Resolución del examen parcial 2006

Problema 1. [DOS PUNTOS]
La siguiente tabla corresponde a los valores (con error menor que 10^{-4}) de cierta función f:

x_k	y_k
0.1	-0.1510
0.2	-0.0578
0.3	0.0242
0.4	0.0909

1. Obtenga el polinomio de interpolación a partir de la tabla de diferencias divididas. Para todos los cálculos intermedios para completar la tabla redondear a cuatro decimales.

2. Aproxime el valor de $f'(0.2)$ usando dicho polinomio. Se recomienda no desarrollar los productos que resulten al generar el polinomio de interpolación en la forma de Newton. Realice todos los cálculos intermedios redondeando con cuatro decimales.

Solución
La tabla de diferencias divididas para la función f es la siguiente:

x_k	$f[\,]$	$f[,]$	$f[,,]$	$f[,,,]$
0.1	-0.1510	0.9320	-0.5600	-0.6833
0.2	-0.0578	0.8200	-0.7650	
0.3	0.0242	0.6670		
0.4	0.0909			

El polinomio interpolante es

$$p(x) = -0.1510 + 0.9320\,(x-0.1) - 0.5600\,(x-0.1)\,(x-0.2) - \; 0.6833\,(x-0.1)\,(x-0.2)\,(x-0.3).$$

El valor aproximado de $f'(x)$ es $p'(x) = 0.9320 - \; 0.5600\,(x - \; 0.1 + x - \; 0.2) -$
$0.6833\,((x - \; 0.2)\,(x - \; 0.3) + (x - \; 0.1)\,(x - \; 0.3) + (x - \; 0.1)\,(x - \; 0.2))$.

Entonces $f'(0.2) \approx p'(0.2)$ = 0.9320 - 0.0560 + 0.0068 = 0.8828.

Problema 2. [TRES PUNTOS]
Se desea aproximar la única raíz real en $(0\,,0.5)$ de la ecuación

$$x\ \exp(-\,x^2) = 0.25.$$

El siguiente código en *GNU Octave* implementa una variante del método de Newton para obtener una aproximación de esa raíz:

```
s = 10000; a = 0.2; b = 1; k = 0;
d = exp(-a^2)*(1 - 2*a^2);
while (b>1/s)
            n = a*exp(-a^2)-0.25;
            f = a - n/d;
            k = k+1;
            b = abs(f-a);
            a = f;
end
a
k
```

1. ¿En que consiste esta variante del método de Newton?. Explique y muestre una interpretación geométrica de esta variante del método.

2. Genere una tabla con las sucesivas aproximaciones (redondeando a cuatro decimales en la tabla pero operando con todos los decimales de su calculadora). Indique e interprete el valor final de la variable `k`.

3. Cambiando de lugar una línea del código queda implementado el método de Newton. Indique el cambio, obtenga nuevamente la tabla y compare el valor de `k` con el obtenido en el item anterior. Comente y argumente respecto de la diferencia que observe.

Solución

En esta variante del método de Newton la aproximación lineal a $f(x)$ en $(x_k, f(x_k))$ es $l(x) = f(x_k) + f'(x_0)\,(x - x_k)$. Las sucesivas rectas que pasan por $(x_k, f(x_k))$ tienen todas la misma pendiente $(f'(x_0))$. La abscisa del punto de intersección con el eje x de la recta que pasa por $(x_k, f(x_k))$ da el valor de x_{k+1}.

La siguiente tabla muestra las sucesivas aproximaciones obtenidas con esta variante del método de Newton a partir del valor inicial indicado $x_0 = a = 0.2000$:

k	x_k
0	0.2000
1	0.2654
2	0.2684
3	0.2687
4	0.2687

El valor final de k es 4 y la aproximación a la raíz buscada, con error menor que 10^{-4}, es 0.2687.

Cambiando de lugar una instrucción del código se obtiene la implementación del método *tradicional* de Newton como se muestra a continuación:

```
s =10000; a = 0.2; b = 1; k = 0;
while (b>1/s)
            n = a*exp(-a^2)-0.25;
            d = exp(-a^2)*(1 - 2*a^2);
            f = a - n/d;
            k = k+1;
            b = abs(f-a);
            a = f;
end
a
k
```

La siguiente tabla muestra las sucesivas aproximaciones obtenidas con el método de Newton a partir del valor inicial indicado $x_0 = a = 0.2000$:

k	x_k
0	0.2000
1	0.2654
2	0.2687
3	0.2687

El valor final de k es 3 y la aproximación a la raíz buscada con error menor que 10^{-4} es 0.2687.

Problema 3. [DOS PUNTOS]

Considere el siguiente problema de valor inicial $y'(t) = f(t)$, $y(0) = 0$. La función f es continua por tramos, por consiguiente integrable.
La solución al problema de valor inicial viene dada por

$$y(t) = \int_0^t f(s)\, ds$$

Obtener aproximaciones a la solución del problema inicial es equivalente a aproximar la integral de f en $(0, t)$. El valor de la integral de f en $(0, T)$ es $y(T)$. Se dispone de la siguiente tabla de valores de f (con error menor que 10^{-4}):

t_k	$f(t_k)$
0.0	0.0000
0.2	0.1922
0.4	0.3409
0.6	0.4186
0.8	0.4218

Usando el método de Runge-Kutta de orden 4 (paso $h = 0.4$) aproximar $\int_0^{0.8} f(t)\, dt$. Para todos los cálculos intermedios redondear a cuatro decimales.

Solución

Como $y'(t) = f(t)$ entonces la aproximación a $y(t_{k+1})$ por el método de Runge-Kutta de orden 4 viene dada por:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}\left(h\, f(t_k) + 4\, h\, f(t_k + h/2) + h\, f(t_k + h)\right)$$

Entonces $y_1 = 0.0000 + \frac{1}{6}\,(0.0000 + 4\, 0.0769 + 0.1364) = 0.0740$.

Con este valor de y_1 resulta $y_2 = 0.074 + \frac{1}{6}\,(0.1364 + 4\, 0.1674 + 0.1687) = 0.074 + \frac{1}{6}\, 0.9747 = 0.2365$.

La aproximación a la integral de f en (0, 0.8) es 0.2365.

Problema 4. [TRES PUNTOS]

Al analizar el problema de la caída de un cuerpo, considerando la acción del peso y una fuerza resistente función de la velocidad instantánea, se obtuvo el siguiente problema de valor inicial para la velocidad $v(t)$:

$$v'(t) = 10 - 0.5\, v - 0.01\, v^3, \quad v(0) = 0.$$

1. Obtenga la ecuación en diferencias $v_{k+1} = g(v_k)$ satisfecha por $v_k \approx v(t_k)$ para un paso $h = 0.1$ si se usa el método de Euler.

2. Genere una tabla de v_k para $k : 0, 1, 2, \ldots, 10$ usando el método de Euler con paso $h = 0.1$. Presente la tabla redondeando a 4 decimales y en su calculadora opere con todos los decimales posibles.

3. A *tiempo grande* la velocidad alcanza un valor límite V_L. Usando un esquema iterativo de punto fijo aproxime V_L con un error menor que 10^{-3}.

Solución

1. La ecuación en diferencias $v_{k+1} = g(v_k)$ satisfecha por $v_k \approx v(t_k)$ para un paso $h = 0.1$ si se usa el método de Euler es:

$$v_{k+1} = 0.95\, v_k - 0.001\, v_k^3 + 1$$

2. La siguiente tabla da los valores de v_k para $k : 0, 1, 2, \ldots, 10$ usando el método de Euler con paso $h = 0.1$ (redondeando a 3 decimales y operando en la calculadora con todos los decimales posibles):

t_k	v_k
0.0	0.000
0.1	1.000
0.2	1.949
0.3	2.844
0.4	3.679
0.5	4.445
0.6	5.135
0.7	5.743
0.8	6.266
0.9	6.707
1.0	7.070

3. A *tiempo grande* la velocidad alcanza un valor límite V_L. Continuando el proceso iterativo de integración aproximada del item anterior resulta $V_L \approx 8.351$.
La velocidad límite V_L es solución de $f(v) = 0$ con $f(v) = v^3 + 50\,v - 1000$ que resulta de imponer la condición $v'(t) = 0$. Como f es una función derivable, satisface $f(8) < 0$, $f(9) > 0$ y con derivada $f'(v) = 3\,v^2 + 50 > 0 \quad \forall\, v$ entonces f tiene un único cero en $(8,\, 9)$.
El problema de la búsqueda del cero de f en $(8,\, 9)$ es equivalente a la búsqueda del punto fijo de $g(v) = (1000 - 50\,v)^{1/3}$. La función g es decreciente en $(8,\, 9)$, $8 < g(9) \leq g(v) \leq g(8) < 9$, y su derivada satisface $|g'(v)| < 0.25$ en $(8,\, 9)$. Por consiguiente el proceso iterativo

$$v_0 = 8.5 \quad v_{k+1} = g(v_k)$$

genera una sucesión convergente a V_L. La siguiente tabla lista las sucesivas aproximaciones hasta obtener la precisión establecida (se muestran 3 decimales pero se operó con todos los decimales posibles de la calculadora):

k	v_k
0	8.500
1	8.316
2	8.360
3	8.349
4	8.352
5	8.351
6	8.351

El valor de V_L es 8.351, con error menor que 10^{-3}.