# 75:12 ANÁLISIS NUMÉRICO I

**FACULTAD DE INGENIERIA**
**UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES**

## Primer Examen Parcial

*1er Cuatrimestre 2012*
*16/May/2012*

**Ejercicio 1.**
Dada la siguiente función no-lineal,

$$f(x)=0.5-e^{-x}$$

se pide:

a) Calcular su raíz utilizando un método de punto fijo basado en la aplicación de la función generadora g(x)=x-f(x). Tomar como valor de arranque x=0.25 e iterar hasta obtener convergencia con una tolerancia para el error relativo del 1 %.
b) Repetir el calculo usando el método de Newton-Raphson.
c) Verificar en cada uno de los casos las condiciones de convergencia para el punto de arranque.
d) A partir de los resultados numéricos determinar el orden de convergencia de cada método y compararlo con el esperado en base a la teoría.

**Ejercicio 2.**
El secado de una muestra de barro arrojó los siguientes valores, expresados como pérdida de peso por evaporación de la humedad:

| Tiempo (seg) | 75 | 95 | 120 | 160 | 190 | 220 | 250 | 280 | 330 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Pérdida (%) | 19.6 | 20.2 | 20.7 | 22.9 | 23.6 | 26 | 28.1 | 29.1 | 31.2 |

Se desea hallar la relación de pérdida (P) en función del tiempo (t), para lo cual se propone utilizar la ley $P = At^B$. Utilizando el método de cuadrados mínimos, determinar los valores de A y B.

**Pregunta 1**

Dada la grilla $x_k = kh \quad k = 0,\ldots,20 \quad h = 1/20$, y los datos $f_k = \exp(\mathrm{sen}^2(x_k))$ en I=[0,1], indicar si para aproximarlos es conveniente utilizar interpolación o ajuste. Justificar.

**Pregunta 2**

¿El número de condición del problema $y=x^{\alpha}$ depende del valor de x? Justifique su respuesta mediante el cálculo del mismo.

**Problema 1** Este ejercicio es muy fácil, porque nos dicen exactamente qué hacer. Solo hay que hacerlo. Sea

$$f(x) = 0{,}5 - e^{-x} \Rightarrow g_{\text{PF}}(x) = x - 0{,}5 + e^{-x} \Rightarrow \text{Punto fijo} \rightarrow \begin{cases} x_0 = 0{,}25 \\ x_{k+1} = x_k - 0{,}5 + e^{-x_k} \end{cases}$$

La condición de corte de las iteraciones es que

$$\frac{|x_k - x_{k-1}|}{|x_k|} < 0{,}01$$

Se pide luego utilizar Newton Raphson. En este caso

$$g_{\text{NR}}(x) \overset{\text{def}}{=} x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{0{,}5 - e^{-x}}{e^{-x}} \Rightarrow \text{Newton-Raphson} \rightarrow \begin{cases} x_0 = 0{,}25 \\ x_{k+1} = x_k - \frac{0{,}5 - e^{-x_k}}{e^{-x_k}} \end{cases}$$

y la condición de corte se mantiene la misma.

La verificación de las condiciones de convergencia es la siguiente:

Punto fijo Debe existir un intervalo $I = [a, b]$ en el que $g(x \forall x \in I) \in I$. Es decir que $g(x)$ debe estar en $I$. Si definimos el intervalo $I = [0{,}25, 1]$ entonces esto se cumple ✓.

Newton Raphson Este método necesita que exista la derivada y sea no nula para todo $x$ en un intervalo que contiene a la raíz

$$f'(x) = e^{-x_k} \neq 0 \forall x \in \mathbb{R} ✓$$

por lo tanto los dos métodos convergen.

Para la estimación de los órdenes de convergencia se utiliza la fórmula mágica

$$p \approx \frac{\ln(x_k - x_{k-1}) - \ln(x_{k-1} - x_{k-2})}{\ln(x_{k-1} - x_{k-2}) - \ln(x_{k-2} - x_{k-3})}$$

A continuación se muestran los resultados obtenidos.

**Algoritmo 1** Resultados del ejercicio 1.

```
punto_fijo =

    0.25000
    0.52880
    0.61811
    0.65707
    0.67544
    0.68437
    0.68878

p_punto_fijo =   0.98026

Newton_Raphson =

    0.25000
    0.60799
    0.68962
    0.69314

p_Newton_Raphson =   2.1269
```

**Problema 2** Se pide ajustar por cuadrados mínimos la función

$$P(x) = At^B$$

a los puntos

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tiempo $\rightarrow$ | $t_i$ | 75 | 95 | 120 | 160 | 190 | 220 | 250 | 280 | 330 |
| Puntos $\rightarrow$ | $y_i$ | 19,6 | 20,2 | 20,7 | 22,9 | 23,6 | 26 | 28,1 | 29,1 | 31,2 |

Primero tenemos que linealizar la función para escribirla como una combinación lineal de otras. Si se aplica el logaritmo se obtiene

$$\ln\left(P(t)\right) = \ln A + B \ln t \rightarrow \text{Función linealizada a ajustar}$$

Ajustar la función $\ln(P(t))$ a los puntos $\{[t_i, \ln(y_i)]\}$ es equivalente a ajustar $P(t)$ a los puntos $\{[t_i, y_i]\}$. Definimos ahora las magnitudes que utilizaremos para el método

$$\text{Base de funciones} \rightarrow \begin{cases} \varphi_0(t) = 1 \\ \varphi_1(t) = \ln t \end{cases}$$

$$\text{Parámetros a ajustar} \rightarrow \begin{cases} c_0 = \ln A \\ c_1 = B \end{cases}$$

y los vectores para obtener los parámetros en función de los datos de la tabla

$$\vec{\varphi}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \varphi_0(t_0) \\ \vdots \\ \varphi_0(t_n) \end{bmatrix} \qquad \vec{\varphi}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \varphi_1(t_0) \\ \vdots \\ \varphi_1(t_n) \end{bmatrix} \qquad \vec{H} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \ln(y_0) \\ \vdots \\ \ln(y_n) \end{bmatrix}$$

Ahora hay que resolver el sistema lineal para obtener $c_0$ y $c_1$

$$\begin{bmatrix} \vec{\varphi}_0^T \vec{\varphi}_0 & \vec{\varphi}_0^T \vec{\varphi}_1 \\ \vec{\varphi}_1^T \vec{\varphi}_0 & \vec{\varphi}_1^T \vec{\varphi}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\varphi}_0^T \vec{H} \\ \vec{\varphi}_1^T \vec{H} \end{bmatrix}$$

Si se hacen todas las cuentas, que en mi caso las hizo Octave, se obtiene

$$\begin{cases} A = 4{,}5221 \\ B = 0{,}3265 \end{cases}$$

y la siguiente curva

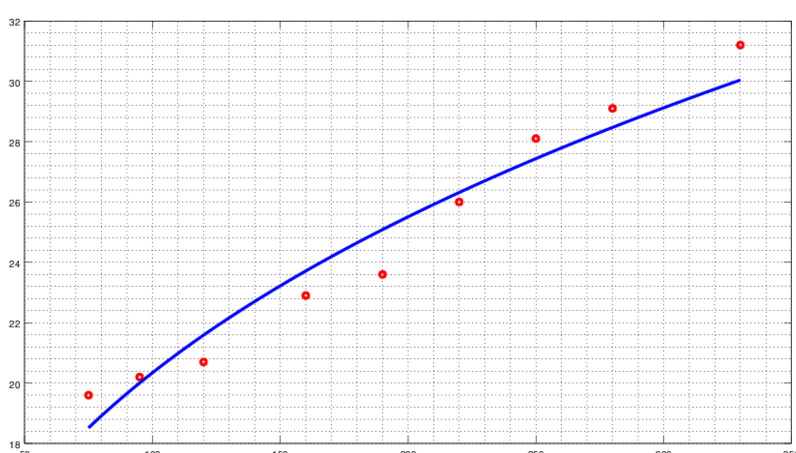


Figura 1: Ajuste por cuadrados mínimos del ejercicio 2.

**Pregunta 1** La interpolación se utiliza cuando se desea que la función ajustada pase exactamente por los puntos y el ajuste cuando se desea minimizar la distancia. La interpolación tiene problemas cuando la función es simétrica y los puntos son equiespaciados dando origen al fenómeno de Runge, pero no es el caso. La verdad que no se cuál conviene utilizar...

**Pregunta 2** Ni idea.