75:12 ANÁLISIS NUMÉRICO I

FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Primer Parcial – Recuperatorio 2

2do. Cuatrimestre 2012
12/Diciembre/2012

Problema 1

Dado el problema matemático y=1-cos(x) se propone para $0{,}001 < x < 0{,}1$ el siguiente algoritmo para su aproximación mediante un calculo numérico_

$\eta_1=x*x$; $\eta_2=\eta_1/2$; $\eta_3= 1-\eta_1/12$; $\eta_4= \eta_2 * \eta_3$

Se pide:

a) Obtener una cota del error de truncamiento del problema numérico propuesto.
b) Obtener una expresión de la cota del error de redondeo.
c) Obtener una expresión que permita determinar la precisión con la cual deben efectuarse los cálculos (cantidad de dígitos significativos) a los efectos de asegurar que el error debido al redondeo no supere el 20 % del error de truncamiento. Asumir que los errores inherentes son nulos. Utilizando dicha expresión evaluar la precisión requerida teniendo en cuenta el rango de valores de x.

Ayuda: $\cos(x)=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Problema 2

El siguiente polinomio tiene una raíz real positiva

$$p(x) = x^3 -2x^2-13x-10$$

la cual deberá ser obtenida iterativamente utilizando el método de aproximaciones sucesivas. A tal efecto se pide:

a) elegir la función de iteración y el punto de arranque justificando teóricamente la elección efectuada.
b) calcular la raíz con un error de truncamiento relativo inferior al 2%
c) determinar el orden de convergencia a partir de los resultados numéricos y compararlo con el obtenido teóricamente.

Pregunta 1

Enuncie una condición suficiente para la convergencia de un método iterativo estacionario aplicado a un sistema de ecuaciones lineales.

Pregunta 2

Que utilidad tiene estimar el número de condición de una matriz cuadrada no singular?

Problema 1 Dado

$$f(x) = 1 - \cos x \qquad x \in [0{,}001, 0{,}1]$$

y se propone

$$\begin{cases} \eta_1 = x \times x \\ \eta_2 = \frac{\eta_1}{2} \\ \eta_3 = 1 - \frac{\eta_1}{12} \\ \eta_4 = \eta_2 \eta_3 \end{cases}$$

para la aproximación de la función. Si reemplazamos todos los η_i por lo que en verdad valen encontramos que

$$\eta_4 = \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{x^2}{12}\right) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!}$$

lo cuál no es más que una aproximación de la serie de potencias de $1 - \cos x$ ✓. El error de truncamiento está dado por cortar la serie del coseno, es decir

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} \\ &\approx \sum_{i=0}^{2} A + \underbrace{\cancel{\sum_{i=3}^{\infty} A}}_{\text{Truncamiento}} \qquad A = (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} \end{aligned}$$

El error de truncamiento de nuestra función puede expresarse como

$$\begin{aligned} \varepsilon_T(x) &= f(x) - \tilde{f}(x) \\ &= 1 - \cos x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} \\ &= 1 - \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} - \sum_{i=0}^{2} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} \\ &= \sum_{i=3}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} \end{aligned}$$

y si tomamos módulo se obtiene

$$\begin{aligned} |\varepsilon_T(x)| &= \left| \sum_{i=3}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!} \right| \\ &\leq \sum_{i=3}^{\infty} \frac{\left|x^{2i}\right|}{(2i)!} \end{aligned}$$

Esto es un polinomio que crece de 0 a ∞, en particular es creciente entre 0,001 y 0,1 que es el intervalo en el cual se nos pide trabajar. Entonces el error de truncamiento dentro de nuestro intervalo será menor que

$$\begin{aligned} |\varepsilon_T(x)| &\leq |\varepsilon_T(x = 0{,}1)| \\ &\leq 1{,}4 \times 10^{-9} \end{aligned}$$

Por lo tanto la cota para el error de truncamiento es

$$\boxed{|\varepsilon_T| \leq 1{,}4 \times 10^{-9}} \rightarrow \text{Cota error de truncamiento}$$

Para obtener el error de redondeo hacemos la gráfica de proceso con las operaciones tal como se las propone con los η_i.

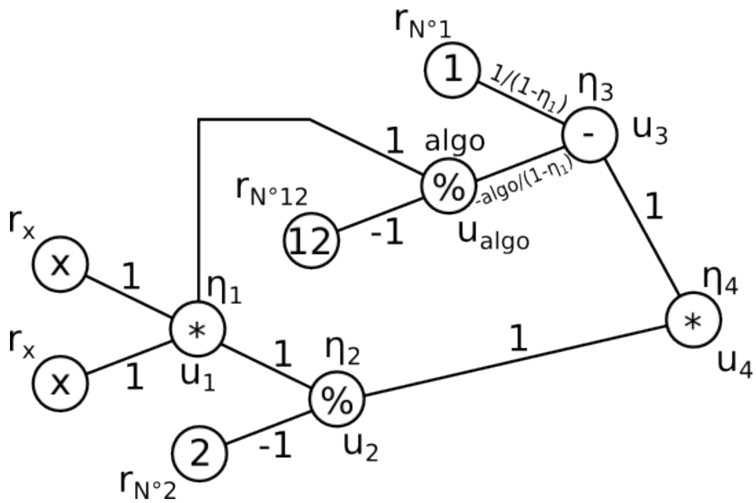

Figura 1: Gráfica de procesos del ejercicio 1.

Entonces

$$\begin{aligned} r_4 &= 1 \times r_3 + 1 \times r_2 + \mu_4 \\ &= \left[r_{\text{N°1}} \frac{1}{1-\eta_1} + r_{\text{algo}} \frac{-\text{algo}}{1-\eta_1} + \mu_3 \right] + \left[r_1 - r_{\text{N°2}} + \mu_2 \right] + \mu_4 \end{aligned}$$

Para que no quede alto choclo los resuelvo por separado a $r_1, r_2, r_{\text{algo}}$.

$$r_1 = 2r_x + \mu_1$$

$$\begin{aligned} r_2 &= r_1 - r_{\text{N°2}} \\ &= 2r_x + \mu_1 - r_{\text{N°2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{\text{algo}} &= r_1 - r_{\text{N°12}} \\ &= 2r_x + \mu_1 - r_{\text{N°12}} \end{aligned}$$

Si introducimos todo esto en la expresión principal se obtiene

$$r_4 = \left[\frac{r_{\text{N°1}}}{1-x^2} - \frac{2r_x - r_{\text{N°12}} + \mu_1}{1-x^2} + \mu_3 \right] + \left[2r_x + \mu_1 - r_{\text{N°2}} + \mu_2 \right] + \mu_4$$

Si consideramos que los números enteros son exactos, podemos hacer $r_{\text{N°}i} \to 0$ lo cual simplifica la expresión a

$$r_4 = \frac{2r_x + \mu_1}{x^2 - 1} + \mu_3 + 2r_x + \mu_1 + \mu_2 + \mu_4$$

Si queremos acotar eso aplicamos los módulos

$$\begin{aligned} |r_4| &\leq R_4 \\ &\leq \left| \frac{2r_x + \mu_1}{x^2 - 1} \right| + 2\,|r_x| + 4\mu \\ &\leq \underbrace{\frac{2R_x}{|x^2 - 1|}}_{\leq 2R_X} + \underbrace{\frac{\mu_1}{|x^2 - 1|}}_{\leq \mu} + 2R_x + 4\mu \\ &\leq 4R_x + 5\mu \end{aligned}$$

Entonces una cota para el error de redondeo será

$$\boxed{|r| \leq 4R_x + 5\mu} \rightarrow \text{Cota error de redondeo}$$

Ejercicio 2 Hay que encontrar la raíz real positiva de

$$p(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$$

Para ello utilizamos una Casio $fx-991ES$ en la cual ejecutamos el siguiente algoritmo: $\boxed{\text{ON}} \to \boxed{\text{MODE}} \to \boxed{5} \to \boxed{4}$ y encontramos que la raíz positiva es $x = 5$. Se pide utilizar un método iterativo, por lo cual elegimos punto fijo. La función de iteración en este método se define como

$$\begin{aligned} g(x) &\stackrel{\text{def}}{=} x - p(x) \\ &= x - x^3 + 2x^2 + 13x + 10 \end{aligned}$$

Para que el método converja se deben cumplir las condiciones del teorema de punto fijo, las cuales no se cumplen. Entonces hacemos Newton Raphson que nos pide que la derivada de la función sea distinta de 0 en las proximidades de la raíz. Con Newton Raphson queda

$$g(x) = \stackrel{\text{def}}{=} x - \frac{x^3 - 2x^2 - 13x - 10}{3x^2 - 4x - 13} \qquad x \in [4, 6]$$

Como las raíces de la derivada son complejas entonces no se anula nunca en el intervalo $[4, 6] \Rightarrow$ el método se supone que converge. Ahora hay que iterar de la siguiente forma

$$x_{k+1} = g(x_k) \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 2x_k^2 - 13x_k - 10}{3x_k^2 - 4x_k - 13}$$

Para estimar el orden de convergencia a partir de las iteraciones utilizamos la formula

$$p \approx \frac{\ln|x_k - x_{k-1}| - \ln|x_{k-1} - x_{k-2}|}{\ln|x_{k-1} - x_2| - \ln|x_{k-2} - x_{k-3}|}$$

A continuación de muestran los valores obtenidos luego de iterar hasta que $\varepsilon < 0{,}01$. Obsérvese que el orden teórico es de 2 mientras que el orden obtenido es $p \approx 1{,}72$. Esta diferencia se debe a que se estimo mediante una aproximación truncando el límite

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k-1}^p} = \lambda$$

Algoritmo 1 Iteraciones del ejercicio 2 mediante Newton Raphson hasta que $\varepsilon < 0{,}02$.

```
x =

    6.00000000000000
    5.21126760563380
    5.01257906684883
    5.00004869192273

p =   1.72362182797393
```

Pregunta 1 Teorema: Sea el problema $A\vec{x} = \vec{b}$. Si $\max\{|\mathrm{aVal}\,(A)|\} < 1 \Rightarrow$ todos los métodos iterativos vistos en clase convergen. $\mathrm{aVal}\,(A)$ es el conjunto de autovalores de A.

Pregunta 2 Para saber cuánto se propagan los errores de redondeo. Si una matriz está mal condicionada entonces propagará mucho los errores de redondeo.