31/10

Practica A'lgebra

(STOP) (4.2) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que tiene autovalores $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 5$ con autovectores asociados
$v_1 = [1, 1, -1]^T$, $v_2 = [2\ 2\ -1]^T$, $v_3 = [1\ 2\ -1]^T$, respectivamente.

(a) Hallar base de Nul(A) y una base de Col(A)

$Nul(A) = gen\{(1\ 1\ -1)^T\}$ por ser el $(1\ 1\ -1)$ el autovector asociado al autovalor 0. $B_{Nul(A)} = \{(1\ 1\ -1)^T\}$ (bien, no sé si bien justificado)

$A = P\Lambda P^{-1}$, $\Lambda = diag(0, 2, 5)$ $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$

$\overset{+F_3}{\underset{F_2}{\Longrightarrow}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$

$\overset{-F_2-F_1}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Soy un boludo, no tenía que buscar A.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 10 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -6 & 10 & 4 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$ $B_{Col(A)} = \{(-1\ -6\ 3)^T, (5\ 10\ -5)^T, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\}$

Aparte ta mal, xq la $B_{Col\,A}$ no es LI (bien, no sé si podría ahorrarme explicitar A.)

(b) $Ax = v_2 + v_3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 4 & 3 \\ -6 & 10 & 4 & 4 \\ 3 & -5 & -2 & -2 \end{array}\right) \overset{+2F_3}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & -2 \end{array}\right) \overset{+F_3}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & -2 \end{array}\right)$

$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 = 1 \to x_1 = \frac{1}{2} - x_3 \to x_3 = \frac{1}{2} - x_1 \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 = -2 \to 3x_1 - 5x_2 + 2x_1 - 1 = -2 \ \to 5x_1 - 5x_2 = -1 \to x_1 = \frac{1}{5} + x_2 \end{cases}$

$x_2 = x_1 + \frac{1}{5}$

$\boxed{\bar{X}_p = (1\ \ 6/5\ \ -1/2)}$

(c) $\bar{X} = \bar{X}_p + Nul(A)$ Preguntar cómo se escribe

(4.2) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ que tiene autovalores $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$ con autovectores asociados $v_1 = (1\ 1\ {-1})^T, v_2 = (2\ 2\ {-1})^T, v_3 = (1\ 2\ {-1})^T$ respectivamente.

(a) Hallar base de Nul(A) y una de Col(A)

$B_{Nul(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ por ser $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ el Autovector Asociado al Autovalor $\lambda_1 = 0$.

$$A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \lambda_2 \cdot \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= 2\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 5\beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

obs: cualquier Vector, luego de multiplicarse por A, puede expresarse como CL de v_2 y v_3.

$B_{Col}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ ya que ~~cada vector multiplicado por la matriz A puede expresarse como~~ esa base resulta la imagen de la T.L. definida por A.

Preguntar si está bien justificado

NotaLunes

(b) $Ax = v_2 + v_3$

$A(\frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{5}v_3) = v_2 + v_3 \rightarrow$ Una X_p podría ser

$v_2 + v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\bar{X}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/5 \\ 7/5 \\ -7/10 \end{pmatrix}$$

(c) ~~una~~ La sol. gral es $\bar{X} = \{ \bar{X}_p + Nul(A) \}$ ¿está bien escribir así? (ya que voy preguntar lunes

(d) Sé que la Imagen de la T.L. definida por A es $B_{Col(A)}$ y v_1 es L.I. de $B_{Col(A)}$, ya que v_1 es un autovector correspondiente a un Autovalor, y los vectores de $B_{Col(A)}$ también son autovectores de A. Entonces, $\nexists\ \alpha, \beta$ tales que $\alpha v_2 + \beta v_3 = v_1$.

Tmb chequear, misma duda que ~~(a)~~ en (a)

(4.3) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times4}$ / $Nul(A) = gen\{(1\ 0\ {-1}\ 0)^T\}$,
$Nul(A+I) = gen\{(0\ 1\ 0\ {-1})^T\}$,
$Nul(A-2I) = gen\{(1\ 0\ 1\ 0)^T, (0\ 1\ 0\ 1)^T\}$

(a) A es diagonalizable ya que tiene 4 autovectores asociados a sus 3 autovalores. $\exists P \in \mathbb{R}^{4\times4} / A = P\Lambda P^{-1}$ siendo $\Lambda = diag(0,-1,2,2)$

(b) $$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix} + A\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} = -1\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\\1\end{pmatrix}$$

(c) $Ax = [1\ 0\ 1\ 0]^T$

$$\Rightarrow A\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} \rightarrow \frac{1}{2}A\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} \rightarrow A\begin{bmatrix}1/2\\0\\1/2\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\bar{X} = \left\{\begin{bmatrix}1/2\\0\\1/2\\0\end{bmatrix} + Nul(A)\right\}$$ Por enésima vez ¿estará bien expresado? Preguntar el lunes

(4.4) (a) $A^6[1\ 1\ 1\ 1]^T = A^6\underbrace{[1\ 0\ 1\ 0]^T}_{v_1} + A^6\underbrace{[0\ 1\ 0\ 1]^T}_{v_2} = \underbrace{2^6}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} + \underbrace{2^6}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$

Autoval asociado a v_1 y v_2 (autovecs)

$\Rightarrow = [64\ 64\ 64\ 64]$

(b) $A^7(1\ 1\ 1\ {-1})^T = A^7[1\ 0\ 1\ 0]^T + A^7[0\ 1\ 0\ {-1}]^T$
$= \underbrace{2^7}[1\ 0\ 1\ 0]^T_{w_1} + \underbrace{(-1)^7}[0\ 1\ 0\ {-1}]_{w_2} = \begin{bmatrix}128\\-1\\128\\1\end{bmatrix}$

Aval asociado a $w_1 = v_1$ Aval asociado a w_2

(c) $A^4x = [1\ 0\ 1\ 0]^T$ / $\bar{x}_p = \left[\frac{1}{16}, 0, \frac{1}{16}, 0\right]^T$
(parece ok) $A^4[1\ 0\ 1\ 0]^T = 2^4[1\ 0\ 1\ 0]^T$ / $\bar{X} = \{\bar{x}_p + Nul(A)\}$

(d) determinar el espectro de $A^{36} - A^{35}$. Resuelvo atrás

$\sigma(A^{34}-A^{35})$ $\qquad$ $\sigma(A)=\{0,-1,2\}$

$\sigma(A^{34}-A^{35})=\{0^{34}-0^{35}, -1^{34}-(-1)^{35}, 2^{34}-2^{35}\}$

$\sigma(A^{34}-A^{35})=\{0, 2, 34359738368\}$

(4.5) Determinar, en c/u de los casos $\sigma(A)$

(a) $A\in\mathbb{R}^{3\times3}$ es una matriz diagonalizable tal que $tr(A)=-4$ y $\sigma(A^2+A)=\{-1,3,8\}$ $\rightarrow$ lo vimos en la teórica, no tiene solución (la mal la consigna)

(b) $A\in\mathbb{R}^{4\times4}$ es una matriz diagonalizable t/que $det(A)=6$ y $\{-2,1\}\subset\sigma(A)$ y $-4\in\sigma(A-3I)$

[illegible]

$p(\lambda)=\lambda+3=-4 \rightarrow \lambda=-1$ $\qquad$ $\Lambda=diag(-2,-1,1,\cancel{\lambda_4}\,\beta)$

$det(\Lambda)=det(A)=6$

$\Rightarrow -2\cdot-1\cdot1\cdot\beta=6 \rightarrow \beta=3$

$\sigma(A)=\{-2,-1,1,3\}$ Parece Ok

(4.6) Hallar $A\in\mathbb{R}^{2\times2}$ que cumpla $\longrightarrow$ (b) $det(A)=-1$ (c) $tr(A)=6$

(a) $A^2-3A+2I=\underbrace{\begin{bmatrix}3&3\\3&3\end{bmatrix}}_{B}$; $\sigma(B)=\{x\in\mathbb{R} : det(Nul(B-xI))=0\}$

$\Rightarrow \begin{vmatrix}3-x&3\\3&3-x\end{vmatrix}=(3-x)^2-9=\{0,6\}$

$S_0=gen\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\}$ $S_6=gen\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}$

$A^2-3A+2I=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2&1/2\\1/2&-1/2\end{bmatrix}$ $\qquad$ $p(\lambda_1)=6=\lambda_1^2-3\lambda+2=\left\langle\begin{matrix}4\\-1\end{matrix}\right.$

$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2&1/2\\1/2&-1/2\end{bmatrix}$ $\qquad$ $p(\lambda_2)=0=\lambda_2^2-3\lambda_2+2\left\langle\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$

$A=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2&1/2\\1/2&-1/2\end{bmatrix} \rightarrow$ (a) Cualquier combinación de los λ_1,λ_2 hallados

(b) $\lambda_1=-1, \lambda_2=1$ | (c) $\lambda_1=4, \lambda_2=2$