencia del elemento neutro para la suma);

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Definición de Espacio Vectorial

Un espacio vectorial, consta de:

- Un conjunto $\mathbb{V}$ de objetos que llamaremos vectores;
- Un conjunto $\mathbb{K}$ de escalares ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$);
- Una operación, llamada suma, definida entre los elementos del conjunto $\mathbb{V}$, que cumple $u + v \in \mathbb{V}$;
- Una operación llamada producto por escalar, que asocia a cada escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ y cada vector $u \in \mathbb{V}$ el vector $\lambda.u \in \mathbb{V}$.

Además las operación suma y producto por escalar deberán cumplir:

- $u + v = v + u, \quad \forall u, v \in \mathbb{V}$ (conmutatividad);
- $u + (v + w) = (u + v) + w = u + v + w, \quad \forall u, v, w \in \mathbb{V}$ (asociatividad);
- $\exists\ \mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in \mathbb{V} / u + \mathbb{O}_{\mathbb{V}} = \mathbb{O}_{\mathbb{V}} + u = u$ (Existencia del elemento neutro para la suma);
- $\forall u \in \mathbb{V},\ \exists\ (-u) \in \mathbb{V}$ tal que $u + (-u) = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ (Existencia del inverso aditivo para todo elemento de $\mathbb{V}$);

Definición de Espacio Vectorial

Un espacio vectorial, consta de:

- Un conjunto $\mathbb{V}$ de objetos que llamaremos vectores;
- Un conjunto $\mathbb{K}$ de escalares ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$);
- Una operación, llamada suma, definida entre los elementos del conjunto $\mathbb{V}$, que cumple $u + v \in \mathbb{V}$;
- Una operación llamada producto por escalar, que asocia a cada escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ y cada vector $u \in \mathbb{V}$ el vector $\lambda.u \in \mathbb{V}$.

Además las operación suma y producto por escalar deberán cumplir:

- $u + v = v + u, \quad \forall u, v \in \mathbb{V}$ (conmutatividad);
- $u + (v + w) = (u + v) + w = u + v + w, \quad \forall u, v, w \in \mathbb{V}$ (asociatividad);
- $\exists\ \mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in \mathbb{V} / u + \mathbb{O}_{\mathbb{V}} = \mathbb{O}_{\mathbb{V}} + u = u$ (Existencia del elemento neutro para la suma);
- $\forall u \in \mathbb{V},\ \exists\ (-u) \in \mathbb{V}$ tal que $u + (-u) = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ (Existencia del inverso aditivo para todo elemento de $\mathbb{V}$);
- $1.u = u, \quad \forall u \in \mathbb{V}$;

Definición de Espacio Vectorial

Un espacio vectorial, consta de:

- Un conjunto $\mathbb{V}$ de objetos que llamaremos vectores;
- Un conjunto $\mathbb{K}$ de escalares ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$);
- Una operación, llamada suma, definida entre los elementos del conjunto $\mathbb{V}$, que cumple $u + v \in \mathbb{V}$;
- Una operación llamada producto por escalar, que asocia a cada escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ y cada vector $u \in \mathbb{V}$ el vector $\lambda.u \in \mathbb{V}$.

Además las operación suma y producto por escalar deberán cumplir:

- $u + v = v + u, \quad \forall u, v \in \mathbb{V}$ (conmutatividad);
- $u + (v + w) = (u + v) + w = u + v + w, \quad \forall u, v, w \in \mathbb{V}$ (asociatividad);
- $\exists\ \mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in \mathbb{V} / u + \mathbb{O}_{\mathbb{V}} = \mathbb{O}_{\mathbb{V}} + u = u$ (Existencia del elemento neutro para la suma);
- $\forall u \in \mathbb{V},\ \exists\ (-u) \in \mathbb{V}$ tal que $u + (-u) = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ (Existencia del inverso aditivo para todo elemento de $\mathbb{V}$);
- $1.u = u, \quad \forall u \in \mathbb{V}$;
- $(\lambda\beta).u = \lambda.(\beta.u), \quad \forall \lambda,\ \beta \in \mathbb{K}$ y $\forall u \in \mathbb{V}$;

Definición de Espacio Vectorial

Un espacio vectorial, consta de:

- Un conjunto $\mathbb{V}$ de objetos que llamaremos vectores;
- Un conjunto $\mathbb{K}$ de escalares ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$);
- Una operación, llamada suma, definida entre los elementos del conjunto $\mathbb{V}$, que cumple $u + v \in \mathbb{V}$;
- Una operación llamada producto por escalar, que asocia a cada escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ y cada vector $u \in \mathbb{V}$ el vector $\lambda.u \in \mathbb{V}$.

Además las operación suma y producto por escalar deberán cumplir:

- $u + v = v + u, \quad \forall u, v \in \mathbb{V}$ (conmutatividad);
- $u + (v + w) = (u + v) + w = u + v + w, \quad \forall u, v, w \in \mathbb{V}$ (asociatividad);
- $\exists\ \mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in \mathbb{V} / u + \mathbb{O}_{\mathbb{V}} = \mathbb{O}_{\mathbb{V}} + u = u$ (Existencia del elemento neutro para la suma);
- $\forall u \in \mathbb{V},\ \exists\ (-u) \in \mathbb{V}$ tal que $u + (-u) = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ (Existencia del inverso aditivo para todo elemento de $\mathbb{V}$);
- $1.u = u, \quad \forall u \in \mathbb{V}$;
- $(\lambda\beta).u = \lambda.(\beta.u), \quad \forall \lambda,\ \beta \in \mathbb{K}$ y $\forall u \in \mathbb{V}$;
- $\lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$ y $\forall u, v \in \mathbb{V}$

Definición de Espacio Vectorial

Un espacio vectorial, consta de:

- Un conjunto $\mathbb{V}$ de objetos que llamaremos vectores;
- Un conjunto $\mathbb{K}$ de escalares ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$, o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$);
- Una operación, llamada suma, definida entre los elementos del conjunto $\mathbb{V}$, que cumple $u + v \in \mathbb{V}$;
- Una operación llamada producto por escalar, que asocia a cada escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ y cada vector $u \in \mathbb{V}$ el vector $\lambda.u \in \mathbb{V}$.

Además las operación suma y producto por escalar deberán cumplir:

- $u + v = v + u, \quad \forall u, v \in \mathbb{V}$ (conmutatividad);
- $u + (v + w) = (u + v) + w = u + v + w, \quad \forall u, v, w \in \mathbb{V}$ (asociatividad);
- $\exists\ \mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in \mathbb{V} / u + \mathbb{O}_{\mathbb{V}} = \mathbb{O}_{\mathbb{V}} + u = u$ (Existencia del elemento neutro para la suma);
- $\forall u \in \mathbb{V},\ \exists\ (-u) \in \mathbb{V}$ tal que $u + (-u) = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ (Existencia del inverso aditivo para todo elemento de $\mathbb{V}$);
- $1.u = u, \quad \forall u \in \mathbb{V}$;
- $(\lambda\beta).u = \lambda.(\beta.u), \quad \forall \lambda,\ \beta \in \mathbb{K}$ y $\forall u \in \mathbb{V}$;
- $\lambda.(u + v) = \lambda.u + \lambda.v, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$ y $\forall u, v \in \mathbb{V}$
- $(\lambda+\beta).u = \lambda.u + \beta.u, \quad \forall \lambda, \beta \in \mathbb{K}$ y $\forall u \in \mathbb{V}$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Ejemplos de Espacios de Vectoriales

- Empecemos por el más familiar: $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, con la suma y el producto habituales es un espacio vectorial. Se suele decir que $\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.

Ejemplos de Espacios de Vectoriales

- Empecemos por el más familiar: $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, con la suma y el producto habituales es un espacio vectorial. Se suele decir que $\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.
- El conjunto $\mathbb{C}^n$, de las n-uplas formadas por números complejos, o sea $\mathbb{C}^n = \{[x_1 x_2 \ldots\ldots x_n]^T, x_1, \ \ldots x_n \in \mathbb{C}\}$ junto con el conjunto de escalares complejos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, con la suma y el producto por escalar como los de antes forman un espacio vectorial. Se dice que $\mathbb{C}^n - \mathbb{C}$ es un espacio vectorial.

Ejemplos de Espacios de Vectoriales

- Empecemos por el más familiar: $\mathbb{V} = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, con la suma y el producto habituales es un espacio vectorial. Se suele decir que $\mathbb{R}^n$ es un $\mathbb{R}$ espacio vectorial.
- El conjunto $\mathbb{C}^n$, de las n-uplas formadas por números complejos, o sea $\mathbb{C}^n = \{[x_1 x_2 \ldots \ldots x_n]^T, x_1, \ \ldots x_n \in \mathbb{C}\}$ junto con el conjunto de escalares complejos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, con la suma y el producto por escalar como los de antes forman un espacio vectorial. Se dice que $\mathbb{C}^n - \mathbb{C}$ es un espacio vectorial.
- El conjunto $\mathbb{C}^n$, de las n-uplas formadas por números complejos, como antes con el conjunto de escalares reales $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, con la misma definición de suma y producto por escalar, también forman un espacio vectorial. En este caso se dice que $\mathbb{C}^n - \mathbb{R}$ es un espacio vectorial.

Ejemplos de Espacios de Vectoriales

- El conjunto $\mathbb{R}^n$, de las n-uplas formadas por números reales, con el conjunto de escalares complejos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ NO ES un espacio vectorial.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Ejemplos de Espacios de Vectoriales

- El conjunto $\mathbb{R}^n$, de las n-uplas formadas por números reales, con el conjunto de escalares complejos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ NO ES un espacio vectorial.
- $C(\mathbb{I})$ denota el conjunto de todas las funciones continuas con dominio en $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ y codominio $\mathbb{R}$:

  $$C(\mathbb{I}) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R}, f \text{ es continua}\},$$

  junto con el conjunto de escalares $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, donde se define la suma como:

  $$f + g : I \longrightarrow \mathbb{R}/(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

  y el producto por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ como:

  $$(\lambda.f) : I \longrightarrow \mathbb{R}/(\lambda.f)(x) = \lambda f(x), \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

  y $\forall f \in C(\mathbb{I})$ es un espacio vectorial.

  > Recordemos que si f y $g \in C(\mathbb{I})$, se dice que $f = g$ si se cumple que $f(x) = g(x), \quad \forall x \in \mathbb{I}$. En este espacio vectorial $\mathbb{O}_{C(\mathbb{I})}$ es la función nula (el elemento neutro del espacio vectorial), o sea, $\mathbb{O}_{C(\mathbb{I})}(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{I}$.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Ejemplos de Espacios de Vectoriales

- El conjunto $\mathbb{R}_n[x]$ es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor e igual que n, con el conjunto $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y la suma y producto por escalares definidos como en el item anterior forman un espacio vectorial. Si $P \in \mathbb{R}_n[x]$

  $$P = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R}; i = 1, \ldots, n.$$

  Dados

  $$\begin{aligned} P &= a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}_n[x] \\ Q &= b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0 \in \mathbb{R}_n[x] \end{aligned}$$

  se dice que $P = Q \Leftrightarrow a_i = b_i \ \forall i = 1, \ldots, n$.
  El elemento neutro $\mathbb{O}_{\mathbb{R}_n[x]}$, en este espacio vectorial es el polinomio nulo, es decir el polinomio que tiene todos sus coeficientes iguales a 0:

  $$\mathbb{O}_{\mathbb{R}_n[x]} = 0x^n + \cdots + 0x + 0.$$

Propiedades elementales

A partir de los axiomas se pueden demostrar las siguientes propiedades:

- El elemento neutro $\mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in \mathbb{V}$ es único.
- El simétrico de un elemento $u \in \mathbb{V}$ es único.
- $0\, u = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ para todo $u \in \mathbb{V}$.
- $\lambda \mathbb{O}_{\mathbb{V}} = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ para todo escalar $\lambda \in \mathbb{K}$.
- Si $\lambda u = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ entonces $\lambda = 0$ o $u = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$.
- $(-1)u = (-u)$.

Demostremos alguna de estas propiedades

- El elemento neutro $\mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in \mathbb{V}$ es único.

Demostremos alguna de estas propiedades

- El elemento neutro $\mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in \mathbb{V}$ es único.

Supongamos que $\mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ y $\tilde{\mathbb{O}}_{\mathbb{V}}$ son elementos neutros en el espacio vectorial. Es decir

$$\mathbb{O}_{\mathbb{V}} + u = u + \mathbb{O}_{\mathbb{V}} = u,$$

para todo $u \in \mathbb{V}$ y

$$\tilde{\mathbb{O}}_{\mathbb{V}} + v = v + \tilde{\mathbb{O}}_{\mathbb{V}} = v,$$

para todo $v \in \mathbb{V}$.

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Demostremos alguna de estas propiedades

- El elemento neutro $\mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in \mathbb{V}$ es único.

Supongamos que $\mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ y $\tilde{\mathbb{O}}_{\mathbb{V}}$ son elementos neutros en el espacio vectorial. Es decir

$$\mathbb{O}_{\mathbb{V}} + u = u + \mathbb{O}_{\mathbb{V}} = u,$$

para todo $u \in \mathbb{V}$ y

$$\tilde{\mathbb{O}}_{\mathbb{V}} + v = v + \tilde{\mathbb{O}}_{\mathbb{V}} = v,$$

para todo $v \in \mathbb{V}$. Pero como esto es cierto para todo $u, v \in \mathbb{V}$, en particular se cumple si $u = \tilde{\mathbb{O}}_{\mathbb{V}}$ y $v = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$. Por lo tanto:

$$\mathbb{O}_{\mathbb{V}} = \tilde{\mathbb{O}}_{\mathbb{V}}.$$

Demostremos alguna de estas propiedades

- $0u = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ para todo $u \in \mathbb{V}$.

Demostremos alguna de estas propiedades

- $0u = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ para todo $u \in \mathbb{V}$.

Sabemos que:

$$u = (1+0)u = 1u + 0u = u + 0u$$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Demostremos alguna de estas propiedades

- $0u = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ para todo $u \in \mathbb{V}$.

Sabemos que:

$$u = (1+0)u = 1u + 0u = u + 0u$$

entonces

$$\underbrace{(-u) + u}_{\mathbb{O}_{\mathbb{V}}} = \underbrace{(-u) + u}_{\mathbb{O}_{\mathbb{V}}} + 0u = 0u$$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Demostremos alguna de estas propiedades

- $0u = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ para todo $u \in \mathbb{V}$.

Sabemos que:

$$u = (1+0)u = 1u + 0u = u + 0u$$

entonces

$$\underbrace{(-u) + u}_{\mathbb{O}_{\mathbb{V}}} = \underbrace{(-u) + u}_{\mathbb{O}_{\mathbb{V}}} + 0u = 0u$$

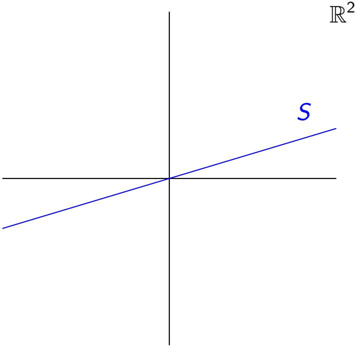
> Cada paso tiene que corresponder a un axioma o una propiedad ya demostrada.

Subespacios

Suponiendo que $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial vamos a estudiar cómo detectar aquellos subconjuntos de $\mathbb{V}$ que resultan ser un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalar definidos.

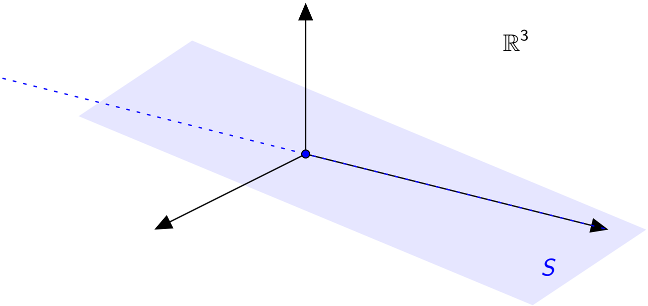
Subespacios

Suponiendo que $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial vamos a estudiar cómo detectar aquellos subconjuntos de $\mathbb{V}$ que resultan ser un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalar definidos.



Subespacios

Suponiendo que $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial vamos a estudiar cómo detectar aquellos subconjuntos de $\mathbb{V}$ que resultan ser un espacio vectorial con las operaciones de suma y producto por escalar definidos.



Definición: Un subespacio de un $\mathbb{K}$ espacio vectorial $\mathbb{V}$, es un subconjunto $S \subset \mathbb{V}$, $S \neq \emptyset$ que resulta ser un espacio vectorial con la suma y el producto por escalar definidos.

Cuando estudiamos si S cumple la definición de espacio vectorial, debemos verificar, en primer lugar:

- que S resulta ser cerrado para las operaciones suma.
- que S resulta ser cerrado para producto por escalar.

Ahora bien, por estar S incluido en un espacio vectorial hay una serie de propiedades que con seguridad se van a cumplir. ¿Cuáles?

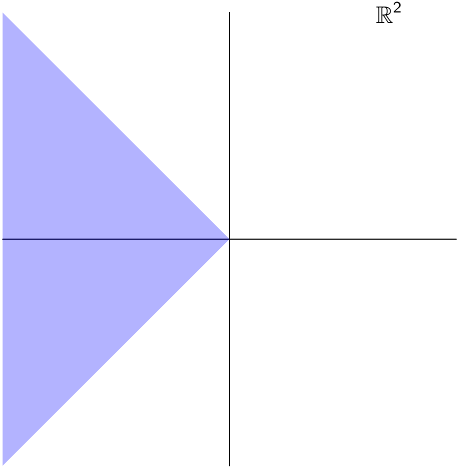
- La suma es conmutativa para todo par de elementos de $\mathbb{V}$, por lo tanto será conmutativa, en particular, para todo par de elementos en S. Lo mismo sucede con la propiedad asociativa para la suma y con las otras propiedades relativas al producto por escalar.
  Ya demostramos que en todo espacio vectorial se cumple que $0u = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$, así que si $S \neq \emptyset \Rightarrow$ para cualquier $u \in S$, se va a cumplir que $0.u = \mathbb{O}_{\mathbb{V}}$ y como $\lambda.u \in S$, $\forall \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in S$.
- Además, es fácil ver que si un subconjunto de un espacio vectorial $\mathbb{V}$, es cerrado para la suma y el producto por escalar y $\mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in S \Rightarrow S$resulta ser un espacio vectorial.
  Entonces, si estamos en un espacio vectorial para ver si un subconjunto de $\mathbb{V}$ es un espacio vectorial con la suma y producto por escalar ya definidos, sólo necesitaremos chequear tres propiedades.

Si $\mathbb{V}$ es un $\mathbb{K}$ espacio vectorial, se dice que $S \subset \mathbb{V}$ es un subespacio de $\mathbb{V}$ si se cumple:

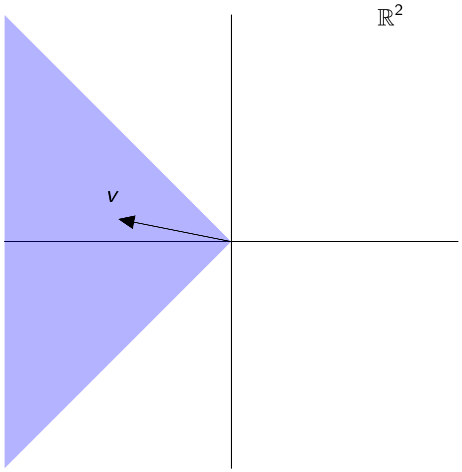
- 1. $\mathbb{O}_{\mathbb{V}} \in S$;
- 2. Si $u, v \in S \Rightarrow u + v \in S$;
- 3. Si $u \in S$ y $\lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda u \in S$.

Ahora entonces, tendremos como primer tarea estudiar si distintos subconjuntos definidos en un espacio vectorial son o no son subespacios.

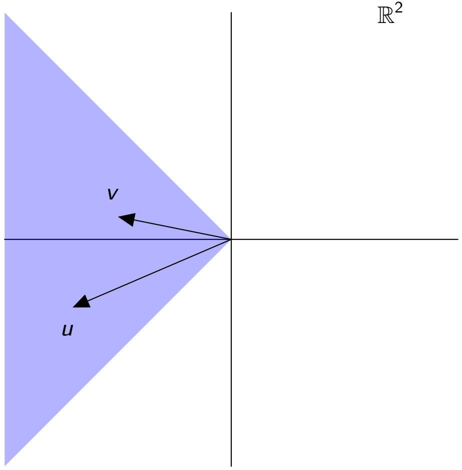
Ejemplo de un conjunto que no es un subespacio



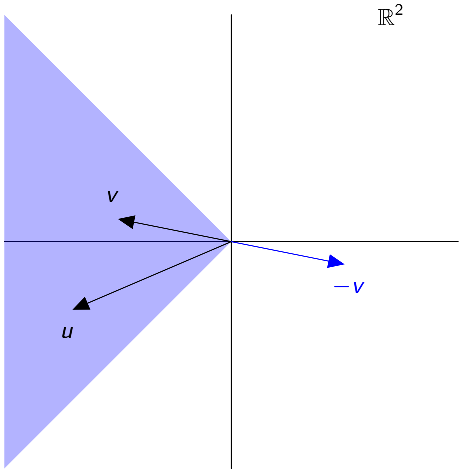
Ejemplo de un conjunto que no es un subespacio



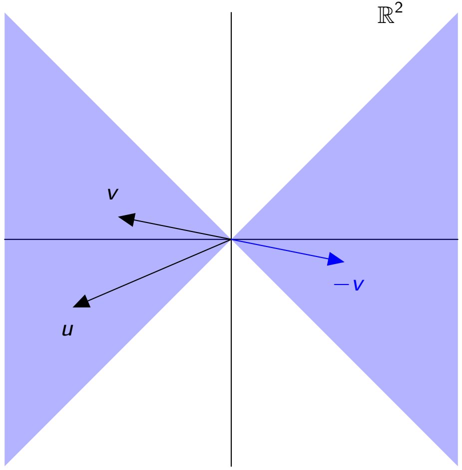
Ejemplo de un conjunto que no es un subespacio



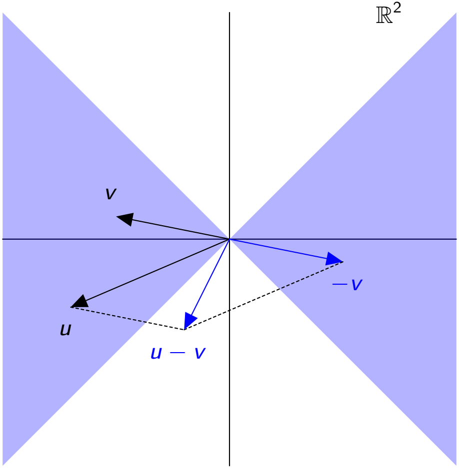
Ejemplo de un conjunto que no es un subespacio



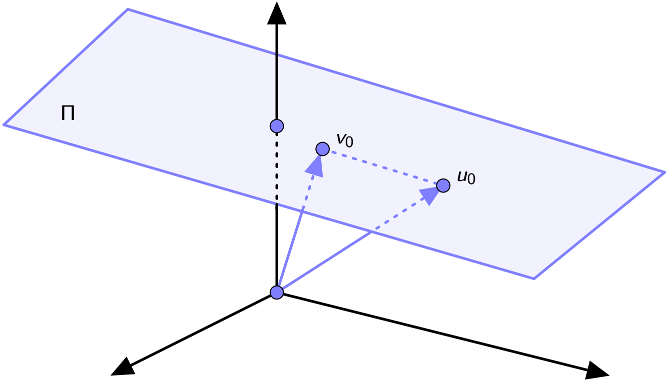
Ejemplo de un conjunto que no es un subespacio



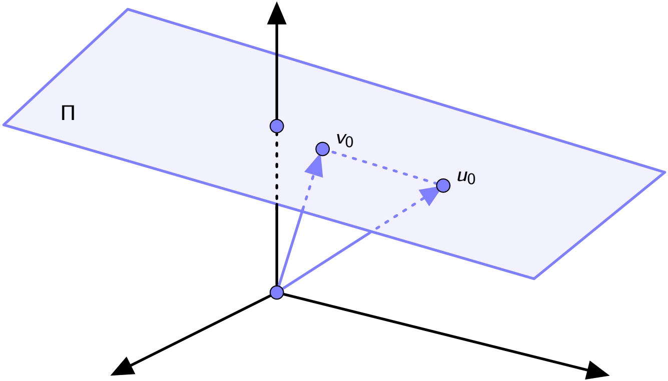
Ejemplo de un conjunto que no es un subespacio



Otro ejemplo que no es un subespacio, pero ...

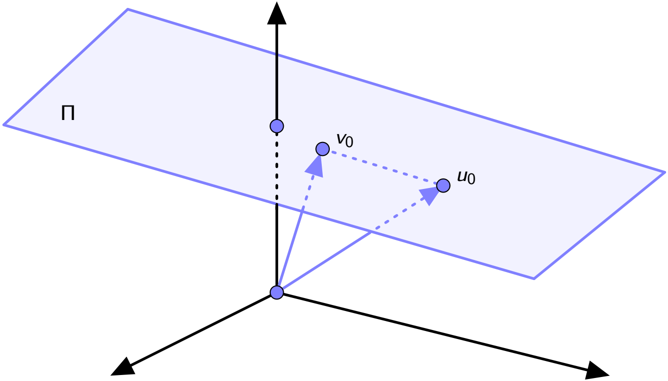


Otro ejemplo que no es un subespacio, pero ...



$$S = \{y \in \mathbb{R}^3 : y = x - v_0, x \in \Pi\}$$

Otro ejemplo que no es un subespacio, pero ...



$$S = \{y \in \mathbb{R}^3 : y = x - v_0, x \in \Pi\} = \{y \in \mathbb{R}^3 : y = x - u_0, x \in \Pi\}$$

FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires