Aproximación de Funciones

Objetivo

Dado un conjunto de Puntos (datos) encontrar una función f*(x) que aproxime lo mejor posible dichos puntos.

$$f^*(x) = \sum_{j=0}^{n} C_j \varphi_j(x)$$

x	y
1	2
2	5
4	7
5	11

- n+1 Funciones preestablecidas (funciones base)
- m+1 datos (puntos x,y)

Aproximación de Funciones

Evalúo la función de aproximación en los m+1 puntos que son dato:

$$f^*(x_0) = \sum_{j=0}^{n} C_j \varphi_j(x_0)$$

$$f^*(x_1) = \sum_{j=0}^{n} C_j \varphi_j(x_1)$$

$$f^*(x_2) = \sum_{j=0}^{n} C_j \varphi_j(x_2)$$

$$\ldots$$

$$f^*(x_m) = \sum_{j=0}^{n} C_j \varphi_j(x_n)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \cdots & \varphi_n(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0(x_m) & \cdots & \varphi_n(x_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^*(x_0) \\ \vdots \\ f^*(x_m) \end{bmatrix}$$

Sistema de (m+1) x (n+1)

Si m<n => mas incógnitas que datos

Si m=n => SEL => Interpolación

Si m>n => Ajuste

Aproximación de Funciones: Ajuste

Defino Criterio: Cuadrados Mínimos

$e_i = f_i - f^*(x_i)$ Error del punto i

Defino el error global como:

$$e = \sum_{i=0}^{m} \left(f_i - f^*(x_i)\right)^2$$

Minimizo "e" derivando e igualando a cero:

$$\frac{\partial e}{\partial C_k} = 0 = \frac{\partial}{\partial C_k}\left(\sum_{i=0}^{m}\left(f_i - \sum_{j=0}^{n} C_j \varphi_j(x_i)\right)^2\right) = \frac{\partial}{\partial C_k}\left(\sum_{i=0}^{m} {R_i}^2\right)$$

$$\sum_{i=0}^{m} 2R_i \frac{\partial R_i}{\partial C_k} = \sum_{i=0}^{m} 2\left(f_i - \sum_{j=0}^{n} C_j \varphi_j(x_i)\right)\varphi_k(x_i) = 0$$

Aproximación de Funciones: Ajuste

$$\sum_{i=0}^{m} f_i \varphi_k(x_i) - \sum_{i=0}^{m} \left(\sum_{j=0}^{n} C_j \varphi_j(x_i) \right) \varphi_k(x_i) = 0$$

$$\sum_{i=0}^{m} f_i \varphi_k(x_i) - \sum_{j=0}^{n} C_j \sum_{i=0}^{m} \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i) = 0$$

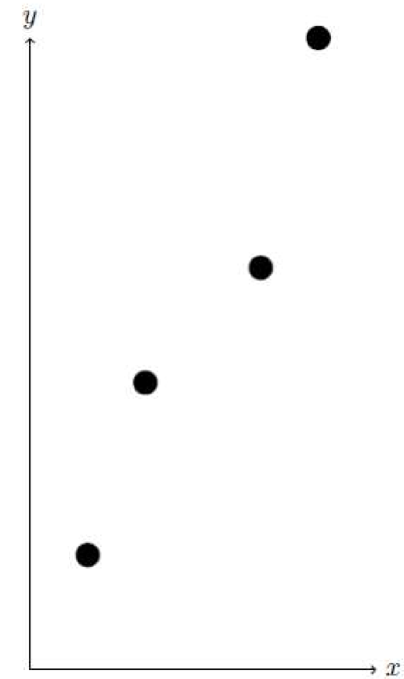
Generalizo las sumatorias en “m” como productos internos:

$$\sum_{j=0}^{n} C_j \left\langle \varphi_j, \varphi_k \right\rangle = \langle f, \varphi_k \rangle$$ => n+1 ecuaciones normales

Ajuste: Ejemplo Lineal

$$f^*(x) = \sum_{j=0}^{n} C_j \varphi_j(x)$$

x	y
1	2
2	5
4	7
5	11



n=1 (2 incógnitas)
m=3 (4 puntos)

$$\begin{aligned} \varphi_o(x) &= 1 \\ \varphi_1(x) &= x \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad f^*(x) = C_0 + C_1 x$$

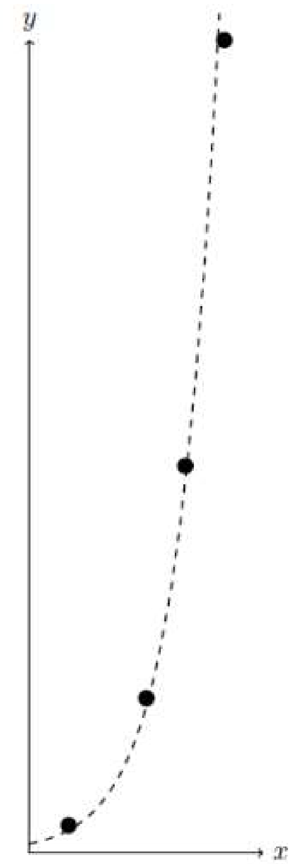
Matriz Resultante:

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, \varphi_o \rangle \\ \langle f, \varphi_1 \rangle \end{bmatrix}$$

$$\langle g, h \rangle = \sum_{i=0}^{m} g_i h_i$$

Ajuste: Ejemplo Exponencial

x	y
1	0.71
3	4
4	10
5	21



$$f^*(x) = C_0 e^{C_1 x}$$

Aplico Transformación para Linealizar

$$\ln\left(f^*(x)\right) = \ln(C_0) + C_1 x$$

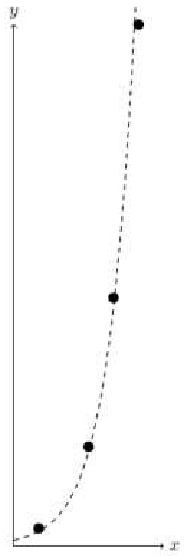
$$C'_0 = \ln(C_0)$$

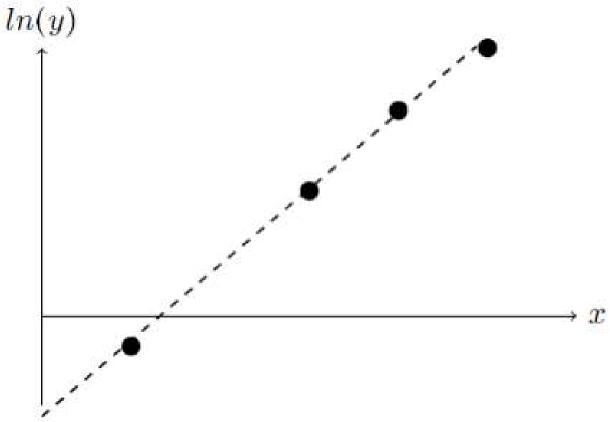
$$\ln\left(f^*(x)\right) = C'_0 + C_1 x$$

Ajuste: Ejemplo Exponencial

x	y
1	0,71
3	4
4	10
5	21

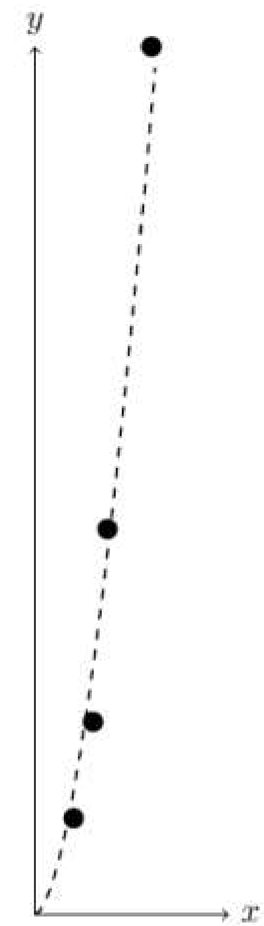
x	ln(y)
1	-0,34
3	1,4
4	2,3
5	3,0





Ajuste: Ejemplo Potencial

x	y
0,4	1
0,6	2
0,75	4
1,2	9



$$f^*(x) = C_0 x^{C_1}$$

Aplico Transformación para Linealizar

$$\ln\left(f^*(x)\right) = \ln(C_0) + C_1 \ln(x)$$

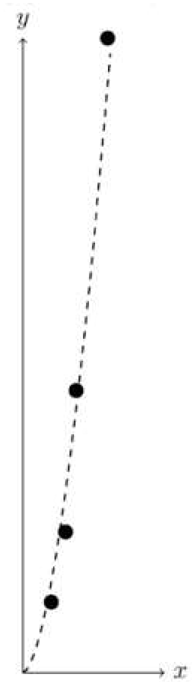
$$C'_0 = \ln(C_0) \qquad x' = \ln(x)$$

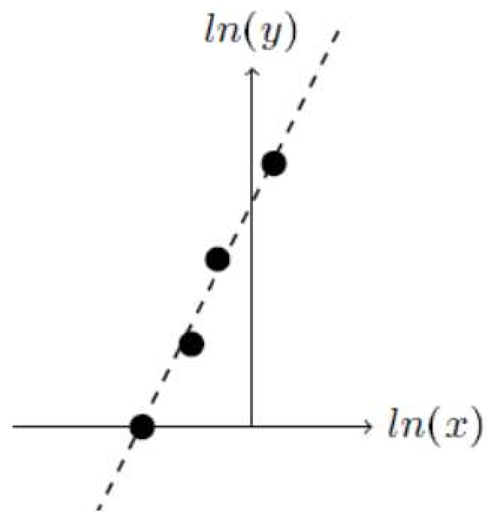
$$\ln\left(f^*(x)\right) = C'_0 + C_1 x'$$

Ajuste: Ejemplo Potencial

x	y
0,4	1
0,6	2
0,75	4
1,2	9

ln(x)	ln(y)
-0,92	0
-0,51	0,69
-0,29	1,4
0,18	2,2





Ajuste: Ejemplo Continuo

$$f(x) = sen(\pi x) \qquad x \in [0,1]$$

$$f^*(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2$$

Planteo mismo SEL pero calculando los productos internos de forma continua

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_0, \varphi_2 \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \\ \langle \varphi_2, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, \varphi_o \rangle \\ \langle f, \varphi_1 \rangle \\ \langle f, \varphi_2 \rangle \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \varphi_o(x) &= 1 \\ \varphi_1(x) &= x \\ \varphi_2(x) &= x^2 \end{aligned}$$

$$\langle g, h \rangle = \int_0^1 g(x) h(x) dx$$

Ajuste: Ejemplo Continuo

$$\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle = \int_0^1 \varphi_0\,(x)\varphi_0(x)dx = \int_0^1 1dx = 1$$

$$\langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle = \int_0^1 \varphi_0\,(x)\varphi_1(x)dx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

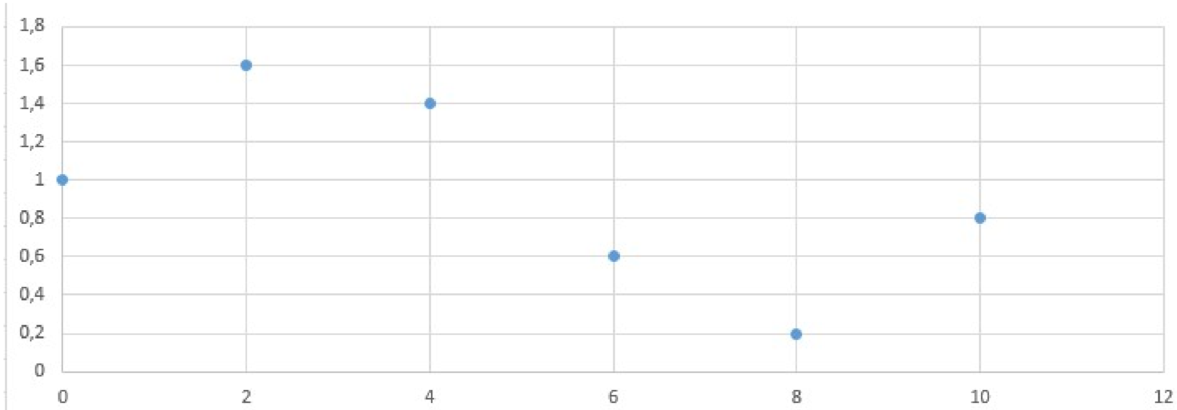
$$\langle \varphi_0, \varphi_2 \rangle = \int_0^1 \varphi_0\,(x)\varphi_2(x)dx = \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}$$

$$\langle f, \varphi_0 \rangle = \int_0^1 f\,(x)\varphi_o(x)dx = \int_0^1 sen(\pi x)dx = \frac{2}{\pi}$$

$$\langle f, \varphi_1 \rangle = \int_0^1 f\,(x)\varphi_1(x)dx = \int_0^1 sen(\pi x)xdx = \frac{1}{\pi}$$

$$\langle f, \varphi_2 \rangle = \int_0^1 f\,(x)\varphi_2(x)dx = \int_0^1 sen(\pi x)x^2dx = \frac{\pi^2 - 4}{\pi^3}$$

Ajuste: Ejemplo Trigonométrico 1



t	H(t)
0	1
2	1,6
4	1,4
6	0,6
8	0,2
10	0,8

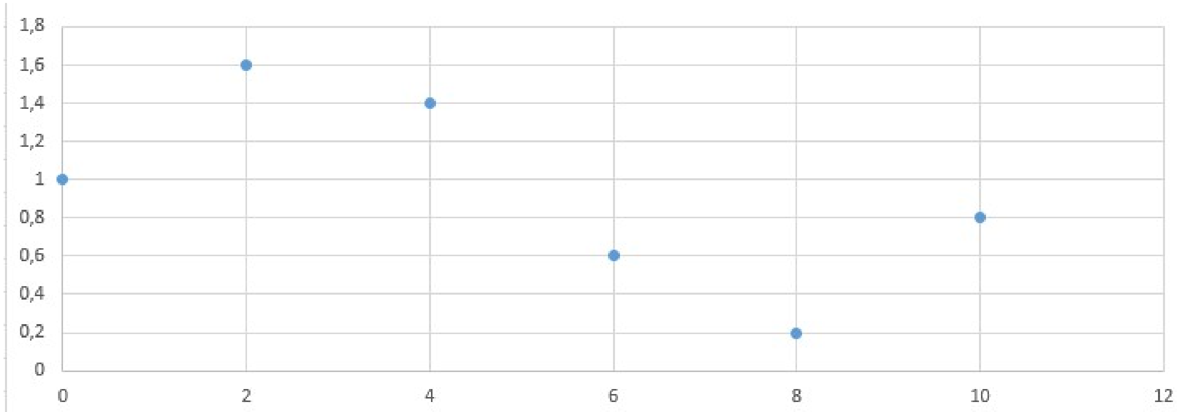
$$H^*(t) = C_0 + C_1 sen\left(\frac{2\pi t}{12}\right)$$

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle H, \varphi_o \rangle \\ \langle H, \varphi_1 \rangle \end{bmatrix}$$

$$\varphi_o(x) = 1$$

$$\varphi_1(x) = sen\left(\frac{2\pi t}{12}\right)$$

Ajuste: Ejemplo Trigonométrico 2



t	H(t)
0	1
2	1,6
4	1,4
6	0,6
8	0,2
10	0,8

$$H^*(t) = C_0 + C_1 sen\left(\frac{2\pi t}{12}\right) + C_2 cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right)$$

$$\begin{bmatrix} \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_0, \varphi_2 \rangle \\ \langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \\ \langle \varphi_2, \varphi_0 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle H, \varphi_o \rangle \\ \langle H, \varphi_1 \rangle \\ \langle H, \varphi_2 \rangle \end{bmatrix}$$

$$\varphi_o(x) = 1$$

$$\varphi_1(x) = sen\left(\frac{2\pi t}{12}\right)$$

$$\varphi_2(x) = cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right)$$

Ajuste con funciones Trigonométricas

$$f(t) = C_0 + C_1 sen\left(\frac{2\pi t}{12}\right) + C_2 cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right) + C_3 sen\left(\frac{4\pi t}{12}\right) + C_4 cos\left(\frac{4\pi t}{12}\right) + C_5 sen\left(\frac{6\pi t}{12}\right) + C_6 cos\left(\frac{6\pi t}{12}\right) + \cdot$$

$$\varphi_o(x) = 1 \qquad \varphi_1(x) = sen\left(\frac{2\pi t}{12}\right) \qquad \varphi_2(x) = cos\left(\frac{2\pi t}{12}\right)$$

$$\varphi_3(x) = sen\left(\frac{4\pi t}{12}\right) \qquad \varphi_4(x) = cos\left(\frac{4\pi t}{12}\right)$$

Dado que esta base de funciones es ortogonal, los coeficientes se pueden calcular directamente como:

$$C_j = \frac{\langle f, \varphi_j \rangle}{\left\|\varphi_j\right\|^2}$$