SEL iterativos

SISTEMA A RESOLVER:

$$10\,x + 2\,y + 6\,z = 28$$
$$x + 10\,y + 4\,z = 7$$
$$2\,x - 7\,y - 10\,z = -17$$

Jacobi:

$$x^{(k+1)} = \frac{28 - 2y^{(k)} - 6z^{(k)}}{10}$$
$$y^{(k+1)} = \frac{7 - x^{(k)} - 4z^{(k)}}{10}$$
$$z^{(k+1)} = \frac{17 + 2x^{(k)} - 7y^{(k)}}{10}$$

Primera iteración ($k = 0$):

$$x^{(1)} = \frac{28 - 2*2 - 6*3}{10} = 0.6$$
$$y^{(1)} = \frac{7 - 1 - 4*3}{10} = -0.6$$
$$z^{(1)} = \frac{17 + 2*1 - 7*2}{10} = 0.5$$

Tabla de valores:

k	x	y	z
0	1.000	2.000	3.000
1	0.600	-0.600	0.500
2	2.620	0.440	2.240
3	1.368	-0.458	1.916
4	1.742	-0.203	2.294
5	1.464	-0.392	2.191
6	1.564	-0.323	2.267
7	1.504	**-0.363**	**2.239**
8	1.529	**-0.346**	**2.255**

Gauss – Seidel:

$$x^{(k+1)} = \frac{28 - 2y^{(k)} - 6z^{(k)}}{10}$$
$$y^{(k+1)} = \frac{7 - x^{(k+1)} - 4z^{(k)}}{10}$$
$$z^{(k+1)} = \frac{17 + 2x^{(k+1)} - 7y^{(k+1)}}{10}$$

Primera iteración ($k = 0$):

$$x^{(1)} = \frac{28 - 2*2 - 6*3}{10} = 0.6$$
$$y^{(1)} = \frac{7 - 0.6 - 4*3}{10} = -0.5($$
$$z^{(1)} = \frac{17 + 2*0.6 - 7*(-0.56)}{10} = 2.212$$

Tabla de valores:

k	x	y	z
0	1.000	2.000	3.000
1	0.600	-0.560	2.212
2	1.585	**-0.343**	**2.257**
3	1.514	**-0.354**	**2.251**

SEL iterativos

Forma matricial: $\underline{x}^{(k+1)} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{x}^{(k)} + \underline{c}$

Para Jacobi:

$$x^{(k+1)} = \frac{28 - 2y^{(k)} - 6z^{(k)}}{10}$$

$$y^{(k+1)} = \frac{7 - x^{(k)} - 4z^{(k)}}{10}$$

$$z^{(k+1)} = \frac{17 + 2x^{(k)} - 7y^{(k)}}{10}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} 0 & -2/10 & -6/10 \\ -1/10 & 0 & -4/10 \\ 2/10 & -7/10 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}^{(k)} + \begin{bmatrix} 28/10 \\ 7/10 \\ 17/10 \end{bmatrix}$$

***se puede obtener una matriz T similar para el método de Gauss-Seidel**

SEL iterativos

Convergencia

Teo 1) Si $\underline{\underline{A}}$ es diag domin ($|a_{ii}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}|$) => J y GS convergen

Teo 2) Si $\underline{\underline{A}}$ def posit (subdet>0) y $0<w<2$ => SOR converge

Teo 3) Si $\exists \left\| \underline{\underline{T}} \right\| < 1 \Rightarrow$ convergen

Teo 4) Si $\rho\left(\underline{\underline{T}}\right) = \max|\lambda_i| < 1 \Leftrightarrow$ convergen

Teo 5) Si $\underline{\underline{A}}$ es simétrica, def posit, tridiag en bloques => $w_{óptimo} = \dfrac{2}{1+\sqrt{1-\rho\left(\underline{\underline{T}}_{GS}\right)}}$

Teo 6) $\left| \underline{x}^{(k+1)} - \underline{x} \right| \leq factor * \left| \underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^{(k)} \right|$ cota del error de truncamiento

VOLVIENDO AL PROBLEMA:

$$
\begin{aligned}
10\,x + 2\,y + 6\,z &= 28 \\
x + 10\,y + 4\,z &= 7 \\
2\,x - 7\,y - 10\,z &= -17
\end{aligned}
$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 6 \\ 1 & 10 & 4 \\ 2 & -7 & -10 \end{bmatrix}$$ es diag domin

Normas:

$\left\| \underline{\underline{T}}_J \right\|_1 = 1$ $\qquad \left\| \underline{\underline{T}}_{GS} \right\|_1 = 1.058$

$\left\| \underline{\underline{T}}_J \right\|_\infty = 0.9$ $\qquad \left\| \underline{\underline{T}}_{GS} \right\|_\infty = 0.8$

Rango espectral (mide la velocidad de convergencia):

$\rho\left(\underline{\underline{T}}_J\right) = 0.48$ $\qquad \rho\left(\underline{\underline{T}}_{GS}\right) = 0.21$

SEL iterativos

Detalle de algunos criterios

Teo 3) si $\exists \|\boldsymbol{T}\| < \mathbf{1} \Rightarrow$ **convergen**

$$X = TX + C$$

$$X^{(k+1)} = TX^{(k)} + C$$

$$X^{(k)} - X = T^k\left(X^{(0)} - X\right)$$

$$\left\|\boldsymbol{X}^{(\boldsymbol{k})} - \boldsymbol{X}\right\| \leq \|\boldsymbol{T}\|^{\boldsymbol{k}}\left\|\boldsymbol{X}^{(\mathbf{0})} - \boldsymbol{X}\right\|$$

Error de truncamiento

$$\left\|\boldsymbol{X}^{(\boldsymbol{k})} - \boldsymbol{X}\right\| \leq \frac{\|\boldsymbol{T}\|}{\mathbf{1} - \|\boldsymbol{T}\|}\left\|\boldsymbol{X}^{(\boldsymbol{k})} - \boldsymbol{X}^{(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})}\right\|$$

si $\|T\| \leq 0.5$, entonces el factor de $\left\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\right\|$ es menor o igual que 1, y por lo tanto

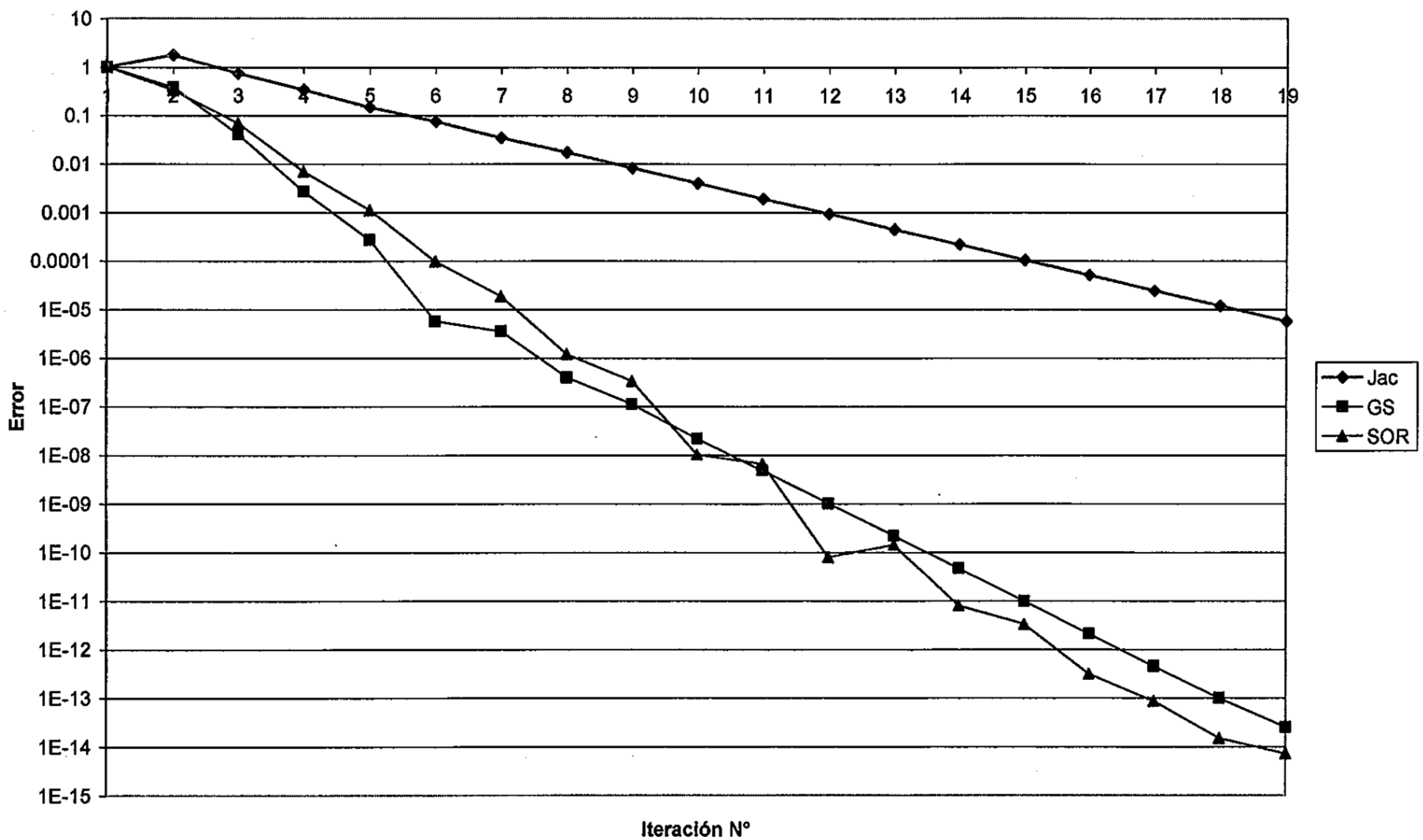
$$\left\|\boldsymbol{X}^{(\boldsymbol{k})} - \boldsymbol{X}\right\| \leq \left\|\boldsymbol{X}^{(\boldsymbol{k})} - \boldsymbol{X}^{(\boldsymbol{k}-\mathbf{1})}\right\|$$

SEL iterativos

Velocidad de convergencia

Rango espectral (mide la velocidad de convergencia):

$\rho(\underline{\underline{T}}_J) = 0.48$ $\rho(\underline{\underline{T}}_{GS}) = 0.21$ $\rho(\underline{\underline{T}}_{SOR}) = 0.17$



Sistemas lineales

Ejercicio de examen

Problema 2

Dado el siguiente sistema lineal $Ax=b$ con:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

a) ¿Es posible resolver este sistema con el método de *Jacobi*? ¿Que indica el criterio de diagonal dominante aplicado a este caso?
b) Dar una estimación con 2 dígitos significativos del radio espectral de la matriz de iteración ***T*** acorde al método iterativo de *Jacobi*, sabiendo que sus autovalores son: $\lambda 1$= -0,6624; $\lambda 2$= 0,3312+0,2811i $\lambda 3$=0,3312-0,2811i. En base al resultado obtenido ¿está garantizada la convergencia por *Jacobi*?
c) Realizar 2 iteraciones con la siguiente semilla x_0 = [0,29 0,15 0,43] y dar una solución adecuada.