95.13 METODOS MATEMATICOS Y NUMERICOS

FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

SEGUNDO INTEGRADOR

2do Cuatrimestre 2018
18/diciembre/2018

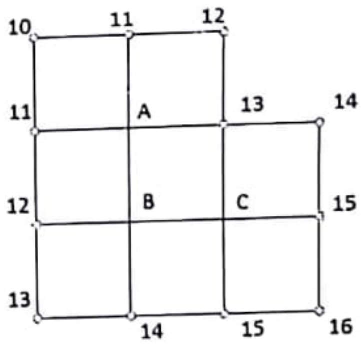
Problema 1
Dado el siguiente problema de valores de contorno

$$y'' + 4y = 0 \;\; con\, y(0) = -2 \;\; , y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 10$$

a) Aproximar la solución en x=π/8 con el menor esfuerzo de cálculo posible
b) Aproximar la solución en x= π/12 y x= π/6 con el menor esfuerzo de cálculo posible.
c) Calcular los errores de las aproximaciones obtenidas utilizando la solución analítica
$$y(x) = -2\cos(2x) + 10\sin(2x)$$
d) ¿Son similares los errores obtenidos en cada caso? ¿Se corresponden con lo que usted esperaba? Justifique la respuesta.
e) Efectuar una sugerencia para mejorar la aproximación en x=π/8 dejando perfectamente detallados los cálculos a efectuar si bien no se pide realizarlos en caso de que requieran un esfuerzo de cálculo excesivo en el contexto de este examen.

Problema 2
En el interior de la siguiente figura se verifica que $u_{xx} + u_{yy} = 0$ y en sus contornos se encuentra especificado el valor de u, lo cual constituye un problema de valore de contorno (considerar "x" horizontal e "y" vertical). Al plantear una resolución numérica por diferencias finitas de acuerdo con la discretización indicada en la figura quedan definidos tres nodos (A, B y C) donde calcular la solución aproximada.

a) plantear las ecuaciones resultantes de utilizar operadores centrados de segundo orden
b) resolver las ecuaciones planteadas a los efectos de calcular los valores de u en A, B y C proporcionados por el método numérico planteado.
c) discutir acerca del error que presentan los resultados previamente obtenidos.



Pregunta 1
Conoce usted alguna metodología que permita utilizar métodos numéricos diseñados para problemas de valores iniciales (como por ej. el método de Euler) para resolver problemas de valores de contorno planteados en términos de derivadas totales.

Pregunta 2
Encuentra usted alguna manera de plantear la resolución de la ecuación $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ de forma tal que pueda resultar de utilidad para calcular los valores de u en los nodos A, B y C del Problema 2.

SWIATLO
99157

① $y'' + 4y = 0 \qquad y(0) = -2 \qquad y(\pi/4) = 10$

9 (NUEVE)

DISCRETIZO SEGUN DIFERENCIAS FINITAS

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + 4u_i = 0$$

MENOR ESFUERZO DE CALCULO

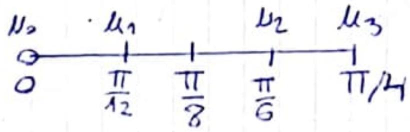
$$N = 2 \qquad \frac{\frac{\pi}{4} - 0}{2} = h = \pi/8$$

$i=1 \qquad \dfrac{u_2 - 2u_1 + u_0}{(\pi/8)^2} + 4u_1 = 0 \qquad u_2 = 10, \; u_0 = -2$

$$\frac{10 - 2u_1 + (-2)}{\pi^2/64} + 4u_1 = 0$$

$u_1 = 5{,}78.39$ → SOLUCION APROXIMADA EN $x = \pi/8$

Ⓑ



$$h = \pi/12$$

$$N = \frac{\pi/4}{\pi/12} = 3$$

$i=1 \qquad \dfrac{u_0 + u_2 - 2u_1}{(\pi/12)^2} + 4u_1 = 0 \qquad$ 2 ECUACIONES, 2 INCOGNITAS

$i=2 \qquad \dfrac{u_1 + u_3 - 2u_2}{(\pi/12)^2} + 4u_2 = 0$

$$\frac{-2 - 2u_1 + u_2}{(\pi/12)^2} + 4u_1 = 0 \rightarrow -2 - 2u_1 + u_2 = -4(\pi/12)^2 u_1$$

$$-2 + u_2 = (2 - 4(\pi/12)^2)\, u_1$$

$$\frac{u_1 + 10 - 2u_2}{(\pi/12)^2} + 4u_2 = 0 \qquad \left[\frac{-2 + u_2}{(2-4(\pi/12)^2)} = u_1\right]$$

$$\frac{\dfrac{-2 + u_2}{[2-4(\pi/12)^2]} + 10 - 2u_2}{(\pi/12)^2} + 4u_2 = 0$$

$$\left[u_2 = 7{,}712\right] \longrightarrow x = \pi/6$$

$$\left[u_1 = 3{,}3097\right] \longrightarrow x = \pi/12$$

(C) $y(x) = -2\cos(2x) + 10\,\mathrm{Sen}(2x)$

$y(\pi/8) = 4\sqrt{2} \approx 5{,}6568$

$y(\pi/6) = 7{,}6602$

$y(\pi/12) = 3{,}2679$

Errores

$\varepsilon = |\,5{,}6568 - 5{,}7839\,| = 0{,}1271 \rightarrow$ Em $x = \pi/8$

$\varepsilon = |\,7{,}6602 - 7{,}712\,| = 0{,}0518 \rightarrow$ Em $x = \pi/6$

$\varepsilon = |\,3{,}2679 - 3{,}3097\,| = 0{,}0418 \rightarrow$ Em $x = \pi/12$

(D) Los errores em $\pi/6$ y $\pi/12$ som del mismo ordem lo cual era algo esperado debido a el paso utilizado. Era esperable que el error em esos casos sea menor que em $\pi/8$ debido a que

NOTA

99157
SWIATLO

SE UTILIZO UN PASO MENOR, LO CUAL SE VIO REFLEJADO EN UNA MAYOR PRECISIÓN. EN ~~AMBOS~~ Los 3 CASOS, EL ORDEN DEL ERROR DE TRUNCAMIENTO Coincide con el orden del error del metodo, en este caso $O(h^2)$.

(e) UNA SUGERENCIA PARA MEJORAR LA APROXIMACIÓN EN $X = \pi/8$ SERIA UTILIZAR UN PASO DE MENOR VALOR CON EL fin DE REDUCIR EL ERROR DE TRUNCAMIENTO Y LOGRAR UNA MAYOR PRECISIÓN.

UN PASO POR EJEMPLO DE $h = \pi/16$

SIENDO LAS DISCRETIZACIONES

$$i=1 \quad \frac{u_0 + u_2 - 2u_1}{(\pi/16)^2} + 4u_1 = 0$$

$$i=2 \quad \frac{u_1 + u_3 - 2u_2}{(\pi/16)^2} + 4u_2 = 0$$

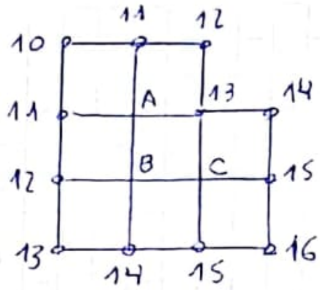
$$i=3 \quad \frac{u_4 + u_2 - 2u_3}{(\pi/16)^2} + 4u_3 = 0$$

QUEDA UN SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES EL CUAL PUEDE SER RESUELTO TANTO POR UN METODO NUMERICO COMO ~~[illegible]~~ JACOBI O GAUSS SEIDEL LOS CUALES SON METODOS ITERATIVOS O POR METODOS ANALITICOS COMO ELIMINACIÓN DE GAUSS, DONDE u_2 ES LA APROXIMACIÓN DE $Y(\pi/8)$

ASI EL ORDEN DEL ERROR DEBERIA DISMINUIR ~~de~~ SEGUN $O(h^2)$ A UN ORDEN DE 10^{-2}.

SWIATLO
99157

② $T_{xx} + T_{yy} = 0$



$$\frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{d^2 T}{dy^2} = 0$$

$i \to x$
$j \to y$

DISCRETIZO SEGUN METODO DE DIFERENCIAS FINITAS DE 2DO ORDEN

$$\frac{U_{i+1,j} + U_{i-1,j} - 2U_{i,j}}{\Delta x^2} + \frac{U_{i,j-1} + U_{i,j+1} - 2U_{i,j}}{\Delta y^2} = 0$$

ASUMO $\Delta x = \Delta y = 1$ CUADRADITO

$$U_{i+1,j} + U_{i-1,j} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1} + U_{i,j+1} - 2U_{i,j} = 0$$

$A = (i,j) = (1,2)$

A $\quad U_{2,2} + U_{0,2} - 2U_{1,2} + U_{1,1} + U_{1,3} - 2U_{12} = 0$

$B = (i,j) = (1,1)$

B $\quad U_{2,1} + U_{0,1} - 2U_{1,1} + U_{1,0} + U_{1,2} - 2U_{11} = 0$

$C = (i,j) = (2,1)$

C $\quad U_{3,1} + U_{1,1} - 2U_{2,1} + U_{2,0} + U_{2,2} - 2U_{2,1} = 0$

REEMPLAZO LOS VALORES DE FRONTERA

A $\quad 13 + 11 - 2U_{1,2} + U_{11} + 11 - 2U_{1,2} = 0 \to 35 - 4U_{12} + U_{11} = 0$

B $\quad U_{21} + 12 - 2U_{1,1} + 14 + U_{12} - 2U_{11} = 0 \to 26 - 4U_{11} + U_{21} + U_{12} = 0$

C $\quad 15 + U_{11} - 2U_{21} + 15 + 13 - 2U_{21} = 0 \to 43 - 4U_{21} + U_{11}$

$35 - 4A + B = 0 \rightarrow -35$

$26 - 4B + A + C = 0$

$43 - 4C + B = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & 0 & -35 \\ 1 & -4 & 1 & -26 \\ 0 & 1 & -4 & -43 \end{array}\right)$$

$A = 12 = u_{12}$

$B = 13 = u_{11}$

$C = 14 = u_{21}$

RESUELTO EL SEL CON ~~[illegible]~~ ELIMINACIÓN DE GAUSS EN EL ANEXO

Ⓒ ~~[illegible] La solución al estar resuelta por un método numérico~~

La Solución De la Ecuación Diferencial de derivadas parciales que obtenida mediante el metodo de diferencias finitas de orden 2 el cual al ser un metodo numerico* cuenta con un error de truncamiento. ~~[illegible]~~ El orden de precisión del metodo es el orden del error de truncamiento obtenido en cada iteración. ~~Podemos [illegible] [illegible] el error de redondeo~~

~~En este caso al utilizar una discretización con~~

En este caso al ser de orden 2 el orden del error de truncamiento es de $O(\Delta x^2 + \Delta y^2)$

* Para la Resolución De entre otras cosas PVC, EDDP.

NOTA

99157
SWIATLO

Anexo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & 0 & -35 \\ 1 & -4 & 1 & -26 \\ 0 & 1 & -4 & -43 \end{array}\right) \qquad m_{21} = -1/4$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & 0 & -35 \\ 0 & -\frac{15}{4} & 1 & -139/4 \\ 0 & 1 & -4 & -43 \end{array}\right) \qquad m_{32} = -4/15$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & 0 & -35 \\ 0 & -15/4 & 1 & -139/4 \\ 0 & 0 & -\frac{56}{15} & -784/15 \end{array}\right) \longrightarrow C = 14$$

$A = (-35 - 13) / -4 = 12$

$B = (-139/4 - 14) / -15/4 = 13$

$C = 14$

SWIATLO
99157

TEORICOS

(1) Si, EL METODO DEL TIRO LINEAL DESCOMPONE ~~transforma~~ el problema del PVC en 2 PVI. PARA OBTENER la solución del PVC, se obtienen las soluciones de los 2 PVI asociados al mismo y luego mediante una formula conocida se obtiene la solución DEL PVI a partir DE LAS 2 soluciones DE LOS PVI. LAS SOLUCIONES DE LOS PVI pueden ser obtenidas con metodos vistos en la materia como por ejemplo EULER

✓

(2) $u_t = u_{xx} + u_{yy}$

PARA que sea de utilidad, $u_t = \frac{du}{dt} = 0$ y se llegaria a $0 = \frac{d^2 u}{d^2 x} + \frac{d^2 u}{d^2 y}$ donde busco una ~~única~~ solución mediante un metodo analitico

No

$0 = \frac{d^2 u}{d^2 x} + \frac{d^2 u}{d^2 y}$ ES una ~~ecuacion~~ EDDP ELIPTICA DE LA FORMA $0 = \nabla^2 U$

PLANTEO SEPARACIÓN DE VARIABLES

$U(x,y) = X(x)\, Y(y)$

$U_{xx} = X''(x)\, Y(y)$

$U_{yy} = Y''(y) \cdot X(x)$

$-X''(x)\, Y(y) = Y'' \cdot X(x)$

$-\frac{X''}{X} = \frac{Y''}{Y} = \underbrace{-\omega^2}_{\text{CONSTANTE}}$

NOTA

$$+\frac{X''}{X} = +\omega^2 \rightarrow X'' - X\omega^2 = 0$$

$$\frac{Y''}{Y} = -\omega^2 \rightarrow Y'' + \omega^2 Y = 0$$

EDO

~~Paso~~ Resuelvo en X

Propongo solución $X = Ae^{\omega x} + Be^{-\omega x}$

Resuelvo en Y

Propongo solución $Y = C\,\mathrm{Sen}(\omega y) + D\,\mathrm{Cos}(\omega y)$

$$U_m(x,y) = \left(Ae^{\omega_m x} + Be^{-\omega_m x}\right)\left(C\,\mathrm{Sen}(\omega_m y) + D\,\mathrm{Cos}(\omega_m y)\right)$$

$$U(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} U_m(x,y)$$

Donde los coeficientes A, B, C, D y W_m se obtendrían mediante las condiciones iniciales. Se necesitarían 4 condiciones espaciales del estado estacionario para poder despejar los mismos y podría así ser de utilidad para calcular valores de u en los nodos A, B, C del problema 2.

Una vez que tengo U(x,y), debería reemplazar el x,y correspondiente al nodo que quiero encontrar y resuelvo la serie correspondiente.

Al plantear $\frac{du}{dT} = 0$, hago la suposición que me encuentro en un estado estacionario donde no varía respecto al tiempo.