

# Episodio 17-Epílogo.

## Autovalores y Autovectores.

Departamento de Matemática  
FIUBA





## Ejemplos

- ▶ Sea  $\mathbb{V}$  es un espacio vectorial con Producto Interno y  $S \subseteq \mathbb{V}$  un subespacio de  $\mathbb{V}$ , si consideramos  $T(v) = \text{proy}_S(v) \Rightarrow \lambda = 1$  es autovalor de  $T$  asociado al autoespacio  $S$  y  $\lambda = 0$  es autovalor de  $T$  asociado a  $S^\perp$ .
- ▶ Si  $T$  es una t.l. no inyectiva, o sea  $\dim(\text{Nu}(T)) > 0$ ,  $\lambda = 0$  es autovalor de  $T$  y  $S_{\lambda=0} = \text{Nu}(T)$ .
- ▶ Si consideramos  $(D - \lambda I) : \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$  por lo visto en la práctica de t.l. que  $\text{Nu}((D - \lambda I)) = \text{gen}\{e^{\lambda x}\} \Rightarrow 0$  es autovalor de  $(D - \lambda I)$  y su autoespacio asociado es  $S = \text{gen}\{e^{\lambda x}\}$ .
- ▶ Entonces, si analizamos el operador  $D : \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$  y buscamos sus autovalores y autovectores, queremos encontrar  $\lambda \in \mathbb{R} / \exists y \neq 0, D(y) = \lambda y \Leftrightarrow y' = \lambda y \Leftrightarrow y = ke^{\lambda x}$ , para  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Entonces todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  es autovalor de  $D$  y para cada  $\lambda$  la función  $ke^{\lambda x}$  es autovector de  $D$ .

Si  $\mathbb{V}$  es un espacio de dimensión finita y  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$  encontrar los autovalores y autovectores de  $T$  es muy sencillo.

Sea  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  base de  $\mathbb{V}$ , por definición  $v$  es un autovector de  $T$  asociado al autovalor  $\lambda$  si:

$$\begin{aligned}T(v) &= \lambda v. \\[T(v)]^B &= [\lambda v]^B = \lambda[v]^B \\[T]_B^B[v]^B &= \lambda[v]^B\end{aligned}$$

Entonces:

$v$  es un autovector de  $T$  asociado al autovalor  $\lambda \iff [v]^B$  es autovector de  $[T]_B^B$  asociado al autovalor  $\lambda$ .

## Observación:

- Si  $B$  y  $B'$  son bases de  $\mathbb{V}$ :

$$[T]_B^B = M_{B'}^B [T]_{B'}^{B'} M_B^{B'}$$

Como ya dijimos,  $[T]_B^B \sim [T]_{B'}^{B'}$

Entonces los polinomios característicos de estas matrices son iguales y por lo tanto tiene sentido hablar de **polinomio característico de  $T$** .

Definición: Sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial de dimensión finita y  $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  transformación lineal se llama **polinomio característico de  $T$**  a  $P_T(\lambda) = \det(\lambda I - [T]_B^B)$  donde  $B$  es cualquier base de  $\mathbb{V}$ .

Definición: Si  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$  se dice que  $T$  **es diagonalizable** si existe una base de  $\mathbb{V}$  formada por autovectores de  $T$ .

Observaciones:

- a. Si  $B' = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  es una base de  $\mathbb{V}$  formada por autovectores de  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ ,  $T(w_i) = \lambda_i w_i$ ,  $\lambda_i \in \mathbb{K}$ .

$$[T]_{B'}^{B'} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

**Si  $T$  es diagonalizable su representación matricial con respecto a una base de  $\mathbb{V}$  formada por sus autovectores es una matriz diagonal.**





Comentarios sobre matrices no diagonalizables en  $\mathbb{C}^{n \times n}$ .

Si una matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  no es diagonalizable es porque existe algún autovalor cuya multiplicidad algebraica no coincide con la multiplicidad geométrica. En ese caso, no podemos encontrar una matriz diagonal  $D$  semejante a  $A$ . Pero se prueba que sí podemos encontrar una matriz *más sencilla*, diagonal por bloques, semejante a esa matriz  $A$ . Son las llamadas matrices de Jordan que no vamos a estudiar en detalle.

Vamos a ver concretamente el caso en  $\mathbb{C}^{3 \times 3}$ . Si  $A$  es una matriz de  $\mathbb{C}^{3 \times 3}$  no diagonalizable, se cumple alguno de los siguientes casos:

Caso 1:

$A$  tiene un autovalor de multiplicidad algebraica 2 y multiplicidad geométrica 1.

Llamemos  $\lambda_1$  al autovalor de multiplicidad algebraica 2 y multiplicidad geométrica 1 y  $\lambda_2$  al autovalor de  $A$  de multiplicidad algebraica 1.

En este caso, podemos probar que  $A \sim J_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ .

O sea, existe  $Q$  tal que  $A = Q J_1 Q^{-1}$

Buscamos  $Q$  tal como la buscamos en el caso de  $A$  diagonalizable:

$$A = Q J_1 Q^{-1} \iff A Q = Q J_1$$

Si explicitamos las columnas de  $Q = [V_1|V_2|V_3]$ :

$$A [V_1|V_2|V_3] = [V_1|V_2|V_3] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Entonces, igualando columna a columna:

$$A V_1 = \lambda_1 V_1 \Rightarrow V_1 \text{ es autovector de } A \text{ asociado a } \lambda_1.$$

$$A V_2 = [V_1|V_2|V_3] \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix} = V_1 + \lambda_1 V_2 \Rightarrow (A - \lambda_1 I) V_2 = V_1$$

$$A V_3 = \lambda_2 V_3 \Rightarrow V_3 \text{ es autovector de } A \text{ asociado a } \lambda_2.$$

Entonces: construimos la matriz  $Q = [V_1|V_2|V_3]$ , de la siguiente forma:

Asociado al autovalor simple  $\lambda_2$  buscaremos su correspondiente autoespacio  $S_{\lambda_2}$  y obtendremos un generador,  $V_3$ .

Buscamos un generador de  $S_{\lambda_1}$ ,  $V_1$ , y luego buscamos  $V_2$ , resolviendo el sistema no homogéneo  $(A - \lambda_1 I)V_2 = V_1$ .

#### Caso 2:

$A$  tiene un autovalor,  $\lambda$ , de multiplicidad algebraica 3 y multiplicidad geométrica 1.

En este caso, podemos probar que  $A \sim J_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ .

Otra vez buscamos  $Q$  tal que  $AQ = QJ_2$ .

Si  $Q = [V_1|V_2|V_3]$ :

$$A[V_1|V_2|V_3] = [V_1|V_2|V_3] \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Igualando columna a columna otra vez:

$AV_1 = \lambda V_1 \Rightarrow V_1$  es autovector de  $A$  asociado a  $\lambda$ .

$AV_2 = V_1 + \lambda V_2 \Rightarrow (A - \lambda I)V_2 = V_1$ .

$AV_3 = V_2 + \lambda V_3 \Rightarrow (A - \lambda I)V_3 = V_2$ .

Entonces, en este caso tenemos también un algoritmo para construir la matriz  $Q$ .

### Caso 3:

$A$  tiene un autovalor,  $\lambda$ , de multiplicidad algebraica 3 y multiplicidad geométrica 2.

En este caso, podemos probar que  $A \sim J_3 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ .

Otra vez necesitamos encontrar  $Q = [V_1|V_2|V_3]$  tal que :

$$A[V_1|V_2|V_3] = [V_1|V_2|V_3] \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Tarea para el hogar