Aproximación de Funciones - Interpolación

Objetivo

Dado un conjunto de Puntos (datos) encontrar una función P(x) que pase exactamente por dichos puntos.

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$$

x	y
0	1
1	1
2	2
4	5

- n+1 coeficientes (incógnitas)
- m+1 pares de datos
- m=n

Interpolación de Lagrange

Evalúo la función de aproximación en los m+1 puntos que son dato:

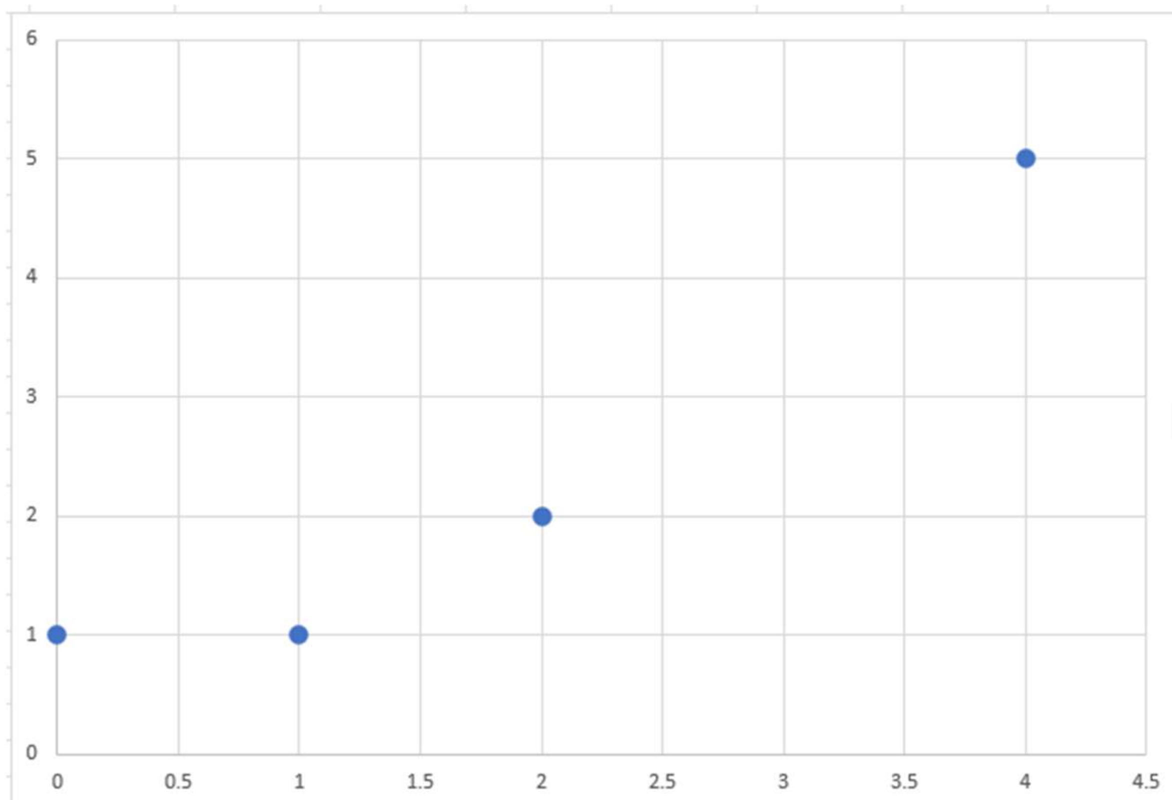
$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_{nk}\,(x)$$

Donde “n” es el grado del polinomio a encontrar y Lnk son los Polinomios de Lagrange:

$$L_{nk}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

Interpolación de Lagrange

x	y
0	1
1	1
2	2
4	5



Interpolación de Lagrange

Dado que tenemos 4 datos, estamos buscando un polinomio con 4 coeficientes (grado 3).
Calculamos los Polinomios de Lagrange:

x	y
0	1
1	1
2	2
4	5

$$L_{30} = \frac{x-x_1}{x_0-x_1}\frac{x-x_2}{x_0-x_2}\frac{x-x_3}{x_0-x_3} = \frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{-8}$$

$$L_{31} = \frac{x-x_0}{x_1-x_0}\frac{x-x_2}{x_1-x_2}\frac{x-x_3}{x_1-x_3} = \frac{(x)(x-2)(x-4)}{3}$$

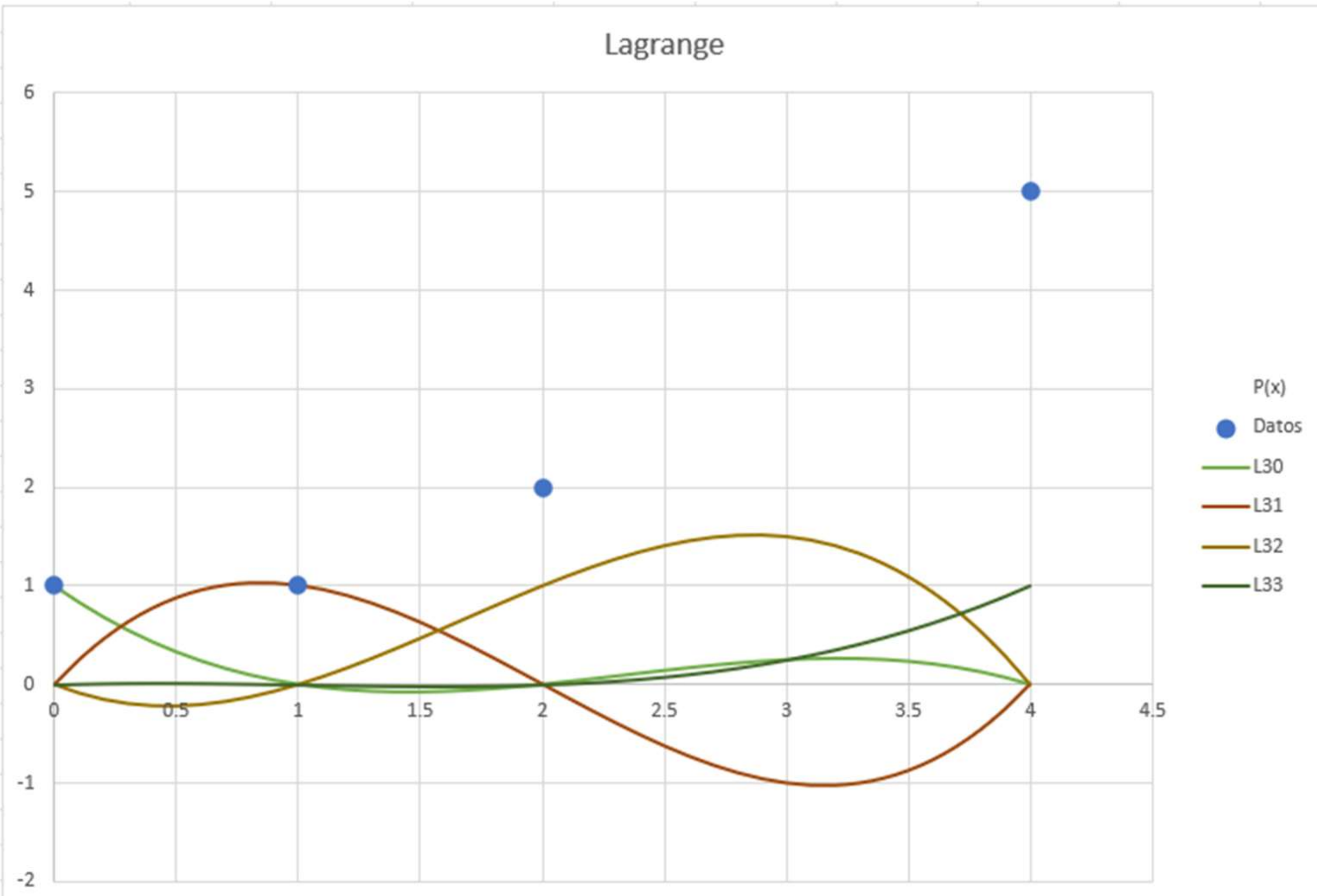
$$L_{32} = \frac{x-x_0}{x_2-x_0}\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\frac{x-x_3}{x_2-x_3} = \frac{(x)(x-1)(x-4)}{-4}$$

$$L_{33} = \frac{x-x_0}{x_3-x_0}\frac{x-x_1}{x_3-x_1}\frac{x-x_2}{x_3-x_2} = \frac{(x)(x-1)(x-2)}{24}$$

$$L_{nk}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_{nk}$$

Interpolación de Lagrange



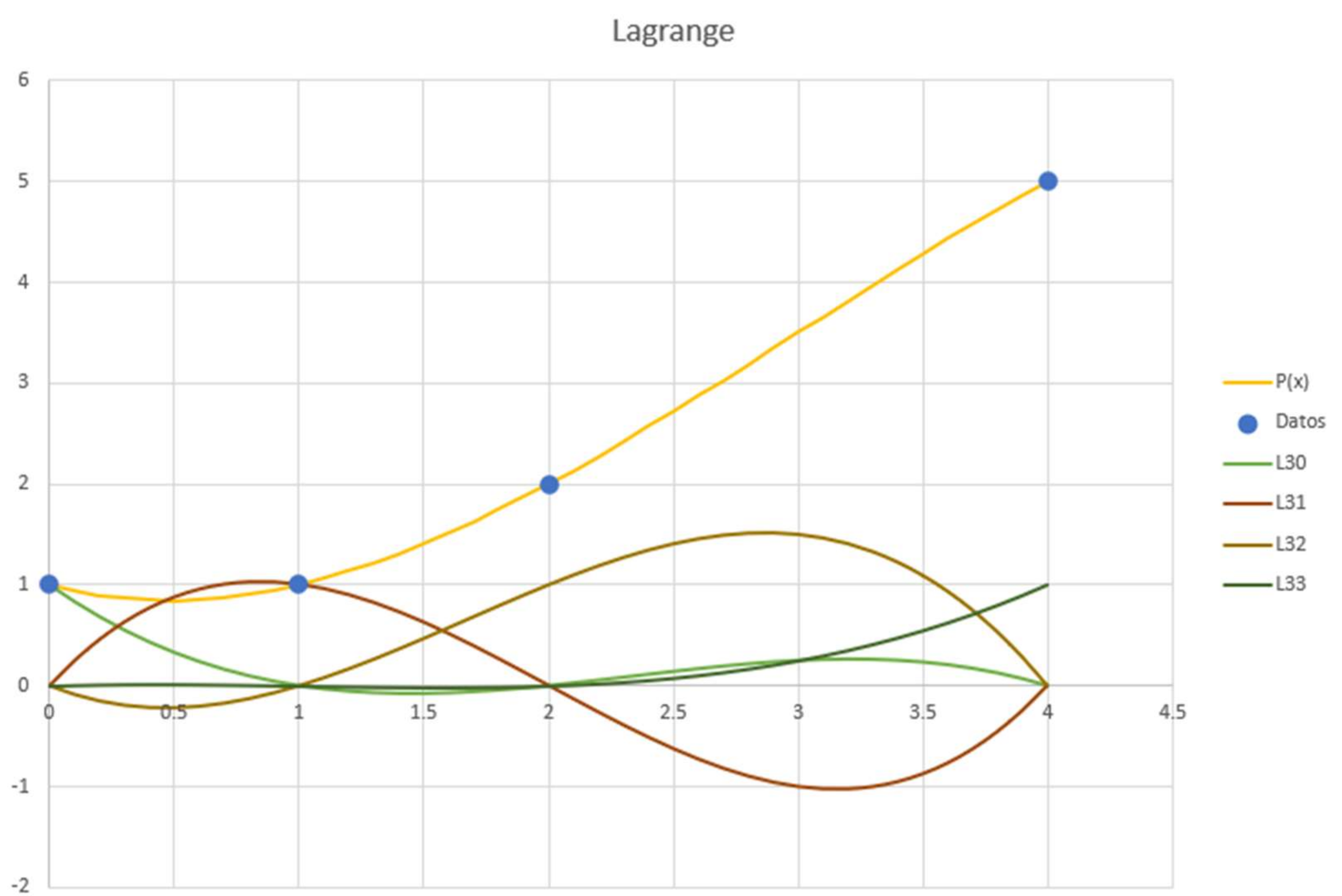
x	y
0	1
1	1
2	2
4	5

$$L_{nk} = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_{nk}$$

Interpolación de Lagrange

$$P(x) = 1\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{-8} + 1\frac{(x)(x-2)(x-4)}{3} + 2\frac{(x)(x-1)(x-4)}{-4} + 5\frac{(x)(x-1)(x-2)}{24}$$



$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k L_{nk}$$

Interpolación de Lagrange

Ventajas

- Simplicidad

Desventajas

- En caso de añadir nueva información (nuevo punto x,y) hay que recalcular todos los polinomios
- Solo se puede utilizar información del valor de la función

Interpolación de Newton

$$P_n(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + C_n(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1})$$

$$C_0 = f(x_0)$$

$$C_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$C_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = \frac{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

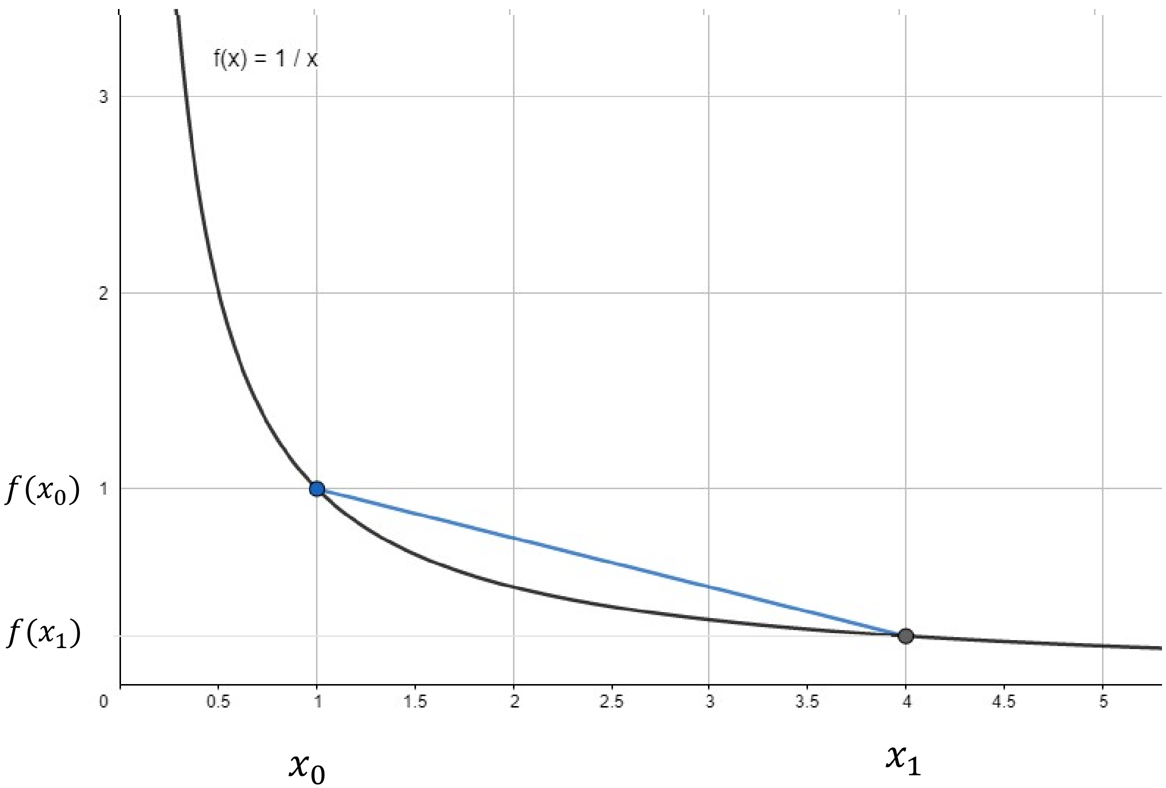
...

$$C_n = f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] - f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

Interpolación de Newton

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	1
1	4	0,25

n+1=2 → Puntos
n=1 → Interpolación Lineal



$$P_1(x) = C_0 + C_1(x - x_0)$$

$$C_0 = f(x_0) = f(1) = 1$$

$$C_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{0,25 - 1}{4 - 1} = -0,25$$

$$\boxed{P_1(x) = 1 - 0,25(x - x_0)}$$

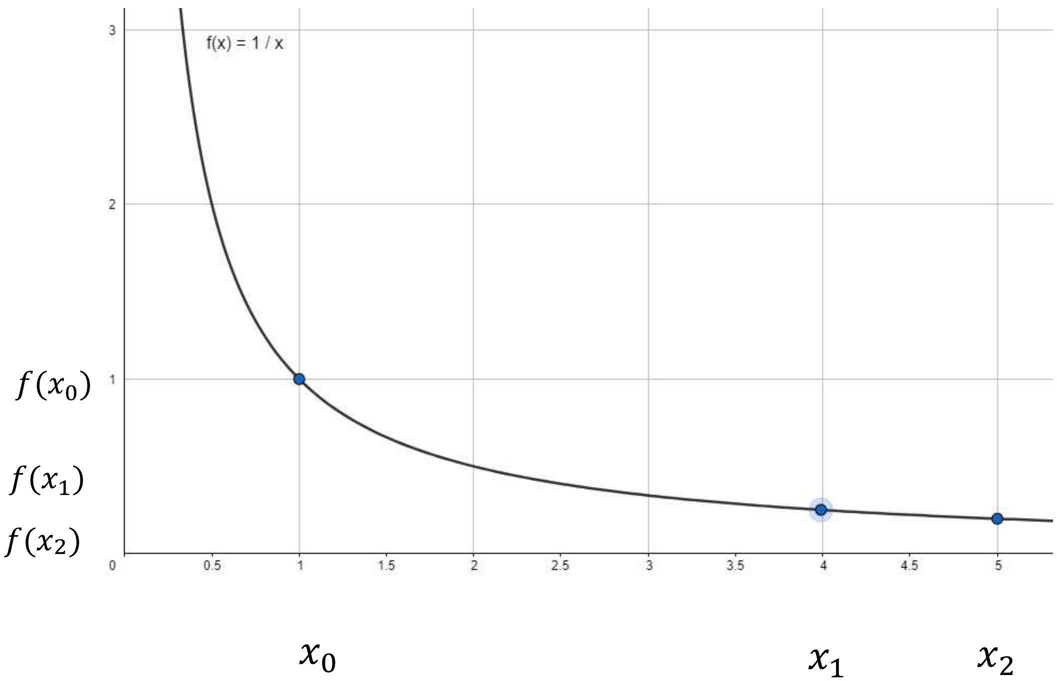
Interpolación de Newton

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	1
1	4	0,25
2	5	0,2

n+1=3 → Puntos

n=2 → Interpolación Cuadrática

$$P_2(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)(x - x_1)$$



$$C_0 = f(x_0)$$

$$C_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

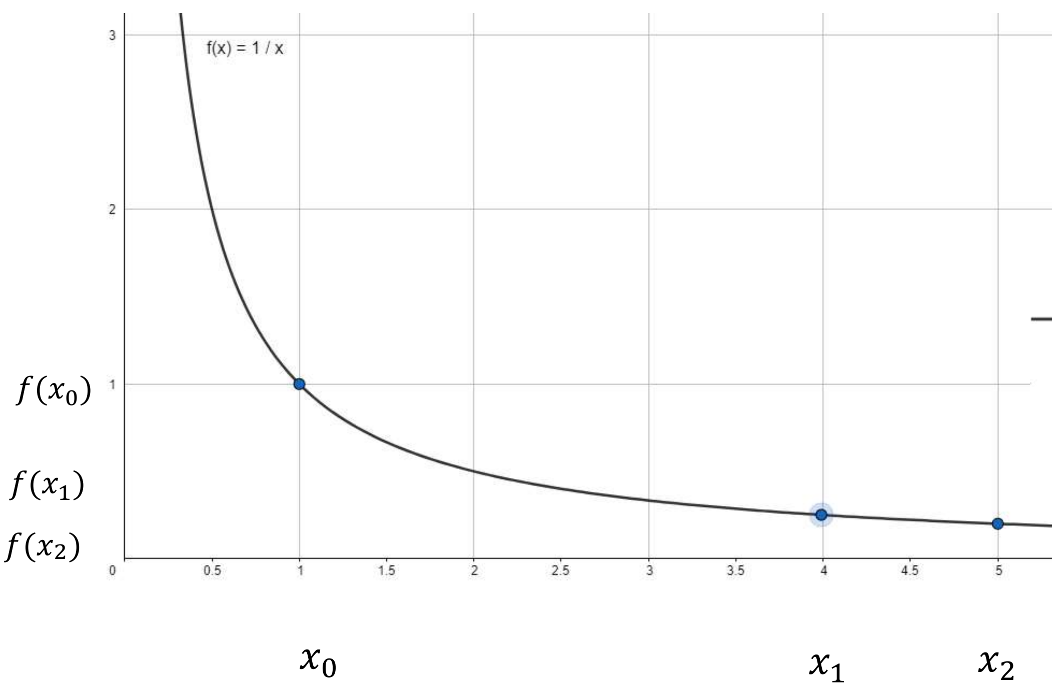
$$C_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

Interpolación de Newton

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	1
1	4	0,25
2	5	0,2

n+1=3 → Puntos
n=2 → Interpolación Cuadrática



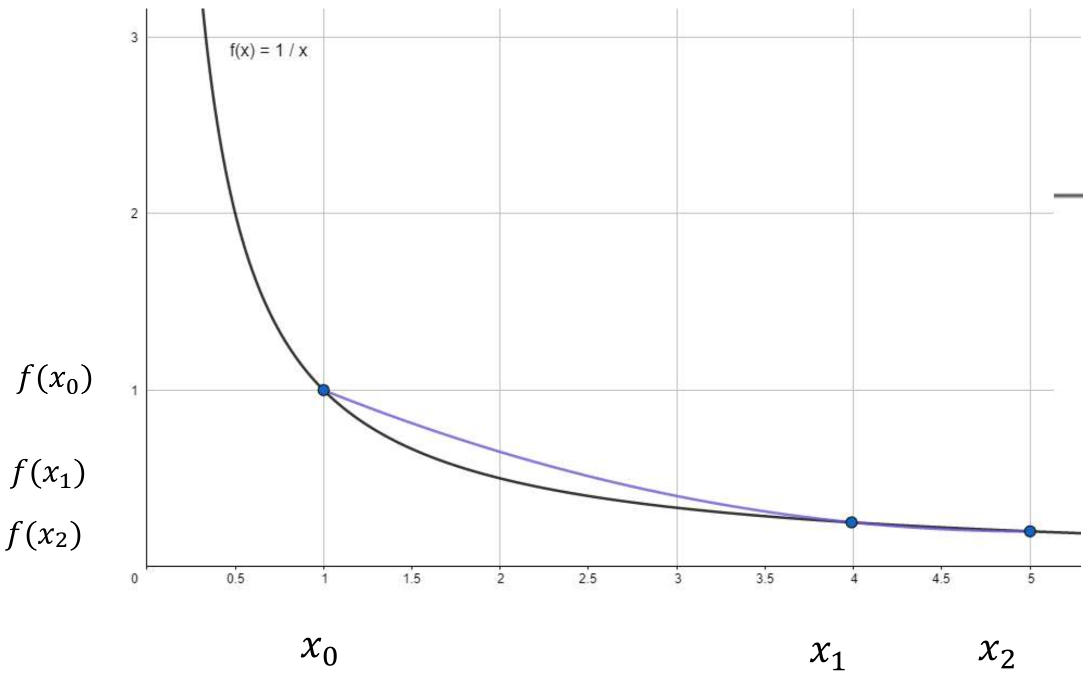
$$P_2(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)(x - x_1)$$

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_i]$	$f[x_i, x_i, x_i]$	$f[x_i, x_i, x_i, x_i]$
0	x0	f(x0)	f[x0, x1]	f[x0, x1, x2]	f[x0, x1, x2, x3]
1	x1	f(x1)	f[x1, x2]	f[x1, x2, x3]	
2	x2	f(x2)	f[x2, x3]		
3	x3	f(x3)			

Interpolación de Newton

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	1
1	4	0,25
2	5	0,2

n+1=3 → Puntos
n=2 → Interpolación Cuadrática



$$P_2(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)(x - x_1)$$

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_i]$	$f[x_i, x_i, x_i]$
1	1	f[x0, x1]= $\frac{0,25-1}{4-1} = -0,25$	f[x0, x1, x2]= $\frac{-0,05+0,25}{5-1} = 0,05$
4	0,25	f[x1, x2]= $\frac{0,2-0,25}{5-4} = -0,05$	
5	0,2		

$$P_2(x) = 1 - 0,25(x - 1) + 0,05(x - 1)(x - 4)$$

Interpolación de Newton

$$f(x) = P_n + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)}_{}$$

$\xi(x) \in [x_0, x_n]$ desconocido

Expresión del error de truncamiento R_n

$\Downarrow$ **TEOREMA**

$$R_n = f[x_0, x_1, \dots, x_n, x](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$$

$\Downarrow$ **ESTIMACIÓN**

Ec. de Estimación del error de truncamiento

$$R_n \cong f[x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}](x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$$

Dato adicional que dispongamos

Newton Generalizado

Que pasa si quiero agregar información de derivadas de distintos ordenes?

xi	f(xi)	f'(xi)	f''(xi)
0	1	1	1
0.5	1.64872127	1.64872127	
1	2.71828183		

Simplemente repito cada xi tantas veces como datos tenga en ese punto y aplico el método:

	xi	fi					
z0	0	1					
z1	0	1	1				
z2	0	1	1	0.5			
z3	0.5	1.64872127	1.29744254	0.59488508	0.18977017		
z4	0.5	1.64872127	1.64872127	0.70255746	0.21534475	0.05114917	
z5	1	2.71828183	2.13912112	0.98079969	0.27824223	0.06289748	0.01174831

$$f[z_i, \dots z_{i+k}] = \frac{f^{(k)}(z_i)}{k!}$$

Newton Generalizado

El polinomio interpolante termina quedando:

$$P(x) = C_0 + C_1(x - z_0) + C_2(x - z_0)(x - z_1) + C_3(x - z_0)(x - z_1)(x - z_2) + C_4(x - z_0)(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3) + C_5(x - z_0)(x - z_1)(x - z_2)(x - z_3)(x - z_4)$$

Reemplazando zi por los correspondientes xi queda:

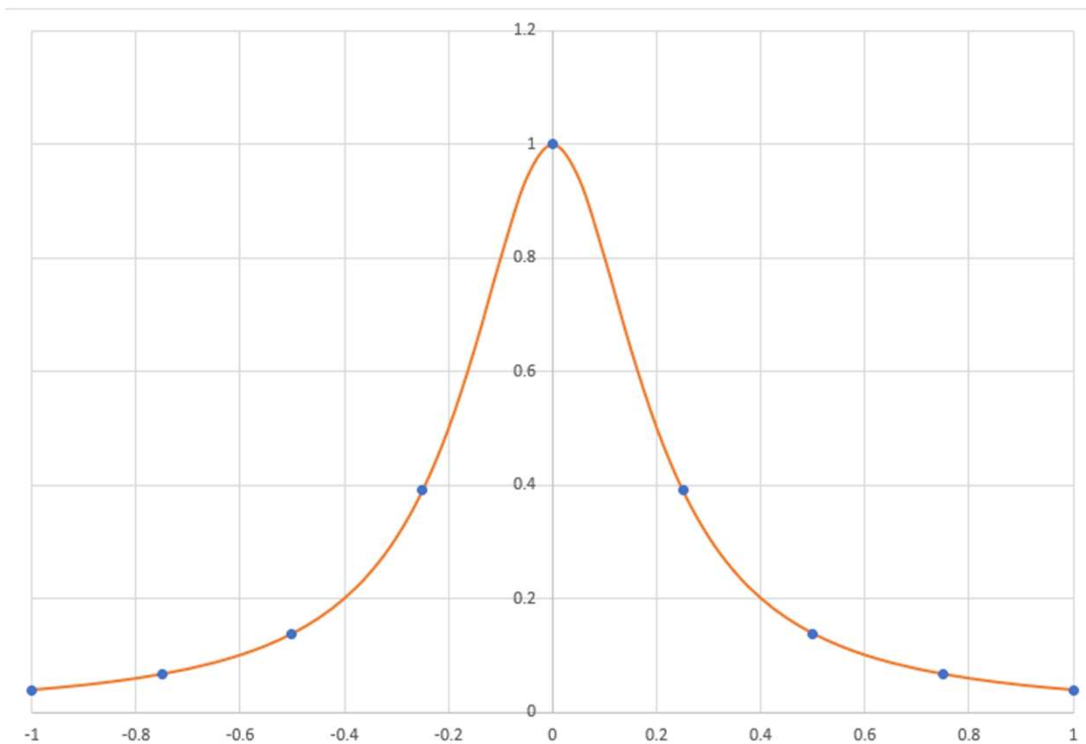
$$P(x) = C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)^2 + C_3(x - x_0)^3 + C_4(x - x_0)^3(x - x_1) + C_5(x - x_0)^3(x - x_1)^2$$

Fenómeno de Runge

Se desea interpolar la siguiente función:

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

En el intervalo [-1; 1] con un polinomio de grado 8.

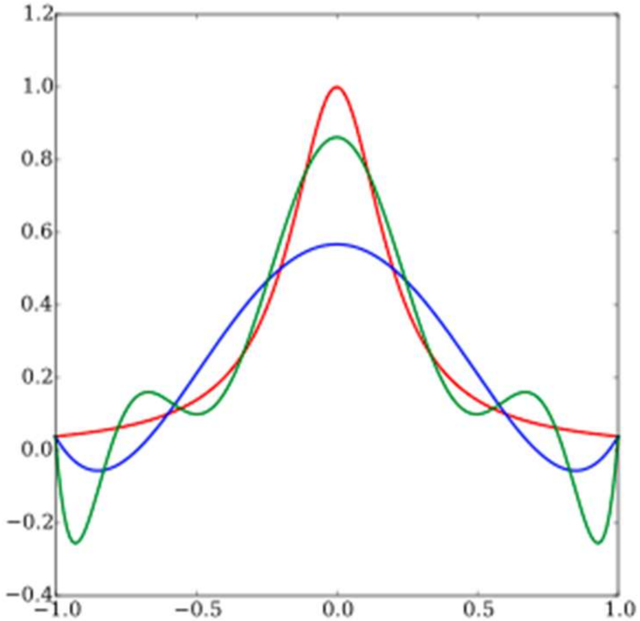


Fenómeno de Runge

Este fenómeno fue descubierto por Carl David Tolmé Runge en 1901.

Se produce cuando se interpola con polinomios de alto grado, cuando se utilizan puntos equiespaciados.

El error se hace aún mas notorio hacia los extremos del intervalo



Posibles mejoras:

- Evitar el muestreo con puntos equidistantes
- Utilizar interpolación segmentada

Fenómeno de Runge

Se modifican los puntos equidistantes por las abscisas de Chebyshev.

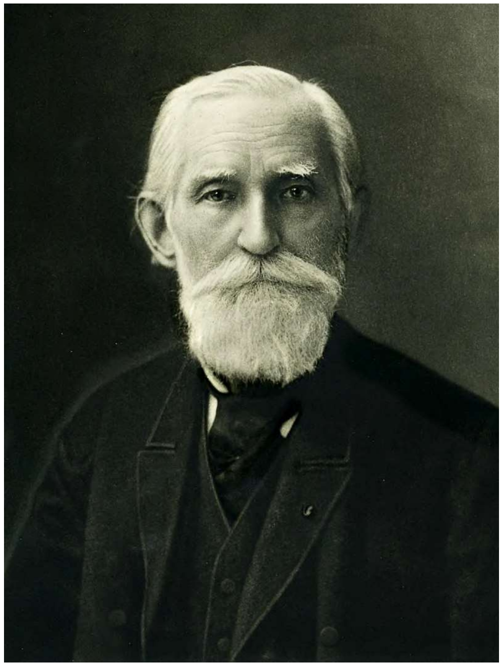
Dichas abscisas son los ceros de los polinomios de Chebyshev.

Se definen en forma recursiva x ϵ [-1; 1]:

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$



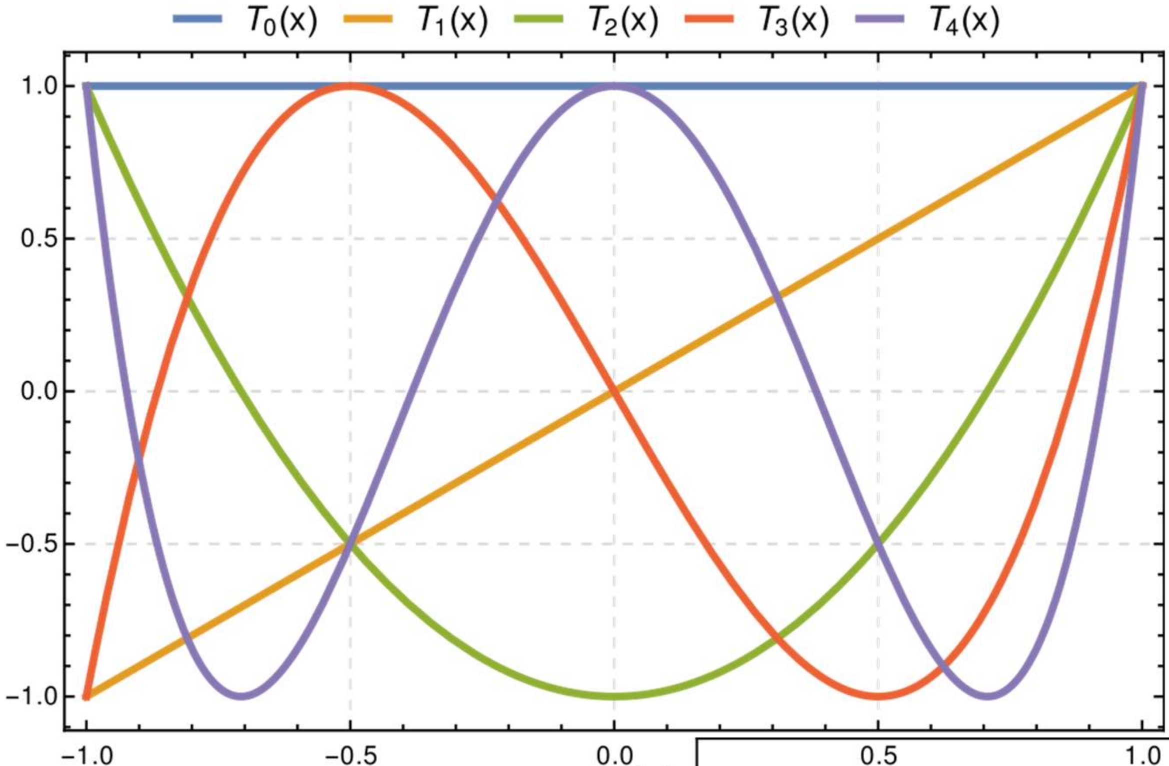
Pafnuty Lvovich Chebyshev

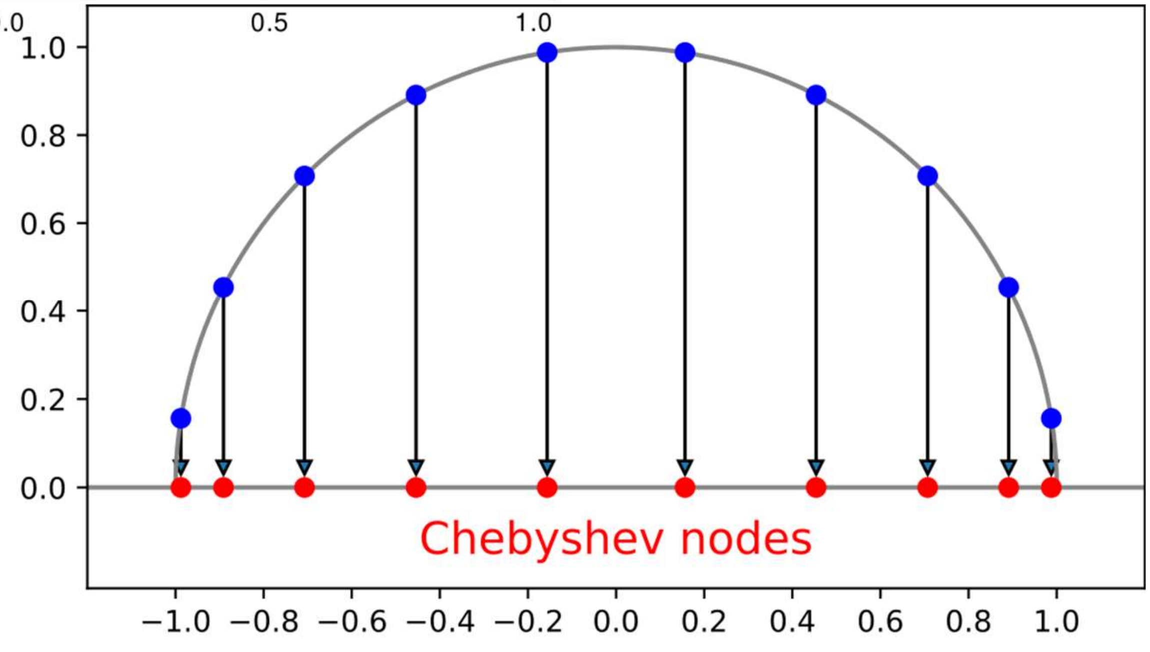
Los ceros para un polinomio de grado n son:

$$x_i = \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right) \qquad 1 \le i \le n \qquad [-1,1]$$

$$\tilde{x}_i = a + \frac{b-a}{2}(x_i + 1) \qquad [a, b]$$

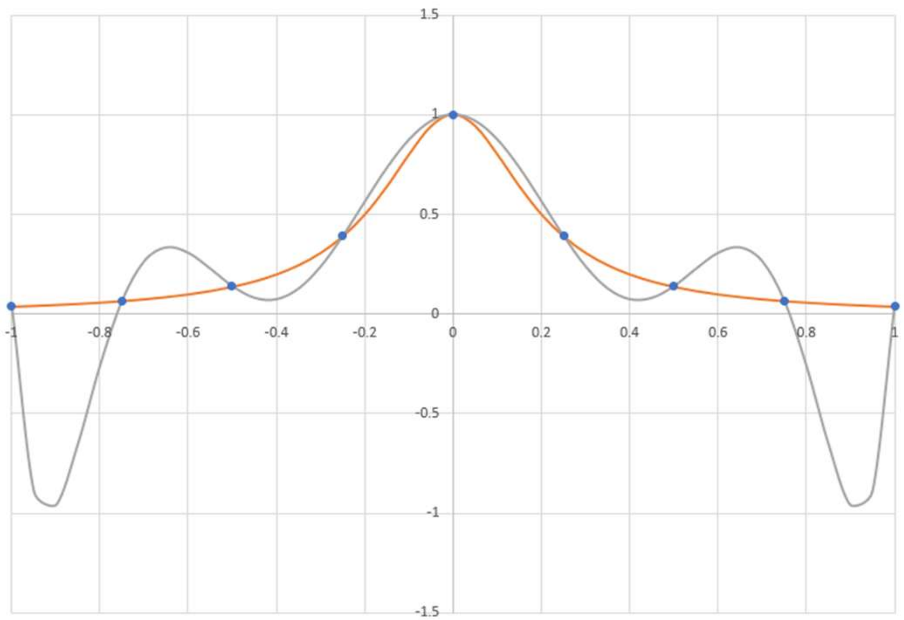
Fenómeno de Runge

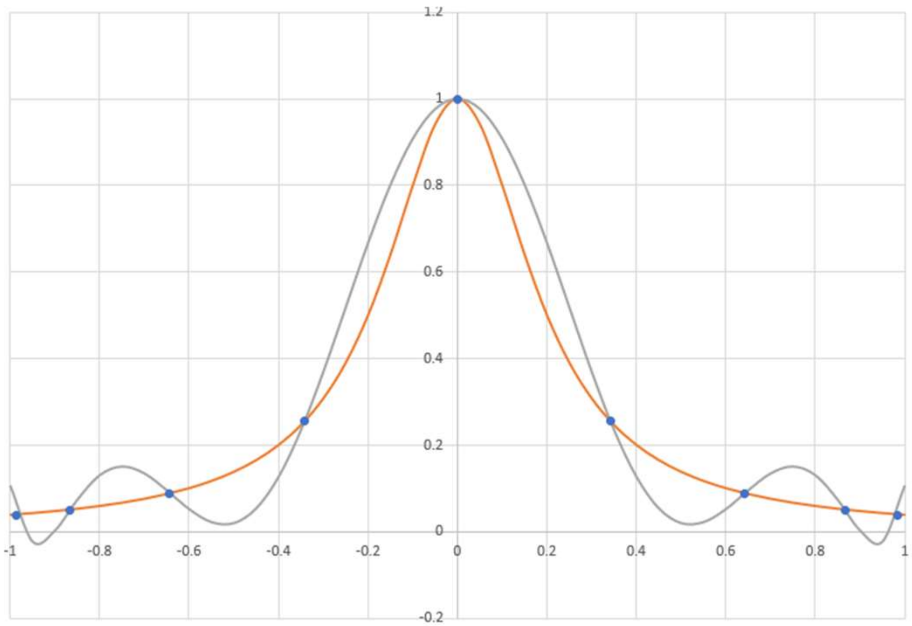




Fenómeno de Runge

- Al tomar puntos NO equiespaciados se distribuye el error de forma distinta
- Los nodos de Chebyshev garantizan una distribución uniforme (y por ende mínima) al fenómeno de Runge





Fenómeno de Runge

- Otra solución posible es utilizar polinomios de grado menor en intervalos mas cortos (interpolación segmentada)
- Interpolador Spline Cúbico