Ejercicio 1.1

lunes, 6 de septiembre de 2021 16:48

1.1 Sean $\mathbb{V} = \mathbb{R}^+_*$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si la suma vectorial $\oplus$ y la multiplicación escalar $\odot$ se definen por

$$v \oplus w := vw,$$
$$a \odot v := v^a.$$

Verificar que $(\mathbb{V}, \oplus, \mathbb{K}, \odot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, donde 1 es el vector cero y v^{-1} es el vector opuesto de v.

☞: *repasar la definición axiomática de $\mathbb{K}$-espacio vectorial.*

Para que $(\mathbb{V}, \oplus, \mathbb{K}, \odot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, se deben cumplir I, II, III

I El par $(\mathbb{V}, \oplus)$ es un grupo abeliano (se deben cumplir 1), 2), 3), 4))

1) $u \oplus (v \oplus w) = u \oplus (vw)$ por definición de $\oplus$ aplicado a v y w

$= u(vw)$ por definición de $\oplus$ aplicado a u y (vw)

$= (uv)w$ por propiedad asociativa de los numeros reales

$= (uv) \oplus w$ por definición de $\oplus$ aplicado a (uv) y w

$= (u \oplus v) \oplus w$ por definición de $\oplus$ aplicado a u y v

$\Rightarrow \boxed{u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w}$

2) $v \oplus 1 = v.1$ por def de $\oplus$

$= v$ por producto de $a.1 = a$

$1 \oplus v = 1.v$ por def de $\oplus$

$= v$ por producto de $1.a = a$

$\Rightarrow \boxed{v \oplus 1 = 1 \oplus v = v}$

3) Por definición v^{-1} es el opuesto de v

$v \oplus v^{-1} = v.v^{-1}$ por def de $\oplus$

$= \frac{v}{v}$ por algebra

$= 1$ que es el vector cero

$v^{-1} \oplus v = v^{-1}.v$ por def de $\oplus$

$= \frac{v}{v}$ por algebra

$= 1$ que es el vector cero

$\Rightarrow \boxed{v \oplus v^{-1} = v^{-1} \oplus v = 1}$

4) $u \oplus v = uv$ por def de $\oplus$

$= vu$ por prop conmutativa de producto de reales

$= v \oplus u$ por def de $\oplus$

$\Rightarrow \boxed{u \oplus v = v \oplus u}$

II La multiplicación escalar satisface (1, 2)

1) $a \odot (b \odot v) = a \odot (v^b)$ por def. de $\odot$ entre b y v

$= (v^b)^a$ por def $\odot$ entre a y v^b

$= v^{ba}$ por prop. de la potenciación

$= v^{ab}$ por prop. conmutativa del producto

$= (ab) \odot v$ por def. de $\odot$ entre (ab) y v

$\Rightarrow \boxed{a \odot (b \odot v) = (ab) \odot v}$

2) $1 \odot v = v^1$ por def. de $\odot$ entre 1 y v

$= v$ por $a \in \mathbb{R}$, $a^1 = a$

$\Rightarrow \boxed{1 \odot v = v}$

III La suma vectorial y la multiplicación escalar están relacionadas entre si mediante leyes distributivas (1, 2)

1) $a \odot (u \oplus v) = a \odot (uv)$ por def. de $\oplus$

$= (uv)^a$ por def de $\odot$

$= u^a . v^a$ por prop de la potenciación

$= u^a \oplus v^a$ por def de $\oplus$ entre u^a y v^a

$= (a \odot u) \oplus (a \odot v)$ por def de $\odot$

$\Rightarrow \boxed{a \odot (u \oplus v) = a \odot u \oplus a \odot v}$

2) $(a+b) \odot v = v^{a+b}$ por def. $\odot$

$= v^a . v^b$ por prop de la potenciación

$= v^a \oplus v^b$ por def de $\oplus$

$= (a \odot v) \oplus (b \odot v)$ por def de $\odot$

$\Rightarrow \boxed{(a+b) \odot v = (a \odot v) \oplus (b \odot v)}$

Ejercicio 1.2

lunes, 6 de septiembre de 2021 21:37

a) El conjunto $S:\{[a \ \ 0 \ \ a]^T : a \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$

i) S no es vacío, pues $a=0$, podemos definir un $v \in S$ / $v=[0 \ \ 0 \ \ 0]^T$ ✓

ii) Consideremos $v, w \in S$ / $v=[a_v \ \ 0 \ \ a_v]^T \wedge w=[a_w \ \ 0 \ \ a_w]^T$

$$v+w=[a_v \ \ 0 \ \ a_v]^T+[a_w \ \ 0 \ \ a_w]^T=\underbrace{[\underbrace{a_v+a_w}_{\in \mathbb{R}} \ \ 0 \ \ \underbrace{a_v+a_w}_{\in \mathbb{R}}]^T}_{\text{Tiene la forma de } S}$$ ✓

iii) Dado un $\lambda \in \mathbb{K}$, $v \in S$ / $v[a_v \ \ 0 \ \ a_v]^T$

$$\lambda v=\lambda[a_v \ \ 0 \ \ a_v]^T=\underbrace{[\underbrace{\lambda a_v}_{\in \mathbb{R}} \ \ 0 \ \ \underbrace{\lambda a_v}_{\in \mathbb{R}}]}_{\text{Tiene la forma de } S}$$ ✓

Se puede afirmar que S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$

b) El conjunto $S:\{[a+b \ \ 0 \ \ a]^T : a, b \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ ✓

i) Dado $v \in S$ / $a=0 \wedge b=0$, $v=[0 \ \ 0 \ \ 0]^T$, $\therefore S$ es no vacío

ii) Dado $v \in S$ / $v=[a_v+b_v \ \ 0 \ \ a_v]$ y $u \in S$ / $u=[a_u+b_u \ \ 0 \ \ a_u]$:

$$v+u=[a_v+b_v \ \ 0 \ \ a_v]+[a_u+b_u \ \ 0 \ \ a_u]=\underbrace{[\underbrace{(a_v+a_u)+(b_v+b_u)}_{\in \mathbb{R}} \ \ 0 \ \ \underbrace{a_v+a_u}_{\in \mathbb{R}}]}_{\text{Tiene la forma de } S}$$ ✓

iii) Dado $\lambda \in \mathbb{K} \wedge v \in S$ / $v=[a_v+b_v \ \ 0 \ \ a_v]$

$$\lambda v=\lambda[a_v+b_v \ \ 0 \ \ a_v]=[\lambda(a_v+b_v) \ \ \lambda 0 \ \ \lambda a_v]=[\underbrace{\lambda a_v+\lambda b_v}_{\in \mathbb{R}} \ \ 0 \ \ \underbrace{\lambda a_v}_{\in \mathbb{R}}]$$ ✓

Se puede afirmar que S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$

c) El conjunto $S:\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^{2\times 2}$ $\rightarrow$ Lo resolvo de otra forma para probar

Se observa que $S=\text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$, Por lo tanto decir que $v \in S$ significa que

$$v=a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ para algunos a, b, c

i) $0_v \in \text{gen}(S)$ porque con $a=0, b=0 \wedge c=0 \Rightarrow 0_v=0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ✓

ii) $$\left(a_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+b_1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+c_1\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)+\left(a_2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+b_2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)=$$

$$\underbrace{(a_1+a_2)}_{\in \mathbb{R}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+\underbrace{(b_1+b_2)}_{\in \mathbb{R}}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+\underbrace{(c_1+c_2)}_{\in \mathbb{R}}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ✓

iii) $$\underbrace{\lambda}_{\in \mathbb{R}}\left(a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)=\underbrace{\lambda a}_{\in \mathbb{R}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+\underbrace{\lambda b}_{\in \mathbb{R}}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+\underbrace{\lambda c}_{\in \mathbb{R}}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ✓

Se verifica que S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$

d) Observación: $\mathbb{R}[x]$ es el conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$: por lo tanto, $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ si y sólo si $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ para algún $n \in \mathbb{N}_0$ y algunos $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

i) Si $a_0=0, a_1=0, \dots, a_n=0$, un polinomio de S (del subconjunto del inicio) es de la forma: $P(x)=\sum_{k=0}^{n} 0 \cdot x^k=0_{\mathbb{R}[x]}$ (Polinomio nulo). Por lo tanto, $S \neq \emptyset$ ✓

ii) Sean $P_1(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$ y $P_2(x)=b_0+b_1x+\dots+b_nx^n$, $P_1(x) \in S \wedge P_2(x) \in S$

$$P_1(x)+P_2(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n+b_0+b_1x+\dots+b_nx^n=\underbrace{(a_0+b_0)}_{\in \mathbb{R}}+\underbrace{(a_1+b_1)}_{\in \mathbb{R}}x+\dots+\underbrace{(a_n+b_n)}_{\in \mathbb{R}}x^n$$ ✓

iii) Sean $P(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$, $P(x) \in S$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda P(x)=\lambda(a_0+a_1x+\dots+a_nx^n)=\underbrace{\lambda a_0}_{\in \mathbb{R}}+\underbrace{\lambda a_1}_{\in \mathbb{R}}x+\dots+\underbrace{\lambda a_n}_{\in \mathbb{R}}x^n$$ ✓

Se verifica que S es un subespacio de $\mathbb{R}^3$

Ejercicio 1.3

martes, 7 de septiembre de 2021 12:41

(a) $\text{gen}\{A_1, A_2, A_3\} = \{x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$

Si B pertenece al subespacio, $B \in \text{gen}\{A_1, A_2, A_3\}$ entonces:

$\Rightarrow x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 = B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Si hacemos Gauss-Jordan, SCI ($\therefore B \in \text{gen}\{A_1, A_2, A_3\}$)

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_1 \\ -x_1 & -x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & -x_2 \\ -x_2 & x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3 & 0 \\ -x_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = -1 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 = 1 \rightarrow x_2 = 1 + x_1 \end{array}$$

$x_3 = 2 - 1 - x_1 - x_1$

$x_3 = 1 - 2x_1$

$x_1A_1 + (1 + x_1)A_2 + (1 - 2x_1)A_3 = B$, Remplazo a x_1 por distintos valores

$x_1 = 1$, $\boxed{A_1 + 2A_2 - A_3 = B}$ $x_1 = 0$, $\boxed{A_2 + A_3 = B}$ $x_1 = -1$, $\boxed{-A_1 + 3A_3 = B}$

(B) $S := \{[x_1 \ x_2 \ x_3]^T : x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 = 0_{\mathbb{R}^{2\times2}}\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_1 \\ -x_1 & -x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 & -x_2 \\ -x_2 & x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_3 & 0 \\ -x_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ x_3 = -2x_1 \end{array}$$

$(x_1, x_1, -2x_1) = x_1(1, 1, -2)$

$$\boxed{S = \text{gen}\{[1 \ 1 \ -2]^T\}}$$

(c) $\lambda A_2 + \gamma A_3 = A_1$

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & -\lambda \\ -\lambda & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ -\gamma & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \gamma = 1 \\ -\lambda = 1 \\ -\lambda - \gamma = -1 \\ \lambda = -1 \end{cases} \rightarrow -1 + \gamma = 1 \rightarrow \gamma = 2$$

$$\boxed{-A_2 + 2A_3 = A_1}$$

$\lambda A_1 + \beta A_2 = A_3$

$$\begin{bmatrix} \lambda & \lambda \\ -\lambda & -\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & -\beta \\ -\beta & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \beta = 1 & \rightarrow 2\beta = 1 \rightarrow \beta = \frac{1}{2} \\ \lambda - \beta = 0 & \rightarrow \lambda = \beta \rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \\ -\lambda - \beta = -1 \\ -\lambda + \beta = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}A_1 + \frac{1}{2}A_3 = A_2}$$

$\lambda A_1 + \beta A_3 = A_2$

$$\begin{bmatrix} \lambda & \lambda \\ -\lambda & -\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ -\beta & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \beta = 1 & \rightarrow \beta = 2 \\ \lambda = -1 \\ -\lambda - \beta = -1 \\ -\lambda = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{-A_1 + 2A_3 = A_2}$$

(d) Dado $n \in \mathbb{N}$, I_n denota el conjunto $\{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$. Nótese que $\{x_i : i \in I_n\}$ denota el conjunto $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ cuyos elementos son $x_1, x_2, \dots, x_n$.

$\{0\} \subsetneq \text{gen}\{A_i\} \subsetneq \text{gen}\{A_i, A_j\} = \text{gen}\{A_1, A_2, A_3\}$

$0 \subsetneq \text{gen}(A_i)$? $\rightarrow 0 \in \text{gen}\{A_i\}$

$x A_i = 0$, $x \in \mathbb{R}$, para $x = 0 \rightarrow 0A_i = 0 \Rightarrow 0 \subsetneq \text{gen}(A_i)$

$\text{gen}\{A_i\} \subsetneq \text{gen}\{A_i, A_j\} \rightarrow A_i \in \text{gen}\{A_i, A_j\}$

$A_i = x_1A_i + x_2A_j$, si $x_1 = 1 \wedge x_2 = 0 \rightarrow A_i = A_i \Rightarrow \text{gen}(A_i) \subsetneq \text{gen}\{A_i, A_j\}$

$\text{gen}\{A_i, A_j\} = \text{gen}\{A_1, A_2, A_3\}$? $\rightarrow \text{gen}\{A_i, A_j\} \subset \text{gen}\{A_1, A_2, A_3\} \rightarrow \{A_i, A_j\} \in \text{gen}\{A_1, A_2, A_3\}$ 1

$\wedge$ $\text{gen}\{A_1, A_2, A_3\} \subset \text{gen}\{A_i, A_j\} \rightarrow \{A_1, A_2, A_3\} \in \text{gen}\{A_i, A_j\}$ 2

1 - $A_i = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3$, Dado que $i \in I_3$, Basta que $x_i = 1$ y los otros $x = 0$ para que se cumpla la igualdad

$A_j = x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3$, Dado que $j \in I_3$, Basta que $x_j = 1$ y los otros $x = 0$ para que se cumpla la igualdad

$\{A_i, A_j\} \in \text{gen}\{A_1, A_2, A_3\}$

2 - $A_1 = x_iA_i + x_jA_j$, cuando $i = 1 \vee j = 1$, Basta con que $(x_i = 1 \vee x_j = 0) \wedge (x_j = 1 \vee x_i = 0)$ para que se cumpla la igualdad y en el caso que $i \neq 1 \vee j \neq 1$ (Por ejemplo, $i = 2 \vee j = 3$) se comprobó en (c) que A_1 es CL de A_2 y A_3, por lo tanto, $\exists x_i, x_j$ / se cumple la igualdad

Esto se cumple para A_2 y A_3 $\rightarrow \{A_1, A_2, A_3\} \in \text{gen}\{A_i, A_j\}$.

$$\boxed{\{0\} \subsetneq \text{gen}\{A_i\} \subsetneq \text{gen}\{A_i, A_j\} = \text{gen}\{A_1, A_2, A_3\}}$$

Ejercicio 1.4

martes, 7 de septiembre de 2021 19:14

Para que ambos generen el mismo espacio $g_1 = g_2 \therefore \underbrace{g_1 \subset g_2}_{1} \wedge \underbrace{g_2 \subset g_1}_{2}$

Formula de Euler: $e^{z} = e^{a+ib} = e^{a}(\cos(b) + i\,\text{sen}(b))$

$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$
$\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}(\theta)$

1) $e^{ax}\cos(bx) = \lambda e^{(a+ib)x} + \beta e^{(a-ib)x}$

$= \lambda e^{ax}(\cos(bx) + i\,\text{sen}(bx)) + \beta e^{ax}(\cos(-bx) + i\,\text{sen}(-bx))$

$= e^{ax}(\lambda\cos(bx) + \cancel{\lambda i\,\text{sen}(bx)} + \beta\cos(bx) - \cancel{\beta i\,\text{sen}(bx)})$ si $\beta = \lambda$, $\lambda = \frac{1}{2}$

$= e^{ax}(\frac{1}{2}\cos(bx) + \frac{1}{2}\cos(bx))$

$= e^{ax}\cos(bx)$

$e^{ax}\text{sen}(bx) = \lambda e^{(a+ib)x} + \beta e^{(a-ib)x}$

$= \lambda e^{ax}(\cos(bx) + i\,\text{sen}(bx)) + \beta e^{ax}(\cos(-bx) + i\,\text{sen}(-bx))$

$= e^{ax}(\cancel{\lambda\cos(bx)} + \lambda i\,\text{sen}(bx) + \cancel{\beta\cos(bx)} - i\beta\,\text{sen}(bx))$ $\lambda = -\beta$, $\beta = \frac{1}{2}i$

$= e^{ax}((-\frac{1}{2}i)i\,\text{sen}(bx) - i\frac{1}{2}i\,\text{sen}(bx))$

$= e^{ax}(\frac{1}{2}\text{sen}(bx) + \frac{1}{2}\text{sen}(bx))$

$= e^{ax}\text{sen}(bx)$

1 ✓

b) $e^{(a+ib)x} = \lambda e^{ax}\cos(bx) + \beta e^{ax}\text{sen}(bx)$

$= e^{ax}(\lambda\cos(bx) + \beta\,\text{sen}(bx))$, si $\beta = i \wedge \lambda = 1$

$= e^{ax}(\cos(bx) + i\,\text{sen}(bx))$

$= e^{ax+ibx}$

$= e^{(a+ib)x}$

$e^{(a-ib)x} = \lambda e^{ax}\cos(bx) + \beta e^{ax}\text{sen}(bx)$

$= e^{ax}(\lambda\cos(bx) + \beta\,\text{sen}(bx))$, si $\beta = -i \wedge \lambda = 1$

$= e^{ax}(\cos(bx) - i\,\text{sen}(bx))$

$= e^{ax-ibx}$

$= e^{(a-ib)x}$

2 ✓

Se comprueba que g_1 y g_2 son iguales, por lo tanto, generan el mismo espacio

Ejercicio 1.5

martes, 7 de septiembre de 2021 19:52

(a) Para que sean iguales, el primer generador tiene que estar incluido en el segundo y viceversa, para esto, cada elemento de un generador se tiene que formar a partir de los otros (ser CL)

(También como ambos generadores tienen los mismos vectores, basta que el vector extra sea CL de los otros para que generen el mismo espacio)

Comprobamos que $gen_2 \subset gen_1$

- $\lambda \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}$ si $\beta = 1 \wedge \lambda = 0 \wedge \gamma = 0$ ✓
- $\lambda \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ si $\gamma = 1$, $\lambda = 0 \wedge \beta = 0$

Comprobamos que $gen_1 \subset gen_2$

- $\lambda \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow$ si $\lambda = 1 \wedge \beta = 0$ ✓
- $\lambda \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow$ si $\lambda = 0 \wedge \beta = 1$ ✓
- $\lambda \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -a \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a\lambda \\ \lambda \\ 2\lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\beta \\ 2\beta \\ 3\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -a \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} a\lambda + 3\beta = 1 \\ \lambda + 2\beta = -a \\ 2\lambda + 3\beta = 1 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} a & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -a \\ 2 & 3 & 1 \end{array}\right] \rightarrow F_3 - 2F_2 \rightarrow F_3 \left[\begin{array}{cc|c} a & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -a \\ 0 & -1 & 1+2a \end{array}\right] \sim$$

$$aF_2 - F_1 \rightarrow F_2 \left[\begin{array}{cc|c} a & 3 & 1 \\ 0 & 2a-3 & -a^2-1 \\ 0 & -1 & 1+2a \end{array}\right] \sim (2a-3)F_3 + F_2 \rightarrow F_3 \left[\begin{array}{cc|c} a & 3 & 1 \\ 0 & 2a-3 & -a^2-1 \\ 0 & 0 & (1+2a)(2a-3)+(-a^2-1) \end{array}\right]$$

$$(1+2a)(2a-3) - a^2 - 1 = 0$$
$$2a - 3 + 4a^2 - 6a - a^2 - 1 = 0$$
$$3a^2 - 4a - 4 = 0$$
$$a_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6} \begin{cases} \rightarrow a_1 = 2 \\ \rightarrow a_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Para $a = 2 \vee a = -\frac{2}{3}$

(b)

Usando la misma lógica que en inciso (a),

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = a \\ ax + 2y = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ a & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \sim F_3 - F_1 = F_3 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ a & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2-a \end{array}\right] \sim F_2 - aF_1 \rightarrow F_2 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & a \\ 0 & 2-3a & 1-a^2 \\ 0 & 0 & 2-a \end{array}\right] \longrightarrow 2 - a = 0 \rightarrow a = 2$$

Para $a = 2$

Ejercicio 1.6

martes, 7 de septiembre de 2021 21:33

(a) $S=\{x\in\mathbb{R}^3 : x_1+2x_2+3x_3=0\}$

$x_1=-2x_2-3x_3$ $\quad (-2x_2-3x_3,\ x_2,\ x_3)=(-2x_2,x_2,0)+(-3x_3,0,x_3)$

$= x_2(-2,1,0)+x_3(-3,0,1)$

$S=\text{gen}\{(-2,1,0),(-3,0,1)\}$

(b) $S=\{x\in\mathbb{R}^3 : Ax=0\}$, donde $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix}$

$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0\\3x_1+2x_2+x_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-4&-8\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1-x_3=0\to x_1=x_3\\x_2+2x_3=0\to x_2=-2x_3\end{cases}$

$(x_3,-2x_3,x_3)=x_3(1,-2,1)$

$S=\text{gen}\{(1,-2,1)\}$

(c) $S=\left\{X\in\mathbb{R}^{2\times2} : X\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}X\right\}$

$\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}2x_1&3x_2\\2x_3&3x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x_1&2x_2\\3x_3&3x_4\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2x_1=2x_1\\3x_2=2x_2 \to x_2=0\\2x_3=3x_3\to x_3=0\\3x_4=3x_4\end{cases}$ $\quad \begin{bmatrix}x_1&0\\0&x_3\end{bmatrix}=x_1\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

$S=\text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$

(d) $S=\left\{p\in\mathbb{R}_3[x] : \int_{-1}^{1}p(x)\,dx=0,\ \int_{-1}^{1}x\,p(x)\,dx=0\right\}$

$p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$

$\int_{-1}^{1}a+bx+cx^2+dx^3\,dx = a\,x\Big|_{-1}^{1}+\underbrace{\frac{b}{2}\,x^2\Big|_{-1}^{1}}_{=0}+\frac{c}{3}\,x^3\Big|_{-1}^{1}+\underbrace{\frac{d}{4}\,x^4\Big|_{-1}^{1}}_{=0}=2a+\frac{2}{3}c=0\to a=-\frac{1}{3}c$

$\int_{-1}^{1}ax+bx^2+cx^3+dx^4\,dx=\underbrace{\frac{a}{2}\,x^2\Big|_{-1}^{1}}_{=0}+\frac{b}{3}\,x^3\Big|_{-1}^{1}+\underbrace{\frac{c}{4}\,x^4\Big|_{-1}^{1}}_{=0}+\frac{d}{5}\,x^5\Big|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}b+\frac{2}{5}d=0\to b=-\frac{3}{5}d$

$p(x)=-\frac{c}{3}-\frac{3}{5}dx+cx^2+dx^3=-\frac{c}{3}+cx^2-\frac{3}{5}dx+dx^3=c\left(-\frac{1}{3}+x^2\right)+d\left(-\frac{3}{5}x+x^3\right)$

$S=\text{gen}\left\{-\frac{1}{3}+x^2,\ -\frac{3}{5}x+x^3\right\}$

(e) $S=\{y\in C^\infty(\mathbb{R}) : y'-\lambda y=0\}$, donde $\lambda\in\mathbb{R}$

$y'-\lambda y=0$

$y'=\lambda y$

$\frac{dy}{dx}=\lambda y$

$\int\frac{dy}{y}=\int\lambda\,dx$

$\ln(|y|)=\lambda x+c\to |y|=e^{\lambda x+c}\to y=\pm e^{\lambda x+c}$

$S=\text{gen}\{e^{\lambda x+c}\}$

Ejercicio 1.7

jueves, 9 de septiembre de 2021 13:09

Sistema de generadores minimal: Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $\mathbb{S}$ un subespacio no nulo de $\mathbb{V}$, y g un subconjunto no vacío de $\mathbb{V}$. Se dice que g es un sistema de generadores minimal de $\mathbb{S}$ si $\mathbb{S} = \text{gen}(g)$ y $\text{gen}(\mathcal{H}) \subsetneq \mathbb{S}$ para cualquier $\mathcal{H} \subsetneq g$.

uno del gen

Supongamos que g es un sistema de generadores no minimal de $\mathbb{V}$, entonces $\text{gen}(g)$ genera $\mathbb{V}$. Al no ser minimal, existen elementos (V_i) tal que $\text{gen}(g \setminus \{V_i\}) = \text{gen}(g)$. Para que estos sistemas generadores sean iguales $g - \{V_i\} \subseteq g \wedge g \subseteq g - \{V_i\}$. Podríamos definir a $g - \{V_i\}$ como el conjunto $g - \{V_i\} = C = \{V_1, V_2\}$.

Entonces para que $C \subseteq g$, $V_1 = x_1 V_1 + x_2 V_2 + x_3$ que se cumple para $x_1 = 1, x_2 = 0 \wedge x_3 = 0$ y $V_2 = x_1 V_1 + x_2 V_2 + x_3 V_3$ que se cumple para $x_1 = 0, x_3 = 0 \wedge x_2 = 1$.

y entonces para que $g \subseteq C$, lo mismo que el anterior para $V_3 = x_1 V_1 + x_2 V_2$. Para esto V_3 tiene que ser CL de V_1 y V_2. En este caso se cumple que g es un sistema de generadores no minimal.

Pero si V_3 no es CL de V_1 y V_2, entonces $\text{gen}(C) \neq \text{gen}(g)$ por lo tanto no generan el mismo espacio entonces g no es un sistema de generadores no minimal. Finalmente g es un sistema de generadores minimal.

Ejercicio 1.8

jueves, 9 de septiembre de 2021 13:58

1.8 ☢ [*herramienta*] Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $\overbrace{\{v_i : i \in \mathbb{I}_n\}} \subset \mathbb{V}$ un conjunto linealmente independiente, y $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Para cada $j \in \mathbb{I}_n$ se definen los vectores $w_j := \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$. Mostrar que $\{w_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ es linealmente independiente si, y sólo si, $\det(A) \neq 0$.

Si $\{v_i : i \in \mathbb{I}_n\}$ es Li entonces $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ con $a_i \in \mathbb{R}$. Como $w_j := \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$ con $a_{ij} \in \mathbb{R}$, como v_i son Li entonces $w_j := \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i = 0$. Para que $\{w_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ sea Li $\sum_{j=1}^{n} x_j w_j = 0$. Por lo tanto,

$$\sum_{j=1}^{n} x_j w_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i\right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j v_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) v_i = 0.$$ Por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}$$

Para que $\{w_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ sea Li este sistema lineal homogeneo debe ser compatible determinado

Observación: Notese que para que el conjunto W sea Li, la unica forma de que $\sum_{j=1}^{n} x_j w_j = 0$ sería que todos los x_j sean 0. Luego si el sistema es SCD, la única forma de que todos los x sean 0 es que se los multiplique por 0, por lo tanto, se prueba que W es Li

Luego, este sistema lineal homogeneo es SCD si y solo si

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \boxed{\det(A) \neq 0}$$

Ejercicio 1.9

jueves, 9 de septiembre de 2021 14:59

Como $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es Li y el conjunto $\{w_1, w_2, w_3, w_4\} \subset gen(\{v_1, v_2, v_3, v_4\})$. Podemos usar "Herramienta". Dado que ya tenemos los coeficientes que forman a los vectores w_j. Armamos la matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 17 \\ -2 & -2 & 3 & -10 \\ 1 & 0 & -1 & 11 \\ -4 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \det \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 & 17 \\ -2 & -2 & 3 & -10 \\ 1 & 0 & -1 & 11 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 12 \\ 1 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & -4 & 12 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & 12 \\ 1 & -4 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 6 \\ 6 & -5 & 0 \\ 9 & -10 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot 6 \begin{vmatrix} 6 & -5 \\ 9 & -10 \end{vmatrix} = 6(-60+45) = 6 \cdot (-15)$$

$$= -90 \neq 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\{w_1, w_2, w_3, w_4\} \text{ es linealmente independiente}}$

Ejercicio 1.10

jueves, 9 de septiembre de 2021 15:46

(a)

$\rightarrow$ También podría haber planteado el det y si $\neq 0$ entonces es SCD $\rightarrow$ Li

$$\lambda\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}3\\5\\-6\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}0\\-5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&3&0\\3&5&-5\\-2&-6&6\end{bmatrix}\xrightarrow{6F_2+5F_3\rightarrow F_2}\begin{bmatrix}1&3&0\\8&0&0\\-2&-6&-6\end{bmatrix}\xrightarrow{F_3+2F_1\rightarrow F_3}\begin{bmatrix}1&3&0\\8&0&0\\0&0&-6\end{bmatrix}\xrightarrow{F_2-8F_1\rightarrow F_2}\begin{bmatrix}1&3&0\\0&-24&0\\0&0&-6\end{bmatrix}\begin{matrix}\\\frac{F_2}{-24}\\\frac{F_3}{-6}\end{matrix}\underbrace{\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{SCD!}$$

$$\begin{cases}\lambda+3\beta=0\\3\lambda+5\beta-5\gamma=0\\-2\lambda-6\beta+6\gamma=0\end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{El subconjunto es linealmente independiente}}$

(b) Sabiendo que el subconjunto $\{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{R}[x]$ es linealmente independiente puedo plantear herramienta para el subconjunto $\{1+3x-2x^2,\ 3+5x-6x^2,\ -5x+6x^2\}$

Nótese que:

$$\left.\begin{aligned}1+3x-2x^2&=1.1+3.x+(-2).x^2\\3+5x-6x^2&=3.1+5.x+(-6)x^2\\-5x+6x^2&=0\,1+(-5)\,x+6\,x^2\end{aligned}\right\}$$ Con los coeficientes en azul planteo el determinante de la matriz herramienta.

$$\det\left(\begin{bmatrix}1&3&0\\3&5&-5\\-2&-6&6\end{bmatrix}\right)=\begin{vmatrix}1&3&0\\3&5&-5\\-2&-6&6\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1&3&0\\18&30&-30\\-2&-6&6\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1&3&0\\8&0&0\\-2&-6&6\end{vmatrix}=(-1)^{3+3}.\frac{1}{\cancel{6}}\cancel{6}\,(0-24)=-24\neq0$$

Nótese que es la misma que en (a) (ya se que es SCD) pero hago el det para practicar

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{El subconjunto es linealmente independiente}}$

(c) El subconjunto $\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right\}$ y que el conjunto de este inciso está incluido en él

$$\left.\begin{aligned}\begin{bmatrix}1&3\\-2&0\end{bmatrix}&=1\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+(-2)\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}3&5\\-6&0\end{bmatrix}&=3\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+(-6)\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\\\begin{bmatrix}0&-5\\6&0\end{bmatrix}&=0\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+(-5)\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+6\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\det\left(\begin{bmatrix}1&3&0\\3&5&-5\\-2&-6&6\end{bmatrix}\right)$$

$\rightarrow$ mismo det que en (a) y (b)

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{El subconjunto es linealmente independiente}}$

Ejercicio 1.11

jueves, 9 de septiembre de 2021 17:13

1.4. Wronskiano.

Se considera un sistema de funciones $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\} \subset C^{n-1}(I)$, donde I es un intervalo de la recta real y $n \geq 2$. El *wronskiano de* $\mathcal{F}$, $W(\mathcal{F}) : I \to \mathbb{R}$, se define por

$$(5) \qquad W(\mathcal{F})(x) := \det \begin{bmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

Lema 1.6. *Si $W(\mathcal{F})(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in I$, entonces $\mathcal{F}$ es linealmente independiente.*

Notar que con encontrar UNO basta. Pero, recordar además, que si $W(\mathcal{F}) = 0$ no logro encontrar uno, no puedo afirmar que no es es LI

(a) $\mathcal{F} = \{1, \operatorname{sen}(x), \cos(x)\}$

$$W(\mathcal{F}) = \det \begin{bmatrix} 1 & \operatorname{sen}(x) & \cos(x) \\ 0 & \cos(x) & -\operatorname{sen}(x) \\ 0 & -\operatorname{sen}(x) & -\cos(x) \end{bmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \begin{vmatrix} \cos(x) & -\operatorname{sen}(x) \\ -\operatorname{sen}(x) & -\cos(x) \end{vmatrix} = -\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = -1 \quad \forall x$$

$\boxed{\Rightarrow \mathcal{F} \text{ es linealmente independiente}}$

(b) Como se que $\mathcal{F} = \{1, \operatorname{sen}(x), \cos(x)\}$ y $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, uso "herramienta"

$$\left.\begin{aligned} 1 + 3\operatorname{sen}(x) - 2\cos(x) &= 1.1 + 3.\operatorname{sen}(x) + (-2).\cos(x) \\ 3 + 5\operatorname{sen}(x) - 6\cos(x) &= 3.1 + 5.\operatorname{sen}(x) + (-6)\cos(x) \\ -5\operatorname{sen}(x) + 6\cos(x) &= 0.1 + (-5).\operatorname{sen}(x) + 6.\cos(x) \end{aligned}\right\} \det \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -5 \\ -2 & -6 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{mismo det que en el ej } (1.10) \Rightarrow \det = -24 \neq 0$$

$\boxed{\Rightarrow \mathcal{F} \text{ es linealmente independiente}}$

(c) Como se que $\mathcal{F} = \{1, \operatorname{sen}(x), \cos(x)\}$ y $\tilde{\mathcal{G}} \subset \mathcal{F}$, uso "herramienta"

$$\left.\begin{aligned} 1 + 2\operatorname{sen}(x) + 3\cos(x) &= 1.1 + 2\operatorname{sen}(x) + 3\cos(x) \\ 4 + 5\operatorname{sen}(x) + 7\cos(x) &= 4.1 + 5\operatorname{sen}(x) + 7\cos(x) \\ 2 + \operatorname{sen}(x) + \cos(x) &= 2.1 + 1\operatorname{sen}(x) + 1\cos(x) \end{aligned}\right\} \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} . 1 . (15 - 15) = 0$$

$\boxed{\Rightarrow \tilde{\mathcal{G}} \text{ no es linealmente independiente}}$

Ejercicio 1.12

jueves, 9 de septiembre de 2021 20:06

(a) Del ejercicio (1.11 a) sé que $\{1, \operatorname{sen}(x), \cos(x)\}$ es LI y que subconjunto del inciso (a) está incluido en él. Uso la herramienta pidiendo que el determinante sea igual a 0, así es LD

$$\left.\begin{aligned}
1 + a\operatorname{sen}(x) + 3\cos(x) &= 1.1 + a.\operatorname{sen}(x) + 3.\cos(x)\\
4 + 5\operatorname{sen}(x) + 7\cos(x) &= 4.1 + 5.\operatorname{sen}(x) + 7\cos(x)\\
a + \operatorname{sen}(x) + \cos(x) &= a\,1 + 1.\operatorname{sen}(x) + 1.\cos(x)
\end{aligned}\right\} \det\begin{bmatrix} 1 & 4 & a\\ a & 5 & 1\\ 3 & 7 & 1\end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & a\\ a-3 & -2 & 0\\ 3 & 7 & 1\end{vmatrix} = (-1)^{1+3}\,a\,(7a-21+6) + (-1)^{3+3}.1.(-2-4a+12) = 0$$

$$7a^2 - 15a - 4a + 10 = 0$$

$$7a^2 - 19a + 10 = 0 \begin{cases} a_1 = 2\\ a_2 = \frac{5}{7}\end{cases}$$

$\boxed{\Rightarrow \text{Para que el subconjunto sea LD}, a = 2 \vee a = \frac{5}{7}}$

(b) Propongo el subconjunto $\{1, x, x^2 + 2x^3\}$ que por obviedad es Li e incluye al subconjunto del inciso. Uso herramienta como en (a)

$$\left.\begin{aligned}
1 + 2ax + x^2 + 2x^3 &= 1.1 + 2a\,x + 1.(x^2+2x^3)\\
2 + ax + 4x^2 + 8x^3 &= 2.1 + a\,x + 4\,(x^2+2x^3)\\
x^2 + 2x^3 &= 0\,1 + 0\,x + 1\,(x^2+2x^3)
\end{aligned}\right\} \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0\\ 2a & a & 0\\ 1 & 4 & 1\end{bmatrix} = (-1)^{3+3}.1.(a-4a) = -3a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$\boxed{\Rightarrow \text{Para que el subconjunto sea LD}, a = 0}$

(c) Utilizo el subconjunto $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right\}$ que por obviedad es Li e incluye al subconjunto del inciso. Uso herramienta como en (a)

$$\left.\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 1\\ a & 1\end{bmatrix} &= 1.\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix} 2 & a\\ 4 & 2\end{bmatrix} &= 2\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix} 3a+1 & 3\\ -4 & 3a+1\end{bmatrix} &= (3a+1)\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} + (-4)\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}
\end{aligned}\right\}$$

$$\det\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3a+1\\ 1 & a & 3\\ a & 4 & -4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2-a & 3a-2\\ 1 & a & 3\\ a & 4 & -4\end{vmatrix} = (-1)^{2+1}.1.(-8+4a-12a+8) + (-1)^{3+1}\,a\,(6-3a-3a^2+2a) = \circledast$$

$$\circledast\ -4a + 12a + 6a - a^2 - 3a^3 = 14a - a^2 - 3a^3 = \underbrace{a}_{a_1 = 0}\underbrace{(14 - a - 3a^2)}_{a_2 = 2,\ a_3 = -\frac{7}{3}} = 0$$

$\boxed{\Rightarrow \text{Para que el subconjunto sea LD}, a_1 = 0 \vee a_2 = 2 \vee a_3 = -\frac{7}{3}}$

Ejercicios para entregar semana 1

viernes, 10 de septiembre de 2021 14:33

1. Sean $v_1 = [1 \ \ 1 \ \ -1 \ \ -1]^T$, $v_2 = [1 \ \ -1 \ \ -1 \ \ 1]^T$, $v_3 = [1 \ \ 0 \ \ -1 \ \ 0]^T$ y $v = [2 \ \ -1 \ \ -2 \ \ 1]^T$.

(a) Comprobar que $v \in \text{gen}\{v_1, v_2, v_3\}$ y hallar todas las maneras de representar a v como combinación lineal de los vectores v_1, v_2, v_3.

(b) Hallar una sistema de generadores del subespacio $\mathbb{S} = \left\{ [x_1 \ \ x_2 \ \ x_3]^T \in \mathbb{R}^3 : x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 = 0_{\mathbb{R}^4} \right\}$.

(c) Representar cada uno de los vectores v_i como una combinación lineal de los otros dos.

(d) Comprobar que se verifica que $\{0\} \subsetneq \text{gen}\{v_1\} \subsetneq \text{gen}\{v_1, v_2\} = \text{gen}\{v_1, v_2, v_3\}$.

2. Hallar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales vale que $\text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2+a \\ 2-a & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -a & 2 \\ 0 & -a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2+a \\ 2-a & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right\}$.

1

a) Si $v \in \{v_1, v_2, v_3\}$ entonces se puede representar como combinación lineal de los otros tres: $v = \lambda v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$, $\lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ⊛

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \beta + \gamma = 2 \\ \lambda - \beta = -1 \\ -\lambda - \beta - \gamma = -2 \\ -\lambda + \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} F_3 + F_1 \to F_3 \\ F_4 + F_2 \to F_4 \end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] F_2 - F_1 \to F_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] -\frac{1}{2}F_2 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim F_1 - F_2 \to F_1 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2} \\ \beta + \frac{1}{2}\gamma = \frac{3}{2} \end{cases}, \ \lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\gamma \ \wedge \ \beta = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\gamma$$

⊛ $v = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\gamma\right) v_1 + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\gamma\right) v_2 + \gamma v_3$

$$\boxed{\cdot \left\{ [\lambda \ \ \beta \ \ \gamma]^T \in \mathbb{R} : \lambda v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = v \right\} = \left\{ \left[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\gamma \ \ \ \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\gamma \ \ \ \gamma\right]^T : \gamma \in \mathbb{R} \right\}}$$

b)

Parte idéntica a la del (a)

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \to x_1 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \to x_2 = -\frac{1}{2}x_3 \end{cases}$$

$$\left[-\tfrac{1}{2}x_3 \ \ -\tfrac{1}{2}x_3 \ \ x_3\right]^T = x_3\left[-\tfrac{1}{2} \ \ -\tfrac{1}{2} \ \ 1\right]$$

$$\boxed{\cdot \ S = \text{gen}\left\{ \left[-\tfrac{1}{2} \ \ -\tfrac{1}{2} \ \ 1\right]^T \right\}}$$

c)

$$\lambda v_2 + \beta v_3 = v_1 \Rightarrow \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \beta = 1 \\ -\lambda = 1 \\ -\lambda - \beta = -1 \\ \lambda = -1 \end{cases}, \ \lambda = -1, \ \beta = 1 - \lambda = 1 - (-1) = 2 \qquad \boxed{\cdot v_1 = -v_2 + 2v_3}$$

$$\lambda v_1 + \beta v_3 = v_2 \Rightarrow \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \beta = 1 \\ \lambda = -1 \\ -\lambda - \beta = -1 \\ -\lambda = 1 \end{cases}, \ \lambda = -1, \ \beta = 1 - \lambda = 1 - (-1) = 2 \qquad \boxed{\cdot v_2 = -v_1 + 2v_3}$$

$$\lambda v_1 + \beta v_2 = v_3 \Rightarrow \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} \lambda + \beta = 1 \to \beta + \beta = 1 \to \beta = \frac{1}{2} = \lambda \\ \lambda - \beta = 0 \\ -\lambda - \beta = -1 \\ -\lambda + \beta = 0 \to \beta = \lambda \end{cases} \qquad \boxed{\cdot v_3 = \tfrac{1}{2}v_1 + \tfrac{1}{2}v_2}$$

d) Dados $\text{gen}\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ y $\text{gen}\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, si $\{w_1, w_2, \dots, w_m\} \subset \text{gen}\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, entonces $\text{gen}\{w_1, w_2, \dots, w_m\} \subset \text{gen}\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$

. $\{0\} \subsetneq \text{gen}\{v_1\}$?

$\text{gen}\{v_1\} = \lambda v_1$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $0 \in \text{gen}\{v_1\}$ entonces $\{0\} \subset \text{gen}\{v_1\}$:

$0 = 0\, v_1 \ \therefore \ 0 \in \text{gen}\{v_1\} \therefore \{0\} \subset \text{gen}\{v_1\}$ ✓

$\{0\} \neq \text{gen}\{v_1\}$? $\to v_1 = [1 \ 1 \ -1 \ -1] \neq 0 \ \therefore \ \{0\} \neq \text{gen}\{v_1\}$ ✓

$\{0\} \subsetneq \text{gen}\{v_1\}$ ✓

. $\text{gen}\{v_1\} \subsetneq \text{gen}\{v_1, v_2\}$?

Si $v_1 \in \text{gen}\{v_1, v_2\}$ entonces $\text{gen}\{v_1\} \subset \text{gen}\{v_1, v_2\}$: $1\,v_1 + 0\,v_2 = v_1 \ \therefore \ \text{gen}\{v_1\} \subset \text{gen}\{v_1, v_2\}$ ✓

Luego $v_2 \in \text{gen}\{v_1\}$?

$v_2 = \lambda v_1$, $\lambda \in \mathbb{R} \to [1 \ -1 \ -1 \ 1]^T = \lambda [1 \ 1 \ -1 \ -1] \to \begin{cases} 1 = \lambda \to \lambda = 1 \\ -1 = \lambda \to \lambda = -1 \\ -1 = -\lambda \\ 1 = -\lambda \end{cases}$ Contradicción!!

$v_2 \notin \text{gen}\{v_1\}$

$\text{gen}\{v_1\} \subsetneq \text{gen}\{v_1, v_2\}$ ✓

. $\text{gen}\{v_1, v_2\} = \text{gen}\{v_1, v_2, v_3\}$

Para que se cumpla la igualdad, $\text{gen}\{v_1, v_2\} \subseteq \text{gen}\{v_1, v_2, v_3\} \wedge \text{gen}\{v_1, v_2, v_3\} \subseteq \text{gen}\{v_1, v_2\}$

$\text{gen}\{v_1, v_2\} \subseteq \text{gen}\{v_1, v_2, v_3\}$ porque $\{v_1, v_2\} \subseteq \{v_1, v_2, v_3\}$. Pero $v_3 \in \text{gen}\{v_1, v_2\}$

Según (c), $v_3 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$, por lo tanto $v_3 \in \text{gen}\{v_1, v_2\}$. Usando el teorema de eliminación: $\text{gen}(\{v_1, v_2, v_3\} \setminus \{v_3\}) = \text{gen}\{v_1, v_2, v_3\} = \text{gen}\{v_1, v_2\}$

$\text{gen}\{v_1, v_2\} = \text{gen}\{v_1, v_2, v_3\}$ ✓

Ejercicios para entregar semana 1(parte 2)

viernes, 10 de septiembre de 2021 17:00

2 Para que $\text{gen}\Bigg\{\underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2+a \\ 2-a & 1 \end{bmatrix}}^{u_1}, \overbrace{\begin{bmatrix} -a & 2 \\ 0 & -a \end{bmatrix}}^{u_2}, \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}^{u_3}}_{U_T}\Bigg\} = \text{gen}\Bigg\{\underbrace{\overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2+a \\ 2-a & 1 \end{bmatrix}}^{w_1}, \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}^{w_2}}_{W_T}\Bigg\}$, $\text{gen}\{U_T\} \subseteq \text{gen}\{W_T\} \wedge \text{gen}\{W_T\} \subseteq \text{gen}\{U_T\}$

$\text{gen}\{W_T\} \subseteq \text{gen}\{U_T\}$ ya que $\{W_T\} \subseteq \{U_T\}$, solo quedaría ver si $\text{gen}\{U_T\} \subseteq \text{gen}\{W_T\}$, claramente $\{u_1, u_2\} \subseteq \text{gen}\{W_T\}$,

$u_2 \in \text{gen}\{W_T\}$?

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 & 2+a \\ 2-a & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & 2 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \quad \begin{cases} \lambda + 2\beta = -a \\ (2+a)\lambda + 6\beta = 2 \\ (2-a)\lambda = 0 \longrightarrow (2-a)\lambda = 0 \begin{cases} \to a = 2 \\ \to \lambda = 0 \end{cases} \\ \lambda + 2\beta = -a \end{cases}$$

Si $a=2$:

$$\begin{cases} \lambda + 2\beta = -2 \\ 4\lambda + 6\beta = 2 \\ 0 = 0 \\ \lambda + 2\beta = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + 2\beta = -2 \\ 4\lambda + 6\beta = 2 \end{cases} \to \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 - 4F_1 \to F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 + F_2 \to F_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{2}F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -5 \end{array}\right] \to \lambda = 8 \wedge \beta = -5$$

$$u_2 = 8w_1 - 5w_2 \quad , \quad u_2 \in \text{gen}\{W_T\}$$

Si $\lambda = 0$

$$\begin{cases} 2\beta = -a \\ 6\beta = 2 \to \beta = \frac{1}{3} \quad , \quad \boxed{a = -\frac{2}{3}} \\ 0 = 0 \\ 2\beta = -a \end{cases}$$

$$\boxed{\text{La igualdad se cumple si } a = 2 \wedge a = -\frac{2}{3}}$$

Ejercicio 1.13

lunes, 13 de septiembre de 2021 16:53

(a)

(a) *Algoritmo espacio filas*:

Algorithm 1 espacio filas

Require: $\mathcal{G} = \{v_1, \dots, v_m\} \subset \mathbb{K}^n$ un sistema de generadores del subespacio $\mathbb{S}$.
Ensure: $\mathcal{B}$ una base del subespacio $\mathbb{S}$.

1: Construir la matriz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ cuyas filas son $v_1^T, \dots, v_m^T$
2: Construir $E \in \mathbb{K}^{m \times n}$ la matriz escalonada por filas reducida de A
3: Listar las filas no nulas de E: $\{E_{i_1 *}, \dots, E_{i_q *}\}$
4: $\mathcal{B} \leftarrow \{E_{i_1 *}, \dots, E_{i_q *}\}$
5: **return** $\mathcal{B}$

$v_m = [v_{m1} \ \ v_{m2} \ \cdots \ v_{mn}]^T \in \mathbb{K}^n$

Construimos la matriz que dice el algoritmo: $\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_{m1} & v_{m2} & \cdots & v_{mn} \end{bmatrix}$

Mediante el método de eliminación de Gauss-Jordan, que mediante las operaciones básicas de filas de matrices (teniendo precaución al intercambiar filas) obtenemos la matriz escalonada E con las siguientes características

Posible E: $\begin{bmatrix} 1 & * & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0_{m1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0_{mn} \end{bmatrix}$

Fijémonos que al usar las operaciones básicas de la fila (adición de un múltiplo de una a la otra y multiplicación por un escalar), como los vectores son las filas de la matriz, al usar estas operaciones estamos trabajando con combinaciones lineales de los vectores.

$\Downarrow$

Como siempre trabajamos con las operaciones que definen a un subespacio vectorial, los vectores (filas de la matriz) que se obtienen en la matriz E también son parte del subespacio. Notar que las filas que se vuelven $0^{1 \times n}$ es porque ampliando la definición de combinación lineal (con las operaciones de las filas que son idénticas a las de los espacios vectoriales se vuelven 0) por lo tanto no se incluye en la base

(B)

(b) *Algoritmo espacio columnas*:

Algorithm 2 espacio columnas

Require: $\mathcal{G} = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{K}^m$ un sistema de generadores del subespacio $\mathbb{S}$.
Ensure: $\mathcal{B}$ una base del subespacio $\mathbb{S}$.

1: Construir la matriz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ cuyas columnas son $v_1, \dots, v_n$
2: Construir $E \in \mathbb{K}^{m \times n}$ la matriz escalonada por filas reducida de A
3: Listar las columnas de A que corresponden a las columnas pivotales de E: $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_p}\}$
4: $\mathcal{B} \leftarrow \{v_{j_1}, \dots, v_{j_p}\}$
5: **return** $\mathcal{B}$

Recordar que cuando queremos verificar si un conjunto $G = \{v_1, \dots, v_n\} \subset \mathbb{K}^m$ es Li planteamos el siguiente sistema.

$x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 v_{11} + \dots + x_n v_{1n} = 0 \\ \vdots \\ x_1 v_{m1} + \dots + x_n v_{mn} = 0 \end{cases}$ que se traduce en la matriz: $\begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ v_{m1} & \cdots & v_{mn} \end{bmatrix}$ luego triangulamos y si es SCD el conjunto es Li

$\circledast$

En el algoritmo, en el paso 1) estamos construyendo la misma matriz. Luego, buscamos E

Posible E: $\begin{bmatrix} 1 & * & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0_{m1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0_{mn} \end{bmatrix}$

Notar que si retiramos las columnas no pivotales y nos quedamos solo con las de los pivotes, nos queda una matriz $\underbrace{\text{triangulada que nos lleva a un SCD}}_{\text{que cumplen } \circledast}$. Por lo tanto, los vectores que estaban en esas posiciones pivotales son Li y los podemos usar como base

Ejercicio 1.14

lunes, 13 de septiembre de 2021 18:37

(a)

$$\mathcal{G}=\left\{\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\right\} \text{ en } \mathbb{R}^3$$

Algoritmo espacio fila:

1) $A=\begin{bmatrix}0&-1&1\\2&1&1\end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix}0&-1&1\\2&1&1\end{bmatrix} \xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_2} \begin{bmatrix}2&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix}\begin{matrix}\frac{1}{2}F_1\\-F_2\end{matrix} \begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&-1\end{bmatrix} \xrightarrow{F_1-\frac{1}{2}F_2} \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\end{bmatrix} \Rightarrow E=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-1\end{bmatrix}$

3) Filas no nulas de E: $\{[1\ 0\ 1], [0\ 1\ -1]\}$

4) $\boxed{B_S=\{[1\ 0\ 1]^T, [0\ 1\ -1]^T\}}$

Algoritmo espacio columna:

1) $A=\begin{bmatrix}0&2\\-1&1\\1&1\end{bmatrix}$

2) $\begin{bmatrix}0&2\\-1&1\\1&1\end{bmatrix} \xrightarrow{F_1\leftrightarrow F_3} \begin{bmatrix}1&1\\-1&1\\0&2\end{bmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1\to F_2} \begin{bmatrix}1&1\\0&2\\0&2\end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}F_2} \begin{bmatrix}1&1\\0&1\\0&2\end{bmatrix} \begin{matrix}F_1-F_2\to F_1\\F_3-2F_2\to F_3\end{matrix} \begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$

3) Columnas de A que corresponden a las columnas pivotales de E: $\{[0\ -1\ 1]^T, [2\ 1\ 1]^T\}$

4) $\boxed{B_S=\{[0\ -1\ 1]^T, [2\ 1\ 1]^T\}}$

(b)

$$\mathcal{G}=\left\{\begin{bmatrix}2\\-1\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\2\\-1\end{bmatrix}\right\} \text{ en } \mathbb{R}^3$$

Algoritmo espacio fila:

1) $A=\begin{bmatrix}2&-1&1\\2&0&1\\-2&2&-1\end{bmatrix}$

2) $E=\begin{bmatrix}2&-1&1\\2&0&1\\-2&2&-1\end{bmatrix}\begin{matrix}F_2-F_1\to F_2\\F_3+F_1\to F_3\end{matrix}\begin{bmatrix}2&-1&1\\0&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{matrix}F_1-F_2\to F_1\\F_3-F_2\to F_3\\\frac{1}{2}F_1\end{matrix}\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

3) Filas no nulas de E: $\{[1\ 0\ \frac{1}{2}], [0, 1, 0]\}$

4) $\boxed{B_S=\{[1\ 0\ \frac{1}{2}]^T, [0\ 1\ 0]^T\}}$

Algoritmo espacio columnas:

1) $A=\begin{bmatrix}2&2&-2\\-1&0&2\\1&1&-1\end{bmatrix}$

2) $E=\begin{bmatrix}2&2&-2\\-1&0&2\\1&1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}F_1}\begin{bmatrix}1&1&-1\\-1&0&2\\1&1&-1\end{bmatrix}\begin{matrix}F_2+F_1\to F_2\\F_3-F_1\to F_3\end{matrix}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{F_1-F_2\to F_1}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$

3) Columnas de A que corresponden a columnas pivotales de E $\{[2\ -1\ 1]^T, [2\ 0\ 1]^T\}$

4) $\boxed{B_S=\{[2\ -1\ 1]^T, [2\ 0\ 1]^T\}}$

(c)

$$\mathcal{G}=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\0\\4\end{bmatrix}\right\}$$

Algoritmo espacio filas:

1) $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&-3\\5&1&0\\4&0&4\end{bmatrix}$

1) $E=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&1&-3\\5&1&0\\4&0&4\end{bmatrix}\begin{matrix}F_2-2F_1\to F_2\\F_3-5F_1\to F_3\\F_4-4F_1\to F_4\end{matrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-5\\0&1&-5\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{F_3-F_2\to F_3}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-5\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

3) Filas no nulas de E: $\{[1\ 0\ 1]; [0\ 1\ -5]\}$

4) $\boxed{B_S=\{[1\ 0\ 1]^T, [0\ 1\ -5]^T\}}$

Algoritmo espacio columnas:

1) $A=$

Ejercicio 1.15

martes, 14 de septiembre de 2021 12:59

(a) $\mathbb{S} = \{ p \in \mathbb{R}_2[x] \cdot p(1) = 0 \}$

$p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$p(1) = a_2 1^2 + a_1 . 1 + a_0 = 0 \rightarrow a_2 = -a_1 - a_0 \rightarrow \circledast$

$\circledast \rightarrow p(x) = (-a_1 - a_0)x^2 + a_1 x + a_0 = a_1(x - x^2) + a_0(1 - x^2)$

$$\boxed{B_S = \{x - x^2 ; 1 - x^2\}}$$

(b) $\mathbb{S} = \{ p \in \mathbb{R}_3[x] : p(1) = 0, p(2) = 0 \}$

$p(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$p(1) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0$

$p(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0 \rightarrow a_0 = -a_3 - a_2 - a_1 \\ 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = 0 \rightarrow 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 - (a_3 + a_2 + a_1) = 0 \end{cases}$$

$7a_3 + 3a_2 + a_1 = 0 \rightarrow a_1 = -7a_3 - 3a_2$

$p(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + (-7a_3 - 3a_2)x - a_3 - a_2 - (-7a_3 - 3a_2)$

$p(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 - 7a_3 x - 3a_2 x - a_3 - a_2 + 7a_3 + 3a_2 = a_3(x^3 - 7x + 6) + a_2(x^2 - 3x + 2)$

$$\boxed{B_S = \{x^3 - 7x + 6, x^2 - 3x + 2\}}$$

(c) $\mathbb{S} = \{ p \in \mathbb{R}_3[x] : 18p(0) = 3p''(0) + 2p'''(0),\ 6p'(0) = 6p''(0) - p'''(0) \}$

$$\left.\begin{array}{l} p(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \rightarrow p(0) = a_0 \\ p'(x) = 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1 \rightarrow p'(0) = a_1 \\ p''(x) = 6a_3 x + 2a_2 \rightarrow p''(0) = 2a_2 \\ p'''(x) = 6a_3 \rightarrow p'''(0) = 6a_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 18a_0 = 3(2a_2) + 2(6a_3) \rightarrow a_0 = \frac{1}{3}a_2 + \frac{2}{3}a_3 \\ 6a_1 = 6(2a_2) - 6a_3 \rightarrow a_1 = 2a_2 - a_3 \end{cases}$$

$p(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + (2a_2 - a_3)x + \frac{1}{3}a_2 + \frac{2}{3}a_3$

$p(x) = a_3(x^3 - x + \frac{2}{3}) + a_2(x^2 + 2x + \frac{1}{3})$

$$\boxed{B_S = \{x^3 - x + \tfrac{2}{3}, x^2 + 2x + \tfrac{1}{3}\}}$$

(d) $\mathbb{S} = \{ p \in \mathbb{R}_4[x] : P(1) = 0, p'(1) = 0, P''(1) = 0 \}$

$P(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a$

$P'(x) = 4a_4 x^3 + 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1 \rightarrow \begin{cases} P(1) = a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0 \\ P'(1) = 4a_4 + 3a_3 + 2a_2 + a_1 = 0 \\ P''(1) = 12a_4 + 6a_3 + 2a_2 \end{cases}$

$P''(x) = 12a_4 x^2 + 6a_3 x + 2a_2$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} F_2 - 4F_1 \rightarrow F_2 \\ F_3 - 12F_1 \rightarrow F_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -6 & -10 & -12 & -12 \end{bmatrix} \begin{array}{l} F_3 - 6F_2 \rightarrow F_3 \\ F_1 + F_2 \rightarrow F_1 \end{array} \circledast$$

$$\circledast \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{array}{l} F_2 + F_3 \rightarrow F_2 \\ \frac{1}{2}F_3 \end{array} \begin{bmatrix} \ \end{bmatrix} \rightarrow \{$$

Ejercicio 1.16

martes, 14 de septiembre de 2021 13:57

Busco los valores de a para los cuales el conjunto B_a cumple la ecuación y son Li

$$B_a = \{ \underbrace{[a \ \tfrac{3}{2} \ \tfrac{1}{2} \ 0]^T}_{B_1}, \underbrace{[1 \ \tfrac{3}{2} \ 0 \ -\tfrac{1}{2}]^T}_{B_2}, \underbrace{[\tfrac{3}{2} \ 0 \ a \ \tfrac{3}{2}]^T}_{B_3} \}$$

$$S_a = \{ x \in \mathbb{R}^4 : \tfrac{1}{2} x_1 - a x_3 + x_4 = 0 \}$$

B_1, B_2, B_3 deben cumplir la ecuación de S (y sus CL también)

$\underline{B_1}$ $\frac{1}{2} a - a \frac{1}{2} + 0 = 0$ ✓

$\underline{B_2}$ $\frac{1}{2} \cdot 1 - a \cdot 0 - \frac{1}{2} = 0$ ✓

$\underline{B_3}$ $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} - a \cdot a + \frac{3}{2} = 0$

$$\frac{3}{4} - a^2 + \frac{3}{2} = 0 \begin{cases} a_1 = \frac{3}{2} \\ a_2 = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Me fijo para que si con a_1 y con a_2, B_a es Li

$$B_{a_1}: \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} F_2 - F_1 \to F_2 \\ 3F_3 - F_1 \to F_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} F_3 + 2F_2 \to F_3 \\ F_4 + F_2 \to F_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{SCI} \to B_{a_1} \text{ no es Li}$$

$$B_{a_2}: \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} 2F_1 \\ 2F_2 \\ 2F_3 \\ 2F_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} F_2 + F_1 \to F_2 \\ 3F_3 + F_1 \to F_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5F_3 - 2F_2 \to F_3 \\ 5F_4 + F_2 \to F_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2F_4 + F_3 \to F_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{SCD} \to B_{a_2} \text{ es Li}$$

$$\boxed{B_a \text{ es una base de } S \text{ para } a = -\tfrac{3}{2}}$$

Ejercicio 1.17

martes, 14 de septiembre de 2021 17:17

(a) Como ya sabemos por el enunciado, la dimensión del conjunto solucion es 2. Luego para comprobar que $\{e^{ax}, e^{bx}\}$ es una base del espacio solución necesito verificar que pertenezcan al subespacio y que sean Li

$$y'' - (a+b)y' + aby = 0$$

- $y(x) = e^{ax}$

  $y'(x) = ae^{ax}$

  $y''(x) = a^2e^{ax}$

$$a^2e^{ax} - (a+b)\,ae^{ax} + ab\,e^{ax} = 0$$
$$\cancel{a^2e^{ax}} - \cancel{a^2e^{ax}} - \cancel{bae^{ax}} + \cancel{abe^{ax}} = 0$$
$$0 = 0 \checkmark$$

$y(x) = e^{bx}$

$y'(x) = be^{bx}$

$y''(x) = b^2e^{bx}$

$$b^2e^{bx} - (a+b)\,be^{bx} + ab\,e^{bx} = 0$$
$$b^2e^{bx} - b^2e^{bx} - abe^{bx} + abe^{bx} = 0$$
$$0 = 0 \checkmark$$

- Dado que el conjunto sólo tiene 2 elementos y uno no es multiplo escalar de otro, podemos decir que son Li

$\boxed{\text{El conjunto } \{e^{ax}, e^{bx}\} \text{ es una base del espacio solución de la ecuación } y'' - (a+b)y' + aby = 0}$

(b) $\{e^{ax}, xe^{ax}\}$, $y'' - 2ay' + a^2y = 0$. Analogo al (a)

- $y(x) = e^{ax}$

  $y'(x) = ae^{ax}$

  $y''(x) = a^2e^{ax}$

$$a^2e^{ax} - 2a\,ae^{ax} + a^2y = 0$$
$$2a^2e^{ax} - 2a^2e^{ax} = 0$$
$$0 = 0 \checkmark$$

$y(x) = xe^{ax}$

$y'(x) = e^{ax} + ae^{ax}x$

$y''(x) = ae^{ax} + a^2e^{ax}x + ae^{ax}$

$$2ae^{ax} + a^2e^{ax}x - 2a(e^{ax} + ae^{ax}x) + a^2xe^{ax} = 0$$
$$2ae^{ax} + a^2e^{ax}x - 2ae^{ax} - 2a^2e^{ax}x + a^2xe^{ax} = 0$$
$$\cancel{2ae^{ax}} - \cancel{2ae^{ax}} - \cancel{2a^2e^{ax}x} + \cancel{2a^2e^{ax}x} = 0$$
$$0 = 0 \checkmark$$

- Dado que el conjunto sólo tiene 2 elementos y uno no es multiplo escalar de otro, podemos decir que son Li

$\boxed{\text{El conjunto } \{e^{ax}, xe^{ax}\} \text{ es una base del espacio solución de la ecuación } y'' - 2ay' + a^2y = 0}$

(c) $\{e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\}$, $y'' - 2ay' + (a^2+b^2)y = 0$, analogo al (a)

- $y(x) = e^{ax}\cos(bx)$ $\quad y'(x) = ae^{ax}\cos(bx) - e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\,b$

$$y''(x) = a^2e^{ax}\cos(bx) - ae^{ax}\operatorname{sen}(bx)b - ae^{ax}\operatorname{sen}(bx)b - e^{ax}\cos(bx)b^2$$
$$= e^{ax}\cos(bx)(a^2-b^2) - 2ae^{ax}\operatorname{sen}(bx)b$$

$$e^{ax}\cos(bx)(a^2-b^2) - 2ae^{ax}\operatorname{sen}(bx)b - 2a\left(ae^{ax}\cos(bx) - e^{ax}\operatorname{sen}(bx)b\right) + (a^2+b^2)e^{ax}\cos(bx) = 0$$
$$e^{ax}\cos(bx)a^2 + a^2e^{ax}\cos(bx) - \cancel{b^2e^{ax}\cos(bx)} + \cancel{b^2e^{ax}\cos(bx)} - \cancel{2ae^{ax}\operatorname{sen}(bx)b} + \cancel{2ae^{ax}\operatorname{sen}(bx)b} - 2a^2e^{ax}\cos(bx) = 0$$
$$2a^2e^{ax}\cos(bx) - 2a^2e^{ax}\cos(bx) = 0$$
$$0 = 0 \checkmark$$

$y(x) = e^{ax}\operatorname{sen}(bx)$ $\quad y'(x) = ae^{ax}\operatorname{sen}(bx) + e^{ax}\cos(bx)b$

$$y''(x) = a^2e^{ax}\operatorname{sen}(bx) + ae^{ax}\cos(bx)b + ae^{ax}\cos(bx)b - e^{ax}\operatorname{sen}(bx)b^2$$

$$a^2e^{ax}\operatorname{sen}(bx) + ae^{ax}\cos(bx)b + ae^{ax}\cos(bx)b - e^{ax}\operatorname{sen}(bx)b^2 - 2a\left(ae^{ax}\operatorname{sen}(bx) + e^{ax}\cos(bx)b\right) + (a^2+b^2)e^{ax}\operatorname{sen}(bx) = 0$$
$$a^2e^{ax}\operatorname{sen}(bx) + a^2e^{ax}\operatorname{sen}(bx) + \cancel{2ae^{ax}\cos(bx)b} - \cancel{2ae^{ax}\cos(bx)b} - 2a^2e^{ax}\operatorname{sen}(bx) - \cancel{e^{ax}\operatorname{sen}(bx)b^2} + \cancel{b^2e^{ax}\operatorname{sen}(bx)} = 0$$
$$2a^2e^{ax}\operatorname{sen}(bx) - 2a^2e^{ax}\operatorname{sen}(bx) = 0$$
$$0 = 0 \checkmark$$

- Dado que el conjunto sólo tiene 2 elementos y uno no es multiplo escalar de otro, podemos decir que son Li

$\boxed{\text{El conjunto } \{e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\} \text{ es una base del espacio solución de la ecuación } y'' - 2ay' + (a^2+b^2)y = 0}$

Ejercicio 1.18

martes, 14 de septiembre de 2021 19:07

[Ej 17]

1. $\{e^{ax}, e^{bx}\}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, es una base del conjunto solución de $y'' - (a+b)y' + ab\,y = 0$
2. $\{e^{ax}, xe^{ax}\}$ con $a \in \mathbb{R}$ es una base del conjunto solución de $y'' - 2ay' + a^2 y = 0$
3. $\{e^{ax}\cos(bx), e^{ax}\operatorname{sen}(bx)\}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, es una base del conjunto solución de $y'' - 2ay' + (a^2+b^2)y = 0$

(a) $y'' + 4y' - 5y = 0$

$$1 \begin{cases} 4 = -(a+b) \to -4 - a = b \\ -5 = ab \to -5 = a(-4-a) \end{cases}$$

$-5 = -4a - a^2$

$a^2 + 4a - 5 = 0 \to a_1 = 1,\ a_2 = -5$

Dos opciones: i) $a = 1 \wedge b = -5 \longrightarrow \{e^x, e^{-5x}\}$

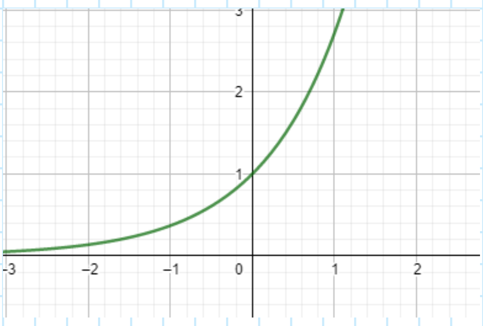
ii) $a = -5 \wedge b = 1 \longrightarrow \{e^{-5x}, e^x\}$

generan el mismo conjunto solución, uso solo una de las dos

Todas las soluciones de $y'' + 4y' - 5y = 0$ son de la forma $y(x) = \lambda e^x + \beta e^{-5x}$, según enunciado $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

$$\begin{cases} y(0) = \lambda e^0 + \beta e^{-5.0} = 1 \to \lambda + \beta = 1 \to \lambda = 1 - \beta \to \lambda = 1 \\ y'(x) = \lambda e^x - 5\beta e^{-5x} \to y'(0) = \lambda e^0 - 5\beta e^{-5.0} = 1 \to \lambda - 5\beta = 1 \to 1 - \beta - 5\beta = 1 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{y(x) = e^x}$$



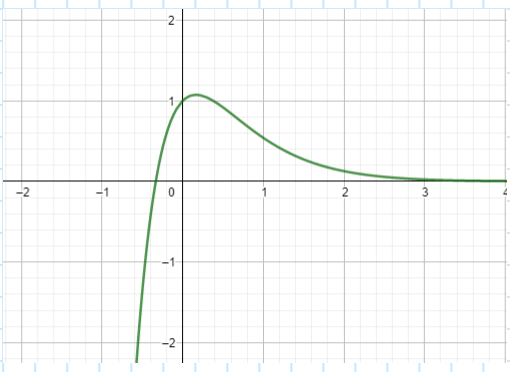
(b) $y'' + 4y' + 4y = 0$

$$2 \begin{cases} 4 = -2a \to a = -2 \\ 4 = a^2 \to a = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow a = -2 \longrightarrow \{e^{-2x}, xe^{-2x}\}$$

Todas las soluciones de $y'' + 4y' + 4y = 0$ son de la forma $y(x) = \lambda e^{-2x} + \beta x e^{-2x}$, según $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

$$\begin{cases} y(0) = \lambda e^{-2.0} + \beta . 0 . e^{-2.0} = 1 \to \lambda = 1 \\ y'(x) = -2\lambda e^{-2x} + \beta e^{-2x} - 2\beta x e^{-2x} \to y'(0) = -2\lambda e^{-2.0} + \beta e^{-2.0} - 2\beta . 0\, e^{-2.0} = 1 \to -2\lambda + \beta = 1 \to \beta = 3 \end{cases}$$

$$\boxed{y(x) = e^{-2x} + 3xe^{-2x}}$$



(c) $y'' + 4y = 0$

$$\begin{cases} 0 = -2a \to a = 0 \\ 4 = a^2 + b^2 \to b = \pm 2 \end{cases}$$

Dos opciones: i) $a = 0 \wedge b = 2 \longrightarrow \{\cos(2x), \operatorname{sen}(2x)\}$

ii) $a = 0 \wedge b = -2 \longrightarrow \{\cos(-2x), \operatorname{sen}(-2x)\}$

i) $y(x) = \lambda \cos(2x) + \beta \operatorname{sen}(2x)$

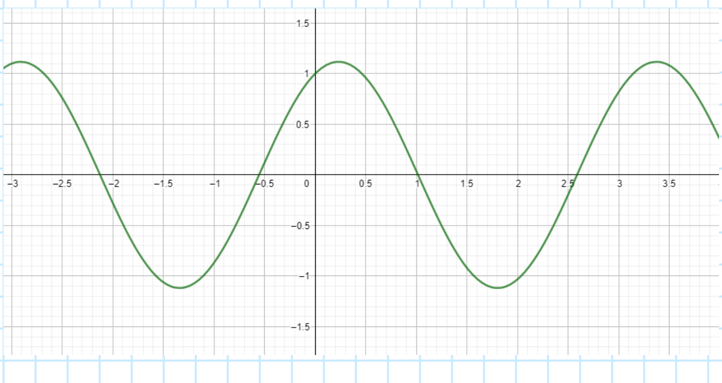
$$\begin{cases} y(0) = \lambda \cos(2.0) + \beta \operatorname{sen}(2.0) = 1 \to \lambda = 1 \\ y'(x) = -2\lambda \operatorname{sen}(2x) + 2\beta \cos(2x) \to y'(0) = 2\beta = 1 \to \beta = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ii) $y(x) = \lambda \cos(-2x) + \beta \operatorname{sen}(-2x)$

$$\begin{cases} y(0) = \lambda \cos(-2.0) + \beta \operatorname{sen}(-2.0) = 1 \to \lambda = 1 \\ y'(x) = 2\lambda \operatorname{sen}(-2x) - 2\beta \cos(-2x) \to y'(0) = -2\beta = 1 \to \beta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$y(x) = \cos(-2x) - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(-2x) = \cos(2x) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)$

$$\boxed{y(x) = \cos(2x) + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x)}$$



Ejercicio 1.19

jueves, 16 de septiembre de 2021 13:15

a) El sistema $Ax=b$ es compatible si $\exists x$ tal que $Ax=b$, es decir, que exista solución. Luego, $Ax=b$ tiene solución si y solo si $b \in Col(A)$

$$\lambda\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-7\\0\end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc:c}1&1&1\\2&-1&-7\\3&2&0\end{array}\right] \begin{matrix}F_2-2F_1\to F_2\\F_3-3F_1\to F_3\end{matrix} \left[\begin{array}{cc:c}1&1&1\\0&-3&-9\\0&-1&-3\end{array}\right] \xrightarrow{-3F_3+F_2\to F_3} \left[\begin{array}{cc:c}1&1&1\\0&-3&-9\\0&0&0\end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{3}F_3} \left[\begin{array}{cc:c}1&1&1\\0&1&3\\0&0&0\end{array}\right] \to \begin{cases}\lambda+\beta=1 \to \lambda=-2\\ \beta=3\\ 0=0\end{cases}$$

$$b=-2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1\\-1\\2\end{bmatrix},\quad b\in Col(A).$$

$\boxed{\text{El sistema es compatible}}$

b) El sistema $Ax=b$ no puede tener una única solución. Recordar que las soluciones del sistema son del tipo:

$$x=\underbrace{x_p}_{\in Col(A^T) = Fil(A)}+\underbrace{x_h}_{\in Nul(A)} \quad\to\quad \text{Demostración: } \begin{aligned} &Ax=b\\ &A(x_p+x_h)=b\\ &Ax_p+\underbrace{Ax_h}_{=0}=b \to Ax_p=b\end{aligned}$$

Recordar que $Nul(A)$ tiene infinitos vectores, por lo tanto, $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Hay infinitas soluciones al sistema}}$

Ejercicio 1.20

jueves, 16 de septiembre de 2021 13:57

nul (A) ? $x \in \mathbb{C}^{2 \nearrow n}$ / $Ax = 0$ $\quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 - iF_1 \to F_2} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + i x_2 = 0 \rightarrow x_1 = -i x_2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} -ix_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{nul}(A) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$$

nul (A^T) ? $x \in \mathbb{C}^{2 \nearrow m}$ / $A^T x = 0$ $\quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $A^T = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 + i x_2 = 0 \rightarrow x_1 = -i x_2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$x = \begin{bmatrix} -ix_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{nul}(A^T) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$$

Col (A) ! gen $\{[1 \ i]^T, [i \ -1]^T\}$ → si bien genera el subespacio Col(A), no sabemos si es una base ya que uno puede ser CL del otro.

lo pide el enunciado

Algoritmo espacio columnas:

1.- $\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$ 2.- $\begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 3.- $\{[1 \ i]^T\}$ 4.- $B = \{[1 \ i]\}$

$$\boxed{B_{Col(A)} = \{[1 \ i]^T\}}$$

fil (A) ? gen $\{[1 \ i]^T, [i \ -1]^T\}$ → el enunciado pide una base

$=$ col(A^T)

Algoritmo espacio columnas

1.- $\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}$ 2.- $\begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 3.- $\{[1 \ i]^T\}$ 4.- $B = \{[1 \ i]\}$

$$\boxed{B_{fil(A)} = \{[1 \ i]^T\}}$$

Encontrar todas las soluciones de $Ax = b$ con $b = \begin{bmatrix} 2-3i \\ 3+2i \end{bmatrix}$

Si existe b, $b \in Col(A)$:

$$\gamma \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3i \\ 3+2i \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{c|c} 1 & 2-3i \\ i & 3+2i \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 - iF_1} \left[\begin{array}{c|c} 1 & 2-3i \\ 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} \gamma = 2-3i \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Truco: $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} [2-3i] = \begin{bmatrix} 2-3i \\ 3+2i \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2-3i \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{esta es la solución particular}} = \begin{bmatrix} 2-3i \\ 3+2i \end{bmatrix}$$

Todas las soluciones son de la forma $Sol = x_p + \text{nul}(A)$

$$\boxed{Sol = \begin{bmatrix} 2-3i \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Otra forma

$$Ax = b \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & i & 2-3i \\ i & -1 & 3+2i \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 - iF_1 \to F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & i & 2-3i \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} x_1 + i x_2 = 2-3i \rightarrow x_1 = 2-3i - i x_2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

SOL

$$\begin{bmatrix} 2-3i - i x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3i \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1.21

jueves, 16 de septiembre de 2021 15:22

a)

$Nul(A)$? $x \in \mathbb{R}^5 \,/\, Ax=0$

$$\begin{bmatrix}1&2&0&4&0\\1&3&5&2&1\\2&3&-5&10&0\\2&4&0&8&1\end{bmatrix}\begin{matrix}F_2-F_1\to F_2\\F_3-2F_1\to F_3\\F_4-2F_1\to F_4\end{matrix}\begin{bmatrix}1&2&0&4&0\\0&1&5&-2&1\\0&-1&-5&2&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{matrix}F_2-F_4\to F_2\\F_1-2F_2\to F_1\\F_3+F_2\to F_3\\F_3\leftrightarrow F_2\end{matrix}\begin{bmatrix}1&0&-10&8&0\\0&1&5&-2&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{cases}x_1-10x_3+8x_4=0\\x_2+5x_3-2x_4=0\\x_5=0\end{cases}$$

$$\to x=\begin{bmatrix}10x_3-8x_4\\-5x_3+2x_4\\x_3\\x_4\\0\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}10\\-5\\1\\0\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}-8\\2\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\boxed{B_{nul(A)}=\{[10\ -5\ 1\ 0\ 0]^T,[-8\ 2\ 0\ 1\ 0]^T\}}$$

$Nul(A^T)$? $x \in \mathbb{R}^4 \,/\, A^Tx=0$

$$\begin{bmatrix}1&1&2&2\\2&3&3&4\\0&5&-5&0\\4&2&10&8\\0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{matrix}F_2-2F_1\to F_2\\F_4-4F_1\to F_4\end{matrix}\begin{bmatrix}1&1&2&2\\0&1&-1&0\\0&5&-5&0\\0&-2&2&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{matrix}F_3-5F_2\to F_3\\F_4+2F_2\to F_4\\F_5-F_2\to F_5\end{matrix}\begin{bmatrix}1&1&2&2\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\begin{matrix}F_3\leftrightarrow F_5\\F_1-F_2\to F_1\end{matrix}\begin{bmatrix}1&0&3&2\\0&1&-1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{matrix}F_1-3F_3\to F_1\\F_2+F_3\to F_2\end{matrix}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{cases}x_1-x_4=0\\x_2+x_4=0\\x_3+x_4=0\end{cases}$$

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_4\\-x_4\\-x_4\\x_4\end{bmatrix}=x_4\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\boxed{B_{nul(A^T)}=\{[1\ -1\ -1\ 1]^T\}}$$

$Col(A)$? gen $\{[1\ 1\ 2\ 2]^T,[2\ 3\ 3\ 4]^T,[0\ 5\ -5\ 0]^T,[4\ 2\ 10\ 8]^T,[0\ 1\ 0\ 1]^T\}$

y para una base de Col(A) necesito que sean L.I.

Algoritmo espacio columna

1_ $\begin{bmatrix}1&2&0&4&0\\1&3&5&2&1\\2&3&-5&10&0\\2&4&0&8&1\end{bmatrix}$ 2_ $\begin{bmatrix}1&0&-10&8&0\\0&1&5&-2&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$ 3_ $\{[1\ 1\ 2\ 2]^T,[2\ 3\ 3\ 4]^T,[0\ 1\ 0\ 1]^T\}$

$$\boxed{B_{Col(A)}=\{[1\ 1\ 2\ 2]^T,[2\ 3\ 3\ 4]^T,[0\ 1\ 0\ 1]^T\}}$$

$Fil(A)=Col(A^T)$? gen $\{[1\ 2\ 0\ 4\ 0]^T,[1\ 3\ 5\ 2\ 1]^T,[2\ 3\ -5\ 10\ 0]^T,[2\ 4\ 0\ 8\ 1]^T\}$

Algoritmo espacio columna

1_ $\begin{bmatrix}1&1&2&2\\2&3&3&4\\0&5&-5&0\\4&2&10&8\\0&1&0&1\end{bmatrix}$ 2_ $\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 3_ $\{[1\ 2\ 0\ 4\ 0]^T,[1\ 3\ 5\ 2\ 1]^T,[2\ 3\ -5\ 10\ 0]^T\}$

$$\boxed{B_{fil(A)}=\{[1\ 2\ 0\ 4\ 0]^T,[1\ 3\ 5\ 2\ 1]^T,[2\ 3\ -5\ 10\ 0]^T\}}$$

b) $b=[3\ 5\ 5\ 7]^T$ si $\exists x\in\mathbb{R}^5 \,/\, Ax=b \leftrightarrow b\in Col(A)$

$$a\begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}2\\3\\3\\4\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\5\\5\\7\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\1&3&1&5\\2&3&0&5\\2&4&1&7\end{array}\right]\begin{matrix}F_2-F_1\to F_2\\F_3-2F_1\to F_3\\F_4-2F_1\to F_4\end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&0&3\\0&1&1&2\\0&-1&0&-1\\0&0&1&1\end{array}\right]\begin{matrix}F_1+2F_3\to F_1\\F_2+F_3\to F_2\end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&0&1&1\\0&-1&0&-1\\0&0&1&1\end{array}\right]\begin{matrix}-F_3\\F_3\leftrightarrow F_2\\F_4-F_3\to F_4\end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right]\to\begin{cases}a=1\\b=1\\c=1\\0=0\end{cases}$$

Uso Truco:

$$\begin{bmatrix}1&2&0\\1&3&1\\2&3&0\\2&4&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\5\\5\\7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&4&0\\1&3&5&2&1\\2&3&-5&10&0\\2&4&0&8&1\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix}}_{x_p}=\begin{bmatrix}3\\5\\5\\7\end{bmatrix}$$

$SOL = x_p + nul(A)$

$$\boxed{SOL=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}10\\-5\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}-8\\2\\0\\1\\0\end{bmatrix},\ \lambda,\beta\in\mathbb{R}}$$

c) Del punto b) conozco la solución general. Ahora busco los $x \,/\, Ax=B$, $x\in SOL \wedge x\in fil(A)$

Sean $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ y $b\in \mathrm{col}(A)$.

En lo que sigue mostramos un método para hallar el único $x_f\in \mathrm{fil}(A)$ tal que $Ax=b$.

1. Determinar una base $B_f=\{f_1,f_2,\dots,f_r\}$ del espacio $\mathrm{fil}(A)$.
2. Escribir $x_f=\sum_{i=1}^r \xi_i f_i$.
3. Observar que

$$Ax_f=A\left(\sum_{i=1}^r\xi_i f_i\right)=\sum_{i=1}^r\xi_i Af_i=A\underbrace{[f_1\ f_2\ \cdots\ f_r]}_{F\in\mathbb{R}^{n\times r}}\underbrace{\begin{bmatrix}\xi_1\\\xi_2\\\vdots\\\xi_r\end{bmatrix}}_{\xi\in\mathbb{R}^r}$$

4. Resolver el sistema $AF\xi=b$.
5. Si $\xi_a\in\mathbb{R}^r$ es la única solución del sistema $AF\xi=b$, entonces $x_f=F\xi_a$.

Podría hacer esto pero lo voy a hacer de otra forma

$$\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix}+x_1\begin{bmatrix}10\\-5\\1\\0\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-8\\2\\0\\1\\0\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}1\\2\\0\\4\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}1\\3\\5\\2\\1\end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix}2\\3\\-5\\10\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}1+10x_1-8x_2=x_3+x_4+2x_5\\1-5x_1+2x_2=2x_3+3x_4+3x_5\\x_1=5x_4-5x_5\\x_2=4x_3+2x_4+10x_5\\1=x_4\end{cases}\to\begin{cases}-10x_1+8x_2+x_3+x_4+2x_5=1\\5x_1-2x_2+2x_3+3x_4+3x_5=1\\-x_1+5x_4-5x_5=0\\-x_2+4x_3+2x_4+10x_5=0\\x_4=1\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}-10&8&1&1&2&1\\5&-2&2&3&3&1\\-1&0&0&5&-5&0\\0&-2&4&2&10&0\\0&0&0&1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\text{Con python}}$$

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix}-10&8&1&1&2&1\\5&-2&2&3&3&1\\-1&0&0&5&-5&0\\0&-2&4&2&10&0\\0&0&0&1&0&1\end{pmatrix}$

Result

$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&\frac{19}{72}\\0&1&0&0&0&\frac{17}{40}\\0&0&1&0&0&-\frac{239}{90}\\0&0&0&1&0&1\\0&0&0&0&1&\frac{341}{360}\end{pmatrix}$

$$\to\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix}+\frac{19}{72}\begin{bmatrix}10\\-5\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\frac{17}{40}\begin{bmatrix}-8\\2\\0\\1\\0\end{bmatrix}=\overbrace{\begin{bmatrix}\frac{43}{180}\\\frac{191}{360}\\\frac{19}{72}\\\frac{17}{40}\\1\end{bmatrix}}^{x}$$

Verificación:

$$\begin{bmatrix}1&2&0&4&0\\1&3&5&2&1\\2&3&-5&10&0\\2&4&0&8&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{43}{180}\\\frac{191}{360}\\\frac{19}{72}\\\frac{17}{40}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\5\\5\\7\end{bmatrix}$$

$$\boxed{x\in SOL\wedge x\in fil(A)\,/\,Ax=B\Rightarrow x=\left[\frac{43}{180}\ \ \frac{191}{360}\ \ \frac{19}{72}\ \ \frac{17}{40}\ \ 1\right]^T}$$

Ejercicio 1.22

viernes, 17 de septiembre de 2021 16:00

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$S_L = \underbrace{[1\ 0\ 0\ 1]^T}_{x_{p_L}} + \underbrace{gen\{[1\ 0\ 0\ {-1}]^T, [0\ 1\ 1\ {-2}]^T\}}_{gen_L}$$

$$S_M = \underbrace{[0\ 1\ 1\ 0]^T}_{x_{p_M}} + \underbrace{gen\{[2\ {-1}\ {-1}\ 0]^T, [-3\ 1\ 1\ 1]^T\}}_{gen_M}$$

Primero verificamos que las soluciones particulares cumplen $A\,x_p = b$
$\rightarrow (x_{p_M}, x_{p_L})$

x_{p_L}:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \checkmark$$

x_{p_M}

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \checkmark$$

Recorda que si

$A.v_1 = 0 \ \wedge \ A.v_2 = 0$

$A(\lambda v_1 + \beta v_2) =$
$\underbrace{A\lambda v_1}_{=0} + \underbrace{A\beta v_2}_{=0} = 0$

Verificamos que ambos generadores generan un x / $A x = 0$

gen_L:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

gen_M:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

Ejercicio 1.23

viernes, 17 de septiembre de 2021 17:21

Teorema: Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times p}$ y $B \in \mathbb{R}^{p\times m}$. Entonces $nul(B) \subseteq nul(AB)$

Demostración: $x \in nul(B) \Rightarrow Bx = 0$ (definición de $nul(B)$)
$\Rightarrow ABx = A.0 = 0$
$\Rightarrow x \in nul(AB)$ (definición de $nul(AB)$)

Teorema: Sea V un K-espacio vectorial y sean S_1 y S_2 dos subespacios de V tal que $dim(S_1) = dim(S_2) = n$ y $S_1 \subseteq S_2$ entonces $S_1 = S_2$

Demostración:

$\{v_1, \dots, v_n\}$ es base de $S_1 \Rightarrow v \in S_2 \ \forall v \in \{v_1, \dots, v_n\}$ porque $S_1 \subseteq S_2$

$\Rightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ es un conjunto LI de n vectores

$\therefore \{v_1, \dots, v_n\}$ es un conjunto de S_2 formado por n vectores LI

Luego, $Dim(S_2) = n \Rightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ es base de S_2

$\therefore S_1 = gen\{v_1, \dots, v_n\} = S_2$

Sabemos que $nul(B) \subseteq nul(AB)$

El $rg(B) = 2 \Rightarrow Dim(nul(B)) = \underset{\text{cantidad de columnas de B}}{4} - \underset{rg(B)}{2} = 2$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3+2F_1\to F_3]{F_2+F_1\to F_2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}F_2]{-F_1,\ F_3-F_2\to F_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1+2F_2\to F_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Dim(nul(AB)) = 2 = Dim(nul(B))$$

Se cumplen todos los Teoremas $\Rightarrow nul(AB) = nul(B)$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \rightarrow x_1 = x_2 - x_4 \\ x_3 + x_4 = 0 \rightarrow x_3 = -x_4 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{B_{nul(B)} = \{[1\ 1\ 0\ 0]^T, [-1\ 0\ -1\ 1]^T\}}$$

Ejercicio 1.24

viernes, 17 de septiembre de 2021 16:51

Teorema: Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tal que $rg(A) = n$. Entonces $Nul(AB) = Nul(B)$

Demostración:

1) Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $rg(A) = n$, entonces A tiene n columnas Li. Por lo tanto, la única solución del sistema $Ax = 0$ es $x = 0$, por lo que $\exists A^{-1}$ tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

2) Ya sabemos que si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, entonces $Nul(B) \subseteq Nul(AB)$

3) Si $x \in Nul(AB)$, entonces $ABx = 0$. Si $\exists A^{-1}$, entonces $\underbrace{A^{-1}A}_{=I}B = A^{-1}0 = 0$. Por lo tanto, en este caso se cumple que $Nul(AB) \subseteq Nul(B)$ porque $\exists A^{-1}$

$\therefore$ Si $Nul(B) \subseteq Nul(AB)$ y $Nul(AB) \subseteq Nul(B)$, entonces $Nul(AB) = Nul(B)$

$Rg(A) = 3 = $

$\underbrace{B \in \mathbb{R}^{3\times 4},\ A \in \mathbb{R}^{3\times 3}}$

se cumple el teorema $\rightarrow Nul(AB) = Nul(B)$

$$AB = \begin{bmatrix} 10 & -10 & -5 & 5 \\ 11 & -11 & -4 & 7 \\ 11 & -11 & -5 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow[f]{\text{pasos}} E_{AB} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x_1 = x_2 - x_4 \\ x_3 = -x_4 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Nul(AB) = gen\left\{[1\ 1\ 0\ 0]^T, [-1\ 0\ -1\ 1]^T\right\} = Nul(B)$$

$$B[1\ 1\ 1\ 1]^T = [0\ 3\ 1]^T \qquad B[1\ 0\ 1\ 0]^T = [5\ 7\ 6]^T$$

$$\lambda B[1\ 1\ 1\ 1]^T = \lambda[0\ 3\ 1]^T \qquad \gamma B[1\ 0\ 1\ 0]^T = \gamma[5\ 7\ 6]^T$$

$$\lambda B[1\ 1\ 1\ 1]^T + \gamma B[1\ 0\ 1\ 0]^T = \lambda[0\ 3\ 1]^T + \gamma[5\ 7\ 6]^T$$

$$B\underbrace{\left(\lambda[1\ 1\ 1\ 1]^T + \gamma[1\ 0\ 1\ 0]^T\right)}_{\text{si } = x_p} = \underbrace{\lambda[0\ 3\ 1]^T + \gamma[5\ 7\ 6]^T}_{= [5\ 1\ 4]^T} \quad \text{entonces}$$

$$Bx_p = [5\ 1\ 4]^T$$

$$\lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 5 & 5 \\ 3 & 7 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 3 & 7 & 1 \\ 0 & 5 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{F_2 - 3F_1 \to F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 4 \\ 0 & -11 & -11 \\ 0 & 5 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{F_3 - 5F_2 \to F_3 \\ F_1 - 6F_2 \to F_1}]{-\frac{1}{11}F_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ \gamma = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$x_p = -2[1\ 1\ 1\ 1]^T + 1 \cdot [1\ 0\ 1\ 0]^T = [-1\ -2\ -1\ -2]^T$$

$$\boxed{SOL = [-1\ -2\ -1\ -2]^T + gen\left\{[1\ 1\ 0\ 0]^T, [-1\ 0\ -1\ 1]^T\right\}}$$

Ejercicios para entregar semana 2

viernes, 17 de septiembre de 2021 19:12

1. Halar una base y determinar la dimensión del subespacio $\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(1) - 2p'(1) + p''(1) = 0\}$.

$P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \rightarrow P(1) = a_2 + a_1 + a_0$

$P'(x) = 2a_2 x + a_1 \rightarrow P'(1) = 2a_2 + a_1$

$P''(x) = 2a_2 \rightarrow P''(1) = 2a_2$

$P(1) - 2P'(1) + P''(1) = 0$

$a_2 + a_1 + a_0 - 2(2a_2 + a_1) + 2a_2 = 0$

$a_2 + a_1 + a_0 - 4a_2 - 2a_1 + 2a_2 = 0$

$-a_1 - a_2 + a_0 = 0 \rightarrow a_0 = a_1 + a_2$

$P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_1 + a_2$
$= a_2(x^2+1) + a_1(x+1)$ → Dado que x^2+1 no es un múltiplo escalar de $x+1$, ambos forman una base de S

$\boxed{B_S = \{x^2+1,\ x+1\}}$ $\boxed{\mathrm{Dim}(S) = 2}$

2. Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -8 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$.

(a) Hallar E_A la matriz escalonada por filas reducida determinada por A.

(b) Hallar una base de $\mathrm{fil}(A)$.

(c) Hallar una base de $\mathrm{nul}(A)$.

(d) Hallar una base de $\mathrm{col}(A)$ y determinar el rango de A.

(e) Determinar para cuáles $b \in \mathbb{R}^3$ el sistema $Ax = b$ admite solución.

(f) Hallar una solución particular del sistema $Ax = b$ para $b = [1\ \ 2\ \ 3]^T$.

(g) Hallar el conjunto de todas las soluciones del sistema $Ax = b$ para $b = [1\ \ 2\ \ 3]^T$.

(A)

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & -8 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}F_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 - 3F_1 \to F_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & 3 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 12 & -9 & \frac{7}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3 - 4F_2 \to F_3]{F_1 + 2F_2 \to F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 & \frac{15}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -\frac{17}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{17}F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 7 & \frac{15}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow[F_1 - 7F_3 \to F_1]{F_2 - 2F_3 \to F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{E_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}}$$

(B) Podemos escalonar la matriz A^T y usar las columnas de A^T que estén en posiciones pivotales de E_{A^T} como base de fil(A) o usar las filas no nulas de E_A como vectores de la base

$$\boxed{B_{fil(A)} = \{[1\ 0\ 2\ 0\ 4]^T, [0\ 1\ 3\ 0\ 2]^T, [0\ 0\ 0\ 1\ \tfrac{1}{2}]^T\}}$$

(C)

De E_A, $\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 4x_5 = 0 \rightarrow x_1 = -2x_3 - 4x_5 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_5 = 0 \rightarrow x_2 = -3x_3 - 2x_5 \\ x_4 + \frac{1}{2}x_5 = 0 \rightarrow x_4 = -\frac{1}{2}x_5 \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_3 - 4x_5 \\ -3x_3 - 2x_5 \\ x_3 \\ -\frac{1}{2}x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{B_{nul(A)} = \{[-2\ -3\ 1\ 0\ 0]^T, [-4\ -2\ 0\ -\tfrac{1}{2}\ 1]^T\}}$$

(D)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -8 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad E_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{B_{Col(A)} = \{[2\ 0\ 3]^T, [-4\ 1\ -2]^T, [6\ 2\ 0]^T\}} \quad \boxed{R_g(A) = 3}$$

(e) El sistema $Ax = b$ admite solución para todos los $b \in \mathbb{R}^3$ de la forma

$$\boxed{b = \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},\ \lambda, \beta, \gamma \in \mathbb{R}}$$

(f)

$b = [1\ \ 2\ \ 3]^T$, si $\exists x / Ax = b$, $b \in Col(A)$, deben existir $a, b, c \in \mathbb{R}$ que cumplan:

$$a\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 - 3F_1 \to F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & -9 & \frac{3}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 - 4F_2 \to F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -17 & -\frac{13}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{1}{17}F_3]{F_1 + 2F_2 \to F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{34} \end{array}\right] \xrightarrow[F_2 - 2F_3 \to F_2]{F_1 - 7F_3 \to F_1}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{31}{17} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{21}{17} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{13}{34} \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} a = \frac{31}{17} \\ b = \frac{21}{17} \\ c = \frac{13}{34} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{31}{17} \\ \frac{21}{17} \\ \frac{13}{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{=} \begin{bmatrix} 2 & -4 & -8 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{31}{17} \\ \frac{21}{17} \\ 0 \\ \frac{13}{34} \\ 0 \end{bmatrix}}_{x_p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Verificamos la solución x_p:

```
J=Matrix([[2,-4,-8,6,3],[0,1,3,2,3],[3,-2,0,0,8]])
x=Matrix(["31/17","21/17",0,"13/34",0])

R= J*x
display(R)
```

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{x_p = [\tfrac{31}{17}\ \ \tfrac{21}{17}\ \ 0\ \ \tfrac{13}{34}\ \ 0]^T}$$

Otra forma de hacerlo:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -4 & -8 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 8 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}F_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -4 & 3 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 0 & 8 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{F_3 - 3F_1 \to F_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & -4 & 3 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 12 & -9 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[F_3 - 4F_2 \to F_3]{F_1 + 2F_2 \to F_1} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 & \frac{15}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -17 & -\frac{17}{2} & -\frac{13}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{17}F_3} \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 & \frac{15}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{13}{34} \end{array}\right] \xrightarrow[F_1 - 7F_3 \to F_1]{F_2 - 2F_3 \to F_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & \frac{31}{17} \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 & \frac{21}{17} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{13}{34} \end{array}\right] \sim \begin{array}{l} x_1 + x_3 + 4x_5 = \frac{31}{17} \\ x_2 + 3x_3 + 2x_5 = \frac{21}{17} \\ x_4 + \frac{1}{2}x_5 = \frac{13}{34} \end{array}$$

→ Digo que $x_4 = 0 \wedge x_5 = 0$, por lo tanto $x_1 = \frac{31}{17}$, $x_2 = \frac{21}{17}$, $x_3 = \frac{13}{34}$ (misma solución que arriba)

(g) Todas las soluciones de $Ax = b$ son de la forma $x = x_p + x_h$, $x_h \in Nul(A)$

$$\boxed{Sol = [\tfrac{31}{17}\ \ \tfrac{21}{17}\ \ 0\ \ \tfrac{13}{34}\ \ 0]^T + \lambda[-2\ -3\ 1\ 0\ 0]^T + \beta[-4\ -2\ 0\ -\tfrac{1}{2}\ 1]^T,\ \lambda, \beta \in \mathbb{R}}$$

Ejercicio 1.25

lunes, 20 de septiembre de 2021 15:57

Conocemos la base canónica de $\mathbb{C}^3$ es $\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ que tiene dimensión 3.

Como B tiene 3 vectores, basta que estos sean Li para que formen una base

$$\begin{bmatrix} 2i & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1+i \\ 0 & 1 & 1-i \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 - 2iF_2 \to F_1} \begin{bmatrix} 0 & 2+2i & 2-2i \\ 1 & -1 & 1+i \\ 0 & 1 & 1-i \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 - 2F_3 \to F_1} \begin{bmatrix} 0 & 2i & 0 \\ 1 & -1 & 1+i \\ 0 & 1 & 1-i \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2 + F_1 \to F_2 \\ F_3 - F_1 \to F_3}]{\frac{1}{2i}F_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 0 & 1-i \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{1-i}F_3} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{Ordeno}]{F_2 - (1+i)F_3 \to F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{SCD} \to \text{única solución el } \bar{0}, \text{ son Li} \longrightarrow \boxed{B \text{ es una base de } \mathbb{C}^3}$$

$$x_1 \begin{bmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1+i \\ 1-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [v]^B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2i & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1+i & 0 \\ 0 & 1 & 1-i & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 - 2iF_2 \to F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2+2i & 2-2i & 1 \\ 1 & -1 & 1+i & 0 \\ 0 & 1 & 1-i & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 - 2F_3 \to F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 2i & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1+i & 0 \\ 0 & 1 & 1-i & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\xrightarrow[F_1 \leftrightarrow F_2]{\frac{1}{2i}F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1+i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}i \\ 0 & 1 & 1-i & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3 - F_2 \to F_3]{F_1 + F_2 \to F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1+i & \frac{1}{2}i \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}i \\ 0 & 0 & 1-i & 1-\frac{1}{2}i \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{1-i}F_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1+i & \frac{1}{2}i \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}i \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4}+\frac{1}{4}i \end{array}\right] \sim$$

$$\xrightarrow{F_1 - (1+i)F_3 \to F_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}i \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4}+\frac{1}{4}i \end{array}\right] \to \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \\ x_2 = \frac{i}{2} \\ x_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}i \end{cases}$$

$$\boxed{[v]^B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} \\ \frac{3}{4} + \frac{i}{4} \end{bmatrix}}$$

Auxiliares

- $-\frac{1}{2i} = -\frac{1}{2i}\frac{i}{i} = \frac{i}{2}$
- $\frac{1-\frac{1}{2}i}{1-i} = \frac{1-\frac{1}{2}i}{1-i}\frac{(1+i)}{(1+i)} = \frac{(1-\frac{1}{2}i)(1+i)}{1 \cancel{+i} \cancel{-i} + 1} = \frac{1+i-\frac{1}{2}i+\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}i$
- $\frac{1}{2}i - (1+i)\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}i\right) = \frac{1}{2}i - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}i - \frac{3}{4}i + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

Otra Forma:

```
[1] #Importar librerías a utilizar

    from sympy import init_printing
    from sympy import Matrix
    from sympy import simplify
    from sympy import symbols
    from sympy import I as i

    init_printing()
```

```
v1 = Matrix([2*i,1,0])
v2 = Matrix([2,-1,1])
v3 = Matrix([0,1+i,1-i])
w = Matrix([1,0,1])
M = Matrix.hstack(v1,v2,v3)

X= M.inv()

Result = X * w
display(Result)
```

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} \\ \frac{3}{4} + \frac{i}{4} \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1.26

lunes, 20 de septiembre de 2021 17:29

a)

$a\,\frac{1}{2}(x-1)(x-2) + b(-x)(x-2) + c\,\frac{1}{2}x(x-1) = 0 \quad , \forall x \in \mathbb{R}!$

$$\left.\begin{array}{l} \text{- En } x=0,\ a\frac{1}{2}(-1)(-2) + b.0 + c\ 0 = 0 \Rightarrow a=0 \\ \text{- En } x=1,\ a.0 + b(-1)(-1) + c\ 0 = 0 \Rightarrow b=0 \\ \text{- En } x=2,\ a.0 + b\ 0 + c\ \frac{1}{2}.2.(1) = 0 \Rightarrow c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Son Li!}$$

$$\boxed{\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{2}(x-1)(x-2)\ ;\ -x(x-2)\ ;\ \frac{1}{2}x(x-1) \right\}}$$

Otra forma: Usar "Herramienta" (Con la base $\{1, x, x^2\}$, los coeficientes y el determinante $\neq 0$)

2.4. Independencia lineal.

Consideramos un conjunto $\mathcal{X} = \{x_i : i \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{R}$ de n números reales distintos dos a dos, y para cada $i \in \mathbb{I}_n$ consideramos $p_i \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ el polinomio definido en (2). Vamos a demostrar que *el conjunto de polinomios*

$$\mathcal{B}_{\mathcal{X}} := \{p_i : i \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{R}_{n-1}[x]$$

es linealmente independiente.

Planteamos la ecuación

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i p_i, \tag{3}$$

con incógnitas $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y tenemos que comprobar que su única solución es la solución trivial. Para cada $j \in \mathbb{I}_n$ la ecuación (3) implica que

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i p_i(x_j) = a_j \underbrace{p_j(x_j)}_{1} + \sum_{i \neq j} a_i \underbrace{p_i(x_j)}_{0} = a_j.$$

Por lo tanto, $a_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{I}_n$. □

Como el conjunto $\mathcal{B}_{\mathcal{X}} := \{p_i : i \in \mathbb{I}_n\}$ posee n polinomios y la dimensión de $\mathbb{R}_{n-1[x]}$ es n, hemos demostrado que vale el siguiente resultado.

b)

Observar, que si $P \in \mathbb{R}_2[x]$ y B es una base de Lagrange, a partir de los valores $\{0, 1, 2\}$, de $\mathbb{R}_2[x]$ Entonces,

$P(x) = a\,\frac{1}{2}(x-1)(x-2) + b(-x)(x-2) + c\,\frac{1}{2}x(x-1)$. Si evaluamos a P en $\{0,1,2\}$

$$\left.\begin{array}{l} P(0) = a\,\frac{1}{2}(-1)(-2) + b.0 + c.0 = a \\ P(1) = a.0 + b(-1)(-1) + c.0 = b \\ P(2) = a.0 + b.0 + c\,\frac{1}{2}.2\ 1 = c \end{array}\right\} \text{Que es el vector de coordenadas de } P \text{ respecto de la base } B \Rightarrow [P]^B = \begin{bmatrix} P(0) \\ P(1) \\ P(2) \end{bmatrix}$$

c)

En base a la observación de (b) podemos encontrar $[P]^B$ con $P(x) = x^2 - x + 1$ haciendo:

$$\left.\begin{array}{l} P(0) = 1 \\ P(1) = 1 \\ P(2) = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow [P]^B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 1.27

lunes, 20 de septiembre de 2021 21:44

(a)

Un conjunto de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$ es una base si y solo si: 1 _ Tiene n elementos ($\mathrm{Dim}(\mathbb{R}_{n-1}[x]) = n$) y 2 _ ninguno de estos es combinación lineal de los otros

Tenemos:

- $X = \{x_i : i \in I_n\}$ un conjunto de n numeros reales
- Para cada $i \in I_n$ sea $p_i(x) \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ el polinomio de grado $n-1$ definido por

$$p_i(x) := \prod_{k \in I_n : k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

$B_X := \{p_i : i \in I_n\} \Rightarrow$ Es un conjunto de n polinomios $\longrightarrow$ Cumple 1

Estudiamos para cada polinomio $p(x) \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ el grado y la cantidad de raices del polinomio:

$$r(x) = p(x) - \sum_{i=1}^{n} p(x_i) \prod_{k \in I_n : k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

Si $p(x) \in \mathbb{R}_{n-1}[x]$ y $B_x\{p_i : i \in I_n\}$ es una base de $\mathbb{R}_{n-1}[x]$, entonces $p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i p_i(x)$.

Sabiendo que $p_i(x_i) = 1 \Rightarrow p(x_i) = \sum_{i=1}^{n} y_i p_i(x_i) = y_i$

Entonces:

(a) $r(x) = \underbrace{p(x) - \sum_{i=1}^{n} \underbrace{p(x_i)}_{= y_i} \underbrace{\prod_{k \in I_n : k \neq i} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}}_{p_i(x)}}_{P(x)} \Rightarrow r(x) = 0 \Rightarrow r(x)$ es el polinomio nulo $\rightarrow$ no aplica la restricción de que tenga hasta $n-1$ raices

(a) Por lo tanto, esto equivale a: $p(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i p_i(x)$

Luego si $P(x)$ es LI entonces $P(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i p_i(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.28

martes, 21 de septiembre de 2021 07:47

(a)

$$\mathcal{E}=\left\{\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}_{v_1},\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}}_{v_2};\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}_{v_3}\right\}\qquad B_2=\left\{\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix};\begin{bmatrix}3\\5\\-6\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\-5\\6\end{bmatrix}\right\}\qquad M_{\mathcal{E}}^{B_2}=\left[[v_1]^{B_2}\ \ [v_2]^{B_2}\ \ [v_3]^{B_3}\right]$$

$$x_1\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}3\\5\\-6\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\-5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&0&1\\3&5&-5&0\\-2&-6&6&0\end{array}\right]\xrightarrow[F_2-3F_1\to F_2]{F_3+2F_1\to F_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&0&1\\0&-4&-5&-3\\0&0&6&2\end{array}\right]\xrightarrow[\frac{1}{6}F_3]{-\frac{1}{4}F_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&0&1\\0&1&\frac{5}{4}&\frac{3}{4}\\0&0&1&\frac{1}{3}\end{array}\right]\xrightarrow{F_2-\frac{5}{4}F_3\to F_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&0&1\\0&1&0&\frac{1}{3}\\0&0&1&\frac{1}{3}\end{array}\right]\xrightarrow{F_1-3F_2\to F_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&\frac{1}{3}\\0&0&1&\frac{1}{3}\end{array}\right]\ \begin{cases}x_1=0\\x_2=\frac{1}{3}\\x_3=\frac{1}{3}\end{cases}$$

$$[v_1]^{B_2}=\left[0\ \ \tfrac{1}{3}\ \ \tfrac{1}{3}\right]^T$$

$$x_1\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}3\\5\\-6\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\-5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&0&0\\3&5&-5&1\\-2&-6&6&0\end{array}\right]\xrightarrow[F_2-3F_1\to F_2]{F_3+2F_1\to F_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&0&0\\0&-4&-5&1\\0&0&6&0\end{array}\right]\xrightarrow[\frac{1}{6}F_3]{-\frac{1}{4}F_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&0&0\\0&1&\frac{5}{4}&-\frac{1}{4}\\0&0&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{F_2-\frac{5}{4}F_3\to F_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&0&0\\0&1&0&-\frac{1}{4}\\0&0&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{F_1-3F_2\to F_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{3}{4}\\0&1&0&-\frac{1}{4}\\0&0&1&0\end{array}\right]\ \begin{cases}x_1=\frac{3}{4}\\x_2=-\frac{1}{4}\\x_3=0\end{cases}$$

$$[v_2]^{B_2}=\left[\tfrac{3}{4}\ \ -\tfrac{1}{4}\ \ 0\right]^T$$

$$x_1\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}3\\5\\-6\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}0\\-5\\6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&0&0\\3&5&-5&0\\-2&-6&6&1\end{array}\right]\xrightarrow[F_2-3F_1\to F_2]{F_3+2F_1\to F_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&0&0\\0&-4&-5&0\\0&0&6&1\end{array}\right]\xrightarrow[\frac{1}{6}F_3]{-\frac{1}{4}F_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&0&0\\0&1&\frac{5}{4}&0\\0&0&1&\frac{1}{6}\end{array}\right]\xrightarrow{F_2-\frac{5}{4}F_3\to F_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&0&0\\0&1&0&-\frac{5}{24}\\0&0&1&\frac{1}{6}\end{array}\right]\xrightarrow{F_1-3F_2\to F_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{5}{8}\\0&1&0&-\frac{5}{24}\\0&0&1&\frac{1}{6}\end{array}\right]\ \begin{cases}x_1=\frac{5}{8}\\x_2=-\frac{5}{24}\\x_3=\frac{1}{6}\end{cases}$$

$$[v_3]^{B_2}=\left[\tfrac{5}{8}\ \ -\tfrac{5}{24}\ \ \tfrac{1}{6}\right]^T$$

$$\boxed{M_{\mathcal{E}}^{B_2}=\begin{bmatrix}0&\frac{3}{4}&\frac{5}{8}\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{4}&-\frac{5}{24}\\\frac{1}{3}&0&\frac{1}{6}\end{bmatrix}}$$

Un vector de $v\in\mathbb{R}^3$ se define $v=a_1[1\ 0\ 0]^T+a_2[0\ 1\ 0]^T+a_3[0\ 0\ 1]^T$, $[v]^{\mathcal{E}}=[a_1\ a_2\ a_3]^T$. Si queremos el vector de coordenadas en B_2:

$$[v]^{B_2}=M_{\mathcal{E}}^{B_2}[v]^{\mathcal{E}}\to\begin{bmatrix}0&\frac{3}{4}&\frac{5}{8}\\\frac{1}{3}&-\frac{1}{4}&-\frac{5}{24}\\\frac{1}{3}&0&\frac{1}{6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\Rightarrow\boxed{[v]^{B_2}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}a_2+\frac{5}{8}a_3\\\frac{1}{3}a_1-\frac{1}{4}a_2-\frac{5}{24}a_3\\\frac{1}{3}a_1+\frac{1}{6}a_3\end{bmatrix}}$$

(B)

$$\mathcal{E}=\{\underbrace{1}_{v_1},\underbrace{x}_{v_2},\underbrace{x^2}_{v_3}\}\qquad B_2=\{1+2x+x^2,\ 2+5x,\ 3+3x+8x^2\}\qquad M_{\mathcal{E}}^{B_2}=\left[[v_1]^{B_2}\ \ [v_2]^{B_2}\ \ [v_3]^{B_2}\right]$$

$$1=\alpha(1+2x+x^2)+\beta(2+5x)+\gamma(3+3x+8x^2)$$
$$1=\alpha+2\beta+3\gamma+(2\alpha+5\beta+3\gamma)x+(\alpha+8\gamma)x^2$$

$$\begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma=1\\2\alpha+5\beta+3\gamma=0\\\alpha+8\gamma=0\end{cases}\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\2&5&3&0\\1&0&8&0\end{array}\right]\xrightarrow[F_3-F_1\to F_3]{F_2-2F_1\to F_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\0&1&-3&-2\\0&-2&5&-1\end{array}\right]\xrightarrow{F_3+2F_2\to F_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&1\\0&1&-3&-2\\0&0&-1&-5\end{array}\right]\to\begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma=1\to\alpha=-40\\\beta-3\gamma=-2\to\beta=13\\-\gamma=-5\to\gamma=5\end{cases}\quad[v_1]^{B_2}=[-40\ \ 13\ \ 5]^T$$

$$x=\alpha(1+2x+x^2)+\beta(2+5x)+\gamma(3+3x+8x^2)$$
$$x=\alpha+2\beta+3\gamma+(2\alpha+5\beta+3\gamma)x+(\alpha+8\gamma)x^2$$

$$\begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma=0\\2\alpha+5\beta+3\gamma=1\\\alpha+8\gamma=0\end{cases}\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\2&5&3&1\\1&0&8&0\end{array}\right]\xrightarrow[F_3-F_1\to F_3]{F_2-2F_1\to F_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&1&-3&1\\0&-2&5&0\end{array}\right]\xrightarrow{F_3+2F_2\to F_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&1&-3&1\\0&0&-1&2\end{array}\right]\to\begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma=0\to\alpha=16\\\beta-3\gamma=1\to\beta=-5\\-\gamma=2\to\gamma=-2\end{cases}\quad[v_2]^{B_2}=[16\ \ -5\ \ -2]^T$$

$$x^2=\alpha(1+2x+x^2)+\beta(2+5x)+\gamma(3+3x+8x^2)$$
$$x^2=\alpha+2\beta+3\gamma+(2\alpha+5\beta+3\gamma)x+(\alpha+8\gamma)x^2$$

$$\begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma=0\\2\alpha+5\beta+3\gamma=0\\\alpha+8\gamma=1\end{cases}\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\2&5&3&0\\1&0&8&1\end{array}\right]\xrightarrow[F_3-F_1\to F_3]{F_2-2F_1\to F_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&1&-3&0\\0&-2&5&1\end{array}\right]\xrightarrow{F_3+2F_2\to F_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\0&1&-3&0\\0&0&-1&1\end{array}\right]\to\begin{cases}\alpha+2\beta+3\gamma=0\to\alpha=9\\\beta-3\gamma=0\to\beta=-3\\-\gamma=1\to\gamma=-1\end{cases}\quad[v_3]^{B_2}=[9\ \ -3\ \ -1]^T$$

$$\boxed{M_{\mathcal{E}}^{B_2}=\begin{bmatrix}-40&16&9\\13&-5&-3\\5&-2&-1\end{bmatrix}}$$

Un vector de $v\in\mathbb{R}_2[x]$ se define $v=a_1 1+a_2x+a_3x^2$. $[v]^{\mathcal{E}}=[a_1\ a_2\ a_3]^T$. Si queremos el vector en B_2:

$$[v]^{B_2}=M_{\mathcal{E}}^{B_2}[v]^{\mathcal{E}}\to\begin{bmatrix}-40&16&9\\13&-5&-3\\5&-2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}\qquad\boxed{[v]^{B_2}=\begin{bmatrix}-40a_1+16a_2+9a_3\\13a_1-5a_2-3a_3\\5a_1-2a_2-a_3\end{bmatrix}}$$

(c)

$$\mathcal{E}=\left\{\underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}}_{v_1},\underbrace{\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}}_{v_2},\underbrace{\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}}_{v_3};\underbrace{\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}}_{v_4}\right\}\qquad B_2=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}1&2\\4&8\end{bmatrix};\begin{bmatrix}1&3\\9&27\end{bmatrix}\right\}$$

Ejercicio 1.29

martes, 21 de septiembre de 2021 13:50

$$V=\begin{bmatrix}5 & 4 & 3\end{bmatrix}^T, \quad B_1=\left\{\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\0\\\frac{4}{5}\end{bmatrix};\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}-\frac{4}{5}\\0\\\frac{3}{5}\end{bmatrix}\right\}, \quad M_{B_1}^{B_2}=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}10 & 10 & -5\\11 & -10 & 2\\2 & 5 & 14\end{bmatrix}, \quad [V]^{B_2}\ ?$$

$$[V]^{B_1}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{bmatrix}^T \quad a_1\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\0\\\frac{4}{5}\end{bmatrix}+a_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+a_3\begin{bmatrix}-\frac{4}{5}\\0\\\frac{3}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\4\\3\end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}\frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} & 5\\0 & 1 & 0 & 4\\\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 3\end{array}\right]\begin{matrix}\frac{5}{3}F_1\\ \\ \frac{5}{4}F_3\end{matrix}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{25}{3}\\0 & 1 & 0 & 4\\1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{15}{4}\end{array}\right]F_3-F_1\rightarrow F_3\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{25}{3}\\0 & 1 & 0 & 4\\0 & 0 & \frac{25}{12} & -\frac{55}{12}\end{array}\right]\frac{12}{25}F_3\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{25}{3}\\0 & 1 & 0 & 4\\0 & 0 & 1 & -\frac{11}{5}\end{array}\right]\sim$$

$$\sim F_1+\frac{4}{3}F_3\rightarrow F_1\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & \frac{27}{5}\\0 & 1 & 0 & 4\\0 & 0 & 1 & -\frac{11}{5}\end{array}\right]\rightarrow\begin{cases}a_1=\frac{27}{5}\\a_2=4\\a_3=-\frac{11}{5}\end{cases} \quad [V]^{B_1}=\begin{bmatrix}\frac{27}{5} & 4 & -\frac{11}{5}\end{bmatrix}^T$$

$$[V]^{B_2}=M_{B_1}^{B_2}[V]^{B_1}=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}10 & 10 & -5\\11 & -10 & 2\\2 & 5 & 14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{27}{5}\\4\\-\frac{11}{5}\end{bmatrix}=$$

```
a = Matrix([[3/5,0,-4/5,5],[0,1,0,4],[4/5,0,3/5,3]])
b = Matrix(["27/5",4,"-11/5"])
c = Matrix([[10,10,-5],[11,-10,2],[2,5,14]])
c = c /15
d = c * b

display(d)
```

$$\begin{bmatrix}7\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\boxed{[V]^{B_2}=\begin{bmatrix}7 & 1 & 0\end{bmatrix}^T}$$

Ejercicio 1.30

martes, 21 de septiembre de 2021 14:29

(a)

$$B_1 := \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix}3\\0\\4\end{bmatrix}}_{v_1} ; \underbrace{\begin{bmatrix}-1\\0\\7\end{bmatrix}}_{v_2} ; \underbrace{\begin{bmatrix}2\\9\\11\end{bmatrix}}_{v_3} \right\} \qquad M_{B_1}^{B_2} = \begin{array}{c}\begin{bmatrix}5 & 5 & 10\\0 & 5 & 5\\0 & 0 & 9\end{bmatrix}\\ \begin{matrix}\downarrow & \downarrow & \downarrow\\ 1 & 2 & 3\end{matrix}\end{array} \qquad B_2\,? \qquad B_2 = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

$$M_{B_1}^{B_2} = \left[[v_1]^{B_2} \; [v_2]^{B_2} \; [v_3]^{B_2} \right] \rightarrow \begin{cases} v_1 = a_1 w_1 + b_1 w_2 + c_1 w_3 \\ v_2 = a_2 w_1 + b_2 w_2 + c_3 w_3 \\ v_3 = a_3 w_1 + b_3 w_2 + c_3 w_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = 5 w_1 + 0 w_2 + 0 w_3 \\ v_2 = 5 w_1 + 5 w_2 + 0 w_3 \\ v_3 = 10 w_1 + 5 w_2 + 9 w_3 \end{cases}$$

$$w_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3\\0\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\0\\\frac{4}{5}\end{bmatrix} \qquad w_2 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1\\0\\7\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\0\\\frac{4}{5}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{4}{5}\\0\\\frac{3}{5}\end{bmatrix} \qquad w_3 = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}2\\9\\11\end{bmatrix} - \frac{10}{9}\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\0\\\frac{4}{5}\end{bmatrix} - \frac{5}{9}\begin{bmatrix}-\frac{4}{5}\\0\\\frac{3}{5}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\boxed{B_2 = \left\{ \begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\0\\\frac{4}{5}\end{bmatrix} ; \begin{bmatrix}-\frac{4}{5}\\0\\\frac{3}{5}\end{bmatrix} ; \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\}}$$

(b) $M_{\mathcal{E}}^{B_2}$? Tenemos $M_{B_1}^{B_2}$ y sabemos que vale $M_{B_1}^{B_2} \cdot M_{\mathcal{E}}^{B_1} = M_{\mathcal{E}}^{B_2}$, También vale $M_{\mathcal{E}}^{B_1} = \left(M_{B_1}^{\mathcal{E}}\right)^{-1}$

$M_{B_1}^{\mathcal{E}} = \left[[v_1]^{\mathcal{E}} \; [v_2]^{\mathcal{E}} \; [v_3]^{\mathcal{E}} \right]$, notar que $v_1 = 3\,[1\,0\,0]^T + 0\,[0\,1\,0]^T + 4\,[0\,0\,1]^T$. Por lo tanto, $[v_1]^{\mathcal{E}} = [3\,0\,4]^T$

$$M_{B_1}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\0 & 0 & 9\\4 & 7 & 11\end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Busco inversa}} \left[\begin{array}{ccc|ccc}3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 9 & 0 & 1 & 0\\4 & 7 & 11 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \begin{matrix}\frac{1}{9}F_2 \\ \\ 3F_3 - 4F_1 \to F_3\end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc}3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{9} & 0\\0 & 25 & 25 & -4 & 0 & 3\end{array}\right] \, 25F_1 + F_3 \to F_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc}75 & 0 & 75 & 21 & 0 & 3\\0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{9} & 0\\0 & 25 & 25 & -4 & 0 & 3\end{array}\right] \begin{matrix}\frac{1}{75}F_1 \\ \\ \frac{1}{25}F_3\end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & \frac{21}{75} & 0 & \frac{3}{75}\\0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{9} & 0\\0 & 1 & 1 & -\frac{4}{25} & 0 & \frac{3}{25}\end{array}\right]$$

$$\begin{matrix}F_1 - F_2 \to F_1 \\ F_3 - F_2 \to F_3\end{matrix} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{7}{25} & \frac{1}{9} & \frac{1}{25}\\0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{9} & 0\\0 & 1 & 0 & -\frac{4}{25} & -\frac{1}{9} & -\frac{3}{25}\end{array}\right] F_3 \leftrightarrow F_2 \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{7}{25} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{25}\\0 & 1 & 0 & -\frac{4}{25} & -\frac{1}{9} & \frac{3}{25}\\0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{9} & 0\end{array}\right] \Rightarrow M_{\mathcal{E}}^{B_1} = \left(M_{B_1}^{\mathcal{E}}\right)^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{7}{25} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{25}\\-\frac{4}{25} & -\frac{1}{9} & \frac{3}{25}\\0 & \frac{1}{9} & 0\end{bmatrix}$$

$$M_{\mathcal{E}}^{B_2} = M_{B_1}^{B_2} \cdot M_{\mathcal{E}}^{B_1} = \begin{bmatrix}5 & 5 & 10\\0 & 5 & 5\\0 & 0 & 9\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\frac{7}{25} & -\frac{1}{9} & \frac{1}{25}\\-\frac{4}{25} & -\frac{1}{9} & \frac{3}{25}\\0 & \frac{1}{9} & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5}\\-\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5}\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boxed{M_{\mathcal{E}}^{B_2} = \begin{bmatrix}\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5}\\-\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5}\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}}$$

Verificación:

```
a = Matrix([[5,5,10],[0,5,5],[0,0,9]])

b = Matrix([["7/25","-1/9","1/25"],["-4/25","-1/9","3/25"],[0,"1/9",0]])

c = a * b
display(c)
d= Matrix([0,0,1])

e= c * d
display(e)

#corroboracion
v= Matrix([["3/5","-4/5",0],[0,0,1],["4/5","3/5",0]])
f= v * e
display(f)
```

$$\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5}\\-\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5}\\0 & 1 & 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{3}{5}\\0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$[x]^{B_2}$? Un vector genérico de $\mathbb{R}^3$ se puede escribir de la forma $x = a_1\,[1\,0\,0]^T + a_2\,[0\,1\,0]^T + a_3\,[0\,0\,1]^T$, es decir $[x]^{\mathcal{E}} = [a_1\; a_2\; a_3]^T$

En consecuencia, $[x]^{B_2} = M_{\mathcal{E}}^{B_2}\,[x]^{\mathcal{E}}$

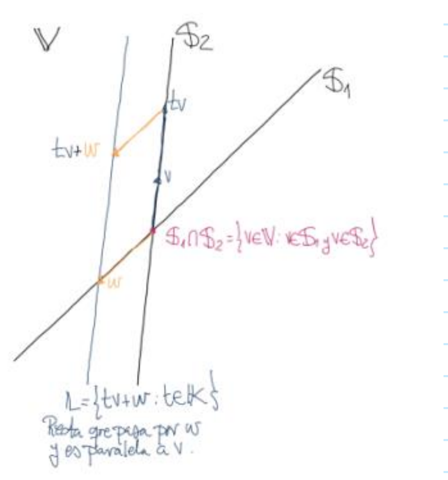
$$[x]^{B_2} = \begin{bmatrix}\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5}\\-\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5}\\0 & 1 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{3}{5}a_1 + \frac{4}{5}a_2\\-\frac{4}{5}a_1 + \frac{3}{5}a_3\\a_3\end{bmatrix} \qquad \boxed{[x]^{B_2} = \begin{bmatrix}\frac{3}{5}a_1 + \frac{4}{5}a_2\\-\frac{4}{5}a_1 + \frac{3}{5}a_3\\a_3\end{bmatrix}}$$

Si quisiera el vector $x = [\overset{a_1}{5}\;\overset{a_2}{5}\;\overset{a_3}{5}]^T$

$[x]^{B_2} = [7\;\; -1\;\; 5]^T$

Ejercicio 1.31

miércoles, 22 de septiembre de 2021 21:38



Como $v \in \mathbb{S}_2$ es el vector director de la recta y el punto de paso es $w \in \mathbb{S}_1 \setminus \mathbb{S}_2$ Es claro que la recta es paralela a $\mathbb{S}_2$. Por lo tanto:

$$\mathbb{L} \cap \mathbb{S}_2 = \emptyset$$

Luego, como el punto de paso es w pero la dirección de la recta es $v \in \mathbb{S}_2 \setminus \mathbb{S}_1$,

$$\mathbb{L} \cap \mathbb{S}_1 = \{w\}$$

Con estas dos observaciones pasamos a demostrar estos dos puntos:

1- $\mathbb{L} \cap \mathbb{S}_2 = \emptyset$. Razonamos por el absurdo.

Si existe $t \in \mathbb{R} \,/\, tv + w \in \mathbb{S}_2$ entonces existe $u \in \mathbb{S}_2 \,/\, tv + w = u$. Despejando w:

$$w = tv - u$$

Como $v, u \in \mathbb{S}_2$, $w \in \mathbb{S}_2$ pero $w \in \mathbb{S}_1 \setminus \mathbb{S}_2$ $(w \notin \mathbb{S}_2)$

2- $\mathbb{L} \cap \mathbb{S}_1 = \{w\}$. Razonamos por el absurdo. Si existe $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $tv + w \in \mathbb{S}_1$, entonces existe $u \in \mathbb{S}_1$ tal que $tv + w = u$ Despejamos v:

$$v = \frac{1}{t}(u - w)$$

Como $u, w \in \mathbb{S}_1$, $v \in \mathbb{S}_1$ pero $v \in \mathbb{S}_2 \setminus \mathbb{S}_1$ $(v \notin \mathbb{S}_1)$

Además, $\mathbb{V}$ no puede ser la unión de dos subespacios propios En particular, es imposible que la unión de dos subespacios sea un subespacio salvo que uno de los dos contenga al otro. Demostración:

La recta $\mathbb{L}$ tiene infinitos puntos porque $v \neq 0$ (y $\mathbb{R}$ tiene infinitos escalares). Si la unión de $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ fuese un subespacio tendríamos que $\mathbb{L} \subset \mathbb{S}_1 \cup \mathbb{S}_2$. Por lo que, $\mathbb{L} \cap (\mathbb{S}_1 \cup \mathbb{S}_2) = \mathbb{L}$ por que $\mathbb{L}$ se forme por combinaciones lineales de vectores de $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$. Pero:

$$\mathbb{L} = \mathbb{L} \cap (\mathbb{S}_1 \cup \mathbb{S}_2) = (\mathbb{L} \cap \mathbb{S}_1) \cup (\mathbb{L} \cap \mathbb{S}_2) = \{w\} \cup \emptyset = \{w\}$$

Lo que lleva a un absurdo.

Ejercicio 1.32

jueves, 23 de septiembre de 2021 07:48

- El mayor subespacio contenido en $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ es $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$. En otras palabras, $\inf\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2\} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$
- El menor subespacio que contiene a $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ es $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$. En otras palabras, $\sup\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2\} = \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$

(a)

$$\mathcal{S}_1 = \{[x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T \in \mathbb{R}^4 .\ x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

$$\mathcal{S}_2 = \left\{[x_1\ x_2\ x_3\ x_4]^T \in \mathbb{R}^4 .\ \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}\right\}, \quad \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \left\{[x_1\ x_2\ x_3\ x_4] \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}\right\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1 - F_2 \to F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_2 - F_3 \to F_2]{F_1 + F_3 \to F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{cases} x_1 - 3x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_4 \\ -3x_4 \\ 2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{B_{\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2} = \{[3\ -3\ 2\ 1]^T\}}$$

La dimensión de un subespacio dado por ecuaciones, es igual a la dimensión del espacio menos la cantidad de ecuaciones linealmente independientes

$\dim(\mathcal{S}_1) = 3$

$\dim(\mathcal{S}_2) = 2$

$\dim(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2) = 3 + 2 - 1 = 4$

$$x_2 = -x_3 - x_4 \to \begin{bmatrix} x_1 \\ -x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \to B_{\mathcal{S}_1} = \{[1\ 0\ 0\ 0]^T, [0\ -1\ 1\ 0]^T, [0\ -1\ 0\ 1]^T\}$$

$$\begin{matrix} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 2x_4 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ 2x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \to B_{\mathcal{S}_2} = \{[-1\ 1\ 0\ 0]^T, [0\ 0\ 2\ 1]^T\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2 \to F_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_4 + F_3 \to F_4]{F_2 - F_3 \to F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_3 - F_4 \to F_3]{F_1 + F_4 \to F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -F_2 \\ -F_3 \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{B_{\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2} = \{[1\ 0\ 0\ 0]^T, [0\ -1\ 1\ 0]^T, [0\ -1\ 0\ 1]^T, [-1\ 1\ 0\ 0]^T\}}$$

(b)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \end{bmatrix} \qquad E_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{S}_1 = \operatorname{col}(A) = \operatorname{gen}\{[-1\ -1\ -1\ -1\ -1]^T, [1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T, [-2\ -4\ -5\ -6\ -6]^T\}$$

$$\mathcal{S}_2 = \operatorname{nul}(A) = \left\{x \in \mathbb{R}^5 \,/\, \begin{cases} x_1 - 3x_3 + 2x_5 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_5 = 0 \\ x_4 - x_5 = 0 \end{cases}\right\} \to \underbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{T} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{T.\,x = 0}$$

$$B_{\mathcal{S}_1} = \{[-1\ -1\ -1\ -1\ -1]^T, [1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T, [-2\ -4\ -5\ -6\ -6]^T\}, \quad v = a[-1\ -1\ -1\ -1\ -1]^T + b[1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T + c[-2\ -4\ -5\ -6\ -6]^T$$

con a, b y c tal que $T v = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(a \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \\ -6 \\ -6 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & -6 \\ -1 & 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolución Python

```
j=Matrix([[1,0,-3,0,2],[0,1,-2,0,1],[0,0,0,1,-1]])
display(j)
print('\n')

f=Matrix([[-1,1,-2],[-1,0,-4],[-1,0,-5],[-1,0,-6],[-1,0,-6]])
display(f)
print('\n')

x=j * f

display(x)
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -4 \\ -1 & 0 & -5 \\ -1 & 0 & -6 \\ -1 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} b + c = 0 \to b = -c \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$v = a[-1\ -1\ -1\ -1\ -1]^T - c[1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T + c[-2\ -4\ -5\ -6\ -6]^T$$

$$v = a[-1\ -1\ -1\ -1\ -1]^T + c[-3\ -4\ -5\ -6\ -6]^T$$

$$\boxed{B_{\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2} = \{[-1\ -1\ -1\ -1\ -1]^T, [-3\ -4\ -5\ -6\ -6]^T\}}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 + 2x_5 = 0 \\ x_2 - 2x_3 + x_5 = 0 \\ x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 3x_3 - 2x_5 \\ x_2 = 2x_3 - x_5 \\ x_4 = x_5 \end{cases} \to \begin{bmatrix} 3x_3 - 2x_5 \\ 2x_3 - x_5 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \to B_{\mathcal{S}_2} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\dim(\mathcal{S}_1) = 3$

$\dim(\mathcal{S}_2) = 2$

$\dim(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2) = 3 + 2 - 2 = 3$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & -4 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -6 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\text{query}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{B_{\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2} = \{[-1\ -1\ -1\ -1\ -1]^T, [1\ 0\ 0\ 0\ 0]^T, [-2\ -4\ -5\ -6\ -6]^T\}}$$

(c)

$$B_{\mathcal{S}_1} = \{[1\ 0\ 2\ 1]^T, [1\ 1\ 1\ 1]^T\} \qquad B_{\mathcal{S}_2} = \{[4\ 2\ 2\ 0]^T, [2\ 0\ 2\ 0]^T\}$$

$$v = a[1\ 0\ 2\ 1]^T + b[1\ 1\ 1\ 1]^T \qquad v = \lambda[4\ 2\ 2\ 0]^T + \beta[2\ 0\ 2\ 0]^T$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ -\lambda \\ -\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \overset{\text{query}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} a - \beta = 0 \to a = \beta \\ b + \beta = 0 \to b = -\beta \\ -\lambda - \frac{1}{2}\beta = 0 \end{cases} \to v = \beta[1\ 0\ 2\ 1]^T - \beta[1\ 1\ 1\ 1]^T = \beta[0\ -1\ 1\ 0]^T$$

$$\boxed{B_{\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2} = \{[0\ -1\ 1\ 0]\}}$$

$\dim(\mathcal{S}_1) = 2$

$\dim(\mathcal{S}_2) = 2$

$\dim(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2) = 2 + 2 - 1 = 3$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{B_{\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2} = \{[1\ 0\ 2\ 1]^T, [1\ 1\ 1\ 1]^T, [4\ 2\ 2\ 0]^T\}}$$

Ejercicio 1.33

jueves, 23 de septiembre de 2021 13:36

Teorema: Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times p}$ y $B \in \mathbb{R}^{p\times m}$. Entonces $\text{Nul}(B) \subseteq \text{Nul}(AB)$

Teorema: Sea V un K-espacio vectorial y sean S_1 y S_2 dos subespacios de V tal que $\dim(S_1) = \dim(S_2) = n$ y $S_1 \subseteq S_2$ entonces $S_1 = S_2$

$\text{Rg}(B) = 2$, $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, $AB = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \text{Dim}(\text{Nul}(B)) = 4-2 = 2$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} F_2+F_1\to F_2 \\ F_3+2F_1\to F_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} F_3-F_2\to F_3 \\ F_1-\frac{2}{3}F_3\to F_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} -F_1 \\ \frac{1}{3}F_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 = 0 \to x_1 = x_2 - x_4 \\ x_3 + x_4 = 0 \to x_3 = -x_4 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\text{Nul}(AB) = \text{gen}\{[1\ 1\ 0\ 0]^T, [-1\ 0\ -1\ 1]^T\}$, $\text{Dim}(\text{Nul}(AB)) = 2 = \text{Dim}(\text{Nul}(B))$, por los teoremas, $\text{Nul}(AB) = \text{Nul}(B)$

$\text{Nul}(B) = \{[1\ 1\ 0\ 0]^T, [-1\ 0\ -1\ 1]^T\}$, $\quad Z = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0, x_3 + x_4 = 0\}$

$$\begin{matrix} x_1 + x_2 = 0 \to x_1 = -x_2 \\ x_3 + x_4 = 0 \to x_3 = -x_4 \end{matrix} \to \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$Z = \text{gen}\{[-1\ 1\ 0\ 0]^T, [0\ 0\ -1\ 1]^T\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} F_2-F_1\to F_2 \\ F_4+F_3\to F_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} F_1+F_2\to F_1 \\ F_3+F_2\to F_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} F_2-F_3\to F_2 \\ F_1-\frac{1}{2}F_3\to F_1 \\ \downarrow \\ \frac{F_3}{2} \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{B_{\text{Nul}(B)+Z} = \{[1\ 1\ 0\ 0]^T, [-1\ 0\ -1\ 1]^T, [-1\ 1\ 0\ 0]^T\}}$$

Ejercicio 1.34

viernes, 24 de septiembre de 2021 14:42

$S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 - x_2 = 0\}$ $\qquad$ $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0\}$

1 _ Busco $S_1 \cap S_2$

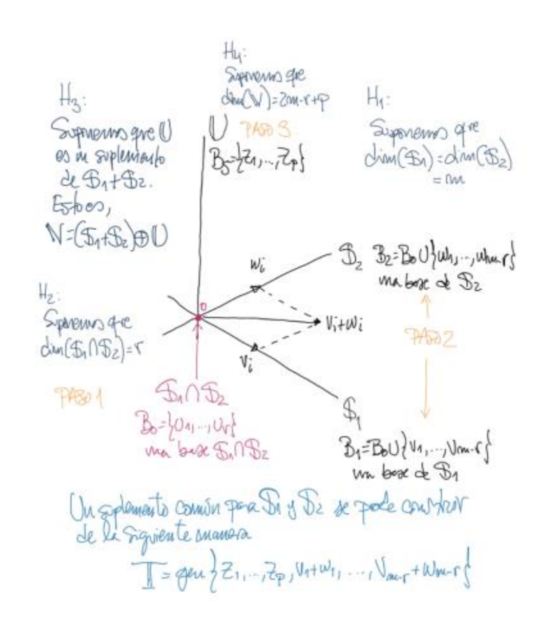
Sea $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $v \in S_1 \cap S_2 \leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow x_1 = 0 \wedge x_2 = 0 \rightarrow S_1 \cap S_2 = \{0\}$, $B_{S_1 \cap S_2} = \emptyset$

2 _ Busco B_2, B_1 usando $B_{S_1 \cap S_2}$

$\text{Dim}(S_1) = 1 \qquad B_{S_1} = \{[1 \ 1]^T\}$

$\text{Dim}(S_2) = 1 \qquad B_{S_2} = \{[-1 \ 1]^T\}$

2.3. Suplementos comunes.



3 _

$B_{S_1+S_2} = B_{S_1} \cup B_{S_2}$ si $\underset{T}{B_{S_1 \cap S_2}} \subset B_{S_1} \wedge B_{S_1 \cap S_2} \subset B_{S_2}$

$\text{Dim}(S_1 + S_2) = \text{Dim}(S_1) + \text{Dim}(S_2) - \text{Dim}(S_1 \cap S_2) = 1 + 1 - 0 = 2$

$\Rightarrow B_{S_1+S_2} = \{[1 \ 1]^T, [-1 \ 1]^T\}$

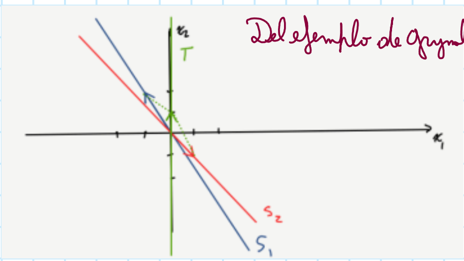
Sea $V = \mathbb{R}^2$, $V = (S_1 + S_2) \oplus U$ siendo U el suplemento de $S_1 + S_2$. Busco B_U

$\text{Dim}(V) = \text{Dim}(S_1 + S_2) + \text{Dim}(U)$

$2 = 2 + \text{Dim}(U) \rightarrow \text{Dim}(U) = \emptyset \wedge B_U = \{0\}$

$T = \text{gen}\{[1 \ 1]^T + [-1 \ 1]^T\} = \text{gen}\{[0 \ 2]^T\}$ $\qquad \boxed{T = \text{gen}\{[0 \ 2]^T\}}$

Este T, no es único



Del ejemplo de Grynberg, cualquier T que en $\mathbb{R}^2$ es una recta, con que no sea la misma que S_1 y S_2, nos sirve.

Por otros $T = \text{gen}\{a_1[1 \ 1]^T + b_1[-1 \ 1]^T\}$ con $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

$T = \text{gen}\{1[1 \ 1]^T + 2[-1 \ 1]^T\}$

$\boxed{T = \text{gen}\{[-1 \ 3]^T\}}$

Ejercicio 1.35

viernes, 24 de septiembre de 2021 15:29

$\$_1 = gen\left\{[1\ 2\ 2\ 1]^T, [0\ 1\ 0\ -1]^T\right\}$ $\$_2 = gen\left\{[1\ 0\ 1\ 2]^T, [1\ 2\ 1\ 0]^T\right\}$

$B_{\$_1} = \left\{[1\ 2\ 2\ 1]^T, [0\ 1\ 0\ -1]^T\right\}$, $Dim(\$_1) = 2$ $B_{\$_2} = \left\{[1\ 0\ 1\ 2]^T, [1\ 2\ 1\ 0]^T\right\}$, $Dim(\$_2) = 2$

$D = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\} \rightarrow Dim(D) = 3$

Busco $\$_1 \cap \$_2$:

$$a\begin{bmatrix}1\\2\\2\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\end{bmatrix} \longrightarrow a\begin{bmatrix}1\\2\\2\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix} - \beta\begin{bmatrix}1\\2\\1\\0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1&0&1&1\\2&1&0&2\\2&0&1&1\\1&-1&2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\-\lambda\\-\beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&1&1\\2&1&0&2\\2&0&1&1\\1&-1&2&0\end{bmatrix} \begin{matrix}F_2-2F_1\to F_2\\F_3-2F_1\to F_3\\F_4-F_1\to F_4\end{matrix} \begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&-2&0\\0&0&-1&-1\\0&-1&1&-1\end{bmatrix} \begin{matrix}F_4+F_2\to F_4\\-F_3\end{matrix} \begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&-2&0\\0&0&1&1\\0&0&-1&-1\end{bmatrix} \begin{matrix}F_1-F_3\to F_1\\F_2+2F_3\to F_2\\F_4+F_3\to F_4\end{matrix} \begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&2\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases}a=0\\b-2\beta=0\rightarrow b=2\beta\\-\lambda-\beta=0\rightarrow\lambda=-\beta\end{cases}$$

$$0\begin{bmatrix}1\\2\\2\\1\end{bmatrix} + 2\beta\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix} = \beta\begin{bmatrix}0\\2\\0\\-2\end{bmatrix} \rightarrow \$_1 \cap \$_2 = gen\left\{\begin{bmatrix}0\\2\\0\\-2\end{bmatrix}\right\}$$

hacemos $B_{\$_1}$ y $B_{\$_2}$ con $\$_1 \cap \$_2$ para que sumarlos sea más fácil encontrar $\$_1 + \$_2$

$B_{\$_1} = \left\{[0\ 2\ 0\ -2]^T, [1\ 2\ 2\ 1]^T\right\}$ $B_{\$_2} = \left\{[0\ 2\ 0\ -2]^T, [1\ 0\ 1\ 2]^T\right\}$

$$\$_1 + \$_2 = gen\left\{[0\ 2\ 0\ -2]^T, [1\ 2\ 2\ 1]^T, [1\ 0\ 1\ 2]^T\right\}$$

$$Dim(\$_1 + \$_2) = Dim(\$_1) + Dim(\$_2) - Dim(\$_1 \cap \$_2) = 2 + 2 - 1 = 3$$

Sea $U \,/\, (\$_1 + \$_2) \oplus U = D$

$$Dim(\$_1 + \$_2) + Dim(U) = Dim(D) \rightarrow Dim(U) = 0 \rightarrow B_U = \emptyset$$

$$\Rightarrow \boxed{T = gen\left\{[2\ 2\ 3\ 3]\right\}}$$

no es solución única, valen todas las soluciones $T = gen\left\{a[1\ 2\ 2\ 1]^T + b[1\ 0\ 1\ 2]^T\right\}$, $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

$$\Rightarrow \boxed{T = gen\left\{[3\ 2\ 4\ 5]^T\right\}}$$

Ejercicio 1.36

viernes, 24 de septiembre de 2021 16:56

$\mathbb{S}_1 = \text{gen}\left\{[1\ 0\ 2\ 1]^T,\ [1\ 1\ 1\ 1]^T\right\}$

$\text{Dim}(\mathbb{S}_1) = 2$

$\mathbb{S}_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0,\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\right\}$ $\quad \text{Dim}(\mathbb{S}_2) = 2$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$? $\quad v \in \mathbb{S}_1,\ v = a[1\ 0\ 2\ 1]^T + b[1\ 1\ 1\ 1]^T \quad \wedge \quad v \in \mathbb{S}_2,\ Av = 0$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \left(a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} 5a = 0 \to a = 0 \\ 3a = 0 \to a = 0 \end{cases}$$

$\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2 = \text{gen}\{[1\ 1\ 1\ 1]^T\} \longrightarrow \text{Dim}(\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2) = 1$

$B_{\mathbb{S}_1} = \left\{[1\ 0\ 2\ 1]^T,\ [1\ 1\ 1\ 1]^T\right\}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{3}F_1 \\ -F_2 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} F_1 + \tfrac{2}{3}F_2 \to F_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x_3 + \frac{2}{3}x_4 \\ x_2 = 2x_3 - x_4 \end{cases}$$

$B_{\mathbb{S}_2} = \left\{[\tfrac{1}{3}\ 2\ 1\ 0]^T,\ [1\ 1\ 1\ 1]^T\right\}$

$\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2 = \text{gen}\left\{[1\ 0\ 2\ 1]^T,\ [1\ 1\ 1\ 1]^T,\ [\tfrac{1}{3}\ 2\ 1\ 0]^T\right\}$

$(\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2) \oplus \mathbb{U} = \mathbb{R}_4$

$\text{Dim}(\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2) + \text{Dim}(\mathbb{U}) = \text{Dim}(\mathbb{R}_4) \to \text{Dim}(\mathbb{U}) = 4 - 3 = 1$ → Falta completar con un vector (Busco algún canónico)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Result

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{7}{9} \end{pmatrix}$$

$B_{\mathbb{U}} = \{[1\ 0\ 0\ 0]^T\}$

$T = \left\{[1\ 0\ 0\ 0]^T,\ [1\ 0\ 2\ 1]^T + [\tfrac{1}{3}\ 2\ 1\ 0]^T\right\}$

$$\boxed{T = \left\{[1\ 0\ 0\ 0]^T,\ [\tfrac{4}{3}\ 2\ 3\ 1]^T\right\}}$$

Todos los T son de la forma $T = \left\{[1\ 0\ 0\ 0]^T,\ a[1\ 0\ 2\ 1]^T + b[\tfrac{1}{3}\ 2\ 1\ 0]^T\right\}$

otro T con $a = 1,\ b = 2 \to$ $\boxed{T = \left\{[1\ 0\ 0\ 0]^T,\ [\tfrac{5}{3}\ 4\ 4\ 1]^T\right\}}$

Ejercicios para entregar semana 3 (parte 1)

jueves, 23 de septiembre de 2021 14:52

1. Sean B_1, B_2, B_3 las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$: $B_1 = \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}^{v_1}, \overbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}}^{v_2}, \overbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}^{v_3} \right\}$; $B_2 = \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}^{w_1}, \overbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}^{w_2}, \overbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}^{w_3} \right\}$; $B_3 = \left\{ \overbrace{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}}^{u_1}, \overbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}}^{u_2}, \overbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}^{u_3} \right\}$.

(a) Para cada pareja de índices $i, j \in \{1,2,3\}$ tal que $i \neq j$, hallar la matriz de cambio de coordenadas de la base B_i en la base B_j.

(b) Para cada $i \in \{1,2,3\}$ sea $v_i \in \mathbb{R}^3$ el vector cuyo vector de coordenadas en la base B_i es $[v_i]^{B_i} = \begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix}$. Hallar, para cada $j \neq i$, el vector de coordenadas de v_i en la base B_j.

[*Sugerencia*: Realizar los cálculos en orden de dificultad creciente.]

2. Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ los subespacios de $\mathbb{R}^6$ definidos por $\mathbb{S}_1 = \text{gen}\{v_1, v_2, v_3\}$ y $\mathbb{S}_2 = \text{nul}(A)$, donde

$v_1 = [1 \ \ 1 \ \ -3 \ \ 7 \ \ 9 \ \ 3]^T, v_2 = [-1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ -1 \ \ -1 \ \ 3]^T, v_3 = [1 \ \ 0 \ \ -1 \ \ 6 \ \ 4 \ \ 1]^T$, y

$$A = \begin{bmatrix} 11 & 10 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hallar una base del subespacio $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2$ y otra del subespacio $\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2$. Indicar si la suma de $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ es directa o no lo es.

1

(a) $M_{B_1}^{B_2} = \left[[v_1]^{B_2} \ [v_2]^{B_2} \ [v_3]^{B_2} \right]$ $\qquad [v_i]^{B_2} = [a_i \ b_i \ c_i]^T \ / \ a_i w_1 + b_i w_2 + c_i w_3 = v_i$

$$\left.\begin{aligned} a_1[1\ 0\ 0]^T + b_1[1\ 1\ 0]^T + c_1[1\ 1\ 1]^T &= [1\ 0\ 0]^T \\ a_2[1\ 0\ 0]^T + b_2[1\ 1\ 0]^T + c_2[1\ 1\ 1]^T &= [0\ 1\ 0]^T \\ a_3[1\ 0\ 0]^T + b_3[1\ 1\ 0]^T + c_3[1\ 1\ 1]^T &= [0\ 0\ 1]^T \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[F_2-F_3\to F_2]{F_1-F_3\to F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&-1\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{F_1-F_2\to F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&-1&0\\0&1&0&0&1&-1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]$$

- $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\b_1\\c_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases}a_1 = 1\\ b_1 = 0\\ c_1 = 0\end{cases}$ $[v_1]^{B_2} = [1\ 0\ 0]^T$

- $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_2\\b_2\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases}a_2 = -1\\ b_2 = 1\\ c_2 = 0\end{cases}$ $[v_2]^{B_2} = [-1\ 1\ 0]^T$

- $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_3\\b_3\\c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases}a_3 = -1\\ b_3 = -1\\ c_3 = 1\end{cases}$ $[v_3]^{B_2} = [-1\ -1\ 0]^T$

$$\boxed{M_{B_1}^{B_2} = \begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}}$$

$M_{B_2}^{B_3} = \left[[w_1]^{B_3} \ [w_2]^{B_3} \ [w_3]^{B_3} \right]$ $\qquad [w_i]^{B_3} = [a_i \ b_i \ c_i]^T \ / \ a_i u_1 + b_i u_2 + c_i u_3 = w_i$

$$\left.\begin{aligned} a_1[1\ -1\ 0]^T + b_1[1\ 1\ 0]^T + c_1[0\ 0\ 1]^T &= [1\ 0\ 0]^T \\ a_2[1\ -1\ 0]^T + b_2[1\ 1\ 0]^T + c_2[0\ 0\ 1]^T &= [1\ 1\ 0]^T \\ a_3[1\ -1\ 0]^T + b_3[1\ 1\ 0]^T + c_3[0\ 0\ 1]^T &= [1\ 1\ 1]^T \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&1&1\\-1&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{F_2+F_1\to F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&1&1\\0&2&0&1&2&2\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&1&1\\0&1&0&\frac{1}{2}&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{F_1-F_2\to F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0&\frac{1}{2}&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right]$$

- $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases}a_1 = \frac{1}{2}\\ b_1 = \frac{1}{2}\\ c_1 = 0\end{cases}$ $[w_1]^{B_3} = [\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ 0]^T$

- $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases}a_1 = 0\\ b_1 = 1\\ c_1 = 0\end{cases}$ $[w_2]^{B_3} = [0\ 1\ 0]^T$

- $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases}a_1 = 0\\ b_1 = 1\\ c_1 = 1\end{cases}$ $[w_3]^{B_3} = [0\ 1\ 1]^T$

$$\boxed{M_{B_2}^{B_3} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}}$$

$M_{B_1}^{B_3}$? $\quad M_{B_1}^{B_3} = M_{B_2}^{B_3} \cdot M_{B_1}^{B_2} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$$\boxed{M_{B_1}^{B_3} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix}}$$

$M_{B_2}^{B_1}$? $\quad M_{B_2}^{B_1} = \left(M_{B_1}^{B_2}\right)^{-1} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&1&0&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{F_1+F_2\to F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&1&0\\0&1&-1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[F_2+F_3\to F_2]{F_1+F_3\to F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&1\\0&1&0&0&1&1\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right] \rightarrow \boxed{M_{B_2}^{B_1} = \begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}}$

$M_{B_3}^{B_2}$? $\quad M_{B_3}^{B_2} = \left(M_{B_2}^{B_3}\right)^{-1} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}\frac{1}{2}&0&0&1&0&0\\\frac{1}{2}&1&1&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[F_2-F_3\to F_2]{F_2-F_1\to F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc}\frac{1}{2}&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&1&-1\\0&0&0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{2F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&0&0\\0&1&0&-1&1&-1\\0&0&0&0&0&1\end{array}\right] \rightarrow \boxed{M_{B_3}^{B_2} = \begin{bmatrix}2&0&0\\-1&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}}$

$M_{B_3}^{B_1}$? $\quad M_{B_3}^{B_1} = \left(M_{B_1}^{B_3}\right)^{-1} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&1&0&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow[2F_1]{F_2-F_1\to F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&-1&0&2&0&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{F_1+F_2\to F_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&1&0\\0&1&0&-1&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right] \rightarrow \boxed{M_{B_3}^{B_1} = \begin{bmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}$

(b) $[v_1]^{B_1} = \begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix}$ $\qquad [v_1]^{B_2}$ y $[v_1]^{B_3}$

$M_{B_1}^{B_2}[v_1]^{B_1} = \begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\-2\\5\end{bmatrix} \rightarrow \boxed{[v_1]^{B_2} = [-1\ -2\ 5]^T}$

$M_{B_1}^{B_3}[v_1]^{B_1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}\\5\end{bmatrix} \quad \boxed{[v_1]^{B_3} = [-\frac{1}{2}\ \frac{5}{2}\ 5]^T}$

$[v_2]^{B_2} = \begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix}$ $\qquad [v_2]^{B_1}$ y $[v_2]^{B_3}$

$M_{B_2}^{B_1}[v_2]^{B_2} = \begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\8\\5\end{bmatrix} \rightarrow \boxed{[v_2]^{B_1} = [10\ 8\ 5]^T}$

$M_{B_2}^{B_3}[v_2]^{B_2} = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\9\\5\end{bmatrix} \rightarrow \boxed{[v_2]^{B_3} = [1\ 9\ 5]^T}$

$[v_3]^{B_3} = \begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix}$ $\qquad [v_3]^{B_1}$ y $[v_3]^{B_2}$

$M_{B_3}^{B_1}[v_3]^{B_3} = \begin{bmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\1\\5\end{bmatrix} \rightarrow \boxed{[v_3]^{B_1} = [5\ 1\ 5]^T}$

$M_{B_3}^{B_2}[v_3]^{B_3} = \begin{bmatrix}2&0&0\\-1&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\-4\\5\end{bmatrix} \rightarrow \boxed{[v_3]^{B_2} = [4\ -4\ 5]^T}$

Ejercicios para entregar semana 3 (parte 2)

jueves, 23 de septiembre de 2021 22:03

2- $\mathcal{S}_1 = \text{gen}\{[1\ 1\ {-3}\ 7\ 9\ 3]^T, [-1\ 1\ 1\ {-1}\ {-1}\ 3]^T, [1\ 0\ {-1}\ 6\ 4\ 1]^T\}$

como $\{v_1, v_2, v_3\}$ son Li $B_{\mathcal{S}_1} = \{[1\ 1\ {-3}\ 7\ 9\ 3]^T, [-1\ 1\ 1\ {-1}\ {-1}\ 3]^T, [1\ 0\ {-1}\ 6\ 4\ 1]^T\}$

$$\begin{bmatrix} 11 & 10 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[11F_3+2F_1 \to F_3]{11F_2+2F_1 \to F_2} \begin{bmatrix} 11 & 10 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 20 & 13 & -2 & 9 & -11 \\ 0 & -35 & -9 & -2 & -2 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow[4F_3+7F_2 \to F_3]{2F_1-F_2 \to F_1} \begin{bmatrix} 22 & 0 & -11 & 0 & -11 & 11 \\ 0 & 20 & 13 & -2 & 9 & -11 \\ 0 & 0 & 55 & -22 & 55 & -33 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{11}F_3]{\frac{1}{11}F_1} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 20 & 13 & -2 & 9 & -11 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 5 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[5F_2-13F_3 \to F_2]{\frac{1}{2}F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 100 & 0 & 16 & -20 & -16 \\ 0 & 0 & 5 & -2 & 5 & -3 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \xrightarrow[\frac{1}{5}F_3]{\frac{1}{100}F_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{25} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{25} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 1 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{F_1+\frac{1}{2}F_3 \to F_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{25} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{25} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 1 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \to \text{nul}(A) = \left\{ x \in \mathbb{R}^6 \,/\, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{25} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{25} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 1 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}}_{T} \cdot [x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6]^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$?

si $v \in \mathcal{S}_1$, $v = a[1\ 1\ {-3}\ 7\ 9\ 3]^T + b[-1\ 1\ 1\ {-1}\ {-1}\ 3]^T + c[1\ 0\ {-1}\ 6\ 4\ 1]^T$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Además, si $v \in \mathcal{S}_2$ entonces $T \cdot v = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{25} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{25} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 1 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \cdot \left(a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 7 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{25} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{25} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 1 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 7 & -1 & 6 \\ 9 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & 0 \\ -\frac{4}{25} & \frac{14}{25} & 0 \\ \frac{7}{5} & -\frac{7}{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} \frac{1}{5}a - \frac{1}{5}b = 0 \to a = b \\ -\frac{4}{25}a + \frac{14}{25}b = 0 \to a = \frac{7}{2}b \\ \frac{7}{5}a - \frac{7}{5}b = 0 \to a = b \end{cases} \to a = 0 \wedge b = 0,\ c \in \mathbb{R}$$

$$v = 0[1\ 1\ {-3}\ 7\ 9\ 3]^T + 0[-1\ 1\ 1\ {-1}\ {-1}\ 3]^T + c[1\ 0\ {-1}\ 6\ 4\ 1]^T = c[1\ 0\ {-1}\ 6\ 4\ 1]^T$$

$$\boxed{B_{\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2} = \{[1\ 0\ {-1}\ 6\ 4\ 1]^T\}}$$

$\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{4}{25} & -\frac{1}{5} & -\frac{4}{25} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & 1 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \cdot [x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5\ x_6]^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} x_1 - \frac{1}{5}x_4 + \frac{1}{5}x_6 = 0 \\ x_2 + \frac{4}{25}x_4 - \frac{1}{5}x_5 - \frac{4}{25}x_6 = 0 \\ x_3 - \frac{2}{5}x_4 + x_5 - \frac{3}{5}x_6 = 0 \end{cases} \to \begin{bmatrix} \frac{1}{5}x_4 - \frac{1}{5}x_6 \\ -\frac{4}{25}x_4 + \frac{1}{5}x_5 + \frac{4}{25}x_6 \\ \frac{2}{5}x_4 - x_5 + \frac{3}{5}x_6 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{25} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_6 \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{25} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{\mathcal{S}_2} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{25} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{4}{25} \\ \frac{3}{5} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{4}{25} & \frac{1}{5} & \frac{4}{25} \\ -3 & 1 & -1 & \frac{2}{5} & -1 & \frac{3}{5} \\ 7 & -1 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \frac{1}{5} & 0 & -\frac{1}{5} \\ 1 & 1 & 0 & -\frac{4}{25} & \frac{1}{5} & \frac{4}{25} \\ -3 & 1 & -1 & \frac{2}{5} & -1 & \frac{3}{5} \\ 7 & -1 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 9 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Result

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{B_{\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 7 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{4}{25} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}}$$

$\boxed{\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 \text{ no es suma directa ya que } \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \neq \{0_{\mathbb{R}^6}\}}$

Ejercicio Verificación Guía 1

viernes, 24 de septiembre de 2021 18:01

Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por

$$\mathbb{S}_1 = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\right\}, \; \mathbb{S}_2 = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\right\}.$$

Construir un subespacio $\mathbb{T}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que

$$\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{S}_2 \oplus \mathbb{T} = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}.$$

Es único? Si la respuesta es negativa, construir otro.

Empiezo buscando $S_1 \cap S_2$:

Si $v \in (S_1 \cap S_2)$, v cumple que $v = a\,[1\ 0\ {-1}\ 0]^T + b\,[0\ {-1}\ 0\ 1]^T$ y $v = \lambda\,[0\ 1\ 1\ 0]^T + \beta\,[1\ 0\ 0\ 1]^T$

$$a\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} \rightarrow a\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix} - \beta\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&-1&1&0\\-1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix} \begin{matrix}F_3+F_1\rightarrow F_3\\F_4+F_3\rightarrow F_4\end{matrix} \begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&-1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix} \begin{matrix}F_4-F_3\rightarrow F_4\\F_2-F_3\rightarrow F_2\end{matrix} \begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&-1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix} -F_2 \begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases}a-\beta=0\rightarrow a=\beta\\ b-\beta=0\rightarrow b=\beta\\ -\lambda-\beta=0\rightarrow \lambda=-\beta\\ 0=0\end{cases}$$

$$\beta\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix} = \beta\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix} \qquad S_1 \cap S_2 = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

Formo B_{S_1} y B_{S_2} sabiendo que $\text{Dim}(B_{S_1}) = \text{Dim}(B_{S_2}) = 2$ → Lo sé viendo los vectores de los generadores, son LI en cada caso y tienen 2 vectores

$B_{S_1} = \{[1\ {-1}\ {-1}\ 1]^T, [1\ 0\ {-1}\ 0]^T\}$ $\qquad$ $B_{S_2} = \{[1\ {-1}\ {-1}\ 1]^T, [0\ 1\ 1\ 0]^T\}$

Como use el vector de la intersección de ambos subespacios, puedo obtener una base de $S_1 + S_2$ planteando $B_{S_1} \cup B_{S_2}$

$$\text{Dim}(S_1+S_2) = \text{Dim}(S_1) + \text{Dim}(S_2) - \text{Dim}(S_1 \cap S_2) = 2+2-1 = 3$$

$$B_{S_1+S_2} = \{[1\ {-1}\ {-1}\ 1]^T, [1\ 0\ {-1}\ 0]^T, [0\ 1\ 1\ 0]^T\}$$

$V = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\} \rightarrow \text{Dim}(V) = 3$

Si U es un suplemento de $S_1 + S_2$ tal que $(S_1+S_2) \oplus U = V$

$$\text{Dim}(S_1+S_2) + \text{Dim}(U) = \text{Dim}(V) \rightarrow \text{Dim}(U) = 0 \rightarrow B_U = \emptyset$$

$$T = \text{gen}\{[1\ 0\ {-1}\ 0]^T + [0\ 1\ 1\ 0]^T\} = \text{gen}\{[1\ 1\ 0\ 0]\}$$

$$\boxed{T = \text{gen}\{[1\ 1\ 0\ 0]\}}$$

No es el único T, vale también cualquier $T = \text{gen}\{a\,[1\ 0\ {-1}\ 0] + b\,[0\ 1\ 1\ 0]\}$, $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

Con $a = 1$ y $b = 2 \Rightarrow$ $\boxed{T = \text{gen}\{[1\ 2\ 1\ 0]^T\}}$

Autoevaluación(parte 1)

domingo, 26 de septiembre de 2021 15:53

2)

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&1\\1&0&1&1\\0&1&1&2\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{array}\right]\rightarrow [x]^B=(0\ 1\ 1)^T$$

$$M_B^C=(M_C^B)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}^{-1}=$$

Input

$$\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{5}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}^{-1}$$ (matrix inverse)

Result

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix}4&3&3\\-1&0&3\\-1&3&0\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix}4&3&3\\-1&0&3\\-1&3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

3)

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix}1&1&2&-1\\-1&2&1&1\\-2&1&-1&2\end{pmatrix}$

Result

$$\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$nul(B)=\begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=$$

$x_1+x_3-x_4=0$

$x_2+x_3=0$

$x_1=x_4-x_3$

$x_2=-x_3$

$$\begin{bmatrix}x_4-x_3\\-x_3\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=x_4\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$B\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\1&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\3&-2\\2&1\end{bmatrix}$$

$$B\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+B\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\lambda B\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+\alpha B\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}}=\lambda\begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix}+\alpha\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-1\\4\end{bmatrix}\rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}2&1&4\\3&-2&-1\\2&1&4\end{array}\right]$$

$\lambda=1,\ \alpha=2$

$$B\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+B\begin{bmatrix}2\\2\\2\\2\end{bmatrix}=B\begin{bmatrix}3\\2\\3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-1\\4\end{bmatrix}$$

$$\mathcal{G}_a=\left\{\begin{bmatrix}a&1\\1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&a\\a&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&2\\2&3\end{bmatrix}\right\}.$$

Elijo la base: $\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}a&1\\1&2\end{bmatrix}=a\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&a\\a&1\end{bmatrix}=1\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+a\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\rightarrow \det\begin{vmatrix}a&1&3\\1&a&2\\2&1&3\end{vmatrix}=3a^2-8a+4=0$$

$$\begin{bmatrix}3&2\\2&3\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$a=\frac{2}{3}$, $a=2$

Ejercicio 2.1

lunes, 27 de septiembre de 2021 15:47

Criterio para verificar linealidad. Por definición, verificar que una aplicación $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$, requiere comprobar la veracidad cada una las dos propiedades por separado:

1) T preserva la suma vectorial (*i.e.*, T es aditiva),
2) T preserva la multiplicación escalar (*i.e.*, T es homogénea).

Simplificación. Si se comprueba que para todo par de vectores $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ y para todo $a \in \mathbb{K}$ vale que

$$T(av_1 + v_2) = aT(v_1) + T(v_2),$$

se deduce inmediatamente que T es una transformación lineal.

(a) $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $T_1([x_1\ x_2\ x_3]^T) = -3x_2 + 2x_3$

1_ $T_1([x_1+y_1\ \ x_2+y_2\ \ x_3+y_3]^T) = -3(x_2+y_2) + 2(x_3+y_3)$

$= -3x_2 - 3y_2 + 2x_3 + 2y_3$

$= (-3x_2 + 2x_3) + (-3y_2 + 2y_3) = T_1([x_1\ x_2\ x_3]^T) + T_1([y_1\ y_2\ y_3]^T)$ ✓

2_ $T_1([ax_1\ ax_2\ ax_3]^T) = -3(ax_2) + 2(ax_3)$

$= a(-3x_2 + 2x_3) = aT_1([x_1\ x_2\ x_3]^T)$ ✓

$\boxed{\Rightarrow \text{Es una transformación lineal}}$

(b) $T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T_2([x_1\ x_2\ x_3]^T) := [-3x_2 + 2x_3\ \ \ 3x_1 - x_3]^T$

1_ $T_2([x_1+y_1\ \ x_2+y_2\ \ x_3+y_3]^T) = [-3(x_2+y_2) + 2(x_3+y_3)\ \ \ 3(x_1+y_1) - (x_3+y_3)]^T$

$= [-3x_2 - 3y_2 + 2x_3 + 2y_3\ \ \ 3x_1 + 3y_1 - x_3 - y_3]^T$

$= [(-3x_2 + 2x_3) + (-3y_2 + 2y_3)\ \ \ (3x_1 - x_3) + (3y_1 - y_3)]^T$

$= [-3x_2 + 2x_3\ \ \ 3x_1 - x_3]^T + [-3y_2 + 2y_3\ \ \ 3y_1 - y_3]^T = T_2([x_1\ x_2\ x_3]^T) + T_2([y_1\ y_2\ y_3]^T)$ ✓

2_ $T_2([ax_1\ ax_2\ ax_3]) = [-3(ax_2) + 2(ax_3)\ \ \ 3(ax_1) - ax_3]^T$

$= [a(-3x_2 + 2x_3)\ \ \ a(3x_1 - x_3)]^T$

$= a[-3x_2 + 2x_3\ \ \ 3x_1 - x_3]^T = aT_2([x_1\ x_2\ x_3]^T)$ ✓

$\boxed{\Rightarrow \text{Es una transformación lineal}}$

(c) $T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T_3([x_1\ x_2\ x_3]^T) := [-3x_2 + 2x_3\ \ \ 3x_1 - x_3\ \ \ -2x_1 + x_2]^T$

1_ $T_3([x_1+y_1\ \ x_2+y_2\ \ x_3+y_3]^T) = [-3(x_2+y_2) + 2(x_3+y_3)\ \ \ 3(x_1+y_1) - (x_3+y_3)\ \ \ -2(x_1+y_1) + (x_2+y_2)]^T$

$= [-3x_2 - 3y_2 + 2x_3 + 2y_3\ \ \ 3x_1 + 3y_1 - x_3 - y_3\ \ \ -2x_1 - 2y_1 + x_2 + y_2]^T$

$= [-3x_2 + 2x_3\ \ \ 3x_1 - x_3\ \ \ -2x_1 + x_2]^T + [-3y_2 + 2y_3\ \ \ 3y_1 - y_3\ \ \ -2y_1 + y_2]^T$

$= T_3([x_1\ x_2\ x_3]^T) + T_3([y_1\ y_2\ y_3]^T)$

$\boxed{\Rightarrow \text{Es una transformación lineal}}$

Ejercicio 2.2

lunes, 27 de septiembre de 2021 16:43

A partir de una $T: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, definimos una base del espacio de salida como $\mathcal{E}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Luego, por propiedad de las T.L. vale que:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T\right) = T\left(x_1\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix} + \dots + x_n\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}\right) = T\left(x_1\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\right) + T\left(x_2\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}\right) + \dots + T\left(x_n\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}\right) =$$

$$= x_1 T\left(\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}}_{e_1}\right) + x_2 T\left(\underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}}_{e_2}\right) + \dots + x_n T\left(\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{bmatrix}}_{e_n}\right) = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ T(e_1) & T(e_2) & \cdots & T(e_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{A_T \in \mathbb{K}^{m \times n}} \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

Todas las transformaciones lineales de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^m$ son de la forma $T(x) = A_T x$, donde $A_T \in \mathbb{K}^{m\times n}$ es la matriz definida por:

$$A_T := \begin{bmatrix} T(e_1) & \cdots & T(e_n) \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2.3

lunes, 27 de septiembre de 2021 22:02

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix}-x_1+x_2+x_3-2x_4+x_5\\ -x_1+3x_3-4x_4+2x_5\\ -x_1+3x_3-5x_4+3x_5\\ -x_1+3x_3-6x_4+4x_5\\ -x_1+3x_3-6x_4+4x_5\end{bmatrix}.$$

(a)

Definición 1.12. *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y sea $T:\mathbb{V}\to\mathbb{W}$ una transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$. El conjunto $\mathrm{Nu}(T)\subset\mathbb{V}$ definido por*

$$\mathrm{Nu}(T) := \{v\in\mathbb{V} : T(v)=0\}$$

se llama el núcleo de T. El conjunto $\mathrm{Im}(T)\subset\mathbb{W}$ definido por

$$\mathrm{Im}(T) := \{w\in\mathbb{W} : \text{existe } v\in\mathbb{V} \text{ tal que } w=T(v)\}$$

se llama la imagen T.

Nota Bene. Nótese que

$$\mathrm{Nu}(T)=T^{-1}(0),$$
$$\mathrm{Im}(T)=T(\mathbb{V}).$$

Ejemplo 1.17. Sea $A\in\mathbb{K}^{m\times n}$ una matriz de $m\times n$ con coeficientes en $\mathbb{K}$, y sea $T_A:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m$ la transformación lineal inducida por la acción de A sobre $\mathbb{K}^n$:

$$T_A(x)=Ax.$$

Poniendo la base canónica $\mathcal{E}=\{e_j : j\in\mathbb{I}_n\}$ en el resultado anterior se obtiene que

$$\mathrm{Im}(T_A)=\mathrm{gen}(T(\mathcal{E}))=\mathrm{gen}\{T(e_j):j\in\mathbb{I}_n\}=\mathrm{gen}\{A_{*j}:j\in\mathbb{I}_n\}=\mathrm{col}(A).$$

Por otra parte,

$$\mathrm{Nu}(T_A)=\{x\in\mathbb{K}^n : T_A(x)=0\}=\{x\in\mathbb{K}^n : Ax=0\}=\mathrm{nul}(A).$$

La matriz A_T es $A_T=\begin{bmatrix}-1&1&1&-2&1\\-1&0&3&-4&2\\-1&0&3&-5&3\\-1&0&3&-6&4\\-1&0&3&-6&4\end{bmatrix} \underset{\uparrow}{\overset{\text{gauss}}{\sim}} \begin{bmatrix}1&0&-3&0&2\\0&1&-2&0&1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1&0&-3&0&2\\0&1&-2&0&1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \begin{cases}x_1-3x_3+2x_5=0 \to x_1=3x_3-2x_5\\ x_2-2x_3+x_5=0 \longrightarrow x_2=2x_3-x_5\\ x_4-x_5=0 \to x_4=x_5\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}3x_3-2x_5\\2x_3-x_5\\x_3\\x_5\\x_5\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}3\\2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\1\\1\end{bmatrix} \qquad \mathrm{Nul}(A_T)=\mathrm{Nu}(T)=\mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix}3\\2\\1\\0\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\boxed{B_{\mathrm{Nu}(T)}=\left\{\begin{bmatrix}3\\2\\1\\0\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\1\\1\end{bmatrix}\right\}}$$

(B)

$$A_T=\begin{bmatrix}-1&1&1&-2&1\\-1&0&3&-4&2\\-1&0&3&-5&3\\-1&0&3&-6&4\\-1&0&3&-6&4\end{bmatrix} \underset{\uparrow}{\overset{\text{gauss}}{\sim}} \begin{bmatrix}1&0&-3&0&2\\0&1&-2&0&1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \to \mathrm{Im}(T)=\mathrm{Col}(A_T)=\mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}-2\\-4\\-5\\-6\\-6\end{bmatrix}\right\}$$

$$\boxed{B_{\mathrm{Im}(T)}=\left\{\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix};\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix};\begin{bmatrix}-2\\-4\\-5\\-6\\-6\end{bmatrix}\right\}}$$

(c)

Proposición 1.18. *Sea $T:\mathbb{V}\to\mathbb{W}$ una transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$. Sea $w\in\mathrm{Im}(T)$ y sea $v_p\in\mathbb{V}$ tal que $T(v_p)=w$. Entonces*

$$T^{-1}(w)=v_p+\mathrm{Nu}(T).$$

$$a\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\\-1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}-2\\-4\\-5\\-6\\-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\\2\\2\end{bmatrix} \to \left[\begin{array}{ccc|c}-1&1&-2&1\\-1&0&-4&2\\-1&0&-5&2\\-1&0&-6&2\\-1&0&-6&2\end{array}\right] \underset{\uparrow}{\overset{\text{gauss}}{\sim}} \begin{bmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix} \quad \begin{cases}a=-2\\b=-1\\c=0\end{cases} \qquad b\in\mathrm{Im}(T)$$

$$\begin{bmatrix}-1&1&-2\\-1&0&-4\\-1&0&-5\\-1&0&-6\\-1&0&-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\\2\\2\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}-1&1&1&-2&1\\-1&0&3&-4&2\\-1&0&3&-5&3\\-1&0&3&-6&4\\-1&0&3&-6&4\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\0\\0\end{bmatrix}}_{v_P}=\begin{bmatrix}1\\2\\2\\2\\2\end{bmatrix}$$

es una solución particular de la ecuación $T(v)=w$. Se concluye que

$$T^{-1}(w)=v_p+\mathrm{Nu}(T)=\sum_{i=k+1}^{n}a_iv_i+\sum_{i=1}^{k}x_iv_i,$$

donde $x_1,\dots,x_k\in\mathbb{K}$.

$$\boxed{\mathrm{Sol}:\ x=\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix}3\\2\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\1\\1\end{bmatrix},\ \lambda,\beta\in\mathbb{R}}$$

Ejercicio 2.4

martes, 28 de septiembre de 2021 13:42

2.4 Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por

$$T(p) = \begin{bmatrix} p(0) & p(1) & p(2) \end{bmatrix}^T.$$

(a) Explicar por qué T es una transformación lineal.

(b) Hallar una base del núcleo de T.

(c) Mostrar que para cada $j \in \mathbb{I}_3$, la ecuación $T(p) = e_j$ admite solución y hallar todas las soluciones de la misma.

(d) Resolver la ecuación $T(p) = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 36 \end{bmatrix}^T$.

(a)

$p = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad q = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 \qquad p+q = (a_3+b_3)x^3 + (a_2+b_2)x^2 + (a_1+b_1)x + (a_0+b_0)$

Debe cumplir dos condiciones para ser TL:

1. $T(p+q) = \begin{bmatrix} p+q\,(0) & p+q\,(1) & p+q\,(2) \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} a_0+b_0 & a_3+b_3+a_2+b_2+a_1+b_1+a_0+b_0 & 8a_3+8b_3+4a_2+4b_2+2a_1+2b_1+a_0+b_0 \end{bmatrix}^T$

$= \begin{bmatrix} a_0 & a_3+a_2+a_1+a_0 & 8a_3+4a_2+2a_1+a_0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} b_0 & b_3+b_2+b_1+b_0 & 8b_3+4b_2+2b_1+b_0 \end{bmatrix}^T$

$= T(p) + T(q)$ ✓

2. $T(\alpha p) = \begin{bmatrix} \alpha a_0 & \alpha a_3+\alpha a_2+\alpha a_1+\alpha a_0 & 8\alpha a_3+4\alpha a_2+2\alpha a_1+\alpha a_0 \end{bmatrix}^T$

$= \alpha \begin{bmatrix} a_0 & a_3+a_2+a_1+a_0 & 8a_3+4a_2+2a_1+a_0 \end{bmatrix}^T$

$= \alpha\, T(p)$ ✓

$\boxed{\Rightarrow \text{Es una Transformación lineal}}$

(b)

$Nu(T) = \{ p \in \mathbb{R}_3[x] \,/\, T(p) = 0_{\mathbb{R}^3} \}$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_3+a_2+a_1+a_0 \\ 8a_3+4a_2+2a_1+a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \overset{\text{gauss}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} a_3 = \frac{1}{2}a_1 \\ a_2 = -\frac{3}{2}a_1 \\ a_0 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}a_1x^3 - \frac{3}{2}a_1x^2 + a_1x = a_1\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x\right)$$

$$\boxed{B_{Nu(T)} = \left\{ \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x \right\}}$$

(c)

Sabiendo del ejercicio 1.26 una base del polinomio de Lagrange $\left\{ \overbrace{\tfrac{1}{2}(x-1)(x-2)}^{P_1} ; \overbrace{-x(x-2)}^{P_2} ; \overbrace{\tfrac{1}{2}x(x-1)}^{P_3} \right\}$ sino planteo la igualdad con $p = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

en $x=0$ da 1
en $x=1 \vee x=2$ da 0

$-T(P) = e_1 \rightarrow e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

P_1 es solución particular ya que $T(P_1) = e_1$

Luego, todas las soluciones de $T(P) = e_1$ son:

$\boxed{\text{Sol} \quad P = \frac{1}{2}(x-1)(x-2) + \lambda\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x\right)}$

en $x=1 \vee x=2$ da 0

$-T(P) = e_2 \rightarrow e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$

P_2 es solución particular ya que $T(P_2) = e_2$

Luego, todas las soluciones de $T(P) = e_2$ son:

$\boxed{\text{Sol} \quad P = -x(x-2) + \lambda\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x\right), \lambda \in \mathbb{R}}$

$-T(P) = e_3 \rightarrow e_3 \; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$

P_3 es solución particular ya que $T(P_3) = e_3$

Luego, todas las soluciones de $T(P) = e_3$ son:

$\boxed{\text{Sol} \quad P = \frac{1}{2}x(x-1) + \lambda\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x\right), \lambda \in \mathbb{R}}$

(d)

Vamos a encontrar un P de la forma $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ tal que $T(P) = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 36 \end{bmatrix}^T$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_3+a_2+a_1+a_0 \\ 8a_3+4a_2+2a_1+a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 36 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 36 \end{array}\right] \overset{\text{gauss}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{21}{4} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 & -\frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} a_3 = \frac{21}{4} + \frac{1}{2}a_1 \\ a_2 = -\frac{9}{4} - \frac{3}{2}a_1 \\ a_0 = 3 \end{cases}$$

$$P = \left(\frac{21}{4} + \frac{1}{2}a_1\right)x^3 + \left(-\frac{9}{4} - \frac{3}{2}a_1\right)x^2 + a_1x + 3 = \frac{21}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + 3 + a_1\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x\right), \; a_1 \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 2.5

martes, 28 de septiembre de 2021 17:31

2.5 Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ la aplicación definida por

$$T(p) = p + (1-x)p'.$$

(**a**) Explicar por qué T está bien definida y es una transformación lineal.

(**b**) Hallar una base del núcleo de T.

(**c**) Hallar una base de la imagen de T.

(**d**) Comprobar que el polinomio $q = 1 + x + x^2 - x^3$ pertenece a la imagen de T y resolver la ecuación $T(p) = q$.

(a) El codominio de T es $\mathbb{R}_3[x]$, defino $P = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, $P' = 3a_3x^2 + 2a_2x + a_1$

$$\underbrace{\underbrace{T(P) = P}_{\in \mathbb{R}_3[x]} + \underbrace{\underbrace{(1-x)}_{\in \mathbb{R}_1[x]}\underbrace{P'}_{\in \mathbb{R}_2[x]}}_{\in \mathbb{R}_3[x]}}_{\in \mathbb{R}_3[x]}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{La transformación está bien definida}}$

Para ser una transformación lineal debe cumplir:

1. $T(P+q) = P + q + (1-x)\underbrace{(P'+q')}_{\text{derivar es una T.L., cumple 1}}$

$= P + q + (1-x)P' + (1-x)q'$

$= (P + (1-x)P') + (q + (1-x)q') = T(P) + T(q)$ ✓

2. $T(\lambda P) = \lambda P + (1-x)\underbrace{\lambda P'}_{\text{derivar es TL, cumple 2}}$

$= \lambda(P + (1-x)) = \lambda T(P)$ ✓

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Es una transformación lineal}}$

(b) $Nu(T) = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \,/\, T(P) = 0\}$

$P + (1-x)P' = 0 \rightarrow a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 + (1-x)(3a_3x^2 + 2a_2x + a_1) = 0$

$a_3x^3 + a_2x^2 + \cancel{a_1x} + a_0 - 3a_3x^3 + 3a_3x^2 - 2a_2x^2 + 2a_2x - \cancel{a_1x} + a_1 = 0$

$-2a_3x^3 + (-a_2 + 3a_3)x^2 + 2a_2x + a_1 + a_0 = 0$

igualdad de polinomios (cada polinomio del polinomio general debe dar cero a partir de sus coeficientes)

$$\begin{cases} -2a_3 = 0 \rightarrow a_3 = 0 \\ -a_2 + 3a_3 = 0 \rightarrow a_2 = 3a_3 = 0 \\ 2a_2 = 0 \\ a_1 + a_0 = 0 \rightarrow a_1 = -a_0 \end{cases}$$

$P = -a_0x + a_0 = a_0(-x+1)$

$\boxed{B_{Nu(T)} = \{-x+1\}}$

(c)

Corolario 1.16. *Sea $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$. Si $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathbb{V}$, entonces*

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{gen}(T(\mathcal{B})).$$

Para la imagen, transformamos una base del espacio de salida. La base puede ser $E = \{1, x, x^2, x^3\}$ o $B = \{\underbrace{-x+1}_{Nu(T)}, x^3, x^2, 1\}$

$T(-x+1) = 0$

$T(x^3) = x^3 + (1-x)3x^2 = x^3 + 3x^2 - 3x^3 = -2x^3 + 3x^2$

$T(x^2) = x^2 + (1-x)2x = x^2 + 2x - 2x^2 = -x^2 + 2x$

$T(1) = 1 + (1-x).0 = 1$

$Im(T) = gen\{-2x^3 + 3x^2, -x^2 + 2x, 1, 0\}$

$\boxed{B_{Im(T)} = \{-2x^3 + 3x^2, -x^2 + 2x, 1\}}$

Teorema 1.22 (Teorema de la dimensión). *Sean $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales, donde $\mathbb{V}$ es de dimensión finita. Si $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ es una transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$, entonces*

$$\dim(\mathbb{V}) = \dim(\mathrm{Nu}(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T)).$$

$dim(\mathbb{R}_3[x]) = 1 + dim(Im(T))$

$4 = 1 + dim(Im(T)) \rightarrow Dim(Im(T)) = 3$

Otra forma de hacerlo, es usar la definición de imagen:

$P + (1-x)P' \Longrightarrow a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 + (1-x)(3a_3x^2 + 2a_2x + a_1)$

$a_3x^3 + a_2x^2 + \cancel{a_1x} + a_0 - 3a_3x^3 + 3a_3x^2 - 2a_2x^2 + 2a_2x - \cancel{a_1x} + a_1$

$-2a_3x^3 + 3a_3x^2 - a_2x^2 + 2a_2x + a_1 + a_0$

$a_3(-2x^3 + 3x^2) + a_2(-x^2 + 2x) + (a_1 + a_0).1$

$B_{Im(T)} = \{-2x^3 + 3x^2, -x^2 + 2x, 1\}$

(D) Si $q \in Im(T)$, q es CL de los polinomios de $B_{Im(T)}$

$a(-2x^3 + 3x^2) + b(-x^2 + 2x) + c = 1 + x + x^2 - x^3$

$-2ax^3 + 3ax^2 - bx^2 + 2bx + c = 1 + x + x^2 - x^3 \rightarrow \begin{cases} -2a = -1 \\ 3a - b = 1 \\ 2b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \rightarrow a = \frac{1}{2},\ b = \frac{1}{2},\ c = 1$

$\boxed{q \in Im(T)}$

• $T(P) = q$, P?

$P + (1-x)P' = q$

$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 + (1-x)(3a_3x^2 + 2a_2x + a_1) = 1 + x + x^2 - x^3$

$-2a_3x^3 + (-a_2 + 3a_3)x^2 + 2a_2x + a_1 + a_0 = 1 + x + x^2 - x^3$

$$\begin{cases} a_1 + a_0 = 1 \rightarrow a_1 = 1 - a_0 \\ 2a_2 = 1 \rightarrow a_2 = \frac{1}{2} \\ -a_2 + 3a_3 = 1 \\ -2a_3 = -1 \rightarrow a_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$P = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + (1 - a_0)x + a_0 = \underbrace{\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x}_{SP} + a_0\underbrace{(-x+1)}_{Nu(T)},\ a_0 \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{SOL: } P = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \lambda(-x+1) \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}}$

Ejercicio 2.6

miércoles, 29 de septiembre de 2021 11:34

2.6 Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} bx_3 - x_2 & x_1 - ax_3 & ax_2 - bx_1 \end{bmatrix}^T,$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\right\}.$$

Comprobar que $y = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}^T \in \operatorname{Im}(T)$ y resolver la ecuación $T(x) = y$.

Trabajo un poco con la expresión de T:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} bx_3 - x_2 \\ x_1 - ax_3 \\ ax_2 - bx_1 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -b \end{bmatrix}$$

Puedo calcular las T de una base del espacio de salida y obtengo un generador de la imagen.

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -b \end{bmatrix} \qquad T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \qquad T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \operatorname{Im}(T) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

Ahora planteo igualdad de subespacios, los generadores deben generar el mismo subespacio

$$\lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -b \end{bmatrix} \qquad \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} \qquad \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ -a \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & -1 & 0 & -1 & b \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -a \\ -1 & 1 & -b & a & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[F_3+F_1 \to F_3]{F_3+F_2 \to F_3} \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & -1 & 0 & -1 & b \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1-b & a-1 & b-a \end{array}\right] \xrightarrow{\text{Para que sea SCD en todos los casos}} \begin{cases} 1-b=0 \to b=1 \\ a-1=0 \to a=1 \\ b-a=0 \to b=a \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Los valores son } a=1 \wedge b=1}$$

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}^T$$

$y \in \operatorname{Im}(T)$?

$$\lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \to \lambda = 2 \wedge \beta = -2 \quad \checkmark \quad y \in \operatorname{Im}(T)$$

$$\begin{bmatrix} x_3 - x_2 \\ x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_3 - x_2 = 2 \\ x_1 - x_3 = 2 \\ x_2 - x_1 = -4 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \end{array}\right] \sim$$

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

Result

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{cases} x_1 - x_3 = 2 \to x_1 = 2 + x_3 \\ x_2 - x_3 = -2 \to x_2 = -2 + x_3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 + x_3 \\ -2 + x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{SOL de } T(x) = y: \quad x = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \lambda \in \mathbb{R}}$$

Ejercicio 2.7

miércoles, 29 de septiembre de 2021 22:15

Dado $\mathcal{V}=\{v_i : i \in I_n\} \subset \mathbb{V}$, podemos definir a $C(\mathcal{V})$ como (7)

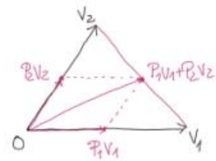
Luego, dado $T: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$

$$T(C(\mathcal{V})) = T\left(\sum_{j=1}^{K} p_j v_j\right) \overset{\text{por prop de TL}}{=} \sum_{j=1}^{K} p_j T(v_j) = C(T(\mathcal{V}))$$

6. Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$ espacio vectorial y sea $\mathcal{V} = \{v_i : i \in \mathbb{I}_n\} \subset \mathbb{V}$ un conjunto de n puntos de $\mathbb{V}$. Se dice que $v \in \mathbb{V}$ es una *combinación lineal convexa* de elementos de $\mathcal{V}$ si

$$v = \sum_{i=1}^{n} p_i v_i$$

para algunos $p_1, p_2, \ldots p_n \in \mathbb{R}^+$ tales que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

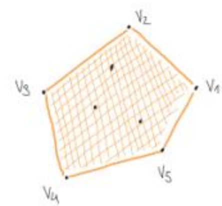


Combinaciones lineales convexas de $\{v_1, v_2\}$. Los puntos de la forma $v = p_1 v_1 + p_2 v_2$, con $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$ y $p_1 + p_2 = 1$ constituyen los puntos del segmento de recta que unen a los puntos v_1 y v_2. En el ejemplo, $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$.

7. El conjunto $C(\mathcal{V})$ de todas las combinaciones lineales convexas de elementos de $\mathcal{V}$

$$C(\mathcal{V}) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i v_i : p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^+ \text{ y } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}$$

se llama la *cápsula convexa* del conjunto $\mathcal{V}$.



Forma de la cápsula convexa $C(\mathcal{V})$ de un conjunto de puntos $\mathcal{V}$ contenidos en un plano: se trata de la región encerrada por un polígono cuyos vértices son algunos de los puntos de $\mathcal{V}$.

Ejercicio 2.8

miércoles, 29 de septiembre de 2021 22:31

2.8 Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $T(x) := Ax$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

y sean e_1, e_2 los vectores de la base canónica $\mathbb{R}^2$: $e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. Hallar y graficar la imagen por T del conjunto $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ definido por

(a) $\mathcal{R} = \{e_1, e_2, e_1 + e_2\}$.

(b) $\mathcal{R}$ es el segmento de recta que une a los puntos e_1 y e_2, es decir, $\mathcal{R} = C(\{e_1, e_2\})$.

(c) $\mathcal{R}$ es el triángulo de vértices $0, e_1, e_2$, es decir, $\mathcal{R} = C(\{0, e_1, e_2\})$.

(d) $\mathcal{R}$ es el cuadrado de vértices $0, e_1, e_2, e_1+e_2$, es decir, $\mathcal{R} = C(\{0, e_1, e_2, e_1+e_2\})$.

(e) $\mathcal{R}$ es el paralelogramo de vértices $0, e_1 + e_2, e_1 - e_2, 2e_1$, es decir,

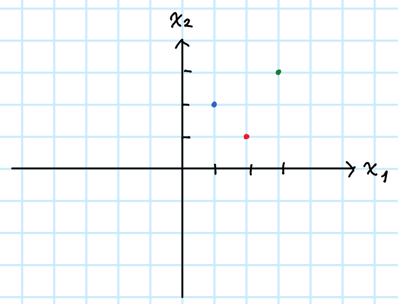
$$\mathcal{R} = C(\{0, e_1 + e_2, e_1 - e_2, 2e_1\}).$$

(a) $T(R) = \{T(x),\ x \in R\}$

$= \{T(x) \,/\, x = e_1,\ x = e_2 \vee x = e_1 + e_2\}$

$= \{T(e_1),\ T(e_2),\ T(e_1+e_2)\}$

$= \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

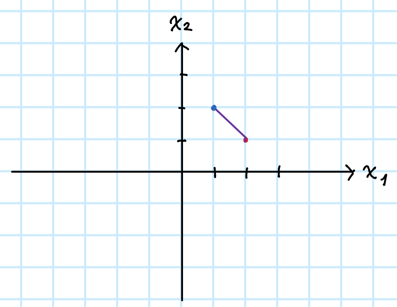


(b) $T(R) = T(C(\{e_1, e_2\}))$

$= C(T(\{e_1, e_2\}))$

$= C(\{T(e_1), T(e_2)\})$

$= C\left(\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}\right)$

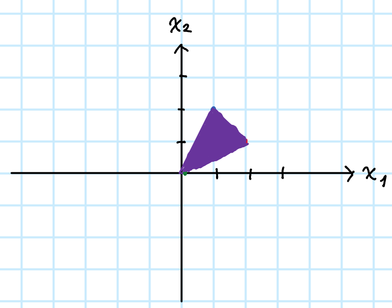


(c) $T(R) = T(C(\{0, e_1, e_2\}))$

$= C(T(\{0, e_1, e_2\}))$

$= C(\{T(0), T(e_1), T(e_2)\})$

$= C\left(\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}\right)$

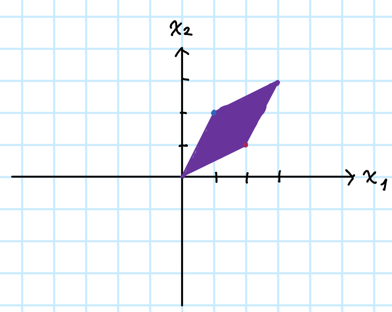


(D) $T(R) = T(C(\{0, e_1, e_2, e_1+e_2\}))$

$= C(T(\{0, e_1, e_2, e_1+e_2\}))$

$= C(\{T(0), T(e_1), T(e_2), T(e_1+e_2)\})$

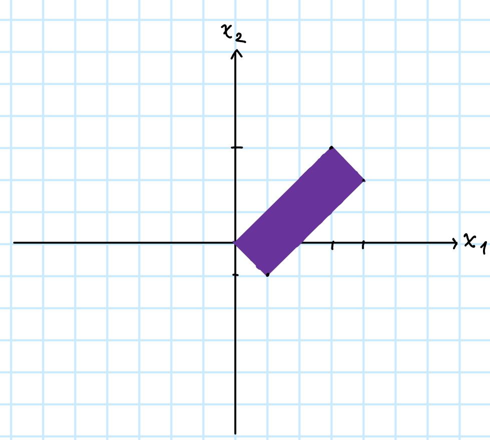
$= C\left(\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}\right)$



(e) $T(R) = T(C(\{0, e_1+e_2, e_1-e_2, 2e_1\}))$

$= C(T(\{0, e_1+e_2, e_1-e_2, 2e_1\}))$

$= C\left(\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}\right)$



Ejercicio 2.9

jueves, 30 de septiembre de 2021 12:03

2.9 Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales existe una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix}1 & a & 1\end{bmatrix}^T,$$
$$T\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T,$$
$$T\left(\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T,$$
$$T\left(\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix}5 & 1 & a^2\end{bmatrix}^T.$$

$$\lambda \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T + \beta \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T + \alpha \begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}1 & -1 & -1\end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\lambda\\ \beta\\ \alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ -1\\ -1\end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 0 & -1\end{array}\right] \overset{\text{query}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right] \quad \begin{cases}\lambda = 1\\ \beta = 2\\ \alpha = 2\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix} \xrightarrow{T} \begin{bmatrix}1\\a\\1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\1\\a^2\end{bmatrix} \to \left.\begin{cases}1+2+2=5\\ a+4=1 \longrightarrow a=-3\\ 1+2+6=a^2 \longrightarrow a=\pm 3\end{cases}\right\} a=-3$$

$$\boxed{\text{Existe transformación lineal } a=-3}$$

Ejercicio 2.10

jueves, 30 de septiembre de 2021 12:31

2.10 Sea $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T \right\},$$

y sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal que actúa sobre la base $\mathcal{B}$ de la siguiente manera

$$T\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{2} & 2\end{bmatrix}^T,$$
$$T\left(\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix}-3 & \frac{9}{2} & -6\end{bmatrix}^T,$$
$$T\left(\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix}2 & -3 & 4\end{bmatrix}^T.$$

(**a**) Hallar una base del núcleo de T y describirlo geométricamente.

(**b**) Hallar una base de la imagen de T y describirla geométricamente.

(**c**) Hallar $T\left(\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}^T\right)$ y usar ese resultado para calcular $T\left(\begin{bmatrix}2 & 3 & 5\end{bmatrix}^T\right)$.

(a)

$$\overset{\in \mathbb{R}^3}{T(x)} = \begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} & -3\\ 2 & -6 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1} x$$

$$T(x) = \begin{bmatrix}1 & -3 & 2\\ -\frac{3}{2} & \frac{9}{2} & -3\\ 2 & -6 & 4\end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix} x$$

$$T([x_1\ x_2\ x_3]^T) = \underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ \frac{3}{2} & -3 & -3\\ -2 & 4 & 4\end{bmatrix}}_{A_T}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.5 (El caso más simple). Fijamos una base $\mathcal{B} = \{v_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ de $\mathbb{K}^n$ y una colección cualquiera de vectores $\mathcal{W} = \{w_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ de $\mathbb{K}^m$, la única transformación lineal T de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^m$ tal que $T(v_j) = w_j$ es

$$T(x) = [\mathcal{W}][\mathcal{B}]^{-1}x$$

donde $[\mathcal{W}] = \begin{bmatrix}w_1 & \cdots & w_n\end{bmatrix}$ y $[\mathcal{B}] = \begin{bmatrix}v_1 & \cdots & v_n\end{bmatrix}$.

¿Por qué? Porque si $A_T \in \mathbb{K}^{m\times n}$ es la matriz tal que

$$T(x) = A_T x$$

para todo $x \in \mathbb{K}^n$, entonces

$$A_T[\mathcal{B}] = [\mathcal{W}].$$

Pero la matriz $[\mathcal{B}]$ es inversible porque $\mathcal{B} = \{v_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ es una base de $\mathbb{K}^n$. Por lo tanto,

$$A_T = [\mathcal{W}][\mathcal{B}]^{-1}.$$

$$\mathrm{Nu}(T) = \mathrm{Nul}(A_T) = \{x \in \mathbb{R}^3 / A_T . x = 0\}$$

$$= \begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ \frac{3}{2} & -3 & -3\\ -2 & 4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ \frac{3}{2} & -3 & -3\\ -2 & 4 & 4\end{bmatrix} \overset{\text{Python}}{\sim} \begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \longrightarrow \left\{ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \rightarrow x_1 = 2x_2 + 2x_3 \right.$$

$$x = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2x_2 + 2x_3\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 0\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\boxed{B_{\mathrm{Nu}(T)} = \left\{[2\ 1\ 0]^T, [2\ 0\ 1]^T\right\}} \rightarrow \text{El Nu(T) es un plano en } \mathbb{R}^3$$

(b)

$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Col}(A_T)$$

$$= \begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ \frac{3}{2} & -3 & -3\\ -2 & 4 & 4\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boxed{B_{\mathrm{Im}(T)} = \left\{[-1\ \tfrac{3}{2}\ -2]^T\right\}} \rightarrow \text{La Im(T) es una recta en } \mathbb{R}^3.$$

(c)

$$\boxed{T([x_1\ x_2\ x_3]^T) = \begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ \frac{3}{2} & -3 & -3\\ -2 & 4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}}$$

$$\boxed{T([2\ 3\ 5]^T) = [14\ -21\ 28]^T}$$

Ejercicio 2.11

jueves, 30 de septiembre de 2021 14:34

2.11 Sea $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T \right\},$$

y sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ una transformación lineal que actúa sobre la base $\mathcal{B}$ de la siguiente manera

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T\right) = 1 - x,$$
$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T\right) = 1 + x^2,$$
$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T\right) = x + x^2.$$

Comprobar que el polinomio $p = 2+x+3x^2$ pertenece a la imagen de T y determinar $T^{-1}(p) := T^{-1}(\{p\})$.

La idea es trabajar con un $T^*: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ en donde $T^*(v) = [a_0 \; a_1 \; a_2]^T$ de $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ es decir $T^*(v) = [w]^B$, $B = \{1, x, x^2\}$
usar esto:

Ejemplo 2.5 (El caso más simple). Fijamos una base $\mathcal{B} = \{v_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ de $\mathbb{K}^n$ y una colección cualquiera de vectores $\mathcal{W} = \{w_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ de $\mathbb{K}^m$, la única transformación lineal T de $\mathbb{K}^n$ en $\mathbb{K}^m$ tal que $T(v_j) = w_j$ es

$$T(x) = [\mathcal{W}][\mathcal{B}]^{-1}x$$

donde $[\mathcal{W}] = \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_n \end{bmatrix}$ y $[\mathcal{B}] = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix}$.

$$T^*([1 \; 0 \; 0]^T) = [1 \; -1 \; 0]^T$$
$$T^*([0 \; 1 \; 1]^T) = [1 \; 0 \; 1]^T$$
$$T^*([0 \; 1 \; -1]^T) = [0 \; 1 \; -1]^T$$

Entonces la idea es buscar la preimagen de $[2 \; 1 \; 3]^T$ que va a ser igual en T y T^* y también vale que $\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Im}(T^*)$

$$T^*(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{[W]} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}}_{[B]^{-1}} x \Rightarrow T^*(x) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} x \Rightarrow T^*(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{A_{T^*}} x$$

Si $[2 \; 1 \; 3]^T \in \operatorname{Im}(T^*) = \operatorname{Col}(A_{T^*})$, $2 + x + 3x^2 \in \operatorname{Im}(T)$

$$A_T = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow B_{\operatorname{Im}(T)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ \beta = 3 \end{cases} \rightarrow [2 \; 1 \; 3]^T \in \operatorname{Im}(T^*) \Rightarrow 2 + x + 3x^2 \in \operatorname{Im}(T)$$

$$T^{-1}(p)\,? \Rightarrow T([x_1 \; x_2 \; x_3]^T) = 2 + x + 3x^2 \xrightarrow{\text{equivale}} T^*([x_1 \; x_2 \; x_3]^T) = [2 \; 1 \; 3]^T$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2} \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_3 \\ 3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{T^{-1}(p) = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Ejercicio 2.12

jueves, 30 de septiembre de 2021 15:40

2.12 Sea $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T \right\},$$

y sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal que actúa sobre la base $\mathcal{B}$ de la siguiente manera

$$T\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T,$$
$$T\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T,$$
$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T.$$

(**a**) Hallar la imagen por T del subespacio gen $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}^T \right\}$.

(**b**) Hallar la preimagen por T del subespacio $\{y \in \mathbb{R}^3 : y_1 - y_3 = 0, y_1 + y_2 + y_3 = 0\}$.

(a)

$$T\left(\text{gen}\left\{[1\ 0\ 1]^T, [1\ 1\ 5]^T\right\}\right) = \text{gen}\left\{ T(\underbrace{[1\ 0\ 1]^T}_{⊛}), T(\underbrace{[1\ 1\ 5]^T}_{⊛}) \right\}$$

⊛ no tengo los transformados de estos vectores. Pero si tengo una base de $\mathbb{R}^3$ y los transformados de los vectores de esa base

$$v = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \qquad x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad 1$$

$$T\left(x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = T\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \right)$$

$$2 - \quad T\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \right) = x_1 T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + x_2 T\left(\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) + x_3 T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \right)$$

Empiezo

$$1 \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \qquad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{Im}(T) = \text{gen}\left\{ \left[\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right] \right\}}$$

(b)

$$U = \{ y \in \mathbb{R}^3 : y_1 - y_3 = 0, y_1 + y_2 + y_3 = 0 \}$$

$$⊛ \begin{cases} y_1 - y_3 = 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 0 \end{cases}$$

$$T(x) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} x = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} x$$

$$T(x) = \begin{bmatrix} \frac{5}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \to \begin{cases} \frac{5}{9} x_1 + \frac{5}{9} x_2 - \frac{2}{9} x_3 = y_1 \\ -\frac{7}{9} x_1 + \frac{2}{9} x_2 + \frac{1}{9} x_3 = y_2 \\ \frac{2}{9} x_1 - \frac{7}{9} x_2 + \frac{1}{9} x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{9} x_1 + \frac{5}{9} x_2 - \frac{2}{9} x_3 - \left(\frac{2}{9} x_1 - \frac{7}{9} x_2 + \frac{1}{9} x_3 \right) = 0 \to \frac{1}{3} x_1 + \frac{4}{3} x_2 - \frac{1}{3} x_3 = 0 \to x_1 = -4x_2 + x_3 \\ \frac{5}{9} x_1 + \frac{5}{9} x_2 - \frac{2}{9} x_3 - \frac{7}{9} x_1 + \frac{2}{9} x_2 + \frac{1}{9} x_3 + \frac{2}{9} x_1 - \frac{7}{9} x_2 + \frac{1}{9} x_3 = 0 \longrightarrow 0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -4x_2 + x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{T^{-1}(U) = \text{gen}\left\{ [-4\ 1\ 0]^T, [1\ 0\ 1]^T \right\}}$$

Ejercicios para entregar semana 4 (Parte 1)

jueves, 30 de septiembre de 2021 21:58

1. Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^3$ la aplicación definida por $T(p) = [p(1) \quad p'(1) \quad p''(1)]^T$.

(a) Explicar por qué T es una transformación lineal.

(b) Hallar una base del núcleo de T.

(c) Mostrar que para cada $j \in \mathbb{I}_3$, la ecuación $T(p) = e_j$ admite solución y hallar todas las soluciones de la misma.

(d) Resolver la ecuación $T(p) = [3 \quad 6 \quad -9]^T$.

(a)

$P = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \qquad P' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 \qquad P'' = 2a_2 + 6a_3x$

1. $T(P+q) = [a_0+b_0+a_1+b_1+a_2+b_2+a_3+b_3 \quad a_1+b_1+2a_2+2b_2+3a_3+3b_3 \quad 2a_2+2b_2+6a_3+6b_3]^T$

$= [a_0+a_1+a_2+a_3 \quad a_1+2a_2+3a_3 \quad 2a_2+6a_3]^T + [b_0+b_1+b_2+b_3 \quad b_1+2b_2+3b_3 \quad 2b_2+6b_3]^T$

$= T(P) + T(q)$ ✓

2. $T(\lambda P) = [\lambda a_0 + \lambda a_1 + \lambda a_2 + \lambda a_3 \quad \lambda a_1 + \lambda 2a_2 + \lambda 3a_3 \quad \lambda 2a_2 + \lambda 6a_3]^T$

$= \lambda[a_0+a_1+a_2+a_3 \quad a_1+2a_2+3a_3 \quad 2a_2+6a_3]^T$

$= \lambda T(P)$ ✓

Es una T.L. porque cumple 1 y 2

(b)

$Nu(T) = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \,/\, T(P) = [0 \quad 0 \quad 0]^T\}$

$[P(1) \quad P'(1) \quad P''(1)] = [0 \quad 0 \quad 0]^T$

$$\begin{cases} a_0+a_1+a_2+a_3=0 \\ a_1+2a_2+3a_3=0 \\ 2a_2+6a_3=0 \end{cases} \to \begin{bmatrix} 1&1&1&1 \\ 0&1&2&3 \\ 0&0&2&6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{gauss}} \begin{bmatrix} 1&0&0&1 \\ 0&1&0&-3 \\ 0&0&1&3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0 \end{bmatrix} \to \begin{cases} a_0+a_3=0 \to a_0=-a_3 \\ a_1-3a_3=0 \to a_1=3a_3 \\ a_2+3a_3=0 \to a_2=-3a_3 \end{cases}$$

$P = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 = -a_3+3a_3x-3a_3x^2+a_3x^3 = a_3(-1+3x-3x^2+x^3)$

$$\boxed{B_{Nu(T)} = \{-1+3x-3x^2+x^3\}}$$

(c)

$T(P) = e_1 \to T(P) = [1 \; 0 \; 0]^T$

$[P(1) \quad P'(1) \quad P''(1)] = [1 \quad 0 \quad 0]^T$

$$\begin{cases} a_0+a_1+a_2+a_3=1 \\ a_1+2a_2+3a_3=0 \\ 2a_2+6a_3=0 \end{cases} \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&1 \\ 0&1&2&3&0 \\ 0&0&2&6&0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&1&1 \\ 0&1&0&-3&0 \\ 0&0&1&3&0 \end{array}\right] \to \begin{cases} a_0+a_3=1 \to a_0=1-a_3 \\ a_1-3a_3=0 \to a_1=3a_3 \\ a_2+3a_3=0 \to a_2=-3a_3 \end{cases}$$

$P = 1-a_3+3a_3x-3a_3x^2+a_3x^3 = 1+a_3(-1+3x-3x^2+x^3)$

$$\boxed{Sol(T(P)=e_1) = \{1+\lambda(-1+3x-3x^2+x^3),\ \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

$T(P) = e_2 \to T(P) = [0 \; 1 \; 0]^T$

$[P(1) \quad P'(1) \quad P''(1)] = [0 \quad 1 \quad 0]^T$

$$\begin{cases} a_0+a_1+a_2+a_3=0 \\ a_1+2a_2+3a_3=1 \\ 2a_2+6a_3=0 \end{cases} \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&0 \\ 0&1&2&3&1 \\ 0&0&2&6&0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&1&-1 \\ 0&1&0&-3&1 \\ 0&0&1&3&0 \end{array}\right] \to \begin{cases} a_0+a_3=-1 \to a_0=-1-a_3 \\ a_1-3a_3=1 \to a_1=1+3a_3 \\ a_2+3a_3=0 \to a_2=-3a_3 \end{cases}$$

$-1-a_3+(1+3a_3)x-3a_3x^2+a_3x^3$

$-1-a_3+x+3a_3x-3a_3x^2+a_3x^3$

$-1+x+a_3(-1+3x-3x^2+x^3)$

$$\boxed{Sol(T(P)=e_2) = \{-1+x+\lambda(-1+3x-3x^2+x^3),\ \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

$T(P) = e_3 \to T(P) = [0 \; 0 \; 1]^T$

$[P(1) \quad P'(1) \quad P''(1)] = [0 \quad 0 \quad 1]^T$

$$\begin{cases} a_0+a_1+a_2+a_3=0 \\ a_1+2a_2+3a_3=0 \\ 2a_2+6a_3=1 \end{cases} \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&0 \\ 0&1&2&3&0 \\ 0&0&2&6&1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&1&\frac{1}{2} \\ 0&1&0&-3&-1 \\ 0&0&1&3&\frac{1}{2} \end{array}\right] \to \begin{cases} a_0+a_3=\frac{1}{2} \to a_0=\frac{1}{2}-a_3 \\ a_1-3a_3=-1 \to a_1=-1+3a_3 \\ a_2+3a_3=\frac{1}{2} \to a_2=\frac{1}{2}-3a_3 \end{cases}$$

$\frac{1}{2}-a_3+(-1+3a_3)x+(\frac{1}{2}-3a_3)x^2+a_3x^3$

$\frac{1}{2}-x+\frac{1}{2}x^2+a_3(-1+3x-3x^2+x^3)$

$$\boxed{Sol(T(P)=e_3) = \{\tfrac{1}{2}-x+\tfrac{1}{2}x^2+\lambda(-1+3x-3x^2+x^3),\ \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

(D)

$T(P) = e \to T(P) = [3 \; 6 \; -9]^T$

$[P(1) \quad P'(1) \quad P''(1)] = [3 \quad 6 \quad -9]^T$

$$\begin{cases} a_0+a_1+a_2+a_3=3 \\ a_1+2a_2+3a_3=6 \\ 2a_2+6a_3=-9 \end{cases} \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&3 \\ 0&1&2&3&6 \\ 0&0&2&6&-9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1&0&0&1&-\frac{15}{2} \\ 0&1&0&-3&15 \\ 0&0&1&3&-\frac{9}{2} \end{array}\right] \to \begin{cases} a_0+a_3=-\frac{15}{2} \to a_0=-\frac{15}{2}-a_3 \\ a_1-3a_3=15 \to a_1=15+3a_3 \\ a_2+3a_3=-\frac{9}{2} \to a_2=-\frac{9}{2}-3a_3 \end{cases}$$

$-\frac{15}{2}-a_3+(15+3a_3)x+(-\frac{9}{2}-3a_3)x^2+a_3x^3$

$-\frac{15}{2}+15x-\frac{9}{2}x^2+a_3(-1+3x-3x^2+x^3)$

$$\boxed{Sol(T(P)=[3 \; 6 \; -9]^T) = \{-\tfrac{15}{2}+15x-\tfrac{9}{2}x^2+\lambda(-1+3x-3x^2+x^3),\ \lambda \in \mathbb{R}\}}$$

Ejercicios para entregar semana 4 (Parte 2)

jueves, 30 de septiembre de 2021 23:15

2. Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ una transformación lineal que actúa sobre la base $\left\{[2\ \ 2\ \ 1]^T, [-2\ \ 1\ \ 2]^T, [1\ \ -2\ \ 2]^T\right\}$ de la siguiente manera:

$T\left([2\ \ 2\ \ 1]^T\right) = [2\ \ -1\ \ -1]^T,$

$T\left([-2\ \ 1\ \ 2]^T\right) = [-1\ \ 2a\ \ -1]^T,$

$T\left([1\ \ -2\ \ 2]^T\right) = [-a\ \ -1\ \ 2].$

Hallar todos los valores de $a\in\mathbb{R}$ tales que $T\left(\text{gen}\left\{[1\ \ 0\ \ 1]^T, [1\ \ 1\ \ 5]^T\right\}\right) = \text{gen}\left\{[1\ \ -2\ \ 1]^T\right\}$.

$$T\left(\text{gen}\left\{[1\ 0\ 1]^T, [1\ 1\ 5]^T\right\}\right) = \text{gen}\left\{[1\ -2\ 1]^T\right\}$$

$$\text{gen}\left\{T([1\ 0\ 1]^T), T([1\ 1\ 5]^T)\right\} = \text{gen}\left\{[1\ -2\ 1]^T\right\}$$

$$v = \begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix} \qquad x_1\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}-2\\1\\2\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2&-2&1\\2&1&-2\\1&2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}2&2&1\\-2&1&2\\1&-2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix} \quad 1$$

$$T\left(x_1\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}-2\\1\\2\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}\right)$$

$$2\_\quad T\left(\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ y_3\end{bmatrix}\right) = x_1 T\left(\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}\right) + x_2 T\left(\begin{bmatrix}-2\\1\\2\end{bmatrix}\right) + x_3 T\left(\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}\right)$$

$T([1\ 0\ 1]^T)$:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}2&2&1\\-2&1&2\\1&-2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\0\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}-1\\2a\\-1\end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-a\\-1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2-a\\-2\\1\end{bmatrix}$$

$T([1\ 1\ 5]^T)$:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}2&2&1\\-2&1&2\\1&-2&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\5\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = 1\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}-1\\2a\\-1\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}-a\\-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1-a\\-2+2a\\0\end{bmatrix}$$

$$\text{gen}\left\{\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2-a\\-2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1-a\\-2+2a\\0\end{bmatrix}\right\} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\lambda\begin{bmatrix}\frac{2}{3}-\frac{a}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}1-a\\-2+2a\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases}\lambda\left(\frac{2}{3}-\frac{a}{3}\right)+\beta(1-a)=1\\ -\frac{2}{3}\lambda+\beta(-2+2a)=-2\\ \frac{1}{3}\lambda = 1\end{cases} \xrightarrow{\lambda=3} \begin{cases}3\left(\frac{2}{3}-\frac{a}{3}\right)+\beta-\beta a=1\\ -\frac{2}{3}\cdot 3-2\beta+2\beta a=-2\end{cases} \circledast$$

$$\circledast\begin{cases}2-a+\beta-\beta a=1\\-2-2\beta+2\beta a=-2\end{cases} \rightarrow \begin{cases}1-a+\beta-\beta a=0\\-2\beta+2\beta a=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}1-a+\beta-\beta a=0\\ \beta(-2+2a)=0\end{cases}$$

$$\beta=0 \qquad a=1$$

si $\beta=0$, $1-a+0-0a=0 \rightarrow a=1$

si $a=1$, $1-1+\beta-\beta.1=0 \rightarrow 0=0$

$$\boxed{a=1}$$

Autoevaluacion General

viernes, 1 de octubre de 2021 22:30

Hermanito $\{1, \operatorname{sen}(x), \cos(x)\}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3a+1 \\ 1 & a & 3 \\ a & 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

Input interpretation

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3a+1 \\ 1 & a & 3 \\ a & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

Result

$$-3a^3 - a^2$$

Input

Resolve$[-3a^3 - a^2 = 0]$

Result

$$-3a^3 - a^2 = 0$$

Solutions

$$a = -\frac{1}{3}$$

$$a = 0$$

$$\frac{1}{2+4i} \cdot \frac{2-4i}{2-4i} = \frac{2-4i}{4-\cancel{8i}+\cancel{8i}+16} = \frac{2-4i}{20} = \frac{1}{10} - \frac{2}{5}i$$

Input interpretation

row reduce	$\begin{pmatrix} 1 & i & \frac{1}{2+4i} \\ 2i & -2 & \frac{1}{2-i} \end{pmatrix}$

$$\frac{1}{2-i} \cdot \frac{2+i}{2+i} = \frac{2+i}{4+1} = \frac{2}{5} + \frac{i}{5}$$

Result

$$\begin{pmatrix} 1 & i & \frac{1}{10} - \frac{i}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} - \frac{i}{5} \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow z_1 + z_2 i = \frac{1}{10} - \frac{i}{5}$$

$$z_1 = \frac{1}{10} - \frac{i}{5} - z_2 i$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{10} - \frac{i}{5} - z_2 i \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} - \frac{i}{5} \\ 0 \end{bmatrix} + z_2 \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$z_1 + z_2 i = 0 \qquad \begin{bmatrix} -z_2 i \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$z_1 = -z_2 i$$

$$M_{B_1}^{B_2} = \left[[v]^{B_2} \right] \qquad [1]^{B_2}, [x]^{B_2}, [x^2]^{B}$$

$$v \in B_1 \qquad [v]^{B_2} = M_{B_1}^{B_2} [v]^{B_1}$$

$$M_{B_2}^{B_1} = [$$

$$x = a_0 \left[\frac{1}{2}(x-1)(x-2) \right] + a_1 \left[-x(x-2) \right] + a_2 \left[\frac{1}{2} x (x-1) \right]$$

$$1 \overset{x=0}{=} a_0 \qquad x \overset{x=0}{=} a_0 = 0 \qquad x^2 \overset{x=0}{=} \qquad a_0 = 0$$

$$1 \overset{x=1}{=} a_1 \qquad x=1 \quad a_1 = 1 \qquad a_1 = 1$$

$$1 \overset{x=2}{=} a_2 \qquad x=2 \quad a_2 = 2 \qquad a_2 = 4$$

Pregunta **4**

Sin responder aún

Puntúa como 1,00

Marcar pregunta

Sean B_1 y B_2 las bases de $\mathbb{R}_2[x]$ definidas por $B_1 = \{\underset{v_1}{1}, \underset{v_2}{x}, \underset{v_3}{x^2}\}$ y $B_2 = \left\{\frac{1}{2}(x-1)(x-2), -x(x-2), \frac{1}{2}x(x-1)\right\}$.

Seleccione una:

- (●) a. La matriz de cambio de coordenadas de la base B_1 en la base B_2 es $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$
- ( ) b. La matriz de cambio de coordenadas de la base B_1 en la base B_2 es $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$
- ( ) c. La matriz de cambio de coordenadas de la base B_1 en la base B_2 es $M = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.
- ( ) d. La matriz de cambio de coordenadas de la base B_1 en la base B_2 es $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

$$M_{B_1}^{B_2} = \begin{bmatrix} [v_1]^{B_2} & [v_2]^{B_2} & [v_3]^{B_2} \end{bmatrix}$$

$$[v_1]^{B_2} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad / \quad 1 = a_0 \tfrac{1}{2}(x-1)(x-2) + a_1(-x)(x-2) + a_2 \tfrac{1}{2}x(x-1)$$

muestreo $x=0$

$$1 = a_0 \tfrac{1}{2}(-1)(-2) \rightarrow 1 = a_0$$

muestreo $x=1$

$$1 = a_1$$

muestreo $x=2$

$$1 = a_2$$

$$[v_1]^{B_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = a_0 \tfrac{1}{2}(x-1)(x-2) + a_1(-x)(x-2) + a_2 \tfrac{1}{2}x(x-1)$$

muestreo $x=0$ muestreo $x=1$ muestreo $x=2$

$$0 = a_0 \qquad 1 = a_1 \qquad 2 = a_2$$

$$[v_2]^{B_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x^2 = a_0 \tfrac{1}{2}(x-1)(x-2) + a_1(-x)(x-2) + a_2 \tfrac{1}{2}x(x-1)$$

muestreo $x=0$ muestreo $x=1$ muestreo $x=2$

$$0 = a_0 \qquad 1 = a_1 \qquad 4 = a_2$$

$$\boxed{M_{B_1}^{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}} \qquad [v_3]^{B_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2.13

lunes, 4 de octubre de 2021 16:31

2.13 ☢ Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ con $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ de dimensión finita. Sea $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ la matriz de T con respecto a las bases $\mathcal{B}$ de $\mathbb{V}$ y $\mathcal{C}$ de $\mathbb{W}$. Verificar las siguientes afirmaciones.

(a) T es monomorfismo si, y sólo si, nul $\left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right) = \{0\}$.

(b) T es epimorfismo si, y sólo si, col $\left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right) = \mathbb{K}^{\dim(\mathbb{W})}$.

(c) T es isomorfismo si, y sólo si, $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ es inversible.

(a) T es un monomorfismo si y solo si $\mathrm{nu}(T) = \{0\}$

Dado $v \in \mathbb{V}$ y $w \in \mathbb{W}$, definimos $T : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ como $T(v) = w$ ⊛

Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n, $\mathbb{W}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial dimensión m, y $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$ una transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{W}$. Fijamos una base $\mathcal{B} = \{v_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ de $\mathbb{V}$ y una base $\mathcal{C} = \{w_i : i \in \mathbb{I}_m\}$ de $\mathbb{W}$. Designamos mediante $\Phi_{\mathcal{B}}$ y $\Phi_{\mathcal{B}'}$ a sus respectivos isomorfismos de coordenadas.

⊛ $\Leftrightarrow [T]_B^{\mathcal{C}} [v]^B = [w]^{\mathcal{C}}$. En consecuencia, $T^{-1}(w) = \Phi_B^{-1}\left(\{x \in \mathbb{K}^n : [T]_B^{\mathcal{C}} x = [w]^{\mathcal{C}}\}\right)$ → se deduce ① y ②

① Por lo tanto, vale $\Phi_B^{-1}(\mathrm{nul}([T]_B^{\mathcal{C}})) = \mathrm{nu}(T)$

si $\mathrm{nul}([T]_B^{\mathcal{C}}) = 0 \to \Phi_B^{-1}(0) = \mathrm{nu}(T)$

Como esta función devuelve el vector según las coordenadas de una base, el único vector con coordenadas 0 es el 0

$\boxed{\therefore \mathrm{nu}(T) = 0}$

(b)

Definición 2.1. *Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. La matriz de T con respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ es la matriz $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in \mathbb{K}^{m \times n}$ definida por*

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} := \left[[T(v_1)]^{\mathcal{B}'} \quad \cdots \quad [T(v_n)]^{\mathcal{B}'}\right]. \tag{1}$$

T es un epimorfismo si y solo T es sobreyectiva, $\overset{\to \text{Cantidad}}{|T^{-1}(w)|} \geq 1$ para todo w / $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{W}$

② Se parte de que $\Phi_{\mathcal{C}}^{-1}(\mathrm{Col}([T]_B^{\mathcal{C}})) = \mathrm{Im}(T)$

si $\mathrm{Col}([T]_B^{\mathcal{C}}) = \mathbb{K}^{\mathrm{Dim}(\mathbb{W})} \to \mathrm{Col}([T]_B^{\mathcal{C}}) = \mathrm{gen}\{v_1, \dots, v_{\mathrm{Dim}(\mathbb{W})}\}$, $v_{\mathrm{Dim}(\mathbb{W})} \in \mathbb{K}^{\mathrm{Dim}(\mathbb{W})}$

Se sabe que $\Phi_{\mathcal{C}}^{-1}$ es una TL así que cumple

$$\Phi_{\mathcal{C}}^{-1}(\mathrm{gen}\{v_1, \dots, v_{\mathrm{Dim}(\mathbb{W})}\}) = \mathrm{gen}\{\Phi_{\mathcal{C}}^{-1}(v_1), \dots, \Phi_{\mathcal{C}}^{-1}(v_{\mathrm{Dim}(\mathbb{W})})\} = \mathrm{gen}\{w_1, \dots, w_{\mathrm{Dim}(\mathbb{W})}\}$$

Como $\Phi_{\mathcal{C}}^{-1}$ devuelve $\mathrm{Dim}(\mathbb{W})$ elementos mediante aplicarle coeficientes a una base del espacio (donde los elementos a los que multiplica son linealmente independientes), esos elementos nos aseguran un generador con $\mathrm{Dim}(\mathbb{W})$ elementos $\in \mathbb{W}$ linealmente independientes

$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{gen}\{w_1, \dots, w_{\mathrm{Dim}(\mathbb{W})}\} = \mathbb{W}$$

$\boxed{\therefore \text{Es un epimorfismo}}$

(3)

Si $[T]_B^{\mathcal{C}}$ es inversible entonces el $\mathrm{nul}([T]_B^{\mathcal{C}}) = \{0\} \Rightarrow$ Es un monomorfismo

Además, si $[T]_B^{\mathcal{C}}$ es inversible entonces el $\mathrm{Col}([T]_B^{\mathcal{C}}) = \mathbb{K}^{\mathrm{Dim}(\mathbb{W})} \Rightarrow$ Es un epimorfismo

$\Rightarrow$ T es un isomorfismo si es un epimorfismo y un monomorfismo

Ejercicio 2.14

lunes, 4 de octubre de 2021 17:32

(a)

$T(x) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} x, \; x \in \mathbb{R}^2$ $\quad \mathcal{E}_2 = \{[1\;0]^T, [0\;1]^T\}$ $\quad \mathcal{E}_3 = \{[1\;0\;0]^T, [0\;1\;0]^T, [0\;0\;1]^T\}$

$[T]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3} = \left[[T([1\;0]^T)]^{\mathcal{E}_3} \quad [T([0\;1]^T)]^{\mathcal{E}_3} \right]$

$T([1\;0]^T) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ $\quad [T([1\;0]^T)]^{\mathcal{E}_3} = 1[1\;0\;0]^T + 3[0\;1\;0]^T + 5[0\;0\;1]^T = [1\;3\;5]^T$

$T([0\;1]^T) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ $\quad [T([0\;1]^T)]^{\mathcal{E}_2} = [2\;4\;6]^T$

Corolario 2.7. *Vale que*

1. *T es monomorfismo si, y sólo si,* $\operatorname{nul}\left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right) = \{0\}$.
2. *T es epimorfismo si, y sólo si,* $\operatorname{col}\left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right) = \mathbb{K}^m$.
3. *T es isomorfismo si, y sólo si,* $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ *es inversible.*

$[T]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad E_{[T]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

Podría usar las dimensiones y el teorema de las dimensión.

$\operatorname{nul}([T]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3}) = \{0\} \longrightarrow$ $\boxed{\text{T es monomorfismo}}$

$\operatorname{Col}([T]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3}) = \operatorname{gen}\{[1\;3\;5]^T, [2\;4\;6]^T\} \neq \mathbb{R}^3 \longrightarrow$ $\boxed{\text{T no es un epimorfismo}}$

$[T]_{\mathcal{E}_2}^{\mathcal{E}_3}$ no es cuadrada $\longrightarrow$ $\boxed{\text{T no es un isomorfismo}}$

(b)

$T(x) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} x, \; x \in \mathbb{R}^3$ $\quad \mathcal{E}_2 = \{[1\;0]^T, [0\;1]^T\}$ $\quad \mathcal{E}_3 = \{[1\;0\;0]^T, [0\;1\;0]^T, [0\;0\;1]^T\}$

$[T]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_2} = \left[[T([1\;0\;0])]^{\mathcal{E}_2} \quad [T([0\;1\;0]^T)]^{\mathcal{E}_2} \quad [T([0\;0\;1]^T)]^{\mathcal{E}_2} \right]$

$T([1\;0\;0]^T) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad [T([1\;0\;0]^T)]^{\mathcal{E}_2} = 1[1\;0]^T + 2[0\;1]^T = [1\;2]^T$

$T([1\;0\;0]^T) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\quad [T([0\;1\;0]^T)]^{\mathcal{E}_2} = [3\;4]^T$ $\quad [T]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

$T([1\;0\;0]^T) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$ $\quad [T([0\;0\;1]^T)]^{\mathcal{E}_2} = [5\;6]^T$

$E_{[T]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{bmatrix} x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{nul}([T]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_2}) = \operatorname{gen}\{[1\;-2\;1]^T\}$

$\operatorname{Col}([T]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_2}) = \operatorname{gen}\{[1\;2]^T, [3\;4]^T\} = \mathbb{R}^2$

$[T]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_2}$ no es inversible

T no es un monomorfismo
T es un epimorfismo
T no es un isomorfismo

(c)

$T(p) = [p(0)\;\; p(1)\;\; p(10)\;\; p(100)]^T$ $\quad \mathcal{E}_4 = \{[1\;0\;0\;0]^T, [0\;1\;0\;0]^T, [0\;0\;1\;0]^T, [0\;0\;0\;1]^T\}$

$C_3 = \{1, x, x^2, x^3\}$

$[T]_{C_3}^{\mathcal{E}_4} = \left[[T(1)]^{\mathcal{E}_4} \quad [T(x)]^{\mathcal{E}_4} \quad [T(x^2)]^{\mathcal{E}_4} \quad [T(x^3)]^{\mathcal{E}_4} \right]$

$T(1) = [1\;1\;1\;1]^T \rightarrow [T(1)]^{\mathcal{E}_4} = [1\;0\;0\;0]^T + [0\;1\;0\;0]^T + [0\;0\;1\;0]^T + [0\;0\;0\;1]^T = [1\;1\;1\;1]^T$

$T(x) = [0\;1\;10\;100]^T \rightarrow [T(1)]^{\mathcal{E}_4} = 0[1\;0\;0\;0]^T + 1[0\;1\;0\;0]^T + 10[0\;0\;1\;0]^T + 100[0\;0\;0\;1]^T = [0\;1\;10\;100]^T$

$T(x^2) = [0\;1\;100\;10000]^T \rightarrow [T(1)]^{\mathcal{E}_4} = [0\;1\;100\;10000]^T$

$T(x^3) = [0\;1\;1000\;1000000]^T \rightarrow [T(1)]^{\mathcal{E}_4} = [0\;1\;1000\;1000000]^T$

$[T]_{C_3}^{\mathcal{E}_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 100 & 1000 \\ 1 & 100 & 10000 & 1000000 \end{bmatrix} \sim E_{[T]_{C_3}^{\mathcal{E}_4}} =$

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 100 & 1000 \\ 1 & 100 & 10000 & 1000000 \end{pmatrix}$

Result

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Det}([T]_{C_3}^{\mathcal{E}_4})$:

Input interpretation

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 100 & 1000 \\ 1 & 100 & 10000 & 1000000 \end{vmatrix}$

Result

80190000

Scientific notation

8.019×10^7

$\boxed{\text{T es monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo}}$

(D)

$T(p) = \begin{bmatrix} p(0) & p(1) \\ p'(0) & p'(1) \end{bmatrix}$ $\quad C_2 = \{1, x, x^2\}$ $\quad \mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

$[T]_{C_2}^{\mathcal{E}} = \left[[T(1)]^{\mathcal{E}} \quad [T(x)]^{\mathcal{E}} \quad [T(x^2)]^{\mathcal{E}} \right]$

$T(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow [T(1)]^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad T(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow [T(x)]^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$T(x^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow [T(x^2)]^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad [T]_{C_2}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim E_{[T]_{C_2}^{\mathcal{E}}} =$

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Result

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Dim}(\operatorname{Col}([T]_{C_2}^{\mathcal{E}})) = 3 \neq \operatorname{Dim}(\mathbb{R}_{2\times2}) = 4$

$\operatorname{Dim}(\mathbb{R}_2[x]) = \operatorname{Dim}(\operatorname{Im}(T)) + \operatorname{Dim}(\operatorname{nu}(T))$

$3 - 3 = \operatorname{Dim}(\operatorname{nu}(T)) = 0$

$\boxed{\text{T es un monomorfismo pero no un epimorfismo y un isomorfismo}}$

Ejercicio 2.15

lunes, 4 de octubre de 2021 18:56

2.15 Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^3)$ la transformación lineal definida por

$$[T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad [T(P)]^{e} = [T]^{e}_{B}\,[P]^{B}$$

donde $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son las bases de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente, definidas por

$$\mathcal{B} = \{1 + x^2, 1 + x, x + x^2\},$$
$$\mathcal{C} = \left\{ [1 \;\; 1 \;\; 0]^T, [1 \;\; 0 \;\; 1]^T, [0 \;\; 1 \;\; 1]^T \right\}.$$

(a) Analizar las propiedades de T.

(b) Hallar $T^{-1}\left([1 \;\; 0 \;\; 1]^T\right)$.

(a)

$$E_{[T]^e_B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Dim}\left(\mathrm{Nul}\left([T]^e_B\right)\right) = 1 \Rightarrow \boxed{T \text{ no es monomorfismo}}$$
$$\mathrm{Dim}\left(\mathrm{Nu}(T)\right) = 1$$

$$\left(\mathrm{Dim}\left(\mathrm{Col}\left([T]^e_B\right)\right) = 2\right) \neq \left(\mathrm{Dim}\left(\mathbb{R}^3\right) = 3\right) \Rightarrow \boxed{T \text{ no es epimorfismo}}$$

$$[T]^e_B \text{ no es invertible} \Rightarrow \boxed{T \text{ no es un isomorfismo}}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^C = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[T(P)]^e = [T]^e_B\,[P]^B \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} [P]^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [P]^B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \rightarrow x_1 = -x_3 \\ x_2 + x_3 = 1 \rightarrow x_2 = 1 - x_3 \end{cases}$$

$$[P]^B = \begin{bmatrix} -x_3 \\ 1 - x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; x_3 \in \mathbb{R}$$

Podría reemplazar directamente con estos los coeficientes de la base y llegar a lo mismo.

$$\Phi_B^{-1}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = T^{-1}\left([1\;0\;1]^T\right)$$

$$T^{-1}\left([1\;0\;1]^T\right) = 0(1+x^2) + 1(1+x) + 0(x+x^2) + \lambda\left(-(1+x^2) - (1+x) + 1(x+x^2)\right) = 1 + x - 2\lambda, \; \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{T^{-1}\left([1\;0\;1]^T\right) = \left\{ P \in \mathbb{R}_2[x] \,/\, P = 1 + x - 2\lambda, \; \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Ejercicio 2.16

lunes, 4 de octubre de 2021 19:39

2.16 Sean $\mathbb{V} = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A^T = A\}$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de las matrices simétricas de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, y $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{R}^3)$ tal que

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

donde es la matriz de T con respecto a las bases $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ de $\mathbb{V}$ y $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$ de $\mathbb{R}^3$. Hallar el conjunto solución de la ecuación $T(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

$$[T(x)]^{e} = [T]_B^{e}\,[x]^B$$

$$\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}^{e} = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \Big/ \; a\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \qquad [x]^B = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&1\\1&0&1&0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{array}\right] \to \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

$$[x]^B = \begin{bmatrix}-x_3\\1-x_3\\x_3\end{bmatrix} \to x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Phi_B^{-1}\left(\begin{bmatrix}-x_3\\1-x_3\\x_3\end{bmatrix}\right) = \left\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} / T(A) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\right\}$$

$$\Phi_B^{-1}\left(\begin{bmatrix}-x_3\\1-x_3\\x_3\end{bmatrix}\right) = -\lambda\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix} + (1-\lambda)\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix}1&-1\\-1&-1\end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{SOL = \left\{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} / A = \begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix}1&-1\\-1&-1\end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}}$$

Ejercicio 2.17

martes, 5 de octubre de 2021 13:43

2.17 [ver **Ejercicio 1.26**] Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^3)$ la transformación lineal definida por

$$[T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

donde $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son las bases de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}^3$, respectivamente, definidas por

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{2}x(x-1), -x(x-2), \frac{1}{2}(x-1)(x-2) \right\},$$
$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T \right\}.$$

(a) Analizar las propiedades de T.

(b) Hallar la matriz de T con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}_2[x]$ y la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$.

(c) Hallar la matriz de T con respecto a la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ y la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(d) Hallar la matriz de T con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}_2[x]$ y $\mathbb{R}^3$.

(e) Hallar la imagen por T del subespacio gen $\{2 + 3x + 2x^2, 5 + 5x + 4x^2\}$.

(a)

$$[T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \sim E_{[T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$ Se deduce que

$\mathrm{Nul}([T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}) = \{0\} \Longrightarrow$ T es un monomorfismo.

$\mathrm{Col}([T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}) = \mathbb{R}^3 \Longrightarrow$ T es un epimorfismo.

$[T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$ es inversible $\Longrightarrow$ T es un isomorfismo.

(b)

$[T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}_p}$? $\quad \mathcal{E}_p = \{1, x, x^2\}$

$$[T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}_p} = [T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \cdot M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_p}$$

$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_p}$ como $\mathcal{B}$ es la base de Lagrange en 2, 1 y 0 la matriz de cambio de coordenadas se obtiene evaluando los polinomios de la base canonica en 2, 1 y 0

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_p} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}_p} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}_p} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & -6 \end{bmatrix}}$$

(c)

$[T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$, $\quad \mathcal{E} = \{[1\ 0\ 0]^T, [0\ 1\ 0]^T, [0\ 0\ 1]^T\}$

$$[T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{C}} [T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$$

$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{C}}$ es fácil de conseguir ya que son los vectores de $\mathcal{C}$ respecto a la base canonica, es decir, los mismos vectores en una matriz

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & -3 \\ -6 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & -3 \\ -6 & 5 & 9 \end{bmatrix}}$$

$$M^{\mathcal{E}}_{\cancel{\mathcal{C}}} [T]^{\cancel{\mathcal{C}}}_{\cancel{\mathcal{B}}} M^{\cancel{\mathcal{B}}}_{\mathcal{E}_p} = [T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$$

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{C}} \, M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_p}$$

(D)

$$[T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}_p} = \underbrace{[T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}_p}}_{\text{Que ya los tengo}} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & -3 \\ -6 & 5 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 10 \\ 8 & -7 & -19 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}_p} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 10 \\ 8 & -7 & -19 \end{bmatrix}}$$

(e)

$$[2 + 3x + 2x^2]^{\mathcal{E}_p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad [T(p)]^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 10 \\ 8 & -7 & -19 \end{bmatrix} [p]^{\mathcal{E}_p}$$

Recordar que $T(\text{gen}\{2+3x+2x^2, 5+5x+4x^2\}) = \text{gen}\{T(2+3x+2x^2), T(5+5x+4x^2)\}$

$$[5 + 5x + 4x^2]^{\mathcal{E}_p} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$[T(2+3x+2x^2)]^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 10 \\ 8 & -7 & -19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 28 \\ -43 \end{bmatrix}$$

$$[T(5+5x+4x^2)]^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 10 \\ 8 & -7 & -19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 71 \\ 50 \\ -71 \end{bmatrix}$$

Recordar que esas fueron las coordenadas en la base canonica, faltaria ponerlas como coeficientes y hacer la CL, pero como es la base canónica, nos lleva a los mismos vectores

$$\boxed{T(\text{gen}\{2+3x+2x^2, 5+5x+4x^2\}) = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 34 \\ 28 \\ -43 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 71 \\ 50 \\ -71 \end{bmatrix} \right\}}$$

Ejercicio 2.18

martes, 5 de octubre de 2021 17:28

2.18 Sea $T_1 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la transformación lineal definida en el **Ejercicio 2.10**, y sea $T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[x])$ la transformación lineal definida por

$$T_2\left(\begin{bmatrix} a & b & c\end{bmatrix}^T\right) := (a+b) + (a+c)x + (b+c)x^2.$$

(a) Hallar las matrices de T_1, T_2 y T_2^{-1} con respecto a las bases canónicas que correspondan.

(b) Hallar la matriz de $T_1 \circ T_2^{-1}$ con respecto a las mismas bases y utilizarla para hallar una base de $\mathrm{Nu}(T_1 \circ T_2^{-1})$.

(a)

2.10 Sea $\mathcal{B}$ la base de $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\right\},$$

y sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal que actúa sobre la base $\mathcal{B}$ de la siguiente manera

$$T\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix}1 & -\frac{3}{2} & 2\end{bmatrix}^T,$$
$$T\left(\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix}-3 & \frac{9}{2} & -6\end{bmatrix}^T,$$
$$T\left(\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix}2 & -3 & 4\end{bmatrix}^T.$$

$\mathcal{E} = \{[1\,0\,0]^T, [0\,1\,0]^T, [0\,0\,1]^T\}$

$[T_1]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \left[[T_1([1\,0\,0]^T)]^{\mathcal{E}}\ [T_1([0\,1\,0]^T)]^{\mathcal{E}}\ [T_1([0\,0\,1]^T)]^{\mathcal{E}} \right]$

$T_1([1\,0\,0]^T) = T_1\left(\frac{1}{2}[1\,1\,0]^T + \frac{1}{2}[1\,-1\,0]^T\right)$

$= \frac{1}{2}T_1([1\,1\,0]^T) + \frac{1}{2}T_1([1\,-1\,0])$

$= \frac{1}{2}[1\ -\frac{3}{2}\ 2]^T + \frac{1}{2}[-3\ \frac{9}{2}\ -6]^T = [-1\ \ \frac{3}{2}\ -2]^T$

$T_1([0\,1\,0]^T) = \frac{1}{2}T_1([1\,1\,0]^T) - \frac{1}{2}T_1([1\,-1\,0])$

$= \frac{1}{2}[1\ -\frac{3}{2}\ 2]^T - \frac{1}{2}[-3\ \frac{9}{2}\ -6]^T = [2\ -3\ 4]^T$

$T([0\,0\,1]^T) = [2\ -3\ 4]^T$

$$\boxed{[T_1]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & -3 & -3 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix}}$$

$[T_2]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}_P}?$, $\mathcal{E}_P = \{1, x, x^2\}$

$[T_2]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}_P} = \left[[T_2([1\,0\,0]^T)]^{\mathcal{E}_P}\ [T_2([0\,1\,0]^T)]^{\mathcal{E}_P}\ [T_2([0\,0\,1]^T)]^{\mathcal{E}_P} \right]$

$T_2([1\,0\,0]^T) = 1 + x$

$T_2([0\,1\,0]^T) = 1 + x^2$

$T_2([0\,0\,1]^T) = x + x^2$

$$\boxed{[T_2]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}_P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

$[T_2^{-1}]_{\mathcal{E}_P}^{\mathcal{E}} = \left([T_2]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}_P}\right)^{-1}$

$\left([T_2]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}_P}\right)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\boxed{[T_2^{-1}]_{\mathcal{E}_P}^{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$$

(b)

$[T_1 \circ T_2^{-1}]_{\mathcal{E}_P}^{\mathcal{E}} = [T_1]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}[T_2^{-1}]_{\mathcal{E}_P}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ \frac{3}{2} & -3 & -3 \\ -2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{15}{4} \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

$[T_1 \circ T_2^{-1}]_{\mathcal{E}_P}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{15}{4} \\ -1 & -1 & 5 \end{bmatrix} \sim E_{[T_1 \circ T_2^{-1}]_{\mathcal{E}_P}^{\mathcal{E}}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\mathrm{nul}([T_1 \circ T_2^{-1}]_{\mathcal{E}_P}^{\mathcal{E}}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\{x_1 + x_2 - 5x_3 = 0$

$\begin{bmatrix} -x_2 + 5x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\mathrm{nul}([T_1 \circ T_2^{-1}]_{\mathcal{E}_P}^{\mathcal{E}}) = \mathrm{gen}\{[-1\,1\,0]^T, [5\,0\,1]^T\}$

El nucleo se obtiene con Φ^{-1} de el $\mathrm{nul}([T_1 \circ T_2^{-1}]_{\mathcal{E}_P}^{\mathcal{E}})$ (usando los vectores de coordenadas en la base del dominio en que se basa la matriz)

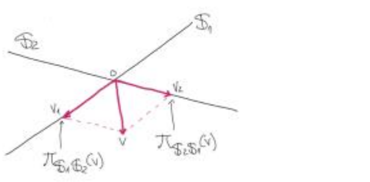
$\mathrm{nu}(T_1 \circ T_2^{-1}) = \mathrm{gen}\{-1 + x, 5 + x^2\}$

$$\boxed{B_{\mathrm{nu}(T_1 \circ T_2^{-1})} = \{-1 + x, 5 + x^2\}}$$

Ejercicio 2.19

jueves, 7 de octubre de 2021 03:32

2.19 Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y sean $\mathbb{S}_1, \mathbb{S}_2$ dos subespacios suplementarios de $\mathbb{V}$, esto es, todo vector $v \in \mathbb{V}$ se escribe de manera única como $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in \mathbb{S}_1$ y $v_2 \in \mathbb{S}_2$.



La proyección de $\mathbb{V}$ *sobre* $\mathbb{S}_1$ *en la dirección de* $\mathbb{S}_2$, denotada por $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$, es la transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}$ definida por

$$\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) := v_1.$$

Análogamente, se define $\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}$ por $\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}(v) := v_2$.

(a) Explicar por qué $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$ es la única transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}$ tal que

$$\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) = \begin{cases} v & \text{si } v \in \mathbb{S}_1, \\ 0 & \text{si } v \in \mathbb{S}_2, \end{cases}$$

y comprobar que $\mathbb{V} = \mathrm{Im}(\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}) \oplus \mathrm{Nu}(\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2})$.

(b) Comprobar que $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$ posee la propiedad de *idempotencia*: $\Pi^2_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} = \Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$.

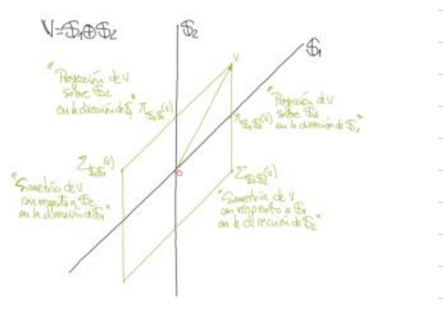
(c) Observar que $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} + \Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1} = I_{\mathbb{V}}$.

(d) Mostrar que $\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} := I_{\mathbb{V}} - 2\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}$ es la única transformación lineal de $\mathbb{V}$ en $\mathbb{V}$ tal que

$$\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) = \begin{cases} v & \text{si } v \in \mathbb{S}_1, \\ -v & \text{si } v \in \mathbb{S}_2, \end{cases}$$

razón por la cual $\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$ de denomina *la simetría de* $\mathbb{V}$ *con respecto a* $\mathbb{S}_1$ *en la dirección de* $\mathbb{S}_2$.

(e) Explicar por qué $\Sigma^2_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} = I_{\mathbb{V}}$.



Proyecciones y simetrías inducidas por una partición de $\mathbb{V}$ en suma directa de dos subespacios $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$.

(a) $\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2 = \mathbb{V} \Rightarrow \mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2 = \{0\}$, $v \in \mathbb{V} / v = v_1 + v_2$, $v_1 \in \mathbb{S}_1 \wedge v_2 \in \mathbb{S}_2$

Suponemos que existe T: $T(v) = \begin{cases} v \text{ si } v \in \mathbb{S}_1 \\ 0 \text{ si } v \in \mathbb{S}_2 \end{cases}$, si $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in \mathbb{S}_1 \wedge v_2 \in \mathbb{S}_2$ $\therefore$ $T(v) = T(v_1 + v_2) \overset{\text{por prop TL}}{=} T(v_1) + T(v_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \text{Como } v_1 \in \mathbb{S}_1 \Rightarrow T(v_1) = v_1 \\ \text{Como } v_2 \in \mathbb{S}_2 \Rightarrow T(v_2) = 0 \end{array}\right\}$ $T(v) = v_1$, $T(v) \in \mathbb{S}_1$ la imagen de $T(v)$ es la proyección de v sobre $\mathbb{S}_1$ en la dirección de $\mathbb{S}_2$, siempre cae en la misma transformación

$$\boxed{\therefore \pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) = \begin{cases} v \text{ si } v \in \mathbb{S}_1 \\ 0 \text{ si } v \in \mathbb{S}_2 \end{cases} \text{ es la única TL de } \mathbb{V} \text{ en } \mathbb{V} \text{ que cumple esto}}$$

$\mathrm{Im}(T) = \{w \in \mathbb{V} : \exists v : T(v) = w\}$

Como se puede ver dado que $\pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) = v$ si $v \in \mathbb{S}_1$ deducimos $\mathrm{Im}(\pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}) = \mathbb{S}_1$

$\mathrm{Nu}(T) = \{v \in \mathbb{V} : T(v) = 0\}$

Como $\pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) = 0$ si $v \in \mathbb{S}_2$ deducimos $\mathrm{Nu}(\pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}) = \mathbb{S}_2$

$\Rightarrow \mathrm{Im}(\pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}) \oplus \mathrm{Nu}(\pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}) = \mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2 \overset{\text{por enunciado}}{=} \mathbb{V}$ $\quad\boxed{\therefore \mathrm{Im}(\pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}) \oplus \mathrm{Nu}(\pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}) = \mathbb{V}}$

(b)

1. $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$ *es la única transformación lineal de* $\mathbb{V}$ *en* $\mathbb{V}$ *tal que*

(3) $$\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) = \begin{cases} v & si\ v \in \mathbb{S}_1, \\ 0 & si\ v \in \mathbb{S}_2. \end{cases}$$

2. $\Pi^2_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} = \Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$. (Idempotencia)

También demuestra (a)

Demostración. Suponemos que $\dim(\mathbb{V}) = n$. Elegimos $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ una base de $\mathbb{S}_1$ y $\mathcal{B}_2 = \{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ una base de $\mathbb{S}_2$. Por definición,

$$\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v_j) = \begin{cases} v_j & \text{si } j \in \{1, \dots, k\}, \\ 0 & \text{si } j \in \{k+1, \dots, n\}. \end{cases}$$

Como la restricción de una transformación lineal T a una base $\mathcal{B}$ determina unívocamente a T, cualquier $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ que satisfaga (3) debe coincidir con $\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$. La idempotencia es inmediata por definición, escribimos $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in \mathbb{S}_1$ y $v_2 \in \mathbb{S}_2$ y operamos

$$\Pi^2_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) = (\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} \circ \Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2})(v) = \Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v)) = \Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v_1) = v_1 = \Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v).$$

(d) $I_{\mathbb{V}} : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ es la transformación lineal identidad de $\mathbb{V}$

Supongamos que $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in \mathbb{S}_1 \wedge v_2 \in \mathbb{S}_2$

$$\begin{aligned} I_{\mathbb{V}}(v) - 2\pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}(v) &= I_{\mathbb{V}}(v_1 + v_2) - 2\pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}(v_1 + v_2) \\ &= I_{\mathbb{V}}(v_1) + I_{\mathbb{V}}(v_2) - 2(\pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}(v_1) + \pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}(v_2)) \\ &= v_1 + v_2 - 2(0 + v_2) \\ &= v_1 - v_2 = \Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) \end{aligned}$$

Luego, sea $\mathrm{Dim}(\mathbb{V}) = n$, $B_1 = (v_1, \dots, v_k)$ una base de $\mathbb{S}_1$ y $B_2 = \{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ una base de $\mathbb{S}_2$, $B_1 \cup B_2 = B$ una base de $\mathbb{V}$

Como $\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) = \begin{cases} v \text{ si } v \in \mathbb{S}_1 \\ -v \text{ si } v \in \mathbb{S}_2 \end{cases}$ está definida sobre una base de $\mathbb{V}$, entonces define unívocamente a la transformación lineal

(e) $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in \mathbb{S}_1 \wedge v_2 \in \mathbb{S}_2$ $\qquad \Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) = \begin{cases} v \text{ si } v \in \mathbb{S}_1 \\ -v \text{ si } v \in \mathbb{S}_2 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Sigma^2_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) = (\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} \circ \Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2})(v) &= \Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v)) \\ &= \Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v_1 + v_2)) \\ &= \Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v_1) + \Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v_2)) \\ &= \Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v_1 - v_2) \\ &= \Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v_1) - \Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v_2) \\ &= v_1 - (-v_2) \\ &= v_1 + v_2 = v \end{aligned}$$

$$\boxed{\therefore \Sigma^2_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(v) = v}$$

Ejercicio 2.20

jueves, 7 de octubre de 2021 18:36

2.20 Sean $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 3, $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{V}$, $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ los subespacios de $\mathbb{V}$ definidos por

$$\mathbb{S}_1 = \text{gen}\{v_1 - 2v_2, v_1 + v_3\}, \quad \mathbb{S}_2 = \text{gen}\{v_2 - v_3\}.$$

(a) Comprobar que $\mathbb{V} = \mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2$.

(b) Hallar las matrices con respecto a la base $\mathcal{B}$ de las proyecciones y simetrías inducidas por la partición $\mathbb{V} = \mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2$.

(a) $\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2 = \{0\} \Rightarrow \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2 = \text{gen}\{v_1 - 2v_2, v_1 + v_3, v_2 - v_3\}$, como $\{v_1 - 2v_2, v_1 + v_3, v_2 - v_3\}$ son Li,

$\Rightarrow \mathbb{V} = \mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2$

(B) $B' = \{v_1 - 2v_2, v_1 + v_3, v_2 - v_3\}$, $[\mathbb{S}_1]^{B'} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$, $[\mathbb{S}_2]^{B'} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

1.3. Forma canónica de las representaciones matriciales.

Lema 1.5. *Si $\mathbb{V} = \mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{S}_2$, donde $\dim(\mathbb{V}) = n$, $\dim(\mathbb{S}_1) = k$ y $\dim(\mathbb{S}_2) = n - k$, $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \dots, v_k\}$ es una base de $\mathbb{S}_1$ y $\mathcal{B}_2 = \{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{S}_2$, entonces $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$ tal que*

$$[\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} I_{k\times k} & 0_{k\times(n-k)} \\ 0_{(n-k)\times k} & 0_{(n-k)\times(n-k)} \end{bmatrix},$$

$$[\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} I_{k\times k} & 0_{k\times(n-k)} \\ 0_{(n-k)\times k} & -I_{(n-k)\times(n-k)} \end{bmatrix}$$

Demostración. Se deduce inmedatamente de (3) y (4). □

$$\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} + \Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1} = I_{\mathbb{V}},$$
$$\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} + \Sigma_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1} = 0_{\mathbb{V}^{\mathbb{V}}},$$
$$\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} + 2\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1} = I_{\mathbb{V}},$$
$$\Sigma_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1} + 2\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2} = I_{\mathbb{V}}.$$

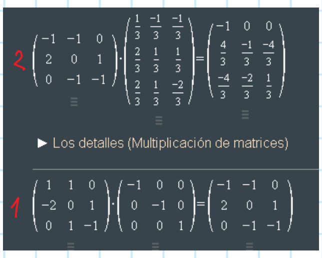
1

$[\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}]_{B'}^{B'} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$; $[\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}]_{B'}^{B'} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$; $[\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}]_{B'}^{B'} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$; $[\Sigma_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}]_{B'}^{B'} = \begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$$M_{B'}^{B} = \begin{bmatrix}1&1&0\\-2&0&1\\0&1&-1\end{bmatrix} \qquad M_{B}^{B'} = \left(M_{B'}^{B}\right)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\2&1&1\\2&1&-2\end{bmatrix}$$

$$[\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}]_B^B = \begin{bmatrix}1&1&0\\-2&0&1\\0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&-1&-1\\2&1&1\\2&1&-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{4}{3}&\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\\\frac{4}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

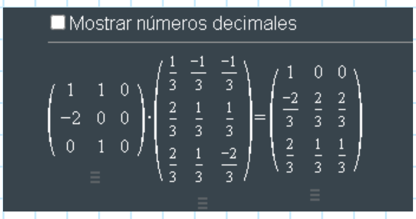
$[\Sigma_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}]_B^B = 0_{\mathbb{V}^{\mathbb{V}}} - [\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}]_B^B = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{4}{3}&\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\\\frac{4}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1&0&0\\\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{4}{3}\\-\frac{4}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$, otra forma:



$$\boxed{[\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}]_B^B = \begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{4}{3}&\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\\\frac{4}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}} \qquad \boxed{[\Sigma_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}] = \begin{bmatrix}-1&0&0\\\frac{4}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{4}{3}\\-\frac{4}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}}$$

$$[\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}]_B^B = \frac{1}{2}\left(I_{\mathbb{V}} - [\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}]_B^B\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{4}{3}&\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\\\frac{4}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0&0&0\\\frac{4}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{4}{3}\\-\frac{4}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{4}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}$$

$[\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}]_B^B = I_{\mathbb{V}} - \Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$, otra formal $M_{B'}^{B}\,[\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}]_{B'}^{B'}\,M_B^{B'} =$



$$\boxed{[\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}]_B^B = \begin{bmatrix}0&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}} \qquad \boxed{[\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_1}]_B^B = \begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}}$$

Aclaración: Podría haber hecho una $B'' = \{v_2 - v_3, v_1 - 2v_2, v_1 + v_3\}$ y así obtener $[\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}]_{B''}^{B''}$ y $[\Sigma_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}]_{B''}^{B''}$ usando la matriz de la teoría

$[\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}]_{B''}^{B''} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ $[\Sigma_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}]_{B''}^{B''} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ y uso $M_{\mathcal{E}}^{B''}$ y $M_{B''}^{\mathcal{E}}$

Ejercicio 2.21

jueves, 7 de octubre de 2021 20:18

2.21 , Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ a matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 16 & 11 \\ 5 & 9 & 6 \\ 0 & 16 & 14 \end{bmatrix}$$

(a) Comprobar que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{nul}(A) \oplus \operatorname{fil}(A)$.

(b) Hallar las matrices con respecto a la base canónica de las proyecciones y simetrías inducidas por la partición $\mathbb{R}^3 = \operatorname{nul}(A) \oplus \operatorname{fil}(A)$.

(a)

$$E_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{8} \\ 0 & 1 & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{8} \\ 0 & 1 & \frac{7}{8} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} x_1 - \frac{3}{8}x_3 = 0 \to x_1 = \frac{3}{8}x_3 \\ x_2 + \frac{7}{8}x_3 = 0 \to x_2 = -\frac{7}{8}x_3 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \frac{3}{8}x_3 \\ -\frac{7}{8}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ -\frac{7}{8} \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \operatorname{nul}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ -\frac{7}{8} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$E_{A^T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & -16 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{Fil}(A) = \operatorname{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\operatorname{nul}(A) \cap \operatorname{Fil}(A) = 0 \Rightarrow \operatorname{nul}(A) + \operatorname{Fil}(A) = \operatorname{gen}\left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ -\frac{7}{8} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix} \right\} = \mathbb{R}^3$$

$$B' = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ -\frac{7}{8} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{bmatrix} \right\} \qquad \operatorname{nul}(A) = \mathbb{S}_1 , \quad \operatorname{Fil}(A) = \mathbb{S}_2$$

$$[\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}]^{B'}_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad [\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}]^{B'}_{B'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}]^{B'}_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad [\Sigma_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}]^{B'}_{B'} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^{\mathcal{E}}_{B'} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & 8 & 5 \\ -\frac{7}{8} & 16 & 9 \\ 1 & 11 & 6 \end{bmatrix} \qquad M^{B'}_{\mathcal{E}} = \left(M^{\mathcal{E}}_{B'}\right)^{-1} = \frac{1}{122}\begin{bmatrix} 24 & -56 & 64 \\ -114 & 22 & 62 \\ 205 & -31 & -104 \end{bmatrix}$$

$$[\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = M^{\mathcal{E}}_{B'} [\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}]^{B'}_{B'} M^{B'}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & 8 & 5 \\ -\frac{7}{8} & 16 & 9 \\ 1 & 11 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{122}\begin{bmatrix} 24 & -56 & 64 \\ -114 & 22 & 62 \\ 205 & -31 & -104 \end{bmatrix} = \frac{1}{61}\begin{bmatrix} -52 & -21 & 24 \\ -21 & -12 & -56 \\ 24 & -56 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[\Sigma_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \mathbb{O}_{\mathbb{V}} - [\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{61}\begin{bmatrix} -52 & -21 & 24 \\ -21 & -12 & -56 \\ 24 & -56 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{61}\begin{bmatrix} 52 & 21 & -24 \\ 21 & 12 & 56 \\ -24 & 56 & -3 \end{bmatrix}$$

$$[\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \frac{1}{2}\left(I_{\mathbb{V}} - \Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{61}\begin{bmatrix} -52 & -21 & 24 \\ -21 & -12 & -56 \\ 24 & -56 & 3 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{113}{61} & \frac{21}{61} & -\frac{24}{61} \\ \frac{21}{61} & \frac{73}{61} & \frac{56}{61} \\ -\frac{24}{61} & \frac{56}{61} & \frac{58}{61} \end{bmatrix} = \frac{1}{122}\begin{bmatrix} 113 & 21 & -24 \\ 21 & 73 & 56 \\ -24 & 56 & 58 \end{bmatrix}$$

$$[\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = I_{\mathbb{V}} - [\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{122}\begin{bmatrix} 113 & 21 & -24 \\ 21 & 73 & 56 \\ -24 & 56 & 58 \end{bmatrix} = \frac{1}{122}\begin{bmatrix} -1 & -21 & 24 \\ -21 & 49 & -56 \\ 24 & -56 & 64 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \frac{1}{61}\begin{bmatrix} -52 & -21 & 24 \\ -21 & -12 & -56 \\ 24 & -56 & 3 \end{bmatrix} \quad [\Sigma_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \frac{1}{61}\begin{bmatrix} 52 & 21 & -24 \\ 21 & 12 & 56 \\ -24 & 56 & -3 \end{bmatrix} \quad [\Pi_{\mathbb{S}_2\mathbb{S}_1}]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \frac{1}{122}\begin{bmatrix} 113 & 21 & -24 \\ 21 & 73 & 56 \\ -24 & 56 & 58 \end{bmatrix} \quad [\Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \frac{1}{122}\begin{bmatrix} -1 & -21 & 24 \\ -21 & 49 & -56 \\ 24 & -56 & 64 \end{bmatrix}}$$

Ejercicio 2.22

jueves, 7 de octubre de 2021 21:45

2.22 Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la transformación lineal definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}}_{A_T} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Hallar la matriz con respecto a la base canónica de la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathrm{Im}(T)$ en la dirección de $\mathrm{Nu}(T)$.

$$\mathrm{Nu}(T) = \mathrm{Nul}(A_T)$$

$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Col}(A_T)$$

$$E_{A_T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad B_{\mathrm{Nul}(A_T)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$B_{\mathrm{Nu}(T)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$B_{\mathrm{Col}(A_T)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow B_{\mathrm{Im}(T)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} \qquad B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\left[\Pi_{\mathrm{Im}(T)\,\mathrm{Nu}(T)}\right]_{B'}^{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_{B'}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_{\mathcal{E}}^{B'} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\left[\Pi_{\mathrm{Im}(T)\,\mathrm{Nu}(T)}\right]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = M_{B'}^{\mathcal{E}} \left[\Pi_{\mathrm{Im}(T)\,\mathrm{Nu}(T)}\right]_{B'}^{B'} M_{\mathcal{E}}^{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2.23

jueves, 7 de octubre de 2021 22:24

2.23 Verificar las siguientes afirmaciones.

(**a**) Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $T^2 = T$, entonces T es la proyección de $\mathbb{V}$ sobre $\operatorname{Im}(T)$ en la dirección de $\operatorname{Nu}(T)$.

(**b**) Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $T^2 = T$, entonces $S = I_{\mathbb{V}} - 2T$ es tal que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$.

(**c**) Si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$, entonces $T = \frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)$ es tal que $T^2 = T$.

(**d**) Si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$, entonces S es la simetría de $\mathbb{V}$ con respecto a $\operatorname{Nu}\left(\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)\right)$ en la dirección de $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)\right)$.

(**e**) Si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$, entonces $\mathbb{V} = \operatorname{Nu}(S - I_{\mathbb{V}}) \oplus \operatorname{Nu}(S + I_{\mathbb{V}})$.

(a)

Lema 1.6. *Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $T^2 = T$, entonces T es la proyección de $\mathbb{V}$ sobre $\operatorname{Im}(T)$ en la dirección de $\operatorname{Nu}(T)$.*

Demostración. Tenemos que comprobar dos puntos

1. $\mathbb{V} = \operatorname{Im}(T) \oplus \operatorname{Nu}(T)$.
2. $$T(v) = \begin{cases} v & \text{si } v \in \operatorname{Im}(T), \\ 0 & \text{si } v \in \operatorname{Nu}(T). \end{cases}$$

En primer lugar, observamos que la identidad $\mathrm{I}_{\mathbb{V}} = T + (\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - T)$, implica que todo $v \in \mathbb{V}$ se puede descomponer en la forma

$$v = T(v) + (v - T(v)).$$

Ahora observamos que la propiedad $T^2 = T$ implica que $v - T(v) \in \operatorname{Nu}(T)$:

$$T(v - T(v)) = T(v) - T^2(v) = 0.$$

El argumento anterior nos permite concluir que

$$\mathbb{V} = \operatorname{Im}(T) + \operatorname{Nu}(T).$$

Para completar la prueba del primer punto tenemos que comprobar que

$$\operatorname{Im}(T) \cap \operatorname{Nu}(T) = \{0\}.$$

Consideramos $v \in \operatorname{Im}(T) \cap \operatorname{Nu}(T)$. Tenemos que $v = T(u)$ para algún $u \in \mathbb{V}$ y que $T(v) = 0$. Como $T(v) = T^2(u) = T(u) = v$ y $T(v) = 0$, se concluye que $v = 0$.

Notar que también comprobamos que si $v \in \operatorname{Im}(T)$, entonces $T(v) = v$, y como $T(v) = 0$ para todo $v \in \operatorname{Nu}(T)$, el segundo punto también quedó demostrado. □

(b)

Lema 1.7. *Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $T^2 = T$, entonces $S = \mathrm{I}_{\mathbb{V}} - 2T$ es tal que $S^2 = \mathrm{I}_{\mathbb{V}}$.*

Demostración. Usando que $T = \mathrm{I}_{\mathbb{V}} \circ T = T \circ \mathrm{I}_{\mathbb{V}}$ se puede comprobar que

$$S^2 = (\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - 2T)^2 = \mathrm{I}_{\mathbb{V}} - 4T + 4T^2 = \mathrm{I}_{\mathbb{V}}.$$

□

(c)

Lema 1.8. *Si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $S^2 = \mathrm{I}_{\mathbb{V}}$, entonces $T = \frac{1}{2}(\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - S)$ es tal que $T^2 = T$. En otras palabras, T es una proyección.*

Demostración. Usando que $S = \mathrm{I}_{\mathbb{V}} \circ S = S \circ \mathrm{I}_{\mathbb{V}}$ se puede comprobar que

$$T^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - S)^2 = \frac{1}{4}(\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - 2S + S^2) = \frac{1}{4}(2\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - 2S) = \frac{1}{2}(\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - S) = T.$$

□

(d)

Lema 1.9. *Si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $S^2 = \mathrm{I}_{\mathbb{V}}$, entonces S es la simetría de $\mathbb{V}$ con respecto a $\operatorname{Nu}(\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - S)$ en la dirección de $\operatorname{Im}(\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - S)$.*

Demostración. Como $T = \frac{1}{2}(\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - S)$ es una proyección tenemos que

$$\mathbb{V} = \operatorname{Im}(T) \oplus \operatorname{Nu}(T) = \operatorname{Im}(\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - S) \oplus \operatorname{Nu}(\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - S).$$

Tiene sentido hablar de la simetría de $\mathbb{V}$ con respecto a $\operatorname{Nu}(\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - S)$ en la dirección de $\operatorname{Im}(\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - S)$.

Esta claro que si $v \in \operatorname{Nu}(\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - S)$, entonces $S(v) = v$. Si $v \in \operatorname{Im}(\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - S)$, entonces

$$v = w - S(w)$$

para algún $w \in \mathbb{V}$ y de aquí se deduce que

$$S(v) = S(w) - S^2(w) = S(w) - w = -v$$

□

(e)

si $v \in \operatorname{Nu}(I_V - S)$, $S(v) = I_V$
si $v \in \operatorname{Nu}(I_V + S)$, $S(v) = -I_V$ $\Rightarrow \operatorname{Nu}(I_V - S) \cap \operatorname{Nu}(I_V + S) = \{0\}$

$\therefore \operatorname{Nu}(I_V - S) \oplus \operatorname{Nu}(I_V + S)$

Ejercicio 2.24

jueves, 7 de octubre de 2021 23:16

2.24 Sean $T, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ las transformaciones lineales definidas por

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right) := \underbrace{\begin{bmatrix}1/2 & 0 & -1/2\\0 & 0 & 0\\-1/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix}}_{[T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = A_T}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \text{ y } S\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right) := \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}}_{[S]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}.$$

(**a**) Comprobar que T es una proyección y hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

$[T \circ T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = T \circ T$

(**b**) Comprobar que S es una simetría y hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$[S]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix}.$$

(a)

Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $T^2 = T$, entonces T es la proyección de $\mathbb{V}$ sobre $\mathrm{Im}(T)$ en la dirección $\mathrm{Nu}(T)$

$$T \circ T = [T]^{\mathcal{E}} \cdot [T]^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix}1/2 & 0 & -1/2\\0 & 0 & 0\\-1/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/2 & 0 & -1/2\\0 & 0 & 0\\-1/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/2 & 0 & -1/2\\0 & 0 & 0\\-1/2 & 0 & 1/2\end{bmatrix} \Rightarrow T \text{ es una proyección}$$

$$\mathrm{Im}(T) = \mathrm{Col}(A_T), \quad E_{A_T} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \mathrm{Im}(T) = \left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\right\}$$

$$\mathrm{Nu}(T) = \mathrm{Nul}(A_T) \qquad \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad \left\{ x_1 - x_3 = 0 \right. \qquad \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_1\end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \qquad \mathrm{Nu}(T) = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

$$\boxed{B = \left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}}$$

(b)

Si $S \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $S^2 = I_{\mathbb{V}}$, entonces S es la simetría de $\mathbb{V}$ con respecto a $\mathrm{Nu}\left(\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)\right)$ en la dirección de $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)\right)$

$$\tfrac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)(x) = \tfrac{1}{2}(A_{I_{\mathbb{V}}} - A_S)\,x = \tfrac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}\right) x = \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2}\\0 & 1 & 0\\-\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}}_{A_{\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)}} x \qquad E_{A_{\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Nu}\left(\tfrac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)\right) = \mathrm{Nul}\left(A_{\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)}\right) \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} : \quad \left\{\begin{array}{l}x_1 - x_3 = 0\\x_2 = 0\end{array}\right. \longrightarrow \begin{bmatrix}x_1\\0\\x_1\end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} \qquad \mathrm{Nul}\left(A_{\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)}\right) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\mathrm{Im}\left(\tfrac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)\right) = \mathrm{Col}\left(A_{\frac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)}\right) \Rightarrow \mathrm{Im}\left(\tfrac{1}{2}(I_{\mathbb{V}} - S)\right) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

$$\boxed{B = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}}$$

Ejercicio 2.25

viernes, 8 de octubre de 2021 03:27

2.25 Sea $O(2,\mathbb{R}) := \{R_\theta, S_\theta : \theta \in \mathbb{R}\} \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ el conjunto de todas las transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ definidas por

$$R_\theta\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

$$S_\theta\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

(a) Hallar y graficar la imagen de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ por $R_{\pi/3}$ y explicar el significado geométrico de la acción de $R_{\pi/3}$ sobre los vectores de $\mathbb{R}^2$.

(b) Hallar y graficar la imagen de la base

$$\left\{\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}\right\}$$

por $S_{\pi/3}$ y explicar el significado geométrico de la acción de $S_{\pi/3}$ sobre los vectores de $\mathbb{R}^2$.

(c) Hallar y graficar la imagen de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ por R_θ y explicar el significado geométrico de la acción de R_θ sobre los vectores de $\mathbb{R}^2$.

(d) Comprobar que

$$\left\{\begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \operatorname{sen}(\theta/2) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(\theta/2) \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix}\right\}$$

es una base de $\mathbb{R}^2$ y hallar su imagen por S_θ.

(e) ¿Cuál es el signficado geométrico de la acción de S_θ sobre los vectores de $\mathbb{R}^2$?

(f) Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, hallar las matrices respecto a la base canónica de las siguientes transformaciones lineales, y en cada caso explicar su significado geométrico:

$$R_\alpha \circ R_\beta; \quad S_\alpha \circ S_\beta, \quad S_\alpha \circ R_\beta, \quad R_\beta \circ S_\alpha.$$

(g) Concluir que el conjunto $O(2,\mathbb{R})$ es cerrado por composiciones.

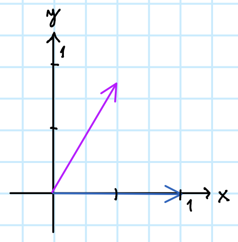
(h) Observar que $R_0 = I_{\mathbb{R}^2}$.

(i) Comprobar que R_θ y S_θ son isomorfismos y hallar R_θ^{-1} y S_θ^{-1}.

(a)

$$R_{\pi/3}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$R_{\pi/3}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

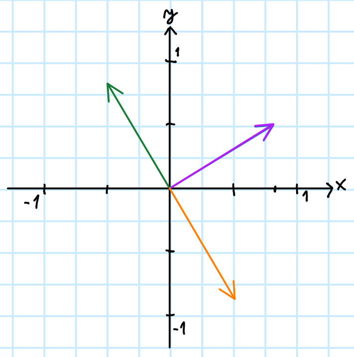


$R_{\pi/3}$ rota los vectores de $\mathbb{R}^2$ un angulo $\frac{\pi}{3}$ comprendido entre el vector y su transformado

(b)

$$S_{\pi/3}\left(\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1/2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\pi/3 & \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \\ \operatorname{sen}\pi/3 & -\cos\pi/3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$S_{\pi/3}\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

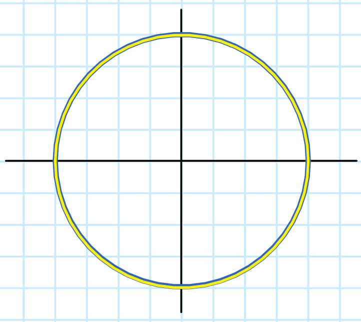


$S_{\pi/3}$ es la simetría axial con respecto a la recta que pasa por el origen y que tiene una inclinación de angulo $\frac{\pi/3}{2}$ respecto del eje X en el sentido antihorario

(c)

$$R_\theta\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$$

$$R_\theta = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$



R_θ toma algun vector y lo convierte en algun vector con origen en 0 y extremo en algun punto de la elipse (o circunferencia), formada por el vector original, ambos vectores están a un angulo θ de distancia

(d)

$$\begin{vmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{vmatrix} = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \operatorname{sen}^2(\theta) = 1$$, es una base.

$$S_\theta\left(\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

$$S_\theta\left(\begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix}$$

(e)

S_θ es la simetría axial con respecto a la recta que pasa por el origen y que tiene una inclinación del ángulo $\frac{\theta}{2}$ respecto del eje x en el sentido antihorario.

(f)

$$A_{R_\alpha \circ R_\beta} = A_{R_\alpha} A_{R_\beta} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\operatorname{sen}(\alpha+\beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = A_{R_{\alpha+\beta}} \Rightarrow R_\alpha \circ R_\beta = R_{\alpha+\beta}$$

Su significado geométrico es que rota el vector un angulo $\alpha+\beta$ en sentido antihorario

$$A_{R_\beta \circ S_\alpha} = A_{R_\beta} A_{S_\alpha} = \begin{bmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\beta+\alpha) & \operatorname{sen}(\beta+\alpha) \\ \operatorname{sen}(\beta+\alpha) & -\cos(\beta+\alpha) \end{bmatrix} = A_{S_{\beta+\alpha}} \Rightarrow R_\beta \circ S_\alpha = S_{\beta+\alpha}$$

S_θ es la simetría axial con respecto a la recta que pasa por el origen y que tiene una inclinación del ángulo $\frac{\beta+\alpha}{2}$ respecto del eje x en el sentido antihorario.

$$A_{S_\alpha \circ R_\beta} = A_{S_\alpha} A_{R_\beta} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha-\beta) & \operatorname{sen}(\alpha-\beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta) & -\cos(\alpha-\beta) \end{bmatrix} = A_{S_{\alpha-\beta}} \Rightarrow S_\alpha \circ R_\beta = S_{\alpha-\beta}$$

S_θ es la simetría axial con respecto a la recta que pasa por el origen y que tiene una inclinación del ángulo $\frac{\alpha-\beta}{2}$ respecto del eje x en el sentido antihorario.

$$A_{S_\alpha \circ S_\beta} = A_{S_\alpha} A_{S_\beta} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\beta & \operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & -\cos\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha-\beta) & -\operatorname{sen}(\alpha-\beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha-\beta) & \cos(\alpha-\beta) \end{bmatrix} = A_{R_{\alpha-\beta}} \Rightarrow S_\alpha \circ S_\beta = R_{\alpha-\beta}$$

Su significado geométrico es que rota el vector un angulo $\alpha-\beta$ en sentido antihorario

(g) "El conjunto $\mathbb{A}$ es cerrado por la operación $*$ significa que para cualquier pareja de elementos de $\mathbb{A}$, digamos a_1 y a_2, vale que $a_1 * a_2 \in \mathbb{A}$"
En (f) la composición de todos los elementos $O(2,\mathbb{R})$ nos lleva a otro elemento de $O(2,\mathbb{R})$, por lo tanto, se puede afirmar que el conjunto $O(2,\mathbb{R})$ es cerrado por composiciones

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ es una matriz inversible, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

(i) R_θ y S_θ son isomorfismos si y solo si A_{R_θ} y A_θ son inversibles

$$\operatorname{Det}(A_{R_\theta}) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1 \quad \operatorname{Det}(A_{R_\theta}) \neq 0 \Rightarrow A_{R_\theta} \text{ es inversible}$$

$\Downarrow$

R_θ y S_θ son isomorfismos

$\Uparrow$

$$\operatorname{Det}(A_{S_\theta}) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & -\cos\theta \end{vmatrix} = -1 \quad \operatorname{Det}(A_{S_\theta}) \neq 0 \Rightarrow A_{S_\theta} \text{ es inversible}$$

$$R_\theta^{-1}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$$

Ejercicio 2.26

viernes, 8 de octubre de 2021 12:25

2.26 Observar que la transformación lineal $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$R\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T\right) := \begin{bmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0\end{bmatrix}^T,$$
$$R\left(\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T\right) := \begin{bmatrix}-\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0\end{bmatrix}^T,$$
$$R\left(\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\right) := \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T,$$

es la rotación de ángulo θ en sentido antihorario del plano xy alrededor del eje z.

(a) Hallar y graficar la imagen de los siguientes vectores por la rotación de ángulo $\pi/4$ en sentido antihorario del plano xy alrededor del eje z:

$$v_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T, v_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T, v_3 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T.$$

(b) Hallar la matriz respecto de la base canónica de la rotación de ángulo θ en sentido antihorario del plano yz alrededor del eje x.

(c) Hallar la matriz respecto de la base canónica de la rotación de ángulo θ en sentido antihorario zx alrededor del eje y.

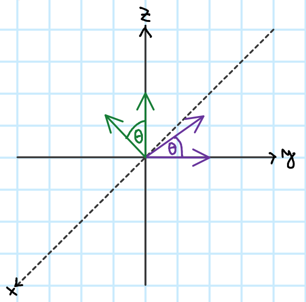
(a)

$$R_{\pi/4}([1\ 0\ 0]^T) = [\cos\tfrac{\pi}{4}\ \ \operatorname{sen}\tfrac{\pi}{4}\ \ 0]^T = [\tfrac{\sqrt2}{2}\ \ \tfrac{\sqrt2}{2}\ \ 0]^T$$

$$R_{\pi/4}([1\ 1\ 0]^T) = R_{\pi/4}([1\ 0\ 0]^T + [0\ 1\ 0]^T) = R_{\pi/4}([1\ 0\ 0]) + R_{\pi/4}([0\ 1\ 0]) = [\tfrac{\sqrt2}{2}\ \tfrac{\sqrt2}{2}\ 0]^T + [-\tfrac{\sqrt2}{2}\ \tfrac{\sqrt2}{2}\ 0]^T = [0\ \sqrt2\ 0]^T$$

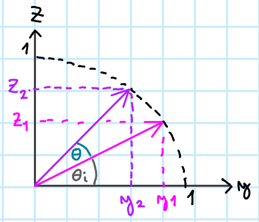
$$R_{\pi/4}([1\ 0\ 1]^T) = R_{\pi/4}([1\ 0\ 0]^T + [0\ 0\ 1]^T) = R_{\pi/4}([1\ 0\ 0]) + R_{\pi/4}([0\ 0\ 1]) = [\tfrac{\sqrt2}{2}\ \tfrac{\sqrt2}{2}\ 0]^T + [0\ 0\ 1]^T = [\tfrac{\sqrt2}{2}\ \tfrac{\sqrt2}{2}\ 1]^T$$

(b)



$$y_2 = \cos(\theta+\theta_i) = \cos(\theta)\underbrace{\cos(\theta_i)}_{y_1} - \operatorname{sen}(\theta)\underbrace{\operatorname{sen}(\theta_i)}_{z_1}$$
$$= \cos(\theta)\,y_1 - \operatorname{sen}(\theta)\,z_1$$

$$z_2 = \operatorname{sen}(\theta+\theta_i) = \operatorname{sen}(\theta)\underbrace{\cos(\theta_i)}_{y_1} + \cos(\theta)\underbrace{\operatorname{sen}(\theta_i)}_{z_1}$$
$$= \operatorname{sen}(\theta)\,y_1 + \cos(\theta)\,z_1$$



$[y_2\ z_2] = R_\theta([y_1\ z_1])$

$[y_1\ z_1]$

$\cos\theta_i = \frac{y_1}{1}$ $\operatorname{sen}\theta_i = \frac{z_1}{1}$

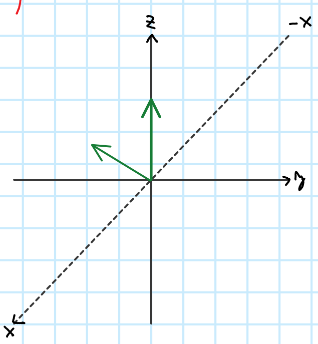
$x_2 = x_1$

$$\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_1\\ \cos(\theta)y_1 - \operatorname{sen}(\theta)z_1\\ \operatorname{sen}(\theta)y_1 + \cos(\theta)z_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta)\\ 0 & \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}$$

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$
$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$
$\sin(x) = -\sin(-x)$
$\cos(x) = \cos(-x)$

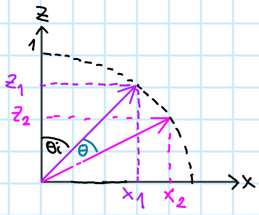
$$[R_{x\theta}]_E^E = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta)\\ 0 & \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta)\end{bmatrix}$$

(c)



$$z_2 = \cos(\theta+\theta_i) = \cos(\theta)\underbrace{\cos(\theta_i)}_{z_1} - \operatorname{sen}(\theta)\underbrace{\operatorname{sen}(\theta_i)}_{x_1}$$
$$= -\cos(\theta)\,z_1 - \operatorname{sen}(\theta)\,x_1$$

$$x_2 = \operatorname{sen}(\theta+\theta_i) = \operatorname{sen}(\theta)\underbrace{\cos(\theta_i)}_{z_1} + \cos(\theta)\underbrace{\operatorname{sen}(\theta_i)}_{x_1}$$
$$= \operatorname{sen}(\theta)\,z_1 + \cos(\theta)\,x_1$$



$[x_2\ z_2] = R_\theta([x_1\ z_1])$

$[x_1\ z_1]$

$\operatorname{sen}(\theta_i) = \frac{x_1}{1}$ $\cos\theta_i = \frac{z_1}{1}$

$$\begin{bmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\theta)x_1 + \operatorname{sen}(\theta)z_1\\ y_1\\ -\operatorname{sen}(\theta)x_1 + \cos(\theta)z_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos(\theta) & 0 & \operatorname{sen}(\theta)\\ 0 & 1 & 0\\ -\operatorname{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{bmatrix}$$

$$\boxed{R_{y\theta} = \begin{bmatrix}\cos(\theta) & 0 & \operatorname{sen}(\theta)\\ 0 & 1 & 0\\ -\operatorname{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta)\end{bmatrix}}$$

Ejercicios para entregar Semana 5 (parte 1)

sábado, 9 de octubre de 2021 19:37

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \setminus \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$ una matriz arbitraria pero fija.

Analizar el comportamiento de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ definida por $T(X) := AX - XA$.

$$A = \begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix} \qquad T(x) = \begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1+bx_3 & ax_2+bx_4\\ cx_1+dx_3 & cx_2+dx_4\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ax_1+cx_2 & bx_1+dx_2\\ ax_3+cx_4 & bx_3+dx_4\end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -cx_2+bx_3 & -bx_1+(a-d)x_2+bx_4\\ cx_1+(d-a)x_3+cx_4 & cx_2-bx_3\end{bmatrix} \qquad \mathcal{E}_{\mathbb{R}^{2\times2}} = \left\{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}}_{\mathcal{E}_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}}_{\mathcal{E}_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}}_{\mathcal{E}_3}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}_{\mathcal{E}_4}\right\}$$

$$T(\mathcal{E}_1) = \begin{bmatrix} 0 & -b\\ c & 0\end{bmatrix} \to [T(\mathcal{E}_1)]^{\mathcal{E}_1} = \begin{bmatrix} 0\\ -b\\ c\\ 0\end{bmatrix}$$

$$[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ [T(\mathcal{E}_1)]^{\mathcal{E}_1} & [T(\mathcal{E}_2)]^{\mathcal{E}_2} & [T(\mathcal{E}_3)]^{\mathcal{E}_3} & [T(\mathcal{E}_4)]^{\mathcal{E}_4} \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -c & b & 0\\ -b & (a-d) & 0 & b\\ c & 0 & (d-a) & c\\ 0 & c & -b & 0\end{bmatrix}$$

Para $c \neq 0$:

$$E_{[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{d-a}{c} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{b}{c} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{d-a}{c} & 0\\ 0 & 1 & -\frac{b}{c} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \to \begin{cases} x_1 + \frac{d-a}{c}x_3 = 0\\ x_2 - \frac{b}{c}x_3 = 0\\ x_4 = 0\end{cases} \to \begin{bmatrix} \frac{a-d}{c}x_3\\ \frac{b}{c}x_3\\ x_3\\ 0\end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix} \frac{a-d}{c}\\ \frac{b}{c}\\ 1\\ 0\end{bmatrix} \to \operatorname{nul}([T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}) \neq \{0\}$$

1. T *es monomorfismo si, y sólo si,* $\operatorname{nul}\left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right) = \{0\}$.
2. T *es epimorfismo si, y sólo si,* $\operatorname{col}\left([T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}\right) = \mathbb{K}^m$.
3. T *es isomorfismo si, y sólo si,* $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ *es inversible.*

$$\operatorname{Rango}([T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}) = 3 = \operatorname{Dim}(\operatorname{Col}([T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}})) \Rightarrow \operatorname{Col}([T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}) \neq \mathbb{R}^4$$

Para $c \neq 0$, T no es monomorfismo, no es epimorfismo, no es isomorfismo

Input interpretation

$$\det([T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}) = \begin{vmatrix} 0 & -c & b & 0\\ -b & a-d & 0 & b\\ c & 0 & d-a & c\\ 0 & c & -b & 0\end{vmatrix}$$

Result

0

Para $c = 0$ y $b \neq 0$

$$[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b & 0\\ -b & (a-d) & 0 & b\\ 0 & 0 & (d-a) & 0\\ 0 & 0 & -b & 0\end{bmatrix} \sim E_{[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{d-a}{b} & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Analogamente a lo anterior.

Para $c=0 \wedge b \neq 0$, T no es monomorfismo, no es epimorfismo, no es isomorfismo

Para $c = 0 \wedge b = 0$

$$[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & (a-d) & 0 & 0\\ 0 & 0 & (d-a) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \sim E_{[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Analogamente a lo anterior.

Para $c=0 \wedge b = 0$, T no es monomorfismo, no es epimorfismo, no es isomorfismo

2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}^T\right) := \begin{bmatrix} -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 & -2x_1 + 2x_3 & -4x_1 - 2x_2 + 5x_3\end{bmatrix}^T.$$

(**a**) Mostrar que existen dos subespacios suplementarios $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ tales que $T = \Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$.

(**b**) Hallar la expresión de la simetría de $\mathbb{R}^3$ con respecto al subespacio $\mathbb{S}_1$ en la dirección del subespacio $\mathbb{S}_2$.

(**c**) Hallar una base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, donde $r = \dim(\mathbb{S}_1)$.

(a)

$$\operatorname{Nu}(T) = \{x \in \mathbb{R}^3 / T(x) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$$

$$\begin{bmatrix} -3x_1 - 2x_2 + 4x_3\\ -2x_1 + 2x_3\\ -4x_1 - 2x_2 + 5x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \to \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & -2 & 4\\ -2 & 0 & 2\\ -4 & -2 & 5\end{bmatrix}}_{A_T} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \to \begin{cases} x_1 - x_3 = 0\\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0\end{cases} \to \begin{bmatrix} x_3\\ \frac{1}{2}x_3\\ x_3\end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix} 1\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{bmatrix} \to \operatorname{Nu}(T) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{bmatrix}\right\} = \mathbb{S}_2$$

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Col}(A_T) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} -3\\ -2\\ -4\end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -2\\ 0\\ -2\end{bmatrix}\right\} = \mathbb{S}_1$$

$$\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2 = 0 \qquad \operatorname{Dim}(\mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2) = \operatorname{Dim}(\mathbb{S}_1) + \operatorname{Dim}(\mathbb{S}_2) - \operatorname{Dim}(\mathbb{S}_1 \cap \mathbb{S}_2) = 2 + 1 - 0 = 3 \qquad \mathbb{S}_1 + \mathbb{S}_2 = \mathbb{R}^3$$

$\mathbb{S}_1 = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} -3\\ -2\\ -4\end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -2\\ 0\\ -2\end{bmatrix}\right\}$ y $\mathbb{S}_2 = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{bmatrix}\right\}$ son dos subespacios suplementarios tales que $T = \Pi_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}$

(b)

$$B = \left\{\begin{bmatrix} -3\\ -2\\ -4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2\\ 0\\ -2\end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{bmatrix}\right\} \qquad [\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}]_B^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \qquad M_B^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1\\ -2 & 0 & \frac{1}{2}\\ -4 & -2 & 1\end{bmatrix} \qquad M_{\mathcal{E}}^B = (M_B^{\mathcal{E}})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 4 & 2 & -4\end{bmatrix}$$

$$[\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = A_T = M_B^{\mathcal{E}}\,[\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}]_B^B\,M_{\mathcal{E}}^B = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1\\ -2 & 0 & \frac{1}{2}\\ -4 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 4 & 2 & -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -4 & 8\\ -4 & -1 & 4\\ -8 & -4 & 9\end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}(x) = [\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} \cdot x = \begin{bmatrix} -7 & -4 & 8\\ -4 & -1 & 4\\ -8 & -4 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7x_1 - 4x_2 + 8x_3\\ -4x_1 - x_2 + 4x_3\\ -8x_1 - 4x_2 + 9x_3\end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{\mathbb{S}_1\mathbb{S}_2}\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3\end{bmatrix}^T\right) = \begin{bmatrix} -7x_1 - 4x_2 + 8x_3 & -4x_1 - x_2 + 4x_3 & -8x_1 - 4x_2 + 9x_3\end{bmatrix}^T$$

(c)

$$B = \left\{\begin{bmatrix} -3\\ -2\\ -4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2\\ 0\\ -2\end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 1\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{bmatrix}\right\}$$

Ecuaciones diferenciales(método viejo)

martes, 12 de octubre de 2021 00:56

2.30 Se considera el operador diferencial $L : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ definido por

$$L := (D-2I)(D-4I)(D+3I)^2,$$

y la ecuación diferencial $L[y] = p$, donde $p(x) = 5x^3 e^{-3x}$.

Previamente demostrado: $\cdot\ nu((D-\lambda I)^K) = gen\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{K-1}e^{\lambda x}\}$ $\quad \cdot\ nu(L) = \bigoplus_{i=1}^{r} nu((D-\lambda_i I)^{k_i})$

$\cdot\ (D-\lambda I)^K[y] = g$, postulo una solución del tipo $y = F(x)e^{\lambda x} \Rightarrow F^{(K)}(x)\, e^{\lambda x} = g(x)$

$F^{(K)}(x) = g(x)\, e^{-\lambda x}$

1 - Busco el núcleo de L

$$nu\left[(D-2I)(D-4I)(D+3I)^2\right] = \underbrace{nu((D-2I))}_{gen\{e^{2x}\}} \oplus \underbrace{nu((D-4I))}_{gen\{e^{4x}\}} \oplus \underbrace{nu((D+3I)^2)}_{gen\{e^{-3x},\, xe^{-3x}\}}$$

$$nu(L) = gen\{e^{2x}, e^{4x}, e^{-3x}, xe^{-3x}\}$$

2 - Busco una solución Particular

$$(D-2I)\underbrace{\left[(D-4I)\underbrace{\left[(D+3I)^2[y]\right]}_{y_2}\right]}_{y_1} = 5x\, e^{-3x}$$

ⓐ $(D-2I)[y_1] = 5xe^{-3x}$

Integrar por partes

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$

$y_1 = F_1(x)e^{2x} \Rightarrow F_1'(x) = 5xe^{-3x}e^{-2x}$

$F_1'(x) = 5xe^{-5x}$

$F_1(x) = \int 5xe^{-5x}dx = 5\int xe^{-5x}dx \otimes$ (Necesito que la integral quede sin esa x, por eso elijo $u = x$)

$u = x \rightarrow du = 1$

$dv = e^{-5x} \rightarrow v = \int e^{-5x}dx \overset{\text{por tabla}}{=} -\frac{e^{-5x}}{5}$

Ignoro la constante porque solo necesito una solución

$\otimes\ F_1(x) = 5\left(\left(\frac{-e^{-5x}}{5}\right) - \int -\frac{e^{-5x}}{5}dx\right) = -xe^{-5x} - \frac{e^{-5x}}{5} = -\frac{(5x+1)e^{-5x}}{5}$

$y_1 = -\frac{(5x+1)e^{-5x}}{5}e^{2x} = -\frac{(5x+1)e^{-3x}}{5}$

ⓑ $(D-4I)[y_2] = -\frac{(5x+1)e^{-3x}}{5}$

$y_2 = F_2(x)e^{4x} \Rightarrow F_2'(x) = -\frac{(5x+1)e^{-3x}}{5}e^{-4x} = -xe^{-7x} - \frac{e^{-7x}}{5}$

$F_2(x) = \int\left(-xe^{-7x} - \frac{e^{-7x}}{5}\right)dx = \underbrace{\int -xe^{-7x}dx}_{\text{También se resuelve por integración por partes}} + \int -\frac{e^{-7x}}{5}dx$

$F_2(x) = \frac{(7x+1)e^{-7x}}{49} + \frac{e^{-7x}}{35} = \left(\frac{(7x+1)}{49} + \frac{1}{35}\right)e^{-7x} = \frac{(35x+12)}{245}e^{-7x}$

$y_2 = \frac{(35x+12)}{245}e^{-7x}e^{4x} = \frac{(35x+12)}{245}e^{-3x}$

ⓒ $(D+3I)^2[y] = \frac{(35x+12)}{245}e^{-3x}$

$y = F(x)e^{-3x} \Rightarrow F''(x) = \frac{(35x+12)}{245}e^{-3x}e^{3x} = \frac{35x+12}{245}$

$F'(x) = \int \frac{35x+12}{245}dx = \frac{35}{245}\int x\,dx + 12\int dx = \frac{35x^2}{490} + 12x = \frac{1}{14}x^2 + 12x$

$F(x) = \int\left(\frac{1}{14}x^2 + 12x\right)dx = \frac{1}{14}\int x^2dx + 12\int x\,dx = \frac{1}{14}\frac{x^3}{3} + 12\frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{42} + 6x^2$

$y = \left(\frac{x^3}{42} + 6x^2\right)e^{-3x}$

$$\boxed{\left\{y \in C^\infty(\mathbb{R}) : (D-2I)(D-4I)(D+3I)^2[y] = 5x^3e^{-3x}\right\} = \left(\frac{x^3}{42} + 6x^2\right)e^{-3x} + gen\{e^{2x}, e^{4x}, e^{-3x}, xe^{-3x}\}}$$

Ecuaciones diferenciales 2(método viejo)

martes, 12 de octubre de 2021 02:09

2.30 Se considera el operador diferencial $L : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ definido por

$$L := (D - 2I)(D - 4I)(D + 3I)^2,$$

y la ecuación diferencial $L[y] = p$, donde $p(x) = 5x^3 e^{-3x}$.

Previamente demostrado: $\cdot\ \mathrm{Nu}((D-\lambda I)^K) = \mathrm{gen}\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{K-1}e^{\lambda x}\}$ $\quad \cdot\ \mathrm{Nu}(L) = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Nu}((D-\lambda_i I)^{K_i})$

$\cdot\ (D-\lambda I)^K[y] = g$, postulo una solución del tipo $y = F(x)e^{\lambda x} \Rightarrow F^{(K)}_{(x)} e^{\lambda x} = g(x)$

$F^{(K)}_{(x)} = g(x)\, e^{-\lambda x}$

1 - Busco el Nucleo de L

$$\mathrm{Nu}\left[(D-2I)(D-4I)(D+3I)^2\right] = \underbrace{\mathrm{Nu}((\mathrm{Nu}(D-2I))}_{\mathrm{gen}\{e^{2x}\}} \oplus \underbrace{\mathrm{Nu}((D-4I))}_{\mathrm{gen}\{e^{4x}\}} \oplus \underbrace{\mathrm{Nu}((D+3I)^2)}_{\mathrm{gen}\{e^{-3x},\, xe^{-3x}\}}$$

$$\mathrm{Nu}(L) = \mathrm{gen}\{e^{2x}, e^{4x}, e^{-3x}, xe^{-3x}\}$$

2 - Busco una solución Particular

$$(D-2I)\underbrace{\left[(D-4I)\underbrace{\left[(D+3I)^2[y]\right]}_{y_2}\right]}_{y_1} = 5x^3 e^{-3x}$$

ⓐ $(D-2I)[y_1] = 5x^3e^{-3x}$

Integrar por partes

$\int u \cdot dv = uv - \int v\, du$

$y_1 = F_1(x)e^{2x} \Rightarrow F_1'(x) = 5x^3e^{-3x}e^{-2x}$

$F_1'(x) = 5x^3e^{-5x}$

$F_1(x) = \int 5x^3e^{-5x}dx = 5\int x^3e^{-5x}dx$ ⊗ (Necesito que la integral quede sin esa x, por eso elijo u = x)

$u = x^3 \rightarrow du = 3x^2$

$dv = e^{-5x} \rightarrow v = \int e^{-5x}dx \overset{\text{por tabla}}{=} -\dfrac{e^{-5x}}{5}$

Ignoro la constante porque solo necesito una solución

⊗ $= 5\left(x^3\left(-\dfrac{e^{-5x}}{5}\right) - \int -\dfrac{e^{-5x}}{5}\,3x^2dx\right)$

$u = 3x^2 \rightarrow Du = 6x$

$dv = -\dfrac{e^{-5x}}{5} \rightarrow v = \dfrac{e^{-5x}}{25}$

$= 5\left(x^3\left(-\dfrac{e^{-5x}}{5}\right) - 3x^2\dfrac{e^{-5x}}{25} + \underbrace{\int \dfrac{e^{-5x}}{25}6x\,dx}\right)5$

$u = 6x \rightarrow du = 6$

$dv = \dfrac{e^{-5x}}{25} \rightarrow v = -\dfrac{e^{-5x}}{125}$

$= 5\left(x^3\left(-\dfrac{e^{-5x}}{5}\right) - 3x^2\dfrac{e^{-5x}}{25} + 6x\left(-\dfrac{e^{-5x}}{125}\right) - \int -\dfrac{e^{-5x}}{125}6\,dx\right)$

$F_1(x) = \left(-x^3 - \dfrac{3}{5}x^2 - \dfrac{6}{25}x - \dfrac{6}{125}\right)e^{-5x} = -\dfrac{(125x^3+75x^2+30x+6)e^{-5x}}{125}$

$y_1 = -\dfrac{(125x^3+75x^2+30x+6)e^{-5x}}{125}e^{2x} = -\dfrac{(125x^3+75x^2+30x+6)e^{-3x}}{125}$

ⓑ $(D-4I)[y_2] = -\dfrac{(125x^3+75x^2+30x+6)e^{-3x}}{125}$

$y_2 = F_2(x)e^{4x} \Longrightarrow F_2'(x) = -\dfrac{(125x^3+75x^2+30x+6)e^{-3x}}{125}e^{-4x}$

$F_2'(x) = -\dfrac{(125x^3+75x^2+30x+6)e^{-7x}}{125}$

Por calculadora

$F_2(x) = \int\left(-\dfrac{(125x^3+75x^2+30x+6)e^{-7x}}{125}\right)dx = \dfrac{(42875x^3+44100x^2+22890x+5328)e^{-7x}}{300125}$

$y_2 = \dfrac{(42875x^3+44100x^2+22890x+5328)e^{-3x}}{300125}$

ⓒ $(D+3I)^2[y] =$

$y = F(x)e^{-3x} \Longrightarrow F''(x) = \dfrac{(42875x^3+44100x^2+22890x+5328)}{300125}$

$F'(x) = \dfrac{x\,(42875x^3 + 58800x^2 + 45780x + 21312)}{21312}$

$F(x) = \dfrac{x^2\,(8575x^3 + 14700x^2 + 15260x + 10656)}{21312}$

$y = \dfrac{8575x^5 + 14700x^4 + 15260x^3 + 10656x^2}{21312\, e^{3x}}$

$$\boxed{\left\{ y \in C^{\infty}(\mathbb{R}) : (D-2I)(D-4I)(D+3I)^2[y] = 5x^3e^{-3x} \right\} = \frac{8575x^5 + 14700x^4 + 15260x^3 + 10656x^2}{21312\, e^{3x}} + gen\left\{e^{2x}, e^{4x}, e^{-3x}, xe^{-3x}\right\}}$$

Ejercicio 2.27

miércoles, 13 de octubre de 2021 23:43

2.27 Sea $D : C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ el operador de derivación

(a) Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Verificar que para todo $k \in \mathbb{N}$ vale que

$$(D-\lambda I)^{k}\left[f(x)e^{\lambda x}\right] = f^{(k)}(x)e^{\lambda x}$$

para toda $f \in C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{C})$.

(b) Comprobar que $\mathrm{Nu}\,(D-\lambda I) = \mathrm{gen}\left\{e^{\lambda x}\right\}$.

(c) Para cada $k \in \mathbb{N}$ verificar que si

$$\mathrm{Nu}\left((D-\lambda I)^{k}\right) = \left\{p(x)e^{\lambda x} : p \in \mathbb{C}_{k-1}[x]\right\},$$

entonces

$$\mathrm{Nu}\left((D-\lambda I)^{k+1}\right) = \left\{p(x)e^{\lambda x} : p \in \mathbb{C}_{k}[x]\right\}.$$

☞: *escribir la ecuación* $(D-\lambda I)^{k+1}[y] = 0$ *en la forma* $(D-\lambda I)^{k}[z] = 0$, *donde* $z = (D-\lambda I)[y]$.

(d) Utilizar los incisos **(b)** y **(c)** junto al principio de inducción para demostrar que para todo $k \in \mathbb{N}$, el conjunto $\left\{x^{i}e^{\lambda x} : i \in [0:k-1]\right\}$ es una base $\mathrm{Nu}\left((D-\lambda I)^{k}\right)$.

(e) Sea $g \in C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Comprobar que la ecuación

$$(D-\lambda I)^{k}[y] = g,$$

admite una solución particular de la forma $y_p = f(x)e^{\lambda x}$, donde $f^{(k)}(x) = g(x)e^{-\lambda x}$.

(a) $\mathcal{P}(1)$: $(D-\lambda I)[f(x)e^{\lambda x}] = D[f(x)e^{\lambda x}] - \lambda f(x)e^{\lambda x}$

$= f'(x)e^{\lambda x} + f(x)\lambda e^{\lambda x} - \lambda f(x e^{\lambda x})$

$= f'(x)e^{\lambda x}$

1.2. Principio de inducción.

Sea $\mathcal{P}(k)$ una función proposicional con $k \in \mathbb{N}$. Si

(1) La primera proposición $\mathcal{P}(1)$ es verdadera; y

(H.I.) para cada $k \in \mathbb{N}$, bajo la hipótesis de la validez de $\mathcal{P}(k)$ puede deducirse la validez de la proposición $\mathcal{P}(k+1)$,

entonces, $\mathcal{P}(k)$ es verdadera para todo $k \in \mathbb{N}$.

(HI)

$\mathcal{P}(K)$: Para todo $K \in \mathbb{N}$ vale que $(D-\lambda I)^{K}[f(x)e^{\lambda x}] = f^{(K)}_{(x)}e^{\lambda x}$ para toda $f \in C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{C})$

$\mathcal{P}(K)$ es verdadera entonces $\mathcal{P}(K+1)$ debe serlo.

$(D-\lambda I)^{K+1}[f(x)e^{\lambda x}] = (D-\lambda I)\left[(D-\lambda I)^{K}[f(x)e^{\lambda x}]\right]$

$= (D-\lambda I)\left[f^{(K)}_{(x)}e^{\lambda x}\right] = f^{(K+1)}_{(x)}e^{\lambda x}$ $\quad\mathcal{P}(K+1)$ es valida

$\mathcal{P}(n)$ = Proposición n

$\boxed{\mathcal{P}(K) \text{ es verdadera para todo } K \in \mathbb{N}}$

(b) $\mathrm{Nu}(D-\lambda I) \Rightarrow D-\lambda I\,[y] = 0$

$y' - \lambda y = 0 \qquad y(x)$

$y' = \lambda y$

$\frac{y'}{y} = \lambda \;\Rightarrow\; \int \frac{y'}{y}\,dx = \int \lambda\,dx$

$\ln(|y|) = \lambda x + c$

$|y| = e^{\lambda x + c} = e^{\lambda x}\cdot\underbrace{e^{c}}_{a \in \mathbb{R}>0}$

$y = \underbrace{\pm a}_{\beta \in \mathbb{R}}e^{\lambda x} = \beta e^{\lambda x}$

$D-\lambda I[\beta e^{\lambda x}] = 0$

$\beta\lambda e^{\lambda x} - \lambda\beta e^{\lambda x} = 0$

$0 = 0$

$\boxed{\mathrm{Nu}(D-\lambda I) = \mathrm{gen}\left\{e^{\lambda x}\right\}}$

(c) $\mathcal{P}(1)$: $\mathrm{Nu}(D-\lambda I) = \mathrm{gen}\{e^{\lambda x}\}$

suponiendo $\mathcal{P}(K)$ es verdadera, $\mathcal{P}(K+1)$ debe ser valida.

$\mathrm{Nu}\left((D-\lambda I)^{K+1}\right)$: $\quad (D-\lambda I)^{K+1}[y] = 0$

$(D-\lambda I)^{K}[z] = 0 \quad , \quad z = (D-\lambda I)[y]$

$\Big\downarrow$ por $\mathcal{P}(K)$

$z = P(x)e^{\lambda x}$, $P(x) \in \mathbb{C}_{K-1}[x]$

$(D-\lambda I)[y] = P(x)e^{\lambda x}$, $P(x) \in \mathbb{C}_{K-1}[x]$

Por (a), $y = P(x)e^{\lambda x}$, $P(x) \in \mathbb{C}_{K}[x]$

Como $\mathcal{P}(K+1)$ es valida, $\mathcal{P}(K)$ es verdadera

(d) $\mathcal{P}(1)$: $K=1$, $\{x^{i}e^{\lambda x} : i \in [0:1-1]\} = \{e^{\lambda x}\}$ es una base $\mathrm{Nu}((D-\lambda I))$

Por (b) $\mathrm{Nu}((D-\lambda I)) = \mathrm{gen}\{e^{\lambda x}\}$, como es el generado por un vector solo, $\{e^{\lambda x}\}$ es una Base de $\mathrm{Nu}((D-\lambda I))$

$\mathcal{P}(K)$ lo suponemos verdadero por lo que $\mathcal{P}(K+1)$ debe ser valido. Entonces

$\mathrm{Nu}\left((D-\lambda I)^{K+1}\right)$: $(D-\lambda I)^{K+1}[y] = 0$

$y = a_0 e^{\lambda x} + a_1 x e^{\lambda x} + \ldots + a_K x^{K} e^{\lambda x}$

$y = \underbrace{(a_0 + a_1 x + \ldots + a_K x^{K})}_{P(x) \in \mathbb{C}_K[x]}e^{\lambda x}$. Por (c) sabemos que $\mathrm{Nu}\left((D-\lambda I)^{K+1}\right) = \mathrm{gen}\{P(x)e^{\lambda x} : p \in \mathbb{C}_K[x]\}$

Si el nucleo se genera por $\{P(x)e^{\lambda x} : p \in \mathbb{C}_K[x]\}$ y se aprecia que todos los elementos son linealmente independientes entre sí. $\{x^{i}e^{\lambda x}\ i \in [0:K]\}$ es una base de $\mathrm{Nu}\left((D-\lambda I)^{K+1}\right)$ entonces

$\mathrm{Nu}\left((D-\lambda I)^{K}\right)$ tiene de base a $\{x^{i}e^{\lambda x}, i \in [0:K-1]\}$ es verdadero

(e) Por (a) sabemos que $(D-\lambda I)^{K}[f(x)e^{\lambda x}] = f^{(K)}_{(x)}e^{\lambda x}$ $\qquad (D-\lambda I)^{K}[y] = g$

$g(x) = f^{(K)}_{(x)}e^{\lambda x}$ (asumiendo a $f(x)$ como una función suave) $\qquad y = f(x)e^{\lambda x}$

$f^{(K)}_{(x)} = g(x)e^{-\lambda x}$

$$\boxed{(D-\lambda I)^{K}[y] = (D-\lambda I)^{K}[f(x)e^{\lambda x}] = f^{(K)}_{(x)}e^{\lambda x} = g(x)e^{-\lambda x}e^{\lambda x} = g(x)}$$

Ejercicio 2.28

jueves, 14 de octubre de 2021 01:16

2.28 Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $y' - y = 0$,

(b) $y' - y = e^{2x}$,

(c) $y' - y = xe^{2x}$,

(d) $y' - y = (3+5x)e^{2x}$,

(e) $y'' - 2y' + y = (3+5x)e^{2x}$,

(f) $(D-I)^3[y] = (3+5x)e^{2x}$.

$y = y_p + \underbrace{y_h}_{\in \mathrm{Nu}(L)}$

(a)

$L[y] = y' - y \Rightarrow L = D - I \Rightarrow (D-I) = 0$ $\qquad \mathrm{Nu}(L) = \mathrm{gen}\{e^x\}$

$D - I[y] = 0$

Una solución particular es $y_p = 0$ $\qquad y = 0 + \mathrm{gen}\{e^x\}$

$\boxed{y = a e^x,\ a \in \mathbb{R}}$

(b)

$L[y] = y' - y \Rightarrow L = D - I \Rightarrow D - I[y] = e^{2x}$ $\qquad \mathrm{Nu}(L) = \mathrm{gen}\{e^x\}$

$D - I[y_p] = e^{2x}$

$y_p = F(x)e^x$, $\quad F'(x) = e^{2x}e^{-x}$

$F'(x) = e^x$

$F(x) = \int e^x dx = e^x + C$, asumo que $C=0$ porque sólo quiero una solución particular

$F(x) = e^x$

$y_p = e^x e^x = e^{2x}$ $\qquad \boxed{y = e^{2x} + a e^x \quad \forall a \in \mathbb{R}}$

(c)

$L[y] = y' - y \Rightarrow L = D - I \Rightarrow D - I[y] = xe^{2x}$ $\qquad \mathrm{Nu}(L) = \mathrm{gen}\{e^x\}$

$(D-I)[y_p] = xe^{2x}$

Integración por partes

$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$y_p = F(x)e^x$, $\quad F'(x) = x e^{2x} e^{-x}$

$F'(x) = xe^x$

$F(x) = \int xe^x dx \Rightarrow u = x \to du = 1$

$dv = e^x \to v = e^x$

$F(x) = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = (x-1)e^x$

$y_p = (x-1)e^x \cdot e^x = (x-1)e^{2x}$ $\qquad \boxed{y = (x-1)e^{2x} + a e^x \quad \forall a \in \mathbb{R}}$

(d)

$L[y] = y' - y \Rightarrow L = D - I \Rightarrow D - I[y] = (3+5x)e^{2x}$ $\qquad \mathrm{Nu}(L) = \mathrm{gen}\{e^x\}$

$(D-I)[y_p] = (3+5x)e^{2x}$

$y_p = F(x)e^x$, $\quad F'(x) = (3+5x)e^{2x}e^{-x}$

$F'(x) = (3+5x)e^x$

$F(x) = \int (3+5x)e^x dx = \int 3e^x dx + \int 5xe^x dx = 3e^x + 5(x-1)e^x = (5x-2)e^x$

$\boxed{y = (5x-2)e^{2x} + a e^x \quad \forall a \in \mathbb{R}}$

(e)

$L[y] = y'' - 2y' + y$, $\quad L = D^2 - 2D + I$ $\quad$ mi polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$, $\quad \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot a} \to x = 1$

$P(\lambda) = (\lambda - 1)^2 \Rightarrow L = (D-I)^2$

$(D-I)^2[y] = (3+5x)e^{2x}$ $\qquad \mathrm{Nu}((D-I)^2) = \mathrm{gen}\{e^x, xe^x\}$

$(D-I)^2[y_p] = (3+5x)e^{2x}$

$y_p = F(x)e^x$, $\quad F''(x) = (3+5x)e^{2x}e^{-x} = (3+5x)e^x$

$F'(x) = (5x-2)e^x$

$F(x) = 5\int xe^x dx - 2\int e^x dx = 5(x-1)e^x - 2e^x = (5x-7)e^x$

$y_p = (5x-7)e^x \cdot e^x = (5x-7)e^{2x}$ $\qquad \boxed{y = (5x-7)e^{2x} + a e^x + b x e^x \quad \forall a, b \in \mathbb{R}}$

(f)

$(D-I)^3[y] = (3+5x)e^{2x}$ $\qquad \mathrm{Nu}(L) = \{e^x, xe^x, x^2e^x\}$

$y_p = F(x)e^x$, $\quad F'''(x) = (3+5x)e^{2x}e^{-x} = (3+5x)e^x$

$F''(x) = (5x-2)e^x$

$F'(x) = (5x-7)e^x$

$F(x) = 5\int xe^x dx - 7\int e^x dx = 5(x-1)e^x - 7e^x = (5x-12)e^x$

$y_p = (5x-12)e^x \cdot e^x = (5x-12)e^{2x}$

$\boxed{y = (5x-12)e^{2x} + a e^x + b x e^x + c x^2 e^x \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}}$

Ejercicio 2.30

jueves, 14 de octubre de 2021 18:39

2.30 Se considera el operador diferencial $L : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ definido por

$$L := \underbrace{(D-2I)}_{L_1}\underbrace{(D-4I)}_{L_2}\underbrace{(D+3I)^2}_{L_3},$$

y la ecuación diferencial $L[y] = p$, donde $p(x) = 5x^3e^{-3x}$.

(a) Hallar una base $\mathcal{B}_L$ de $\text{Nu}(L)$.

(b) Comprobar que el operador $A = (D+3I)^4$ es un *aniquilador* de p: $A[p] = 0$.

(c) Hallar una base $\mathcal{B}_{AL}$ de $\text{Nu}(A \circ L)$ que contenga a la base $\mathcal{B}_L$.

(d) Comprobar que existe una solución particular y_p de la ecuación $L[y] = p$ perteneciente al subespacio $\text{gen}(\mathcal{B}_{AL} \setminus \mathcal{B}_L)$.

(e) Hallar la solución general de la ecuación diferencial $L[y] = p$.

Cosas útiles:

- La ecuación $(D-\lambda I)^k[y] = 0, k \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}$ tiene como soluciones particulares:
  $\hookrightarrow \{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}\}$
- La ecuación $((D-aI)^2+b^2)^k[y] = 0,\ k \in \mathbb{N},\ a, b \in \mathbb{R}$ tiene como soluciones particulares:
  $\hookrightarrow \{e^{ax}\sin(bx), e^{ax}\cos(bx), \overset{k-1}{x}e^{ax}\sin(bx), \overset{k-1}{x}e^{ax}\cos(bx), \dots, xe^{ax}\sin(bx), xe^{ax}\cos(bx)\}$

(a) $Nu(L) = Nu(L_1) \oplus Nu(L_2) \oplus Nu(L_3)$

$B_L = \{e^{2x}, e^{4x}, e^{-3x}, xe^{-3x}\}$

(b) $(D+3I)^4[5x^3e^{-3x}] = (D+3I)^3\left[(D+3I)[5x^3e^{-3x}]\right]$

$= (D+3I)^3[15x^2e^{-3x}]$

$= (D+3I)^2\left[(D+3I)[15x^2e^{-3x}]\right]$

$= (D+3I)^2[30xe^{-3x}]$

$= (D+3I)\left[(D+3I)[30xe^{-3x}]\right]$

$= (D+3I)[30e^{-3x}] = 0$

$(D+3I)[5x^3e^{-3x}] = 15x^2e^{-3x} + 5x^3(-3)e^{-3x} + 3.5.x^3e^{-3x} = 15x^2e^{-3x}$

$(D+3I)[15x^2e^{-3x}] = 30xe^{-3x} - 45x^2e^{-3x} + 45x^2e^{-3x} = 30xe^{-3x}$

$(D+3I)[30xe^{-3x}] = 30e^{-3x} - 90xe^{-3x} + 90xe^{-3x} = 30e^{-3x}$

$(D+3I)[30e^{-3x}] = -90e^{-3x} + 90e^{-3x} = 0$

(c) $AL = (D+3I)^4(D-2I)(D-4I)(D+3I)^2 = (D-2I)(D-4I)(D+3I)^6$

$B_{AL} = \{e^{2x}, e^{4x}, e^{-3x}, xe^{-3x}, x^2e^{-3x}, x^3e^{-3x}, x^4e^{-3x}, x^5e^{-3x}\}$

(d) S es el subespacio generado por $B_{AL} \setminus B_L$

$S = \text{gen}\{x^2e^{-3x}, x^3e^{-3x}, x^4e^{-3x}, x^5e^{-3x}\}$

$y_p = ax^2e^{-3x} + bx^3e^{-3x} + cx^4e^{-3x} + dx^5e^{-3x}, \quad a,b,c,d \in \mathbb{R}$

$y_p = (ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5)e^{-3x}$

$L = (D-2I)(D-4I)(D+3I)^2 = D^4 - 19D^2 - 6D + 72I \qquad L[y_p] = p \Rightarrow y_p^{IV} - 19y_p'' - 6y_p' + 72y_p = 5x^3e^{-3x}$

$L[y_p] = L[ax^2e^{-3x} + bx^3e^{-3x} + cx^4e^{-3x} + dx^5e^{-3x}] = aL[x^2e^{-3x}] + bL[x^3e^{-3x}] + cL[x^4e^{-3x}] + dL[x^5e^{-3x}]$

- $L[x^2e^{-3x}]$ $\quad (D+3I)[x^2e^{-3x}] = 2xe^{-3x}$

  $(D+3I)[2xe^{-3x}] = 2e^{-3x}$

  $(D-4I)[2e^{-3x}] = -6e^{-3x} - 8e^{-3x} = -14e^{-3x}$

  $(D-2I)[-14e^{-3x}] = 42e^{-3x} + 28e^{-3x} = 70e^{-3x}$

- $L[x^3e^{-3x}]$: $(D+3I)[x^3e^{-3x}] = 3x^2e^{-3x}$

  $(D+3I)[3x^2e^{-3x}] = 6xe^{-3x}$

  $(D-4I)[6xe^{-3x}] = 6e^{-3x} - 18xe^{-3x} - 24xe^{-3x} = (6-42x)e^{-3x}$

  $(D-2I)[(6-42x)e^{-3x}] = -42e^{-3x} + (-18+126x)e^{-3x} + (-12+84x)e^{-3x} = (-72+210x)e^{-3x}$

- $L[x^4e^{-3x}]$: $(D+3I)^2[x^4e^{-3x}] = 12x^2e^{-3x}$

  $(D-4I)[12x^2e^{-3x}] = 24xe^{-3x} - 36x^2e^{-3x} - 48x^2e^{-3x} = (24x - 84x^2)e^{-3x}$

  $(D-2I)[(24x-84x^2)e^{-3x}] = (24-168x)e^{-3x} + (-72x+252x^2)e^{-3x} + (-48x+168x^2)e^{-3x} = (24-288x+420x^2)e^{-3x}$

- $L[x^5e^{-3x}]$: $(D+3I)^2[x^5e^{-3x}] = 20x^3e^{-3x}$

  $(D-4I)[20x^3e^{-3x}] = 60x^2e^{-3x} - 60x^3e^{-3x} - 80x^3e^{-3x} = (60x^2 - 140x^3)e^{-3x}$

  $(D-2I)[(60x^2-140x^3)e^{-3x}] = (120x - 420x^2)e^{-3x} + (-180x^2 + 420x^3)e^{-3x} + (-120x^2 + 280x^3)e^{-3x}$

  $= (120x - 720x^2 + 700x^3)e^{-3x}$

$aL[x^2e^{-3x}] + bL[x^3e^{-3x}] + cL[x^4e^{-3x}] + dL[x^5e^{-3x}] = 5x^3e^{-3x}$

$a\,70e^{-3x} + b(-72+210x)e^{-3x} + c(24-288x+420x^2)e^{-3x} + d(120x - 720x^2 + 700x^3)e^{-3x} = 5x^3e^{-3x}$

$(70a - 72b + 24c + (210b - 288c + 120d)x + (420c - 720d)x^2 + 700dx^3)\cancel{e^{-3x}} = 5x^3\cancel{e^{-3x}}$

$70a - 72b + 24c = 0$

$210b - 288c + 120d = 0$

$420c - 720d = 0$

$700d = 5$

Input interpretation

$$\text{row reduce} \quad \begin{pmatrix} 70 & -72 & 24 & 0 & 0 \\ 0 & 210 & -288 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 420 & -720 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 700 & 5 \end{pmatrix}$$

Result

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2664}{300125} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{109}{8575} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{245} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{140} \end{pmatrix} \begin{matrix} \to a \\ \to b \\ \to c \\ \to d \end{matrix}$$

$y_p = (ax^2 + bx^3 + cx^4 + dx^5)e^{-3x} = \left(\frac{2664}{300125}x^2 + \frac{109}{8575}x^3 + \frac{3}{245}x^4 + \frac{1}{140}x^5\right)e^{-3x}$

$y = y_p + y_h, \quad y_h \in Nu(L)$

$$\boxed{y = \left(\frac{2664}{300125}x^2 + \frac{109}{8575}x^3 + \frac{3}{245}x^4 + \frac{1}{140}x^5\right)e^{-3x} + \text{gen}\{e^{2x}, e^{4x}, e^{-3x}, xe^{-3x}\}}$$

Ejercicio 2.31

jueves, 14 de octubre de 2021 21:49

2.31 Para cada $\omega \in \{1, 7/4, 2\}$, hallar y graficar la solución del problema

$$y'' + 4y = \cos(\omega t)$$

con las condiciones iniciales $y(0) = 1/2$, $y'(0) = 0$.

Cosas útiles:

- La ecuación $(D - \lambda I)^k[y] = 0, k \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}$ tiene como soluciones particulares:
  $\hookrightarrow$ $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}\}$
- La ecuación $((D - aI)^2 + b^2)^k[y] = 0,\ k \in \mathbb{N},\ a, b \in \mathbb{R}$ tiene como soluciones particulares:
  $\hookrightarrow$ $\{e^{ax}\sin(bx), e^{ax}\cos(bx), xe^{ax}\sin(bx), xe^{ax}\cos(bx), \dots, x^{k-1}e^{ax}\sin(bx), x^{k-1}e^{ax}\cos(bx)\}$

$L = D'' + 4I \to P(x) = x^2 + 4 = 0$

polinomio asociado

$x = \sqrt{-4} = \pm 2i \Rightarrow P(x) = (x - 2i)(x + 2i)$

$\operatorname{nu}(L) = \operatorname{gen}\underbrace{\{\sin(2t), \cos(2t)\}}_{B_L}$ $\quad A = (D'' + \omega^2 I)$ $\quad \operatorname{nu}(A) = \operatorname{gen}\underbrace{\{\cos(\omega t), \operatorname{sen}(\omega t)\}}_{B_A}$

$y_p = a_0\cos(\omega t) + a_1\operatorname{sen}(\omega t)$, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

Para $\omega \neq 2$ $\quad B_{A\circ L} \setminus B_L = B_A$:

$L[y_p] = (D'' + 4I)[a_0\cos(\omega t) + a_1\operatorname{sen}(\omega t)] = \cos(\omega t)$

$-a_0\omega^2\cos(\omega t) - a_1\omega^2\operatorname{sen}(\omega t) + 4a_0\cos(\omega t) + 4a_1\operatorname{sen}(\omega t) = \cos(\omega t)$

$(4a_0 - a_0\omega^2)\cos(\omega t) + (4a_1 - a_1\omega^2)\operatorname{sen}(\omega t) = \cos(\omega t)$

$$\begin{cases}(4 - \omega^2)a_0 = 1\\ (4 - \omega^2)a_1 = 0\end{cases} \qquad \omega = 1 \begin{cases}(4 - 1^2)a_0 = 1 \to a_0 = \frac{1}{3}\\ (4 - 1^2)a_1 = 0 \to a_1 = 0\end{cases} \qquad y_p(\omega=1) = \frac{1}{3}\cos(t)$$

$$\omega = \frac{7}{4} \begin{cases}\left(4 - \left(\frac{7}{4}\right)^2\right)a_0 = 1 \to a_0 = \frac{16}{15}\\ \left(4 - \left(\frac{7}{4}\right)^2\right)a_1 = 0 \to a_1 = 0\end{cases} \qquad y_p\left(\omega = \tfrac{7}{4}\right) = \frac{16}{15}\cos\left(\frac{7}{4}t\right)$$

Caso $\omega = 1$,

$y(t) = \frac{1}{3}\cos(t) + \lambda\sin(2t) + \beta\cos(2t)$, $\lambda, \beta \in \mathbb{R} \to y(0) = \frac{1}{3} + \beta = \frac{1}{2} \to \beta = \frac{1}{6}$

$y'(t) = -\frac{1}{3}\operatorname{sen}(t) + 2\lambda\cos(2t) - 2\beta\sin(2t) \longrightarrow y'(0) = 2\lambda = 0 \to \lambda = 0$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{3}\cos(t) + \frac{1}{6}\cos(2t)}$$

Caso $\omega = \frac{7}{4}$,

$y(t) = \frac{16}{15}\cos\left(\frac{7}{4}t\right) + \lambda\sin(2t) + \beta\cos(2t)$, $\lambda, \beta \in \mathbb{R} \longrightarrow y(0) = \frac{16}{15} + \beta = \frac{1}{2} \to \beta = -\frac{17}{30}$

$y'(t) = -\frac{28}{15}\operatorname{sen}\left(\frac{7}{4}t\right) + 2\lambda\cos(2t) - 2\beta\operatorname{sen}(2t) \longrightarrow y'(0) = 2\lambda = 0 \to \lambda = 0$

$$\boxed{y(t) = \frac{16}{15}\cos\left(\frac{7t}{4}\right) - \frac{17}{30}\cos(2t)}$$

Para $\omega = 2$

$L = (D'' + 4I)$ $\quad A = (D'' + 4I)$ $\quad A \circ L = (D'' + 4I)^2$ $\quad \operatorname{nu}(L) = \operatorname{gen}\underbrace{\{\sin(2t), \cos(2t)\}}_{B_L}$

$B_{A\circ L} = \{\sin(2t), \cos(2t), t\sin(2t), t\cos(2t)\}$

$B_{A\circ L} \setminus B_L = \{t\sin(2t), t\cos(2t)\}$

$y_p = a_0 t\sin(2t) + a_1 t\cos(2t)$, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

$L[y_p] = 4a_0\cos(2t) - \cancel{4a_0 t\operatorname{sen}(2t)} - 4a_1\operatorname{sen}(2t) - \cancel{4a_1 t\cos(2t)} + \cancel{4a_0 t\sin(2t)} + \cancel{4a_1 t\cos(2t)} = \cos(2t)$

$= 4a_0\cos(2t) - 4a_1\operatorname{sen}(2t) = \cos(2t)$

$a_0 = \frac{1}{4}$ $\quad a_1 = 0$ $\qquad y_p = \frac{1}{4}t\sin(2t)$

$y(t) = \frac{1}{4}t\sin(2t) + \lambda\sin(2t) + \beta\cos(2t)$, $\lambda, \beta \in \mathbb{R} \to y(0) = \beta = \frac{1}{2}$

$y'(t) = \frac{1}{4}\sin(2t) + \frac{1}{2}t\cos(2t) + 2\lambda\cos(2t) - 2\beta\operatorname{sen}(2t) \to y'(0) = 2\lambda = 0 \to \lambda = 0$

$$\boxed{y = \frac{1}{4}t\sin(2t) + \frac{1}{2}\cos(2t)}$$

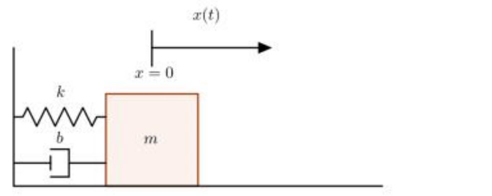
Ejercicio 2.32

domingo, 17 de octubre de 2021 23:21

2.32 [ver **Ejercicio 1.17** y **Ejercicio 1.18**] Se considera la ecuación diferencial general

(1) $$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=0,$$

donde m, b y k son constantes positivas. Esta ecuación representa la dinámica de un sistema masa-resorte-amortiguador como el que se muestra en la figura



Sistema masa-resorte-amortiguador: m es la masa del objeto, k es la constante elástica del resorte y b es el coeficiente de roce viscoso del amortiguador.

(a) Mostrar que las raíces del polinomio característico de la ecuación (1) son

$$\lambda=-\frac{b}{2m}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}}.$$

(b) En cada uno de los siguientes casos, hallar la solución general x_h de la ecuación (1) en términos de las constantes b, m y $\Omega:=\sqrt{\left|\left(\frac{b}{2m}\right)^2-\frac{k}{m}\right|}$ y explicar por qué $\lim_{t\to+\infty}x_h(t)=0$.

1. *Sobreamortiguado*: $\left(\frac{b}{2m}\right)^2>\frac{k}{m}$.
2. *Críticamente amortiguado*: $\left(\frac{b}{2m}\right)^2=\frac{k}{m}$
3. *Subamortiguado*: $\left(\frac{b}{2m}\right)^2<\frac{k}{m}$

(c) Para cada $b\in\{15,20,25,30\}$ hallar y graficar la solución de la ecuación diferencial $4x''+bx'+25x=0$ sujeta a las condiciones iniciales $x(0)=1/2$, $x'(0)=0$.

Cosas útiles:

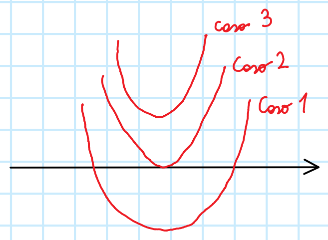
- La ecuación $(D-\lambda I)^k[y]=0, k\in\mathbb{N},\lambda\in\mathbb{R}$ tiene como soluciones particulares:
  $\hookrightarrow$ $\{e^{\lambda x},xe^{\lambda x},\dots,x^{k-1}e^{\lambda x}\}$
- La ecuación $((D-aI)^2+b^2)^k[y]=0,\ k\in\mathbb{N},\ a,b\in\mathbb{R}$ tiene como soluciones particulares:
  $\hookrightarrow$ $\{e^{ax}\sin(bx),e^{ax}\cos(bx),xe^{ax}\sin(bx),xe^{ax}\cos(bx),\dots,x^{k-1}e^{ax}\sin(bx),x^{k-1}e^{ax}\cos(bx)\}$

(a)

$$m\frac{d^2x}{dt}+b\frac{dx}{dt}+Kx=0 \Rightarrow L=mD^2+bD+K$$
$$P_L(\lambda)=m\lambda^2+b\lambda+K$$

Uso Bhaskara $\sigma(\lambda)=\left\{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4mK}}{2m}\right\}=\left\{-\frac{b}{2m}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2-\frac{K}{m}}\right\}$

(b)



– Caso subamortiguado (Caso 3): $\left(\frac{b}{2m}\right)<\frac{K}{m}$

$$\sigma(L)=\left\{-\frac{b}{2m}\pm i\Omega\right\},\ \Omega>0$$

$$\therefore\ Nu(L)=gen\left\{e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\Omega t),\ e^{-\frac{b}{2m}t}\operatorname{sen}(\Omega t)\right\}$$

solución $x_h=a_0e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\Omega t)+a_1e^{-\frac{b}{2m}t}\operatorname{sen}(\Omega t),\ a_0,a_1\in\mathbb{R}$

$$\boxed{x_h=e^{-\frac{b}{2m}t}\left(a_0\cos(\Omega t)+a_1\operatorname{sen}(\Omega t)\right)}$$

$$\lim_{t\to\infty}x_h(t)=\lim_{t\to\infty}\underbrace{e^{-\frac{b}{2m}t}}_{\to 0}\underbrace{\left(a_0\cos(\Omega t)+a_1\operatorname{sen}(\Omega t)\right)}_{\text{acotado}}\underset{\text{0 acotado}}{=}0$$

– Caso críticamente amortiguado (caso 2): $\left(\frac{b}{2m}\right)^2=\frac{K}{m}$

$$\sigma(L)=\left\{-\frac{b}{2m}\right\}\quad \therefore\ Nu(L)=gen\left\{e^{-\frac{b}{2m}t}\right\}$$

$$\boxed{x_h=a_0e^{-\frac{b}{2m}t},\ a_0\in\mathbb{R}}$$

$$\lim_{t\to\infty}x_h(t)=\lim_{t\to\infty}a_0\underbrace{e^{-\frac{b}{2m}t}}_{\to 0}=0$$

– Caso sobreamortiguado (caso 1): $\left(\frac{b}{2m}\right)>\frac{K}{m}$

$$\sigma(L)=\left\{-\frac{b}{2m}\pm\Omega\right\}\quad \therefore\ Nu(L)=gen\left\{e^{\left(-\frac{b}{2m}+\Omega\right)t},\ e^{\left(-\frac{b}{2m}-\Omega\right)t}\right\}$$

$$\boxed{x_h=a_0e^{\left(-\frac{b}{2m}+\Omega\right)t}+a_1e^{-\left(\frac{b}{2m}+\Omega\right)t},\ a_0,a_1\in\mathbb{R}}$$

$-\frac{b}{2m}+\Omega,\ \left|\frac{b}{2m}\right|>\Omega,\ -\frac{b}{2m}+\Omega<0$

$$\lim_{t\to\infty}x_h(t)=\lim_{t\to\infty}a_0\underbrace{e^{\left(-\frac{b}{2m}+\Omega\right)t}}_{\to 0}+a_1\underbrace{e^{-\left(\frac{b}{2m}+\Omega\right)t}}_{\to 0}=0$$

(c)

$b=15 \Rightarrow \underbrace{4}_{m}x''+\underbrace{15}_{b}x'+\underbrace{25}_{K}x=0 \quad L=4D^2+15D+25I \quad P_L(\lambda)=4\lambda^2+15\lambda+25 \quad \sigma(\lambda)=\left\{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4mK}}{2m}\right\}=\left\{-\frac{b}{2m}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2-\frac{K}{m}}\right\}$

$x(0)=\frac{1}{2}\quad x'(0)=0$

$$\sigma(\lambda)=\left\{\frac{-15\pm\sqrt{225-4.4.25}}{8}\right\}=\left\{-\frac{15}{8}+\sqrt{175}\,i;\ -\frac{15}{8}-\sqrt{175}\,i\right\}$$

Soluciones:

$x(t)=a_0e^{-\frac{15}{8}t}\cos(\sqrt{175}\,t)+a_1e^{-\frac{15}{8}t}\operatorname{sen}(\sqrt{175}\,t),\ a_0,a_1\in\mathbb{R}$

$x(t)=e^{-\frac{15}{8}t}\left(a_0\cos(\sqrt{175}\,t)+a_1\operatorname{sen}(\sqrt{175}\,t)\right)$

$x(0)=a_0=\frac{1}{2}$

$x'(t)=-\frac{15}{8}e^{-\frac{15}{8}t}\left(a_0\cos(\sqrt{175}\,t)+a_1\operatorname{sen}(\sqrt{175}\,t)\right)+e^{-\frac{15}{8}t}\left(-\sqrt{175}\,a_0\operatorname{sen}(\sqrt{175}\,t)+\sqrt{175}\,a_1\cos(\sqrt{175}\,t)\right)$

$x'(0)=-\frac{15}{8}a_0+\sqrt{175}\,a_1=0 \Rightarrow -\frac{15}{16}+\sqrt{175}\,a_1=0 \Rightarrow a_1=\frac{\cancel{15}^{3}}{16}\cdot\frac{1}{\cancel{5}_{1}\sqrt{7}}=\frac{3}{16\sqrt{7}}$

$$\boxed{\text{Solución: } x(t)=\frac{1}{2}e^{-\frac{15}{8}t}\cos(5\sqrt{7}\,t)+\frac{3}{16\sqrt{7}}e^{-\frac{15}{8}t}\operatorname{sen}(\sqrt{175}\,t)}$$

$b=20 \Rightarrow 4x''+20x'+25x=0 \Rightarrow L=4D^2+20D+25I \Rightarrow P_L(\lambda)=4\lambda^2+20\lambda+25$

$$\sigma(\lambda)=\left\{\frac{-20\pm\sqrt{400-4.4.25}}{8}\right\}=\left\{-\frac{20}{8}\right\}$$

Solución:

$x(t)=a_0e^{-\frac{20}{8}t},\ a_0\in\mathbb{R}\qquad x'(t)=a_0\left(-\frac{20}{8}\right)e^{-\frac{20}{8}t}$

$x(0)=a_0=\frac{1}{2}\qquad x'(0)=-\frac{20}{8}a_0=0$

$$\boxed{\text{no tiene solución}}$$

$b=25 \Rightarrow 4x''+25x'+25x=0 \Rightarrow \sigma(\lambda)=\left\{\frac{-25\pm\sqrt{625-4.4.25}}{8}\right\}=\left\{-5;\ -\frac{5}{4}\right\}$

Solución:

$x(t)=a_0e^{-5t}+a_1e^{-\frac{5}{4}t},\ a_0,a_1\in\mathbb{R}\qquad x'(t)=-5a_0e^{-5t}-\frac{5}{4}a_1e^{-\frac{5}{4}t}$

$x(0)=a_0+a_1=\frac{1}{2}\qquad x'(0)=-5a_0-\frac{5}{4}a_1=0$

$$\begin{cases}a_0+a_1=\frac{1}{2}\\-5a_0-\frac{5}{4}a_1=0\end{cases}\rightarrow\left[\begin{array}{cc|c}1&1&\frac{1}{2}\\-5&-\frac{5}{4}&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc}1&0&-\frac{1}{6}\\0&1&\frac{2}{3}\end{array}\right]\rightarrow\boxed{x(t)=-\frac{1}{6}e^{-5t}+\frac{2}{3}e^{-\frac{5}{4}t}}$$

$b=30 \Rightarrow 4x''+30x'+25x=0 \Rightarrow \sigma(\lambda)=\left\{\frac{-30\pm\sqrt{900-4.4.25}}{8}\right\}=\left\{-\frac{15}{4}+\frac{5}{4}\sqrt{5},\ -\frac{15}{4}-\frac{5}{4}\sqrt{5}\right\}$

Solución:

$x(t)=a_0e^{\left(-\frac{15}{4}+\frac{5}{4}\sqrt{5}\right)t}+a_1e^{\left(-\frac{15}{4}-\frac{5}{4}\sqrt{5}\right)t}\qquad x'(t)=\left(-\frac{15}{4}+\frac{5}{4}\sqrt{5}\right)a_0e^{\left(-\frac{15}{4}+\frac{5}{4}\sqrt{5}\right)t}+\left(-\frac{15}{4}-\frac{5}{4}\sqrt{5}\right)a_1e^{\left(-\frac{15}{4}-\frac{5}{4}\sqrt{5}\right)t}$

$x(0)=a_0+a_1=\frac{1}{2}\qquad x'(0)=\left(-\frac{15}{4}+\frac{5}{4}\sqrt{5}\right)a_0+\left(-\frac{15}{4}-\frac{5}{4}\sqrt{5}\right)a_1=0$

$$\begin{cases}a_0+a_1=\frac{1}{2}\\\left(-\frac{15}{4}+\frac{5}{4}\sqrt{5}\right)a_0+\left(-\frac{15}{4}-\frac{5}{4}\sqrt{5}\right)a_1=0\end{cases}$$

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix}1&1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{4}(-15+5\sqrt{5})&\frac{1}{4}(-15-5\sqrt{5})&0\end{pmatrix}$

Result

$\begin{pmatrix}1&0&\frac{1}{20}(5+3\sqrt{5})\\0&1&\frac{1}{20}(5-3\sqrt{5})\end{pmatrix}$

$$\boxed{x(t)=\frac{1}{20}(5+3\sqrt{5})e^{\left(-\frac{15}{4}+\frac{5}{4}\sqrt{5}\right)t}+\frac{1}{20}(5-3\sqrt{5})e^{\left(-\frac{15}{4}-\frac{5}{4}\sqrt{5}\right)t}}$$

Ejercicio 2.33

viernes, 15 de octubre de 2021 22:07

2.33 En cada uno de los siguientes casos construir una ecuación diferencial

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

con $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$, del menor orden posible que tenga como soluciones a las funciones indicadas.

(a) $y_1 = e^t$, $y_2 = e^{2t}$;

(b) $y_1 = te^t$;

(c) $y_1 = t^2 e^{2t}$;

(d) $y_1 = te^{4t}\operatorname{sen}(t)$;

(e) $y_1 = t$, $y_2 = \cos(3t)$, $y_3 = e^{-t}$.

Cosas útiles:

- La ecuación $(D - \lambda I)^k[y] = 0, k \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}$ tiene como soluciones particulares:
  $\hookrightarrow \quad \{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \ldots, x^{k-1}e^{\lambda x}\}$
- La ecuación $\left((D - aI)^2 + b^2\right)^k[y] = 0, \ k \in \mathbb{N}, \ a, b \in \mathbb{R}$ tiene como soluciones particulares:
  $\hookrightarrow \quad \{e^{ax}\sin(bx), e^{ax}\cos(bx), xe^{ax}\sin(bx), xe^{ax}\cos(bx), \ldots, x^{k-1}e^{ax}\sin(bx), x^{k-1}e^{ax}\cos(bx)\}$

(a) $L = (D - I)(D - 2I) = D^2 - 2D - D + 2I = D^2 - 3D + 2I$

$L[y] = 0 \quad \boxed{y'' - 3y' + 2y = 0}$

(b) $L = (D - I)^2 = (D^2 - 2D + I)$

$L[y] = 0 \quad \boxed{y'' - 2y' + y = 0}$

(c) $L = (D - 2I)^3 = D^3 - 6D^2 + 12D - 8I$

$L[y] = 0 \quad \boxed{y''' - 6y'' + 12y' - 8y}$

(d) $\underbrace{e^{4t}\operatorname{sen}(t)}$ no se aceptan complejos acá (multiplico por su conjugado)

$(D - (4+i)I)(D - (4-i)I) = D^2 - (4-i)D - (4+i)D + (4+i)(4-i)I$

$= D^2 - 8D + (16 - 4i + 4i + 1)I$

$= D^2 - 8D + 17I$

$te^{4t}\operatorname{sen}(t) \Rightarrow L = (D^2 - 8D + 17I)^2$

$L[y] = 0 \quad \boxed{y^{(IV)} - 16y''' + 98y'' - 272y' + 289y = 0}$

(e)

$y_1 = t \Rightarrow D^2 \qquad y_2 = \cos(3t) \Rightarrow (D - (3i)I)(D - (-3i)I) = D^2 + 9I \qquad y_3 = e^{-t} \Rightarrow (D + I)$

$\Rightarrow L = D^2(D^2 + 9I)(D + I) \qquad L[y] = 0 \quad \boxed{y^{(V)} + y^{(IV)} + 9y''' + 9y'' = 0}$

Ejercicio 2.34

miércoles, 20 de octubre de 2021 04:15

2.34 Sea $L : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ el operador diferencial

$$L[y] := y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y,$$

de orden mínimo tal que la ecuación diferencial $L[y] = 0$ tiene como soluciones a las funciones $y_1 = t$, $y_2 = e^{-2t}$ $y_3 = \cos(3t)$.

(a) Hallar la solución general de la ecuación diferencial homogénea $L[y] = 0$.

(b) Hallar una solución particular de la ecuación diferencial $L[y] = te^t$.

(c) Hallar una solución particular de la ecuación diferencial $L[y] = t$.

(d) Hallar la solución general de la ecuación diferencial $L[y] = t(5 + 8e^t)$.

(e) Resolver el problema $L[y] = 0$ con las condiciones iniciales $y^{(i)}(0) = c_i$ para todo $i \in [0 : n-1]$.

(f) ¿Cómo deben ser las condiciones iniciales, $\left(y^{(i)}(0) : i \in [0 : n-1]\right)$ para que la solución del problema $L[y] = 0$ satisfaga que $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$?

(a)

$y_1 = t \Rightarrow L_1[y_1] = 0 \to L_1 = D^2$ $\qquad y_2 = e^{-2t} \Rightarrow L_2[y_2] = 0 \longrightarrow L_2 = (D+2I)$

$y_3 = \cos(3t) \Rightarrow L_3[y_3] \to L_3 = (D^2 + 9I)$

$L = D^2(D^2+9I)(D+2I)$ $\qquad \text{nu}(L) = \text{gen}\underbrace{\{1, t, e^{-2t}, \cos(3t), \text{sen}(3t)\}}_{B_L}$

$$\boxed{y = a_1 + a_2 t + a_3 e^{-2t} + a_4\cos(3t) + a_5\,\text{sen}(3t) \quad \text{donde } a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}}$$

(b)

Un anigulador te^t $\qquad A = (D-I)^2$

$AL = D^2(D^2+9I)(D+2I)(D-I)^2$ $\qquad B_{AL} = \{1, t, e^{-2t}, \cos(3t), \text{sen}(3t), e^t, te^t\}$

$B_{AL} \setminus B_L = \{e^t, te^t\}$

$y_p = \lambda e^t + \beta te^t = (\lambda + \beta t)e^t$ $\qquad L[y_p] = te^t$

$(D+2I)[(\lambda+\beta t)e^t] = \beta e^t + (\lambda+\beta t)e^t + 2(\lambda+\beta t)e^t$
$= (\beta + 3\lambda + 3\beta t)e^t$

$(D^2+9I)[(\beta+3\lambda+3\beta t)e^t] = (7\beta+3\lambda+3\beta t)e^t + 9(\beta+3\lambda+3\beta t)e^t$
$= (16\beta + 30\lambda + 30\beta t)e^t$

$D^2[(16\beta+30\lambda+30\beta t)e^t] = (76\beta+30\lambda+30\beta t)e^t$

$L[y_p] = D^2(D^2+9I)(D+2I)[(\lambda+\beta t)e^t]$
$= D^2(D^2+9I)[(\beta+3\lambda+3\beta t)e^t]$
$= D^2[(16\beta+30\lambda+30\beta t)e^t]$
$= (76\beta+30\lambda+30\beta t)e^t = te^t$

$$\begin{cases} 30\lambda + 76\beta = 0 \to \lambda = -\frac{19}{225} \\ 30\beta = 1 \to \beta = \frac{1}{30} \end{cases}$$

$$\boxed{y_p = -\frac{19}{225}e^t + \frac{1}{30}te^t}$$

(c)

Un anigulador t $\qquad A = D^2$

$AL = D^4(D^2+9I)(D+2I)$ $\qquad B_{AL} = \{1, t, t^2, t^3, e^{-2t}, \cos(3t), \text{sen}(3t)\}$

$B_{AL} \setminus B_L = \{t^2, t^3\}$ $\qquad y_p = \lambda t^2 + \beta t^3,\ \lambda, \beta \in \mathbb{R}$ $\qquad L[y_p] = T$

$(D+2I)[\lambda t^2 + \beta t^3] = 2\lambda t + 3\beta t^2 + 2\lambda t^2 + 2\beta t^3 = 2\lambda t + (3\beta + 2\lambda)t^2 + 2\beta t^3$

$(D^2+9I)[2\lambda t + (3\beta+2\lambda)t^2 + 2\beta t^3] = (6\beta + 4\lambda) + (12\beta + 18\lambda)t + (27\beta + 18\lambda)t^2 + 18\beta t^3$

$L[y_p] = D^2(D^2+9I)(D+2I)[\lambda t^2 + \beta t^3]$
$= D^2(D^2+9I)[2\lambda t + (3\beta+2\lambda)t^2 + 2\beta t^3]$
$= D^2[(6\beta+4\lambda) + (12\beta+18\lambda)t + (27\beta+18\lambda)t^2 + 18\beta t^3]$
$= 54\beta + 36\lambda + 108\beta t = t$

$$\begin{cases} 54\beta + 36\lambda = 0 \longrightarrow \lambda = -\frac{1}{72} \\ 108\beta = 1 \to b = \frac{1}{108} \end{cases}$$

$$\boxed{y_p = -\frac{1}{72}t^2 + \frac{1}{108}t^3}$$

(D)

Un anigulador de $t(5+8e^t) = 5t + 8te^t$ es $A = D^2(D-I)^2$

$AL = D^4(D^2+9I)(D+2I)(D-I)^2$ $\qquad B_{AL} = \{1, t, t^2, t^3, e^{-2t}, \cos(3t), \text{sen}(3t), e^t, te^t\}$

$B_{AL} \setminus B_L = \{t^2, t^3, e^t, te^t\}$

$y_p = \lambda t^2 + \beta t^3 + \alpha e^t + \sigma te^t$, $\lambda, \beta, \alpha, \sigma \in \mathbb{R}$

$L[y_p] = L[\lambda t^2 + \beta t^3] + L[\alpha e^t + \sigma te^t]$
$= 54\beta + 36\lambda + 108\beta t + (76\sigma + 30\alpha + 30\sigma t)e^t = 5t + 8te^t$

$$\begin{cases} 36\lambda + 54\beta = 0 \\ 108\beta = 5 \end{cases} \longrightarrow \beta = \frac{5}{108} \ \wedge\ \lambda = -\frac{5}{72}$$

$$\begin{cases} 76\sigma + 30\alpha = 0 \\ 30\sigma = 8 \end{cases} \longrightarrow \sigma = \frac{4}{15} \ \wedge\ \alpha = -\frac{152}{225}$$

$y_p = -\frac{5}{72}t^2 + \frac{5}{108}t^3 + \frac{4}{15}e^t - \frac{152}{225}te^t$

$y = y_p + y_h$, $y_h \in \text{nu}(L)$

$$\boxed{y = -\frac{5}{72}t^2 + \frac{5}{108}t^3 + \frac{4}{15}e^t - \frac{152}{225}te^t + \text{gen}\{1, t, e^{-2t}, \cos(3t), \text{sen}(3t)\}}$$

(e)

$y = a_1 + a_2 t + a_3 e^{-2t} + a_4\cos(3t) + a_5\,\text{sen}(3t)$ donde $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$

$L[y] = 0$

$y(0) = c_1$
$y'(0) = c_2$
$y''(0) = c_3$
$y'''(0) = c_4$
$y^{IV}(0) = c_5$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & -27 \\ 0 & 0 & 16 & 81 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix}$$

sabemos que A es invertible porque es la matriz Wronskiana (Ver justificación en apunte)

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix}$$

Expanded form

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{36} & 0 & -\frac{1}{36} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} \\ 0 & 0 & \frac{9}{52} & 0 & \frac{1}{52} \\ 0 & 0 & -\frac{4}{117} & 0 & \frac{1}{117} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{39} & -\frac{1}{27} & -\frac{2}{351} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

$a_1 = c_1 - \frac{5}{36}c_3 - \frac{1}{36}c_5$

$a_2 = c_2 + \frac{1}{2}c_3 + \frac{1}{9}c_4 + \frac{1}{18}c_5$

$a_3 = \frac{9}{52}c_3 + \frac{1}{52}c_5$

$a_4 = -\frac{4}{117}c_3 + \frac{1}{117}c_5$

$a_5 = -\frac{2}{39}c_3 - \frac{1}{27}c_4 - \frac{2}{351}c_5$

$$\boxed{y = c_1 - \frac{5}{36}c_3 - \frac{1}{36}c_5 + \left(c_2 + \frac{1}{2}c_3 + \frac{1}{9}c_4 + \frac{1}{18}c_5\right)t + \left(\frac{9}{52}c_3 + \frac{1}{52}c_5\right)e^{-2t} + \left(-\frac{4}{117}c_3 + \frac{1}{117}c_5\right)\cos(3t) + \left(-\frac{2}{39}c_3 - \frac{1}{27}c_4 - \frac{2}{351}c_5\right)\text{sen}(3t)}$$

(f)

$$y_h(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \iff \begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_4 = 0 \\ a_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & -27 \\ 0 & 0 & 16 & 81 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ -8 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{y \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0 \iff \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y''(0) \\ y'''(0) \\ y^{IV}(0) \end{bmatrix} \in \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ -8 \\ 16 \end{bmatrix}\right\}}$$

Para entregar semana 6 Milidoni

martes, 19 de octubre de 2021 22:02

1. Hallar la solución general de la ecuación $y'' - 5y' + 6y = 8e^{2x} + 13xe^{3x} + 21x^2e^{5x}$.

$L = D^2 - 5D + 6I \qquad P_L(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4.1.6}}{2} \begin{cases} \lambda = 3 \\ \lambda = 2 \end{cases} \qquad P_L(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 2) \qquad L = \underbrace{(D - 3I)}_{L_1}\underbrace{(D - 2I)}_{L_2}$

B_L, base del núcleo de L $\qquad Nu(L) = Nu(L_1) \oplus Nu(L_2) = gen\{e^{3x}, e^{2x}\}$

$B_L = \{e^{3x}, e^{2x}\}$

$A = (D - 2I)(D - 3I)^2(D - 5I)^3$

$AL = (D - 2I)(D - 3I)^2(D - 5I)^3(D - 3I)(D - 2I) = (D - 2I)^2(D - 3I)^3(D - 5I)^3$

$B_{AL} = \{e^{2x}, xe^{2x}, e^{3x}, xe^{3x}, x^2e^{3x}, e^{5x}, xe^{5x}, x^2e^{5x}\}$

$B_{AL} \setminus B_L = \{xe^{2x}, xe^{3x}, x^2e^{3x}, e^{5x}, xe^{5x}, x^2e^{5x}\}$

$y_p = a_0 x e^{2x} + a_1 x e^{3x} + a_2 x^2 e^{3x} + a_3 e^{5x} + a_4 x e^{5x} + a_5 x^2 e^{5x}, \quad a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$

$y_p = a_0 x e^{2x} + (a_1 x + a_2 x^2)e^{3x} + (a_3 + a_4 x + a_5 x^2)e^{5x}$

$L[y_p] = 8e^{2x} + 13xe^{3x} + 21x^2e^{5x}$

$L[y_p] = L[a_0 x e^{2x}] + L[(a_1 x + a_2 x^2)e^{3x}] + L[(a_3 + a_4 x + a_5 x^2)e^{5x}] = 8e^{2x} + 13xe^{3x} + 21x^2e^{5x}$

- $L[a_0 x e^{2x}] = (D - 3I)(D - 2I)[a_0 x e^{2x}]$
  $= (D - 3I)[a_0 e^{2x}]$
  $= 2a_0 e^{2x} - 3a_0 e^{2x} = -a_0 e^{2x}$

- $L[(a_1 x + a_2 x^2)e^{3x}] = (D - 2I)(D - 3I)[(a_1 x + a_2 x^2)e^{3x}]$
  $= (D - 2I)[(a_1 + 2a_2 x)e^{3x}]$
  $= 2a_2 e^{3x} + 3(a_1 + 2a_2 x)e^{3x} - 2(a_1 + 2a_2 x)e^{3x}$
  $= 2a_2 e^{3x} + (a_1 + 2a_2 x)e^{3x} = (a_1 + 2a_2 + 2a_2 x)e^{3x}$

- $L[(a_3 + a_4 x + a_5 x^2)e^{5x}] = (D - 3I)(D - 2I)[(a_3 + a_4 x + a_5 x^2)e^{5x}]$
  $= (D - 3I)[(a_4 + 2a_5 x)e^{5x} + 5(a_3 + a_4 x + a_5 x^2)e^{5x} - 2(a_3 + a_4 x + a_5 x^2)e^{5x}]$
  $= (D - 3I)[(a_4 + 2a_5 x)e^{5x} + 3(a_3 + a_4 x + a_5 x^2)e^{5x}]$
  $= (D - 3I)[(a_4 + 3a_3 + (2a_5 + 3a_4)x + 3a_5 x^2)e^{5x}]$
  $= (2a_5 + 3a_4 + 6a_5 x)e^{5x} + 2(a_4 + 3a_3 + (2a_5 + 3a_4)x + 3a_5 x^2)e^{5x}$
  $= (6a_3 + 5a_4 + 2a_5 + (6a_4 + 10a_5)x + 6a_5 x^2)e^{5x}$

$L[y_p] = -a_0 e^{2x} + (a_1 + 2a_2 + 2a_2 x)e^{3x} + (6a_3 + 5a_4 + 2a_5 + (6a_4 + 10a_5)x + 6a_5 x^2)e^{5x} = 8e^{2x} + 13xe^{3x} + 21x^2e^{5x}$

$\{-a_0 = 8 \;\Downarrow\; a_0 = -8 \qquad \begin{cases} a_1 + 2a_2 = 0 \\ 2a_2 = 13 \end{cases} \;\Downarrow\; a_2 = \frac{13}{2} \quad a_1 = -13 \qquad \begin{cases} 6a_3 + 5a_4 + 2a_5 = 0 \\ 6a_4 + 10a_5 = 0 \\ 6a_5 = 21 \end{cases} \Longrightarrow$

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 21 \end{pmatrix}$

Result

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{133}{36} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{35}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \to = a_3 \\ \to = a_4 \\ \to = a_5 \end{matrix}$

$y_p = -8xe^{2x} + \left(-13x + \frac{13}{2}x^2\right)e^{3x} + \left(\frac{133}{36} - \frac{35}{6}x + \frac{7}{2}x^2\right)e^{5x}$

$$\boxed{y = -8xe^{2x} + \left(-13x + \frac{13}{2}x^2\right)e^{3x} + \left(\frac{133}{36} - \frac{35}{6}x + \frac{7}{2}x^2\right)e^{5x} + \lambda e^{2x} + \beta e^{3x}, \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}}$$

2. Sea $L \in \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{R}))$ el operador diferencial definido por $L = D^2 + D - 6I$, ¿cómo deben ser la condiciones iniciales $y(0), y'(0)$ para que la solución del problema $L[y] = 0$ satisfaga que $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$?

$P_L(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 \qquad \lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-6).1}}{2} \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases} \qquad L = (D - 2I)(D + 3I)$

$Nu(L) = gen\{e^{2x}, e^{-3x}\} \qquad y = a_0 e^{2x} + a_1 e^{-3x}, \quad a_0, a_1 \in \mathbb{R} \qquad y(0) = C_1 \quad y'(0) = C_2$

$y(0) = a_0 + a_1$
$y'(0) = 2a_0 - 3a_1$

$y \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0 \iff a_0 = 0$

$a_1 = C_1$
$-3a_1 = C_2$

$\to \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ -3a_1 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$\boxed{\text{Las condiciones iniciales } \begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{bmatrix} \in gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right\} \text{ para que } \lim_{x \to +\infty} y(x) = 0}$$

Verificación Guía 2 Milidoni

miércoles, 20 de octubre de 2021 02:42

Hallar la solución de la ecuación diferencial $y'' + 16y = 3\cos(4t)$ tal que $y(0) = 9$, $y'(0) = 0$.

$L = D^2 + 16I$ Polinomio característico $P_L(x) = x^2 + 16 = (x-4i)(x+4i)$

$\ker(L) = \text{gen}\{\sin(4t), \cos(4t)\}$

Un $A \,/\, A[3\cos(4t)] = 0$ es $A = (D^2 + 16I)$

$\ker(A) = \text{gen}\underbrace{\{\sin(4t), \cos(4t)\}}_{B_A}$

$AL = (D^2+16I)(D^2+16I) = (D^2+16I)^2$

$B_{AL} = \{\sin(4t), \cos(4t), t\sin(4t), t\cos(4t)\}$ $B_{AL} \setminus B_L = \{t\sin(4t), t\cos(4t)\}$

Una solución particular es de la forma $y_p = a_0 t\sin(4t) + a_1 t\cos(4t)$, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

$y_p = (a_0\sin(4t) + a_1\cos(4t))\,t$

$y_p' = (4a_0\cos(4t) - 4a_1\sin(4t))t + (a_0\sin(4t) + a_1\cos(4t))$

$y_p' = (4a_0 t + a_1)\cos(4t) + (-4a_1 t + a_0)\sin(4t)$

$y_p'' = 4a_0\cos(4t) - 4(4a_0 t + a_1)\sin(4t) - 4a_1\sin(4t) + 4(-4a_1 t + a_0)\cos(4t)$

$y_p'' = (8a_0 - 16a_1 t)\cos(4t) + (-8a_1 - 16a_0 t)\sin(4t)$

$L[y_p] = 3\cos(4t)$

$\Rightarrow D^2 + 16I\,[a_0 t\sin(4t) + a_1 t\cos(4t)] = 3\cos(4t)$

$(8a_0 - 16a_1 t)\cos(4t) + (-8a_1 - 16a_0 t)\sin(4t) + 16a_0 t\sin(4t) + 16a_1 t\cos(4t) = 3\cos(4t)$

$8a_0\cos(4t) - 8a_1\sin(4t) = 3\cos(4t)$

$\begin{cases} 8a_0 = 3 \to a_0 = \frac{3}{8} \\ -8a_1 = 0 \to a_1 = 0 \end{cases}$

$y_p = \frac{3}{8}t\sin(4t)$

$y = y_p + y_h$, $y_h \in \ker(L)$

$y = \frac{3}{8}t\sin(4t) + \lambda\sin(4t) + \beta\cos(4t)$, $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$

$y' = \frac{3}{8}\sin(4t) + \frac{12}{8}t\cos(4t) + 4\lambda\cos(4t) - 4\beta\sin(4t)$

$y(0) = \beta = 9$

$y'(0) = 4\lambda = 0$

$$\boxed{y = \frac{3}{8}t\sin(4t) + 9\cos(4t)}$$

Autoevaluación Guía 1 y Guía 2 (parte 1)

jueves, 21 de octubre de 2021 05:03

Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_2[x])$ es la transformación lineal tal que

$T\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T\right) = 1 - x,$

$T\left(\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right) = 1 + x^2,$

$T\left(\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}^T\right) = x + x^2,$

entonces todas las soluciones de la ecuación

$T(v) = 2 + x + 3x^2$

son de la forma

Seleccione una:

- a. $v = \begin{bmatrix}2 & 3 & -3\end{bmatrix}^T + \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T\right\}$
- b. $v = \begin{bmatrix}2 & 3 & -3\end{bmatrix}^T + \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\end{bmatrix}^T\right\}$
- c. $v = \begin{bmatrix}1 & 3 & -1\end{bmatrix}^T + \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}2 & 3 & -3\end{bmatrix}^T\right\}$
- d. $v = \begin{bmatrix}3 & 2 & -2\end{bmatrix}^T + \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right\}$

$$[T]_{\mathcal{E}}^{B} = \left[\, [T(e_1)]^B \quad [T(e_2)]^B \quad [T(e_3)]^B \,\right] \qquad \mathcal{E} = \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$$B = \{1, x, x^2\}$$

$$[T(e_1)]^B = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} \qquad e_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} \qquad e_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$$

$$T(e_2) = \frac{1}{2}(1+x^2) + \frac{1}{2}(x+x^2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x + x^2 \qquad T(e_3) = \frac{1}{2}(1+x^2) - \frac{1}{2}(x+x^2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$$

$$[T(e_2)]^B = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{bmatrix} \qquad [T(e_3)]^B = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\0\end{bmatrix}$$

$$[T]_{\mathcal{E}}^{B} = \begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\-1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\0 & 1 & 0\end{bmatrix} \qquad \underset{[T]_{\mathcal{E}}^{B}}{E} = \begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2}\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{cases}x_1 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \to x_1 = -\frac{1}{2}x_3\\x_2 = 0 \to\end{cases} \quad x_3\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{bmatrix}$$

como es $\mathbb{R}^3$ respecto de $\mathcal{E}$

$$\text{nul}\left([T]_{\mathcal{E}}^{B}\right) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{bmatrix}\right\} = \text{nu}(T)$$

Chequeo la particular

$$\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\-1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$$

Calculadora de matrices

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\-1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$$

Sea $L : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ el operador diferencial

$L = (D - I)(D + I)$

La solución general de la ecuación diferencial $L[y] = e^{-x}$ es

Seleccione una:

- a. $y = -\frac{1}{2}xe^{-x} + \text{gen}\{e^x, e^{-x}, xe^{-x}\}$
- b. $y = e^x - e^{-x} + \text{gen}\{xe^{-x}\}$
- c. $y = -\frac{1}{2}e^{-x} + \text{gen}\{e^x, e^{-x}\}$
- d. $y = -\frac{1}{2}xe^{-x} + \text{gen}\{e^x, e^{-x}\}$

$$\text{nu}(L) = \text{gen}\{e^x, e^{-x}\} \qquad A \text{ de } e^{-x} = (D+I)$$

$$AL = (D+I)^2(D-I)$$

$$B_{AL} = (e^x, e^{-x}, xe^{-x}) \qquad B_{AL} \setminus B_L = \{xe^{-x}\}$$

$$y_p = a\,xe^{-x} \qquad L[y_p] = (D-I)(D+I)[a\,xe^{-x}]$$

$$(D-I)[ae^{-x}] = -ae^{-x} - ae^{-x} = -2ae^{-x} = e^{-x}$$

$$-2a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$y_p = -\frac{1}{2}xe^{-x} \qquad y = -\frac{1}{2}xe^{-x} + \text{gen}\{e^x, e^{-x}\}$$

Autoevaluación Guía 1 y Guía 2 (parte 2)

jueves, 21 de octubre de 2021 05:03

Un conjunto generador minimal del subespacio

$\mathbb{S} = \left\{ p \in \mathbb{R}_3[x] : \int_{-1}^{1} p(x)dx = 0,\ \int_{-1}^{1} (x-1)p(x)dx = 0 \right\}$

es

Seleccione una:

- a. $\{3x^2 - x,\ 5x^2 - 3x\}$
- b. $\{3x^2 - 1,\ 5x^2 - 3x\}$
- c. $\{5x^3 + 3x^2 - 3x - 1,\ 3x^2 - 1,\ -5x^3 + 3x\}$
- d. $\{3x^2 - 1,\ 5x^3 - 3x\}$

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$(x-1)P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - (ax^3 + bx^2 + cx + d) =$

$= ax^4 + (b-a)x^3 + (c-b)x^2 + (d-c)x - d$

$\int_{-1}^{1} P(x) = \frac{a}{4}x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2 + dx \Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{a}{4} + \frac{b}{3} + \frac{c}{2} + d\right) - \left(\frac{a}{4} - \frac{b}{3} + \frac{c}{2} - d\right) = \left(\frac{2}{3}b + 2d\right)$

$\int_{-1}^{1} ax^4 + (b-a)x^3 + (c-b)x^2 + (d-c)x - d = \frac{a}{5}x^5 + \frac{(b-a)}{4}x^4 + \frac{(c-b)}{3}x^3 + \frac{(d-c)x^2}{2} - dx \Big|_{-1}^{1}$

$\left(\frac{a}{5} + \frac{(b-a)}{4} + \frac{(c-b)}{3} + \frac{(d-c)}{2} - d\right) - \left(-\frac{a}{5} + \frac{(b-a)}{4} - \frac{(c-b)}{3} + \frac{(d-c)}{2} + d\right)$

$\frac{2}{5}a + \frac{2}{3}(c-b) - 2d = 0$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}b + 2d \\ \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}c - \frac{2}{3}b - 2d = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & 2 \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & 2 \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -2 \end{pmatrix}$

Result

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$a + \frac{5}{3}c = 0 \rightarrow a = -\frac{5}{3}c$

$b + 3d = 0 \rightarrow b = -3d$

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = -\frac{5}{3}cx^3 - 3dx^2 + cx + d = c\left(-\frac{5}{3}x^3 + x\right) + d\left(-3x^2 + 1\right)$

Rta a

Pregunta **6**

Sin responder aún

Puntúa como 1

Marcar pregunta

Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{V}$,

y sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ la transformación lineal definida por

$T(v_1) = v_1,\ T(v_2) = v_1 + v_2,\ T(v_3) = -v_1.$

La matriz, con respecto a la base B, de la simetría de $\mathbb{V}$ con respecto a $\operatorname{Im}(T)$ en la dirección de $\operatorname{Nu}(T)$ es:

Seleccione una:

- a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
- b. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
- c. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- d. $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{gen}\{v_1, v_1 + v_2, -v_1\}$ $\qquad B_{\operatorname{Im}(T)} = \{v_1, v_1 + v_2\} \rightarrow \operatorname{Dim}(\operatorname{Im}(T)) = 2$

$\operatorname{Dim}(\operatorname{Nu}(T)) = 1 \rightarrow B_{\operatorname{Nu}(T)} = \{v_1 + v_3\}$

$T(v_1 + v_3) = T(v_1) + T(v_3) = v_1 - v_1 = 0$

$\operatorname{Nu}(T) = S_2 \qquad \operatorname{Im}(T) = S_1$

$B' = \{v_1, v_1 + v_2, v_1 + v_3\}$

$\left[\Sigma_{S_1 S_2}\right]_{B'}^{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad M_{B'}^{B} = \begin{bmatrix} [B'_1]^B & [B'_2]^B & [B'_3]^B \end{bmatrix}$

$M_{B'}^{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_{B}^{B'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$M_{B'}^{B} \left[\Sigma_{S_1 S_2}\right]_{B'}^{B'} M_{B}^{B'} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

► Los detalles (Multiplicación de matrices)

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

► Los detalles (Multiplicación de matrices)

Autoevaluación Guía 1 y Guía 2 (parte 3)

jueves, 21 de octubre de 2021 05:57

Pregunta 7

Sin responder aún

Puntúa como 1

Marcar pregunta

Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ los subespacios definidos por

$\mathbb{S}_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_3 = 0,\ x_2 + x_4 = 0\}$,

$\mathbb{S}_2 = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_3 = 0,\ x_2 - x_4 = 0\}$.

Un subespacio $\mathbb{T}$ tal que $\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{S}_2 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{R}^4$ es

Seleccione una:

- a. $\text{gen}\left\{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}^T\right\}$
- b. $\text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\right\}$
- c. $\text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T\right\}$
- d. $\text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & -1\end{bmatrix}^T\right\}$

1- $S_1 \cap S_2$ $\quad x \in \mathbb{R}^4 \,/\, \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ Todos son distintos $\quad S_1 \cap S_2 = \emptyset$

$$B_{S_1} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix} \right\} \qquad B_{S_2} = \left\{ \begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{Dim}(S_1+S_2) = \text{Dim}(S_1) + \text{Dim}(S_2) + \text{Dim}(S_1 \cap S_2) = 2+2+0 = 4$$

$$B_{S_1+S_2} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix} \right\}$$

$$W = \{0\}$$

$$T = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix}0\\0\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\2\end{bmatrix} \right\}$$

$\downarrow$ da genera lo mismo

$$T = \Big\{ \underbrace{2\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\0\\1\\0\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}1\\0\\3\\0\end{bmatrix}}$$

Autoevaluación Gral. Guía 1 y 2 (parte 1)

viernes, 22 de octubre de 2021 04:17

Pregunta 3
Sin responder aún
Puntúa como 1
Marcar pregunta

Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz tal que

$$\left\{x \in \mathbb{R}^3 : Ax = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right\} = \left\{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} + \underbrace{a\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}}_{\in \operatorname{nul}(A)} : a, b \in \mathbb{R}\right\}.$$

Seleccione una:

- a. $\operatorname{col}(A) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$ y $\operatorname{nul}(A) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\3\end{bmatrix}\right\}$.
- b. El sistema $Ax = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$ es compatible indeterminado.
- c. $\operatorname{col}(A) \oplus \operatorname{nul}(A) = \mathbb{R}^3$.
- d. $\operatorname{col}(A) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$ y $\operatorname{nul}(A) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$.

Pregunta 4
Sin responder aún
Puntúa como 1
Marcar pregunta

Sea $y \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $y'' + 2y' - 35y = 0$.

Seleccione una:

- a. $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 \iff [y(0) \;\; y'(0)]^T \in \operatorname{gen}\{[1 \;\; -7]\}$.
- b. $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 \iff [y(0) \;\; y'(0)]^T \in \operatorname{gen}\{[1 \;\; 7]\}$.
- c. $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 \iff [y(0) \;\; y'(0)]^T \in \operatorname{gen}\{[1 \;\; -5]\}$.
- d. $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 \iff [y(0) \;\; y'(0)]^T \in \operatorname{gen}\{[1 \;\; 5]\}$.

$L = D^2 + 2D - 35I \qquad L = (D+7)(D-5)$

$\operatorname{nu}(L) = \operatorname{gen}\{e^{-7x}, e^{5x}\}$ como es homogenea $y(x) = a e^{-7x} + b e^{5x}$, $a, b \in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 \leftrightarrow b = 0 \rightarrow y(x) = a e^{-7x} \qquad y(0) = a \qquad \begin{bmatrix}y(0)\\y'(0)\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}1\\-7\end{bmatrix}$

$y'(x) = -7a e^{-7x} \qquad y'(0) = -7a$

Pregunta 5
Sin responder aún
Puntúa como 1
Marcar pregunta

Sea $\mathbb{S}_a \subseteq \mathbb{R}_2[x]$ el subespacio definido por $\mathbb{S}_a = \operatorname{gen}\{ax^2 + x + 1, -x^2 + (a+1)x + 2, (a-1)x^2 + x + 2\}$, con $a \in \mathbb{R}$.

Seleccione una:

- a. $\mathbb{S}_a = \mathbb{R}_2[x]$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
- b. $\mathbb{S}_a = \mathbb{R}_2[x]$ si y solamente si $a \notin \{-2, 0\}$.
- c. $\mathbb{S}_a \neq \mathbb{R}_2[x]$ si y solamente si $a \notin \{-2, 0\}$.
- d. $\mathbb{S}_a = \mathbb{R}_2[x]$ si y solamente si $a \in \{-2, 0\}$.

Esto es lo mismo que buscar $\operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}a\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\(a+1)\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}(a-1)\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$ Para que sean Li

$\begin{bmatrix}a & -1 & a-1\\1 & a+1 & 1\\1 & 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda\\\beta\\\alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ siendo si $\lambda = 0, \beta = 0, \alpha = 0$

uso el determinante

Input interpretation

$$\begin{vmatrix}a & -1 & a-1\\1 & a+1 & 1\\1 & 2 & 2\end{vmatrix}$$

Result

$a^2 + 2a$

$a^2 + 2a = 0$

$a(a+2) = 0$

$a = 0 \qquad a = -2$

Pregunta 6
Sin responder aún
Puntúa como 1
Marcar pregunta

Sea $\phi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ la funcional lineal definida por

$\phi(a_0 + a_1x + a_2x^2) = 2a_0 + a_1 - a_2$.

Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ la transformación lineal definida por

$T(1) = -1 - 2x^2$,

$T(1+x) = -2 + x - 3x^2$,

$T(1+x+x^2) = -1 + x - x^2$,

y sean $\mathbb{S}_1 = \operatorname{Nu}(\phi)$ y $\mathbb{S}_2 = \operatorname{gen}\{1 + x^2\}$.

Seleccione una:

- a. T es la simetría de $\mathbb{R}_2[x]$ con respecto a $\mathbb{S}_1$ en la dirección de $\mathbb{S}_2$.
- b. T es la proyección de $\mathbb{R}_2[x]$ sobre $\mathbb{S}_2$ en la dirección de $\mathbb{S}_1$.
- c. T es la proyección de $\mathbb{R}_2[x]$ sobre $\mathbb{S}_1$ en la dirección de $\mathbb{S}_2$.
- d. T es la simetría de $\mathbb{R}_2[x]$ con respecto a $\mathbb{S}_2$ en la dirección de $\mathbb{S}_1$.

$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \;/\; \phi(P(x)) = 0 \qquad 2a_0 + a_1 - a_2 = 0$

$2a_0 + a_1 = a_2$

$P(x) = a_0 + a_1x + (2a_0 + a_1)x^2 = a_0 + 2a_0x^2 + a_1x + a_1x^2 = a_0(1 + 2x^2) + a_1(x + x^2)$

$\mathbb{S}_1 = \operatorname{gen}\{(1+2x^2), (x+x^2)\} \qquad T(x+x^2) = T(1+x+x^2) - T(1)$

$= -1 + x - x^2 - (-1 - 2x^2) = x + x^2$

$T(1+x^2) = T(1+x+x^2) - T(1+x) + T(1)$

$= -1 + x - \cancel{x^2} + 2 - x + \cancel{3x^2} - 1 - \cancel{2x^2} = 0$

Autoevaluación Gral. Guía 1 y 2 (parte 2)

viernes, 22 de octubre de 2021 04:18

Pregunta **7**

Sin responder aún

Puntúa como 1

Marcar pregunta

Sea $\mathbb{V}$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial definido por $\mathbb{V} = \{a_1 + a_2\cos(t) + a_3\cos(2t) : [a_1 \; a_2 \; a_3]^T \in \mathbb{R}^3\}$, y sea $\mathbb{S} \subset \mathbb{V}$ el subespacio generado por $1 + 2\cos(t)$.

Seleccione una:

- a. Si $\mathbb{T} = \text{gen}\{1 - 2\cos(2t), \cos(t) + \cos(2t)\}$, entonces existen únicos $f \in \mathbb{S}$ y $g \in \mathbb{T}$ tales que $3 + 2\cos(t) + \cos(2t) = f + g$. X
- b. Si $\mathbb{T} = \text{gen}\{3 + 6\cos(t) - 2\cos(2t), \cos(2t)\}$, entonces existen únicos $f \in \mathbb{S}$ y $g \in \mathbb{T}$ tales que $3 + 2\cos(t) + \cos(2t) = f + g$. X
- c. Si $\mathbb{T} = \text{gen}\{1 + \cos(t), \cos(2t)\}$, entonces existen únicos $f \in \mathbb{S}$ y $g \in \mathbb{T}$ tales que $3 + 2\cos(t) + \cos(2t) = f + g$.
- d. Si $\mathbb{T} = \text{gen}\{1 + \cos(t) + \cos(2t), -\cos(t) + \cos(2t)\}$, entonces existen únicos $f \in \mathbb{S}$ y $g \in \mathbb{T}$ tales que $3 + 2\cos(t) + \cos(2t) = f + g$.

$S = \text{gen}\{1+2\cos(t)\}$ $\qquad$ $\mathbb{V} = \text{gen}\{1, \cos(t), \cos(2t)\}$

T es un subespacio tal que $S \oplus T = \mathbb{V}$ para que existan únicos $f \in S$ y $g \in \mathbb{T}$

$\{1+2\cos(t), \cos(2t)\}$ son LI con $\{1+\cos(t)\}$

Pregunta **8**

Sin responder aún

Puntúa como 1

Marcar pregunta

Sea $T: \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{R}^{2\times2}$ la transformación lineal definida por $T(X) = AX - XA$, donde $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$

Seleccione una:

- a. $\text{Im}(T) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\right\}$.
- b. $\text{Im}(T) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\right\}$.
- c. $\text{Im}(T) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$.
- d. $\text{Im}(T) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\right\}$.

$$T(x) = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a+c & b+d\\a+2c & b+2d\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}a+b & a+2b\\c+d & c+2d\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}c-b & d-b-a\\a+c-d & b-c\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & d\\-d & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}c & 0\\c & -c\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & -a\\a & 0\end{bmatrix}}_{\text{son múltiplos}} + \begin{bmatrix}-b & -b\\0 & b\end{bmatrix}$$

$$-\frac{c}{b}\begin{bmatrix}-b & -b\\0 & b\end{bmatrix} + -\frac{c}{d}\begin{bmatrix}0 & d\\-d & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c & 0\\c & -c\end{bmatrix} \Rightarrow b\begin{bmatrix}-1 & -1\\0 & 1\end{bmatrix}, d\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}$$

Ejercicio 3.1

jueves, 21 de octubre de 2021 20:09

3.1 Sea $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{C}$-espacio euclídeo finito dimensional y sea $v_0 \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$ un vector arbitrario pero fijo.

(a) Comprobar que la aplicación $\phi : \mathbb{V} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\phi(v) := \langle v, v_0 \rangle$$

es una funcional lineal de $\mathbb{V}$. Describir su núcleo e indicar la dimensión del mismo. Observar que $\mathbb{V} = \mathrm{Nu}(\phi) \oplus \mathrm{gen}\{v_0\}$.

(b) Explicar por qué la aplicación $\psi : \mathbb{V} \to \mathbb{C}$ definida por

$$\psi(v) := \langle v_0, v \rangle$$

no es una funcional lineal de $\mathbb{V}$.

: repasar la definición de producto interno.

En álgebra lineal, una **forma** o **funcional lineal** (también llamado **covector** o **1-forma**) es una aplicación o transformación lineal de un espacio vectorial sobre su cuerpo de escalares, es decir, esta transformación aplica vectores en escalares.

En general, si V es un espacio vectorial sobre un cuerpo k, entonces un funcional lineal f es una función de V a k que es lineal:

$f(\vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w})$ para todo $\vec{v}, \vec{w} \in V$
$f(a\vec{v}) = af(\vec{v})$ para todo $\vec{v} \in V, a \in k$

(a) Funcional lineal es una función $F: \mathbb{V} \to \mathbb{K}$, en este caso la funcional es el producto interno $\langle v, v_0 \rangle$

Definición 1.1 (Producto interno). *Un producto interno en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ es una función $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{K}$ que posee las las siguientes propiedades:*

(i) *Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x, y, z \in \mathbb{V}$*
  a) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$,
  b) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.
(ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ $\forall x, y \in \mathbb{V}$.
(iii) $\langle x, x\rangle > 0$ *si* $x \neq 0$.

Asumimos que se refiere al producto interno canónico

$v_0 \in \mathbb{K}^n \, / \, v_0 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

$$\phi(x+\lambda y) = \langle x + \lambda y, v_0 \rangle = \left\langle \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right), \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \right\rangle = [\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_n] \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{\text{es redundante (matriz identidad)}} \begin{bmatrix} x_1 + \lambda y_1 \\ x_2 + \lambda y_2 \\ \vdots \\ x_n + \lambda y_n \end{bmatrix} = [\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 + \lambda y_1 \\ x_2 + \lambda y_2 \\ \vdots \\ x_n + \lambda y_n \end{bmatrix} \overset{*}{=}$$

Vale en matrices $A(B+C) = AB + AC$

$$\overset{*}{=} [\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_n] \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \right) = [\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \lambda [\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \langle x, v_0 \rangle + \lambda \langle y, v_0 \rangle$$

$$= \theta(x) + \lambda\theta(y)$$

Nota Bene. Nótese que

$$\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\langle \lambda y, x\rangle} = \overline{\lambda \langle y, x\rangle} = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle.$$

(b)

$\phi(\lambda v) = \langle v_0, \lambda v \rangle =$

Ejercicio 3.2

jueves, 21 de octubre de 2021 21:24

3.2 En cada uno de los siguientes casos, verificar que la fórmula

$$\langle x, y\rangle := y^T G x$$

define un producto interno en $\mathbb{R}^2$:

(a) $G \in \mathcal{G}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

(b) $G \in \mathcal{G}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{bmatrix} : \theta \in (0, \pi) \right\}$.

(c) $G \in \mathcal{G}_3 = \left\{ \begin{bmatrix} \ell_1^2 & \ell_1\ell_2\cos\theta \\ \ell_1\ell_2\cos\theta & \ell_2^2 \end{bmatrix} : \theta \in (0, \pi),\ \ell_1 > 0,\ \ell_2 > 0 \right\}$.

(d) $G \in \mathcal{G}_4 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} : a > 0,\ \det \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} > 0 \right\}$.

: observar que $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_3 = \mathcal{G}_4$ y decidir en qué orden se resolverá el problema. ¿Se podrán definir otros productos internos en $\mathbb{R}^2$? ¿Qué significado geométrico tienen los coeficientes de las matrices G? ¿Qué efectos tiene la elección de cada uno de esos productos internos sobre los lados y el área del triángulo de vertices $0, e_1, e_2$? ¿Qué significado geométrico tiene el determinante de G?

Como $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_3 = \mathcal{G}_4$, basta con comprobar que $\mathcal{G}_4$ es un producto interno para comprobar el resto

$$\langle x, y\rangle = y^T \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} x \;:\; a>0,\ \det\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} > 0$$

Definición 1.1 (Producto interno). *Un producto interno en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ es una función $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{V}\times\mathbb{V} \to \mathbb{K}$ que posee las las siguientes propiedades:*

(i) *Para cada $\lambda \in \mathbb{K}$ y $x, y, z \in \mathbb{V}$*
  a) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$,
  b) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.
(ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ $\forall x, y \in \mathbb{V}$.
(iii) $\langle x, x\rangle > 0$ *si* $x \neq 0$.

i) $\langle x+\lambda y, z\rangle = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1+\lambda y_1 \\ x_2+\lambda y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda y_1 \\ \lambda y_2 \end{bmatrix}\right)$

$= \begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \langle x, z\rangle + \lambda\langle y, z\rangle$

ii) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ en un $\mathbb{R}$-espacio vectorial

$\langle x, y\rangle = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ax_1+bx_2 \\ bx_1+cx_2 \end{bmatrix} = y_1(ax_1+bx_2) + y_2(bx_1+cx_2) = ax_1y_1 + bx_2y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_2$

$\langle y, x\rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ay_1+by_2 \\ by_1+cy_2 \end{bmatrix} = ax_1y_1 + by_2x_1 + by_1x_2 + cy_2x_2$

$\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

iii) $\langle x, x\rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ax_1+bx_2 \\ bx_1+cx_2 \end{bmatrix} = ax_1^2 + bx_1x_2 + bx_2x_1 + cx_2^2$

$= ax_1^2 + cx_2^2 + 2bx_2x_1$

$\text{Det}\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = ac - b^2 > 0$ $\downarrow$ dividiendo por a $\downarrow$ $c - \frac{b^2}{a} > 0$

Por enunciado $a>0$

$= a\left(x_1^2 + \frac{2b}{a}x_2x_1\right) + cx_2^2$

$= a\left(\left(x_1 + \frac{b}{a}x_2\right)^2 - \frac{b^2}{a^2}x_2\right) + cx_2$

$= a\left(x_1 + \frac{b}{a}x_2\right)^2 - \frac{b^2}{a}x_2 + cx_2$

$= \underbrace{a\left(x_1 + \frac{b}{a}x_2\right)^2}_{>0} + \underbrace{\left(c - \frac{b^2}{a}\right)}_{>0 \text{ por el det}}x_2 > 0$ si $x \neq 0$

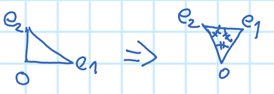
$\mathcal{G}_4$ es un producto interno, por lo tanto $\mathcal{G}_3, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_1$ también lo son.

Ejercicio 3.3

jueves, 21 de octubre de 2021 22:02

3.3 Hallar todos los productos internos en $\mathbb{R}^2$ que convierten al triángulo de vértices $0, e_1$ y e_2 en un triángulo equilátero. Utilizar alguno de ellos para calcular el ángulo entre los vectores $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ y $v_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$. ¿Cuál es el valor del área del triángulo de vértices $0, v_1$ y v_2? ¿Cómo depende del producto interno elegido?

$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \|e_1\| = \|e_2\| = \|\alpha\|$



$\|e_1\|^2 = \langle e_1, e_1 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a \Rightarrow \|e_1\| = \sqrt{a}$

$\|e_2\|^2 = \langle e_2, e_2 \rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} = c \Rightarrow \|e_2\| = \sqrt{c}$

$\theta = \measuredangle(e_1, e_2) = \frac{\pi}{3}$ para ser equilátero

$$G_{\{x,y\}} = \begin{bmatrix} \ell_x^2 & \ell_x \ell_y \cos\theta \\ \ell_x \ell_y \cos\theta & \ell_y^2 \end{bmatrix}.$$

$G_{(e_1,e_2)} = \begin{bmatrix} \|e_1\|^2 & \|e_1\|\|e_2\| \cos(\measuredangle(e_1,e_2)) \\ \|e_1\|\|e_2\| \cos(\measuredangle(e_1,e_2)) & \|e_2\|^2 \end{bmatrix}$

$\cos(\theta) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\langle e_1, e_2 \rangle}{\sqrt{a}\sqrt{c}} \rightarrow \langle e_1, e_2 \rangle = \sqrt{a}\sqrt{c}\,\frac{1}{2}$

Como es equilátero $\|e_1\| = \|e_2\| \Leftrightarrow a = c$

La matriz del producto interno que transforma al triángulo formado por $0, e_1$ y e_2 en equilátero tiene la forma

$$\begin{bmatrix} a & \frac{1}{2}a \\ \frac{1}{2}a & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Todos los productos internos $\langle x, y \rangle : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que transforman el triángulo de vertices $0, e_1, e_2$ en equilátero son de la forma

$\langle x, y \rangle = y^T G_E x \;/\; G_E \in \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \right\}$

Usamos el producto interno definido $\langle x, y \rangle = y^T \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} x \qquad \cos\theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|x\|} \in (0, \pi\}$

$\theta = \measuredangle(v_1, v_2), \; v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\|v_1\|^2 = \langle v_1, v_1 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = 3 \rightarrow \|v_1\| = \sqrt{3}$

$\|v_2\|^2 = \langle v_2, v_2 \rangle = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 1 \rightarrow \|v_2\| = 1$

$\langle v_1, v_2 \rangle = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = 0 \qquad \cos\theta = \frac{0}{\sqrt{3} \cdot 1} = 0 \rightarrow \theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$

$\boxed{\measuredangle(v_1, v_2) = \frac{\pi}{2}}$

El area del triangulo de $0, e_1, e_2$ es $A = \frac{1}{2}\sqrt{\text{Det}(G_e)}$

armamos $G_{(v_1,v_2)} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ es la matriz de Gram de (v_1, v_2)

$A = \frac{1}{2}\sqrt{\det(G_{(v_1,v_2)})} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\boxed{\text{Area del triangulo de vertices } 0, v_1, v_2 \text{ es } \frac{\sqrt{3}}{2}}$

Dependencia del area con el producto interno elegido $\langle x, y \rangle = y^T a \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} x$

$\|v_1\|^2 = 3a \rightarrow \|v_1\| = \sqrt{3a}$

$\|v_2\|^2 = a \rightarrow \|v_2\|^2 = \sqrt{a} \qquad \cos\theta = \frac{0}{\sqrt{3a}\sqrt{a}} = 0 \rightarrow \theta = \frac{1}{2} \qquad G_{\{v_1,v_2\}} = \begin{bmatrix} 3a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \qquad \text{Det}(G_{\{v_1,v_2\}}) = 3a^2$

$\langle v_1, v_2 \rangle = 0$

$A = \frac{1}{2}\sqrt{\text{Det}(G_{\{v_1,v_2\}})} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

$\boxed{\text{El área del triangulo } 0, v_1, v_2 \text{ depende del producto interno elegido mediante } A = \frac{\sqrt{3}}{2} a}$

Ejercicio 3.4

viernes, 22 de octubre de 2021 03:33

3.4 Sea $(\mathbb{V}, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un $\mathbb{R}$-espacio euclídeo de dimensión 3 y sea

$$\mathcal{B} = \{u_i : i \in \mathbb{I}_3\} \subset \{u \in \mathbb{V} : \|u\| = 1\}$$

una base de $\mathbb{V}$ tal que $\|u_i + u_j\|^2 = 2 + \sqrt{3}$ y $\|u_i - u_j\|^2 = 2 - \sqrt{3}$ para $i \neq j$.

(a) Hallar la matriz del producto interno $\langle \cdot,\cdot \rangle$ respecto de la base $\mathcal{B}$.

(b) Hallar la matriz $\Theta := [\arccos(\langle u_i, u_j \rangle)]_{\substack{i\in\mathbb{I}_3 \\ j\in\mathbb{I}_3}}$.

(c) Construir un triángulo rectángulo cuyos vértices sean $0, u_1, u_2 - \lambda u_1$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. ¿Es único?

(d) Calcular el área del triángulo de vértices $0, u_1, u_2$.

(e) Calcular el área del triángulo de vértices u_1, u_2 y u_3.

$\langle u, u \rangle = \|u\|^2$

(a) $B = \{u_1, u_2, u_3\}$

$$G_B = \begin{bmatrix} \langle u_1,u_1\rangle & \langle u_1,u_2\rangle & \langle u_1,u_3\rangle \\ \langle u_2,u_1\rangle & \langle u_2,u_2\rangle & \langle u_2,u_3\rangle \\ \langle u_3,u_1\rangle & \langle u_3,u_2\rangle & \langle u_3,u_3\rangle \end{bmatrix}$$

Por enunciado $\|u_1\| = \|u_2\| = \|u_3\| = 1$

$\|u_1\|^2 = 1^2 = 1 = \|u_2\|^2 = \|u_3\|^2$

En un $\mathbb{R}$-espacio vectorial:

- $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u,v \rangle + \|v\|^2$ (cuadrado del binomio) 1
- $\|u-v\|^2 = \|u\|^2 - 2\langle u,v \rangle + \|v\|^2$ 2

Haciendo 1 − 2:

$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 - (\|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2)$

$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\langle u,v\rangle$

$\left[\frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2) = \langle u,v\rangle\right]$

$\|u_1,u_2\| = \frac{1}{4}(\|u_1+u_2\|^2 - \|u_1-u_2\|^2) = \frac{1}{4}(2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\|u_1,u_3\| = \frac{1}{4}(2+\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\|u_2,u_3\| = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Como es un espacio euclídeo real $\langle u_3,u_1\rangle = \langle u_2,u_1\rangle \langle u_3,u_2\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\boxed{G_B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix}}$$

(b) si $i = j \Rightarrow \arccos(\langle u_i,u_j\rangle) = \arccos(1) = 0$ si $i \neq j \Rightarrow \arccos(\langle u_i,u_j\rangle) = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

$$\boxed{\Theta = \begin{bmatrix} 0 & \pi/6 & \pi/6 \\ \pi/6 & 0 & \pi/6 \\ \pi/6 & \pi/6 & 0 \end{bmatrix}}$$

(c)

Se pide un triángulo rectángulo de vértices $0, u_1, u_2 - \lambda u_1$, tiene que cumplir:

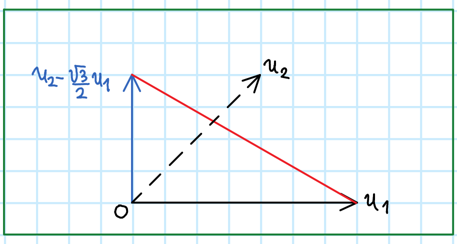
$\langle u_2 - \lambda u_1, u_1\rangle\ 0 \Leftrightarrow \langle u_2,u_1\rangle - \lambda\langle u_1,u_1\rangle = 0$

$\lambda = \frac{\langle u_2,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle} = \frac{\langle u_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}$

Buscamos λ:

$\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Por lo que el triángulo rectángulo es el formado por los vértices $0, u_1, u_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}u_1$



Para obtener la expresión de λ de manera geométrica, hallamos la proyección ortogonal de u_2 sobre u_1 y operamos con los vectores para encontrar uno ortogonal a u_1, como se ve en las figuras siguientes:

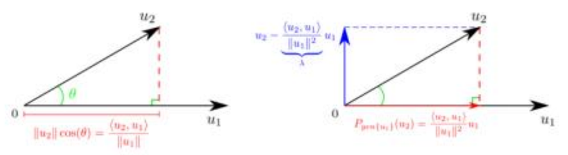


Figura 1: *Construcción del triángulo rectángulo.*

En la figura de la izquierda se observa cómo es la longitud de la proyección ortogonal de u_2 sobre u_1:

$$\|u_2\|\cos(\theta) = \|u_2\| \cdot \frac{\langle u_2,u_1\rangle}{\|u_1\|\ \|u_2\|} = \frac{\langle u_2,u_1\rangle}{\|u_1\|}$$

En la figura de la derecha escribimos la expresión de proyección ortogonal de u_2 sobre u_1:

$$P_{gen\{u_1\}}(u_2) = \frac{\langle u_2,u_1\rangle}{\|u_1\|}\frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{\langle u_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1$$

y luego entonces el vector en azul que es uno de los catetos del triángulo rectángulo pedido resulta:

$$u_2 - \frac{\langle u_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1 = u_2 - \lambda u_1 \quad , \quad \lambda = \frac{\langle u_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}$$

Por construcción, resultan $\text{gen}\{u_1,u_2\} = \text{gen}\{u_1, u_2 - \lambda u_1\}$ con la diferencia de que esta última es una base ortogonal, tal como necesitábamos.

Ejercicio 3.5

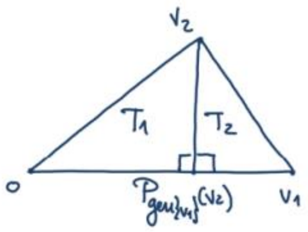
viernes, 22 de octubre de 2021 21:35

3.5 ☢ Sea $\mathbb{V}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y sea $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{V}\times\mathbb{V}\to\mathbb{R}$ un producto interno en $\mathbb{V}$. Sean v_1 y v_2 dos vectores linealmente independientes. Demostrar que la suma de los ángulos internos del triángulo de vértices $0, v_1, v_2$ es π.

☞: *Razón por la cual se dice que $(\mathbb{V},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un espacio euclídeo real.*

Se deben demostrar una serie de lemas:

Lema 2.5. *Sean v_1 y v_2 dos vectores linealmente independientes. El triángulo de vértices $0, v_1, v_2$ se puede descomponer en dos triángulos rectángulos contiguos.*



Demostración. No se pierde generalidad si se supone que $\|v_1\|\geq\|v_2\|$. Si T designa al triángulo vertices $0, v_1, v_2$, se puede ver que los triángulos, T_1, de vértices $0, P_{\text{gen}\{v_1\}}(v_2), v_2$, y T_2, de vértices $P_{\text{gen}\{v_1\}}(v_2), v_2, v_1$ satisfacen que

$$T_1\cup T_2 = T \text{ y } T_1\cap T_2 = \overline{P_{\text{gen}\{v_1\}}(v_2), v_2}.$$

Lema 2.4. *Sean v_1 y v_2 dos vectores linealmente independientes tales que $v_1 = P_{\text{gen}\{v_1\}}(v_2)$. Si $\alpha = \sphericalangle(v_1,v_2)$ y $\beta = \sphericalangle(v_2, v_2-v_1)$, entonces*

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2} \tag{11}$$

Demostración. Se deduce de la figura siguiente.

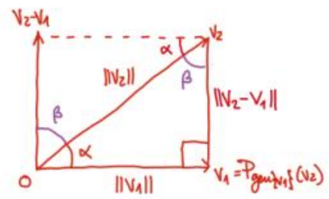
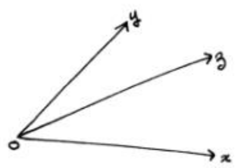


FIGURA 4. De la relación $\cos\beta = \frac{\|v_2-v_1\|}{\|v_2\|} = \operatorname{sen}\alpha$, con $\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$ se deduce que $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$.

Lema 2.2 (Aditividad). *Sean $x, y\in\mathbb{V}\setminus\{0\}$ dos vectores linealmente independientes y sea $z = t_1x+t_2y$ con $t_1,t_2>0$.*



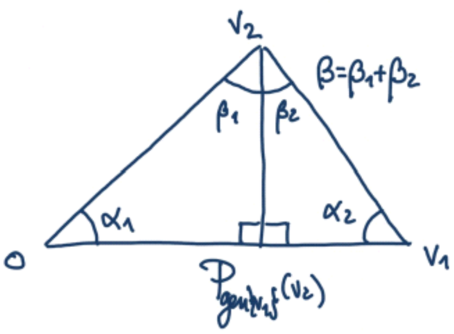
Vale que

$$\sphericalangle(x,y) = \sphericalangle(x,z)+\sphericalangle(z,y).$$

Con esto:

Teorema 2.6 (Postulado V). *Sea $(\mathbb{V},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{R}$-espacio euclídeo. Si v_1 y v_2 son dos vectores linealmente independientes, entonces la suma de los ángulos internos del triángulo de vértices $0, v_1, v_2$ es π.*

Demostración. Es consecuencia inmediata de los **Lemas 2.5, 2.4, 2.2**.



Etiquetamos los ángulos internos mediante α_1,α_2,β. Utilizamos el **Lema 2.5** para separar al triángulo en dos triángulos rectángulos. Utilizamos el **Lema 2.2** para descomponer a β en dos partes $\beta=\beta_1+\beta_2$. El **Lema 2.4** nos informa que $\alpha_1+\beta_1=\alpha_2+\beta_2=\frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, $\alpha_1+\alpha_2+\beta=\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2=\pi$. □

Ejercicio 3.6

viernes, 22 de octubre de 2021 21:58

3.6 [ver **Ejercicio 2.19**] En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico se considera el subespacio

$$\mathbb{S} = \text{gen}\left\{\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T}_{s_1}, \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}^T}_{s_2}\right\}.$$

(**a**) Escribir cada vector $x \in \mathbb{R}^3$ en la forma $x = x_{\mathbb{S}} + x_{\mathbb{S}^\perp}$ con $x_{\mathbb{S}} \in \mathbb{S}$ y $x_{\mathbb{S}^\perp} \in \mathbb{S}^\perp$ y comprobar que $\mathbb{R}^3 = \mathbb{S} \oplus \mathbb{S}^\perp$.

(**b**) Hallar la matriz con respecto a la base canónica de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{S}$.

(**c**) Calcular la distancia al subespacio $\mathbb{S}$ de cada uno de los elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(**d**) Hallar todos los $x \in \mathbb{R}^3$ tales que $P_{\mathbb{S}}(x) = \begin{bmatrix}1 & 1 & -2\end{bmatrix}^T$ cuya distancia a $\mathbb{S}$ sea igual a $\sqrt{3}$.

(**e**) Hallar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^3$ que sean equidistantes a los puntos $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix}6 & 6 & 6\end{bmatrix}^T$.

$\mathbb{R}^3$

$$\langle x, y\rangle = y^T \underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{\text{redundante } I x = x} x$$

$d(v, F$

$\|F - v\|$

$d(\quad) = d(x, [666])$

(a)

$$\text{Dim}(\mathbb{S}) + \text{Dim}(\mathbb{S}^\perp) = \text{Dim}(\mathbb{R}^3)$$

$$2 + \text{Dim}(\mathbb{S}^\perp) = 3 \rightarrow \text{Dim}(\mathbb{S}^\perp) = 1$$

$$\mathbb{S}^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 / \langle x, s_1\rangle = \langle x, s_2\rangle = 0\} \qquad x = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

$$\langle x, s_1\rangle = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = x_1 - x_3 = 0 \qquad \langle x, s_2\rangle = \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = x_2 - x_3 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \rightarrow x_1 = x_3 \\ x_2 - x_3 = 0 \rightarrow x_2 = x_3 \end{cases} \qquad x = \begin{bmatrix}x_3\\x_3\\x_3\end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \qquad \mathbb{S}^\perp = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right\}$$

$$x = \underbrace{\lambda\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}}_{\in \mathbb{S}} + \underbrace{\alpha\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}_{\in \mathbb{S}^\perp} \qquad x = \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda\\\beta\\\alpha\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda\\\beta\\\alpha\end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&x_1\\0&1&1&x_2\\-1&-1&1&x_3\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{1}{3}(2x_1-x_2-x_3)\\0&1&0&\frac{1}{3}(-x_1+2x_2-x_3)\\0&0&1&\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)\end{array}\right] \begin{array}{l}\rightarrow\lambda\\\rightarrow\beta\\\rightarrow\alpha\end{array}$$

$$\boxed{x = \underbrace{\frac{1}{3}(2x_1-x_2-x_3)\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} + \frac{1}{3}(-x_1+2x_2-x_3)\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}}_{\in \mathbb{S}} + \underbrace{\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}}_{\in \mathbb{S}^\perp}}$$

(b)

$$P_{\mathbb{S}^\perp}(x) = \frac{\langle x, [1\,1\,1]^T\rangle}{\|[1\,1\,1]^T\|^2}[1\,1\,1]^T$$

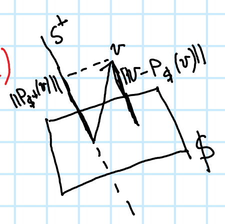
$$\langle x, [1\,1\,1]^T\rangle = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\|[1\,1\,1]^T\|^2 = \langle [1\,1\,1]^T, [1\,1\,1]^T\rangle = 3$$

$$P_{\mathbb{S}^\perp}(x) = (x_1+x_2+x_3)\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$P_{\mathbb{S}}(x) + P_{\mathbb{S}^\perp}(x) = I(x) \rightarrow P_{\mathbb{S}}(x) = x - P_{\mathbb{S}^\perp}(x) = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} - (x_1+x_2+x_3)\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3\\\frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3\\\frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

(c)



$$d^2(e_1, \mathbb{S}) = \|P_{\mathbb{S}^\perp}(e_1)\|^2 = \left\langle \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\rangle = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{3} \rightarrow d(e_1, \mathbb{S}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$d(e_2, \mathbb{S}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$P_{\mathbb{S}^\perp}(e_1) = (1+0+0)\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix} = P_{\mathbb{S}^\perp}(e_2) = P_{\mathbb{S}^\perp}(e_3) \qquad d(e_3, \mathbb{S}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(d)

$$P_{\mathbb{S}}(x) = \begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&3\\0&1&-1&3\\0&0&0&0\end{array}\right] \rightarrow \begin{cases}x_1 - x_3 = 3 \rightarrow x_1 = 3 + x_3\\ x_2 - x_3 = 3 \rightarrow x_2 = 3 + x_3\end{cases} \qquad x = \begin{bmatrix}3+x_3\\3+x_3\\x_3\end{bmatrix}$$

$$d(x, \mathbb{S}) = \sqrt{3}$$

$$d^2(x, \mathbb{S}) = 3 \longrightarrow d^2(x, \mathbb{S}) = \|P_{\mathbb{S}^\perp}(x)\|^2 = \left\langle\begin{bmatrix}2+x_3\\2+x_3\\2+x_3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2+x_3\\2+x_3\\2+x_3\end{bmatrix}\right\rangle = \begin{bmatrix}2+x_3 & 2+x_3 & 2+x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2+x_3\\2+x_3\\2+x_3\end{bmatrix} = 12 + 12x_3 + 3x_3^2$$

$$P_{\mathbb{S}^\perp}(x) = \underbrace{(3+x_3+3+x_3+x_3)}_{6+3x_3}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2+x_3\\2+x_3\\2+x_3\end{bmatrix}$$

$$12 + 12x_3 + 3x_3^2 = 3$$

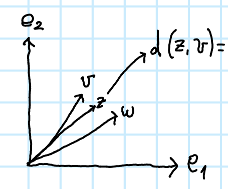
$$3x_3^2 + 12x_3 + 9 = 0 \begin{cases} x_3 = -3 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

$$(2+x_3)(2+x_3) = 4 + 2x_3 + 2x_3 + x_3^2$$
$$= 4 + 4x_3 + x_3^2$$
$$= 12 + 12x_3 + 3x_3^2$$

$$x = \begin{bmatrix}3+x_3\\3+x_3\\x_3\end{bmatrix} \longrightarrow x_1 = \begin{bmatrix}0\\0\\-3\end{bmatrix}, \; x_2 = \begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\left\{x \in \mathbb{R}^3 / P_{\mathbb{S}}(x) = [1\;1\;2]^T \wedge d(x, \mathbb{S}) = \sqrt{3} : \; x = \begin{bmatrix}0\\0\\-3\end{bmatrix} \vee x = \begin{bmatrix}2\\2\\-1\end{bmatrix}\right\}}$$

(e)



$$d(z, v) = d(z, w) \Rightarrow \|z - w\| = \|z - v\|$$

$$d(x, [0\,0\,0]^T) = d(x, [6\,6\,6]^T)$$

$$d^2(x, [0\,0\,0]^T) = d^2(x, [6\,6\,6]^T)$$

$$\left\|\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\right\|^2 = \left\|\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}6\\6\\6\end{bmatrix}\right\|^2$$

$$\left\langle\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right\rangle = \left\langle\begin{bmatrix}x_1-6\\x_2-6\\x_3-6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}x_1-6\\x_1-6\\x_1-6\end{bmatrix}\right\rangle$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1-6)^2 + (x_2-6)^2 + (x_3-6)^2$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1^2 - 12x_1 + 36 + x_2^2 - 12x_2 + 36 + x_3^2 - 12x_3 + 36$$
$$0 = -12(x_1 + x_2 + x_3) + 108$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 9$$

$$\boxed{\{x \in \mathbb{R}^3 / d(x, [0\,0\,0]^T) = d(x, [6\,6\,6]^T), \; x_1 + x_2 + x_3 = 9\}}$$

Ejercicio 3.7

sábado, 23 de octubre de 2021 20:44

3.7 En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definido por

$$\langle x, y\rangle = y^T \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} x$$

se consideran los subespacios

$$\mathbb{S}_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\} \text{ y } \mathbb{S}_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_3 = 0\}.$$

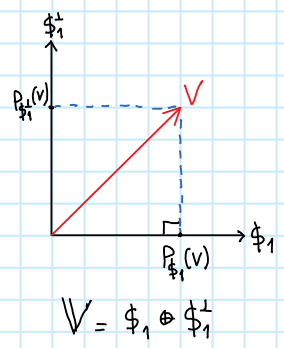
(a) Hallar las matrices con respecto a la base canónica de las proyecciones ortogonales de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{S}_1^\perp$ y sobre $\mathbb{S}_2^\perp$.

(b) Sea $b = [1 \ \ 1 \ \ 2]^T$. Hallar la distancia de b al subespacio $\mathbb{S}_1^\perp$ y la distancia de b al subespacio $\mathbb{S}_2$.

(c) Hallar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^3$ cuya distancia a $\mathbb{S}_1$ coincide con su distancia a $\mathbb{S}_2$.

(a) $[P_{S_1^\perp}] = ?$ $[P_{S_2^\perp}] = ?$ $\mathbb{R}^3$, $\langle x,y\rangle = y^T\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}x$ $S_1 = \{x\in\mathbb{R}^3 : x_1+x_2+x_3=0\}$ $S_2 = \{x\in\mathbb{R}^3 \ x_1-x_3=0\}$

Como S_1 define un plano en $\mathbb{R}_3$, $S_1^\perp$ debe definir una recta que pasa por el origen $S_1^\perp = gen\{v_1\}$



$d(v, S_1) = \| P_{S_1^\perp}(v)\|$

$d(v, S_1^\perp) = \| P_{S_1}(v)\|$

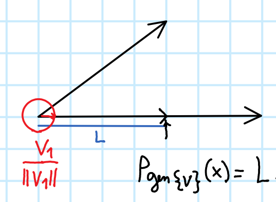
$P_{S_1} + P_{S_1^\perp} = I_V$

$V = S_1 \oplus S_1^\perp$

$S^\perp = ?$ $S^\perp = \{x\in V : \langle x, v\rangle = 0 \ \ \forall v \in S\}$

$S = gen\boxed{\{V_1, V_2, \dots V_m\}}$ $S^\perp = \{x \in V, \langle x, V_i\rangle = 0 \ \ \forall i = 1,2,\dots,m\}$

base de S



$\cos\theta = \frac{L}{\|x\|}$ $L = \|x\|\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{\langle x, V\rangle}{\|x\|\|V\|}$ $\Big\} L = \frac{\langle x, V\rangle}{\|V\|}$

$P_{gen\{v\}}(x) = L \cdot \frac{V}{\|V\|} = \frac{\langle x, V\rangle}{\|V\|}\frac{V}{\|V\|} = \frac{\langle x, V\rangle}{\|V\|^2}V$

$\langle x, y\rangle = y^T G x$ $\underset{\uparrow \text{R-ev}}{P_{gen\{v\}}(x)} = \frac{\langle x, V\rangle}{\|V\|^2}V = \frac{V^T G x}{V^T G V}V = \frac{1}{V^T G V}\cdot V V^T G \cdot x = \left(\frac{1}{V^T G V} V V^T G\right)x \ \therefore$ $\boxed{[P_{gen\{v\}}] = \frac{1}{V^T G V} V V^T G}$

$S = \{x\in\mathbb{R}^n : w^T x = 0\} = gen\{G^{-1}w\}^\perp$

$0 = w^T x = w^T G^{-1} G x = (G^{-1}w)^T G x = \langle x, G^{-1}w\rangle$ $\boxed{S^\perp = gen\{G^{-1}w\}}$

$(AB)^T = B^T A^T$

$G^T = G$ y G es inversible, entonces $(G^{-1})^T = G^{-1}$

$$\boxed{[P_{S^\perp}] = \frac{1}{w^T G^{-1} w}\cdot G^{-1} w w^T}$$

ahora resolvemos:

$S_1 = \{x\in\mathbb{R}^3 : x_1+x_2+x_3 = 0\} = \{x \in \mathbb{R} : w^T x = 0, \ w = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\}$ $G = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \to G^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 & 6 & -4 \\ 6 & 6 & -4 \\ -4 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

$S_1^\perp = gen\{G^{-1}w_1\} = gen\left\{\frac{1}{2}\begin{bmatrix}9\\8\\-5\end{bmatrix}\right\}$ $[P_{S_1^\perp}] = \frac{1}{6}\,\frac{1}{2}\begin{bmatrix}9\\8\\-5\end{bmatrix}[1 \ 1 \ 1] = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 8 & 8 & 8 \\ -5 & -5 & -5 \end{bmatrix}$

$w_1^T G^{-1} w_1 = 6$

$$\boxed{[P_{S_1^\perp}] = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 8 & 8 & 8 \\ -5 & -5 & -5 \end{bmatrix}}$$

Probamos resolver el siguiente con otro planteo

$S_2 = \{x\in\mathbb{R}^3 : x_1 - x_3 = 0\} = gen\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ $x \in S_2^\perp \iff \begin{cases}\langle x, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\rangle = 0 \\ \langle x, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\rangle = 0\end{cases} \iff \begin{cases}[1\ 0\ 1]\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = 0 \\ [0\ 1\ 0]\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = 0\end{cases}$

$\iff \begin{cases}[2\ 2\ 6]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = 0 \\ [-2\ 5\ 4]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = 0\end{cases} \iff \begin{cases}2x_1+2x_2+6x_3 = 0 \\ -2x_1+5x_2+4x_3 = 0\end{cases} \to \begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11/7 \\ 0 & 1 & 10/7 \end{bmatrix} \to \begin{matrix} x_1 = -\frac{11}{7}x_3 \\ x_2 = -\frac{10}{7}x_3 \end{matrix}$ $x = \begin{bmatrix}-\frac{11}{7}x_3\\-\frac{10}{7}x_3\\x_3\end{bmatrix} = x_3\begin{bmatrix}-11/7\\-10/7\\1\end{bmatrix}$

$S_2^\perp = gen\left\{\begin{bmatrix}-11\\-10\\7\end{bmatrix}\right\} = gen\left\{\begin{bmatrix}11\\10\\-7\end{bmatrix}\right\}$

$[P_{S_2^\perp}] = \left[[P_{S_2^\perp}(e_1)]^E \ \ [P_{S_2^\perp}(e_2)]^E \ \ [P_{S_2^\perp}(e_3)]^E\right]$ Como $Dim(S_2^\perp) = 1$, $P_{S_2^\perp}(x) = \frac{\left\langle \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}11\\10\\-7\end{bmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{bmatrix}11\\10\\-7\end{bmatrix}\right\|^2}\begin{bmatrix}11\\10\\-7\end{bmatrix}$

$\left\langle \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}11\\10\\-7\end{bmatrix}\right\rangle = [11\ 10\ -7]\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = [2\ 0\ -2]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = 2x_1 - 2x_3 = 2(x_1 - x_3)$

$\left\|\begin{bmatrix}11\\10\\-7\end{bmatrix}\right\|^2 = [11\ 10\ -7]\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}11\\10\\-7\end{bmatrix} = 36$ $P_{S_2^\perp}(x) = \frac{2(x_1-x_3)}{36}\begin{bmatrix}11\\10\\-7\end{bmatrix} = \frac{1}{18}(x_1-x_3)\begin{bmatrix}11\\10\\-7\end{bmatrix}$

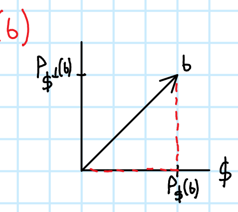
$P_{S_2^\perp}(e_1) = \frac{1}{18}\begin{bmatrix}11\\10\\-7\end{bmatrix}$ $P_{S_2^\perp}(e_2) = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ $P_{S_2^\perp}(e_3) = \frac{1}{18}\begin{bmatrix}-11\\-10\\7\end{bmatrix}$

$$\boxed{[P_{S_2^\perp}] = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 11 & 0 & -11 \\ 10 & 0 & -10 \\ -7 & 0 & 7 \end{bmatrix}}$$

Otra forma de hayar $P_{S_2^\perp}(x)$ es sabiendo que $V = S_2 \oplus S_2^\perp$ $x = \lambda\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \underbrace{\alpha\begin{bmatrix}11\\10\\-7\end{bmatrix}}_{= P_{S_2^\perp}(v)}$

$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda\\\beta\\\alpha\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\lambda\\\beta\\\alpha\end{bmatrix} = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 7 & 0 & 11 \\ -10 & 18 & 10 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} \to \alpha = \frac{1}{18}(x_1 - x_3) \implies P_{S_2^\perp}(x) = \frac{1}{18}(x_1-x_3)\begin{bmatrix}11\\10\\-7\end{bmatrix}$

(b)



$P_{gen\{G^{-1}w\}} = \underbrace{\frac{1}{w^T G^{-1} w}}_{\text{También es un numero}} G^{-1} w \underbrace{w^T b}_{\text{Esto es un numero}}$ $\|G^{-1}w\|^2 = w^T G^{-1} \cancel{G} \cancel{G^{-1}} w = w^T G^{-1} w$

$d(b, S_1^\perp) = \sqrt{\|b\|^2 - \|P_{S_1^\perp}(b)\|^2}$

$d(b, S_2) = \|P_{S_2^\perp}(b)\|$

$\|P_{gen\{G^{-1}w\}}\| = \left|\frac{w^T b}{w^T G^{-1} w}\right| \|G^{-1}w\| = \frac{|w^T b|}{\|G^{-1}w\|^2}\|G^{-1}w\| = \frac{|w^T b|}{\|G^{-1}w\|} = \frac{|w^T b|}{\sqrt{w^T G^{-1} w}}$

$\boxed{\|P_{gen\{G^{-1}w\}}\| = \frac{|w^T b|}{\sqrt{w^T G^{-1} w}}}$ → queda como machete

$\|b\|^2 = [1\ 1\ 2]\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} = [0\ 11\ 16]\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} = 43$

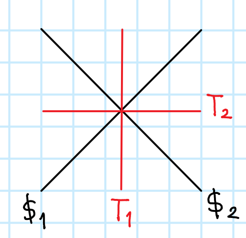
$P_{S_1^\perp}(b) = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 9 & 9 & 9 \\ 8 & 8 & 8 \\ -5 & -5 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\8/3\\-5/3\end{bmatrix}$ $\|P_{S_1^\perp}(b)\|^2 = [3\ 8/3\ -5/3]\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\8/3\\-5/3\end{bmatrix} = \frac{8}{3}$

$d(b, S_1^\perp) = \sqrt{43 - \frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{121}{3}} = \frac{11}{\sqrt{3}} = \frac{11}{3}\sqrt{3}$

$P_{S_2^\perp}(b) = \frac{1}{18}(1-2)\begin{bmatrix}11\\10\\-7\end{bmatrix} = -\frac{1}{18}\begin{bmatrix}11\\10\\-7\end{bmatrix}$ $d(b, S_2) = \|P_{S_2^\perp}(b)\| = \left|-\frac{1}{18}\right|\left\|\begin{bmatrix}11\\10\\-7\end{bmatrix}\right\| = \frac{1}{18}\cdot 6 = \frac{1}{3}$

$$\boxed{d(b, S_1^\perp) = \frac{11}{3}\sqrt{3} \qquad d(b, S_2) = \frac{1}{3}}$$

(c) $\{x\in\mathbb{R}^3 : d(x, S_1) = d(x, S_2)\} = T_1 \cup T_2$



$d(x, S_1) = d(x, S_2)$

$\|P_{S_1^\perp}(x)\| = \|P_{S_2^\perp}(x)\|$

$\left\|\frac{1}{2}\begin{bmatrix}9x_1+9x_2+9x_3\\8x_1+8x_2+8x_3\\-5x_1-5x_2-5x_3\end{bmatrix}\right\|^2 = \left\|\frac{1}{18}\begin{bmatrix}11x_1-11x_3\\10x_1-10x_3\\-7x_1+7x_3\end{bmatrix}\right\|^2$

$\frac{1}{12}[9x_1+9x_2+9x_3 \ \ 8x_1+8x_2+8x_3]\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}\frac{1}{12}\begin{bmatrix}9x_1+9x_2+9x_3\\8x_1+8x_2+8x_3\\-5x_1-5x_2-5x_3\end{bmatrix} = \frac{1}{18}[11x_1-11x_3 \ \ 10x_1-10x_3 \ \ -7x_1+7x_3]\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}\frac{1}{18}\begin{bmatrix}11x_1-11x_3\\10x_1-10x_3\\-7x_1+7x_3\end{bmatrix}$

Puedo resolver este sistema o:

$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$

$\|P_{gen\{G^{-1}w_1\}}(x)\|^2 = \frac{(w_1^T x)^2}{(\sqrt{w_1^T G^{-1} w})^2}$

$\|P_{gen\{G^{-1}w_2\}}(x)\|^2 = \frac{(w_2^T x)^2}{(\sqrt{w_2^T G^{-1} w_2})^2}$

$0 = \left(\frac{w_1^T x}{\sqrt{w_1^T G^{-1} w}}\right)^2 - \left(\frac{w_2^T x}{\sqrt{w_2^T G^{-1} w}}\right)^2 = \left(\frac{w_1^T x}{\sqrt{w_1^T G^{-1} w}} - \frac{w_2^T x}{\sqrt{w_2^T G^{-1} w}}\right)\cdot\left(\frac{w_1^T x}{\sqrt{w_1^T G^{-1} w}} + \frac{w_2^T x}{\sqrt{w_2^T G^{-1} w}}\right)$

$\underbrace{\left(\frac{w_1}{\sqrt{w_1^T G^{-1} w_1}} - \frac{w_2}{\sqrt{w_2^T G^{-1} w}}\right)^T x = 0}_{T_1}$ o $\underbrace{\left(\frac{w_1}{\sqrt{w_1^T G^{-1} w}} + \frac{w_2}{\sqrt{w_2^T G^{-1} w}}\right)^T x = 0}_{T_2}$ $w_1 = [1\ 1\ 1]$ $w_2 = [1\ 0\ -1]$ $G^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 & 6 & -4 \\ 6 & 6 & -4 \\ -4 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

$w_1^T G^{-1} w_1 = 6 \to \sqrt{w_1^T G^{-1} w_1} = \sqrt{6}$

$w_2^T G^{-1} w_2 = [1\ 0\ -1]\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 & 6 & -4 \\ 6 & 6 & -4 \\ -4 & -4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}[11\ 10\ -7]\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}(11-7) = 2 \to \sqrt{w_2^T G^{-1} w_2} = \sqrt{2}$

$\left(\frac{w_1}{\sqrt{w_1^T G^{-1} w_1}} - \frac{w_2}{\sqrt{w_2^T G^{-1} w}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}\sqrt{6}-3\sqrt{2}\\\sqrt{6}\\\sqrt{6}-3\sqrt{2}\end{bmatrix}$ $\left(\frac{w_1}{\sqrt{w_1^T G^{-1} w}} + \frac{w_2}{\sqrt{w_2^T G^{-1} w}}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}\sqrt{6}+3\sqrt{2}\\\sqrt{6}\\\sqrt{6}+3\sqrt{2}\end{bmatrix}$

$\frac{1}{6}[\sqrt{6}-3\sqrt{2} \ \ \sqrt{6} \ \ \sqrt{6}-3\sqrt{2}]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = (\sqrt{6}-3\sqrt{2})x_1 + \sqrt{6}x_2 + (\sqrt{6}-3\sqrt{2})x_3 = 0$

$x_1 = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}x_2 - x_3$

$\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}x_2 - x_3\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}\\1\\0\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ $T_1 = gen\left\{\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

$\frac{1}{6}[\sqrt{6}+3\sqrt{2} \ \ \sqrt{6} \ \ \sqrt{6}+3\sqrt{2}]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = (\sqrt{6}+3\sqrt{2})x_1 + \sqrt{6}x_2 + (\sqrt{6}+3\sqrt{2})x_3 = 0$

$x_1 = -\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}x_2 - x_3$

$\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}x_2 - x_3\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}\\1\\0\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ $T_2 = gen\left\{\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

$$\boxed{x\in\mathbb{R}^3 / d(x, S_1) = d(x, S_2), \ x \in T_1 = gen\left\{\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\} \wedge x \in T_2 = gen\left\{\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}}$$

Ejercicio 3.8

domingo, 24 de octubre de 2021 20:08

3.8 Sea $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{R}$-espacio euclídeo de dimensión 3 y sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{V}$ cuya matriz de Gram es

$$G_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

(**a**) Hallar la matriz con respecto a la base $\mathcal{B}$ de la proyección ortogonal sobre el subespacio $\mathbb{S} = \text{gen}\{v_1, v_2\}$.

(**b**) Hallar la proyección ortogonal de v_3 sobre el subespacio $\mathbb{S}$.

(**c**) Calcular la distancia de v_3 al subespacio $\mathbb{S}$.

(**d**) Hallar el conjunto de todos los $v \in \mathbb{V}$ cuya distancia a v_1 coincide con su distancia a v_2.

(a) $$[P_{\mathbb{S}}]^B_B = \begin{bmatrix} [P_{\mathbb{S}}(v_1)]^B_B & [P_{\mathbb{S}}(v_2)]^B_B & [P_{\mathbb{S}}(v_3)]^B_B \end{bmatrix} \qquad G_B = \begin{bmatrix} \langle v_1,v_1\rangle & \langle v_1,v_2\rangle & \langle v_1,v_3\rangle \\ \langle v_2,v_1\rangle & \langle v_2,v_2\rangle & \langle v_2,v_3\rangle \\ \langle v_3,v_1\rangle & \langle v_3,v_2\rangle & \langle v_3,v_3\rangle \end{bmatrix}$$

La proyección de v_1 y v_2 sobre $\mathbb{S}$ nos tiene que dar el mismo vector porque v_1 y v_2 pertenecen a $\mathbb{S}$, como trabajamos con coordenadas, nos tiene que dar las mismas coordenadas

$$[P_{\mathbb{S}}(v_1)]^B_B = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \qquad [P_{\mathbb{S}}(v_2)]^B_B = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$P_{\mathbb{S}}(v_3) \begin{cases} P_{\mathbb{S}}(v_3) \in \mathbb{S} \Rightarrow P_{\mathbb{S}}(v_3) = a v_1 + b v_2 \\ v_3 - P_{\mathbb{S}}(v_3) \perp \mathbb{S} \Rightarrow \langle v_3 - P_{\mathbb{S}}(v_3), v_1\rangle = 0 \\ \qquad \langle v_3 - P_{\mathbb{S}}(v_3), v_2\rangle = 0 \end{cases}$$

$$\langle v_3 - P_{\mathbb{S}}(v_3), v_1\rangle = \langle v_3, v_1\rangle - \langle a v_1 + b v_2, v_1\rangle = 0$$
$$= \langle v_3, v_1\rangle - (\langle a v_1, v_1\rangle + \langle b v_2, v_1\rangle) = 0$$
$$= \langle v_3, v_1\rangle - (a\langle v_1, v_1\rangle + b\langle v_2, v_1\rangle) = 0$$
$$= \frac{1}{3} - (a + \frac{1}{2}b) = 0$$
$$\{a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{3}$$

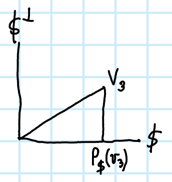
$$\langle v_3 - P_{\mathbb{S}}(v_3), v_2\rangle = \langle v_3, v_2\rangle - (a\langle v_1, v_2\rangle + b\langle v_2, v_2\rangle) = 0$$
$$= \frac{1}{4} - (\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b) = 0$$
$$\{\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b = \frac{1}{4} \end{cases} \to a = -\frac{1}{6} \wedge b = 1 \qquad P_{\mathbb{S}}(v_3) = -\frac{1}{6}v_1 + v_2 \Rightarrow [P_{\mathbb{S}}(v_3)]^B = \begin{bmatrix}-\frac{1}{6}\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\boxed{[P_{\mathbb{S}}]^B_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

(b) $$P_{\mathbb{S}}(v_3) = -\frac{1}{6}v_1 + v_2$$

(c)

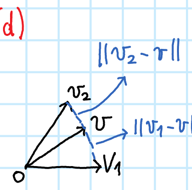


$$d(v_3, \mathbb{S}) = \| P_{\mathbb{S}^\perp}(v_3)\|$$
$$d(v_3, \mathbb{S}) = \| v_3 - P_{\mathbb{S}}(v_3)\|$$
$$d(v_3, \mathbb{S}) = \sqrt{\|v_3\|^2 - \|P_{\mathbb{S}}(v_3)\|^2}$$

$$d^2(v_3, \mathbb{S}) = \| v_3 - P_{\mathbb{S}}(v_3)\|^2$$
$$= \langle v_3 - P_{\mathbb{S}}(v_3), v_3 - P_{\mathbb{S}}(v_3)\rangle$$
$$= \langle v_3 + \frac{1}{6}v_1 - v_2, v_3 + \frac{1}{6}v_1 - v_2\rangle$$
$$= \begin{bmatrix}\frac{1}{6} & -1 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\-1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{180}$$

$$\boxed{d(v_3, \mathbb{S}) = \frac{\sqrt{5}}{30}}$$

(d)



$$d^2(v, v_1) = d^2(v, v_2) \qquad v = a v_1 + b v_2 + c v_3$$
$$\|v - v_1\|^2 = \|v - v_2\|^2$$
$$\langle v - v_1, v - v_1\rangle = \langle v - v_2, v - v_2\rangle$$
$$\langle v, v - v_1\rangle + \langle -v_1, v - v_1\rangle = \langle v, v - v_2\rangle + \langle -v_2, v - v_2\rangle$$
$$\langle v, v\rangle + \langle v, -v_1\rangle + \langle -v_1, v\rangle + \langle -v_1, -v_1\rangle = \langle v, v\rangle + \langle v, -v_2\rangle + \langle -v_2, v\rangle + \langle -v_2, -v_2\rangle$$
$$\cancel{\langle v, v\rangle} - 2\langle v, v_1\rangle + \underbrace{\langle v_1, v_1\rangle}_{\text{de } G_B = 1} = \cancel{\langle v, v\rangle} - 2\langle v, v_2\rangle + \underbrace{\langle v_2, v_2\rangle}_{= 1/3} \quad ⊛$$

En $\mathbb{R}$ev

$\langle a+b, c+d\rangle = \langle a, c+d\rangle + \langle b, c+d\rangle$

$\langle a, c\rangle + \langle a, d\rangle \ldots$

$$\langle v, v_1\rangle = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c$$

$$\langle v, v_2\rangle = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c$$

$$⊛ \; -2(a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c) + 1 = -2(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{4}c) + \frac{1}{3}$$
$$-2a - b - \frac{2}{3}c + 1 = -a - \frac{2}{3}b - \frac{1}{2}c + \frac{1}{3}$$
$$a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{6}c = \frac{2}{3}$$
$$a = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}b - \frac{1}{6}c$$

$$v = (\frac{2}{3} - \frac{1}{3}b - \frac{1}{6}c)v_1 + b v_2 + c v_3$$

$$v = b(-\frac{1}{3}v_1 + v_2) + c(-\frac{1}{6}v_1 + v_3) + \frac{2}{3}v_1$$

Ejercicio 3.9

lunes, 25 de octubre de 2021 03:36

3.9 Se considera el espacio euclídeo $(\mathbb{R}_2[x], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle p, q\rangle := \int_0^1 p(x)q(x)dx.$$

Calcular

$$\min_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 \left(x^2 - ax - b\right)^2 dx.$$

Definición 2.9. *Sea* $\mathbb{S}$ *un subespacio de un espacio euclídeo* $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *y sea* v *un vector de* $\mathbb{V}$. *Si existe*, la proyección ortogonal de v sobre el subespacio $\mathbb{S}$ *es el único vector* $P_{\mathbb{S}}(v) \in \mathbb{S}$ *tal que* $v - P_{\mathbb{S}}(v) \perp \mathbb{S}$.

Nota Bene. Nótese que, cuando existe, la proyección ortogonal de v sobre el subespacio $\mathbb{S}$ es la mejor aproximación a v por vectores de $\mathbb{S}$. Como la distancia entre v y $P_{\mathbb{S}}(v)$ satisface que

$$\|v - P_{\mathbb{S}}(v)\| = \min_{w\in\mathbb{S}} \|v - w\|,$$

la proyección ortogonal de v sobre $\mathbb{S}$ es el único vector de $\mathbb{S}$ que realiza la distancia entre v y $\mathbb{S}$. Esto es,

$$d(v, \mathbb{S}) = \|v - P_{\mathbb{S}}(v)\|.$$

⊛

Trabajo un poco con la expresión: $\int_0^1 (x^2-ax-b)^2dx = \int_0^1 \underbrace{(x^2-ax-b)}_{p(x)}\underbrace{(x^2-ax-b)}_{q(x)}dx \Rightarrow$ es el producto interno entre $p(x)$ y $q(x)$ cuando $p(x)=q(x)$

$$\langle p(x), p(x)\rangle = \int_0^1 (x^2-ax-b)^2 = \|x^2-ax-b\|^2 = \|x^2-(ax+b)\|^2$$

Asumo que:

w tal $\|v-w\|$ sea mínimo también hace que $\|v-w\|^2$ sea mínimo

$\Uparrow$

Por lo que: $\min\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (x^2-ax-b)^2dx = \min\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \|x^2-(ax+b)\|^2$

Análogamente con ⊛ se podría decir que para que la distancia entre x^2 y $ax+b$ sea mínima $v=x^2$ y $P_{\mathbb{S}}(v) = ax+b$, $\mathbb{S} = \text{gen}\{x,1\}$

Ahora elijo en serio los nombres, $\mathbb{S} = \text{gen}\{x,1\}$, $v(x) = x^2$, $P_{\mathbb{S}}(v(x)) = ax+b$, $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$

Busco a y b para que $ax+b$ sea $P_{\mathbb{S}}(v(x))$

Condiciones de $P_{\mathbb{S}}(v(x))$ $\begin{cases} P_{\mathbb{S}}(v(x)) \in \mathbb{S} \Rightarrow P_{\mathbb{S}}(v(x)) = ax+b \\ \langle v(x) - P_{\mathbb{S}}(v(x)), 1\rangle = 0 \\ \langle v(x) - P_{\mathbb{S}}(v(x)), x\rangle = 0 \end{cases}$

$$\langle v(x) - P_{\mathbb{S}}(v(x)), 1\rangle = \int_0^1 (x^2-ax-b).1\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - a\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right) - b\left(x\Big|_0^1\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}a - b = 0$$

$$\langle v(x) - P_{\mathbb{S}}(v(x)), x\rangle = \int_0^1 (x^2-ax-b)x\,dx = \int_0^1 x^3-ax^2-bx\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 - a\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right) - b\left(\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b = 0$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + b = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b = \frac{1}{4} \end{cases} \longrightarrow a = 1,\ b = -\frac{1}{6}$$

Entonces, $\min\limits_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (x^2-ax-b)^2dx = \min \|x^2-(ax+b)\|^2 = \min \|x^2 - x + \frac{1}{6}\|^2$

$$\min \|x^2-x+\tfrac{1}{6}\|^2 = \int_0^1 \left(x^2-x+\tfrac{1}{6}\right)^2 dx \overset{\text{Casio Fx-991}}{=} \frac{1}{180}$$

$$\boxed{\min_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^1 (x^2-ax-b)^2dx = \frac{1}{180}}$$

Ejercicio 3.10

lunes, 25 de octubre de 2021 05:23

3.10 Se considera el espacio euclídeo $(C([-1,1]), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

(a) Hallar la proyección ortogonal de $y = \cos(\pi x)$ sobre $\mathbb{R}_2[x]$.

(b) Calcular

$$\min_{p\in\mathbb{R}_2[x]} \int_{-1}^{1} (\cos(\pi x) - p(x))^2\, dx.$$

(c) Calcular la distancia de $y = x^2$ al complemento ortogonal del subespacio $\text{gen}\{\cos(\pi x)\}$.

$\|v\|^2 = \langle v, v\rangle$

Decir que existe $P_{\mathbb{S}}(v)$ significa que existe un vector $P_{\mathbb{S}}(v) \in \mathbb{S}$ tal que $v - P_{\mathbb{S}}(v) \perp \mathbb{S}$. Ese vector se tiene que poder representar de manera única como una combinación lineal de los elementos de la base $\mathcal{B}$

$$P_{\mathbb{S}}(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j w_j$$

y tiene que ser la solución del siguiente sistema de ecuaciones lineales no homogéneo

$$\begin{cases} 0 = \langle v - P_{\mathbb{S}}(v), w_1\rangle = \langle v, w_1\rangle - \sum_{j=1}^{n} x_j \langle w_j, w_1\rangle, \\ 0 = \langle v - P_{\mathbb{S}}(v), w_2\rangle = \langle v, w_2\rangle - \sum_{j=1}^{n} x_j \langle w_j, w_2\rangle, \\ \vdots \\ 0 = \langle v - P_{\mathbb{S}}(v), w_n\rangle = \langle v, w_n\rangle - \sum_{j=1}^{n} x_j \langle w_j, w_n\rangle. \end{cases}$$

O lo que es equivalente

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{\langle w_1, w_j\rangle} = \langle v, w_1\rangle, \\ \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{\langle w_2, w_j\rangle} = \langle v, w_2\rangle, \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{\langle w_n, w_j\rangle} = \langle v, w_n\rangle. \end{cases}$$

Esto significa que sus coordenadas respecto de la base $\mathcal{B}$, $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{bmatrix}^T$, tienen que ser la solución del sistema

$$(5) \qquad \underbrace{\overline{\begin{bmatrix} \langle w_1, w_1\rangle & \langle w_1, w_2\rangle & \cdots & \langle w_1, w_n\rangle \\ \langle w_2, w_1\rangle & \langle w_2, w_2\rangle & \cdots & \langle w_2, w_n\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle w_n, w_1\rangle & \langle w_n, w_2\rangle & \cdots & \langle w_n, w_n\rangle \end{bmatrix}}}_{\text{matriz de Gram de la base } \mathcal{B}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle v, w_1\rangle \\ \langle v, w_2\rangle \\ \vdots \\ \langle v, w_n\rangle\end{bmatrix}.$$

Como $\overline{G_{\mathcal{B}}} = G_{\mathcal{B}}^T$ y la matriz de Gram de $\mathcal{B}$ es inversible, el sistema (5) tiene única solución y la misma se obtiene multiplicando ambos lados de la igualdad por la matriz inversa de $G_{\mathcal{B}}^T$.

Por lo tanto, la proyección ortogonal de v sobre $\mathbb{S}$ existe y su vector de coordenadas con respecto a la base $\mathcal{B}$ está determinado por

$$[P_{\mathbb{S}}(v)]^{\mathcal{B}} = (G_{\mathcal{B}}^T)^{-1}\tilde{v},$$

donde $G_{\mathcal{B}}$ es la matriz de Gram de la base $\mathcal{B}$ y $\tilde{v} \in \mathbb{K}^n$ es el vector definido por $\tilde{v} = \begin{bmatrix}\langle v, w_1\rangle & \langle v, w_2\rangle & \cdots & \langle v, w_n\rangle\end{bmatrix}^T$. □

Nota Bene. Nótese que si $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un $\mathbb{R}$-espacio euclídeo, entonces $G_{\mathcal{B}}^T = G_{\mathcal{B}}$.

(a)

$y = \cos(\pi x) \qquad \mathbb{S} = \mathbb{R}_2[x] \to \{1, x, x^2\} = B$

$$\text{Pide} \begin{cases} \hat{y} \in \mathbb{S},\ \hat{y} = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 \\ y - \hat{y} \perp 1 \\ y - \hat{y} \perp x \\ y - \hat{y} \perp x^2 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,x\rangle & \langle 1,x^2\rangle \\ \langle x,1\rangle & \langle x,x\rangle & \langle x,x^2\rangle \\ \langle x^2,1\rangle & \langle x^2,x\rangle & \langle x^2,x^2\rangle \end{bmatrix}}_{G_B}^T \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\langle y,1\rangle\\ \langle y,x\rangle\\ \langle y,x^2\rangle\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5}\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ -\frac{4}{\pi^2}\end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}$-ee $\downarrow$ $G_B^T = G_B$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ -\frac{4}{\pi^2}\end{bmatrix} \to \alpha_1 = \frac{15}{2\pi^2},\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = -\frac{45}{2\pi^2}$$

$$\boxed{P_{\mathbb{R}_2[x]}(y) = \hat{y} = \frac{15}{2\pi^2} - \frac{45}{2\pi^2}x^2}$$

(b)

$$\min_{p\in\mathbb{R}_2[x]} \int_{-1}^{1} (\cos(\pi x) - p(x))^2 dx = \min_{p\in\mathbb{R}_2[x]} \|\cos(\pi x) - p(x)\|^2 = \min_{p\in\mathbb{R}_2[x]} \|y - p(x)\|^2 \to$$

Para que esta norma sea la mínima $P(x)$ debe ser $P_{\mathbb{R}_2[x]}(y)$ es decir, $P(x) = \hat{y}$

$$\min_{p\in\mathbb{R}_2[x]} \|y - p(x)\|^2 = \left\|\cos(\pi x) - \frac{15}{2\pi^2} + \frac{45}{2\pi^2}x^2\right\|^2 = \int_{-1}^{1}\left(\cos(\pi x) - \frac{15}{2\pi^2} + \frac{45}{2\pi^2}x^2\right)^2 dx$$

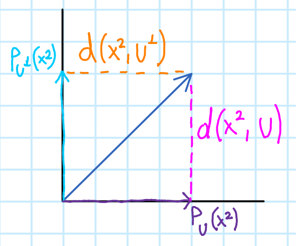
Definite integral:

$$\int_{-1}^{1}\left(-\frac{15}{2\pi^2} + \frac{45x^2}{2\pi^2} + \cos(\pi x)\right)^2 dx = 0.0760616$$

$$\boxed{\min_{p\in\mathbb{R}_2[x]} \int_{-1}^{1} (\cos(\pi x) - p(x))^2 dx = 0{,}0760616}$$

(c)

$U = \text{gen}\{\cos(\pi x)\}, \quad d(x^2, U^\perp) = ?$



$d(x^2, U^\perp) = \|P_U(x^2)\|$

Como $\text{Dim}(U) = 1$, $P_U(x^2) = \dfrac{\langle x^2, \cos(\pi x)\rangle}{\|\cos(\pi x)\|^2}\cos(\pi x)$

$$\|P_U(x^2)\|^2 = \frac{|\langle x^2, \cos(\pi x)\rangle|^2}{\|\cos(\pi x)\|^2}$$

Definite integral

$$\int_{-1}^{1} \cos^2(\pi x)\, dx = 1 = \|\cos(\pi x)\|^2$$

Input

$$\left(\int_{-1}^{1} \cos(\pi x)\, x^2\, dx\right)^2$$

Result

$$\frac{16}{\pi^4} \approx 0.164256 = |\langle x^2, \cos(\pi x)\rangle|^2$$

$$d(x^2, U^\perp) = \|P_U(x^2)\| = \sqrt{\frac{16}{\pi^4}} = \frac{4}{\pi^2}$$

$$\boxed{d(x^2, U^\perp) = \frac{4}{\pi^2}}$$

Ejercicio 3.11

martes, 26 de octubre de 2021 20:15

3.11 [ver **Ejercicio 2.23**] En $\mathbb{R}^2$ con el producto interno canónico. Sean $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ las transformaciones lineales definidas por

$$\Pi_1(x) := \underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{[\Pi_1]_B^B} x, \quad \Pi_2(x) := \underbrace{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{[\Pi_2]_B^B} x.$$

(**a**) Comprobar que Π_1 y Π_2 son dos proyecciones, identificando en cada caso el subespacio sobre el que proyectan y la dirección en la qué lo hacen.

(**b**) ¿Es Π_1 una proyección ortogonal?

(**c**) ¿Es Π_2 una proyección ortogonal?

(**d**) ¿Existe $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\Pi_1(x)\| > \|x\|$? Si la respuesta es afirmativa, exhibir al menos uno.

(**e**) ¿Existe $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\Pi_2(x)\| > \|x\|$? Si la respuesta es afirmativa, exhibir al menos uno.

(a)

Si Π_1 y Π_2 son proyecciones, $\Pi_1 \circ \Pi_1 = \Pi_1 \ \wedge \ \Pi_2 \circ \Pi_2 = \Pi_2$

$$\Pi_1 \circ \Pi_1(x) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} x = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x = \Pi_1(x)$$

$$\Pi_2 \circ \Pi_2(x) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} x = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} x = \Pi_2(x)$$

$\Pi_1(x)$ es la proyección de $\mathbb{V}$ sobre $\mathrm{Im}(\Pi_1)$ en la dirección de $\mathrm{Nu}(\Pi_1)$

$\Pi_2(x)$ es la proyección de $\mathbb{V}$ sobre $\mathrm{Im}(\Pi_2)$ en la dirección de $\mathrm{Nu}(\Pi_2)$

Lema 1.6. *Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$ es tal que $T^2 = T$, entonces T es la proyección de $\mathbb{V}$ sobre $\mathrm{Im}(T)$ en la dirección de $\mathrm{Nu}(T)$.*

Demostración. Tenemos que comprobar dos puntos

1. $\mathbb{V} = \mathrm{Im}(T) \oplus \mathrm{Nu}(T)$.
2. $$T(v) = \begin{cases} v & \text{si } v \in \mathrm{Im}(T), \\ 0 & \text{si } v \in \mathrm{Nu}(T). \end{cases}$$

En primer lugar, observamos que la identidad $\mathrm{I}_{\mathbb{V}} = T + (\mathrm{I}_{\mathbb{V}} - T)$, implica que todo $v \in \mathbb{V}$ se puede descomponer en la forma

$$v = T(v) + (v - T(v)).$$

Ahora observamos que la propiedad $T^2 = T$ implica que $v - T(v) \in \mathrm{Nu}(T)$:

$$T(v - T(v)) = T(v) - T^2(v) = 0.$$

El argumento anterior nos permite concluir que

$$\mathbb{V} = \mathrm{Im}(T) + \mathrm{Nu}(T). \circledast$$

Para completar la prueba del primer punto tenemos que comprobar que

$$\mathrm{Im}(T) \cap \mathrm{Nu}(T) = \{0\}.$$

Consideramos $v \in \mathrm{Im}(T) \cap \mathrm{Nu}(T)$. Tenemos que $v = T(u)$ para algún $u \in \mathbb{V}$ y que $T(v) = 0$. Como $T(v) = T^2(u) = T(u) = v$ y $T(v) = 0$, se concluye que $v = 0$.

Notar que también comprobamos que si $v \in \mathrm{Im}(T)$, entonces $T(v) = v$, y como $T(v) = 0$ para todo $v \in \mathrm{Nu}(T)$, el segundo punto también quedó demostrado. $\square$

(b)

De $\circledast$ vemos que $\mathbb{V} = \mathrm{Im}(\Pi_1) \oplus \mathrm{Nu}(\Pi_1)$

Por el lema 2.16, se puede afirmar que Π_1 es la proyección ortogonal sobre la $\mathrm{Im}(\Pi_1)$

Teorema 2.16. *Sean $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio euclídeo y $\mathbb{S}$ un subespacio de $\mathbb{V}$. Las siguientes proposiciones son equivalentes.*

1. *Existe la proyección ortogonal de $\mathbb{V}$ sobre $\mathbb{S}$.*
2. $\mathbb{V} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{S}^\perp$.

Más aún, en caso de que alguna de las dos proposiciones sea verdadera –y por lo tanto, también la otra lo sea– vale que

$$P_{\mathbb{S}} = \Pi_{\mathbb{S}\mathbb{S}^\perp}.$$

Nota Bene. Nótese que si $\mathbb{V} = \mathbb{S} \oplus \mathbb{S}^\perp$, entonces $(\mathbb{S}^\perp)^\perp = \mathbb{S}$. (Ejercicio).

Lo que hace que una proyección sea ortogonal es que la dirección en la que se proyecta sea el complemento ortogonal del subespacio sobre el que se está proyectando.

(c)

De $\circledast$ vemos que $\mathbb{V} = \mathrm{Im}(\Pi_2) \oplus \mathrm{Nu}(\Pi_2)$

Por el lema 2.16, se puede afirmar que Π_2 es la proyección ortogonal sobre la $\mathrm{Im}(\Pi_2)$

(d)

$x = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad \Pi_1(x) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a+b \\ a+b \end{bmatrix}$

$\|\Pi_1(x)\| > \|x\|$

$$\left\| \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a+b \\ a+b \end{bmatrix} \right\|^2 > \left\| \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\|^2 \longrightarrow \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a+b & a+b \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix} a+b \\ a+b \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{4}\left((a+b)^2 + (a+b)^2\right) > a^2 + b^2$$

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 > a^2 + b^2$$

$$\frac{1}{2}(a^2 + 2ab + b^2) > a^2 + b^2$$

$$-\frac{1}{2}a^2 + 2ab - \frac{1}{2}b^2 > 0$$

si $a = 1$ y $b = 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{2} > 0$

$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\|\Pi_1(x)\| > \|x\|$

$\sqrt{\langle \pi(x), \pi(x) \rangle} > \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Ejercicio 3.12

martes, 26 de octubre de 2021 21:19

3.12 [ver **Ejercicio 1.21**] Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 10 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

(**a**) Hallar las matrices con respecto a la base canónica de las proyecciones ortogonales de $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathrm{col}(A)$ y sobre $\mathrm{nul}(A^T)$.

(**b**) Hallar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^4$ cuya distancia al $\mathrm{col}(A)$ es igual 1.

(a)

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 4 & 2 & 10 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Result

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{A^T}$$

$x_1 = x_4$
$x_2 = -x_4$
$x_3 = -x_4$

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ -x_4 \\ -x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathrm{nul}(A^T) = \mathrm{gen}\left\{ \overbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}^{v} \right\} = S_1$$

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 10 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

Result

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = S_2$$

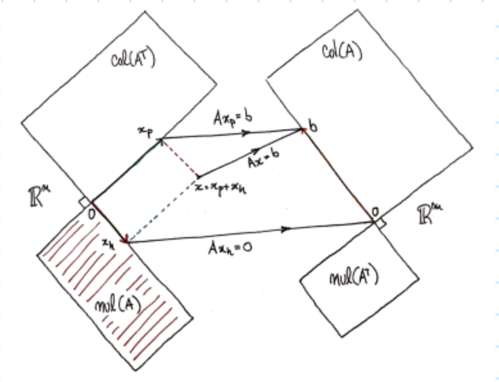
$B_{\mathbb{R}^4} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

$[P_{S_1}(x)] = ?$

Como $\mathrm{Dim}(S_1) = 1$

$$P_{S_1}(x) = \frac{\langle x, v\rangle}{\|v\|^2} v = \frac{x_1 - x_2 - x_3 + x_4}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{[P_{S_1}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Otra forma



Se ve que el subespacio ortogonal a $S_1 = \mathrm{nul}(A^T)$ es $S_1^{\perp} = \mathrm{Col}(A)$

Entonces $P_{S_1}(x) = \underbrace{\Pi_{S_1 S_1^{\perp}}}_{\text{se construirla fácil en una base}}(x)$ $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$[\Pi_{S S^{\perp}}]_B^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_B^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad M_{\mathcal{E}}^B =$$

Input

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ (matrix inverse)

Result

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -7 & -5 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & -1 & -3 \\ -7 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$[P_{S_1}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = [\Pi_{S_1 S_1^{\perp}}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = M_B^{\mathcal{E}} [\Pi_{S_1 S_1^{\perp}}]_B^B M_{\mathcal{E}}^B =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-7}{4} & \frac{-5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-3}{4} \\ \frac{-7}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

► Los detalles (Multiplicación de matrices)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

► Los detalles (Multiplicación de matrices)

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$[P_{S_2}]$

Luego, de los 4 fantásticos $\Rightarrow S_2 = \mathrm{Col}(A) \wedge S_2^{\perp} = \mathrm{nul}(A^T)$ $\quad [P_{S_2}] = [\Pi_{S_2 S_2^{\perp}}]$

Usando la base B: $[\Pi_{S_2 S_2^{\perp}}]_B^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad M_B^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad M_{\mathcal{E}}^B =$

Input

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ (matrix inverse)

Result

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -7 & -5 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & -1 & -3 \\ -7 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$[P_{S_2}] = [\Pi_{S_2 S_2^{\perp}}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = M_B^{\mathcal{E}} [\Pi_{S_2 S_2^{\perp}}]_B^B M_{\mathcal{E}}^B =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-7}{4} & \frac{-5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-3}{4} \\ \frac{-7}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

► Los detalles (Multiplicación de matrices)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

► Los detalles (Multiplicación de matrices)

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(b)

$x \in \mathbb{R}^4 \ / \ d(x, S_2) = 1$ $\qquad P_{S_2^{\perp}} = P_{S_1}$

$$P_{S_1}(x) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \end{bmatrix}$$

$d(x, P_{S_2}(x)) = 1$

$\|x - P_{S_2}(x)\| = 1 \quad \text{o} \quad \|P_{S_2^{\perp}}(x)\| = \|P_{S_1}(x)\|$

$d^2(x, P_{S_2}(x)) = \|P_{S_1}(x)\|^2 = 1^2 = 1$

$$\|P_{S_1}(x)\|^2 = \frac{1}{16}\left(2(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 + 2(-x_1 + x_2 + x_3 - x_4)^2\right) = 1$$

$$\frac{1}{16}\left(2(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 + 2\underbrace{(-1)^2}_{=1}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2\right) = 1$$

$$\frac{1}{4}(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 = 1$$

$(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)^2 = 4$

$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 2 \ \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 2 + x_2 + x_3 - x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathrm{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}_{\lambda}$$

$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -2 \ \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} -2 + x_2 + x_3 - x_4 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathrm{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}_{b}$$

$$\boxed{\{x \in \mathbb{R}^4 \ / \ d(x, S_2) = 1, \ x \in \lambda \cup b\}}$$

Ejercicio 3.13

miércoles, 27 de octubre de 2021 19:07

3.13 [*herramienta*] Sean $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ y $(\mathbb{R}^m, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ los $\mathbb{R}$-espacios euclídeos canónicos de dimensiones n y m, respectivamente, sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Por definición, resolver la ecuación $Ax = b$ por mínimos cuadrados significa determinar el conjunto $\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\|$ de todos los $x \in \mathbb{R}^n$ cuyas imágenes por A minimizan la distancia al vector b.

(a) Explicar por qué

$$\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\| = \left\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = P_{\operatorname{col}(A)}(b)\right\}.$$

(b) Observar que $\left\{x \in \mathbb{R}^n : Ax = P_{\operatorname{col}(A)}(b)\right\} \neq \emptyset$. Motivo por el cual para cualquier $b \in \mathbb{R}^m$ existe al menos una solución por mínimos cuadrados de la ecuación $Ax = b$.

(c) Verificar que $\operatorname{nul}(A^T) = \operatorname{col}(A)^\perp$.

(d) Utilizando que $b - P_{\operatorname{col}(A)}(b) \perp \operatorname{col}(A)$, concluir que

$$\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\| = \left\{x \in \mathbb{R}^n : A^TAx = A^Tb\right\}.$$

(e) Verificar que $\operatorname{nul}(A) = \operatorname{fil}(A)^\perp$.

(f) Utilizando que todo $x \in \mathbb{R}^n$ se descompone de manera única en la forma

$$x = x_f + x_h, \text{ con } x_f \in \operatorname{fil}(A), \text{ y } x_h \in \operatorname{nul}(A),$$

deducir que la aplicación $x_f \mapsto Ax_f$ es una biyección de $\operatorname{fil}(A)$ en $\operatorname{col}(A)$.

(g) Concluir que para cada $b \in \mathbb{R}^m$ existe un único $x_f(b) \in \operatorname{fil}(A)$ tal que

$$\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\| = \{x_f(b) + x_h : x_h \in \operatorname{nul}(A)\}.$$

Utilizando el Teorema de Pitágoras observar que de todas las soluciones por mínimos cuadrados de la ecuación $Ax = b$, la solución $x_f(b)$ es la que tiene norma mínima.

(h) Observar que cuando $\dim(\operatorname{col}(A)) = n$ la matriz A^TA es inversible y que por lo tanto, $\hat{x} = (A^TA)^{-1}A^Tb$ es la única solución por mínimos cuadrados de la ecuación $Ax = b$. Como $A\hat{x} = P_{\operatorname{col}(A)}(b)$ se deduce que $A(A^TA)^{-1}A^T$ es la matriz en base canónica de la proyección ortogonal sobre $\operatorname{col}(A)$.

(a) (d)

2.2. Soluciones por mínimos cuadrados.

Definición 2.1. *Sean $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Las soluciones por mínimos cuadrados de la ecuación $Ax = b$ son aquellos vectores $x \in \mathbb{R}^n$ que minimizan el error cuadrático $\|b - Ax\|^2$. En otras palabras, resolver la ecuación $Ax = b$ por mínimos cuadrados significa determinar el conjunto*

$$\operatorname*{argmin}_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\| = \{x \in \mathbb{R}^n : \|b - Ax\| \leq \|b - A\xi\| \text{ para todo } \xi \in \mathbb{R}^n\},$$

de todos los $x \in \mathbb{R}^n$ cuyas imágenes por A minimizan la distancia al vector b.

Nota Bene. Nótese que para $b \in \operatorname{col}(A)$ vale que $\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\| = 0$ y en este caso $\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\| = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$, las soluciones por cuadrados mínimos coinciden con las soluciones de la ecuación $Ax = b$.

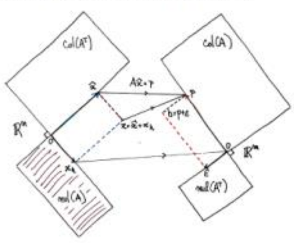


FIGURA 3. Una solución de mínimos cuadrados de $Ax = b$ es cualquier vector $x \in \mathbb{R}^n$ que minimiza $\|b - Ax\|^2$, se obtienen resolviendo las ecuaciones normales $A^TAx = A^Tb$. La solución de mínimos cuadrados de norma mínima $\hat{x}$ pertenece al subespacio $\operatorname{col}(A^T) = \operatorname{nul}(A)^\perp$, porque $\|\hat{x} + x_h\|^2 = \|\hat{x}\|^2 + \|x_h\|^2 \geq \|\hat{x}\|^2$.

Enfoque. Como Ax pertenece al espacio columnas, elegimos el punto $p \in \operatorname{col}(A)$ más cercano a b. Este punto es la proyección ortogonal de b sobre $\operatorname{col}(A)$, $p = P_{\operatorname{col}(A)}(b)$. Tenemos así que $\arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\| = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = p\} \neq \emptyset$. Como el error $\varepsilon = b - p \in \operatorname{col}(A)^\perp = \operatorname{nul}(A^T)$ tenemos que

$$x \in \arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\| \iff A^T(b - Ax) = 0 \iff A^TAx = A^Tb.$$

(c)

$x \in \operatorname{nul}(A^T) \leftrightarrow A^Tx = 0$

$\leftrightarrow y^TA^Tx = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$

$\leftrightarrow (Ay)^Tx = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$

$\leftrightarrow \langle x, Ay\rangle = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$

$\leftrightarrow x \perp Ay$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$

Como Ay, $y \in \mathbb{R}^n = \operatorname{col}(A)$, se concluye que $x \in \operatorname{col}(A)^\perp = \operatorname{nul}(A^T)$

(e)

$$\begin{aligned}
x \in \operatorname{nul}(A) &\iff Ax = 0 \\
&\iff y^TAx = 0 \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^m \\
&\iff (A^Ty)^Tx = 0 \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^m \\
&\iff \langle x, A^Ty\rangle = 0 \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^m \\
&\iff x \perp A^Ty \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^m \\
&\iff x \in \operatorname{col}(A^T)^\perp
\end{aligned}$$

(f)

Recordamos que el sistema $Ax = b$, $b \in \operatorname{col}(A)$ tiene como solución $x = x_f + x_h$, con $x_f \in \operatorname{col}(A^T)$ y con $x_h (\operatorname{nul}(A))$

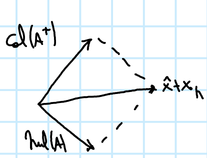
$A(x_f + x_h) = b$

$Ax_f + \underbrace{Ax_h}_{=0} = b \Rightarrow Ax_f = b$ dado que esta igualdad es verdad, como $b \in \operatorname{col}(A)$, $(Ax_f) \in \operatorname{col}(A)$

Luego como x_f es la única solución sin parte en el $\operatorname{nul}(A)$, la aplicación $x_f \to Ax_f$ es biyección

(g)

$x \in \arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} \|b - Ax\| \iff A^T(b - Ax) = 0 \iff A^TAx = A^Tb$. La solución a esta igualdad es de la forma $x = \hat{x} + x_h$, $\hat{x} \in \operatorname{fil}(A)$, $x_h \in \operatorname{nul}(A)$



$\|\hat{x} + x_h\|^2 = \|\hat{x}\|^2 + \|x_h\|^2 \geq \|\hat{x}\|^2$

Ejercicio 3.14

miércoles, 27 de octubre de 2021 20:19

3.14 Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

En cada uno de los siguientes casos, hallar las soluciones por mínimos cuadrados de la ecuación $Ax = b$, determinar la de norma mínima, y calcular el error cuadrático $\min_{x\in\mathbb{R}^3} \|b - Ax\|^2$

(a) $b = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$.

(b) $b = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$.

(a)

$b \in Col(A)$?

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Result

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow b \notin Col(A)$

A no es de rango máximo así que no se puede hacer lo de la pseudoinversa, hay que resolver, $A^TAx = A^Tb$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Result

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_3 \\ x_2 = 2 - x_3 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1-x_3 \\ 2-x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Todas las soluciones por mínimos cuadrados son de la forma:

$$\boxed{\underset{x\in\mathbb{R}^3}{\text{argmin}} \|b - Ax\| = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T}_{x_p} + \underbrace{\text{gen}\left\{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T\right\}}_{Nul(A)}}$$

Error cuadrático:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^3} \|b - Ax\|^2 = \|b - Ax_p\|^2 = \left\|\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{P_{Col(A)}(b)}\right\|^2 = \left\|\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\|^2 = \left\|\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\|^2 = 3$$

$$\boxed{\min_{x\in\mathbb{R}^3} \|b - Ax\|^2 = 3}$$

La solución de norma mínima ($\hat{x}$):

① Base $Fil(A)$:

$E_A =$

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Result

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$B_{Fil(A)} = \left\{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T}_{x_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T}_{x_2}\right\}$$

② $\begin{bmatrix} Ax_1 & Ax_2 \end{bmatrix} [\hat{x}]^B = P_{Col(A)}(b)$ $\quad [\hat{x}]^B = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Result

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \xi_1 = -2$

$\xi_2 = -1$

③

$$\boxed{\hat{x} = -2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \|\hat{x}\| = \sqrt{14}}$$

(b)

$b \in Col(A)$?

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Result

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow b \notin Col(A)$

A no es de rango máximo así que no se puede hacer lo de la pseudoinversa, hay que resolver, $A^TAx = A^Tb$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Result

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{3} - x_3 \\ x_2 = \frac{7}{3} - x_3 \end{cases} \longrightarrow \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Todas las soluciones por mínimos cuadrados son de la forma:

$$\boxed{\underset{x\in\mathbb{R}^3}{\text{argmin}} \|b - Ax\| = \underbrace{\begin{bmatrix} 5/3 & 7/3 & 0 \end{bmatrix}^T}_{x_p} + \underbrace{\text{gen}\left\{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T\right\}}_{Nul(A)}}$$

Error cuadrático:

$$\min_{x\in\mathbb{R}^3} \|b - Ax\|^2 = \|b - Ax_p\|^2 = \left\|\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5/3 \\ 7/3 \\ 0 \end{bmatrix}\right\|^2 = \left\|\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5/3 \\ -7/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}\right\|^2 = \left\|\begin{bmatrix} 4/3 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}\right\|^2 = \frac{16}{3}$$

$$\boxed{\min_{x\in\mathbb{R}^3} \|b - Ax\|^2 = \frac{16}{3}}$$

La solución de norma mínima ($\hat{x}$):

① Base $Fil(A)$:

$E_A =$

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Result

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$B_{Fil(A)} = \left\{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T}_{x_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T}_{x_2}\right\}$$

$\frac{218}{9}$

② $\begin{bmatrix} Ax_1 & Ax_2 \end{bmatrix} [\hat{x}]^B = P_{Col(A)}(b)$ $\quad [\hat{x}]^B = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ -7/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/3 \\ -7/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{5}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{7}{3} \\ -1 & 1 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

Result

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow \xi_1 = -7/3$, $\rightarrow \xi_2 = -\frac{5}{3}$

③

$$\boxed{\hat{x} = -\frac{7}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{5}{3}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7/3 \\ -5/3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \|\hat{x}\| = \frac{\sqrt{218}}{3}}$$

Ejercicio 3.15

miércoles, 27 de octubre de 2021 23:18

3.15 Sean $A \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ y $b \in \mathbb{R}^4$ definidos por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Hallar la solución por mínimos cuadrados de la ecuación $Ax = b$ y calcular el error cuadrático $\|b - A\hat{x}\|^2$.

$b \in Col(A)$?

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$

Result

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad b \notin Col(A)$

A es de rango máximo?

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

Result

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

A es de rango máximo, se puede usar A^+ (pseudoinversa de moore-penrose)

$$\underset{x\in\mathbb{R}^3}{\text{argmín}} \|b - Ax\| = \hat{x} \qquad \hat{x} = A^+ b \qquad A^+ = (A^TA)^{-1}A^T$$

$$\hat{x} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 10 & 5 & 0 & -5 \\ -3 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{14}{5} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\underset{x\in\mathbb{R}^3}{\text{argmín}} \|b - Ax\| = \begin{bmatrix} -2 \\ \frac{14}{5} \end{bmatrix}}$$

Error cuadrático:

$$\|b - A\hat{x}\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 14/5 \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4/5 \\ 18/5 \\ 32/5 \\ 46/5 \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} 1/5 \\ -3/5 \\ 3/5 \\ -1/5 \end{bmatrix} \right\|^2 = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

$$\boxed{\|b - A\hat{x}\| = \frac{4}{5}}$$

Ejercicio 3.16

miércoles, 27 de octubre de 2021 23:51

3.16 Usando la técnica de mínimos cuadrados, ajustar los siguientes datos

x	-1	0	1	2	3
y	-14	-5	-4	1	22

mediante una recta $y = a_0 + a_1 x$, mediante una cuadrática $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, y mediante una cúbica $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$. ¿Cuál de esas tres curvas se ajusta mejor a los datos?

$y = a_0 + a_1 x$

$$\begin{cases} -14 = a_0 - a_1 \\ -5 = a_0 \\ \vdots \end{cases}$$

1. Recta (Lineal)

El sistema por mínimos cuadrados que resuelve el problema es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}_{V_1} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -14 \\ -5 \\ -4 \\ 1 \\ 22 \end{bmatrix}}_{b}$$

Como V_1 es de rango máximo podemos usar la pseudo inversa.

$$\hat{x}_1 = V_1^{\dagger} b = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -14 \\ -5 \\ -4 \\ 1 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{39}{5} \\ \frac{39}{5} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{y = -\frac{39}{5} + \frac{39}{5} x}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{39}{5} \\ \frac{39}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{78}{5} \\ -\frac{39}{5} \\ 0 \\ \frac{39}{5} \\ \frac{78}{5} \end{pmatrix}$$

Error cuadrático: $e_1 = \|b - V_1 \hat{x}_1\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} -14 \\ -5 \\ -4 \\ 1 \\ 22 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{39}{5} \\ \frac{39}{5} \end{bmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} 8/5 \\ 14/5 \\ -4 \\ 34/5 \\ 32/5 \end{bmatrix} \right\|^2 = \frac{568}{5} = 113,6$

$$\boxed{e_1 = 113,6}$$

2. Cuadrática

El sistema por mínimos cuadrados que resuelve el problema es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}}_{V_2} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -14 \\ -5 \\ -4 \\ 1 \\ 22 \end{bmatrix}}_{b}$$

$V_2^{\dagger} =$ **Pseudoinverse**

$$\frac{1}{70}\begin{pmatrix} 18 & 26 & 24 & 12 & -10 \\ -34 & 3 & 20 & 17 & -6 \\ 10 & -5 & -10 & -5 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\hat{x}_2 = \frac{1}{70}\begin{bmatrix} 18 & 26 & 24 & 12 & -10 \\ -34 & 3 & 20 & 17 & -6 \\ 10 & -5 & -10 & -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -14 \\ -5 \\ -4 \\ 1 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -49/5 \\ 19/5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{y = -\frac{49}{5} + \frac{19}{5} x + 2x^2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{49}{5} \\ \frac{19}{5} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{58}{5} \\ -\frac{49}{5} \\ -4 \\ \frac{29}{5} \\ \frac{98}{5} \end{pmatrix}$$

Error cuadrático: $e_2 = \|b - V_2 \hat{x}_2\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} -12/5 \\ 24/5 \\ 0 \\ -\frac{24}{5} \\ 12/5 \end{bmatrix} \right\|^2 = \frac{288}{5} = 57,6$

$$\boxed{e_2 = 57,6}$$

3. Cúbica

El sistema por mínimos cuadrados que resuelve el problema es:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 22 \end{bmatrix}}_{V_3} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -14 \\ -5 \\ -4 \\ 1 \\ 22 \end{bmatrix}}_{b}$$

Fijémonos algo:

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -14 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 22 \end{pmatrix}$

Result

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$b \in \mathrm{Col}(V_3)$

Por lo tanto, $\hat{x}_3 = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$e_3 = \| b - \underbrace{V_3 x_3}_{=b} \|^2 = 0$$

$$\boxed{y = -5 + 3x - 4x^2 + 2x^3}$$

$$\boxed{e_3 = 0}$$

Ejercicio 3.17

jueves, 28 de octubre de 2021 01:05

3.17 Después de estudiar el comportamiento de un cierto tipo de enfermedad virósica, un investigador plantea la hipótesis de que, a corto plazo, la cantidad, x, de individuos infectados en una población particular crece exponencialmente con el tiempo, t, medido en días. Es decir, postula un modelo de la forma $x = ae^{bt}$. Estimar, mediante la técnica de mínimos cuadrados, los parámetros a y b, utilizando para ello los siguientes datos observados por el investigador:

t	1	2	3	4	5
x	16	27	45	74	122

Utilizar la estimación obtenida para predecir la cantidad de individuos infectados al cabo de una semana.

: *¿Qué transformación convierte una función exponencial en una función lineal?*

$x = ae^{bt}$, buscamos tener una regresión lineal $\longrightarrow \ln(x) = \ln(ae^{bt}) = \underbrace{\ln(a)}_{\lambda} + bt$

El sistema queda.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} \lambda \\ b \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \ln(16) \\ \ln(27) \\ \ln(45) \\ \ln(74) \\ \ln(122) \end{bmatrix}}_{T}$$

$Ax = T$, $T \notin \mathrm{Col}(A)$

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \log(16) \\ 1 & 2 & \log(27) \\ 1 & 3 & \log(45) \\ 1 & 4 & \log(74) \\ 1 & 5 & \log(122) \end{pmatrix}$

Result

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A es de rango máximo $\Rightarrow A^{\dagger} =$

Pseudoinverse

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8 & 5 & 2 & -1 & -4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ b \end{bmatrix} = A^{\dagger} \begin{bmatrix} \ln(16) \\ \ln(27) \\ \ln(45) \\ \ln(74) \\ \ln(122) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{10} & \frac{5}{10} & \frac{2}{10} & \frac{-1}{10} & \frac{-4}{10} \\ \frac{-2}{10} & \frac{-1}{10} & 0 & \frac{1}{10} & \frac{2}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \ln(16) \\ \ln(27) \\ \ln(45) \\ \ln(74) \\ \ln(122) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{27\cdot\ln(2)+19\cdot\ln(3)+2\cdot\ln(5)-\ln(37)-4\cdot\ln(61)}{10} \\ \frac{-5\cdot\ln(2)-3\cdot\ln(3)+\ln(37)+2\cdot\ln(61)}{10} \end{pmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2{,}275 \\ 0{,}507 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda = \ln(a) = 2{,}275 \rightarrow a \approx 9{,}728 \\ b = 0{,}507 \end{cases}$$

$$\boxed{x = 9{,}728\, e^{0{,}507t}}$$

$\boxed{\text{Al cabo de una semana la cantidad de infectados sera } 338}$

Ejercicio 3.18

jueves, 28 de octubre de 2021 20:53

3.18 [ver **Ejercicio 1.26**] Se considera el $\mathbb{R}$-espacio euclídeo $(\mathbb{R}_2[x], \langle\cdot,\cdot\rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle p, q\rangle := p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

Comprobar que

$$\mathcal{B} = \left\{ \overbrace{\frac{1}{2}(x-1)(x-2)}^{P_1},\ \overbrace{-x(x-2)}^{P_2},\ \overbrace{\frac{1}{2}x(x-1)}^{P_3} \right\}$$

es una base ortonormal de $(\mathbb{R}_2[x], \langle\cdot,\cdot\rangle)$, y utilizar ese resultado para hallar el vector de coordenadas del polinomio $p = 1 + x + x^2$ en base $\mathcal{B}$.

$\Rightarrow$ Todo sistema ortogonal $\{w_i : i \in I\}$ es linealmente independiente, como $\dim(\mathbb{R}_2[x]) = 3$, si B es un conjunto ortogonal entonces es una base

$$\|P_1\|^2 = \langle P_1, P_1\rangle = P_1^2(0) + P_1^2(1) + P_1^2(2) = 1 + 0 + 0 = 1$$

$$\|P_2\|^2 = \langle P_2, P_2\rangle = P_2^2(0) + P_2^2(1) + P_2^2(2) = 0 + 1 + 0 = 1$$

$$\|P_3\|^2 = \langle P_3, P_3\rangle = P_3^2(0) + P_3^2(1) + P_3^2(2) = 0 + 0 + 1 = 1$$

$$\langle P_1, P_2\rangle = \underbrace{P_1(0)}_{=1}\underbrace{P_2(0)}_{=0} + \underbrace{P_1(1)}_{=0}\underbrace{P_2(1)}_{=1} + \underbrace{P_1(2)}_{=0}\underbrace{P_2(2)}_{=0} = 0$$

$$\langle P_2, P_3\rangle = \underbrace{P_2(0)}_{=0}P_3(0) + P_2(1)\underbrace{P_3(1)}_{=0} + \underbrace{P_2(2)}_{=0}P_3(2) = 0$$

$$\langle P_3, P_1\rangle = \underbrace{P_3(0)}_{=0}P_1(0) + \underbrace{P_3(1)}_{=0}P_1(1) + P_3(2)\underbrace{P_1(2)}_{=0} = 0$$

Como estamos en un $\mathbb{R}$-ee, $\langle p, q\rangle = \langle q, p\rangle$

$$\boxed{B \text{ es una base ortonormal}}$$

Sea $P = 1 + x + x^2$, $P = \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3$

$$\langle P, P_1\rangle = \langle \alpha P_1 + \beta P_2 + \gamma P_3, P_1\rangle = \alpha \underbrace{\langle P_1, P_1\rangle}_{=1} + \beta \underbrace{\langle P_2, P_1\rangle}_{=0} + \gamma \underbrace{\langle P_3, P_1\rangle}_{=0}$$

$$\alpha = \langle P, P_1\rangle = P(0)\underbrace{P_1(0)}_{=1} + P(1)\underbrace{P_1(1)}_{=0} + P(2)\underbrace{P_1(2)}_{=0} = P(0) \Rightarrow \alpha = P(0) = 1 + 0 + 0^2 = 1$$

Si seguimos por este camino, se ve que $\beta = P(1)$ y $\gamma = P(2)$, $\beta = 1 + 1 + 1^2 = 3$ $\quad \gamma = 1 + 2 + 4 = 7$

$$\boxed{[P]^B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}}$$

Ejercicio 3.19

jueves, 28 de octubre de 2021 21:45

3.19 Sea $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{R}$-espacio euclídeo de dimensión n y sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{V}$.

(a) Comprobar que para toda pareja de vectores $v_1, v_2 \in \mathbb{V}$ vale que

$$d(v_1, v_2) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\langle v_2, u_j\rangle - \langle v_1, u_j\rangle)^2}.$$

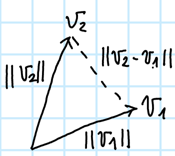
(b) Deducir que para cada $v_0 \in \mathbb{V}$ y cada $r > 0$, el conjunto

$$\{v \in \mathbb{V} : d(v_0, v) = r\} = \left\{\sum_{j=1}^{n} x_j u_j : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R},\ \sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j)^2 = r^2\right\},$$

donde $\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n\end{bmatrix}^T$ es el vector de coordenadas de v_0 respecto de la base $\mathcal{B}$, es decir, $a_j = \langle v_0, u_j\rangle$ para todo $j \in \mathbb{I}_n$.

: *recordar el Teorema de Pitágoras.*

(a)



$$\begin{aligned} d^2(v_1, v_2) &= \|v_2 - v_1\|^2 \\ &= \left\| \sum_{j=1}^{n} \langle v_2, u_j\rangle u_j - \sum_{j=1}^{n} \langle v_1, u_j\rangle u_j \right\|^2 \\ &= \left\| \sum_{j=1}^{n} (\langle v_2, u_j\rangle - \langle v_1, u_j\rangle) u_j \right\|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{n} (\langle v_2, u_j\rangle - \langle v_1, u_j\rangle)^2 \underbrace{\|u_j\|^2}_{=1} \end{aligned}$$

Nota Bene. Nótese que, si $\mathfrak{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{V}$, para cada $v \in \mathbb{V}$ vale que

$$[v]^{\mathfrak{U}} = \begin{bmatrix}\langle v, u_1\rangle & \langle v, u_2\rangle & \cdots & \langle v, u_n\rangle\end{bmatrix}^T.$$

En consecuencia,

$$v = \sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j\rangle u_j$$

y, debido Teorema de Pitágoras, también vale que

$$\|v\|^2 = \left\| \sum_{j=1}^{n} \langle v, u_j\rangle u_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|\langle v, u_j\rangle u_j\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle v, u_j\rangle|^2 \|u_j\|^2$$
$$= \sum_{j=1}^{n} |\langle v, u_j\rangle|^2.$$

$$\boxed{d(v_1, v_2) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\langle v_2, u_j\rangle - \langle v_1, u_j\rangle)^2}}$$

(b)

$$d(v_0, v) = r \longrightarrow d^2(v_0, v) = r^2$$

$$v = \sum_{j=1}^{n} x_j u_j \qquad v_0 = \sum_{j=1}^{n} \langle v_0, u_j\rangle u_j$$

$$\|v - v_0\|^2 = r^2$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j u_j - \sum_{j=1}^{n} \langle v_0, u_j\rangle u_j \right\|^2 = r^2$$

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} (x_j - \langle v_0, u_j\rangle) u_j \right\|^2 = r^2$$

$$\sum_{j=1}^{n} \|(x_j - \langle v_0, u_j\rangle) u_j\|^2 = r^2$$

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j - \langle v_0, u_j\rangle)^2 \underbrace{\|u_j\|}_{=1} = r^2$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} (x_j - \langle v_0, u_j\rangle)^2 = r^2}$$

Ejercicio 3.20

jueves, 28 de octubre de 2021 22:41

3.20 Se considera $\mathbb{R}^2$ con el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definido por

$$\langle x, y\rangle = y^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x.$$

(a) Describir el significado geométrico del conjunto

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 : 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = 4\}.$$

(b) Hallar dos vectores $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$\Sigma = \{y_1v_1 + y_2v_2 : y_1, y_2 \in \mathbb{R},\ y_1^2 + y_2^2 = 4\}$$
$$= \{2\cos(\theta)v_1 + 2\,\mathrm{sen}(\theta)v_2 : \theta \in [0, 2\pi)\},$$

y representar gráficamente el resultado obtenido.

(a)

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\quad \|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$

$= (2x_1 + x_2)x_1 + (x_1 + 2x_2)x_2$

$= 2x_1^2 + x_2x_1 + x_1x_2 + 2x_2^2$

$= 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$

Por lo tanto, el conjunto $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^2 \,/\, \|x\|^2 = 4\}$

$\boxed{\Sigma \text{ es una circunferencia centrada en el origen de radio } 2}$

(b)

Hallar v_1 y v_2 / $\Sigma = \{\overbrace{y_1 v_1 + y_2 v_2}^{x} \,/\, y_1, y_2 \in \mathbb{R},\ y_1^2 + y_2^2 = 2\} = \{\underbrace{2\cos(\theta)}\,v_1 + \underbrace{2\sin(\theta)}\,v_2,\ \theta \in [0, 2\pi)\}$

$\begin{cases} y_1 = 2\cos(\theta) \\ y_2 = 2\sin(\theta) \end{cases}$

Pensando en análisis, busco v_1 y v_2 ⊥ $\{v_1, v_2\}$ sea un conjunto ortonormal.

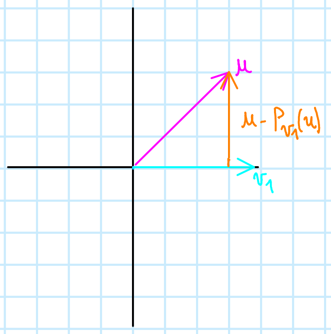
Pensemos por un momento que los tengo:

$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle y_1v_1 + y_2v_2, y_1v_1 + y_2v_2\rangle = y_1^2 \underbrace{\langle v_1, v_1\rangle}_{=1} + y_1y_2 \underbrace{\langle v_1, v_2\rangle}_{=0} + y_2y_1 \underbrace{\langle v_2, v_1\rangle}_{=0} + y_2^2 \underbrace{\langle v_2, v_2\rangle}_{=1}$

$= y_1^2 + y_2^2 \rightsquigarrow \|x\|^2 = y_1^2 + y_2^2$

Busco v_1 y v_2:

v_1 cualquiera pero normalizado, $\quad v_1 = \dfrac{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\|}$ $\quad \left\|\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\|^2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \Rightarrow v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$



$T \perp v_1 \Rightarrow T = u - P_{v_1}(u)$

Elijo un u que no sea múltiplo de v_1, $u = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad P_{v_1}(u) = \dfrac{\langle u, v_1\rangle}{\underbrace{\|v_1\|^2}_{=1}} v_1$

$P_{v_1}(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Por último, $v_2 = \dfrac{T}{\|T\|} = \dfrac{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}}{\left\|\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\|}$ $\quad \left\|\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\|^2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \dfrac{3}{2} \longrightarrow \|T\| = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$v_2 = \dfrac{2}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\boxed{v_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}}$

Ejercicio 3.21

viernes, 29 de octubre de 2021 21:22

3.21 Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Comprobar que $b = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}^T \in \mathrm{col}(A)$.

(b) Mostrar que existen $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ y $v_1, v_2 \in \mathrm{col}(A)$ tales que

$$\{y \in \mathrm{col}(A) : d(b, y) = 1\} = \{(a_1 + \cos(\theta))v_1 + (a_2 + \mathrm{sen}(\theta))v_2 : \theta \in [0, 2\pi)\}.$$

¿Son únicos? Si la respuesta es afirmativa, determinarlos. Si la respuesta es negativa, exhibir dos ejemplos.

(a)

Input interpretation

row reduce	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

Result

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_A$$

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}, \quad b \in \mathrm{Col}(A)$$

(b)

Ejercicio 3.23

domingo, 7 de noviembre de 2021 15:32

3.23 Sea $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ el espacio euclídeo canónico. En cada uno de los siguientes casos, utilizar el algoritmo de Gram-Schmidt para producir un sistema ortonormal $\mathcal{U}_i$ a partir del conjunto linealmente independiente $\mathcal{L}_i$ dado.

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}}_{v_2} \right\}, \mathcal{L}_2 = \left\{ \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\6\\7\end{bmatrix} \right\}, \mathcal{L}_3 = \left\{ \begin{bmatrix}3\\0\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\7\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\9\\11\end{bmatrix} \right\}.$$

1)

$$w_1 = v_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \quad \|w_1\|^2 = 6, \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix} - \frac{7}{6}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{5}{6}\\-\frac{4}{3}\\\frac{11}{6}\end{bmatrix}, \quad \|w_2\|^2 = \frac{35}{6}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{\frac{35}{6}}}\begin{bmatrix}\frac{5}{6}\\-\frac{4}{3}\\\frac{11}{6}\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathcal{U} = \text{gen}\left\{ \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \frac{\sqrt{210}}{35}\begin{bmatrix}\frac{5}{6}\\-\frac{4}{3}\\\frac{11}{6}\end{bmatrix} \right\}}$$

2)

$$w_1 = v_1 = \begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \|w_1\|^2 = 4, \quad u_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{bmatrix}3\\4\\0\end{bmatrix} - \frac{6}{4}\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\4\\0\end{bmatrix}, \quad \|w_2\|^2 = 16, \quad u_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2 = \begin{bmatrix}5\\6\\7\end{bmatrix} - \frac{10}{4}\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix} - \frac{24}{16}\begin{bmatrix}0\\4\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\7\end{bmatrix}, \quad \|w_3\|^2 = 49, \quad u_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathcal{U} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \right\}}$$

3)

$$w_1 = v_1 = \begin{bmatrix}3\\0\\4\end{bmatrix}, \quad \|w_1\|^2 = 25, \quad u_1 = \begin{bmatrix}3/5\\0\\4/5\end{bmatrix}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{bmatrix}-1\\0\\7\end{bmatrix} - \frac{25}{25}\begin{bmatrix}3\\0\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\0\\3\end{bmatrix}, \quad \|w_2\|^2 = 25, \quad u_2 = \begin{bmatrix}-4/5\\0\\3/5\end{bmatrix}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2 = \begin{bmatrix}2\\9\\11\end{bmatrix} - \frac{50}{25}\begin{bmatrix}3\\0\\4\end{bmatrix} - \frac{25}{25}\begin{bmatrix}-4\\0\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\9\\0\end{bmatrix}, \quad \|w_3\|^2 = 81, \quad u_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathcal{U} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix}3/5\\0\\4/5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-4/5\\0\\3/5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\}}$$

Ejercicio 3.24

domingo, 7 de noviembre de 2021 16:37

3.24 Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 10 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 1 \end{bmatrix}.$$

(**a**) Hallar una base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que contenga una base de $\mathrm{col}(A)$.

(**b**) Hallar la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^4$ sobre $\mathrm{col}(A)$.

(**c**) Calcular la distancia del vector $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T}_{b}$ a $\mathrm{col}(A)$.

a)

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 10 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

$E_A =$ Result

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{col}(A) = \mathrm{gen}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix}2\\3\\3\\4\end{bmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}}_{v_3} \right\}$$

$\mathcal{G} = \{w_1, w_2, w_3\} \to$ Base ortogonal de $\mathrm{col}(A)$

$$w_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\end{bmatrix}, \quad \|w_1\|^2 = 10 \qquad w_2 = \begin{bmatrix}2\\3\\3\\4\end{bmatrix} - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\\3\\4\end{bmatrix} - \frac{19}{10}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}1\\11\\-8\\2\end{bmatrix} \quad \|w_2\|^2 = \frac{19}{10}$$

$$w_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\end{bmatrix} - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\|w_2\|^2}\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1\\11\\-8\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{3}{10}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\end{bmatrix} - \frac{\frac{13}{\cancel{10}}}{\frac{19}{\cancel{10}}}\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1\\11\\-8\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7/19\\-1/19\\-1/19\\5/19\end{bmatrix} = \frac{1}{19}\begin{bmatrix}-7\\-1\\-1\\5\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\mathcal{G} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\1\\2\\2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\11\\-8\\2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}-7\\-1\\-1\\5\end{bmatrix} \right\}}$$

b)

Recordamos $\mathrm{nul}(A^T) \perp \mathrm{Col}(A)$ Por lo tanto, $P_{\mathrm{Col}(A)} = I - P_{\mathrm{nul}(A^T)}$

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & 0 \\ 4 & 2 & 10 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^T$

Result

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}x_4\\-x_4\\-x_4\\x_4\end{bmatrix} = x_4\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{nul}(A^T) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}\right\}$$

Como $\mathrm{Dim}(\mathrm{nul}(A^T)) = 1 \Rightarrow P_{\mathrm{nul}(A^T)}(x) = \dfrac{\langle x, [1\ -1\ -1\ 1]^T\rangle}{\|[1\ -1\ -1\ 1]^T\|^2}\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$

$$\langle x, [1\ -1\ -1\ 1]^T\rangle = \begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix} = x_1 - x_2 - x_3 + x_4$$

$$\|[1\ -1\ -1\ 1]^T\|^2 = 4$$

$$P_{\mathrm{nul}(A^T)}(x) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} x$$

$$P_{\mathrm{Col}(A)}(x) = I(x) - P_{\mathrm{nul}(A^T)}(x) = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right) x = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} x$$

$$\boxed{[P_{\mathrm{Col}(A)}(x)] = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}}$$

c)

$$d(b, \mathrm{Col}(A)) = \|b - P_{\mathrm{Col}(A)}(b)\| = \|P_{\mathrm{nul}(A)}(b)\|$$

$$P_{\mathrm{nul}(A^T)}(b) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$d(b, \mathrm{Col}) = \|[\bar{0}]^T\| = 0 \Rightarrow b \in \mathrm{Col}(A) \Rightarrow$$

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Result

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

efectivamente $b \in \mathrm{Col}(A)$

$$\boxed{d(b, \mathrm{Col}(A)) = 0}$$

Ejercicio 3.25

domingo, 7 de noviembre de 2021 19:54

3.25 Se consideran el $\mathbb{R}$-espacio euclídeo $(C([-1,1],\mathbb{R}),\langle\cdot,\cdot\rangle)$ con el producto interno definido por

$$\langle f,g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx,$$

y el subespacio $\mathbb{R}_2[x]$.

(a) Utilizar el algoritmo de Gram-Schmidt para producir una base ortonormal $\{p_0,p_1,p_2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ a partir de la base $\{q_0,q_1,q_2\}$, donde

$$q_0=1,\ q_1=x,\ q_2=x^2.$$

(b) Hallar las siguientes proyecciones ortogonales: $P_{\mathbb{R}_2[x]}(\mathrm{sen}(\pi x))$, $P_{\mathbb{R}_2[x]}(\cos(\pi x))$.

(c) Calcular las distancias $d(\mathrm{sen}(\pi x),\mathbb{R}_2[x])$, $d(\cos(\pi x),\mathbb{R}_2[x])$.

: Los polinomios p_0,p_1,p_2 así obtenidos son los primeros tres polinomios de Legendre normalizados. Se puede comprobar que para cada $n=0,1,2,\ldots$, el polinomio p_n es solución de la ecuación diferencial de Legendre

$$(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0.$$

(a)

$\mathcal{E}=\{1,x,x^2\}$ Hallar $\mathcal{G}=\{p_0,p_1,p_2\}$ base ortonormal

$$\int_{-1}^{1} x^n dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_{-1}^{1}$$

$$W_1=q_0=1\ ,\ \|W_1\|^2=\langle 1,1\rangle=2\ ,\ p_0=\frac{W_1}{\|W_1\|}=\frac{\sqrt2}{2}$$

$$W_2=q_1-\frac{\langle q_1,W_1\rangle}{\|W_1\|^2}W_1=x-\frac{0}{2}W_1=x\ ,\ \|W_2\|^2=\frac{2}{3}\ ,\ p_1=\frac{\sqrt6}{2}x$$

$$W_3=q_2-\frac{\langle q_2,W_1\rangle}{\|W_1\|^2}W_1-\frac{\langle q_2,W_2\rangle}{\|W_2\|^2}W_2=x^2-\frac{2}{6}W_1-\frac{0}{\frac{2}{3}}W_2=x^2-\frac{1}{3}\ ,\ \|W_3\|^2=\frac{8}{45}\ ,\ p_2=\frac{3\sqrt{10}}{4}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)$$

$$\boxed{\mathcal{G}=\left\{\frac{\sqrt2}{2},\ \frac{\sqrt6}{2}x,\ \frac{3\sqrt{10}}{4}\left(x^2-\frac13\right)\right\}}$$

usamos la base ortonormal ya que $\|W_j\|^2=1$

Teorema 1.9. *Sean $(\mathbb{V},\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espacio euclídeo y $\mathbb{S}\subseteq\mathbb{V}$ un subespacio de dimensión m. Si $\mathcal{B}_{\mathbb{S}}=\{w_1,w_2,\ldots,w_m\}$, es una base ortogonal de $\mathbb{S}$, entonces para cada $v\in\mathbb{V}$ vale que*

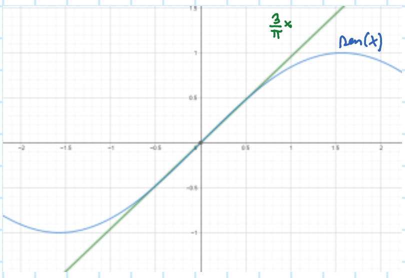
$$(2)\qquad P_{\mathbb{S}}(v)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\langle v,w_j\rangle}{\|w_j\|^2}w_j$$

es la proyección ortogonal de v sobre $\mathbb{S}$.

(b)

$$P_{\mathbb{R}_2[x]}(\mathrm{sen}(\pi x))=\left\langle \mathrm{sen}(\pi x),\tfrac{\sqrt2}{2}\right\rangle\frac{\sqrt2}{2}+\left\langle \mathrm{sen}(\pi x),\tfrac{\sqrt6}{2}x\right\rangle\frac{\sqrt6}{2}x+\left\langle \mathrm{sen}(\pi x),\tfrac{3\sqrt{10}}{4}\left(x^2-\tfrac13\right)\right\rangle\frac{3\sqrt{10}}{4}\left(x^2-\frac13\right)$$

$$=0\,\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt6}{\pi}\,\frac{\sqrt6}{2}x+0\,\frac{3\sqrt{10}}{4}\left(x^2-\frac13\right)=\frac{3}{\pi}x$$



$$\boxed{P_{\mathbb{R}_2[x]}(\mathrm{sen}(\pi x))=\frac{3}{\pi}x}$$

$$P_{\mathbb{R}_2[x]}(\cos(\pi x))=\left\langle \cos(\pi x),\tfrac{\sqrt2}{2}\right\rangle\frac{\sqrt2}{2}+\left\langle \cos(\pi x),\tfrac{\sqrt6}{2}x\right\rangle\frac{\sqrt6}{2}x+\left\langle \cos(\pi x),\tfrac{3\sqrt{10}}{4}\left(x^2-\tfrac13\right)\right\rangle\frac{3\sqrt{10}}{4}\left(x^2-\frac13\right)$$

$$=0\,\frac{\sqrt2}{2}+0\,\frac{\sqrt6}{2}x+\left(-\frac{3\sqrt{10}}{\pi^2}\right)\frac{3\sqrt{10}}{4}\left(x^2-\frac13\right)=-\frac{45}{2\pi^2}\left(x^2-\frac13\right)$$

$$\boxed{P_{\mathbb{R}_2[x]}(\cos(\pi x))=-\frac{45}{2\pi^2}\left(x^2-\frac13\right)}$$

(c)

$$d(\mathrm{sen}(\pi x),\mathbb{R}_2[x])=\|\mathrm{sen}(\pi x)-P_{\mathbb{R}_2[x]}(\mathrm{sen}(\pi x))\|=\left\|\mathrm{sen}(\pi x)-\frac{3}{\pi}x\right\|=$$

Definite integral

$$\int_{-1}^{1}\left(\sin(\pi x)-\frac{3x}{\pi}\right)^2dx=1-\frac{6}{\pi^2}\approx 0.39207$$

$$\boxed{d(\mathrm{sen}(\pi x),\mathbb{R}_2[x])=\sqrt{1-\frac{6}{\pi^2}}}$$

$$d(\cos(\pi x),\mathbb{R}_2[x])=\|\cos(\pi x)-P_{\mathbb{R}_2[x]}(\cos(\pi x))\|=\left\|\cos(\pi x)-\frac{45}{2\pi^2}\left(x^2-\frac13\right)\right\|=$$

Definite integral

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{45\left(-\frac13+x^2\right)}{2\pi^2}+\cos(\pi x)\right)^2dx=0.0760616$$

$$\boxed{d(\cos(\pi x),\mathbb{R}_2[x])=0{,}0760616}$$

Ejercicio 3.26

domingo, 7 de noviembre de 2021 21:20

3.26 Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matriz de rango n.

(**a**) Comprobar que existen matrices $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tales que

1. las columnas de Q son una base ortonormal de $\operatorname{col}(A)$,
2. la matriz R es triangular superior y los elementos de su diagonal son positivos,
3. $A = QR$.

: *Las columnas de Q se obtienen aplicando el algoritmo de Gram-Schmidt a las columnas de A.*

(**b**) Comprobar que la factorización $A = QR$ del inciso anterior es única.

Las columnas de A, $\{A_{*1}, \dots, A_{*n}\}$ son una base del espacio $\operatorname{col}(A)$. Aplicando el algoritmo de Gram-Schmidt, respecto del producto interno canónico, se obtiene primero una base ortogonal de $\operatorname{col}(A)$, $\mathcal{G} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$, y luego una base ortonormal de $\operatorname{col}(A)$, $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, tales que para todo $j \in \mathbb{I}_n$ vale que

$$\begin{aligned} A_{*j} &= \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle A_{*j}, w_i\rangle}{\|w_i\|^2} w_i + w_j \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} \langle A_{*j}, u_i\rangle\, u_i + \|w_j\| u_j. \end{aligned}$$

Esto significa que

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \|w_1\| & \langle A_{*2}, u_1\rangle & \langle A_{*3}, u_1\rangle & \cdots & \langle A_{*n}, u_1\rangle \\ 0 & \|w_2\| & \langle A_{*3}, u_2\rangle & \cdots & \langle A_{*n}, u_2\rangle \\ 0 & 0 & \|w_3\| & \cdots & \langle A_{*n}, u_3\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \|w_n\| \end{bmatrix}.$$

Fijate que es única porque en esencia es, a partir de una base, utilizar el algoritmo de Gram-schmidt.. Es decir, tenés una matriz A de rango n $A = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_n]$. Entonces aplicamos gram schmidt para hallar una BON $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, .., \mathbf{q}_n\}$:

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{a}_1 \to \mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{||\mathbf{u}_1||} \tag{1}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{a}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{a}_2\rangle}{||u_1||^2}\mathbf{u}_1 \to \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{||\mathbf{u}_2||} \tag{2}$$

$$\vdots \tag{3}$$

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{a}_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{a}_n\rangle}{||u_i||^2}\mathbf{u}_i \to \mathbf{q}_n = \frac{\mathbf{u}_n}{||\mathbf{u}_n||} \tag{4}$$

Luego despejamos los a:

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{u}_1 \tag{5}$$

$$\mathbf{a}_2 = \frac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{a}_2\rangle}{||u_1||^2}\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \tag{6}$$

$$\vdots \tag{7}$$

$$\mathbf{a}_n = sum_{i=1}^{n-1} \frac{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{a}_n\rangle}{||u_i||^2}\mathbf{u}_i + \mathbf{u}_n + \tag{8}$$

Esto es igual a:

$$A = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n] \begin{bmatrix} 1 & \frac{\langle \mathbf{u}_1 \mathbf{a}_2\rangle}{||u_1||^2} & \frac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{a}_3\rangle}{||u_1||^2} & \cdots & \frac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{a}_n\rangle}{||u_1||^2} \\ 0 & 1 & \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{a}_3\rangle}{||u_2||^2} & \cdots & \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{a}_n\rangle}{||u_2||^2} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Bueno, si multiplicamos y dividimos por $||u_i||$, llegamos a la descomposición QR:

$$A = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \cdots, \mathbf{q}_n] \begin{bmatrix} ||u_1|| & \frac{\langle \mathbf{u}_1 \mathbf{a}_2\rangle}{||u_1||} & \frac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{a}_3\rangle}{||u_1||} & \cdots & \frac{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{a}_n\rangle}{||u_1||} \\ 0 & 1 & \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{a}_3\rangle}{||u_2||} & \cdots & \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{a}_n\rangle}{||u_2||} \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & ||u_n|| \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$A = QR \tag{2}$$

Ejercicio 3.27

lunes, 8 de noviembre de 2021 15:56

3.27 Hallar la descomposición QR de las siguientes matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \\ 4 & 7 & 11 \end{bmatrix}.$$

Usamos lo obtenido en el 3.23:

$$A = [u_1 \ u_2 \ \cdots \ u_n] \begin{bmatrix} \|w_1\| & (A_{*2},u_1) & (A_{*3},u_1) & \cdots & (A_{*n},u_1) \\ 0 & \|w_2\| & (A_{*3},u_2) & \cdots & (A_{*n},u_2) \\ 0 & 0 & \|w_3\| & \cdots & (A_{*n},u_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \|w_n\| \end{bmatrix}.$$

A_1

Base de col (A_1) : $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ Base ortogonal a B (con algoritmo gram-smith) : $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5/6 \\ -4/3 \\ 11/6 \end{bmatrix} \right\}$, $M_B^G = \left[[B_1]^G \ [B_2]^G \right] = \begin{bmatrix} 1 & 7/6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{6} \\ 2 & -4/3 \\ 1 & 11/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 7/6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{210}}{42} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-4\sqrt{210}}{105} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{11\sqrt{210}}{210} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & \frac{7\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{35}{\sqrt{210}} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{210}}{42} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-4\sqrt{210}}{105} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{11\sqrt{210}}{210} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & \frac{7\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{35}{\sqrt{210}} \end{bmatrix}}$$

A_2

Base de col (A_2): $B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$, $G: \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$ $M_B^G = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{6}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & \frac{6}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1/7 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & 0 & 1/7 \end{bmatrix}}$$

A_3

Base de col (A_3): $B = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 11 \end{bmatrix} \right\}$, $G: \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ $M_B^G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \\ 4 & 7 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \\ 4 & 7 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}}$$

Ejercicio 3.28

lunes, 8 de noviembre de 2021 22:05

3.28 En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definido por

$$\langle x, y\rangle = y^T \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} x$$

se considera la funcional lineal $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $\phi\left(\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T\right) := ax_1 + bx_2 + cx_3$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Hallar $x_\phi \in \mathbb{R}^3$ tal que $\phi(x) = \langle x, x_\phi\rangle$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$.

Nota Bene. Nótese que si $\mathcal{B} = \{v_j : j \in \mathbb{I}_n\}$ es una base de $\mathbb{V}$ el cálculo del vector representante de ϕ se puede realizar de la siguiente manera: como $\phi(x) = \langle x, v\rangle$ para todo $x \in \mathbb{V}$, podemos escribir $v = \sum_{j=1}^n a_j v_j$ y resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales no homogéneo

$$\phi(v_i) = \langle v_i, v\rangle = \sum_{j=1}^n \overline{a_j} \langle v_i, v_j\rangle, \quad \forall i \in \mathbb{I}_n,$$

cuya representación matricial tiene la forma

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle & \cdots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle & \cdots & \langle v_2, v_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle v_n, v_1\rangle & \langle v_n, v_2\rangle & \cdots & \langle v_n, v_n\rangle \end{bmatrix}}_{G_{\mathcal{B}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \overline{a_1} \\ \overline{a_2} \\ \vdots \\ \overline{a_n} \end{bmatrix}}_{\overline{[v]^{\mathcal{B}}}} = \begin{bmatrix} \phi(v_1) \\ \phi(v_2) \\ \vdots \\ \phi(v_n) \end{bmatrix}$$

Por consiguiente,

$$\overline{[v]^{\mathcal{B}}} = G_{\mathcal{B}}^{-1} \begin{bmatrix} \phi(v_1) & \phi(v_2) & \cdots & \phi(v_n) \end{bmatrix}^T. \tag{2}$$

Base de $\mathbb{R}^3 \Rightarrow B = \{\underbrace{[1\ 0\ 0]^T}_{v_1}, \underbrace{[0\ 1\ 0]^T}_{v_2}, \underbrace{[0\ 0\ 1]^T}_{v_3}\}$

$\phi(v_1) = a1 + b0 + c0 = a \qquad \phi(v_2) = b \qquad \phi(v_3) = c$

$$[x_\phi]^B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a_1} \\ \overline{a_2} \\ \overline{a_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7a+6b-4c \\ 6a+6b-4c \\ -4a-4b+3c \end{bmatrix}$$

Como $\mathbb{R}$-ev $a_1 = \overline{a_1}$ etc

$$x_\phi = \frac{1}{2}\Big((7a+6b-4c)v_1 + (6a+6b-4c)v_2 + (-4a-4b+3c)v_3\Big) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7a+6b-4c \\ 6a+6b-4c \\ -4a-4b+3c \end{bmatrix}$$

$$\boxed{x_\phi = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7a+6b-4c \\ 6a+6b-4c \\ -4a-4b+3c \end{bmatrix}}$$

Ejercicio 3.29

lunes, 8 de noviembre de 2021 22:35

3.29 Sea $\mathbb{R}_2[x]$ con el producto interno definido por

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx.$$

(a) Hallar $q \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $p(0) = \langle p, q\rangle$ para todo $p \in \mathbb{R}_2[x]$.

(b) Hallar $q \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $p'(0) = \langle p, q\rangle$ para todo $p \in \mathbb{R}_2[x]$.

(c) Hallar $q \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $\int_{-1}^{1} p(x)\cos(\pi x)dx = \langle p, q\rangle$ para todo $p \in \mathbb{R}_2[x]$.

(a)

Una base $\mathbb{R}_2[x]$ es $B = \{1, x, x^2\}$, decimos que la funcional lineal $\phi(p) = p(0)$

Armamos la matriz del producto interno (gram) en base B $\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,x\rangle & \langle 1,x^2\rangle \\ \langle x,1\rangle & \langle x,x\rangle & \langle x,x^2\rangle \\ \langle x^2,1\rangle & \langle x^2,x\rangle & \langle x^2,x^2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

$\phi(1) = 1 \qquad \phi(x) = 0 \qquad \phi(x^2) = 0$

$[q]^B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \underset{\mathbb{R}\text{-ev}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/8 \\ 0 \\ -15/8 \end{bmatrix}$

$$\boxed{q = \frac{9}{8} - \frac{15}{8}x^2}$$

(b)

Es lo mismo solo que $\phi(p) = p'(0)$ y $\phi(1) = 0$, $\phi(x) = 1$, $\phi(x^2) = 0$

$[q]^B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \underset{\mathbb{R}\text{-ev}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\boxed{q = \frac{3}{2}x}$$

(c)

Es lo mismo solo que $\phi(p) = \int_{-1}^{1} p(x)\cos(\pi x)dx$ y $\phi(1) = 0$, $\phi(x) = 0$, $\phi(x^2) = -\frac{4}{\pi^2}$

$[q]^B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \underset{\mathbb{R}\text{-ev}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{4}{\pi^2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15/2\pi^2 \\ 0 \\ -45/2\pi^2 \end{bmatrix}$

$$\boxed{q = \frac{15}{2\pi^2} - \frac{45}{2\pi^2}x^2}$$

Ejercicio 3.30

lunes, 8 de noviembre de 2021 23:16

3.30 En $\mathbb{R}_n[x]$ con el producto interno

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$

se considera $\delta : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$ la funcional lineal definida por $\delta(p) := p(0)$. Para cada $n \in \mathbb{I}_{10}$ hallar y graficar el polinomio $q_n \in \mathbb{R}_n[x]$ tal que $\delta(\cdot) = \langle \cdot, q_n\rangle$.

$$\int_{-1}^{1} x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} \begin{cases} \to n+1 \text{ es par } (n \text{ es impar}) \Rightarrow = 0 \\ \to \dfrac{2}{n+1} \end{cases}$$

Para $n = 1$,

$B = \{1, x\}$, $G = \begin{bmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,x\rangle \\ \langle x,1\rangle & \langle x,x\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ $\quad \delta(1) = 1$, $\delta(x) = 0$

$[q]^B = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbb{R}_{ev}} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad q_1 = \frac{1}{2}$

Para $n = 2$,

Una base $\mathbb{R}_2[x]$ es $B = \{1, x, x^2\}$, decimos que la funcional lineal $\phi(p) = p(0)$

Armamos la matriz del producto interno (gram) en base $B \Rightarrow \begin{bmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,x\rangle & \langle 1,x^2\rangle \\ \langle x,1\rangle & \langle x,x\rangle & \langle x,x^2\rangle \\ \langle x^2,1\rangle & \langle x^2,x\rangle & \langle x^2,x^2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

$\phi(1) = 1 \qquad \phi(x) = 0 \qquad \phi(x^2) = 0$

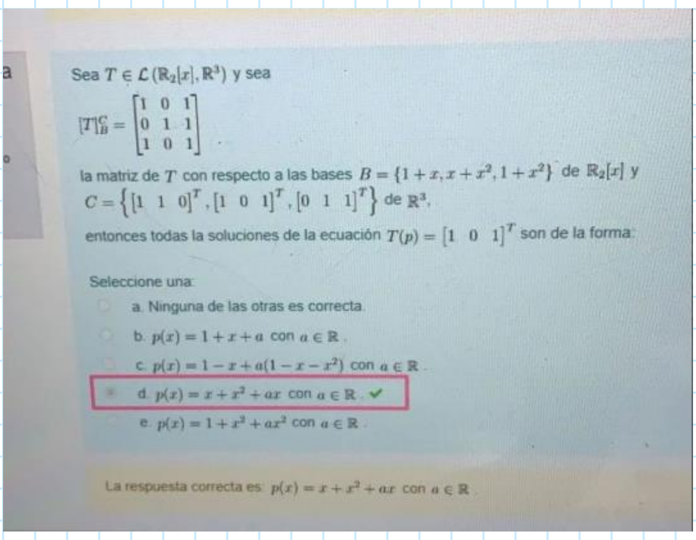
$[q]^B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathbb{R}\text{-ev}]{} \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/8 \\ 0 \\ -15/8 \end{bmatrix}$ $\qquad q = \frac{9}{8} - \frac{15}{8}x^2$

Para $n = 3$,

$G = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$ $\qquad [q]^B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Guía 2, ej. 1, ej. 2, ej. 3

jueves, 11 de noviembre de 2021 13:06



Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^3)$ y sea

$$[T]_B^C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

la matriz de T con respecto a las bases $B = \{1+x, x+x^2, 1+x^2\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ y $C = \left\{[1\ 1\ 0]^T, [1\ 0\ 1]^T, [0\ 1\ 1]^T\right\}$ de $\mathbb{R}^3$,

entonces todas la soluciones de la ecuación $T(p) = [1\ 0\ 1]^T$ son de la forma:

Seleccione una:

a. Ninguna de las otras es correcta.

b. $p(x) = 1 + x + a$ con $a \in \mathbb{R}$.

c. $p(x) = 1 - x + a(1 - x - x^2)$ con $a \in \mathbb{R}$.

d. $p(x) = x + x^2 + ax$ con $a \in \mathbb{R}$. ✔

e. $p(x) = 1 + x^2 + ax^2$ con $a \in \mathbb{R}$.

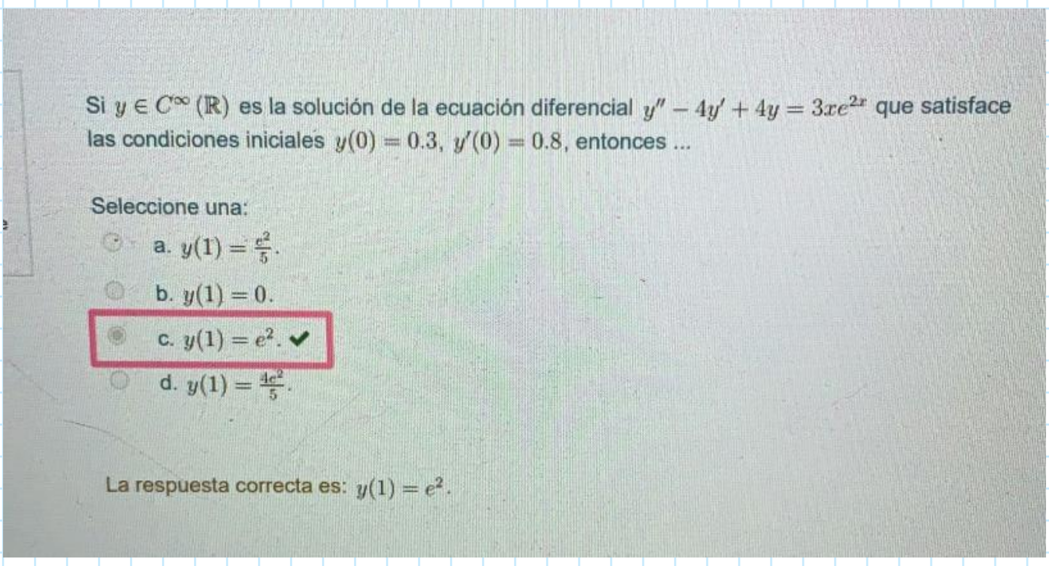
La respuesta correcta es: $p(x) = x + x^2 + ax$ con $a \in \mathbb{R}$.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}^C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \begin{array}{l} a = -c \\ b = 1 - c \end{array} \qquad \begin{bmatrix} -c \\ 1-c \\ c \end{bmatrix}^C$$

$$-c(1+x) + (1-c)(x+x^2) + c(1+x^2)$$

$$x + x^2 + c(\cancel{1} - x - x - \cancel{x^2} \cancel{+1} + x^2) = x + x^2 \underbrace{-2cx}_{c \text{ toma cualquier valor}} = x + x^2 + cx = \boxed{\underbrace{x + x^2}_{x_p} + \underbrace{\text{gen}\{x\}}_{\text{nul}(T)}}$$



Si $y \in C^\infty(\mathbb{R})$ es la solución de la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 4y = 3xe^{2x}$ que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 0.3$, $y'(0) = 0.8$, entonces ...

Seleccione una:

a. $y(1) = \frac{e^2}{5}$.

b. $y(1) = 0$.

c. $y(1) = e^2$. ✔

d. $y(1) = \frac{4e^2}{5}$.

La respuesta correcta es: $y(1) = e^2$.

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \longrightarrow x = 2 \to (x-2)^2 \to \overset{L =}{(D - 2I)^2} \qquad \text{nu}(L) = \text{gen}\{e^{2x}, xe^{2x}\}$$

$$A = (D-2)^2 \to B_A = \{e^{2x}, xe^{2x}\} \qquad A \circ L = (x-2)^4 \to \text{nul}(AL) = \text{gen}\{e^{2x}, xe^{2x}, \underbrace{x^2e^{2x}, x^3e^{2x}}_{A \setminus L}\}$$

$$y_p = ax^2 e^{2x} + b x^3 e^{2x}$$

$$L(y_p) = L[ax^2e^{2x}] + L[bx^3e^{2x}] = 2ae^{2x} + 6bxe^{2x} = 3xe^{2x} \begin{cases} a = 0 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y_p = \frac{1}{2}x^3e^{2x}$$

$$y = y_p + \text{gen}\{e^{2x}, xe^{2x}\}$$

$$y(0) = \frac{1}{2}0^3e^{2x} + a_0e^{2\cdot 0} + 0a_1e^{2 0} = 0{,}3 \to a_0 = 0{,}3$$

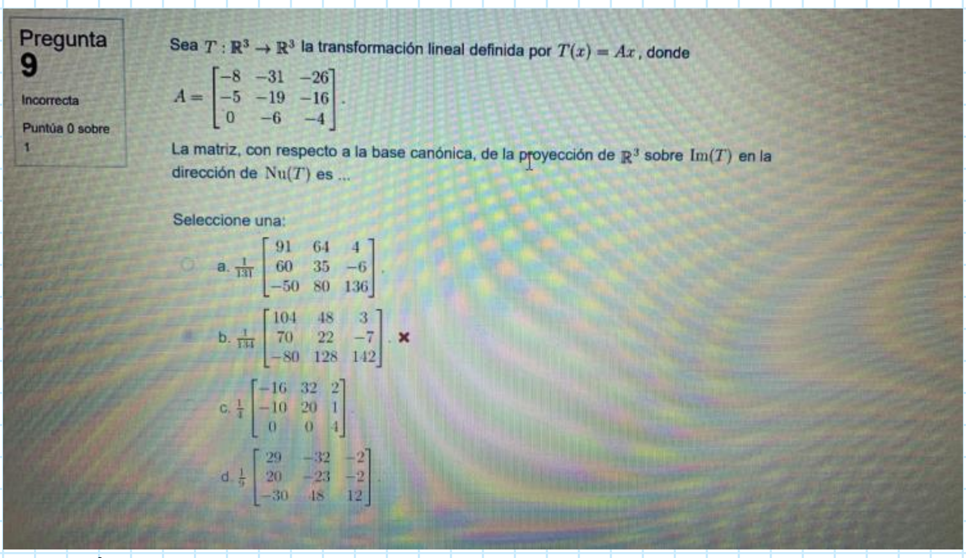
$$y'(0) = 2a_0 + a_1e^{2\cdot 0} = 0{,}8$$

$$2a_0 + a_1 = 0{,}8$$

$$a_1 = 0{,}2$$

$$y = \frac{1}{2}x^3e^{2x} + 0{,}3e^{2x} + 0{,}2xe^{2x}$$

$$y(1) = e^2\left(\frac{1}{2} + 0{,}3 + 0{,}2\right) \boxed{= e^2}$$



Pregunta 9

Incorrecta

Puntúa 0 sobre 1

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$, donde

$$A = \begin{bmatrix} -8 & -31 & -26 \\ -5 & -19 & -16 \\ 0 & -6 & -4 \end{bmatrix}.$$

La matriz, con respecto a la base canónica, de la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre $\text{Im}(T)$ en la dirección de $\text{Nu}(T)$ es ...

Seleccione una:

a. $\frac{1}{131}\begin{bmatrix} 91 & 64 & 4 \\ 60 & 35 & -6 \\ -50 & 80 & 136 \end{bmatrix}$.

b. $\frac{1}{134}\begin{bmatrix} 104 & 48 & 3 \\ 70 & 22 & -7 \\ -80 & 128 & 142 \end{bmatrix}$. ✖

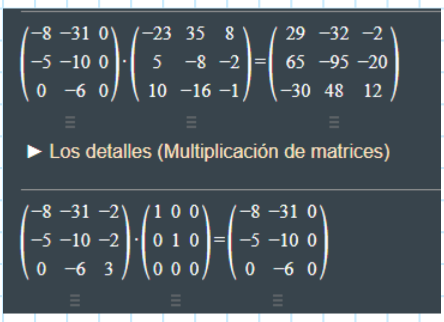
c. $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -16 & 32 & 2 \\ -10 & 20 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

d. $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 29 & -32 & -2 \\ 20 & -23 & -2 \\ -30 & 48 & 12 \end{bmatrix}$.

$$\text{Im}(T) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} -8 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -31 \\ -19 \\ -6 \end{bmatrix}\right\} \qquad \begin{array}{l} x_1 = -\frac{2}{3}x_3 \\ x_2 = -\frac{2}{3}x_3 \end{array} \to \text{nu}(T) = \text{gen}\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \text{Im}(T) \oplus \text{nu}(T)$$

$$\left[\Pi_{\text{Im}(T)\,\text{nu}(T)}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_B^E = \begin{bmatrix} -8 & -31 & -2 \\ -5 & -10 & -2 \\ 0 & -6 & 3 \end{bmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} -8 & -31 & 0 \\ -5 & -10 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -23 & 35 & 8 \\ 5 & -8 & -2 \\ 10 & -16 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & -32 & -2 \\ 65 & -95 & -20 \\ -30 & 48 & 12 \end{pmatrix}$$

▶ Los detalles (Multiplicación de matrices)

$$\begin{pmatrix} -8 & -31 & -2 \\ -5 & -10 & -2 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -31 & 0 \\ -5 & -10 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(D - \lambda I)^k = f^{(k)}(x)e^{\lambda x}$$

$$\boxed{\text{Rta} = d}$$

Guía 2, ej. 4, ej. 5, ej. 6

Pregunta **8**
Incorrecta
Puntúa como 1
Marcar pregunta

Sea Σ la simetría de $\mathbb{R}^3$ con respecto al subespacio $\underbrace{\text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T\right\}}_{S_1}$ en la dirección del subespacio $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$. La imagen por Σ del triángulo de vértices $\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}-2 & 1 & -2\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}-2 & -2 & 1\end{bmatrix}^T$ es

a. el triángulo de vértices $\begin{bmatrix}-3 & 4 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}12 & -8 & 9\end{bmatrix}^T$.

b. el triángulo de vértices $\begin{bmatrix}-3 & 0 & -4\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & -3 & -4\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}12 & 12 & 29\end{bmatrix}^T$.

c. el triángulo de vértices $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}4 & -3 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}-8 & 12 & 9\end{bmatrix}^T$. ✗

d. el triángulo de vértices $\begin{bmatrix}1 & 4 & 4\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}4 & 1 & 4\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}-8 & -8 & -11\end{bmatrix}^T$.

La respuesta correcta es:
el triángulo de vértices $\begin{bmatrix}-3 & 4 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}12 & -8 & 9\end{bmatrix}^T$.

$$S_2 = \begin{bmatrix}x_3 - x_2 \\ x_2 \\ x_3\end{bmatrix} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\right\} \qquad B = \left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

$$\left[\Sigma(x)_{S_1 S_2}\right]^B_B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -1\end{bmatrix} \qquad M^{\mathcal{E}}_B = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\-1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{bmatrix} \rightarrow$$

Input

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\-1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}^{-1} \text{ (matrix inverse)}$$

Result

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad M^{\mathcal{E}}_B$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\1 & -1 & 0\\-1 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\-1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & -2 & 2\\2 & 1 & -2\\-2 & -2 & 1\end{pmatrix} = \left[\Sigma_{S_1 S_2}\right]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$$

► Los detalles (Multiplicación de matrices

$$\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -1 & 0\\0 & 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\\1 & -1 & 0\\-1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\-2\\-2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-3\\4\\0\end{bmatrix} \qquad T\left(\begin{bmatrix}-2\\1\\-2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$$T\left(\begin{bmatrix}-2\\-2\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}12\\-8\\9\end{bmatrix}$$

Pregunta **11**
Correcta
Puntúa 1 sobre 1
Marcar pregunta

Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[x], \mathbb{R}^3)$ y sea $[T]^C_B = \begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\1 & 0 & 2\\1 & 1 & 3\end{bmatrix}$ la matriz de T con respecto a las bases

$B = \{\overset{0}{\tfrac{1}{2}(x-1)(x-2)}, \overset{1}{-x(x-2)}, \overset{2}{\tfrac{1}{2}x(x-1)}\}$ de $\mathbb{R}_2[x]$ y $C = \left\{\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Si $S = \text{gen}\{\underbrace{1-x}_{p_1}, \underbrace{1+x}_{p_2}\}$, entonces ...

Seleccione una:

a. $T(S) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}-3\\10\\8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-6\\11\\10\end{bmatrix}\right\}$ ✓

b. $T(S) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}11\\18\\10\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}15\\23\\13\end{bmatrix}\right\}$

c. $T(S) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}7\\12\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}9\\14\\1\end{bmatrix}\right\}$

d. $T(S) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}7\\2\\12\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}9\\1\\14\end{bmatrix}\right\}$

La respuesta correcta es: $T(S) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}-3\\10\\8\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-6\\11\\10\end{bmatrix}\right\}$

$$M^B_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\\1 & \end{bmatrix}$$

$1 = a \sim + b \sim + c \sim$

$x^2 =$

$$[p_1]^B = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} \qquad [p_2]^B = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & -2\\1 & 0 & 2\\1 & 1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 2\\-1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -8\\-1 & 7\\-2 & 12\end{pmatrix}$$

$$T(p_1) = \begin{bmatrix}3\\-1\\-2\end{bmatrix} \qquad T(p_2) = \begin{bmatrix}-9\\21\\18\end{bmatrix}$$

Input interpretation

row reduce	$\begin{pmatrix}3 & -9 & -3 & -6\\-1 & 21 & 10 & 11\\-2 & 18 & 8 & 10\end{pmatrix}$

Result

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \longrightarrow \text{Rta } \boxed{A}$$

Pregunta **3**
Correcta
Puntúa 1,00 sobre 1,00

Sea $y \in C^\infty(\mathbb{R})$ tal que $y'' + 2y' - 35y = 0$.

Seleccione una:

a. $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 \iff \begin{bmatrix}y(0) & y'(0)\end{bmatrix}^T \in \text{gen}\{\begin{bmatrix}1 & -7\end{bmatrix}\}$. ✓

b. $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 \iff \begin{bmatrix}y(0) & y'(0)\end{bmatrix}^T \in \text{gen}\{\begin{bmatrix}1 & 5\end{bmatrix}\}$.

c. $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 \iff \begin{bmatrix}y(0) & y'(0)\end{bmatrix}^T \in \text{gen}\{\begin{bmatrix}1 & -5\end{bmatrix}\}$.

d. $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 \iff \begin{bmatrix}y(0) & y'(0)\end{bmatrix}^T \in \text{gen}\{\begin{bmatrix}1 & 7\end{bmatrix}\}$.

Respuesta correcta
La respuesta correcta es: $\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 \iff \begin{bmatrix}y(0) & y'(0)\end{bmatrix}^T \in \text{gen}\{\begin{bmatrix}1 & -7\end{bmatrix}\}$.

Historial de respuestas

$$L = (D+7)(D-5) \qquad \text{nu}(L) = \{e^{-7x}, e^{5x}\}$$

$$y = a e^{-7x} + \underbrace{b}_{=0} e^{5x} \qquad y(0) = a \qquad y'(0) = -7a \qquad \begin{bmatrix}y(0)\\y'(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\-7a\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}1\\-7\end{bmatrix}$$

$$\lim_{x\to\infty} y = 0 \iff b = 0$$

Guía 3, ej. 1, ej. 2, ej. 3

Sea $(\mathbb{R}^2, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ el $\mathbb{R}$ -espacio euclídeo respecto del cual el triángulo de vértices $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ es un triángulo equilátero de área $\frac{1}{4}$.

El área del triángulo de vértices $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}, \underbrace{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}}_{v_2}$ es

Seleccione una:

a. 1.

b. $\frac{1}{2}$. ✔

c. 2.

d. $\frac{1}{4}$.

La respuesta correcta es: $\frac{1}{2}$.

Area de triángulo $0, v_1, v_2 \Rightarrow A = \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{Det}(G_{gen\{v_1,v_2\}})}$

$B = \left\{\underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}}_{e_2}\right\}$ $\quad G_B = \begin{bmatrix}\|e_1\|^2 & \|e_1\|\|e_2\|\cos\theta \\ \|e_1\|\|e_2\|\cos\theta & \|e_2\|\end{bmatrix}$

triángulo equilátero $\Rightarrow \|e_1\| = \|e_2\|$ y que $\theta = \frac{\pi}{3}$

$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$\det\begin{bmatrix}\|e_1\|^2 & \frac{1}{2}\|e_1\|^2 \\ \frac{1}{2}\|e_1\|^2 & \|e_1\|^2\end{bmatrix} = \frac{1}{4} \Rightarrow \|e_1\|^4 - \frac{1}{4}\|e_1\|^4 = \frac{1}{4}$

$\|e_1\|^4 = \frac{1}{3}$

$\|e_1\| = \sqrt[4]{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$G_B = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}$ $\qquad G_{\{v_1,v_2\}} = \begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix} \to \mathrm{Det} = 1$

$A = \frac{1}{2}\sqrt{1} = \boxed{\frac{1}{2}}$

Pregunta 3

Correcta

Puntúa como 1

Marcar pregunta

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por

$T\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$.

La imagen por T del paralelogramo generado por $3e_1 + 6e_2$ y $6e_1 - 3e_2$ es:

Seleccione una:

a. El segmento de recta que une a los puntos $[4\ \ 5]^T$ y $[3\ \ 0]^T$

b. Ninguna de las otras es correcta

c. El triángulo de vértices $[0\ \ 0]^T$, $[4\ \ 5]^T$ y $[3\ \ 0]^T$

d. El paralelogramo generado por $[4\ \ 5]^T$ y $[3\ \ 0]^T$ ✔

e. El paralelogramo generado por $[5\ \ 4]^T$ y $[0\ \ 3]^T$

La respuesta correcta es: El paralelogramo generado por $[4\ \ 5]^T$ y $[3\ \ 0]^T$

$\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix} \xrightarrow{T} \begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}6\\-3\end{bmatrix} \xrightarrow{T} \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix} \qquad \underbrace{gen\left\{\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}\right\}}_{\to \text{ paralelogramo}}$

Pregunta 12

Correcta

Puntúa como 1,00

Marcar pregunta

En $\mathbb{R}^{2\times 2}$ con el producto interno canónico se considera el subespacio $S = \{X \in \mathbb{R}^{2\times 2} : X^T = X\}$. La distancia de $A = \begin{bmatrix}2 & 3\\3 & 8\end{bmatrix}$ a $S^{\perp}$ es

Seleccione una:

a. $\sqrt{76}$.

b. $\sqrt{118}$.

c. $\sqrt{86}$. ✔

d. 10.

e. Ninguna de las otras es correcta.

La respuesta correcta es: $\sqrt{86}$.

$S = gen\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\}$

$A \in S \to d(A, S^{\perp}) = \|A\|$

$\|A\| = \sqrt{\left[\begin{matrix}2 & 3\\3 & 8\end{matrix}\right]\left[\begin{matrix}2 & 3\\3 & 8\end{matrix}\right]} = \sqrt{4+9+9+64} = \boxed{\sqrt{86}}$

Guía 3, ej. 4, ej. 5, ej. 6

Pregunta 2

Incorrecta

Puntúa como 1,00

Marcar pregunta

En $\mathbb{R}_2[x]$ con el producto interno definido por

$\langle p,q\rangle = \frac{3}{2}\int_{-1}^{1} x^2 p(x)q(x)dx,$

se considera el subespacio $\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(0) = p'(0) = 0\}$.

La proyección de $q(x) = 8x^2 + 3x + 5$ sobre $\mathbb{S}^\perp$ es

Seleccione una:

a. $-7x^2 + 8x + 5$

b. $-\frac{16}{5}x^2 + 3x + 8$

c. Ninguna de las otras es correcta

d. $-7x^2 + 3x + 5$

e. $-\frac{21}{5}x^2 + 8x + 3$ ✗

La respuesta correcta es: $-7x^2 + 3x + 5$

Pregunta 3

Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ los subespacios de $\mathbb{R}^3$ definidos por

$P = a + bx + cx^2 \qquad P(0) = a = 0 \qquad P'(0) = b = 0 \qquad \mathcal{S} = gen\{x^2\}$

$P_{\mathcal{S}}(q) = \dfrac{\langle q, x^2\rangle}{\|x^2\|^2}\, x^2 = \dfrac{\frac{45}{\cancel{7}}}{\frac{3}{\cancel{7}}}\, x^2 = 15x^2 \qquad P_{\mathcal{S}}(q) + P_{\mathcal{S}^\perp}(q) = q$

$P_{\mathcal{S}^\perp}(q) = q - P_{\mathcal{S}}(q) = \boxed{-7x^2 + 3x + 5}$

En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno $\langle \cdot,\cdot \rangle$ definido por

$$\langle x, y\rangle = y^T \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x,$$

el área del triángulo de vértices

$v_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$, $v_2 = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 2 \end{bmatrix}^T$, $v_3 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}^T$

es ...

Seleccione una:

a. $\frac{1}{2}\sqrt{747}$.

b. $\frac{1}{2}\sqrt{450}$. ✓

c. $\frac{1}{2}\sqrt{621}$.

d. $\frac{1}{2}\sqrt{261}$.

La respuesta correcta es: $\frac{1}{2}\sqrt{450}$.

Trasladado al origen $\quad \underbrace{v_2 - v_3}_{u_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underbrace{v_1 - v_3}_{u_2} = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad G_{gen\{u_1, u_2\}} = \begin{bmatrix} 171 & -90 \\ -90 & 50 \end{bmatrix} = 450$

$$\boxed{A = \frac{1}{2}\sqrt{450}}$$

Sea $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{R}$-espacio euclídeo de dimensión 3 y sea $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base ortonormal de $\mathbb{V}$. La matriz de la proyección ortogonal sobre el subespacio $\mathbb{S} = \{u_3\}^\perp$ con respecto a las bases B y $B' = \left\{\frac{1}{10}u_1 + \frac{2}{10}u_2, \frac{2}{10}u_1 - \frac{1}{10}u_2, u_3\right\}$ es

Seleccione una:

a. $[P_{\mathbb{S}}]_B^{B'} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

b. $[P_{\mathbb{S}}]_B^{B'} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

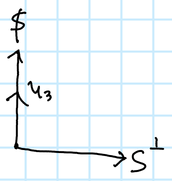
c. $[P_{\mathbb{S}}]_B^{B'} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

d. $[P_{\mathbb{S}}]_B^{B'} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. ✓

e. Ninguna de las otras es correcta.

La respuesta correcta es: $[P_{\mathbb{S}}]_B^{B'} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$[P_{\mathcal{S}}]_B^B = \left[\, \underbrace{P_{\mathcal{S}}(u_1)}_{} \;\; \underbrace{P_{\mathcal{S}}(u_2)}_{} \;\; \underbrace{P_{\mathcal{S}}(u_3)}_{} \,\right] \qquad \mathcal{S} = \{u_3\}^\perp = \{u_1, u_2\}$



$[P_{\mathcal{S}}]_B^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad M_B^{B'} = \left(M_{B'}^{B}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & 0 \\ \frac{2}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$[P_{\mathcal{S}}]_B^{B'} = M_B^{B'}\,[P_{\mathcal{S}}]_B^B = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$

Guía 3, ej. 8

Sea $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{R}$ -espacio euclídeo de dimensión 3, y sea $\{v_1, v_2, v_3\}$ una base ortonormal de $\mathbb{V}$.

La distancia del vector $-2v_1 - 3v_2 + v_3$ al subespacio $\operatorname{gen}\{3v_1 + 3v_2 + 2v_3, 6v_1 + 9v_2 + 2v_3\}$ es ...

Seleccione una:

a. $\frac{\sqrt{29}}{29}$.

b. $\frac{17\sqrt{29}}{29}$.

c. $\frac{5\sqrt{29}}{29}$. ✔

d. $\frac{14\sqrt{29}}{29}$.

Como es base ortogonal, trabajo en $\mathbb{R}^3$

$$\text{gen}\left\{\begin{bmatrix}3\\3\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}6\\9\\2\end{bmatrix}\right\} \qquad \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 3 & 2 \\ 6 & 9 & 2\end{vmatrix} = -12i + 6j + 9k = \begin{bmatrix}-12\\6\\9\end{bmatrix} \qquad S^\perp = \begin{bmatrix}-12\\6\\9\end{bmatrix}$$

$$d(x, S) = \|P_{S^\perp}(x)\| \qquad P_{S^\perp}(x) = \frac{\left\langle \begin{bmatrix}-2\\-3\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-12\\6\\9\end{bmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{bmatrix}-12\\6\\9\end{bmatrix}\right\|^2} \begin{bmatrix}-12\\6\\9\end{bmatrix} = \frac{15}{261}\begin{bmatrix}-12\\6\\9\end{bmatrix}$$

$$\sqrt{\frac{5}{87}\cdot\frac{5}{\cancel{87}_1}\cancel{261}3} = \sqrt{\frac{75}{87}} = \sqrt{\frac{25}{29}}$$

$$= \boxed{\frac{5\sqrt{29}}{29}}$$

La solución por cuadrados mínimos de la ecuación

$$\begin{bmatrix}1 & -0.1\\1 & 0\\1 & 0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\3\\1\end{bmatrix} \text{ es}$$

Seleccione una:

a. $[x_1 \;\; x_2]^T = [\frac{8}{3} \;\; -10]^T$.

b. $[x_1 \;\; x_2]^T = [\frac{8}{3} \;\; 15]^T$.

c. $[x_1 \;\; x_2]^T = [\frac{8}{3} \;\; -5]^T$.

d. Ninguna de las otras es correcta.

e. $[x_1 \;\; x_2]^T = [\frac{8}{3} \;\; -15]^T$. ✔

Pseudoinverse

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -15 & 0 & 15\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{8}{3} & -15\end{bmatrix}^T$$

En $\mathbb{R}^{2\times2}$ con el producto interno

$\langle A, B\rangle = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(B^T A)$

se considera el subespacio

$$\mathbb{S} = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\right\}.$$

Entonces, la distancia de $A = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}$ a $\mathbb{S}$ es:

Seleccione una:

a. $\sqrt{8}$

b. 4

c. $\sqrt{2}$ ✘

d. Ninguna de las otras es correcta

e. 2

$$S^\perp = \left\langle \begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\right\rangle = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\begin{pmatrix}c & d\\a & b\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(c+b) = 0$$

$$c = -b$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{tr}\begin{pmatrix}-c & -d\\a & b\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(-c+b) = 0 \rightarrow b = c$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{tr}\begin{pmatrix}a & b\\-c & -d\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(a-d) = 0 \rightarrow a = d$$

$$\begin{bmatrix}a & 0\\0 & a\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \qquad \frac{\left\langle \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right\|^2}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\left\langle \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix}\right\rangle = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{bmatrix} =$$

$$P_S(A) = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tr}\begin{pmatrix}4 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}} = 2$$

1

sábado, 13 de noviembre de 2021 08:51

$x_1 = -2x_2 - x_3 \qquad \begin{bmatrix}-2x_2-x_3\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

$B = \left\{ \begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\1\\-3\end{bmatrix} \right\}$

$[\Sigma]_{B}^{B} = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix} \qquad M_B^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix}-2&-1&3\\1&0&1\\0&1&-3\end{bmatrix} \qquad M_{\mathcal{E}}^{B} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&0&-1\\3&6&5\\1&2&1\end{bmatrix}$

$[\Sigma]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix}-2&-6&-3\\-1&-1&-1\\3&6&4\end{bmatrix}$

$[\Sigma]\begin{bmatrix}-1\\2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-16\\-3\\17\end{bmatrix} \qquad 1\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix} =$

$$\begin{pmatrix}-2&-6&-3\\-1&-1&-1\\3&6&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&2&2\\2&-1&2\\2&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16&-4&-13\\-3&-3&-3\\17&8&14\end{pmatrix}$$

$S = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \right\} \qquad a = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

$\begin{bmatrix}1&3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} = 0 \to a+3b-c=0 \to 2b-c=0 \to c=2b$

$a+b=0 \to a=-b$

$\begin{bmatrix}-b\\b\\2b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix} = S^{\perp}$

$P = \dfrac{\left\langle \begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}\right\rangle}{\left\|\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}\right\|^2}\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix} = \frac{\cancel{3}^{1}}{\cancel{6}_{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\\2\end{bmatrix}$

$d(a,S) = \|P\| = \sqrt{\frac{1}{\cancel{4}_2}\cancel{6}_3} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$B = \{1, x, x^2\}$

$G_B = \begin{bmatrix}2&0&\frac{2}{3}\\0&\frac{2}{3}&0\\\frac{2}{3}&0&\frac{2}{5}\end{bmatrix} \qquad \phi(1) = 10 \qquad \phi(x) = 3 \qquad \phi(x^2) = 7$

$[\phi]^B$

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix}2&0&\frac{2}{3}&10\\0&\frac{2}{3}&0&3\\\frac{2}{3}&0&\frac{2}{5}&7\end{pmatrix}$

Result

$\begin{pmatrix}1&0&0&-\frac{15}{8}\\0&1&0&\frac{9}{2}\\0&0&1&\frac{165}{8}\end{pmatrix}$

6)

3
3
3

Input

$\begin{pmatrix}\frac{2}{49}&-\frac{3}{49}&\frac{6}{49}\\\frac{3}{49}&\frac{6}{49}&\frac{2}{49}\\-\frac{6}{49}&\frac{2}{49}&\frac{3}{49}\end{pmatrix}^{-1}$ (matrix inverse)

Result

$\begin{pmatrix}2&3&-6\\-3&6&2\\6&2&3\end{pmatrix} = M_C^B$

$[a]^B \quad [b]^B \quad [d]^B$

$C = \{a, b, d\}$

$$\begin{pmatrix}2&2&-1\\2&-1&2\\-1&2&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&3&-6\\-3&6&2\\6&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8&16&-11\\19&4&-8\\4&13&16\end{pmatrix} = \begin{matrix}-3\\15\\33\end{matrix} = \begin{matrix}-1\\5\\11\end{matrix}$$

$[T]\begin{bmatrix}2&-2&1\\2&1&-2\\1&2&2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2&3&-1\\-3&6&-9\\6&2&4\end{bmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2&3&-1\\-3&6&-9\\6&2&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{2}{9}&\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\\frac{-2}{9}&\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\\\frac{1}{9}&\frac{-2}{9}&\frac{2}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{3}&1&\frac{2}{3}\\-3&2&-1\\\frac{4}{3}&\frac{2}{3}&2\end{pmatrix} = [T]$$

$b = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}6 & 54 & -24\end{bmatrix}^T$

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&1&\frac{2}{3}&\frac{6}{9}\\-3&2&-1&\frac{54}{9}\\\frac{4}{3}&\frac{2}{3}&2&-\frac{24}{9}\end{pmatrix}$

Result

$\begin{pmatrix}1&0&1&-2\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$x_1 + x_3 = -2 \to x_1 = -2 - x_3$

$x_2 + x_3 = 0 \to x_2 = -x_3$

$\begin{bmatrix}-2-x_3\\-x_3\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\0\\0\end{bmatrix} + \alpha\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$

$$a\begin{bmatrix}3&0\\0&1\end{bmatrix}+b\begin{bmatrix}1&2\\2&0\end{bmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix}1&0&1\\0&-1&-1\\-1&1&0\end{bmatrix}}^{A}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}5\\3\\2\end{bmatrix}}_{b}$$

es

$$A^T=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&-1&1\\1&-1&0\end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix} A^TA.$$

$$A^T b=\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}$$

Input interpretation

row reduce $\begin{pmatrix}2&-1&1&3\\-1&2&1&-1\\1&1&2&2\end{pmatrix}$

Result

$$\begin{pmatrix}1&0&1&\frac{5}{3}\\0&1&1&\frac{1}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$x_1+x_3=\frac{5}{3}\rightarrow x_1=\frac{5}{3}-x_3$

$x_2+x_3=\frac{1}{3}\rightarrow x_2=\frac{1}{3}-x_3$

$$\begin{bmatrix}\frac{5}{3}-x_3\\\frac{1}{3}-x_3\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{3}\\\frac{1}{3}\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

Input interpretation

$$\begin{vmatrix}2&a&1\\2&4&1\\a&-4&4\end{vmatrix}$$

Result

$a^2-12a+32=0$

$a=4$

$a=8$

$L=D^2+9I$ $\qquad$ $\text{nul}(L)=\{\sin(3x),\cos(3x)\}$ $\qquad$ $A=D^2+9I$

$A\circ L=(D^2+9I)^2$ $\qquad$ $\text{nul}(AL)=\{\sin(3x),\cos(3x),x\sin(3x),x\cos(3x)\}$

$\text{nul}(AL)\setminus L=\{x\sin(3x),x\cos(3x)\}$

$y_p=ax\sin(3x)+bx\cos(3x)$

$D(y_p)=a\sin(3x)+3ax\cos(3x)+b\cos(3x)-3bx\sin(3x)=(a\sin(3x)+b\cos(3x))+x(3a\cos(3x)-3b\sin(3x))$

$\cos(3x)(6a-9bx)-3\sin(3x)(3ax+2b)+9(ax\sin(3x)+bx\cos(3x))$

$\cos(3x)(6a-\cancel{9bx}+\cancel{9bx})+\sin(3x)(\cancel{9ax}-\cancel{9ax}-2b)=\cos(3x)$

$a=\frac{1}{6}$ $\qquad$ $b=0$

$y_p=\frac{1}{6}x\sin(3x)$ $\qquad$ $y=\frac{1}{6}x\sin(3x)+a_0\sin(3x)+a_1\cos(3x)$

$y(0)=a_1=2$

$y'=\underbrace{\frac{1}{6}\sin(3x)}_{=0}+\underbrace{\frac{1}{2}x\cos(3x)}_{=0}+3a_0\underbrace{\cos(3x)}_{1}-3a_1\underbrace{\sin(3x)}_{=0}$ $\qquad$ $y'(0)=3a_0=-3$

$a_0=-1$

$y=\frac{1}{6}\underset{\frac{3\pi}{4}}{x}\underbrace{\sin(3x)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\underbrace{\sin(3x)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}+2\underbrace{\cos(3x)}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{8}\pi-1+2\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi-8+16}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}(\pi+8)}{16}$$

Ejercicio 4.1

lunes, 29 de noviembre de 2021 08:52

1. En cada uno de los siguientes casos, hallar el polinomio característico de la matriz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, analizar si la misma es diagonalizable, y en caso de serlo hallar una matriz inversible $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y una matriz diagonal $\Lambda \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que $A = P\Lambda P^{-1}$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 20 & 3 & 10 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

1)

$$\chi_{A_1} = \operatorname{Det}(A_1 - xI) = \begin{vmatrix} -4-x & -3 & -3 \\ 0 & -1-x & 0 \\ 6 & 6 & 5-x \end{vmatrix} = (-1-x)\begin{vmatrix} -4-x & -3 \\ 6 & 5-x \end{vmatrix} = (-1-x)\big((-4-x)(5-x)+18\big)$$

$$= (-1-x)(x^2 - x - 2)$$

$\lambda = -1$ $\quad \lambda = -1$ $\quad \lambda = 2$

$$\sigma = \{-1, 2\}$$

$$\operatorname{nul}(A_1 + I) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \qquad \operatorname{nul}(A_1 - 2I) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$\mu(-1) = 2$ $\qquad \mu(2) = 1$

Como $\mu(-1) + \mu(2) = 3 \Rightarrow A_1$ es diagonalizable

Con esto armo P_1 y Λ_1.

$$\boxed{P_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}$$

Recordar que podría haber ordenado distinto las columnas (siempre respetando que coincidan los lugares de los autovalores y autovectores) o incluso podría haber usado múltiplos de los vectores de los autoespacios.

2)

$$\chi_{A_2} = \operatorname{Det}(A_2 - xI) = -(x-3)^2(x+2) \qquad \sigma(A_2) = \{-2, 3\}$$

$$\operatorname{nul}(A_2 - 3I) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \qquad \operatorname{nul}(A_2 + 2I) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$\mu(-2) = 1$ $\qquad \mu(3) = 1$

$\mu(-2) + \mu(3) \neq 3 \implies$ $\boxed{A_2 \text{ no es diagonalizable}}$

Ejercicio 4.2

lunes, 29 de noviembre de 2021 10:01

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que tiene autovalores $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5$ con autovectores asociados

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T,$$

respectivamente.

(a) Hallar una base de $\mathrm{nul}(A)$ y una base de $\mathrm{col}(A)$.

(b) Hallar una solución particular de la ecuación $Ax = v_2 + v_3$.

(c) Hallar todas las soluciones de la ecuación $Ax = v_2 + v_3$

(d) Explicar por qué la ecuación $Ax = v_1$ no tiene solución.

: *Si se halla la expresión de A, el ejercicio se auto-destruye y no sirve para nada.*

(a)

decir que el autovalor $\lambda_1 = 0$ tiene a v_1 como autovector asociado es equivalente a decir: $\mathrm{nul}(A - 0I) = \mathrm{nul}(A) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$ si me hubiesen quedado 2 vectores, sabemos por el teorema de la teórica que son Li

Luego recordamos la definición de autovector y autovalores $\Rightarrow A v_i = \lambda_i v_i \longrightarrow \lambda_i v_i \in \mathrm{Col}(A)$ si $\lambda_i \neq 0$: $\mathrm{Col}(A) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$

$$\boxed{B_{\mathrm{nul}(A)} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\} \qquad B_{\mathrm{Col}(A)} = \left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}}$$

(b)

$$\begin{cases} A \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T = 0 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T \\ A \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T = 2 \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T \\ A \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T = 5 \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T \end{cases}$$

$$Ax = v_2 + v_3 \Rightarrow A\left(\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\right) = v_2 + v_3$$

$$\boxed{S_p = \left\{\begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{7}{5} \\ -\frac{7}{10} \end{bmatrix}\right\}}$$

(c)

$$\boxed{\mathrm{Sol}: \begin{bmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{7}{5} \\ -\frac{7}{10} \end{bmatrix} + \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}}$$

(d)

Porque $v_1 \notin \mathrm{Col}(A)$

Ejercicio 4.3

lunes, 29 de noviembre de 2021 23:00

3. Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que

$$\mathrm{nul}(A-3I) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T\right\},$$
$$\mathrm{nul}(A-5I) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\right\}.$$

¿Es única? Si la respuesta es negativa, hallar otra. Si la respuesta es afirmativa, explicar por qué.

Se ve que 3 y 5 son autovalores de A y como $\mu(3)+\mu(5)=4$, A es diagonalizable.

$$A = P\Delta P^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

$$\boxed{A = \begin{bmatrix}4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 4\end{bmatrix}}$$

La matriz es única ya que está definida sobre sus autovectores y autovalores (de cambiar de lugar las columnas de Δ y P llegaría a la misma matriz)

Ejercicio 4.4

lunes, 29 de noviembre de 2021 23:02

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz dependiente de los parámetros reales a, b, c definida por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ c & b & a \end{bmatrix}.$$

(a) Hallar los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $\chi_A(x) = \det(A - xI) = 9x - x^3$. ¿$A$ es diagonalizable? Si la respuesta es afirmativa, hallar una matriz inversible $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ y una matriz diagonal $\Lambda \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tales que $A = P\Lambda P^{-1}$.

(b) Para $c = 0$, hallar y graficar el conjunto de todas las parejas $a, b \in \mathbb{R}$ tales que A es diagonalizable.

(a)

$\chi_A = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ c & b & a-x \end{vmatrix} = -x \begin{vmatrix} -x & 1 \\ b & a-x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ c & a-x \end{vmatrix} = -x\left(-x(a-x) - b\right) + c = -x^3 + ax^2 + bx + c = -x^3 + 9x \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = 9 \\ c = 0 \end{cases}$

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad \chi_A = -x^3 + 9x = x(-x^2 + 9)$ $\quad \sigma(A) = \{0, 3, -3\}$ como son 3 autovalores $\neq$ $\longrightarrow$ A es diagonalizable

$S_{\lambda=0} = \text{nul}(A) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$ $\quad S_{\lambda=3} = \text{nul}(A - 3I) = \text{nul}\left(\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 9 & -3 \end{bmatrix}\right) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}\right\}$ $\quad S_{\lambda=-3} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}\right\}$

$$\boxed{P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 9 & 9 \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}}$$

(b)

$c = 0$. Buscamos a, b / $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & a \end{bmatrix}$ es diagonalizable

$\chi_A(\lambda) = -x^3 + ax^2 + bx = \underset{\lambda = 0}{x}(-x^2 + ax + b)$ $\quad$ Como χ_A debe tener todas sus raíces reales. Es decir: $a^2 - 4(-1)b \geq 0$
$a^2 + 4b \geq 0$

• Si $a^2 + 4b < 0$, A no es diagonalizable $\qquad$ • Si $a^2 + 4b > 0$ vemos:

Si tenemos tres raíces $\neq$, A sera diagonalizable. Si $a^2 + 4b > 0$ tenemos $\left\{ \lambda = 0,\ \lambda_1 = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + 4b}}{-2},\ \lambda_2 = \dfrac{-a - \sqrt{a^2 + 4b}}{-2} \right.$

Rec: $\alpha x^2 + \beta x + \theta = 0$

$x_1 = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\theta}}{2\alpha}$ ≥ 0

$-a - \sqrt{a^2 + 4b} \neq 0$
$-\sqrt{a^2 + 4b} \neq a$
$a^2 + 4b \neq a^2 \iff b \neq 0$

$-a + \sqrt{a^2 + 4b} \neq -a - \sqrt{a^2 + 4b}$
$2\sqrt{a^2 + 4b} \neq 0$

$$\boxed{\text{Si } a^2 + 4b > 0 \text{ y } b \neq 0,\ \chi_A \text{ tiene 3 raíces distintas} \Rightarrow A \text{ es diagonalizable.}}$$

¿Qué pasa si $b = 0$ y $a^2 > 0$ $(a \neq 0)$? $\chi_A(x) = x(-x^2 + ax) = x^2(-x + a)$, $\sigma(A) = \{0 \text{ (doble)}, \underset{\neq 0}{a}\}$

A sera diagonalizable si $\text{Dim}(\text{nul}(A)) = 2$, $\text{nul}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}\right)$ tiene dimensión 1 $\Rightarrow$ A no es diagonalizable en este caso

$$\boxed{\text{Si } b = 0 \text{ y } a^2 > 0\ (a \neq 0),\ A \text{ no es diagonalizable}}$$

Si $a^2 + 4b = 0$, tenemos $\lambda = 0$, $\lambda = \frac{a}{2}$, $\lambda = \frac{a}{2}$:

- Si $a \neq 0$, $\sigma(A) = \{0, \frac{a}{2} \text{ (doble)}\}$ A será diagonalizable $\longleftrightarrow$ $S_{\lambda = \frac{a}{2}}$ tiene dimensión 2

$\text{nul}(A - \frac{a}{2}I) = \text{nul}\left(\begin{bmatrix} -\frac{a}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{a}{2} & 1 \\ c & b & a - \frac{a}{2} \end{bmatrix}\right)$ no tiene dimensión 2 $\Rightarrow$ A no es diagonalizable

$$\boxed{\text{Si } a^2 + 4b = 0,\ a \neq 0 \Rightarrow A \text{ no es diagonalizable}}$$

- Si $a = 0$, $\chi_A(x) = -x^3$, $\sigma(A) = \{0 \text{ (triple)}\}$

A sera diagonalizable $\longleftrightarrow$ $\dim(S_{\lambda=0}) = 3$, $\text{nul}(A) = \text{nul}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$ no tiene dim 3

$$\boxed{\text{Si } a^2 + 4b = 0,\ a = 0 \Rightarrow A \text{ no es diagonalizable}}$$

Ejercicio 4.5

miércoles, 1 de diciembre de 2021 09:28

5. Sea

$$A = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 16 & -1 & 30 \\ -8 & 14 & 12 \\ 8 & 4 & 24 \end{bmatrix}.$$

(a) Hallar y graficar el conjunto de todos los $a_0 \in \mathbb{R}$ tales que la matriz $A + a_0 I$ es inversible.

(b) Hallar y graficar el conjunto de todas las parejas $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ tales que la matrix $A^2 + a_1 A + a_0 I$ es inversible.

(a)

Las matrices inversibles son aquellas que no tienen el 0 como autovalor

$\chi_A(x) = \text{Det}(A - xI) = -x^3 + 3x^2 - 2x = 0$

$\sigma(A) = \{0, 1, 2\}$

$x(-x^2 + 3x - 2x) = 0$

$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 2 \quad \lambda_1 = 1$

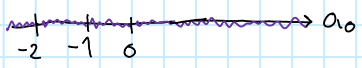
$A + a_0 I$ se puede ver como el polinomio $p(x) = x + a_0$

Vale que $\sigma(p(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$

$p(0) = a_0$

$p(1) = 1 + a_0$

$p(2) = 2 + a_0$



Analizando un caso mas general:

$p(0) = a_0$
$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$
$p(2) = a_0 + 2a_1 + 2^2 a_2 + \dots + 2^n a_n$

Para que sea inversible
$p(0) \neq 0$
$p(1) \neq 0$
$p(2) \neq 0$

¿Se puede decir que $a_0, a_1,$ etc pertenecen a S^c tal que

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \Big/ \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} ?$$

La respuesta es no, $S^c = \mathbb{R}^{n+1} \setminus S$ lo que puede incluir algún caso donde algun $p(\lambda)$ sea igual a 0 y el resto no ya que S solo contempla los casos para que los $p(\lambda)$ sean todos 0, pero puede existir $a_0, a_1,$ etc que hagan 0 a $p(1)$ y $p(2)$ pero no a $P(0)$ y esos no estan incluidos en S.

(b)

$P(x) = x^2 + a_1 x + a_0$

$p(0) = a_0 \neq 0$

$p(1) = 1 + a_1 + a_0 \neq 0$

$p(2) = 4 + 4a_1 + a_0$

Ejercicio 4.6

sábado, 4 de diciembre de 2021 17:59

6. Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ que posea las siguientes propiedades:

(a) $A^2 - 3A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$.

(b) $A^2 - 3A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ y $\det(A) = -1$.

(c) $A^2 - 3A + 2I = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ y $\operatorname{tr}(A) = 6$.

: *Nótese que si* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *y* $p \in \mathbb{C}_m[x] \setminus \operatorname{gen}\{1\}$, *entonces*

$$\sigma(p(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

(a)

$A^2 - 3A + 2I = B$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ $\sigma(B) = \{0, 6\}$ tiene 2 autovalores $\Rightarrow$ B es diagonalizable

Llamamos $P = x^2 - 3x + 2$, $P(A) = B$ Sabemos que $\sigma(P(A)) = P(\sigma(A)) \Longrightarrow$ Si λ es autovalor de A $\Rightarrow p(\lambda)$ es autovalor de $p(A)$

Luego, si λ autovalor de A $\Longrightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \in \sigma(B)$ y los autovectores asociados son los mismos $p(A)v = p(\lambda)v$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 6 \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = 4 \end{cases}$

Hay muchas opciones para $\sigma(A)$:

Ej: $\sigma(A) = \{1, 4\}$

$\sigma(A) = \{1, -1\}$

$\sigma(A) = \{2, 4\}$

$\sigma(A) = \{2, -1\}$

Datos extra:

$Av = \lambda v$ para algún $v \neq \vec{0}$

$A^2 v = A(\underbrace{Av}_{\lambda v}) = \lambda A v = \lambda^2 v$

$(A^2 - 3A)v = A^2 v - 3Av = \lambda^2 v - 3\lambda v = (\lambda^2 - 3\lambda)v$

$A = \underbrace{\begin{bmatrix} \ & \ \\ \ & \ \end{bmatrix}}_{\text{Autovectores de B}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ & \ \\ \ & \ \end{bmatrix}^{-1}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ $\lambda = 0$, $S_{\lambda=0} = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$

$\lambda = 6$, $S_{\lambda=6} = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$A = \ldots$

Cualquier A sirve

$\boxed{A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}}$

(b)

De las opciones anteriores solo sirve la $\sigma(A) = \{1, -1\} \Rightarrow \operatorname{Det}(A) = 1 \cdot (-1) = -1$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\boxed{A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}$

$$\boxed{\begin{gathered} \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(\Lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \\ \operatorname{Det}(A) = \operatorname{Det}(\Lambda) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_n \end{gathered}}$$

(c)

La única posible es $\sigma(A) = \{2, 4\} \Rightarrow \operatorname{tr}(A) = 2 + 4 = 6$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

$\boxed{A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}}$

Ejercicio 4.7

martes, 30 de noviembre de 2021 22:13

7. Dos especies comparten el mismo ecosistema. La primera, la *presa*, se multiplicaría indefinidamente si estuviera sola. La segunda, la *depredadora*, se alimenta de la presa, por lo que si se quedara sola se extinguiría por falta de alimentos. La evolución de la cantidad de individuos de las dos especies x_n, y_n se puede modelar por un sistema de ecuaciones en diferencias,

$$\begin{cases} x_{n+1} = \left(1+\frac{2}{10}\right)x_n - py_n & \text{(ecuación de evolución de la presa)}, \\ y_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \left(1-\frac{4}{10}\right)y_n & \text{(ecuación de evolución de la depredadora)}, \end{cases}$$

donde $p > 0$, que se denomina el *parámetro de predación.*

(**a**) Notar que en la primera ecuación, el coeficiente $1+\frac{2}{10}$ significa que en ausencia de la segunda (i.e., $y_n = 0$), la primera especie crece a una tasa del 20 % por unidad de tiempo; mientras que el coeficiente $-p$ significa que la presencia de la segunda (i.e., $y_n > 0$) contribuye negativamente al crecimiento de la primera.

(**b**) Notar que en la segunda ecuación, el coeficiente $1-\frac{4}{10}$ significa que en ausencia de la primera (i.e. $x_n = 0$), la segunda especie se extingue a una tasa del 40 % por unidad de tiempo; mientras que el coeficiente $\frac{1}{2}$ significa que la presencia de la primera (i.e., $x_n > 0$) contribuye al crecimiento de la segunda: cada pareja de individuos de la primera contribuye a la existencia de un nuevo individuo de la segunda en el siguiente ciclo.

(**c**) Notar que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale que

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 & -p \\ 0.5 & 0.6 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

donde $\begin{bmatrix} x_0 & y_0 \end{bmatrix}$ representa las cantidades iniciales de individuos de las dos especies.

(**d**) Hallar los valores de p para los cuales la matriz del sistema resulta diagonalizable.

(**e**) Para cada $p \in \{0.175, 0.16, 0.1\}$ analizar el comportamiento a largo plazo de las dos especies.

(d)

$A = \begin{bmatrix} 1,2 & -p \\ 0,5 & 0,6 \end{bmatrix}$ $\quad \chi_A(x) = x^2 - 1,8x + 0,72 + 0,5p$

$$\frac{1,8 \pm \sqrt{3,24 - 4 \cdot 1 \cdot (0,72+0,5p)}}{2} \begin{cases} \to \dfrac{1,8+\sqrt{0,36-2p}}{2} \\ \to \dfrac{1,8-\sqrt{0,36-2p}}{2} \end{cases}$$

Como $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ analizamos los casos en que $0,36-2p>0$ y $0,36-2p=0$

Caso 1: $(0,36-2p>0)$

$0,36-2p>0 \Rightarrow p<0,18 \longrightarrow \sigma(A) = \left\{ \dfrac{1,8+\sqrt{0,36-2p}}{2}, \dfrac{1,8-\sqrt{0,36-2p}}{2} \right\}$ Es diagonalizable porque tiene 2 autovalores distintos.

Caso 2: $(0,36-2p=0)$

$0,36-2p=0 \Rightarrow p=0,18 \longrightarrow \sigma(A) = \{0,9\} \longrightarrow A = \begin{bmatrix} 1,2 & -0,18 \\ 0,5 & 0,6 \end{bmatrix}$

$\text{nul}(A-0,9I) = \text{nul}\left(\begin{bmatrix} 1,2-0,9 & -0,18 \\ 0,5 & 0,6-0,9 \end{bmatrix}\right) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 0,6 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ No es diagonalizable porque $\mu(0,9) = 1 < 2$

$\boxed{A \text{ es diagonalizable si } 0<p<0,18}$

(e)

(1) $p = 0,175$ $\quad A = \begin{bmatrix} 1,2 & -0,175 \\ 0,5 & 0,6 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0,573 & 0,452 \\ 0,819 & 0,904 \end{bmatrix}$, $\Delta = \begin{bmatrix} 0,95 & 0 \\ 0 & 0,85 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \begin{bmatrix} 6,11 & -3,05 \\ -5,54 & 3,87 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = P\Delta^n P^{-1} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,573 & 0,452 \\ 0,819 & 0,904 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,95 & 0 \\ 0 & 0,85 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 6,11 & -3,05 \\ -5,54 & 3,87 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,573 & 0,452 \\ 0,819 & 0,904 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,95 & 0 \\ 0 & 0,85 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 6,11a_0 - 3,05b_0 \\ -5,54a_0 + 3,87b_0 \end{bmatrix}$$

$$= (0,95)^n (6,11a_0 - 3,05b_0) \begin{bmatrix} 0,573 \\ 0,819 \end{bmatrix} + (0,85)^n (-5,54a_0 + 3,87b_0) \begin{bmatrix} 0,452 \\ 0,904 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} A^n \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{(0,95)^n}_{\to 0} (6,11a_0 - 3,05b_0) \begin{bmatrix} 0,573 \\ 0,819 \end{bmatrix} + \underbrace{(0,85)^n}_{\to 0} (-5,54a_0 + 3,87b_0) \begin{bmatrix} 0,452 \\ 0,904 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} A^n \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

(2) $p = 0,16$ $\quad A = \begin{bmatrix} 1,2 & -0,16 \\ 0,5 & 0,6 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0,62 & 0,38 \\ 0,78 & 0,97 \end{bmatrix}$, $\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,8 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \begin{bmatrix} 3,18 & -1,24 \\ -2,55 & 2,03 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = P\Delta^n P^{-1} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = 1^n (3,18a_0 - 1,24b_0) \begin{bmatrix} 0,62 \\ 0,78 \end{bmatrix} + (0,8)^n (-2,55a_0 + 2,03b_0) \begin{bmatrix} 0,38 \\ 0,97 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{1^n}_{\to 1} (3,18a_0 - 1,24b_0) \begin{bmatrix} 0,62 \\ 0,78 \end{bmatrix} + \underbrace{(0,8)^n}_{\to 0} (-2,55a_0 + 2,03b_0) \begin{bmatrix} 0,38 \\ 0,97 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{si } 3,18a_0 - 1,24b_0 = 0, \ \lim_{n\to\infty} A^n \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$

$\boxed{\text{si } 3,18a_0 - 1,24b_0 > 0, \ \lim_{n\to\infty} A \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = (3,18a_0 - 1,24b_0) \begin{bmatrix} 0,62 \\ 0,78 \end{bmatrix}}$

(3) $p = 0,1$ $\quad A = \begin{bmatrix} 1,2 & -0,1 \\ 0,5 & 0,6 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0,70 & 0,23 \\ 0,70 & 1,17 \end{bmatrix}$ $\Delta = \begin{bmatrix} 1,1 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{bmatrix}$ $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1,76 & -0,35 \\ -1,06 & 1,06 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = P\Delta^n P^{-1} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = (1,1)^n (1,76a_0 - 0,35b_0) \begin{bmatrix} 0,70 \\ 0,70 \end{bmatrix} + (0,7)^n (-1,06a_0 + 1,06b_0) \begin{bmatrix} 0,23 \\ 1,17 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{(1,1)^n}_{\to \infty} (1,76a_0 - 0,35b_0) \begin{bmatrix} 0,70 \\ 0,70 \end{bmatrix} + \underbrace{(0,7)^n}_{\to 0} (-1,06a_0 + 1,06b_0) \begin{bmatrix} 0,23 \\ 1,17 \end{bmatrix}$$

$\boxed{\text{si } 1,76a_0 - 0,35b_0 = 0, \ \lim_{n\to\infty} A^n \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$

$\boxed{\text{si } 1,76a_0 - 0,35b_0 > 0, \ \lim_{n\to\infty} A^n \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +\infty \\ +\infty \end{bmatrix}}$

Ejercicio 4.8

sábado, 4 de diciembre de 2021 19:38

8. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definida por

$$A = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

(a) Hallar el espectro de A y comprobar que A es diagonalizable.

(b) Usando la descomposición espectral de A comprobar que existe $M \in \mathbb{R}^+_*$ tal que

$$\|A^n - G_1\|_F \leq M\left(\frac{3+\sqrt{2}}{10}\right)^n,$$

donde G_1 es la matriz de la proyección sobre $\mathrm{nul}(A-I)$ en la dirección de $\mathrm{col}(A-I)$. Utilizar este resultado para concluir que

$$\lim_{n\to\infty} A^n = G_1.$$

Analizar cómo se comporta A^n

1) A es diagonalizable

2) Teorema espectral $A = \sum_i \lambda_i G_i$

$A^n = \sum_i \lambda_i^n G_i$

(a)

$$\chi_A(x) = -x^3 + 1{,}6x^2 - 0{,}67x + 0{,}07$$
$$= -(x-1)\left(x^2 - \tfrac{3}{5}x + \tfrac{7}{100}\right)$$

$$1 \qquad \frac{\frac{3}{5} \pm \sqrt{\frac{9}{25} - 4\cdot\frac{7}{100}}}{2} = \frac{3\pm\sqrt{2}}{10}$$

$$\sigma(A) = \left\{1, \frac{3+\sqrt{2}}{10}, \frac{3-\sqrt{2}}{10}\right\} \rightarrow A \text{ es diagonalizable}$$

(b)

$$A^n = 1^n G_1 + \left(\frac{3+\sqrt{2}}{10}\right)^n G_2 + \left(\frac{3-\sqrt{2}}{10}\right)^n G_3$$

G_j es la proyección definida sobre $\mathrm{nul}(A-\lambda_j I)$ en la dirección de $\mathrm{col}(A-\lambda_j I)$

$$A^n - G_1 = \left(\frac{3+\sqrt{2}}{10}\right)^n G_2 + \left(\frac{3-\sqrt{2}}{10}\right)^n G_3$$

$$\|A^n - G_1\|_F = \left\|\left(\frac{3+\sqrt{2}}{10}\right)^n G_2 + \left(\frac{3-\sqrt{2}}{10}\right)^n G_3\right\|_F \leq \left(\frac{3+\sqrt{2}}{10}\right)^n \|G_2\|_F + \left(\frac{3-\sqrt{2}}{10}\right)^n \|G_3\|_F$$

$$\lambda \in \mathbb{R}: \begin{cases} |\lambda| > 1 \Rightarrow |\lambda|^n \to \infty \\ |\lambda| < 1 \Rightarrow |\lambda|^n \to 0 \\ |\lambda| = 1 \to 1^n = 1,\ (-1)^n \in \{-1, 1\} \end{cases}$$

Como $0 < \left(\frac{3-\sqrt{2}}{10}\right)^n < \left(\frac{3+\sqrt{2}}{10}\right)^n$

$$\|A^n - G_1\|_F \leq \left(\frac{3+\sqrt{2}}{10}\right)^n \underbrace{\left(\|G_2\|_F + \|G_3\|_F\right)}_{M} \Longrightarrow \boxed{\|A^n - G_1\|_F \leq M\left(\frac{3+\sqrt{2}}{10}\right)^n}$$

Como $\|A^n - G_1\|_F \geq 0$, $\quad 0 \leq \|A^n - G_1\|_F \leq M\left(\frac{3+\sqrt{2}}{10}\right)^n$

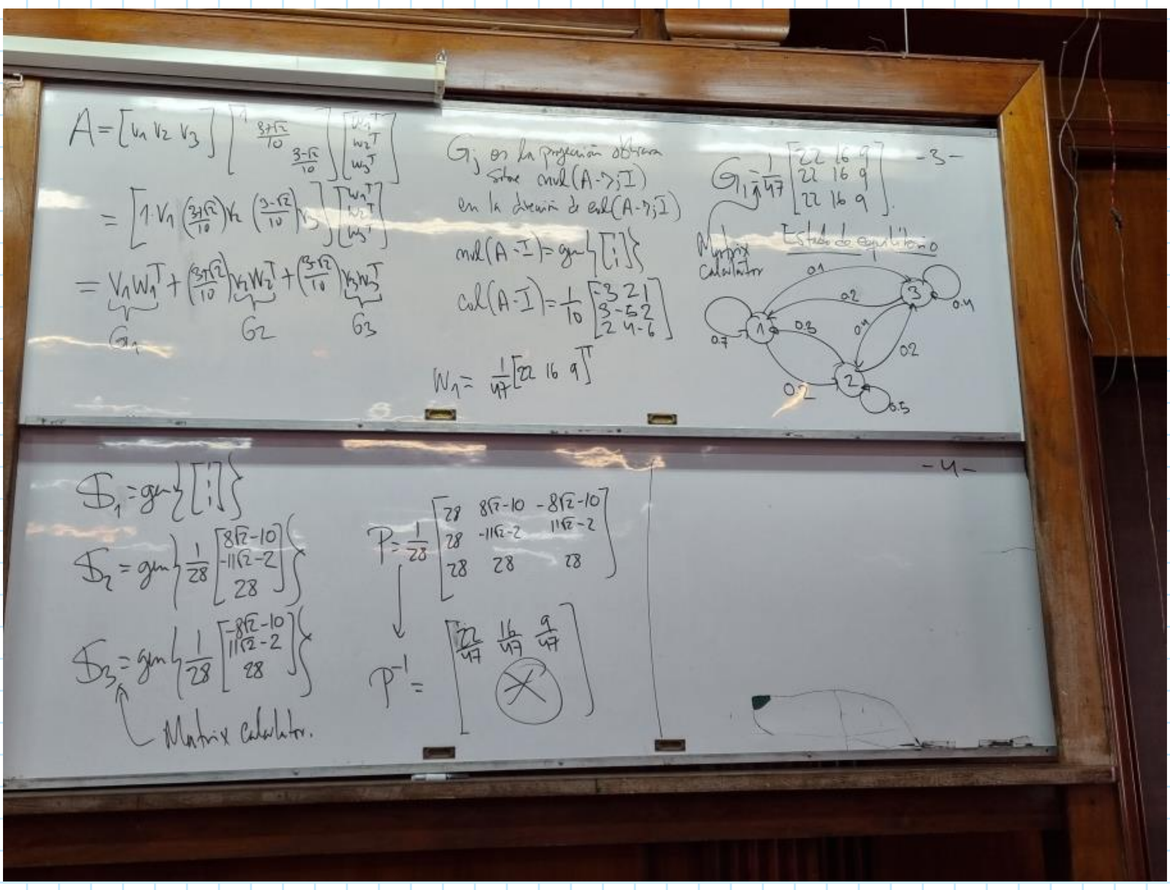
Tomo lím: $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \|A^n - G_1\|_F \leq \lim\limits_{n\to\infty} M\left(\frac{3+\sqrt{2}}{10}\right)^n = 0$

$0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} \|A^n - G_1\|_F \leq 0$ por propiedad del sandwich. $\lim\limits_{n\to\infty} \|A^n - G_1\|_F = 0$

Esto significa que:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} A^n = G_1}$$

Si quisiera encontrar G_1, G_2, G_3 y M:



Ejercicio 4.9

domingo, 5 de diciembre de 2021 17:25

9. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definida por

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 & 6 & 6 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Comprobar que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|A^n\|_F}{2^n} > 0$$

y concluir que no existe $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$.

(b) Comprobar que el conjunto $\left\{x \in \mathbb{R}^3 : \lim\limits_{k\to\infty} A^n x = 0\right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y hallar una base del mismo.

(c) Comprobar que el conjunto $\mathbb{S} = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : \text{existe } \lim\limits_{k\to\infty} A^n x\right\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y hallar una base del mismo.

(d) Comprobar que $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T \in \left\{\lim\limits_{k\to\infty} A^n x : x \in \mathbb{S}\right\}$ y hallar todas las soluciones de la ecuación $\lim\limits_{k\to\infty} A^n x = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T$.

(a)

$$\sigma(A) = \left\{2, 1, \tfrac{1}{2}\right\} \qquad S_{\lambda=2} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\},\ S_{\lambda=1} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\},\ S_{\lambda=\frac{1}{2}} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$P = \begin{array}{c} x_1 \\ \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \Delta = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{array}{c} y_1^T \\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array} \quad G_1 = x_1 y_1^T$$

$$G_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\|G_1\|_F = \sqrt{15}$$

$$A^n = 2^n G_1 + 1^n G_2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n G_3$$

$$\|A^n\|_F = \left\|2^n G_1 + 1^n G_2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n G_3\right\|_F = 2^n \left\|G_1 + \frac{1}{2^n} G_2 + \frac{1}{2^{2n}} G_3\right\|_F$$

Como: $2^n \left\|G_1 + \frac{1}{2^n} G_2 + \frac{1}{2^{2n}} G_3\right\|_F \geq 2^n \|G_1\|_F \geq 2^n \left(\|G_1\|_F - \left\|\frac{1}{2^n} G_2 + \frac{1}{2^{2n}} G_3\right\|_F\right)$

$$\|A^n\|_F \geq 2^n \left(\|G_1\|_F - \left\|\frac{1}{2^n} G_2 + \frac{1}{2^{2n}} G_3\right\|_F\right)$$

$$\frac{\|A^n\|_F}{2^n} \geq \|G_1\|_F - \left\|\frac{1}{2^n} G_2 + \frac{1}{2^{2n}} G_3\right\|_F \longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\|A^n\|_F}{2^n} \geq \|G_1\|_F = \sqrt{15} \longrightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\|A^n\|}{2^n} > 0}$$

b)

b) Con álgebra de limites no es difícil ver que s un subespacio. Y la base viene dada por las columnas de todas las X_i que correspondan a autovalores con módulo menor a 1. Es decir, el subespacio no es más que la suma de los autoespacios asociados a los autovalores de módulo menor a 1

$$\boxed{B_S = \left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$$

Ejercicio 4.10

jueves, 9 de diciembre de 2021 00:47

10. Hallar la forma de Jordan de las siguientes matrices:

$$A_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 & 8 & 6 \\ -5 & 22 & 9 \\ 4 & -12 & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 9 & 2 & 3 \\ 1 & 10 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix},\ A_3 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 9 & 6 & 7 \\ 1 & 10 & 3 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

A_1

$\chi_{A_1}(x) = -x^3 + 7x^2 - 16x + 12 = -12\left(\frac{1}{3}x - 1\right)\left(\frac{1}{2}x - 1\right)^2$ $\quad \sigma(A_1) = \{2 \text{ (doble)}, 3\}$

$\text{nul}(A_1 - 3I) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix}\right\}$ $\quad \text{nul}(A_1 - 2I) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ $\quad$ llamo $N = A_1 - 2I$

$m(2) = 2 > \mu(2) = 1$

Selecciono un $v \in \text{nul}(N^2) \setminus \text{nul}(N) \Rightarrow v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ La cadena de Jordan para este caso $\{Nv, v, u\}$ siendo $u \in \text{nul}(A_1 - 3I)$, $u = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix}$

$\{Nv, v, u\} = \left\{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix}}_{v_3}\right\}$ $\quad P = [v_1\ v_2\ v_3]$ $\quad J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$\boxed{A_1 = PJP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -6 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}^{-1}}$$

A_2

$\chi_{A_2}(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8$ $\quad \sigma(A_2) = \{2\}$ $\quad m(2) = 3$ $\quad \text{nul}(A_2 - 2I) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ $\quad \mu(2) = 2$

$N = A_2 - 2I = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ $\quad N^2 = 0$, N es una matriz nilpotente de índice 2

Seleccionamos un vector $v \notin \text{nul}(N)$, $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, Luego $Nv = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$, Por último un vector $u \in \text{nul}(N) \setminus \text{gen}\{Nv\}$, $u = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\{Nv, v, u\} = \left\{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_3}\right\}$ $\quad P = [v_1\ v_2\ v_3]$ $\quad J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

5.2. $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ **tal que** $\sigma(A) = \{\lambda\}$, $m(\lambda) = 3$ **y** $\mu(\lambda) = 2$.

La construcción es similar a la anterior.

Ponemos $N = A - \lambda I$ y observamos que $\sigma(N) = \{0\}$, $N^3 = 0$ porque la multiplicidad algebraica de 0 es 3 y que $\dim(\text{nul}(N)) = 2$. En este caso, $N^2 = 0$.

Veamos por qué.

Elegimos una base $\{w_1, w_2\}$ de $\text{nul}(N)$ y la extendemos a una base de $\mathbb{R}^3$, digamos $\{w_1, w_2, w_3\}$. El teorema de la dimensión garantiza que $\{Nw_3\}$ es una base de $\text{col}(N)$, motivo por el cual

$$N(Nw_3) = \tilde{\lambda} N w_3,$$

para algún $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}$. Como $Nw_3 \neq 0$, tenemos que $\tilde{\lambda} \in \sigma(N) = \{0\}$. En consecuencia $N^2 w_3 = 0$. Esto implica que $N^2 = 0$ porque $N^2 w_1 = N^2 w_2 = 0$ debido a que $\{w_1, w_2\} \subset \text{nul}(N)$.

Tenemos así que $N^2 = 0$ pero $N \neq 0$.

- Seleccionamos un vector
$$v_2 \notin \text{nul}(N)$$
y definimos
$$v_1 := Nv_2.$$
De este modo tenemos que v_1 es un autovector de N, correspondiente al autovalor 0. Los argumentos desarrollados en la secciones 4.2 y 4.3 muestran que el conjunto $\{v_1, v_2\}$ es linealmente independiente.
- Seleccionamos un vector
$$v_3 \in \text{nul}(N) \setminus \text{gen}\{v_1\}.$$
Este vector existe porque $\dim(\text{nul}(N)) = 2$.
- Por construcción, el conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ que satisface las siguientes propiedades:
$$Nv_1 = 0 \iff (A - \lambda I)v_1 = 0 \iff Av_1 = \lambda v_1,$$
$$Nv_2 = v_1 \iff (A - \lambda I)v_2 = v_1 \iff Av_2 = v_1 + \lambda v_2,$$
$$Nv_3 = 0 \iff (A - \lambda I)v_3 = 0 \iff Av_3 = \lambda v_3.$$

Matricialmente, esto significa que

$$A\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Poniendo $P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$ se obtiene el resultado anunciado en (7).

$$\boxed{A = PJP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}}$$

A_3

$\chi_{A_3}(x) = -(x-2)^3$ $\quad \sigma(A_3) = \{2\}$, $m(2) = 3$ $\quad \text{nul}(A - 2I) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ $\quad \mu(2) = 1$

$N = A - 2I = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, $N^3 = 0$, N es una matriz nilpotente de índice 3

Seleccionamos un vector $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \text{nul}(N^2)$, $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ y armamos la cadena de Jordan $\{N^2v, Nv, v\} = \left\{\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{v_1}, \underbrace{\begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}}_{v_2}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_3}\right\}$

5.3. $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ **tal que** $\sigma(A) = \{\lambda\}$, $m(\lambda) = 3$ **y** $\mu(\lambda) = 1$.

Argumentos similares a los desarrollados en la sección anterior muestran que en este caso $(A - \lambda I)^3 = 0$ pero $(A - \lambda I)^2 \neq 0$.

- Seleccionamos un vector
$$v_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \text{nul}(A - \lambda I)^2$$
y definimos
$$v_2 := (A - \lambda I)v_3,$$
$$v_1 := (A - \lambda I)v_2 = (A - \lambda I)^2 v_3.$$
De este modo tenemos que v_1 es un autovector de A, correspondiente al autovalor λ.
Como antes, también se puede demostrar que el conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente. (Queda como ejercicio o para trabajar en el Discord si hay interés.)
- Por construcción, el conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ que satisface las siguientes propiedades:
$$Av_1 = \lambda v_1,$$
$$Av_2 = v_1 + \lambda v_2$$
$$Av_3 = v_2 + \lambda v_3$$

Matricialmente, esto significa que

$$A\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Poniendo $P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$ se obtiene el resultado anunciado en (8).

$$\boxed{A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}^{-1}}$$

Ejercicio 4.11

jueves, 9 de diciembre de 2021 15:57

11. Determinar cuáles de las siguientes parejas de matrices A_1 y A_2 son semejantes, y en caso de serlo hallar B inversible tal que $A_1 = BA_2B^{-1}$:

(a) $A_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 & 8 & 6 \\ -5 & 22 & 9 \\ 4 & -12 & 0 \end{bmatrix}$, $A_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 18 & -13 & -57 \\ -2 & 13 & 9 \\ 2 & -3 & -3 \end{bmatrix}$.

(b) $A_1 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -6 & 10 & 6 \\ 5 & -10 & 3 \end{bmatrix}$, $A_2 = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6 & -5 & 4 \\ 8 & 22 & -12 \\ 6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$.

(a)

A_1 y A_2 son semejantes si tienen la misma forma de Jordan

$\chi_{A_1}(x) = -(x-3)(x-2)^2 \quad \sigma(A_1) = \{2, 3\} \quad m(2) = 2 \qquad \mathrm{nul}(A_1 - 2I) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \quad \mu(2) = 1 \Rightarrow J_{A_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\chi_{A_2}(x) = -(x-3)(x-2)^2 \quad \sigma(A_2) = \{2, 3\} \quad m(2) = 2 \qquad \mathrm{nul}(A_2 - 2I) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \quad \mu(2) = 1 \Rightarrow J_{A_2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$J_{A_1} = J_{A_2} = J$, A_1 y A_2 son semejantes

Además que $A_1 = P_1 J P_1^{-1}$ y $A_2 = P_2 J P_2^{-1} \Rightarrow P_2^{-1} A_2 P_2 = J \Rightarrow A_1 = \underbrace{(P_1 P_2^{-1})}_{B} A_2 \underbrace{(P_2 P_1^{-1})}_{B^{-1}}$

Averiguo P_1:

$N_1 = A_1 - 2I$, elijo $v \in \mathrm{nul}(N^2) \setminus \mathrm{nul}(N)$ y $u \in \mathrm{nul}(A_1 - 3I) \Rightarrow v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $u = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}$

$\{N_1 v, v, u\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}\right\}$, $\quad P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

Averiguo P_2:

$N_2 = A_2 - 2I$, elijo $v \in \mathrm{nul}(N^2) \setminus \mathrm{nul}(N)$ y $u \in \mathrm{nul}(A_2 - 3I) \Rightarrow v = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $u = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\{N_2 v, v, u\} = \left\{\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$, $\quad P_2 = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 3 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Busco B y B^{-1}:

$B = P_1 P_2^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -5 & -12 \\ 5 & -10 & -21 \\ -3 & 7 & 10 \end{bmatrix}$

$$\boxed{B = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 & -5 & -12 \\ 5 & -10 & -21 \\ -3 & 7 & 10 \end{bmatrix}}$$

(b)

$\chi_{A_1}(x) = -x^3 + \frac{9x^2}{2} - 11x + 12 \quad \sigma(A_1) = \left\{2, \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{71}}{4}i, \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{71}}{4}i\right\} \Rightarrow J_{A_1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & \frac{\sqrt{71}}{4} & 0 \\ -\frac{\sqrt{71}}{4} & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$\chi_{A_2}(x) = -x^3 + 7x^2 - 16x + 12 \quad \sigma(A_2) = \{\underset{m(2)=2}{2}, 3\}$, $\mathrm{nul}(A - 2I) = \mathrm{gen}\underset{\mu(2)=1}{\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}} \Rightarrow J_{A_2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\boxed{A_1 \text{ y } A_2 \text{ no son semejantes}}$

Ejercicio 4.12

jueves, 9 de diciembre de 2021 22:59

12. Comprobar que las siguientes matrices son semejantes

$$A_0 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix},$$

y hallar matrices inversibles $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tales que

$$A_1 = B_1 A_0 B_1^{-1} \text{ y } A_2 = B_2 A_0 B_2^{-1}.$$

$$\left.\begin{array}{l} A_0 = P_0 J P_0^{-1} \to J = P_0^{-1} A_0 P_0 \\ A_1 = P_1 J P_1^{-1} \\ A_2 = P_2 J P_2^{-1} \end{array}\right\} \quad A_1 = \underbrace{P_1 P_0^{-1}}_{B_1} A_0 \underbrace{P_0 P_1^{-1}}_{B_1^{-1}} \ , \quad A_2 = \underbrace{P_2 P_0^{-1}}_{B_2} A_0 \underbrace{P_0 P_2^{-1}}_{B_2^{-1}}$$

$\chi_{A_0}(x) = x^2 - 4x + 13$, $\sigma(A_0) = \{2-3i, 2+3i\}$, Busco el autoespacio asociado a algún λ $(2+3i) \Rightarrow \text{nul}(A_0 - (2+3i)) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$$\sigma_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \chi_A(\lambda) = 0\} = \{a + ib, a - ib\},$$

y como $a + ib \neq a - ib$ porque $b \neq 0$, la matriz A es diagonalizable en $\mathbb{C}^2$ porque existe una base de $\mathbb{C}^2$ compuesta por autovectores de A. Veamos las características de ese tipo de base de $\mathbb{C}^2$.

Primero consideramos el autovector $z \in \mathbb{C}^2$ correspondiente al autovalor $\lambda = a + ib$. Separando sus partes reales e imaginarias, el autovector z puede escribirse en la forma $z = x + iy$, con $x, y \in \mathbb{R}^2$. Como $A(x + iy) = (a + ib)(x + iy)$ cuando separarmos partes reales e imaginarias obtenemos que

$$Ax = ax - by \quad \text{y} \quad Ay = bx + ay. \tag{1}$$

En efecto, por un lado tenemos que $A(x + iy) = Ax + iAy$, y por el otro tenemos que $(a + ib)(x + iy) = ax - by + i(bx + ay)$.

Esto significa que

$$\begin{aligned} A\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Ax & Ay \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ax - by & bx + ay \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$\underbrace{2}_{a} + \underbrace{3}_{b}i$, $\begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{y} i \Rightarrow P_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$\chi_{A_1}(x) = x^2 - 4x + 13$, $\sigma(A_1) = \{2-3i, 2+3i\}$, Busco el autoespacio asociado a algún λ $(2+3i) \Rightarrow \text{nul}(A_1 - (2+3i)) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$\underbrace{2}_{a} + \underbrace{3}_{b}i$, $\begin{bmatrix} 2-2i \\ 2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{y} i \Rightarrow P_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$\chi_{A_2}(x) = x^2 - 4x + 13$, $\sigma(A_2) = \{2-3i, 2+3i\}$, Busco el autoespacio asociado a algún λ $(2+3i) \Rightarrow \text{nul}(A_2 - (2+3i)) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} \frac{4}{5} + \frac{3i}{5} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$\underbrace{2}_{a} + \underbrace{3}_{b}i$, $\begin{bmatrix} 4+3i \\ 5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{y} i \Rightarrow P_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

Averiguamos B_1 y B_2:

$B_1 = P_1 P_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$B_2 = P_2 P_0^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

$$\boxed{B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}}$$

Ejercicio 4.13

sábado, 11 de diciembre de 2021 15:20

13. Para cada una de las siguientes matrices $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, hallar un conjunto fundamental de soluciones del sistema $Y' = AY$, resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

y analizar su comportamiento asintótico:

$$\textbf{(a)}\ A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \textbf{(b)}\ A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \textbf{(c)}\ A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ejemplo 1.1 (Caso diagonal). El sistema tiene la forma

$$Y' = \Lambda Y, \tag{3}$$

donde $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Decir que $Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T$ es solución del sistema (3) equivale a decir que para cada $j \in \mathbb{I}_n$ vale que

$$y_j' = \lambda_j y_j. \tag{4}$$

Como las soluciones de las ecuaciones diferenciales (4) son de la forma

$$y_j = c_j e^{\lambda_j t}, \text{ con } c_j \in \mathbb{R},$$

tenemos que las soluciones del sistema (3) son de la forma

$$Y(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} & c_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots & c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}^T = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} e_j,$$

con $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ y $e_1, e_2, \dots, e_n$ los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Esto nos permite concluir que

$$\{Y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : Y' = \Lambda Y\} = \operatorname{gen}\{e^{\lambda_1 t} e_1, e^{\lambda_2 t} e_2, \dots, e^{\lambda_n t} e_n\}.$$

(a)

$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ $\quad \chi_A(x) = x^2 + 4x + 3, \quad \sigma(A) = \{-3, 1\}$ $\quad \operatorname{nul}(A + 3I) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ $\quad \operatorname{nul}(A - I) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

A es diagonalizable

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

1.3. Caso diagonalizable.

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz diagonalizable, existe una base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ compuesta por autovectores de A correspondientes a n autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$: $Av_j = \lambda_j v_j$ para cada $j \in \mathbb{I}_n$. Considerando las matrices

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

tenemos que P es inversible y que $A = P\Lambda P^{-1}$. Factorizando A y reagrupando términos podemos escribir

$$Y' = AY \iff Y' = (P\Lambda P^{-1})Y \iff P^{-1}Y' = \Lambda P^{-1} Y$$
$$\iff (P^{-1}Y)' = \Lambda (P^{-1}Y).$$

Esto significa que Y es solución del sistema $Y' = AY$ si, y sólo si, $Z = P^{-1}Y$ es solución del sistema diagonal $Z' = \Lambda Z$. Utilizando el resultado del Ejemplo 1.1, la solución general del sistema $Z' = \Lambda Z$ es

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} e_j.$$

En consecuencia, la solución general del sistema $Y' = AY$ es

$$Y = PZ = P\left(\sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} P e_j = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} v_j.$$

En particular $\{e^{\lambda_1 t} v_1, e^{\lambda_2 t} v_2, \dots, e^{\lambda_n t} v_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones del sistema $Y' = AY$.

Conjunto fundamental de soluciones: $\left\{ e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e^{-3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ $\qquad Y_0 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

$$y(t) = c_1 e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow y(0) = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Y_0 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = P^{-1} Y_0$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - y_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{y(t) = (y_1 - y_2)e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y_2 e^{-3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$\lim_{t\to+\infty} y(t)$ $\begin{cases} \to \text{no acotado si } (y_1 - y_2) \neq 0 \\ \to = 0 \text{ si } (y_1 - y_2) = 0 \end{cases}$

(b)

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ $\quad$ conjunto fundamental de soluciones: $\left\{ e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e^{-3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = P^{-1} Y_0 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - \frac{1}{2}y_2 \\ \frac{1}{2}y_2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{y(t) = (y_1 - \tfrac{1}{2}y_2)e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2}y_2 e^{-3t}}$$

$\lim_{t\to+\infty} y(t)$ $\begin{cases} \to \text{no acotado si } (y_1 - \frac{1}{2}y_2) \neq 0 \\ \to = 0 \text{ si } (y_1 - \frac{1}{2}y_2) = 0 \end{cases}$

(c)

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad$ Conjunto fundamental de soluciones: $\left\{ e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e^{3t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{y(t) = (y_1 + y_2)e^{t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y_2 e^{3t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$\lim_{t\to+\infty} y(t) \longrightarrow$ no acotado si $(y_1 + y_2) \neq 0 \lor y_2 \neq 0$, caso contrario $= 0$

Ejercicio 4.14

sábado, 11 de diciembre de 2021 16:28

14. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Hallar un conjunto fundamental de soluciones del sistema $Y' = AY$.

(b) Resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

y analizar su comportamiento asintótico.

(a)

$\chi_A(x) = -x^3 + 3x \qquad \sigma(A) = \{0, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\} \qquad \mathrm{nul}(A) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}, \ \mathrm{nul}(A+\sqrt{3}) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 3 \end{bmatrix}\right\}, \ \mathrm{nul}(A-\sqrt{3}) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{Conjunto fundamental de soluciones: } \left\{ e^{\sqrt{3}t}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e^{-\sqrt{3}t}\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 3 \end{bmatrix} \right\}}$$

Ejemplo 1.1 (Caso diagonal). El sistema tiene la forma

$$Y' = \Lambda Y, \tag{3}$$

donde $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Decir que $Y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^T$ es solución del sistema (3) equivale a decir que para cada $j \in \mathbb{I}_n$ vale que

$$y_j' = \lambda_j y_j. \tag{4}$$

Como las soluciones de las ecuaciones diferenciales (4) son de la forma

$$y_j = c_j e^{\lambda_j t}, \text{ con } c_j \in \mathbb{R},$$

tenemos que las soluciones del sistema (3) son de la forma

$$Y(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} & c_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots & c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}^T = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} e_j,$$

con $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ y $e_1, e_2, \dots, e_n$ los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Esto nos permite concluir que

$$\{Y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) : Y' = \Lambda Y\} = \mathrm{gen}\left\{e^{\lambda_1 t} e_1, e^{\lambda_2 t} e_2, \dots, e^{\lambda_n t} e_n\right\}.$$

1.3. Caso diagonalizable.

Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz diagonalizable, existe una base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ compuesta por autovectores de A correspondientes a n autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$: $Av_j = \lambda_j v_j$ para cada $j \in \mathbb{I}_n$. Considerando las matrices

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

tenemos que P es inversible y que $A = P\Lambda P^{-1}$. Factorizando A y reagrupando términos podemos escribir

$$Y' = AY \iff Y' = (P\Lambda P^{-1})Y \iff P^{-1}Y' = \Lambda P^{-1}Y$$
$$\iff (P^{-1}Y)' = \Lambda(P^{-1}Y).$$

Esto significa que Y es solución del sistema $Y' = AY$ si, y sólo si, $Z = P^{-1}Y$ es solución del sistema diagonal $Z' = \Lambda Z$. Utilizando el resultado del Ejemplo 1.1, la solución general del sistema $Z' = \Lambda Z$ es

$$Z(t) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} e_j.$$

En consecuencia, la solución general del sistema $Y' = AY$ es

$$Y = PZ = P\left(\sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} P e_j = \sum_{j=1}^{n} c_j e^{\lambda_j t} v_j.$$

En particular $\left\{e^{\lambda_1 t} v_1, e^{\lambda_2 t} v_2, \dots, e^{\lambda_n t} v_n\right\}$ es un conjunto fundamental de soluciones del sistema $Y' = AY$.

(b)

$$y(t) = C_1 e^{\sqrt{3}t}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 3 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 e^{-\sqrt{3}t}\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$y(0) = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 3 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 3 \end{bmatrix}, \quad y(0) = Y_0 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} y_1 + \frac{1}{6} y_2 \\ y_1 - \frac{1}{3} y_3 \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} y_2 + \frac{1}{6} y_3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{y(t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{6} y_1 + \frac{1}{6} y_2\right) e^{\sqrt{3}t}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 3 \end{bmatrix} + \left(y_1 - \frac{1}{3} y_3\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{6} y_2 + \frac{1}{2} y_3\right) e^{-\sqrt{3}t}\begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \\ 3 \end{bmatrix}}$$

$\lim_{t\to+\infty} y(t)$

- si $\left(\frac{\sqrt{3}}{6} y_1 + \frac{1}{6} y_2\right) \neq 0$, $\|y(t)\|$ es no acotado, $y(t) \to +\infty$
- si $\left(\frac{\sqrt{3}}{6} y_1 + \frac{1}{6} y_2\right) = 0 \wedge \left(y_1 - \frac{1}{3} y_3\right) = 0$, $y(t) \to 0$
- si $\left(\frac{\sqrt{3}}{6} y_1 + \frac{1}{6} y_2\right) = 0 \wedge \left(y_1 - \frac{1}{3} y_3\right) \neq 0$, $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \left(y_1 - \frac{1}{3} y_3\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ejercicio 4.15

domingo, 12 de diciembre de 2021 18:04

15. Para cada una de las siguientes matrices $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, hallar un conjunto fundamental de soluciones del sistema $Y' = AY$.

$$\text{(a)}\ A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{(b)}\ A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \text{(c)}\ A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a)

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad \chi_A(x) = -x^3 + 9x^2 - 27x + 27 \quad \sigma(A) = \{3\},\ m(3) = 3 \quad \text{nul}(A - 3I) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \quad \lambda(3) = 1$

$N = A - 3I$ es una matriz nilpotente de índice 3, selecciono $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \text{nul}(N^2) \longrightarrow v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Cadena de Jordan: $\{N^2 v, Nv, v\} = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Escenario 1. $\sigma(A) = \{\lambda\}$, $m(\lambda) = 3$ y $\mu(\lambda) = 1$. Sabemos que existe una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que si

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \ \text{y}\ J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

entonces

$$A = PJP^{-1}.$$

Si ponemos $Z = P^{-1}Y$, el sistema $Y' = AY$ se transforma en el sistema $Z' = JZ$:

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda z_1 + z_2 \\ \lambda z_2 + z_3 \\ \lambda z_3 \end{bmatrix},$$

que se resuelve por cuadraturas de abajo para arriba:

$$\begin{aligned} z_3' = \lambda z_3 &\iff z_3 = c_3 e^{\lambda t}, \ \text{con}\ c_3 \in \mathbb{R}. \\ z_2' = \lambda z_2 + z_3 &\iff z_2' - \lambda z_2 = c_3 e^{\lambda t}, \ \text{con}\ c_3 \in \mathbb{R} \\ &\iff z_2 = c_3 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t}, \ \text{con}\ c_2, c_3 \in \mathbb{R}. \\ z_1' = \lambda z_1 + z_2 &\iff z_1' - \lambda z_1 = c_3 t e^{\lambda t} + c_2 e^{\lambda t}, \ \text{con}\ c_2, c_3 \in \mathbb{R}. \\ &\iff z_1 = c_3 \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} + c_1 e^{\lambda t}, \ \text{con}\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La solución del sistema $Z' = JZ$ tiene la forma

$$\begin{aligned} Z &= \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} + c_3 \frac{t^2}{2} e^{\lambda t} \\ c_2 e^{\lambda t} + c_3 t e^{\lambda t} \\ c_3 e^{\lambda t} \end{bmatrix} \\ &= c_1 e^{\lambda t} e_1 + c_2 e^{\lambda t}(t e_1 + e_2) + c_3 e^{\lambda t}\left(\frac{t^2}{2} e_1 + t e_2 + e_3\right). \end{aligned}$$

En consecuencia, la solución de $Y' = AY$ tiene la forma

$$Y = PZ = c_1 e^{\lambda t} v_1 + c_2 e^{\lambda t}(t v_1 + v_2) + c_3 e^{\lambda t}\left(\frac{t^2}{2} v_1 + t v_2 + v_3\right)$$

con $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Nota Bene. Nótese que en este caso,

(11) $$\left\{e^{\lambda t} v_1,\ e^{\lambda t}(t v_1 + v_2),\ e^{\lambda t}\left(\frac{t^2}{2} v_1 + t v_2 + v_3\right)\right\}$$

es un sistema fundamental de soluciones de $Y' = AY$. □

Conjunto fundamental de soluciones: $\boxed{\left\{ e^{3t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ e^{3t}\left(t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right),\ e^{3t}\left(\frac{t^2}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \right\}}$

(b)

$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad \chi_A(x) = -x^3 + 9x^2 - 27x + 27 \quad \sigma(A) = \{3\} \quad \text{nul}(A - 3I) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \quad \lambda(3) = 2 \neq m(3) = 3$

$N = A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad$ selecciono un $v \notin \text{nul}(N) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\ Nv = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\ $ y $\ u \in \text{nul}(N) \setminus \text{gen}\{Nv\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} Nv & v & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

Escenario 2. $\sigma(A) = \{\lambda\}$, $m(\lambda) = 3$ y $\mu(\lambda) = 2$. Sabemos que existe una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que si

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \ \text{y}\ J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

entonces

$$A = PJP^{-1}.$$

Razonando como en el caso anterior se obtiene que

(12) $$\{e^{\lambda t} v_1,\ e^{\lambda t}(t v_1 + v_2),\ e^{\lambda t} v_3\}$$

es un sistema fundamental de soluciones de $Y' = AY$. □

Conjunto fundamental de soluciones: $\boxed{\left\{ e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ e^{3t}\left(t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right),\ e^{3t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}$

(c)

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $\quad \chi_A(x) = -x^3 + 8x^2 - 21x + 18 \quad \sigma(A) = \{\underset{\text{doble}}{3}, 2\} \quad \text{nul}(A - 3I) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$N = A - 3I \quad$ selecciono $v \in \text{nul}(N^2) \setminus \text{nul}(N)$, $\ v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\ Nv = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\ u \in \text{nul}(A - 2I)$ $\ u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} Nv & v & u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad J = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Escenario 3. $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $m(\lambda_1) = 2$ y $\mu(\lambda_1) = 1$. Sabemos que existe una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que si

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \ \text{y}\ J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

entonces

$$A = PJP^{-1}.$$

Razonando como en el primer caso se obtiene que

(13) $$\{e^{\lambda_1 t} v_1,\ e^{\lambda_1 t}(t v_1 + v_2),\ e^{\lambda_2 t} v_3\}$$

es un sistema fundamental de soluciones de $Y' = AY$. □

Conjunto fundamental de soluciones: $\boxed{\left\{ e^{3t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ e^{3t}\left(t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right),\ e^{2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}$

Ejercicio 4.16

domingo, 12 de diciembre de 2021 22:50

16. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz definida por

$$A = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 25 & -14 & -4 \\ -2 & 4 & 14 \\ -10 & 2 & 25 \end{bmatrix}.$$

(a) Hallar un conjunto fundamental de soluciones del sistema $Y' = AY$.

(b) Resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases}$$

y analizar su comportamiento asintótico.

(a)

```
A= nsimplify(1/18)* Matrix([[25,-14,-4],[-2,4,14],[-10,2,25]])
A, A.jordan_form()
✓ 0.1s
```

$$\left(\begin{bmatrix} \frac{25}{18} & -\frac{7}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{7}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{1}{9} & \frac{25}{18} \end{bmatrix}, \left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right)\right)$$

v_1 v_2 v_3

Escenario 3. $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, con $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $m(\lambda_1) = 2$ y $\mu(\lambda_1) = 1$. Sabemos que existe una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que si

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \text{ y } J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

entonces

$$A = PJP^{-1}.$$

Razonando como en el primer caso se obtiene que

$$\{e^{\lambda_1 t}v_1,\ e^{\lambda_1 t}(tv_1 + v_2),\ e^{\lambda_2 t}v_3\} \tag{13}$$

es un sistema fundamental de soluciones de $Y' = AY$. □

$$\boxed{\text{Conjunto fundamental de soluciones } \left\{ e^{\frac{1}{2}t}\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix},\ e^{\frac{1}{2}t}\left(t\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right),\ e^{2t}\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}$$

(b)

$$y(t) = C_1 e^{\frac{1}{2}t}\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix} + C_2 e^{\frac{1}{2}t}\left(t\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + C_3 e^{2t}\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad Y_0 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$y_0 = Y_0 = C_1\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{6} & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{3}y_1 + \frac{4}{3}y_2 - \frac{10}{3}y_3 \\ -\frac{2}{3}y_1 + \frac{4}{3}y_2 - \frac{4}{3}y_3 \\ -\frac{4}{9}y_1 + \frac{2}{9}y_2 - \frac{4}{9}y_3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{y(t) = \left(-\frac{8}{3}y_1 + \frac{4}{3}y_2 - \frac{10}{3}y_3\right)e^{\frac{1}{2}t}\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix} + \left(-\frac{2}{3}y_1 + \frac{4}{3}y_2 - \frac{4}{3}y_3\right)e^{\frac{1}{2}t}\left(t\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \left(-\frac{4}{9}y_1 + \frac{2}{9}y_2 - \frac{4}{9}y_3\right)e^{2t}\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) \longrightarrow \|y(t)\|_{t\to+\infty}$ es no acotado salvo que $\begin{bmatrix} -\frac{8}{3}y_1 + \frac{4}{3}y_2 - \frac{10}{3}y_3 \\ -\frac{2}{3}y_1 + \frac{4}{3}y_2 - \frac{4}{3}y_3 \\ -\frac{4}{9}y_1 + \frac{2}{9}y_2 - \frac{4}{9}y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ejercicio 4.17

lunes, 13 de diciembre de 2021 07:32

17. Hallar todas las soluciones $Y \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ del sistema

$$Y' = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} Y.$$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Det}(A - xI) = \mathrm{Det}\begin{vmatrix} 6-x & -5 \\ 5 & -2-x \end{vmatrix} = (6-x)(-2-x) + 25 = -12 - 6x + 2x + x^2 + 25$$

$$= x^2 - 4x + 13$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2} \begin{cases} \to 2+3i \\ \to 2-3i \end{cases}$$

$$\sigma(A) = \{2-3i,\ 2+3i\}$$

Lema 1.9. *Si $a+bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$, es un autovalor de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $x + iy \in \mathbb{C}^n$ es un autovector de A asociado al autovalor $a+bi$, entonces el conjunto*

$$\{e^{at}\cos(bt)x - e^{at}\operatorname{sen}(bt)y,\ e^{at}\cos(bt)y + e^{at}\operatorname{sen}(bt)x\} \subset C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$$

es un conjunto de soluciones reales linealmente independiente del sistema $Y' = AY$.

$$\mathrm{Nul}(A - (2+3i)I) \Rightarrow \begin{bmatrix} 4-3i & -5 \\ 5 & -4-3i \end{bmatrix} \xrightarrow{(4-3i)F_2 - 5F_1 \to F_2} \begin{bmatrix} 4-3i & -5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(4-3i)(-4-3i) = -16 \cancel{-12i} \cancel{+12i} + 9\underbrace{i^2}_{-1} = -25$$

$$\mathrm{Nul}(A-(2+3i)I) = \begin{bmatrix} 5 \\ 4-3i \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}}_{y} i$$

Todas las soluciones del sistema son de la forma:

$$y(t) = C_1\left(e^{2t}\cos(3t)\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} - e^{2t}\operatorname{sen}(3t)\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}\right) + C_2\left(e^{2t}\cos(3t)\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} + e^{2t}\operatorname{sen}(3t)\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}\right), \text{ con } C_1 \text{ y } C_2 \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 4.18

lunes, 13 de diciembre de 2021 08:51

18. Hallar todas las soluciones $Y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ del sistema

$$Y' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 7 \\ 7 & -4 & 5 \end{bmatrix} Y$$

y determinar para qué valores iniciales $Y(0) \in \mathbb{R}^3$ la norma de $Y(t)$ es acotada para $t \to +\infty$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 7 \\ 7 & -4 & 5 \end{bmatrix} \qquad \sigma(A) = \{8, -2-4i, -2+4i\} \qquad \text{nul}(A-(-2+4i)I) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \qquad \text{nul}(A-8I) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\underbrace{-2}_{a}+\underbrace{4}_{b}i \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{y} i$$

Lema 1.9. *Si $a+bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$, es un autovalor de la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $x+iy \in \mathbb{C}^n$ es un autovector de A asociado al autovalor $a+bi$, entonces el conjunto*

$$\{e^{at}\cos(bt)x - e^{at}\operatorname{sen}(bt)y,\ e^{at}\cos(bt)y + e^{at}\operatorname{sen}(bt)x\} \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$$

es un conjunto de soluciones reales linealmente independiente del sistema $Y' = AY$.

Conjunto fundamental de soluciones $= \left\{ e^{-2t}\cos(4t)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - e^{-2t}\operatorname{sen}(4t)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ e^{-2t}\cos(4t)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + e^{-2t}\operatorname{sen}(4t)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ e^{8t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$$y(t) = C_1 e^{-2t}\left(\cos(4t)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \operatorname{sen}(4t)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + C_2 e^{-2t}\left(\cos(4t)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \operatorname{sen}(4t)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) + C_3 e^{8t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y(0) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad y(0) = C_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_3 \\ -\frac{1}{2}y_1 + y_2 - \frac{1}{2}y_3 \\ \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{y(t) = \left(\tfrac{1}{2}y_1 - \tfrac{1}{2}y_2\right)e^{-2t}\left(\cos(4t)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \operatorname{sen}(4t)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \left(-\tfrac{1}{2}y_1 + y_2 - \tfrac{1}{2}y_3\right)e^{-2t}\left(\cos(4t)\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \operatorname{sen}(4t)\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right) + \left(\tfrac{1}{2}y_1 + \tfrac{1}{2}y_3\right)8^t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

La norma de $y(t)$ es acotada si y solo $\frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_3 = 0 \longrightarrow y_1 = -y_3 \longrightarrow \begin{bmatrix} -y_3 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = y_3\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + y_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\boxed{\text{La norma de } y(t) \text{ es acotada cuando } t\to\infty \text{ si y solo si } Y(0) \in \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}}$$

Ejercicio 5.1

jueves, 6 de enero de 2022 15:24

1. Comprobar que las siguientes matrices $U \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ son ortogonales

$$a)\ \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix},\quad b)\ \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

En cada caso caracterizar la isometría $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x) = Ux$.

: *En otras palabras, si se trata de una rotación, describir su ángulo; si se trata de una simetría ortogonal, describir la recta con respecto a la que se realiza la simetría.*

a)

$$A^T A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{Es una simetría ortogonal}$$

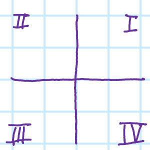
Definición 1.1. *Decimos que* $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz ortogonal *si*

$$(1) \qquad U^T U = U U^T = I,$$

o, equivalentemente, si $U^{-1} = U^T$.

Calculo el determinante de la matriz para saber que es $\Rightarrow$ $Det(A) = 1$ es una rotación, $Det(A) = -1$ es una simetría

$$Det(A) = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \qquad Cos(\theta) = \frac{3}{5} \qquad sen(\theta) = -\frac{4}{5}$$



El coseno es positivo en I y IV y el seno en I y II

Como $d = a$ y $c = -b$, tenemos
$$U = \begin{bmatrix} a & -c \\ c & a \end{bmatrix}.$$
Como $a^2+c^2 = 1$, porque $\det(U) = 1$, tenemos que existe un único $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $a = \cos\theta$ y $c = \operatorname{sen}\theta$. Por lo tanto,
$$U = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$
Geométricamente se trata de la rotación de ángulo θ en sentido antihorario.

$Cos(\theta) = \frac{3}{5} \approx 53°\, 7' = \theta$ pero necesito que este en el IV por lo que $\theta_{Rot} = 360° - 53°7' = 306°52'$

$\boxed{\text{La isomería definida por A es una rotación con angulo } 306°\, 52'}$

b)

$$A^T A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Det(A) = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -1$$

Recordar que si un vector V pertenece al eje de simetría, entonces $AV = V$ por lo que el eje de simetría es el generado por el autoespacio relacionado al autovalor 1

$$Nul(A - I) = Nul\left(\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}\right) \Longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2 + 3F_1 \to F_2} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow Nul(A - I) = gen\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\boxed{\text{A es una simetría ortogonal cuyo eje de simetría es la recta generada por el vector } \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

Ejercicio 5.2

jueves, 6 de enero de 2022 16:19

2. Comprobar que las siguientes matrices $U \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ son ortogonales

a) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -6 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -6 \end{bmatrix}$, b) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -6 \end{bmatrix}$, c) $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -6 \\ -6 & -2 & -3 \\ 3 & -6 & -2 \end{bmatrix}$.

En cada caso caracterizar la isometría $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x) = Ux$.

: Por ejemplo, si T es una rotación, hallar el eje y el ángulo de rotación; si T es una simetría ortogonal, describir el subespacio con respecto al que se realiza la simetría; etcétera.

a)

$$A^T A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -6 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -6 \end{bmatrix} \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -6 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(A) = \left(\frac{1}{7}\right)^3 \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -6 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -6 \end{vmatrix}}_{\text{Regla de Sarrus } ⊛}$$

$$⊛ \begin{vmatrix} 2 & -6 & 3 \\ -6 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -6 \\ 2 & -6 & 3 \\ -6 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 36+36+36-(-27+8-216) = 343$$

$$\text{Det}(A) = \left(\frac{1}{7}\right)^3 343 = 1$$

Rec: χ_A tiene grado 3 y coeficientes reales $\Rightarrow \chi_A$ tiene una raíz real $\Rightarrow \lambda = 1$ ó $\lambda = -1$ es autovalor de A.

$A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ORTOGONAL, $A \cdot A^T = I$, $A \neq \pm I$

- $\det(A) = 1 \Rightarrow$ A es una ROTACIÓN de ángulo θ en sentido antihorario.
  $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ 0 & \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $B = \{v, w_1, w_2\}$ BON de $\mathbb{R}^3$ / $Av = v \rightsquigarrow$ gen$\{v\}$ es el eje de rotación
  ¡$\lambda = 1$ es autovalor! $\mu(1) = 1$
- $\det(A) = -1$
  - A es una SIMETRÍA ortogonal.
    $A \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \{v, w_1, w_2\}$ BON de $\mathbb{R}^3$ $\begin{cases} Av = -v \\ Aw_1 = w_1 \\ Aw_2 = w_2 \end{cases}$
    $\lambda = 1$ es autovalor $\mu(1) = 2$
    Simetría con respecto al plano gen$\{w_1, w_2\}$
  - A es una ROTACIÓN seguida de una SIMETRÍA
    $A \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & \text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
    $\lambda = 1$ NO es autovalor
    Hago simetría con respecto al plano gen$\{v_2, v_3\}$ — Roto θ con eje gen$\{v_1\}$.

El eje de rotación es el generado por el autovector asociado al autovalor 1

$$\text{nul}(A - I) = \text{nul}\left(\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -5 & -6 & 3 \\ -6 & -10 & -2 \\ 3 & -2 & -13 \end{bmatrix}\right) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\underset{\text{eje normalizado}}{v_1} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underset{\text{Vector ortonormal a } v_1}{v_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad Av_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Método para hallar el ángulo de rotación. Supongamos que $U \in \mathbb{R}^{3\times 3} \setminus \{I\}$ es una matriz ortogonal tal que $\det(U) = 1$. Sabemos que U es una rotación de ángulo θ en sentido antihorario alrededor del eje $\text{nul}(U - I)$. Para encontrar el ángulo de rotación primero se analiza la situación:

Si se dispone de una base ortonormal $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $\{v_1\}$ es una base de $\text{nul}(U - I)$ y $v_3 = v_1 \times v_2$, la matriz

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

es una matriz ortogonal tal que $\det(P) = 1$ y

$$UP = P\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ 0 & \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Se observa que θ satisface la ecuación

$$1 + 2\cos\theta = \text{tr}(U).$$

Pero como esta ecuación admite dos soluciones en $(0, 2\pi)$, para identificar el ángulo θ se necesita determinar el signo de $\text{sen}\,\theta$. Para eso basta observar que

$$\det\left(\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & Uv_2 \end{bmatrix}\right) = \text{sen}\,\theta.$$

Esto es así porque

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & Uv_2 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cos\theta \\ 0 & 0 & \text{sen}\,\theta \end{bmatrix}.$$

El análisis precedente proporciona el método para hallar el ángulo de rotación θ:

1. Hallar $v_1 \in \text{nul}(U - I)$ tal que $\|v_1\| = 1$. Este vector genera el eje de rotación.
2. Hallar v_2 tal que $\|v_2\| = 1$ y $v_2 \perp v_1$.
3. Hallar $\theta \in (0, 2\pi)$ tal que

$$1 + 2\cos\theta = \text{tr}(U) \text{ y } \text{sen}\,\theta = \det\left(\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & Uv_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$\text{Det}\left(\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & Av_2 \end{bmatrix}\right) = 0 \qquad \text{tr}(A) = -1$$

$$\begin{cases} 1 + 2\cos(\theta) = -1 \to \cos(\theta) = -1 \\ \text{sen}(\theta) = 0 \to \text{sen}(\theta) = 0 \end{cases} \qquad \theta = 180°$$

b)

$$A^T A = A A^T = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -6 \end{bmatrix} \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \\ -3 & 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(A) = \left(\frac{1}{7}\right)^3 \underbrace{\begin{vmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -6 \end{vmatrix}}_{⊛}$$

$$⊛ \begin{vmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -6 \\ -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 36+36+36-(-27+8-216) = 343$$

$$\text{Det}(A) = \left(\frac{1}{7}\right)^3 343 = 1 \text{ es una rotación} \qquad \text{nul}(A - I) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \to \text{eje de rotación}$$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad Av_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} \\ -\frac{6}{7} \end{bmatrix} \qquad \text{Det}\left(\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & Av_2 \end{bmatrix}\right) = \text{sen}(\theta) = \frac{\sqrt{13}}{7} \qquad \text{tr}(A) = -\frac{5}{7}$$

$$\begin{cases} 1 + 2\cos(\theta) = -5/7 \to \cos(\theta) = -6/7 \\ \text{sen}(\theta) = \sqrt{13}/7 \end{cases} \longrightarrow \text{Coseno negativo y seno positivo } \left(\tfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi\right) \qquad \theta \approx 149°$$

c)

$$A^T A = A A^T = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -6 & 3 \\ 3 & -2 & -6 \\ -6 & -3 & -2 \end{bmatrix} \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -6 \\ -6 & -2 & -3 \\ 3 & -6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Det}(A) = -1$$

me fijo si -1 o 1 son autovalor (raíz del polinomio característico) $\Rightarrow$ El -1 es raíz por lo tanto es un autovalor

$$\text{nul}(A + I) = \text{gen}\left\{\underset{V_1}{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}}\right\} \longrightarrow \text{Eje de rotación}$$

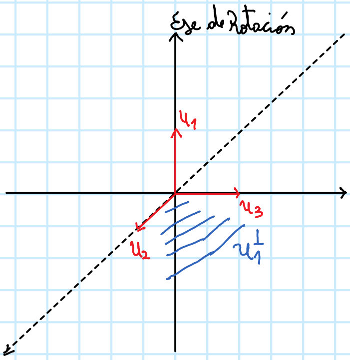
S es el plano con respecto al cual se hace una simetría $= \text{gen}\{V_1\}^\perp = \text{gen}\{V_2, V_3\}$

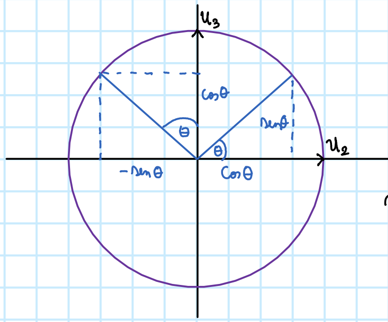
$$V_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad V_3 = V_1 \times V_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 10 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5.3

viernes, 7 de enero de 2022 17:15

3. Hallar la matriz de rotación de ángulo $\frac{\pi}{3}$ alrededor del eje generado por $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$.





$$R_{\theta,u_1} \begin{cases} u_1 \longrightarrow u_1 \\ u_2 \longrightarrow \cos(\theta)\, u_2 + \operatorname{sen}(\theta)\, u_3 \\ u_3 \longrightarrow -\operatorname{sen}(\theta)\, u_2 + \cos(\theta)\, u_3 \end{cases}$$

$\mathcal{U} = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ tal que $u_3 = u_1 \times u_2$

$$[R_{\theta,u_1}]_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$[R_{\theta,u_1}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = M_{\mathcal{U}}^{\mathcal{E}} [R_{\theta,u_1}]_{\mathcal{U}}^{\mathcal{U}} M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{U}} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^T \\ u_2^T \\ u_3^T \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad u_3 = u_1 \times u_2 = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \underset{\uparrow}{\overset{\text{normalizo}}{=}} \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$[R_{\theta,u_1}]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{3} & -\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \\ 0 & \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{La matriz de la rotación: } \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}}$$

Ejercicio 5.4

viernes, 7 de enero de 2022 18:40

4. Explicar por qué las siguientes matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son diagonalizables ortogonalmente

a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, d) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

y en cada caso hallar una matriz ortogonal U y una matriz diagonal Λ tales que $A = U\Lambda U^T$.

: *¿A ojo?*

El teorema espectral establece que una matriz es diagonalizable ortogonalmente si y sólo si es simétrica

a)

A ojo se ve que la suma de las filas da 3 y que $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un autovector asociado a ese valor. Luego sabemos que $\begin{cases} Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 \\ Det(A) = \lambda_1 . \lambda_2 \end{cases}$

$Tr(A) = 3 + \lambda_2 = 2 \longrightarrow \lambda_2 = -1$ y un autovector asociado $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$Det(A) = 3\lambda_2 = -3$

$$\boxed{U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}$$

b)

A ojo veo que si anulo la tercer columna, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ es un autovector asociado al 1, que $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un autovector asociado al 2 y $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ asociado al 0

$$\boxed{U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

c)

A ojo veo que la suma de cada fila da 5 con autovector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, luego el -2 es autovalor con autoespacio generado por $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Como $Tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 5 - 2 + \lambda_3 = 5 \longrightarrow \lambda_3 = 2 \longrightarrow nul(A - 2I) = nul\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$$\boxed{U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}$$

d)

autovalor 4 con autovector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, autovalor -2 con autovector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$Tr(A) = 4 - 2 + \lambda_3 = 0 \rightarrow \lambda_3 = -2 \rightarrow \mu(-2) = 2$, para poder hacer U necesito que cumpla la definición de autovectores y que sea ortogonal no solo al $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sino también al $[1\ 0\ -1]^T$, como el $[1\ -2\ 1]^T$

$$\boxed{U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}}$$

e)

Autovalor 2 con autovectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y autovalor 0 con autovectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$\boxed{U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

Ejercicio 5.5

sábado, 8 de enero de 2022 21:51

5. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que

$$v_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T,\ v_2 = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T,\ v_3 = \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}^T,$$

es una base de autovectores de A asociados a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, respectivamente. Probar que A es simétrica si y solo si $\lambda_2 = \lambda_3$.

Para que A sea simétrica necesitamos que autovectores asociados a autovalores distintos sean ortogonales entre sí

$$\langle v_1, v_2\rangle = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = 0 \qquad \langle v_1, v_3\rangle = \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = 0 \qquad \langle v_2, v_3\rangle = \begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix} = -1 \neq 0$$

v_2 y v_3 no son ortogonales entre sí pero sí lo son con v_1

Por lo tanto, para que A sea simétrica, $\lambda_2 = \lambda_3$, no hay restricciones sobre λ_1

Ejercicio 5.6

sábado, 8 de enero de 2022 22:05

6. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que

$$v_1 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T,\ v_2 = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & -1\end{bmatrix}^T,\ v_3 = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}^T,$$

son autovectores asociados a los autovalores $2, -3, 5$, respectivamente. Probar que A es simétrica si y solo si $\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T$ es un autovector de A.

Voy a probar la reciprocidad del enunciado ("si y solo si")

Recordar que si v es autovector de A, por definición cualquier múltiplo de v también lo es. Por lo tanto, no me está pidiendo probar que es el único autovector posible

1 - Si $\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T$ es autovector de A, entonces A es simétrica

$$v_4 = \begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$$\langle v_1, v_4\rangle = \begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} = 0 \qquad \langle v_1, v_4\rangle = \begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{bmatrix} = 0 \qquad \langle v_1, v_4\rangle = \begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix} = 0$$

Como v_4 es ortogonal a v_1, v_2, v_3 (que ya son ortogonales entre sí), puedo construir una BON de autovectores $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y con ella armar una matriz U tal que $A = U \Lambda U^T$. Por lo tanto si v_4 es autovector de A, entonces A es simétrica

2 - Si A es simétrica, entonces $\begin{bmatrix}1 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T$ es autovector de A

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & -1 & -1\\1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 1 & -1 & -1\\1 & -1 & 1 & -1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & -2 & -2\\0 & -2 & 0 & -2\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \rightarrow a = -c = d \\ c + d = 0 \rightarrow c = -d \\ b + d = 0 \rightarrow b = -d \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}d\\-d\\-d\\d\end{bmatrix} = d\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{bmatrix}$$

Como A es simétrica $A = U \Lambda U^T$ y U está formada por autovectores ortogonales entre sí. Por lo tanto (Como v_4 es ortogonal a v_1, v_2, v_3), v_4 es un autovector de A

Ejercicio 5.7

domingo, 9 de enero de 2022 17:51

7. Hallar una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ que posea las siguientes propiedades:

(a) $\sigma(A) = \{1, 1/4\}$ y $\mathrm{nul}(A - I) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right\}$.

(b) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T \in \mathrm{nul}(A - I)$, $\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\end{bmatrix}^T \in \mathrm{nul}(A - 2I)$ y $\det(A) = 12$.

(c) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\end{bmatrix}^T$ son autovectores de A, $\det(A) = 18$, $\mathrm{tr}(A) = 8$, y $\sigma(A) \subset (0, +\infty)$.

(d) $A^3 - 5A^2$ es singular, $\mathrm{rango}(A - 3I) = 1$, el plano $\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\}$ es un autoespacio de A, y $\sigma(A) \subset (0, +\infty)$.

: *¿A es única? ¿Por qué?*

a)

$\$_1 = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right\}$, para que sea simétrica $\$_{\frac{1}{4}} = \$_1^{\perp} = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$ porque debe ser diagonalizable ortogonalmente

$$A = \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\1 & 0 & 1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \frac{1}{4} & 0\\0 & 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\1 & 0 & 1\\1 & -1 & 0\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

Fijamos que $A = \begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\0 & -1 & 1\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/4 & 0 & 0\\0 & 1/4 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1\\0 & -1 & 1\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}$

A es única ya que podemos elegir distintos vectores ortogonales y todos siempre generan el mismo subespacio $\$_1^{\perp}$ (solo existe 1 plano ortogonal que pase por el origen a la recta generada por el $[1 1 1]^T$.

Además, podemos pensar en la transformación $T(x) = Ax$. Todas las transformaciones quedan definidas "univocamente" por su acción sobre una base como lo es $B = \$_1 \oplus \$_1^{\perp}$

b)

$\mathrm{Det}(A) = 1.2.\lambda_3 = 12 \longrightarrow \lambda_3 = 6$. Recordar que para que A sea simétrica, autovectores relacionados a autovalores distintos son ortogonales

$$\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & -1\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix} \qquad \$_6 = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}\right\} \qquad A = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\2 & 1 & 0\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\2 & 1 & 0\\1 & -1 & 1\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}13 & -8 & -7\\-8 & 28 & 8\\-7 & 8 & 13\end{bmatrix}$$

Por lo mismas razones que en el (a) esta matriz también es única

c)

$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}$ no son ortogonales, por lo tanto para que exista A simétrica, deben estar asociados al mismo autovalor

Hay dos casos: 1) λ_1 sea el único autovalor de A 2) λ_1 es un autovalor de $\mu(\lambda_1) = 2$ y hay otro autovalor $\lambda_2 \neq \lambda_1$

Caso 1: $\mathrm{Det}(A) = \lambda_1^3 = 18$
$\mathrm{Tr}(A) = 3\lambda_1 = 8 \longrightarrow \nexists \lambda_1$

Caso 2: $\mathrm{Det}(A) = \lambda_1^2\lambda_2 = 18$
$\mathrm{Tr}(A) = 2\lambda_1 + \lambda_2 = 8 \rightarrow \lambda_2 = 8 - 2\lambda_1$

$\lambda_1^2(8 - 2\lambda_1) = 18$
$-2\lambda_1^3 + 8\lambda_1^2 - 18 = 0$ como todos son coeficientes enteros, uso el teorema de Gauss

$p = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9\}$
$q = \{\pm 1, \pm 2\}$

$r = \frac{p}{q} = \{\ldots\ldots\}$

3 es raíz

	-2	8	0	-18
3		-6	6	18
	-2	2	6	0

$(\lambda_1 - 3)(-2\lambda_1^2 + 2\lambda_1 + 6) = 0$

$\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ $\quad$ $\frac{1-\sqrt{13}}{2}$

Como $\sigma(A) \subset (0, +\infty)$ me quedo con las raíces positivas

Elijo $\lambda_1 = 3$ por lo tanto $\lambda_2 = 2$

Elijo $\mu(3) = 2$ y $\mu(2) = 1$, $\$_3 = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}\right\}$, $\$_2 = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix}0\\-4\\3\end{bmatrix}\right\}$

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 3 & -4\\0 & 4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 3 & -4\\0 & 4 & 3\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix}75 & 0 & 0\\0 & 59 & 12\\0 & 12 & 66\end{bmatrix}$$

Esta matriz no es única, hubiera sido otra si hubiese usado el $\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ en lugar del 3

d)

- $A^3 - 5A^2$ es singular (no tiene inversa)
- $\mathrm{Rg}(A - 3I) = 1$
- $\sigma(A) \subset (0, +\infty)$

$\Big\}$ Información sobre los autovalores

$\pi: \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\} \longrightarrow$ Información sobre los autovectores

$3 \in \sigma(A)$

$\mu(3) = \mathrm{Dim}(\mathrm{nul}(A - 3I)) = 2$

$\mathrm{nul}(A - 3I) = \pi$

$A^3 - 5A^2$ es singular $\Leftrightarrow 0 \in \sigma(A^3 - 5A^2) = \{\lambda^3 - 5\lambda^2 \cdot \lambda \in \sigma(A)\} \therefore \exists \lambda \in \sigma(A)$ tq $\lambda^3 - 5\lambda^2 = 0$
$\lambda^2(\lambda - 5) = 0 \Leftrightarrow \cancel{\lambda = 0}$ o $\lambda = 5$

no ya que $\sigma(A) \subset (0, +\infty)$

$\$_5 = \$_\pi^{\perp} = \mathrm{nul}(A - 5I) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\-1\\2\end{bmatrix}\right\}$

$$A = \begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\-1 & 2 & 0\\2 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\0 & 3 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\-1 & 2 & 0\\2 & 0 & -1\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix}35 & -4 & 8\\-4 & 29 & -4\\8 & -4 & 35\end{bmatrix}$$

Por las mismas razones que (a) y (b), A es única

Ejercicio 5.8

lunes, 10 de enero de 2022 23:14

8. Para cada una de la siguientes matrices

1- $A = \dfrac{1}{18}\begin{bmatrix} 13 & -2 & -4 \\ -2 & 10 & 2 \\ -4 & 2 & 13 \end{bmatrix}$, 2- $A = \dfrac{1}{18}\begin{bmatrix} 17 & 2 & -2 \\ 2 & 14 & 4 \\ -2 & 4 & 14 \end{bmatrix}$,

(a) hallar $\left\{x \in \mathbb{R}^3 : \lim\limits_{k\to\infty} A^k x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T\right\}$,

(b) comprobar que $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T \in \left\{\lim\limits_{k\to\infty} A^k x : x \in \mathbb{R}^3\right\}$ y hallar todas las soluciones de la ecuación $\lim\limits_{k\to\infty} A^k x = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$.

1-

(a)

Cuando A es simétrica:

$$A = \begin{bmatrix} | & & \\ v_i & & \\ | & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_i & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - v_i^T - \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

si $B = \{v_i\}$ es una base ortonormal

$$A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_K P_K, \quad P_i = v_i v_i^T \longrightarrow P_i = \text{proy ortogonales sobre } \mathrm{nul}(A - \lambda_i I)$$

$$P_i P_j = 0, \quad \sum_{i=1}^{K} P_i = I$$

$$\sigma(A) = \left\{\tfrac{1}{2}\,(\text{doble}),\ 1\right\} \qquad S_1 = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$$

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - v_1^T - \\ - v_2^T - \\ - v_3^T - \end{bmatrix} = 1\, \underbrace{v_1 v_1^T}_{P_1} + \frac{1}{4} \underbrace{\begin{bmatrix} | & | \\ v_2 & v_3 \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - v_2^T - \\ - v_3^T - \end{bmatrix}}_{P_2} = 1 P_1 + \frac{1}{4} P_2$$

$$P_1 P_2 = 0$$
$$P_1 + P_2 = I \to P_2 = I - P_1$$

$$v_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad P_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad P_2 = I - P_1 = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^K = 1^K \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2}\right)^K \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^K x = 1^K \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix} x + \left(\frac{1}{2}\right)^K \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix} x \qquad K \longrightarrow \infty \Rightarrow \lim_{K\to\infty} A^K x = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix} x$$

$$\lim_{K\to\infty} A^K x = \bar{0} \longrightarrow \mathrm{nul}(P_1) = \mathrm{Col}(P_2) = \mathrm{nul}\left(A - \tfrac{1}{2} I\right) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\boxed{\left\{x \in \mathbb{R}^3 : \lim_{K\to\infty} A^K x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T\right\} = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T \in \mathrm{Col}(P_1) \ \checkmark \qquad \lim_{K\to\infty} A^K x = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T \longrightarrow x = x_p + x_h,\ x_h \in \mathrm{nul}\left(A - \tfrac{1}{2} I\right)$$

$$\boxed{x = \begin{bmatrix} -9/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$$

2-

(a)

$$\sigma(A) = \left\{\tfrac{1}{2},\ 1\,(\text{doble})\right\} \qquad \mathrm{nul}\left(A - \tfrac{1}{2}\right) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}\right\} \qquad \mathrm{nul}(A - I) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$A^K = \left(\frac{1}{2}\right)^K P_1 + 1^K P_2$$

$$A^K x = \left(\frac{1}{2}\right)^K P_1 x + 1^K P_2 x$$

$$\lim_{K\to\infty} A^K x = P_2 x$$

$$P_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \qquad P_2 = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{K\to\infty} A^K x = \bar{0} = \mathrm{nul}(P_2) = \mathrm{Col}(P_1) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\boxed{\left\{x \in \mathbb{R}^3 : \lim_{K\to\infty} A^K x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T\right\} = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$$

(b)

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^t \in \mathrm{Col}(P_2)\ ?\ \checkmark \qquad \lim_{K\to\infty} A^K x = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}}$$

Ejercicio 5.9

miércoles, 9 de febrero de 2022 22:55

9. Sea

$$A = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 10 \end{bmatrix}.$$

(a) Comprobar que la sucesión de matrices $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ es convergente y hallar el limite al que converge. ¿Qué significación geométrica tiene la matriz $\lim_{k\to\infty} A^k$?

(b) Para cada $x \in \mathbb{R}^3$, hallar $\lim_{k\to\infty} A^k x$.

(c) Hallar el conjunto

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \lim_{k\to\infty} \|A^k x\| = 1 \right\},$$

y describirlo geométricamente.

(a)

$\sigma(A) = \left\{ \frac{1}{2} \text{ (doble)}, 1 \right\}$ $\quad$ $\text{nul}\left(A - \frac{1}{2}I\right) = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ $\quad$ $\text{nul}(A - I) = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ $\quad$ $\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{12} \\ 1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{12} \\ 0 & 2/\sqrt{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -2/\sqrt{12} & -2/\sqrt{12} & 2/\sqrt{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 5 & -2 \\ 5 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^K = 1^K P_1 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^K P_2 \qquad \lim_{K\to\infty} A^K = ?$$

$$\lim_{K\to\infty} \|A^K - A^*\|_F = 0 \iff \lim_{K\to\infty} A^K = A^*$$

si propongo a $A^* = P_1 \implies A^K - P_1 = \left(\tfrac{1}{2}\right)^K P_2$

$$\Rightarrow \|A^K - P_1\|_F = \left\|\left(\tfrac{1}{2}\right)^K P_2\right\|_F = \left|\left(\tfrac{1}{2}\right)^K\right| \|P_2\|_F = \left(\tfrac{1}{2}\right)^K \sqrt{\tfrac{1}{36}(25+25+4+25+25+4+4+4+4)}$$

$$\|A^K - P_1\|_F = \left(\tfrac{1}{2}\right)^K \frac{\sqrt{120}}{6} \xrightarrow[K\to\infty]{} 0 \implies$$

$\boxed{\lim_{K\to\infty} A^K = P_1 \text{ es una proyección ortogonal sobre el autoespacio del autovalor } 1}$

(b)

$$\lim_{K\to\infty} A^K x = \underbrace{\left(\lim_{K\to\infty} A^K\right)}_{P_1} x = P_1 x \qquad P_1 x = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\lim_{K\to\infty} A^K x = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 2x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{bmatrix}}$$

(c)

Ejercicio 5.10

jueves, 13 de enero de 2022 16:02

10. En cada uno de los siguientes casos, hallar una descomposición en valores singulares de la matriz A, determinar bases ortonormales de sus cuatro subespacios fundamentales y sus respectivas matrices de proyección.

(a) $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}. \in \mathbb{R}^{3\times 2}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$

(a)

$\underbrace{A}_{3\times2} = \underbrace{U}_{3\times3}\underbrace{\Sigma}_{3\times2}\underbrace{V^T}_{2\times2}$ $\qquad Rg(A) = 2 = Dim(Col(A)) = Dim(Col(A^T))$

$A^TA = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 74 & 32 \\ 32 & 26 \end{bmatrix}$ $\qquad \chi_{A^TA} = \begin{vmatrix} 74-x & 32 \\ 32 & 26-x \end{vmatrix} = (74-x)(26-x) - 32^2 = 0$

$x^2 - 100x + 900 = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 90$ y $\lambda_2 = 10$

$Nul(A^TA - 90I) = Nul\left(\begin{bmatrix} -16 & 32 \\ 32 & -64 \end{bmatrix}\right) = gen\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ $\qquad Nul(A^TA - 10I) = Nul\left(\begin{bmatrix} 64 & 32 \\ 32 & 16 \end{bmatrix}\right) = gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}\right\}$

Normalizo los autovectores de A^TA para armar V, Σ es formada por los valores singulares que son $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{90}$, $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{10}$

$V = \begin{bmatrix} 2/\sqrt5 & 1/\sqrt5 \\ 1/\sqrt5 & -2/\sqrt5 \end{bmatrix}$ $\qquad \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{90} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad$ Luego $u_j = \frac{1}{\sigma_j} A v_j$

$u_1 = \frac{1}{\sqrt{90}}\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{450}}\begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix}$ $\qquad$ Elijo un u_2 a ojo o hago lo mismo que con u_1 $\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ y otro u_3 a ojo o con el producto vectorial $u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Entonces la DVS de A:

$$\boxed{A = \underbrace{\begin{bmatrix} 15/\sqrt{450} & 1/\sqrt2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 15/\sqrt{450} & -1/\sqrt2 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Base } Col(A) \;|\; \text{Base } Nul(A^T)} \begin{bmatrix} \sqrt{90} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left.\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\right\} \text{Base } Col(A^T)}$$

$Nul(A) = \emptyset$

$V_r = V$ porque $Nul(A) = \emptyset$

$P_{Col(A^T)} = V_r V_r^T = \frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad P_{Nul(A)} = I - P_{Col(A^T)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$P_{Col(A)} = U_r U_r^T = \begin{bmatrix} 15/\sqrt{450} & 1/\sqrt2 \\ 0 & 0 \\ 15/\sqrt{450} & -1/\sqrt2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 15/\sqrt{450} & 0 & 15/\sqrt{450} \\ 1/\sqrt2 & 0 & -1/\sqrt2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad P_{Nul(A^T)} = I - P_{Col(A)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b)

$A = \underbrace{U}_{2\times2}\underbrace{\Sigma}_{2\times3}\underbrace{V^T}_{3\times3}$ $\qquad$ Para facilitarme los calculos, saco la DVS de la A^T porque $\begin{cases} A = U\Sigma V^T \\ A^T = (U\Sigma V^T)^T = V\Sigma^T U^T \end{cases}$

$A^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ $\qquad \sigma(AA^T) = \{9, 25\}$ $\qquad Nul(AA^T - 9I) = gen\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ $\qquad Nul(AA^T - 25I) = gen\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$V = \frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad \Sigma = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad u_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad u_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix} -\frac13 \\ \frac13 \\ -\frac43 \end{bmatrix}$

$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt2 & 1/\sqrt2 & 0 \\ 1/\sqrt2 & -1/\sqrt2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \to u_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$A^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt2 & -\frac{\sqrt2}{6} & -2/\sqrt2 \\ 1/\sqrt2 & \frac{\sqrt2}{6} & 2/\sqrt2 \\ 0 & -\frac{2\sqrt2}{6} & 2/\sqrt2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\boxed{A = \frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt2 & 1/\sqrt2 & 0 \\ -\frac{\sqrt2}{6} & \frac{\sqrt2}{6} & -\frac{2\sqrt2}{3} \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}}$$

Ejercicio 5.11

jueves, 13 de enero de 2022 18:13

11. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

(a) Hallar los valores singulares de A, bases ortonormales de sus cuatro subespacios fundamentales y sus respectivas matrices de proyección.

(b) Hallar una descomposición en valores singulares reducida de A.

(6)

Es como una DVS, solo necesita tener normalizadas las columnas de cada matriz

$\begin{bmatrix} | \\ c_i \\ | \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} - F_i - \end{bmatrix}$ si divido $\frac{c_i}{a}$, debo multiplicar a F_i

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\sqrt{2}\sqrt{18} & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2}\sqrt{18} & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Entonces, la DVS de A:

$$\boxed{A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix}}$$

La DVS reducida de A:

$$\boxed{A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}}$$

(b)

Valores singulares: $\sigma = \{18, 12\}$

$$B_{Col(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \right\} \qquad B_{Col(A^T)} = \left\{ \begin{bmatrix} 3/\sqrt{18} \\ 3/\sqrt{18} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{18} \\ -1/\sqrt{18} \\ 4/\sqrt{18} \end{bmatrix} \right\} \qquad B_{Nul(A)} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\} \qquad B_{Nul(A^T)} = \emptyset$$

$$P_{Col(A^T)} = V_r V_r^T = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 10 & 8 & 4 \\ 8 & 10 & -4 \\ 4 & -4 & 16 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$P_{Nul(A)} = I - P_{Col(A^T)} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{Col(A)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{Nul(A^T)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5.12

jueves, 13 de enero de 2022 21:45

12. Sean

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}.$$

Comprobar que $A = U\Sigma V^T$ es una descomposición en valores singulares de A y, a partir de ella, hallar la seudoinversa de Moore-Penrose de A; la matriz de proyección sobre fil(A) y la matriz de proyección sobre col(A).

Para que sea una DVS: 1 - U y V tienen que ser matrices ortogonales ✓

2 - Σ y A tienen que tener el mismo rango ✓

Vale que $P_{col(A^T)} = A^+A = V_r V_r^T$

$P_{col(A)} = A A^+ = U_r U_r^T$

$$A^+ = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/3 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{3}/3 & 0 \\ \sqrt{3}/3 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 12\sqrt{2} & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 0 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -12\sqrt{2} & \sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Ejercicio 5.14

sábado, 15 de enero de 2022 18:27

14. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} . \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

(**a**) Hallar entre todos los $x \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen $\|x\| = 1$ aquellos que maximizan $\|T(x)\|$ y determinar el valor $\max_{\|x\|=1} \|T(x)\|$.

(**b**) Hallar entre todos los $x \in \mathbb{R}^2$ que satisfacen $\|x\| = 1$ aquellos que minimizan $\|T(x)\|$ y determinar el valor $\min_{\|x\|=1} \|T(x)\|$.

(a)

$$Z = A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$$

$$\chi_Z(x) = \begin{vmatrix} 11-x & 1 \\ 1 & 11-x \end{vmatrix} = (11-x)^2 - 1 = 0 \begin{cases} \lambda_1 = 12 \\ \lambda_2 = 10 \end{cases}$$

$$\sigma(A) = \{\sqrt{12}, \sqrt{10}\}$$

$$Rg(Z) = 2 = Dim(Col(Z)) = Dim(Col(Z)) \longrightarrow nul(Z) = \phi \text{ y } Dim(nul(Z)) = 1$$

$$nul(A^TA - 12I) = nul\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = gen\left\{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_1}\right\}$$

$$nul(A^TA - 10I) = nul\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = gen\left\{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{v_2}\right\}$$

Teorema 3.1. *Sea $A = U_r\Sigma_rV_r^T$ una descomposición en valores singulares reducida de A, donde $V_r = [v_1 \ \cdots \ v_r]$, $\Sigma_r = (\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$. Vale que*

1. Longitud máxima.

$$\max_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sigma_1 \ \ y \ \ \operatorname{argmax}_{\|x\|=1} \|Ax\| = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{j=1}^{k} \xi_j v_j, \ \sum_{j=1}^{k} \xi_j^2 = 1 \right\},$$

donde $k = \max\{j \in \mathbb{I}_r : \sigma_j = \sigma_1\}$.

2. Longitud mínima.

a) Si $r < n$, entonces

$$\min_{\|x\|=1} \|Ax\| = 0 \ \ y \ \ \operatorname{argmin}_{\|x\|=1} \|Ax\| = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{j=r+1}^{n} \xi_j v_j, \ \sum_{j=r+1}^{n} \xi_j^2 = 1 \right\},$$

donde $\{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$ es una base ortonormal de nul(A).

b) Si $r = n$, entonces

$$\min_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sigma_n \ \ y \ \ \operatorname{argmin}_{\|x\|=1} \|Ax\| = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x = \sum_{j=k}^{n} \xi_j v_j, \ \sum_{j=k}^{n} \xi_j^2 = 1 \right\},$$

donde $k = \min\{j \in \mathbb{I}_r : \sigma_j = \sigma_n\}$.

Entonces, $\operatorname{argmax}_{\|x\|=1} \|Ax\| = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = \xi_1 v_1 \text{ tq } \xi_1^2 = 1\} = \{-v_1, v_1\}$

$$\boxed{\max_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \sqrt{12} \qquad \operatorname{Arg\,máx}_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}$$

(b)

$r = n = 2$, Por lo tanto,

$$\boxed{\min_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \sqrt{10} \qquad \operatorname{Arg\,máx}_{\|x\|=1} = \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}}$$

Ejercicio 5.15

sábado, 15 de enero de 2022 19:36

15. Hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tal que

(a) $\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = 25\sqrt{2}$, $\min\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = 15$, y $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix} A = \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix} \in \mathrm{nul}(A)$, $v = \begin{bmatrix}3 & 0 & 4\end{bmatrix}^T$ es un autovector de A^TA tal que $Av = \begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}^T$, y $\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = 3\sqrt{2}$.

: *¿A, es única?*

(a)

$\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = 25\sqrt{2} \longrightarrow 25\sqrt{2}$ es el mayor valor singular de A

$\min\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = 15 \longrightarrow 15$ es el menor valor singular de A

$\underset{1\times 3}{\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}} \underset{3\times 2}{A} = \underset{1\times 2}{\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}}$

Como el rango máximo posible de A es 2, esos son los únicos valores singulares

Como $Rg(A) = 2 \longrightarrow Dim(Col(A)) = 2 \rightarrow Dim(Col(A^T)) = 2$

$Dim(Nul(A)) = 0 \qquad Dim(Nul(A^T)) = 1$

$\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix} A\right)^T = \left(\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}\right)^T$

$A^T \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} \in Nul(A^T)$

$Col(A) = gen\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}^{\perp} = gen\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\} = gen\left\{\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

→ Son las columnas de U_r

Podría usar la DVS o DVS reducida

Luego para V_r elijo cualquier BON de $\mathbb{R}^2$, $V = \{e_1, e_2\}$

$A = U_r \Sigma_r V_r^T = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & 0\\ -1/\sqrt{2} & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}25\sqrt{2} & 0\\ 0 & 15\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}25 & 0\\ -25 & 0\\ 0 & 15\end{bmatrix}$

Esta matriz no es única, alterando las columnas de U_r se obtiene otra que también cumple, o cambiando la BON en V_r

(b)

$\max\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| = 3\sqrt{2} \longrightarrow$ Valor singular de A más alto.

$\underset{2\times 3}{A} \underset{3\times 1}{\begin{bmatrix}3\\0\\4\end{bmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix}} \longrightarrow$ A tiene como rango máximo posible a 2, $\underset{2\times 3}{\Sigma}$, $Rg(\Sigma) = Rg(A)$

$A v_i = \sigma_i u_i$

v_i autovector normalizado

$\Downarrow$

$\|Av_i\| = \sigma_i$

$A\left(\underbrace{\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3\\0\\4\end{bmatrix}}_{v_2}\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{bmatrix} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{10}}_{\sigma_2}\underbrace{\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{bmatrix}}_{u_2} \longrightarrow \sigma(A) = \{3\sqrt{2}, \sqrt{2}/10\} \longrightarrow Dim(Col(A)) = Dim(Col(A^T)) = Rg(A) = 2$

$Dim(Nul(A^T)) = 0 \qquad Dim(Nul(A)) = 1$

$A = U_r \Sigma_r V_r^T = \begin{bmatrix}u_1 & 1/\sqrt{2}\\ & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix} \begin{bmatrix}3\sqrt{2} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{10}\end{bmatrix} \begin{bmatrix} & -v_1^T- & \\ 3/5 & 0 & 4/5\end{bmatrix}$

Elijo un $v_1 \perp v_2$, $\notin Nul(A)$, $\|v_1\| = 1$ $\quad v_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}4\\0\\-3\end{bmatrix}$

y un $u_1 \perp v_2$, $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}3\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2}/10\end{bmatrix} \frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & 0 & -3\\ 3 & 0 & 4\end{bmatrix} = \frac{1}{50}\begin{bmatrix}117 & 0 & -94\\ 123 & 0 & -86\end{bmatrix}$

Por construcción, se ve que esta matriz es única

Ejercicio 5.16

domingo, 16 de enero de 2022 19:00

16. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ la transformación definida por $T(x) = Ax$. En cada uno de los siguientes casos, caracterizar geométricamente y graficar la imagen por T de la circunferencia unitaria $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 1 & 11 \end{bmatrix}$.

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

: en cada caso, ¿qué significación geométrica tienen los $x \in S_1$ que maximizan (o minimizan) $\|T(x)\|$?, ¿qué representan los valores $\max_{x \in S_1} \|T(x)\|$ y $\min_{x \in S_1} \|T(x)\|$?

(a)

$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$\chi_{A^TA} = \begin{vmatrix} 2-x & 2 \\ 2 & 2-x \end{vmatrix} = (2-x)^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = 4 \\ x = 0 \end{cases}$

$\sigma(A) = \{2\}$

Acá se ve que como A es simétrica $Col(A) = Col(A^T)$

$Av_i = \sigma_i u_i$

$\text{Nul}(A^TA - 4I) = \text{gen}\left\{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_1}\right\}$ $\quad \text{Nul}(A^TA) = \text{gen}\left\{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{v_2}\right\}$ $\quad A = \underset{2\times2}{U}\ \underset{2\times2}{\Sigma}\ \underset{2\times2}{V^T}$

$u_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

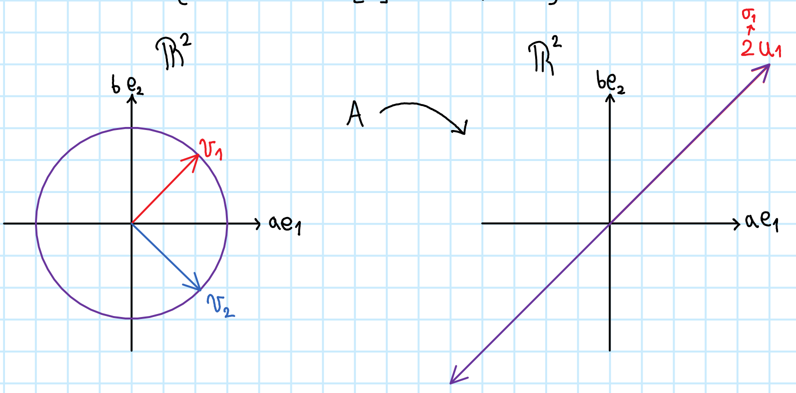
$\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad V = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad B_{\text{Nul}(A^T)} = \text{gen}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$

$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$x \in \mathbb{R}^2,\ x = \xi_1 v_1 + \xi_2 v_2,\ \|x\| = 1 \to \xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$

$Ax = A(\xi_1 v_1 + \xi_2 v_2) \underset{v_2 \in \text{Nul}(A)}{=} A\xi_1 v_1 = \xi_1\sigma_1 u_1 \underset{\xi_1\sigma_1 = \eta_1}{=} \eta_1 u_1$ con $\frac{\eta_1^2}{\sigma_1^2} \leq 1$

$\text{Im}(T(S_1)) = \{Ax : x \in S_1\} = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : y = \eta_1 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix},\ \text{con } \frac{\eta_1^2}{4} \leq 1 \right\}$



3.2. Imagen de la esfera unitaria.

Una manera de analizar cómo se deforma el espacio $\mathbb{R}^n$ bajo la acción de la matriz A es considerar su acción sobre la esfera unitaria de $\mathbb{R}^n$,

$$S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}.$$

Un elemento arbitrario $x \in S_{n-1}$ se puede representar en la forma

$$x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j v_j \quad \text{con} \quad \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 = 1.$$

En tal caso, la imagen de x por A es

$$Ax = \sum_{j=1}^{r} \sigma_j \xi_j u_j = \sum_{j=1}^{r} \eta_j u_j,$$

donde $\eta_j = \sigma_j \xi_j$ para cada $j \in \mathbb{I}_r$. Como $\frac{\eta_j}{\sigma_j} = \xi_j$, tenemos que

$$\sum_{j=1}^{r} \frac{\eta_j^2}{\sigma_j^2} = \sum_{j=1}^{r} \xi_j^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 = 1.$$

Si A es de rango completo, i.e., $r = n$, la desigualdad es una igualdad estricta. De lo contrario, faltan algunos ξ_j en la suma de la derecha, y la suma $\sum_{i=1}^{r} \xi_j^2$ puede ser cualquier valor del intervalo $[0, 1]$. Esto muestra que A transforma la esfera unitaria de $\mathbb{R}^n$ en un elipsoide de dimensión r con semiejes en las direcciones u_j y de longitudes σ_j. Cuando $r = n$, la imagen es la superficie del elipsoide, de lo contrario es el elipsoide sólido.

Teorema 3.2. *Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ una matriz de rango r, y sea $A = U\Sigma V^T$ una descomposición en valores singulares de A. Vale que*

1. *Si $r = n$, entonces*
$$\{Ax : x \in \mathbb{S}_{n-1}\} = \left\{ y \in \mathbb{R}^m : y = \sum_{j=1}^{n} \eta_j u_j,\ \text{con} \sum_{j=1}^{n} \frac{\eta_j^2}{\sigma_j^2} = 1 \right\}.$$
2. *Si $r < n$ tenemos que*
$$\{Ax : x \in \mathbb{S}_{n-1}\} = \left\{ y \in \mathbb{R}^m : y = \sum_{j=1}^{r} \eta_j u_j, \sum_{j=1}^{r} \frac{\eta_j^2}{\sigma_j^2} \leq 1 \right\}.$$

Nota Bene. Nótese que, de acuerdo con lo anterior, el efecto de la acción de A sobre la esfera unitaria de $\mathbb{R}^n$ se puede interpretar de la siguiente manera: primero colapsa $n - r$ dimensiones de $\mathbb{R}^n$, luego distorsiona las dimensiones restantes, estirando y comprimiendo la esfera unitaria de dimensión r en un elipsoide, finalmente incrusta el elipsoide en $\mathbb{R}^m$.

(b)

Si A es simétrica es diagonalizable ortogonalmente y si es diagonalizable ortogonalmente vale que $A = U\Sigma V^T = P\Sigma P^T$. Es decir, Diagonalizar ortogonalmente es igual a sacar la DVS

$\left[\left(10, 1, \left[\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right]\right), \left(12, 1, \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right]\right)\right]$

$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Ejercicio 5.17

viernes, 11 de febrero de 2022 12:49

17. Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ la transformación definida por $T(x) = Ax$. En cada uno de los siguientes casos, caracterizar geométricamente y graficar la imagen por T de la circunferencia unitaria $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$.

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

: en cada caso, si $A = U\Sigma V^T$ es una descomposición en valores singulares de A, ¿qué signtificación geométrica tienen las columnas de U?, ¿qué representan los valores singulares de A?

(b)

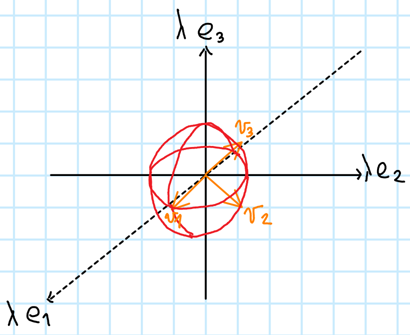
$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

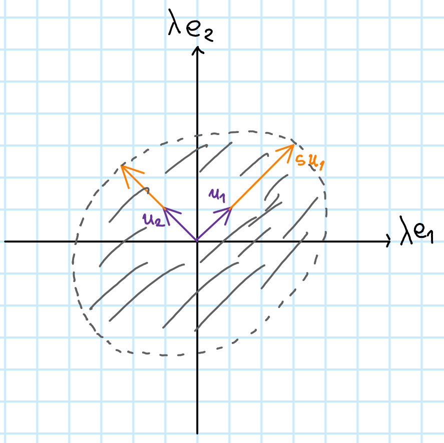
$$x = \xi_1 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \xi_2 \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix} + \xi_3 \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{con } \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$$

$$Ax = \underbrace{\xi_1 5}_{\eta_1} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} + \underbrace{\xi_2 3}_{\eta_2} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{con } \xi_1^2 + \xi_2^2 \leq 1$$

$$Ax = \eta_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{u_1} + \eta_2 \underbrace{\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}}_{u_2} \qquad \left(\frac{\eta_1}{5}\right)^2 + \left(\frac{\eta_2}{3}\right)^2 \leq 1$$

Elipse rellena





Ejercicio 6.1)

miércoles, 26 de enero de 2022 19:49

1. En cada uno de los siguientes casos, expresar la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como $x^T A x$ con $A \in \mathrm{Sim}_2(\mathbb{R})$, diagonalizar ortogonalmente $A = P\Lambda P^T$ y mediante el cambio de variables $x = Py$ escribir la forma cuadrática sin términos cruzados.

(a) $Q(x) = 9x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1x_2$.

(b) $Q(x) = 2x_1^2 - 6x_2^2 + 6x_1x_2$.

(c) $Q(x) = 9x_1^2 + 16x_2^2 + 24x_1x_2$.

Clasificar cada una de esas formas cuadráticas y graficar sus conjuntos de nivel $\mathcal{N}_c(Q)$.

(a)

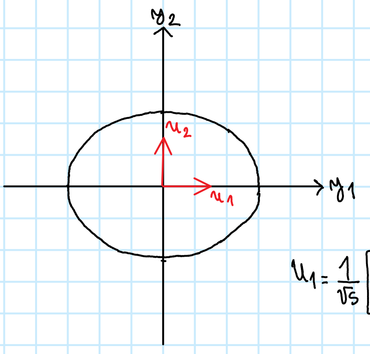
$Q(x) = x^T \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} x \qquad A = \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \qquad \sigma(A) = \{1, 11\} \qquad \mathrm{nul}(A - I) = \mathrm{gen}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\} \qquad \mathrm{nul}(A - 11I) = \mathrm{gen}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

En P lo cambio con un − para que me de $\mathrm{Det}(P) = 1$ y sea una rotación

$P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \tilde{Q}(y) = Q(Py) = y^T \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y = 11y_1^2 + y_2^2$

$N_c(Q) = \{x \in \mathbb{R}^2 : Q(x) = c\} \underset{x = Py}{=} \{y \in \mathbb{R}^2 : 11y_1^2 + y_2^2 = c\}$ si $c \leq 0 \Rightarrow N_c(Q) = \emptyset$ si $c = 0 \Longrightarrow N_c(Q) = \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$

si $c > 0$, grafico $\tilde{Q}(y) = 1$ para ejemplificar



$\min_{x \in N_1(Q)} \|x\| = 1 \qquad \operatorname{arg\,min}_{x \in N_1(Q)} \|x\| = \left\{\pm \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\} \qquad \max_{x \in N_1(Q)} \|x\| = \frac{1}{\sqrt{11}} \qquad \operatorname{arg\,max}_{x \in N_1(Q)} \|x\| = \left\{\pm \frac{1}{\sqrt{11}} \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$

$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Para $c > 0$, $Q(x)$ son elipses.

b)

$Q(x) = x^T \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} x \qquad \sigma(A) = \{-7, 3\} \qquad \mathrm{nul}(A + 7I) = \mathrm{gen}\left\{\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right\} \qquad \mathrm{nul}(A - 3I) = \mathrm{gen}\left\{\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

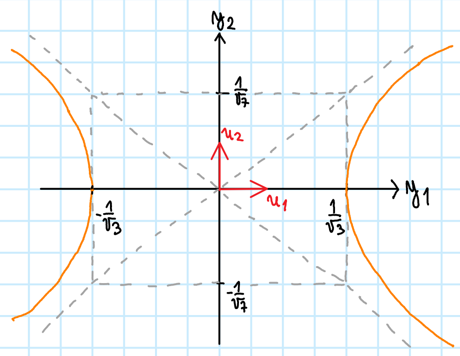
$P = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} \qquad \tilde{Q}(y) = Q(Py) = y^T \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix} y = 3y_1^2 - 7y_2^2$

$\mathrm{Det}(P) = 1$ ✓

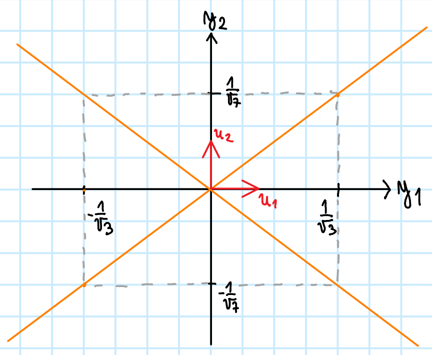
$u_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$N_c(Q) = \{x \in \mathbb{R}^2 : Q(x) = c\} \underset{x = Py}{=} \{y \in \mathbb{R}^2 : 3y_1^2 - 7y_2^2 = c\}$

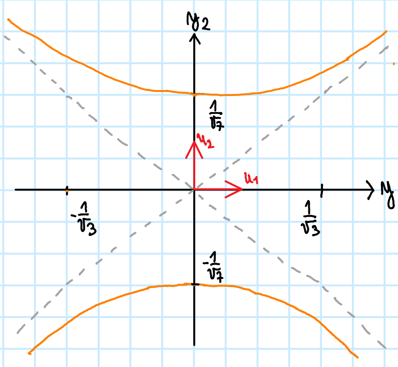
si $c > 0$, ejemplo $c = 1 \Rightarrow 3y_1^2 - 7y_2^2 = 1$



Si $c = 0$, $3y_1^2 - y_2^2 = 0$



si $c < 0$, ejemplo $c = -1 \Rightarrow 3y_1^2 - 7y_2^2 = -1$



Entonces si $c > 0$, hipérbolas con eje transversal sobre y_1

$c = 0$, dos rectas que pasan por el origen

$c < 0$, hipérbola con eje transversal sobre y_2

c)

$Q(x) = x^T \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} x$

Ejercicio 6.3)

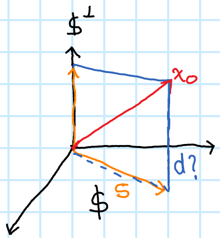
jueves, 27 de enero de 2022 16:06

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz simétrica de traza nula tal que

$$\operatorname{nul}(A-2I) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\},$$

y sea $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por $Q(x) := x^T A x$. Si $x_0 \in \mathbb{R}^3$ es un vector cuya distancia al subespacio gen $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \right\}$ es 5, ¿qué valor debe tener la distancia de x_0 al $\operatorname{nul}(A-2I)$ para que $Q(x_0) = 14$?

: *no se requiere hallar los coeficientes de A ni la expresión de x_0.*



$\mathbb{S} = \{\Pi : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

El espectro de A tiene al 2 como autovalor de multiplicidad 2

$tr(A) = 2 + 2 + \lambda = 0 \to \lambda = -4 \to \sigma(A) = \{-4, 2\}$

Como A es simétrica $\mathbb{S} = \operatorname{nul}(A-2I) \perp \mathbb{S}^{\perp} = \operatorname{nul}(A+4I)$. Entonces

$x_0 = \sum_{\lambda\in\sigma(A)} x_\lambda \longrightarrow Q(x_0) = 2\, 5^2 - 4\, d^2 = 14$

$d = 3$

$\boxed{\text{La distancia debe ser de } 3}$

Lema 1.4. *Sea $Q(x) = x^T A x$, con $A \in \operatorname{Sim}_n(\mathbb{R})$, una forma cuadrática en $\mathbb{R}^n$. Sea $\sigma(A)$ el espectro de A y para cada $\lambda \in \sigma(A)$ sea $\mathbb{S}_\lambda = \operatorname{nul}(A - \lambda I)$ el autoespacio correspondiente al autovalor λ de A. Vale que*

$$Q(x) = \lambda \|x\|^2 \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{S}_\lambda.$$

El resultado anterior nos permite caracterizar geométricamente la acción de Q sobre $\mathbb{R}^n$. Como

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(A)} \mathbb{S}_\lambda, \quad \text{con } \mathbb{S}_\lambda \perp \mathbb{S}_{\lambda'} \text{ para cada } \lambda \neq \lambda',$$

todo $x \in \mathbb{R}^n$ se descompone unívocamente en la forma

$$x = \sum_{\lambda\in\sigma(A)} x_\lambda, \quad \text{con } x_\lambda \in \mathbb{S}_\lambda, \text{ para cada } \lambda \in \sigma(A)$$

Utilizando (6) tenemos que

$$Q(x) = \sum_{\lambda\in\sigma(A)} \lambda \|x_\lambda\|^2. \tag{8}$$

En palabras, *la imagen de x por Q se obtiene superponiendo los cuadrados de las longitudes de las componentes de x sobre cada uno de los autoespacios de la matriz de Q, cada uno multiplicado por su respectivo autovalor.*

Ejercicio 6.4)

martes, 18 de enero de 2022 16:22

4. Sea $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por $Q(x) := x^T A x$, donde

$$A = \frac{1}{324}\begin{bmatrix} 76 & 10 & -10 \\ 10 & 61 & 20 \\ -10 & 20 & 61 \end{bmatrix}.$$

(**a**) Mediante un cambio de variables ortogonal $x = Py$ escribir la forma cuadrática sin términos cruzados. ¿Cuáles son los ejes principales de Q?

(**b**) Caracterizar geométricamente las superficies de nivel $\mathcal{N}_{r^2}(Q)$, con $r > 0$, y graficarlas en el sistema cartesiano definido por los ejes principales de Q.

(**c**) A simple vista, determinar los puntos de la superficie de nivel $\mathcal{N}_1(Q)$ más cercanos al origen e indicar a qué distancia se encuentran del mismo.

(**d**) A simple vista, determinar los puntos de la superficie de nivel $\mathcal{N}_1(Q)$ más lejanos del origen e indicar a qué distancia se encuentran del mismo.

(a)

$$\sigma(A) = \left\{\tfrac{1}{9}, \underset{\mu(\frac14)=2}{\tfrac{1}{4}}\right\} \qquad \text{nul}\left(A - \tfrac{1}{9}I\right) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}\right\} \qquad \text{nul}\left(A - \tfrac{1}{4}I\right) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k} = \begin{bmatrix}-2\\4\\5\end{bmatrix} \qquad B = \left\{\frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{45}}\begin{bmatrix}-2\\4\\5\end{bmatrix}, \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}\right\} \qquad y = \begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt5}{5} & -2/\sqrt{45} & 1/3 \\ \frac{\sqrt5}{5} & 4/\sqrt{45} & -2/3 \\ 0 & 5/\sqrt{45} & 2/3 \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 \end{bmatrix} \qquad \tilde{Q}(y) = Q(Py) = y^T P^T A P y = y^T \Lambda y = \frac{y_1^2}{4} + \frac{y_2^2}{4} + \frac{y_3^2}{9}$$

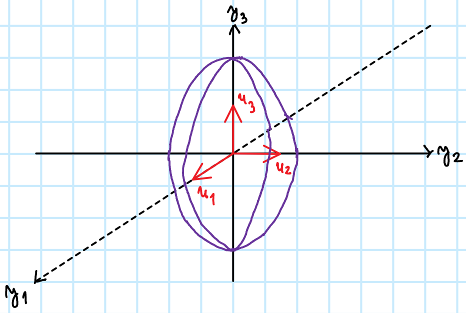
$\text{Det}(P) = 1$ ✓

$$\boxed{\tilde{Q}(y) = \frac{y_1^2}{4} + \frac{y_2^2}{4} + \frac{y_3^2}{9} \text{ y los ejes principales } u_1 = \frac{1}{\sqrt5}\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{45}}\begin{bmatrix}-2\\4\\5\end{bmatrix}, u_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}}$$

(b)

Pruebo con $\tilde{Q}(y) = 1 \Longrightarrow \frac{y_1^2}{4} + \frac{y_2^2}{4} + \frac{y_3^2}{9} = 1$ Es un elipsoide

$\boxed{\text{Los conjuntos de nivel } r^2 \text{ con } r>0 \text{ son elipses}}$



(c)

$$\min_{x \in N_1(Q)} \|x\| = \sqrt{\frac{1}{\frac14}} = 2 \qquad \text{Arg}\min_{x\in N_1(Q)} \|x\| = \left\{\pm 2\begin{bmatrix}2/\sqrt5\\1/\sqrt5\\0\end{bmatrix}, \pm 2\begin{bmatrix}-2/\sqrt{45}\\4/\sqrt{45}\\5/\sqrt{45}\end{bmatrix}\right\}$$

(d)

$$\max_{x\in N_1(Q)} \|x\| = \sqrt{\frac{1}{\frac19}} = 3 \qquad \text{Arg}\max_{x\in N_1(Q)} \|x\| = \left\{\pm\cancel{3}\,\frac{1}{\cancel{3}}\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}\right\} = \left\{\pm\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}\right\}$$

Ejercicio 6.5)

jueves, 27 de enero de 2022 17:35

5. Idéntico al anterior, pero utilizando la matriz

$$A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{bmatrix}$$

en la definición de Q.

(a)

$\sigma(A) = \{1, -1\}$ $\quad \mathrm{nul}(A+I) = \mathrm{gen}\left\{\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}\right\}$ $\quad \mathrm{nul}(A-I) = \mathrm{gen}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix} ; \frac{1}{\sqrt{45}}\begin{bmatrix}2\\4\\-5\end{bmatrix}\right\}$

$$P = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{45} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45} & 2/3 \\ 0 & -5/\sqrt{45} & 2/3 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{5} & -2/\sqrt{45} & 1/3 \\ 1/\sqrt{5} & -4/\sqrt{45} & 2/3 \\ 0 & 5/\sqrt{45} & 2/3 \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{Det}(P) = -1 \rightarrow$ no me sirve, necesito que sea una rotación (cambio el signo de una columna)

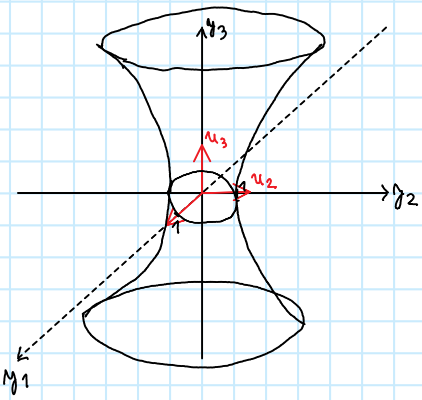
$\mathrm{Det}(A) = 1$

$$\tilde{Q}(y) = Q(Py) = y^T P^T A P y = y^T \Lambda y = y^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} y = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

$$\boxed{\tilde{Q}(y) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 \qquad \text{Los ejes principales son: } u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix},\ u_2 = \frac{1}{\sqrt{45}}\begin{bmatrix}2\\4\\-5\end{bmatrix},\ u_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}}$$

(b)

Pruebo con $N_1(Q)$, $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 1$



Todos $N_{r^2}(Q)$, $r > 0$ son hiperboloides de una hoja

(c)

$\min\limits_{x \in N_1(Q)} \|x\| = 1$ $\qquad \min\limits_{x \in N_1(Q)} \arg \|x\| = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{45}}\begin{bmatrix}2\\4\\-5\end{bmatrix}\right\}$

(d) no tiene máximos

Ejercicio 6.6)

jueves, 27 de enero de 2022 20:46

6. En cada uno de los siguientes casos, hallar, si existen, el máximo y el mínimo de la forma cuadrática $Q_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q_1(x) = \|x\|^2$, sujeto a la restricción $Q_2(x) = 1$, para

(a) $Q_2(x) = 9x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1x_2$.

(b) $Q_2(x) = 9x_1^2 + 3x_2^2 - 4\sqrt{10}x_1x_2$.

:*¿Cuál es el significado geométrico de los resultados obtenidos? Notar que en* **(a)** *y* **(b)** *las formas cuadráticas son de la forma* $Q_2(x) = 9x_1^2 + 3x_2^2 - 2ax_1x_2$, *con* $a \in \mathbb{R}$, *y explicar los diferentes comportamientos de la solución problema en función de los posibles valores de* a.

Lo hago general con a

$$Q_2 = x^T \underbrace{\begin{bmatrix} 9 & -a \\ -a & 3 \end{bmatrix}}_{A} x \qquad \chi_A = \begin{vmatrix} 9-x & -a \\ -a & 3-x \end{vmatrix} = (9-x)(3-x) - a^2 = 0$$

$$27 - 12x + x^2 - a^2 = 0$$

$$\frac{12 \pm \sqrt{144 - 4 \cdot 1\,(27-a^2)}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{36+4a^2}}{2} = 6 \pm \sqrt{9+a^2}$$

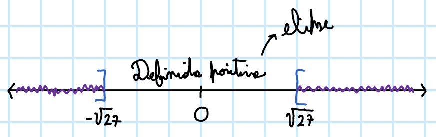
$$\sigma(A) = \left\{ 6+\sqrt{9+a^2},\ 6-\sqrt{9+a^2} \right\}$$

si $6 \leq \sqrt{9+a^2}$

$36 - 9 \leq a^2$

$27 \leq a^2$

$\sqrt{27} \leq a \qquad -\sqrt{27} \geq a$



- Semidefinida positiva → Dos rectas paralelas
- Indefinida → hipérbola

Gracias a estos resultados podemos afirmar que en el caso (a) la forma cuadrática será una elipse y en (b) una hipérbola

Notar que Q_1 es la norma de x, por lo tanto los argumentos maximizadores/minimizadores y máximos/mínimos de Q_1 sujeto a una restricción, serán los argumentos maximizadores/minimizadores y máximos/mínimos de la restricción

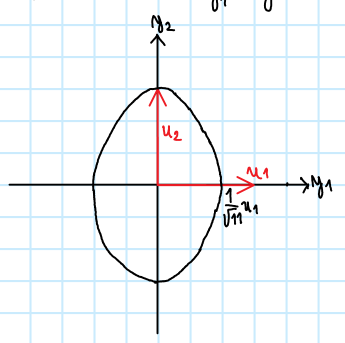
(a)

$a = 4, \qquad \sigma(A) = \{11, 1\} \qquad \mathrm{nul}(A - 11I) = \mathrm{nul}\left(\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & -8 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{gen}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\} \qquad \mathrm{nul}(A - I) = \mathrm{nul}\left(\begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{gen}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

$\to \mathrm{Det}(P) = 1$ ✓

$P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \tilde{Q}_2(y) = Q_2(Py) = y^T P^T \Lambda P y = y^T \Lambda y = 11y_1^2 + y_2$

$Q_2(x) = 1 \longrightarrow 11y_1^2 + y_2^2 = 1$



$$\max_{x \in Q_2(x)=1} Q_1(x) = 1 \qquad \operatorname{Arg\,max}_{x \in Q_2(x)=1} Q_1(x) = \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\min_{x \in Q_2(x)=1} Q_1(x) = \frac{1}{\sqrt{11}} \qquad \operatorname{Arg\,min}_{x \in Q_2(x)=1} Q_1(x) = \left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{55}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

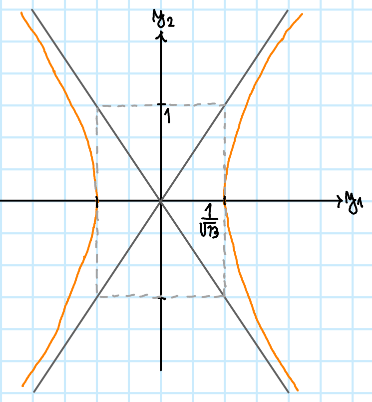
(b)

$a = 2\sqrt{10} \qquad Q_2(x) = x^T \begin{bmatrix} 9 & -2\sqrt{10} \\ -2\sqrt{10} & 3 \end{bmatrix} x \qquad \sigma(A) = \{13, -1\} \qquad \mathrm{nul}(A - 13I) = \mathrm{gen}\left\{\frac{1}{\sqrt{35}}\begin{bmatrix} \sqrt{10} \\ 5 \end{bmatrix}\right\} \qquad \mathrm{nul}(A + I) = \mathrm{gen}\left\{\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix} -\sqrt{10} \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

$\to \mathrm{Det}(P) = 1$

$P = \begin{bmatrix} \sqrt{10}/\sqrt{35} & -\sqrt{10}/\sqrt{14} \\ 5/\sqrt{35} & 2/\sqrt{14} \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \tilde{Q}_2(y) = Q_2(Py) = y^T P^T \Lambda P y = y^T \Lambda y = 13y_1^2 - y_2^2$

$Q_2(x) = 1 \longrightarrow 11y_1^2 - y_2^2 = 1$



$$\min_{x \in Q_2(x)=1} Q_1(x) = \frac{1}{\sqrt{13}} \qquad \operatorname{Arg\,min}_{x \in Q_2(x)=1} Q_1(x) = \left\{ \frac{1}{\sqrt{455}} \begin{bmatrix} \sqrt{10} \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

Ejercicio 6.7)

viernes, 28 de enero de 2022 15:57

7. Sea $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por

$$Q(x) := x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2.$$

(a) Observar que Q es definida positiva y hallar un cambio de variables $x = My$ tal que $\tilde{Q}(y) = Q(My) = \|y\|^2$.

(b) Hallar, si existen, el máximo y el mínimo de $Q(x)$ sujetos a la restricción $9x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1x_2 = 1$ y determinar los vectores que los realizan.

1.4. Formas canónicas.

Formas canónicas. Existe una matriz inversible $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que el cambio de variables $x = My$ permite expresar a Q en la forma

$$\tilde{Q}(y) = y^T \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 \\ 0 & -I_q & 0 \\ 0 & 0 & 0_r \end{bmatrix} y, \tag{7}$$

donde p, q y r son, respectivamente, las cantidades de autovalores positivos, negativos y nulos de A, (contados con sus multiplicidades). La representación de Q en la forma (7) se denomina *la forma canónica de Q*.

Demostración. Como $A \in \mathrm{Sim}_n(\mathbb{R})$, existe una diagonalización $A = P\Lambda P^T$ con $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal y $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, donde $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_p > 0$, $\lambda_{p+1} \leq \cdots \leq \lambda_{p+q} < 0$, y $\lambda_{p+q+1} = \cdots = \lambda_n = 0$. Definiendo $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mediante

$$D = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_p}, \sqrt{-\lambda_{p+1}}, \dots, \sqrt{-\lambda_{p+q}}, 1, \dots, 1),$$

resulta que $M = PD^{-1}$ satisface lo pedido. □

(a)

$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \chi_A = \begin{vmatrix} 1-x & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-x \end{vmatrix} = (1-x)^2 - \frac{1}{4} = 0$

$(1-x)^2 = \frac{1}{4} \to 1-x = \frac{1}{2} \to x = \frac{1}{2}$

$\to 1-x = -\frac{1}{2} \to x = \frac{3}{2}$

$\sigma(A) = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$

$\mathrm{nul}\left(A - \frac{1}{2}I\right) = \mathrm{nul}\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\right) = \mathrm{gen}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$ $\quad \mathrm{null}\left(A - \frac{3}{2}I\right) = \mathrm{nul}\left(\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\right) = \mathrm{gen}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad \Lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$ $\quad D = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{bmatrix}$ $\quad M = PD^{-1} = P\Lambda^{-\frac{1}{2}}$ $\quad$ notar que $D^{-1} = \Lambda^{-\frac{1}{2}}$

$M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -1 & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$

$$\boxed{\tilde{Q}(y) = Q(My) = y^T \underbrace{M^T A M}_{I_{\mathbb{R}^{2\times 2}}} y = y^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y = \|y\|^2}$$

(b)

$R(x) = 9x_1^2 + 3x_2^2 - 8x_1x_2 = x^T \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} x = x^T B x$ $\quad \sigma(B) = \{11, 1\}$ def definida positiva

$\tilde{R}(y) = R(My) = x^T B x = (My)^T B (My) = y^T \underbrace{M^T B M}_{\tilde{B}} y = y^T \tilde{B} y$ $\quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 20 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 4/3 \end{bmatrix}$

$\tilde{R}(y) = 20y_1^2 + 4\sqrt{3}\, y_1 y_2 + \frac{4}{3} y_2^2 \xrightarrow{N_1(R)} 20y_1^2 + 4\sqrt{3}\, y_1 y_2 + \frac{4}{3} y_2^2$

Ejercicio 6.8)

viernes, 28 de enero de 2022 18:09

8. Sea Q la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ definida por

$$Q(x) := 5x_1^2 + 6x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3.$$

(a) Hallar $\max_{\|x\|=1} Q(x)$ y $\min_{\|x\|=1} Q(x)$.

(b) Verificar que para todo $x \in \mathbb{R}^3$ vale que $3\|x\|^2 \le Q(x) \le 9\|x\|^2$.

(c) Caracterizar el conjunto de nivel $\mathcal{N}_1(Q)$ y, utilizando el resultado del inciso anterior, hallar los puntos de $\mathcal{N}_1(Q)$ cuya distancia al origen sea mínima y aquellos cuya distancia al origen sea máxima. ¿Qué valores tienen esas distancias?

: *comparar con el* **4.** *y formalizar conclusiones.*

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix} \qquad \sigma(A) = \{9, 6, 3\} \qquad \text{nul}(A - 9I) = \text{gen}\left\{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\text{nul}(A - 6I) = \text{gen}\left\{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\} \qquad \text{nul}(A - 3I) = \text{gen}\left\{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\boxed{\max_{\|x\|=1} Q(x) = 9 \qquad \min_{\|x\|=1} Q(x) = 3}$$

1.1. Imagen de la esfera unitaria.

Sea $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática sobre $\mathbb{R}^n$. Los valores de Q sobre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ están unívocamente determinados por sus valores sobre la esfera unitaria de $\mathbb{R}^n$,

$$S_{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}.$$

Esto es así porque todo vector $x \neq 0$ se puede representar en la forma

$$x = \|x\|\hat{x},$$

donde $\hat{x} = \frac{1}{\|x\|}x$ es el vector unitario que tiene la misma dirección y sentido del vector x, y entonces

$$Q(x) = Q(\|x\|\hat{x}) = \|x\|^2 Q(\hat{x}).$$

1.2. Teorema de Rayleigh: extremos sobre la esfera unitaria.

Como las formas cuadráticas en $\mathbb{R}^n$ son funciones continuas y la esfera unitaria es un conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$, las mismas deben alcanzar sus valores máximo y mínimo sobre la mencionada esfera.

El siguiente resultado, conocido bajo el nombre de *Teorema de Rayleigh*, nos informa cuáles son los valores máximo y mínimo de una forma cuadrática restringida a la esfera unitaria y los vectores que los realizan.

Teorema 1.1 (Teorema de Rayleigh). *Sea $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática de la forma $Q(x) = x^T Ax$, con $A \in \text{Sim}_n(\mathbb{R})$. Sea $\sigma(A)$ el espectro de A y para cada $\lambda \in \sigma(A)$ sea $\mathbb{S}_\lambda = \text{nul}(A - \lambda I)$ el autoespacio correspondiente a λ. Vale que:*

$$\max_{\|x\|=1} Q(x) = \lambda_M \quad y \quad \operatorname{argmax}_{\|x\|=1} Q(x) = S_{n-1} \cap \mathbb{S}_{\lambda_M},$$

$$\min_{\|x\|=1} Q(x) = \lambda_m \quad y \quad \operatorname{argmin}_{\|x\|=1} Q(x) = S_{n-1} \cap \mathbb{S}_{\lambda_m},$$

donde $\lambda_M = \max \sigma(A)$ y $\lambda_m = \min \sigma(A)$.

(b)

Demostración. Descomponiendo cada $x \in \mathbb{R}^n$ en sus componentes respecto de los autoespacios de la matriz A, tenemos $x = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} x_\lambda$, donde $x_\lambda = P_{\mathbb{S}_\lambda}(x)$ para cada $\lambda \in \sigma(A)$. Como $x_\lambda \perp x_{\lambda'}$ para $\lambda \neq \lambda'$, el Teorema de Pitágoras implica que

(1) $$\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \|x_\lambda\|^2,$$

y como

(2) $$Q(x) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda \|x_\lambda\|^2,$$

resulta

(3) $$\lambda_m \|x\|^2 \le Q(x) \le \lambda_M \|x\|^2.$$

En particular, para todo $x \in S_{n-1}$ vale que

(4) $$\lambda_m \le Q(x) \le \lambda_M.$$

(c)

$$Q(x) = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda \|x_\lambda\|^2$$

$$x \in \text{nul}(A - 9I) \to Q(x) = 9\|x\|^2 \overset{N_1(Q)}{=} 1 \qquad x \in \text{nul}(A - 3I) \wedge N_1(Q) \longrightarrow Q(x) = 3\|x\|^2 = 1$$

$$\|x\|^2 = \frac{1}{9} \qquad \|x\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\|x\| = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\max_{x \in N_1(Q)} Q(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \operatorname{Arg\,máx}_{x \in N_1(Q)} Q(x) = \left\{\pm \frac{1}{3\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} \qquad \min_{x \in N_1(Q)} Q(x) = \frac{1}{3} \qquad \operatorname{Arg\,mín}_{x \in N_1(Q)} Q(x) = \left\{\pm \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}}$$

Ejercicio 6.9)

sábado, 29 de enero de 2022 16:05

9. Sea Q la forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$Q(x) := x^T(aI + bA)x,$$

con $a, b \in \mathbb{R}$, y donde A es la matriz en base canónica de una proyección ortogonal de $\mathbb{R}^2$ sobre un subespacio unidimensional.

(a) Hallar los valores de a y b para que $\max\limits_{\|x\|=1} Q(x) = 5$ y $\min\limits_{\|x\|=1} Q(x) = 2$.

(b) Para los valores hallados en el inciso anterior, y sabiendo que

$$\text{col}(A) = \{x \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 + 4x_2 = 0\},$$

graficar el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 : Q(x) \leq 3\}$.

(a)

$Ax = P_{S_1}(x)$, con $S_1 \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$, $\dim(S_1) = 1$. $S_1 = \text{gen}\{v_1\}$ con $\|v_1\| = 1$

$$A = v_1 \cdot v_1^T \implies Q(x) = x^T(aI + bA)x = x^T(aI + bv_1v_1^T)x = a\|x\|^2 + b\,x^T v_1 v_1^T x = a\|x\|^2 + b\langle x, v_1\rangle^2$$

$\langle x, v_1\rangle^2$ → máximo valor posible 1 y lo hace cuando $x = \pm v_1$
→ mínimo valor posible 0 y lo hace cuando $x \perp v_1$

si $x \in \text{Nul}(A - \lambda I) \wedge \|x\| = 1 \longrightarrow Q(x) = \lambda$

$b > 0$:

$$\max_{\|x\|=1} Q(x) = a\underbrace{\|x\|^2}_{=1} + b\underbrace{\langle x, v_1\rangle^2}_{=1} = 5$$

$$\min_{\|x\|=1} Q(x) = a\underbrace{\|x\|^2}_{=1} + b\underbrace{\langle x, v_1\rangle^2}_{0} = 2$$

$$\begin{cases} a + b = 5 \to b = 3 \\ a = 2 \end{cases}$$

$b < 0$:

$$\max_{\|x\|=1} Q(x) = a\underbrace{\|x\|^2}_{=1} + b\underbrace{\langle x, v_1\rangle^2}_{0} = 5$$

$$\min_{\|x\|=1} Q(x) = a\underbrace{\|x\|^2}_{=1} + b\underbrace{\langle x, v_1\rangle^2}_{=1} = 2$$

$$\begin{cases} a = 5 \\ a + b = 2 \to b = -3 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Entonces: } a = 2 \text{ y } b = 3 \text{ o } a = 5 \text{ y } b = -3}$

4. Sea $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por

$$Q(x) = 4\|x\|^2 - 5\|P_{\mathbb{S}}(x)\|^2,$$

donde $P_{\mathbb{S}}$ es la proyección ortogonal sobre el subespacio

$$\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 = 0,\ 2x_2 - x_3 = 0\}.$$

Caracterizar geométricamente el conjunto de nivel $\mathcal{N}_{16}(Q) = \{x \in \mathbb{R}^3 : Q(x) = 16\}$, graficarlo en el sistema cartesiano definido por los ejes principales de Q y determinar los puntos de $\mathcal{N}_{16}(Q)$ más cercanos al origen, indicando su distancia al mismo.

$x = P_S(x) + P_S^\perp(x) \longrightarrow \|x\|^2 = \|P_S(x)\|^2 + \|P_S^\perp(x)\|^2$

$Q(x) = 4(\|P_S(x)\|^2 + \|P_S^\perp(x)\|^2) - 5\|P_S(x)\|$

$Q(x) = 4\|P_S^\perp(x)\|^2 - \|P_S(x)\|^2$

$Q(x) = 4\|x_2\|^2 - \|x_1\|^2$

$S = \text{gen}\{u\}$

$x_1 = P_S(x)$

$x_2 = P_S^\perp(x)$

$$Q(x) = 16 \to 4\|x_2\|^2 - \|x_1\|^2 = 16 \to \frac{\|x_2\|^2}{2^2} - \frac{\|x_1\|^2}{4^2} = 1$$

$$S^\perp = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}\right\} \qquad S = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k} \longrightarrow S^\perp = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix};\ \frac{1}{\sqrt{45}}\begin{bmatrix}4\\2\\-5\end{bmatrix}\right\} \qquad S = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

Ej 1)

jueves, 20 de enero de 2022 17:51

Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz dependiente del parámetro real a definida por

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & a^2 & 0 \\ a & a & (a+1)^2 \end{bmatrix}.$$

Existe una matriz inversible $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a+1)^2 \end{bmatrix}$$

si, y solo si,

Seleccione una:

- a. $a \in \{-2, 1\}$.
- b. $a = -\frac{1}{2}$.
- c. $a \notin \{-2, -1, -\frac{1}{2}, 1\}$. ✔
- d. $a = -1$.

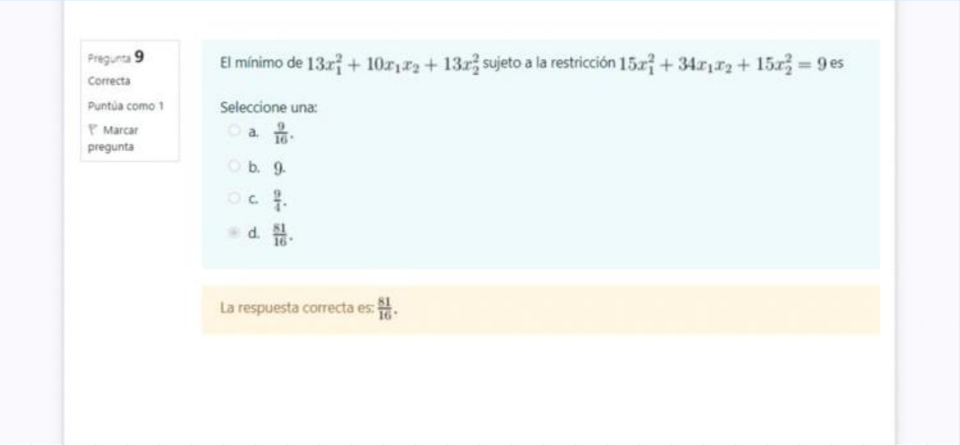
$$\mathrm{Det}(A - xI) = \begin{vmatrix} 1-x & 0 & 0 \\ a & a^2-x & 0 \\ a & a & (a+1)^2-x \end{vmatrix} = (1-x)(a^2-x)\left((a+1)^2-x\right) = 0$$

$$\mathrm{Nul}(A - I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & a^2-1 & 0 \\ a & a & (a+1)^2-1 \end{bmatrix}$$

$\rightarrow \neq$ $\begin{bmatrix} S & S_2 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} S_2 & S_1 \end{bmatrix}$

Practica. Guía 6. Ej. 1

domingo, 6 de febrero de 2022 19:00



Pregunta 9

Correcta

Puntúa como 1

Marcar pregunta

El mínimo de $13x_1^2 + 10x_1x_2 + 13x_2^2$ sujeto a la restricción $15x_1^2 + 34x_1x_2 + 15x_2^2 = 9$ es

Seleccione una:

a. $\frac{9}{16}$.

b. 9.

c. $\frac{9}{4}$.

d. $\frac{81}{16}$.

La respuesta correcta es: $\frac{81}{16}$.

$Q(x) = 13x_1^2 + 10x_1x_2 + 13x_2^2$

$R(x) = 15x_1^2 + 34x_1x_2 + 15x_2^2 = x^T \underbrace{\begin{bmatrix} 15 & 17 \\ 17 & 15 \end{bmatrix}}_{B} x$

$\begin{vmatrix} \overset{>0}{15} & 17 \\ 17 & 15 \end{vmatrix} = 15^2 - 17^2 < 0$ entonces

$15x_1^2 + 34x_1x_2 + 15x_2^2 = 9$

Es una hipérbola!!

$Q(x) = x^T \underbrace{\begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}}_{A} x$

$\begin{vmatrix} \overset{>0}{13} & 5 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} = 13^2 - 5^2 > 0$ entonces A es definida positiva

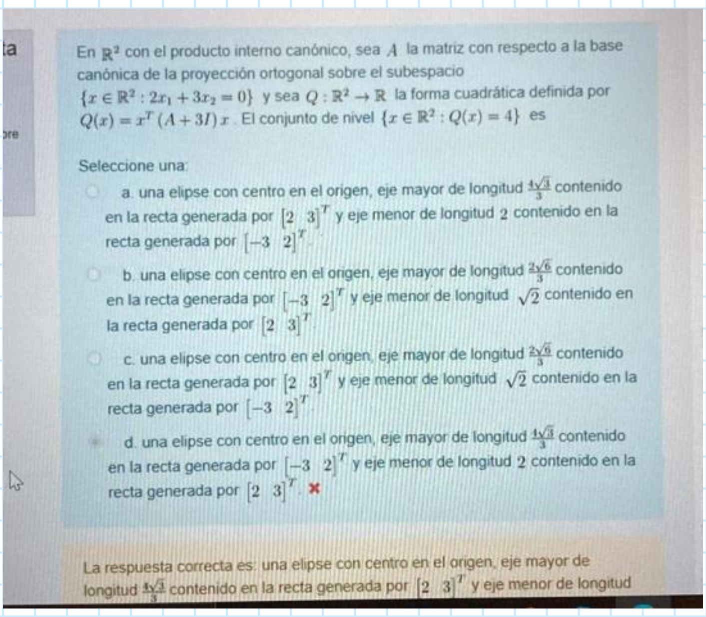
$Q(x) = x^T A x = y^T \underbrace{M^T A M}_{I} y = \|y\|^2$ y $R(x) = x^T B x = y^T \underbrace{M^T B M}_{=\tilde{B}} y = y^T \tilde{B} y$

Definida positiva

$\exists M$ tq $x = My$

$A = [$

	$Q(x)$	$R(x)$
	Def Pos	Def Posi
$\|y\|$ $\leftarrow$	Def Pos	$\sim$
	Ind	



En $\mathbb{R}^2$ con el producto interno canónico, sea A la matriz con respecto a la base canónica de la proyección ortogonal sobre el subespacio $\{x \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 + 3x_2 = 0\}$ y sea $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por $Q(x) = x^T (A + 3I)\, x$. El conjunto de nivel $\{x \in \mathbb{R}^2 : Q(x) = 4\}$ es

Seleccione una:

a. una elipse con centro en el origen, eje mayor de longitud $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ contenido en la recta generada por $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ y eje menor de longitud 2 contenido en la recta generada por $\begin{bmatrix} -3 & 2 \end{bmatrix}^T$.

b. una elipse con centro en el origen, eje mayor de longitud $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ contenido en la recta generada por $\begin{bmatrix} -3 & 2 \end{bmatrix}^T$ y eje menor de longitud $\sqrt{2}$ contenido en la recta generada por $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T$.

c. una elipse con centro en el origen, eje mayor de longitud $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ contenido en la recta generada por $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ y eje menor de longitud $\sqrt{2}$ contenido en la recta generada por $\begin{bmatrix} -3 & 2 \end{bmatrix}^T$.

d. una elipse con centro en el origen, eje mayor de longitud $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ contenido en la recta generada por $\begin{bmatrix} -3 & 2 \end{bmatrix}^T$ y eje menor de longitud 2 contenido en la recta generada por $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T$. ✖

La respuesta correcta es: una elipse con centro en el origen, eje mayor de longitud $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ contenido en la recta generada por $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}^T$ y eje menor de longitud

$$S = \text{gen}\left\{ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{13}}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}}_{v} \right\} \quad v \to \|v\| = 1 \qquad A = v v^T$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^T (A + 3I)\, x \\ &= x^T A x + 3\|x\|^2 \\ &= x^T v v^T x + 3\|x\|^2 \end{aligned}$$

$$Q(x) = \langle x, v \rangle^2 + 3\|x\|^2$$

$Q(x) = 4 \implies \langle x, v \rangle^2 + 3\|x\|^2 = 4$ si $\|x\| = 1$ y $x = \pm v \to$ Cumple la ecuación

si $x \perp v \to \langle x, v \rangle^2 = 0$ y $\|x\|^2 = \frac{4}{3} \to \|x\| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ y $x \in \text{gen}\left\{ \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

Choice 9/2/22(Parte 1)

sábado, 12 de febrero de 2022 11:05

Pregunta **4**
Incorrecta
Puntúa como 1

Sea $B = \left\{ \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ y sea C la base de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz de cambio de coordenadas de la base B en la base C es

$$M_B^C = \frac{1}{49}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \\ -6 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Si $[x]^C = [1 \ \ 1 \ \ 1]^T$, entonces

a. $x = [5 \ \ 11 \ \ -1]^T$.
b. $x = [11 \ \ -1 \ \ 5]^T$.
c. $x = [5 \ \ -1 \ \ 11]^T$. ✗
d. $x = [-1 \ \ 11 \ \ 5]^T$.

La respuesta correcta es:
$x = [-1 \ \ 11 \ \ 5]^T$.

$$x = M_B^E M_C^B [x]_C = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{49}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \\ -6 & 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 11 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Pregunta **5**
Correcta
Puntúa como 1

Sea $y \in C^\infty(\mathbb{R})$ la solución del problema $y'' + y = 6\sin(x), y(0) = 1, y'(0) = -2$. Vale que

Seleccione una:
a. $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$.
b. $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$.
c. $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.
d. $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. ✓

La respuesta correcta es: $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Cosas útiles:

- La ecuación $(D - \lambda I)^k[y] = 0, k \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}$ tiene como soluciones particulares:
  $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}\}$
- La ecuación $((D - aI)^2 + b^2)^k[y] = 0, \ k \in \mathbb{N}, \ a, b \in \mathbb{R}$ tiene como soluciones particulares:
  $\{e^{ax}\sin(bx), e^{ax}\cos(bx), \overset{k-1}{x}e^{ax}\sin(bx), \overset{k-1}{x}e^{ax}\cos(bx), \dots, xe^{ax}\sin(bx), xe^{ax}\cos(bx)\}$

$L = D^2 + I$ $\quad$ $\text{Nul}(L) = \text{gen}\{\text{sen}(t), \cos(t)\}$

$A = D^2 + I$ $\quad$ $A \circ L = (D^2 + I)(D^2 + I) = (D^2 + I)^2$

$B_{A \circ L} = \{\sin(x), \cos(x), x\,\text{sen}(x), x\cos(x)\}$ $\quad$ $B_{A \circ L} / B_L = \{x\,\text{sen}(x), x\cos(x)\}$

$y_p = a\,x\,\text{sen}(x) + b\,x\cos(x)$

$x\,(a\,\text{sen}(x) + b\cos(x))$
$(a\,\text{sen}(x) + b\cos(x)) + x\,(a\cos(x) - b\,\text{sen}(x))$
$(a\cos(x) - b\,\text{sen}(x)) + (a\cos(x) - b\,\text{sen}(x)) + x\,(-a\,\text{sen}(x) - b\cos(x))$
$2(a\cos(x) - b\,\text{sen}(x)) + x\,(-a\,\text{sen}(x) - b\cos(x))$

$D^2 + I\,(y_p) = 6\sin(x)$

$2(a\cos(x) - b\,\text{sen}(x)) + \cancel{x(-a\,\text{sen}(x) - b\cos(x))} + \cancel{x(a\,\text{sen}(x) + b\cos(x))} = 6\sin(x)$
$2a\cos(x) - 2b\,\text{sen}(x) = 6\sin(x) \to a = 0$
$\to b = -3$

$y(x) = -3x\cos(x) + \lambda\,\text{sen}(x) + \beta\cos(x)$ $\quad$ $y(0) = \beta = 1$
$y'(x) = -3\cos(x) + 3\,\text{sen}(x)\,x + \lambda\cos(t) - \beta\,\text{sen}(t)$
$y'(0) = -3 + \lambda = -2 \to \lambda = 1$

$y(x) = -3x\cos(x) + \text{sen}(x) + \cos(x)$ $\quad$ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Choice 9/2/22(Parte 2)

sábado, 12 de febrero de 2022 12:03

Pregunta **6**

Incorrecta

Puntúa como 1

Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz simétrica que satisface las siguientes propiedades:

1) la dimensión del subespacio $\operatorname{nul}(A-2I)$ es igual a 2

2) $\det(A)=1$;

3) el plano $\{x \in \mathbb{R}^3 : 6x_1+2x_2-3x_3=0\}$ es un autoespacio de A.

El conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^3$ de norma 1 que maximizan la forma cuadrática $Q(x)=x^TAx$ es

Seleccione una:

a. $\left\{\frac{1}{7}\cos(\theta)\begin{bmatrix}2\\3\\6\end{bmatrix}+\frac{1}{7}\sin(\theta)\begin{bmatrix}6\\2\\-3\end{bmatrix} : \theta\in[0,2\pi)\right\}$. ✖

b. $\left\{\frac{1}{7}\cos(\theta)\begin{bmatrix}6\\3\\2\end{bmatrix}+\frac{1}{7}\sin(\theta)\begin{bmatrix}3\\-2\\-6\end{bmatrix} : \theta\in[0,2\pi)\right\}$.

c. $\left\{\frac{1}{7}\cos(\theta)\begin{bmatrix}2\\-6\\3\end{bmatrix}+\frac{1}{7}\sin(\theta)\begin{bmatrix}3\\-2\\-6\end{bmatrix} : \theta\in[0,2\pi)\right\}$.

d. $\left\{\frac{1}{7}\cos(\theta)\begin{bmatrix}3\\-6\\2\end{bmatrix}+\frac{1}{7}\sin(\theta)\begin{bmatrix}2\\3\\6\end{bmatrix} : \theta\in[0,2\pi)\right\}$.

La respuesta correcta es: $\left\{\frac{1}{7}\cos(\theta)\begin{bmatrix}3\\-6\\2\end{bmatrix}+\frac{1}{7}\sin(\theta)\begin{bmatrix}2\\3\\6\end{bmatrix} : \theta\in[0,2\pi)\right\}$

2 autovalores doble $\quad \det(A) = 4 \cdot \lambda = 1 \to \lambda = \frac{1}{4}$

Por rayleigh $\to \max_{\|x\|=1} 2$ y arg max $S_{n-1} \cap S \subseteq \operatorname{nul}(A-2I$

$\lambda \frac{1}{7}\begin{bmatrix}3\\-6\\2\end{bmatrix} + \beta\frac{1}{7}\begin{bmatrix}2\\3\\6\end{bmatrix}$ $\qquad \lambda^2+\beta^2=1$

$(\cos(\theta))^2+(\operatorname{sen}(\theta))^2=1$

Pregunta **7**

Incorrecta

Puntúa como 1

Sea $A=\frac{1}{36}\begin{bmatrix}25&-2&-10\\-2&16&8\\-10&8&22\end{bmatrix}$

El conjunto $\left\{x\in\mathbb{R}^3 : \lim_{n\to\infty}A^nx=0\right\}$ es

Seleccione una:

a. $\{x\in\mathbb{R}^3 : 2x_1+x_2-2x_3=0\}$.

b. $\{x\in\mathbb{R}^3 : 2x_1-x_2-2x_3=0\}$.

c. $\{x\in\mathbb{R}^3 : 2x_1+2x_2-x_3=0\}$.

d. $\{x\in\mathbb{R}^3 : 2x_1+x_2+2x_3=0\}$. ✖

La respuesta correcta es: $\{x\in\mathbb{R}^3 : 2x_1-x_2-2x_3=0\}$

$\sigma(A)=\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{2},1\right\}$ $\qquad \operatorname{nul}(A-I)=\operatorname{gen}\left\{\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$ $\qquad \operatorname{nul}\left(A-\frac{1}{2}I\right)=\operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$ $\qquad \operatorname{nul}\left(A-\frac{1}{4}I\right)=\operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}\right\}$

$P_1=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2\\1\\2\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2&1&2\end{bmatrix}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}4&-2&-4\\-2&1&2\\-4&2&4\end{bmatrix} \longleftarrow x\in\operatorname{nul}(P_1)=\operatorname{gen}\{v_2,v_3\}$

$\in \operatorname{nul}\left(A-\frac{1}{4}\right) \in \operatorname{nul}\left(A-\frac{1}{2}\right)$

v_2 y v_3 cumplen $\{2x_1-x_2-2x_3=0\}$

Pregunta **8**

Correcta

Puntúa como 1

Sea $Q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por $Q(x)=\frac{1}{468}(97x_1^2+60x_1x_2+72x_2^2)$. El conjunto $\{x\in\mathbb{R}^2 : Q(x)=4\}$ es

Seleccione una:

a. una elipse centrada en el origen, con ejes de longitudes 8 y 12 contenidos en la rectas generadas por $\begin{bmatrix}3&2\end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix}-2&3\end{bmatrix}^T$, respectivamente. ✔

b. una elipse centrada en el origen, con ejes de longitudes 8 y 12 contenidos en la rectas generadas por $\begin{bmatrix}-2&3\end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix}3&2\end{bmatrix}^T$, respectivamente.

c. una elipse centrada en el origen, con ejes de longitudes 8 y 12 contenidos en la rectas generadas por $\begin{bmatrix}-3&2\end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix}2&3\end{bmatrix}^T$, respectivamente.

d. una elipse centrada en el origen, con ejes de longitudes 8 y 12 contenidos en la rectas generadas por $\begin{bmatrix}2&3\end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix}-3&2\end{bmatrix}^T$, respectivamente.

La respuesta correcta es: una elipse centrada en el origen, con ejes de longitudes 8 y 12 contenidos en la rectas generadas por $\begin{bmatrix}3&2\end{bmatrix}^T$ y $\begin{bmatrix}-2&3\end{bmatrix}^T$, respectivamente.

$A=\frac{1}{468}\begin{bmatrix}97&30\\30&72\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$ $\qquad \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$

$\left[\left(\frac{1}{9},1,\left[\begin{bmatrix}-\frac{2}{3}\\1\end{bmatrix}\right]\right),\left(\frac{1}{4},1,\left[\begin{bmatrix}\frac{3}{2}\\1\end{bmatrix}\right]\right)\right]$

$Q=x^T\Delta x=\frac{x_1^2}{9}+\frac{x_2^2}{4}=4$

$\frac{x_1^2}{36}+\frac{x_2^2}{16}=1$

$\frac{x_1^2}{(6)^2}+\frac{x_2^2}{(4)^2}=1$

El $\frac{1}{468}$ solo modifica los autovalores pero no los autovectores

Pregunta **9**

Correcta

Puntúa como 1

En $\mathbb{R}_2[x]$ con el producto interno definido por

$\langle p,q\rangle=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}p(x)q(x)dx$,

se considera el subespacio $\mathbb{S}=\{p\in\mathbb{R}_2[x] : p(0)=p'(0)=0\}$.

La distancia del polinomio $1+3x+2x^2$ al subespacio $\mathbb{S}^\perp$ es:

Seleccione una:

a. $\frac{13\sqrt{5}}{15}$.

b. $\frac{11\sqrt{5}}{15}$. ✔

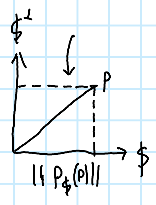
c. $\frac{\sqrt{5}}{15}$.

d. $\frac{7\sqrt{5}}{15}$.

La respuesta correcta es: $\frac{11\sqrt{5}}{15}$

$\mathbb{S}=\operatorname{gen}\{x^2\}$ $\qquad \|x^2\|=\sqrt{\langle x^2,x^2\rangle}$ $\qquad \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1+3x+2x^2)x^2\,dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^2+3x^3+2x^4$

$\int_{-1}^{1}x^k \begin{cases} k \text{ impar} \to 0 \\ k \text{ par} \to \frac{2}{k+1}\end{cases}$



$P_{\mathbb{S}}(p)=\frac{\langle 1+3x+2x^2,x^2\rangle}{\|x^2\|^2}x^2$ $\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{11}{15}$

$\frac{\frac{11}{15}}{\left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^2}x^2=\frac{11\,\cancel{5}^{1}}{\cancel{15}_{3}}x^2$ $\qquad \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^4=\frac{1}{2}\,\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$

$=\frac{11}{3}x^2 \longrightarrow \|P_{\mathbb{S}}(p)\|=\sqrt{\left\langle \frac{11}{3}x^2,\frac{11}{3}x^2\right\rangle}=\sqrt{\frac{121}{9}\,\frac{1}{5}}=\frac{11}{3\sqrt{5}}=\frac{11\sqrt{5}}{15}$

Choice 9/2/22(Parte 3)

sábado, 12 de febrero de 2022 12:52

Pregunta **10**

Incorrecta

Puntúa como 1

Sea $A = \frac{1}{18}\begin{bmatrix} 48 & -3 & -18 \\ 0 & 54 & 0 \\ -4 & -2 & 42 \end{bmatrix}$.

La matriz $B = A^2 + xA + 6yI$ es inversible si y solo si

- a. $(3y + x + 2)(2y + x + 3) \neq 0$.
- b. $(3y - x + 2)(2y + x + 3) \neq 0$.
- c. $(3y - x + 2)(2y - x + 3) \neq 0$. ✗
- d. $(3y + x + 2)(2y - x + 3) \neq 0$.

La respuesta correcta es: $(3y + x + 2)(2y + x + 3) \neq 0$.

$P(\lambda) = \lambda^2 + x\lambda + 6y$ $\quad \sigma(A) = \{2, 3 (\text{doble})\}$ $\quad P(2) = 4 + 2x + 6y = 2 + x + 3y \neq 0$

$P(3) = 9 + 3x + 6y = 3 + x + 2y \neq 0$

$(2 + x + 3y)(3 + x + 2y) \neq 0$

Pregunta **11**

Correcta

Puntúa como 1

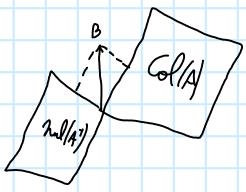
Sea $A = \frac{1}{15}\begin{bmatrix} 8 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

Si $b = \begin{bmatrix} 24 & -36 & 12 \end{bmatrix}^T$, entonces la solución por mínimos cuadrados de norma mínima de la ecuación $Ax = b$ es

Seleccione una:

- a. $\hat{x} = \begin{bmatrix} 53 & -37 & 8 \end{bmatrix}^T$.
- b. $\hat{x} = \begin{bmatrix} 60 & -60 & 0 \end{bmatrix}^T$.
- c. $\hat{x} = \begin{bmatrix} 61 & -29 & 16 \end{bmatrix}^T$.
- d. $\hat{x} = \begin{bmatrix} 75 & -75 & 0 \end{bmatrix}^T$. ✓

La respuesta correcta es: $\hat{x} = \begin{bmatrix} 75 & -75 & 0 \end{bmatrix}^T$.



$A^T A x = A^T b \xrightarrow[\text{Amor de rango mismo}]{} x \in \begin{bmatrix} 75 \\ -75 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \text{nul}(A^T) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$\langle x, \text{nul}(A^T) \rangle = 0$

$$\left\langle \begin{bmatrix} 75 \\ -75 \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} 75 \\ -75 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle}_{=0} + \lambda \underbrace{\left\langle \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle}_{0} = 0 \to \lambda = 0$$

$\hat{x} = [75 \ -75 \ 0]^T$

Pregunta **3**

Correcta

Puntúa como 1

Sea $Y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ tal que $Y' = AY$, donde $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Seleccione una:

- a. $\lim_{t \to +\infty} Y(t) = 0 \iff Y(0) \in \{y \in \mathbb{R}^3 : 2y_1 - y_2 = 0\}$. ✓
- b. $\lim_{t \to +\infty} Y(t) = 0 \iff Y(0) \in \{y \in \mathbb{R}^3 : y_1 - 2y_2 = 0\}$.
- c. $\lim_{t \to +\infty} Y(t) = 0 \iff Y(0) \in \{y \in \mathbb{R}^3 : 2y_1 + y_2 = 0\}$.
- d. $\lim_{t \to +\infty} Y(t) = 0 \iff Y(0) \in \{y \in \mathbb{R}^3 : y_1 + 2y_2 = 0\}$.

La respuesta correcta es: $\lim_{t \to +\infty} Y(t) = 0 \iff Y(0) \in \{y \in \mathbb{R}^3 : 2y_1 - y_2 = 0\}$.

$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad \sigma(A) = \{-1 (\text{doble}), 1\}$ $\quad J = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad A v_2 = v_1 + \lambda_1 v_2$ $\quad A v_3 = \lambda_2 v_3$

$(A - \lambda_1) v_2 = v_1$

$(A - \lambda_1)^2 v_2 = 0$

$N = (A + \lambda)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad N v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Conjunto fundamental de soluciones: $\left\{ e^{-t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, e^{-t}\left(t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right), e^{t}\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

$y(0) = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \lambda \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sim \\ \sim \\ y_1 - \frac{1}{2}y_2 \end{bmatrix} \longrightarrow y_1 - \frac{1}{2}y_2 = 0 \to 2y_1 - y_2 = 0$

Desarrollo 9/2/22 (Parte 1)

sábado, 12 de febrero de 2022 15:54

1. Hallar la solución de la ecuación diferencial $y'' + y = 2\cos(x)$ tal que $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

$L = D^2 + I \qquad \mathrm{nul}(L) = \{\mathrm{sen}(x), \cos(x)\} \qquad A = D^2 + I \qquad A \circ L = (D^2+I)(D^2+I) = (D^2+I)^2$

$B_{A \circ L} = \{\mathrm{sen}(x), \cos(x), x\,\mathrm{sen}(x), x\cos(x)\} \qquad B_{AL} \setminus B_L = \{x\,\mathrm{sen}(x), x\cos(x)\}$

$y_p = \lambda x\,\mathrm{sen}(x) + \beta x \cos(x)$

$x(\lambda\,\mathrm{sen}(x) + \beta\cos(x))$

$\frac{d}{dx}$: $(\lambda\,\mathrm{sen}(x) + \beta\cos(x)) + x(\lambda\cos(x) - \beta\,\mathrm{sen}(x))$

$\frac{d}{dx}$: $(\lambda\cos(x) - \beta\,\mathrm{sen}(x)) + (\lambda\cos(x) - \beta\,\mathrm{sen}(x) + x(-\lambda\,\mathrm{sen}(x) - \beta\cos(x))$

$L[y_p] = 2\cos(x)$

$(D^2+I)[y_p] = 2\cos(x)$

$(\lambda\cos(x) - \beta\,\mathrm{sen}(x)) + (\lambda\cos(x) - \beta\,\mathrm{sen}(x) + \cancel{x(-\lambda\,\mathrm{sen}(x) - \beta\cos(x))} + \cancel{x(\lambda\,\mathrm{sen}(x) + \beta\cos(x))} = 2\cos(x)$

$2\lambda\cos(x) - 2\beta\,\mathrm{sen}(x) = 2\cos(x) \longrightarrow \beta = 0 \wedge \lambda = 1$

$y(x) = x\,\mathrm{sen}(x) + a\,\mathrm{sen}(x) + b\cos(x)$

$y(0) = b = 1 \qquad y'(x) = \mathrm{sen}(x) + x\cos(x) + a\cos(x) - b\,\mathrm{sen}(x) \to y'(0) = a = 1$

$$\boxed{y(x) = x\,\mathrm{sen}(x) + \mathrm{sen}(x) + \cos(x)}$$

2. Explicar por qué la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

no es diagonalizable, y hallar una matriz invertible P y una matriz de Jordan J tales que $A = PJP^{-1}$.

$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 6 & 0 \\ 6 & -\lambda & -6 \\ 0 & 6 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -6 \\ 6 & -\lambda \end{vmatrix} + (-6)\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 6 & \lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(\lambda^2 + 36) + (-6)(-6\lambda)$

$= -\lambda^3 - \cancel{36\lambda} + \cancel{36\lambda} = 0 \longrightarrow \lambda = 0$

$\mathrm{nul}(A - 0I) = \mathrm{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ Es el caso en que $\sigma(A) = \{0\}$ $m(0) = 3$ $\mu(0) = 1$

A es semejante a $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad A[v_1\ v_2\ v_3] = [v_1\ v_2\ v_3]\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$

$Av_1 = \lambda v_1$

$Av_2 = v_1 + \lambda v_2 \to (A-\lambda)v_2 = v_1 \to (A-\lambda)^2 v_2 = 0$

$Av_3 = v_2 + \lambda v_3 \to (A-\lambda)v_3 = v_2$

$(A-\lambda)^3 v_3 = 0$

Ojo $v_3 \in \mathrm{nul}(A-\lambda)^3$ pero no a $\mathrm{nul}(A-\lambda)^2$

$N^3 = (\underbrace{A - 0I}_{N})^3 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}}_{N}\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} 36 & 0 & -36 \\ 0 & 0 & 0 \\ 36 & 0 & -36 \end{bmatrix}}_{N^2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{N^3}$

$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad Nv_3 = v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad N^2 v_3 = v_1 = \begin{bmatrix} 72 \\ 0 \\ 72 \end{bmatrix} \qquad \{N^2v_3, Nv_3, v_3\}$

$$\boxed{P = \begin{bmatrix} 72 & 0 & 1 \\ 0 & 12 & 0 \\ 72 & 0 & -1 \end{bmatrix}}$$

3. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$, donde

$$A = 2\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Caracterizar geométricamente y graficar la imagen por T de la circunferencia unitaria $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$.

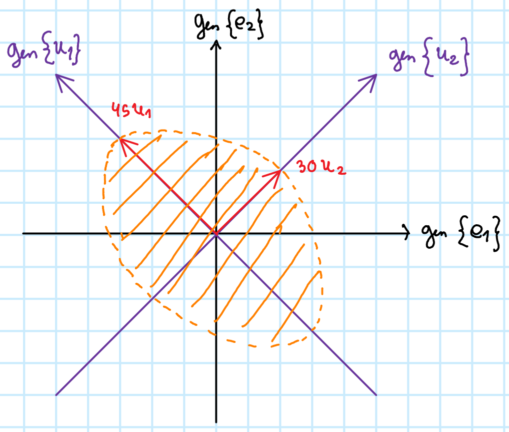
$A = \underbrace{2.5.3}_{30}\begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} + \underbrace{3.5.3}_{45}\begin{bmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \end{bmatrix} \longrightarrow A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 45 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ & V_3^T & \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad V_3^T = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$

$x = \xi_1\begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} + \xi_2\begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} + \xi_3\begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$ Para $\|x\| = 1 \to \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$

$r \leq n$

$Ax = \underbrace{\xi_1 45}_{\eta_1}\underbrace{\begin{bmatrix} -4/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}}_{u_1} + \underbrace{\xi_2 30}_{\eta_2}\underbrace{\begin{bmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}}_{u_2}$ con $\xi_1^2 + \xi_2^2 \leq 1 \longrightarrow \left(\frac{\eta_1}{45}\right)^2 + \left(\frac{\eta_2}{30}\right)^2 \leq 1$



Desarrollo 9/2/22 (Parte 2)

sábado, 12 de febrero de 2022 17:56

4. Sea $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por $Q(x) = x^T A x$, donde $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es una matriz simétrica que satisface las siguientes propiedades: $\dim(\operatorname{nul}(A - I)) = 2$; $\det(A) = -1$; el plano $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ es un autoespacio de A. Hallar los puntos de la superficie de nivel $Q(x) = 9$ más cercanos al origen.

2 es autovalor doble $\to \operatorname{nul}(A - 2I) = \operatorname{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \right\}$

$\operatorname{Det}(A) = 1.1.\lambda = -1 \to \lambda = -1$

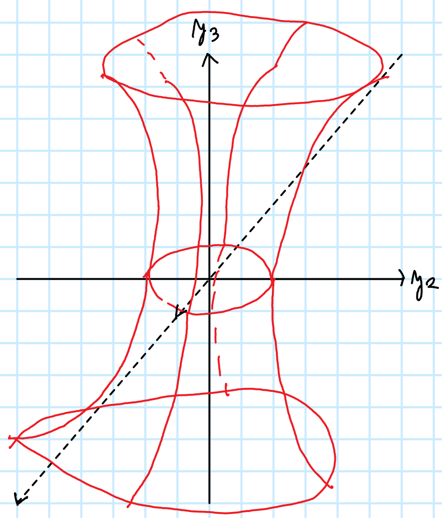
$\operatorname{nul}(A + I) = \operatorname{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \right\}$

$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \longrightarrow \operatorname{Det}(P) = -1 \to$ Cambio una columna $\longrightarrow P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$ $\quad \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$Q(x) = x^T A x \longrightarrow \tilde{Q}(y) = Q(Py) = y^T P^T A P y = y^T \Lambda y = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

$Q(x) = 9 \longrightarrow \tilde{Q}(y) = 9$ porque las rotaciones preservan ángulos y distancias

$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 = 9 \longrightarrow \dfrac{y_1^2}{3^2} + \dfrac{y_2^2}{3^2} - \dfrac{y_3^2}{3^2} = 1$



$\min\limits_{Q(x)=9} Q(x) = 3$

$\operatorname{Arg}\min\limits_{Q(x)=9} Q(x) = \left\{ \lambda \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \text{ con } \lambda^2 + \beta^2 = 9 \right\}$

$\lambda = 3\cos(t) \quad \beta = 3\operatorname{sen}(t)$

$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} + \\ + \\ + \end{bmatrix} \leftarrow$ esta bien la mano derecha

$\operatorname{Arg}\min\limits_{Q(x)=9} Q(x) = \left\{ 3\cos(t) \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} + 3\operatorname{sen}(t) \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{bmatrix} \text{ con } t \in [0, 2\pi] \right\}$

Choice 1/9/21(Parte 1)

sábado, 12 de febrero de 2022 18:35

Pregunta **4**
Incorrecta
Puntúa como 1
Marcar pregunta

Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ax$. donde $A = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 12 & 20 \end{bmatrix}$

La imagen por T de la circunferencia unitaria $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ es

Seleccione una:

a. una elipse con centro en el origen, eje mayor de longitud $32\sqrt{10}$ contenido en la recta generada por $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^T$ y eje menor de longitud $16\sqrt{10}$ contenido en la recta generada por $\begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^T$.

b. una elipse con centro en el origen, eje mayor de longitud $40\sqrt{10}$ contenido en la recta generada por $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^T$ y eje menor de longitud $20\sqrt{10}$ contenido en la recta generada por $\begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^T$. ✖

c. una elipse con centro en el origen, eje mayor de longitud $16\sqrt{10}$ contenido en la recta generada por $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^T$ y eje menor de longitud $8\sqrt{10}$ contenido en la recta generada por $\begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^T$.

d. una elipse con centro en el origen, eje mayor de longitud $24\sqrt{10}$ contenido en la recta generada por $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^T$ y eje menor de longitud $12\sqrt{10}$ contenido en la recta generada por $\begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^T$.

La respuesta correcta es: una elipse con centro en el origen, eje mayor de longitud $16\sqrt{10}$ contenido en la recta generada por $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^T$ y eje menor de longitud $8\sqrt{10}$ contenido en la recta generada por $\begin{bmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}^T$.

```
A= Matrix([[16,0],[12,20]])
A.singular_value_decomposition()
```

✓ 0.2s

$$\left(\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix}-\frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5}\end{matrix}}_{u_2} & \underbrace{\begin{matrix}\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{2\sqrt{5}}{5}\end{matrix}}_{u_1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \overbrace{4\sqrt{10}}^{\sigma_2} & 0 \\ 0 & \underbrace{8\sqrt{10}}_{\sigma_1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{matrix}}_{v_2} & \underbrace{\begin{matrix}\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{matrix}}_{v_1} \end{bmatrix}\right)$$

$x = a v_1 + b v_2 \rightarrow \|x\| = 1 \leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$

$r = h$

$Ax = \underbrace{a\, 8\sqrt{10}}_{\eta_1} u_1 + \underbrace{b\, 4\sqrt{10}}_{\eta_2} u_2 \leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$

$\left(\frac{\eta_1}{8\sqrt{10}}\right)^2 + \left(\frac{\eta_2}{4\sqrt{10}}\right)^2 = 1$

Pregunta **5**
Correcta
Puntúa como 1
Marcar pregunta

En $\mathbb{R}_2[x]$ con el producto interno definido por
$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$
se considera $\phi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ la funcional lineal definida por
$\phi(p) = 2p'\left(\frac{1}{2}\right)$.
El único polinomio $q \in \mathbb{R}_2[x]$ tal que $\phi(p) = \langle p, q \rangle$ para todo $p \in \mathbb{R}_2[x]$ es

Seleccione una:

a. $q = -9x^2 + 19x - 4$.

b. $q = 3x^2 - 5x$.

c. $q = -3x^2 + 7x - 2$.

d. $q = -15x^2 + 31x - 6$.

La respuesta correcta es: $q = -3x^2 + 7x - 2$.

$B = \{1, x, x^2\}$

$q = a + bx + c$

$$\begin{bmatrix} \langle 1,1\rangle & \langle 1,x\rangle & \langle 1,x^2\rangle \\ \langle x,1\rangle & \langle x,x\rangle & \langle x,x^2\rangle \\ \langle x^2,1\rangle & \langle x^2,x\rangle & \langle x^2,x^2\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(1) \\ \phi(x) \\ \phi(x^2) \end{bmatrix}$$

$\phi(1) = 0$
$\phi(x) = 2$
$\phi(x^2) = 2 \cdot \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = 2$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$\boxed{q = -2 + 7x - 3x^2}$

Pregunta **6**
Incorrecta
Puntúa como 1
Marcar pregunta

Sea $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática de la forma $Q(x) = x^T Ax$. con $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ una matriz simétrica.
Si $\{x \in \mathbb{R}^2 : Q(x) = 0\} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} -3 & 4 \end{bmatrix}^T\right\} \cup \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}^T\right\}$, entonces la matriz A puede ser

Seleccione una:

a. $A = \begin{bmatrix} 24 & 25 \\ 25 & 24 \end{bmatrix}$.

b. $A = \begin{bmatrix} 24 & 7 \\ 7 & -24 \end{bmatrix}$.

c. $A = \begin{bmatrix} 24 & -7 \\ -7 & -24 \end{bmatrix}$.

d. $A = \begin{bmatrix} 24 & -25 \\ -25 & 24 \end{bmatrix}$.

La respuesta correcta es: $A = \begin{bmatrix} 24 & -7 \\ -7 & -24 \end{bmatrix}$.

$\lambda \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\beta \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

$(-3x_1 + 4x_2)(4x_1 + 3x_2) = 0$

$-12x_1^2 - 9x_1x_2 + 16x_1x_2 + 12x_2^2$

$-2\left(x^T \begin{bmatrix} -12 & \frac{7}{2} \\ \frac{7}{2} & 12 \end{bmatrix} x\right) = 0 \quad (-2)$

$x^T \begin{bmatrix} 24 & -7 \\ -7 & -24 \end{bmatrix} x = 0$

Choice 1/9/21(Parte 2)

sábado, 12 de febrero de 2022 18:36

Pregunta **7**
Incorrecta
Puntúa como 1
Marcar pregunta

Sean $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ y $B \in \mathbb{R}^{3\times3}$ dos matrices tales que $AB = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 7 & -5 & 14 \\ 8 & -4 & 10 \end{bmatrix}$

donde $\text{nul}(A) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T\right\}$, y B satisface que

$B\begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 9 & 9 & -9 \end{bmatrix}^T$.

$B\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}^T$.

Una solución particular de la ecuación $Ax = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \end{bmatrix}^T$ es

Bx

Seleccione una:

- a. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T$.
- b. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$.
- c. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$.
- d. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$.

La respuesta correcta es: $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T$.

$$AB\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ -9 \end{bmatrix} \longrightarrow A\begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -3 \\ 7 & -5 & 14 \\ 8 & -4 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -18 \\ -18 \end{bmatrix}$$

$$AB\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \longrightarrow A\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\lambda\begin{bmatrix} -9 \\ -18 \\ -18 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} -9 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{18} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (0, 1)\right)$$

$$\frac{1}{18}\begin{bmatrix} 9 \\ 9 \\ -9 \end{bmatrix} + \left(-\frac{1}{6}\right)\begin{bmatrix} -9 \\ 12 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$\lambda = \frac{1}{18}$ $\beta = -\frac{1}{6}$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

simétrica $(A = A^T)$ $\begin{cases} \text{Proy ortogonal} \\ \text{simetría ortogonal} \end{cases}$

Pregunta **8**
Correcta
Puntúa como 1
Marcar pregunta

Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ la matriz en base canónica de la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^3$ sobre el subespacio $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0\}$.
La solución por cuadrados mínimos de norma mínima de la ecuación $Ax = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}^T$ es

- a. $\hat{x} = \frac{1}{49}\begin{bmatrix} 12 & -13 & 18 \end{bmatrix}^T$.
- b. $\hat{x} = \frac{1}{49}\begin{bmatrix} 183 & -88 & 54 \end{bmatrix}^T$.
- c. $\hat{x} = \frac{1}{49}\begin{bmatrix} 24 & -75 & 134 \end{bmatrix}^T$.
- d. $\hat{x} = \frac{1}{49}\begin{bmatrix} 63 & -7 & -28 \end{bmatrix}^T$.

La respuesta correcta es:
$\hat{x} = \frac{1}{49}\begin{bmatrix} 24 & -75 & 134 \end{bmatrix}^T$.

$A^TAx = A^Tb$ } $A^T = A$ por ser A simétrica

$A^2x = Ab$ } $A^2 = A$ por idempotencia de matrices de proy ortogonal con producto interno canónico

$Ax = Ab$

$Ax - Ab = 0$

$A(x-b) = 0$

$(x-b) \in \text{nul}(A)$

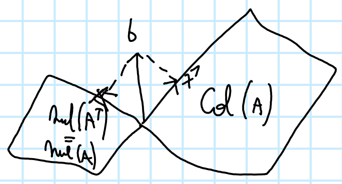
$x - b = a\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}^T$

$x = b + a\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \hat{x}$

$\langle \hat{x}, \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}^T \rangle = 0$

$\langle \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}^T \rangle + a\langle \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}^T \rangle = 0$ ✓

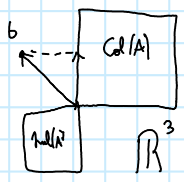
$37 + a\,49 = 0 \rightarrow a = -\frac{37}{49}$



$\hat{x} = b - P_{\text{nul}(A)}(b)$

x

$A^TAx = A^Tb \rightarrow x = S_p + \text{nul}(A^T) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ Σ



$\langle x, \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \end{bmatrix} \rangle =$

$\begin{cases} \hat{x} \in \Sigma \\ \langle x, \text{nul}(A^T) \rangle = 0 \end{cases}$

Pregunta **3**
Incorrecta
Puntúa como 1
Marcar pregunta

Sea $Y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ tal que $Y' = AY$, donde $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Seleccione una:

- a. $\lim_{t\to+\infty} Y(t) = 0 \iff Y(0) \in \{y \in \mathbb{R}^3 : 2y_2 + 5y_3 = 0\}$.
- b. $\lim_{t\to+\infty} Y(t) = 0 \iff Y(0) \in \{y \in \mathbb{R}^3 : y_2 + 4y_3 = 0\}$.
- c. $\lim_{t\to+\infty} Y(t) = 0 \iff Y(0) \in \{y \in \mathbb{R}^3 : y_2 + y_3 = 0\}$.
- d. $\lim_{t\to+\infty} Y(t) = 0 \iff Y(0) \in \{y \in \mathbb{R}^3 : 2y_2 + 3y_3 = 0\}$.

La respuesta correcta es: $\lim_{t\to+\infty} Y(t) = 0 \iff Y(0) \in \{y \in \mathbb{R}^3 : 2y_2 + 3y_3 = 0\}$.

$$A\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

```
A.eigenvects()
✓ 0.6s
```

$$\left[\left(-1, 2, \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right]\right), \left(1, 1, \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right]\right)\right]$$

$Av_1 = \lambda v_1$

$Av_2 = v_1 + \lambda v_2 \rightarrow Av_2 - \lambda v_2 = v_1$

$Av_3 = \lambda_2 v_3$

$(A - \lambda)v_2 = v_1$

$(A - \lambda)^2 v_2 = 0$

$v_2 \in \text{nul}((A-\lambda)^2) \setminus \text{nul}(A-\lambda)^2$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\left\{ \sim\sim\sim\sim\sim, \; e^t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$-2y_2 - 3y_3 = 0$

$2y_2 + 3y_3 = 0$

Choice 1/9/21(Parte 3)

domingo, 13 de febrero de 2022 12:18

Pregunta **9**
Correcta
Puntúa como 1
Marcar pregunta

El mínimo de $13x_1^2 + 10x_1x_2 + 13x_2^2$ sujeto a la restricción $15x_1^2 + 34x_1x_2 + 15x_2^2 = 9$ es

Seleccione una:
- a. $\frac{9}{16}$.
- b. 9.
- c. $\frac{9}{4}$.
- d. $\frac{81}{16}$.

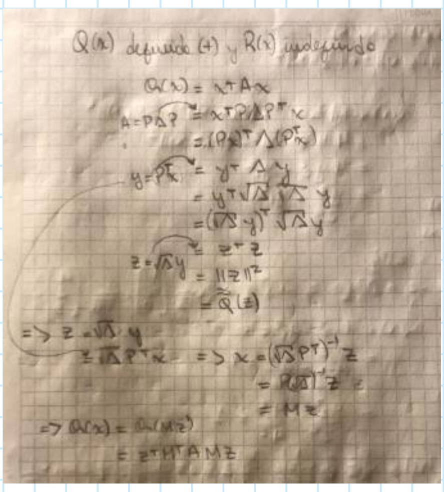
La respuesta correcta es: $\frac{81}{16}$.

$R(x) = 15x_1^2 + 34x_1x_2 + 15x_2^2 = 9$

$x^T \underbrace{\begin{bmatrix} 15 & 17 \\ 17 & 15 \end{bmatrix}}_{B} x = 9 \longrightarrow 15 > 0$ pero $\det(B) < 0 \to$ Indefinida

$A = \begin{bmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 13 \end{bmatrix} \longrightarrow \sigma(A) = \{18, 8\} \to \operatorname{nul}(A - 18I) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ $\operatorname{nul}(A - 8I) = \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$

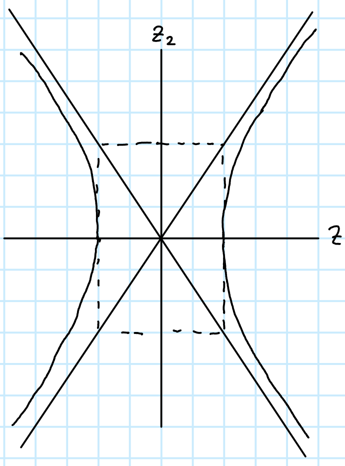
$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\Lambda^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{18} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{8} \end{bmatrix}$ $M = P\Lambda^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1/6 & 1/4 \\ 1/6 & -1/4 \end{bmatrix}$



$\tilde{Q}(z) = Q(Mz) = \|z\|^2$ $\tilde{R}(z) = R(Mz) = z^T M^T B M z = z^T \begin{bmatrix} \frac{16}{9} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} z$

$\tilde{R}(z) = \frac{16}{9} z_1^2 - \frac{1}{4} z_2^2$

$R(x) = 9 \to \tilde{R}(z) = 9 \longrightarrow \frac{z_1^2}{\left(\frac{9}{4}\right)^2} - \frac{z_2^2}{(6)^2} = 1$



$\arg\min_{\tilde{R}(z)=9} \tilde{Q}(z) = \left\{ \underbrace{\pm\frac{9}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{z_1} \right\} \longrightarrow x = Mz$ $x_1 = \frac{3}{8}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \to Q(x_1) = \frac{81}{16}$ $x_2 = \frac{3}{8}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\tilde{Q}(z_1) = \frac{81}{16}$

Pregunta **10**
Correcta
Puntúa como 1
Marcar pregunta

En $\mathbb{R}^{3\times 3}$ se considera la norma de Frobenius definida por $\|X\|_F = \sqrt{\operatorname{traza}(X^TX)}$.

Sea $A = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 1 & 7 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que

- a. $\left\| A^n - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\|_F = \frac{1}{2^n}\sqrt{\frac{11}{8}}$.
- b. $\left\| A^n - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\|_F = \frac{1}{2^n}\sqrt{\frac{3}{2}}$.
- c. $\left\| A^n - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\|_F = \frac{1}{2^n}\sqrt{\frac{3}{2}}$.
- d. $\left\| A^n - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \right\|_F = \frac{1}{2^n}\sqrt{\frac{11}{8}}$.

La respuesta correcta es:

$\left\| A^n - \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\|_F = \frac{1}{2^n}\sqrt{\frac{11}{8}}$.

$A^n = 1^n P_1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n P_2$

$A^n - P_1 = \frac{1}{2}^n P_2$

$\|A^n - P_1\|_F = \frac{1}{2^n}\|P_2\|_F$

```
A= Rational('1/8')* Matrix([[8,0,0],[1,7,3],[-1,1,5]])
A, A.eigenvects()
```

✓ 0.5s

$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{8} & \frac{3}{8} \\ -\frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{bmatrix}, \left[\left(\frac{1}{2}, 1, \left[\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right]\right), \left(1, 2, \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right]\right)\right]\right)$

Sea $y \in C^\infty(\mathbb{R})$ la solución del problema $y' - y = \cos(t), y(0) = 1$. Vale que

Seleccione una:
- a. $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{10}\left(2\sqrt{2} + 11e^{\frac{\pi}{4}}\right)$.
- b. $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{17}\left(1 + 18e^{\frac{\pi}{4}}\right)$.
- c. $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{5}\left(2 + 6e^{\frac{\pi}{4}}\right)$.
- d. $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$.

La respuesta correcta es: $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$.

$L = D - I$ $\operatorname{nul}(L) = \operatorname{gen}\{e^x\}$ $A = D^2 + I$ $B_A = \{\cos(x), \sin(x)\}$

Cosas útiles:
- La ecuación $(D - \lambda I)^k[y] = 0, k \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}$ tiene como soluciones particulares:
  $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}\}$
- La ecuación $((D - aI)^2 + b^2)^k[y] = 0,\ k \in \mathbb{N},\ a, b \in \mathbb{R}$ tiene como soluciones particulares:
  $\{e^{ax}\sin(bx), e^{ax}\cos(bx), xe^{ax}\sin(bx), xe^{ax}\cos(bx), \dots, xe^{ax}\sin(bx), xe^{ax}\cos(bx)\}$

$A \circ L = (D^2 + I)(D - I)$

$B_{AL} = \{\sin(x), \cos(x), e^x\}$ $B_{AL} \setminus B_L = \{\sin(x); \cos(x)\}$ $y_p = a\sin(x) + b\cos(x)$

$D' - I(y_p) = a\cos(x) - b\sin(x) - (a\sin(x) + b\cos(x)) = \cos(x)$

$\cos(x)(a - b) + \sin(x)(-b - a) = \cos(x) \longrightarrow a - b = 1$, $b + a = 0 \to b = -a \to 2a = 1 \to a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$

$y(x) = \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{1}{2}\cos(x) + \lambda e^x \to y(0) = -\frac{1}{2} + \lambda = 1 \to \lambda = \frac{3}{2} \to y(x) = \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x)) + \frac{3}{2}e^x \to y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$

Desarrollo 1/9/21(Parte 1)

domingo, 13 de febrero de 2022 13:36

1. Sea $(\mathbb{V}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un $\mathbb{R}$-espacio euclídeo de dimensión 2 y sea $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ una base de $\mathbb{V}$ tal que

$$\|v_1\| = 1, \quad \|v_1 + v_2\| = 2\sqrt{2}, \quad \|v_1 - v_2\| = \sqrt{2}.$$

Calcular el área del triángulo de vértices v_1, v_2 y $v_1 + v_2$.

$$\left.\begin{aligned} \|v+u\|^2 &= \|v\|^2 + 2\langle v,u\rangle + \|u\|^2 \\ \|v-u\|^2 &= \|v\|^2 - 2\langle v,u\rangle + \|u_2\|^2 \end{aligned}\right\} \|v+u\|^2 - \|v-u\|^2 = 4\langle v,u\rangle \rightarrow \langle v,u\rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+u\|^2 - \|v-u\|^2\right)$$

$$\{v_1, v_2, v_1+v_2\} \xrightarrow[\text{resto } v_2]{\text{lo muevo al origen}} \{0, v_1, v_1 - v_2\}$$

$$G_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix} \qquad \langle v_1, v_1 - v_2\rangle = \underbrace{\langle v_1, v_1\rangle}_{1} - \underbrace{\langle v_1, v_2\rangle}_{3/2} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{\sqrt{\text{Det}(G_{\mathcal{B}})}}{2} = \frac{\sqrt{2 - \frac{1}{4}}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{7}}{4}}$$

2. Hallar todas las soluciones $Y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ del sistema

$$Y' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} Y$$

y determinar cómo tienen que ser los valores iniciales $Y(0) \in \mathbb{R}^3$ para que

$$\lim_{t\to+\infty} Y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Por ser triangular superior se ve que } \sigma(A) = \{-1, 1\},\ m(-1) = 2,\ m(1) = 1$$

$$\text{nul}(A+1) = \text{nul}\Bigg(\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{N}\Bigg) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} \qquad \text{nul}(A - I) = \text{nul}\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}\right) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda_1 v_1 \\ Av_2 &= v_1 + \lambda_1 v_2 \\ Av_3 &= \lambda_2 v_3 \end{aligned} \rightarrow \begin{aligned} &Av_2 - \lambda v_2 = v_1 \\ &(A - \lambda I)v_2 = v_1 \\ &(A-\lambda I)^2 v_2 = 0 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elijo $v \in \text{nul}(N^2) \setminus \text{nul}(N)$

$$v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad v_1 = Nv_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sabemos que el conjunto fundamental de soluciones es de la forma: $\{e^{\lambda_1 t}v_1,\ e^{\lambda_1 t}(tv_1 + v_2),\ e^{\lambda_2 t}v_3\}$

$$y(t) = \lambda e^{-t}v_1 + \beta e^{-t}(v_1 t + v_2) + \alpha e^{t} v_3 \qquad \lim_{t\to\infty} \lambda e^{-t}v_1 + \beta e^{-t}(v_1 t + v_2) + \alpha e^t v_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

$$y(0) = \lambda v_1 + \beta v_2 + \alpha v_3$$

$$y(0) = \lambda v_1 + \beta v_2 \searrow \text{gen}\{v_1, v_2\}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad 2y_2 + y_3 = 0$$

4. Sea $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por

$$Q(x) = 4\|x\|^2 - 5\|P_{\mathbb{S}}(x)\|^2,$$

donde $P_{\mathbb{S}}$ es la proyección ortogonal sobre el subespacio

$$\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 = 0,\ 2x_2 - x_3 = 0\}.$$

Caracterizar geométricamente el conjunto de nivel $\mathcal{N}_{16}(Q) = \{x \in \mathbb{R}^3 : Q(x) = 16\}$, graficarlo en el sistema cartesiano definido por los ejes principales de Q y determinar los puntos de $\mathcal{N}_{16}(Q)$ más cercanos al origen, indicando su distancia al mismo.

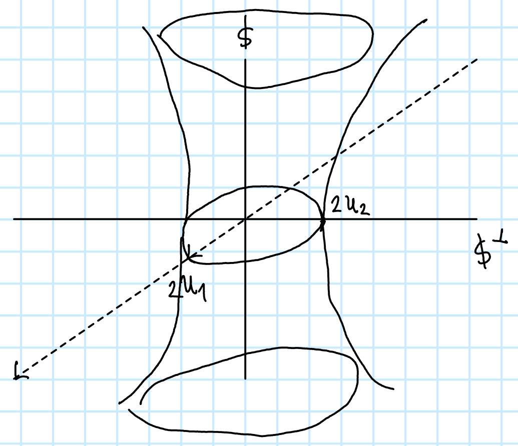
$$x = P_{\mathbb{S}}(x) + P_{\mathbb{S}^\perp}(x) \qquad \text{Como son ortogonales}$$

$$\|x\|^2 = \|P_{\mathbb{S}}(x)\|^2 + \|P_{\mathbb{S}^\perp}(x)\|^2$$

$$Q(x) = 4\|x\|^2 - 5\|P_{\mathbb{S}}(x)\|^2$$

$$Q(x) = 4\|P_{\mathbb{S}^\perp}(x)\|^2 - \|P_{\mathbb{S}}(x)\|^2$$

$$Q(x) = 16 \longrightarrow 4\|P_{\mathbb{S}^\perp}(x)\|^2 - \|P_{\mathbb{S}}(x)\|^2 = 16 \longrightarrow \frac{\|P_{\mathbb{S}^\perp}(x)\|^2}{(2)^2} - \frac{\|P_{\mathbb{S}}(x)\|^2}{(4)^2} = 1$$



$$\mathbb{S}^\perp = \text{gen}\{u_1, u_2\} \qquad \mathbb{S} = \text{gen}\{u_3\}$$

$$\mathbb{S}^\perp = \text{gen}\Bigg\{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_1}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}}_{u_2}\Bigg\}$$

$$\min_{x\in\mathcal{N}_{16}(Q)} Q(x) = 2$$

$$\arg\min_{x\in\mathcal{N}_{16}(Q)} Q(x) = \left\{2\lambda\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\beta\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ con } \lambda^2 + \beta^2 = 1\right\}$$

$$= \left\{\cos(t)\frac{2}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \text{sen}(t)\frac{2}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ con } t \in [0, 2\pi)\right\}$$

Desarrollo 1/9/21(Parte 2)

domingo, 13 de febrero de 2022 15:26

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ tal que $4 \in \sigma(A^T A)$, $\text{nul}(A) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}^T\right\}$ y

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & -2 \\ 2 & -3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P,$$

donde $a > b \geq 0$ y $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es una matriz ortogonal tal que $P_{11} > 0$. Hallar $A^\dagger$, la seudoinversa de Moore-Penrose de A y determinar la solución por cuadrados mínimos de norma mínima de la ecuación $Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

$$A = U\Sigma V^T = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & -2 \\ 2 & -3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7a & 0 \\ 0 & 7b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

$4 \in \sigma(A^T A) \rightarrow$ 2 es valor singular

b debe ser 0 y $7a = 2$

$a = \frac{2}{7}$

$$A = U\Sigma V^T = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & -2 \\ 2 & -3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix} \rightarrow A = U_r \Sigma_r V_r^T = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/5 & -3/5 \end{bmatrix}$$

$$A^+ = U_r \Sigma_r V_r^T = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T = \begin{bmatrix} 4/5 \\ -3/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \end{bmatrix} \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{35}\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{35}\begin{bmatrix} 4/2 \\ -3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{70}\begin{bmatrix} 24 & 12 & 8 \\ -18 & -9 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\hat{x} = A^+ b = \frac{1}{70}\begin{bmatrix} 24 & 12 & 8 \\ -18 & -9 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{70}\begin{bmatrix} 44 \\ -33 \end{bmatrix} = \frac{11}{70}\begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Choice 25/8/21(Parte 1)

domingo, 13 de febrero de 2022 16:59

Pregunta **3**
Correcta
Puntúa como 1
Marcar pregunta

Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ la matriz simétrica tal que $\det(A) = 12$, $\text{traza}(A) = -1$ y $\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$ es un autoespacio de A.

Seleccione una:

a. $Ax = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T \iff x = -\begin{bmatrix}\frac{37}{54} & \frac{11}{27} & \frac{17}{54}\end{bmatrix}^T$.

b. $Ax = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T \iff x = \begin{bmatrix}\frac{1}{18} & -\frac{7}{9} & \frac{1}{18}\end{bmatrix}^T$.

c. $Ax = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T \iff x = -\begin{bmatrix}\frac{17}{54} & \frac{11}{27} & \frac{37}{54}\end{bmatrix}^T$.

d. $Ax = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T \iff x = \begin{bmatrix}\frac{23}{54} & \frac{23}{54} & -\frac{1}{27}\end{bmatrix}^T$.

La respuesta correcta es: $Ax = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T \iff x = \begin{bmatrix}\frac{23}{54} & \frac{23}{54} & -\frac{1}{27}\end{bmatrix}^T$.

$\text{Det}(A) = \lambda_1^2 \lambda_2 = 12$
$\text{Tr}(A) = 2\lambda_1 + \lambda_2 = -1 \to \lambda_2 = -1 - 2\lambda_1$

$\lambda_1^2(-1-2\lambda_1) = 12$
$-2\lambda_1^3 - \lambda_1^2 = 12$
$-2\lambda_1^3 - \lambda_1^2 - 12 = 0 \to \lambda_1 = -2 \qquad \lambda_2 = 3$

$$A = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 4/\sqrt{45} & 2/3 \\ 0 & -5/\sqrt{45} & 2/3 \\ -2/\sqrt{5} & 2/\sqrt{45} & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 & -2/\sqrt{5} \\ 4/\sqrt{45} & -5/\sqrt{45} & 2/\sqrt{45} \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$x = A^{-1}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 23/54 \\ 23/54 \\ -1/27 \end{bmatrix}$$

Pregunta **4**
Correcta
Puntúa como 1
Marcar pregunta

Sea $Y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ la solución del problema de valores iniciales

$$Y' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} Y,$$

$$Y(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Vale que

Seleccione una:

a. $Y(\ln(2)) = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ 2 - 12\ln(2) \end{bmatrix}$.

b. $Y(\ln(2)) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 - 6\ln(2) \end{bmatrix}$.

c. $Y(\ln(2)) = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 2 - 12\ln(2) \end{bmatrix}$.

d. $Y(\ln(2)) = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 11/2 \\ 8 - 6\ln(2) \end{bmatrix}$.

La respuesta correcta es: $Y(\ln(2)) = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 - 6\ln(2) \end{bmatrix}$.

$V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad V_1 = N V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad V_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$y(t) = \lambda e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta e^t \left(t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \alpha e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ \beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = -4 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 3 e^t \left(t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) - 2 e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y(\ln(2)) = -8 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 6 \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\ln(2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) - 1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 - 6\ln(2) \end{bmatrix}$$

Pregunta **5**
Incorrecta
Puntúa como 1
Marcar pregunta

Sea $A = -\frac{1}{18} \begin{bmatrix} 24 & 3 & 18 \\ 0 & 18 & 0 \\ 4 & 2 & 30 \end{bmatrix}$.

La matriz $B = A^2 + xA + yI$ es inversible si y solo si

a. $(y + x + 1)(y - 2x + 4) \neq 0$.

b. $(y + x + 1)(y + 2x + 4) \neq 0$.

c. $(y - x + 1)(y - 2x + 4) \neq 0$.

d. $(y - x + 1)(y + 2x + 4) \neq 0$.

La respuesta correcta es:
$(y - x + 1)(y - 2x + 4) \neq 0$.

$\sigma(A) = \{-2, -1(\text{doble})\}$ $\qquad p(\lambda) = \lambda^2 + x\lambda + y \to p(-2) = 4 - 2x + y \ \vee\ p(-1) = 1 - x + y$

$(4 - 2x + y)(1 - x + y) \neq 0$

Pregunta **7**
Incorrecta
Puntúa como 1
Marcar pregunta

Si $v = \begin{bmatrix}4 & -5 & 2\end{bmatrix}^T$, entonces el conjunto de los puntos de la superficie de nivel $x^T\left(vv^T - 20I\right)x = 5$ más cercanos al origen es

Seleccione una:

a. $\left\{\frac{\cos(\theta)}{6}\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\end{bmatrix}^T + \frac{\sqrt{5}\sin(\theta)}{10}\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\end{bmatrix}^T : \theta \in [0, 2\pi)\right\}$.

b. $\left\{\begin{bmatrix}\frac{4}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{15}\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}-\frac{4}{15} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{15}\end{bmatrix}^T\right\}$.

c. $\left\{\begin{bmatrix}\frac{2}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{4}{15}\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}-\frac{2}{15} & \frac{1}{3} & -\frac{4}{15}\end{bmatrix}^T\right\}$.

d. $\left\{\frac{\cos(\theta)}{6}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\end{bmatrix}^T + \frac{\sqrt{5}\sin(\theta)}{10}\begin{bmatrix}-2 & 0 & 1\end{bmatrix}^T : \theta \in [0, 2\pi)\right\}$.

La respuesta correcta es: $\left\{\begin{bmatrix}\frac{4}{15} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{15}\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}-\frac{4}{15} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{15}\end{bmatrix}^T\right\}$.

$V = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} \to U = \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad V = \sqrt{45}\, U \qquad V^T V = 45 \underbrace{U^T U}_{P_{gen\{u\}}}$

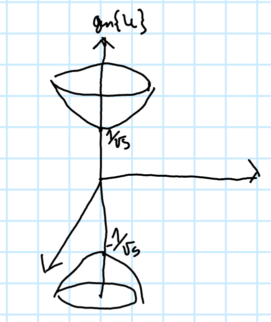
$(VV^T - 20I) = 45 P_{gen\{u\}} - 20\left(P_{gen\{u\}} + P_{gen\{u\}^\perp}\right)$
$= 25 P_{gen\{u\}} - 20 P_{gen\{u\}^\perp}$

Luego fijarse que $x = \underbrace{P_{gen\{u\}}(x)}_{x_1} + \underbrace{P_{gen\{u\}^\perp}(x)}_{x_2}$ y $P_{gen\{u\}} . x_1 = x_1$
$P_{gen\{u\}}\, x_2 = 0$ mismo para el otro

Por lo tanto, $Q(x) = 25\|x_1\|^2 - 20\|x_2\|^2$

$\text{Dim}(gen\{u\}^\perp) = 2$ y $\text{Dim}(gen\{u\}) = 1 \to Q(x) = 5 \to 25\|x_1\|^2 - 20\|x_2\|^2 = 5 \longrightarrow$ hiperboloide de dos hojas

$$\frac{\|x_1\|^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} - \frac{\|x_2\|^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right)^2} = 1$$



Puntos mas cercanos $\left\{ \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \pm \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

Choice 25/8/21(Parte 2)

domingo, 13 de febrero de 2022 19:08

Pregunta **8**
Correcta
Puntúa como 1
Marcar pregunta

Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre el subespacio $\text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\right\}$ en la dirección del subespacio $\text{gen}\left\{\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}^T\right\}$.

La matriz de T con respecto a la base $B = \left\{\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5}\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}-\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5}\end{bmatrix}^T\right\}$ es

Seleccione una:

a. $\frac{1}{75}\begin{bmatrix}8 & -20 & 56\\ -10 & 25 & -70\\ 6 & -15 & 42\end{bmatrix}$.

b. $\frac{1}{75}\begin{bmatrix}-59 & -40 & 112\\ -20 & -25 & -140\\ 12 & -30 & 9\end{bmatrix}$.

c. $\frac{1}{75}\begin{bmatrix}67 & 20 & -56\\ 10 & 50 & 70\\ -6 & 15 & 33\end{bmatrix}$. ✔

d. $\frac{1}{75}\begin{bmatrix}59 & 40 & -112\\ 20 & 25 & 140\\ -12 & 30 & -9\end{bmatrix}$.

La respuesta correcta es: $\frac{1}{75}\begin{bmatrix}67 & 20 & -56\\ 10 & 50 & 70\\ -6 & 15 & 33\end{bmatrix}$.

base $C = \{[1,-2,0]^T, [1\ 0\ 1]^T, [0\ 1\ -1]^T\}$

Como B es base ortonormal la proyección de un vector en esa base es el producto interno con cada uno de sus elementos

$$[T]_C^C = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$M_C^B = \begin{bmatrix}3/5 & 7/5 & -4/5\\ -2 & 0 & 1\\ -4/5 & -1/5 & -3/5\end{bmatrix}$$

$$[T]_B^B = M_C^B [T]_C^C M_B^C$$

```
M1= Matrix([[3,7,-4],[-10,0,5],[-4,-1,-3]]) * Rational('1/5')
T = Matrix([[1,0,0],[0,1,0],[0,0,0]])

M1*T*M1.inv()
```

✓ 0.5s

$$\begin{bmatrix}\frac{67}{75} & \frac{4}{15} & -\frac{56}{75}\\ \frac{2}{15} & \frac{2}{3} & \frac{14}{15}\\ -\frac{2}{25} & \frac{1}{5} & \frac{11}{25}\end{bmatrix}$$

Pregunta **9**
Incorrecta
Puntúa como 1
Marcar pregunta

Sean $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ los subespacios de $\mathbb{R}^4$ definidos por:

$\mathbb{S}_1 = \left\{\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0,\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0\right\}$,

$\mathbb{S}_2 = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}2 & 9 & 0 & 9\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}3 & 7 & 0 & 7\end{bmatrix}^T\right\}$.

Entonces:

Seleccione una:

a. No existe un subespacio $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{S}_1 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{S}_2 \oplus \mathbb{T} = \mathbb{R}^4$.

b. El menor subespacio que contiene a $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ es $\mathbb{T} = \left\{\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^4 : x_2 - x_4 = 0\right\}$.

c. $\mathbb{S}_1 = \mathbb{S}_2$. ✘

d. El mayor subespacio contenido en $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ es $\{0_{\mathbb{R}^4}\}$.

La respuesta correcta es: El menor subespacio que contiene a $\mathbb{S}_1$ y $\mathbb{S}_2$ es $\mathbb{T} = \left\{\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^4 : x_2 - x_4 = 0\right\}$.

$$-3x_2 + 3x_4 = 0$$
$$x_2 = x_4$$

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ -x_1\\ x_2\end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\\ 0\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \rightarrow \text{Es la } \boxed{b}$$

Pregunta **10**
Incorrecta
Puntúa como 1
Marcar pregunta

Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ tal que $2 \in \sigma(A^TA)$, $\text{nul}(A) = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1 & 3\end{bmatrix}^T\right\}$ y

$$A = \begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 5 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & b\\ 0 & 0\end{bmatrix}P.$$

donde $a > b \geq 0$ y $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ es una matriz ortogonal tal que $0 > P_{11}$.

La solución por mínimos cuadrados de norma mínima de la ecuación $Ax = \begin{bmatrix}3 & 2 & 1\end{bmatrix}^T$ es

Seleccione una:

a. $\hat{x} = \frac{\sqrt{10}}{20}\begin{bmatrix}-3\\ 1\end{bmatrix}$. ✘

b. $\hat{x} = \frac{\sqrt{10}}{4}\begin{bmatrix}-3\\ 1\end{bmatrix}$.

c. $\hat{x} = \frac{\sqrt{10}}{10}\begin{bmatrix}-3\\ 1\end{bmatrix}$.

d. $\hat{x} = \frac{\sqrt{10}}{5}\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}$.

La respuesta correcta es: $\hat{x} = \frac{\sqrt{10}}{10}\begin{bmatrix}-3\\ 1\end{bmatrix}$.

$$A = \begin{bmatrix}2/\sqrt{8} & 0 & 1/\sqrt{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -2/\sqrt{8} & 0 & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{8}a & 0\\ 0 & 5b\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10}\\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10}\end{bmatrix}$$

$\sqrt{8}a \to \sqrt{2}$, $5b \to 0$

$$A = U_r \Sigma_r V_r^T = \begin{bmatrix}2/\sqrt{8}\\ 0\\ -2/\sqrt{8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10}\end{bmatrix}$$

$$A^+ = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}2/\sqrt{8} & 0 & -2/\sqrt{8}\end{bmatrix}$$

$$\hat{X} = A^+ b = \frac{\sqrt{10}}{10}\begin{bmatrix}-3\\ 1\end{bmatrix}$$

Pregunta **11**
Incorrecta
Puntúa como 1
Marcar pregunta

Sea $v = \begin{bmatrix}2 & 3 & 6\end{bmatrix}^T$ y sea $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por $Q(x) = x^T\left(aI + bvv^T\right)x$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

Si $\min\limits_{\|x\|=\sqrt{2}} Q(x) = 1$ y $\max\limits_{\|x\|=\sqrt{2}} Q(x) = 2$, entonces

Seleccione una:

a. $|b| = \frac{2}{49}$.

b. $|b| = \frac{1}{49}$. ✘

c. $|b| = \frac{3}{98}$.

d. $|b| = \frac{1}{98}$.

La respuesta correcta es: $|b| = \frac{1}{98}$.

Sabemos que $\min\limits_{\|x\|=\rho} Q(x) = \lambda_m \rho^2$

$\max\limits_{\|x\|=\rho} Q(x) = \lambda_M \rho^2$

$$u = \frac{1}{7}\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 6\end{bmatrix}$$
$$v = 7u$$
$$vv^T = 49\underbrace{uu^T}_{P_{gen\{u\}}}$$

$$aI + bvv^T$$
$$a(P_{gen\{u\}} + P_{gen\{u\}^\perp}) + b\,49\,P_{gen\{u\}}$$
$$(a + 49b)\underbrace{P_{gen\{u\}}}_{x_1} + a\underbrace{P_{gen\{u\}^T}}_{x_2}$$

Como $X = x_1 + x_2$

$$Q(x) = (a + 49b)\|x_1\|^2 + a\|x_2\|^2$$

$\|X\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$

$\lambda_m = \frac{1}{2}$

$\lambda_M = 1$

$2(a + 49b) = 2$, $a + 49b = 1$, $\frac{1}{2} + 49b = 1$, $b = \frac{1}{98}$; $2a = 1$, $a = \frac{1}{2}$

o

$2(a + 49b) = 1$, $a + 49b = \frac{1}{2}$, $1 + 49b = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{98}$; $2a = 2$, $a = 1$

$$\boxed{|b| = \frac{1}{98}}$$

Choice 25/8/21(Parte 3)

domingo, 13 de febrero de 2022 21:14

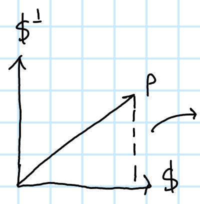
Pregunta 6
Correcta
Puntúa como 1
Marcar pregunta

En $\mathbb{R}_2[x]$ con el producto interno definido por $\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} x^2 p(x)q(x)dx$,
la distancia de $p = 3+2x+x^2$ al subespacio $\mathbb{S} = \{p \in \mathbb{R}_2[x] : p(1) = p'(1) = 0\}$ es

Seleccione una:
a. $\sqrt{\frac{771}{110}}$.
b. $\sqrt{\frac{72}{11}}$.
c. $\sqrt{\frac{81}{10}}$.
d. $\sqrt{\frac{96}{11}}$.

La respuesta correcta es: $\sqrt{\frac{96}{11}}$.

$$\int_{-1}^{1} x^k dx \begin{cases} = 0 \text{ si } k \text{ es impar} \\ \frac{2}{k+1} \text{ si } k \text{ es par} \end{cases}$$



$$\to d(P,\mathbb{S}) = \|P_{\mathbb{S}^\perp}(P)\| = \|P - P_{\mathbb{S}}(P)\|$$

$p = ax^2+bx+c$

$$\left.\begin{array}{l} p(1) = a+b+c = 0 \\ p'(1) = 2a+b = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} -a+c=0 \\ c=a \end{array}$$

ax^2+bx+a

$\mathbb{S} = gen\{x^2+1, x\}$

$Q = ax^2+bx+c$

$\langle Q, x^2+1\rangle = 0$

$\langle Q, x^2\rangle + \langle Q, 1\rangle = 0$

$\frac{2a}{7} + \frac{2c}{5} + \frac{2a}{5} + \frac{2c}{3} = 0$

$\frac{24}{35}a + \frac{16}{15}c = 0$

$a = -\frac{14}{9}c$

$\langle P, x\rangle = 0$

$\frac{2b}{5} = 0 \to b = 0$

$P = -\frac{14}{9}cx^2 + c$

$\mathbb{S}^\perp = \{\underbrace{-\frac{14}{9}x^2+1}_{\lambda}\}$

$$\|P_{\mathbb{S}^\perp}(P)\| = \left|\frac{\langle Q,\lambda\rangle}{\|\lambda\|^2}\right| \|\lambda\| = \frac{\langle Q,\lambda\rangle}{\|\lambda\|}$$

$\langle P,\lambda\rangle = \left(-\frac{14}{9}\right)\frac{2}{7}$

$$P_{\mathbb{S}}(P) \begin{cases} \langle P-\hat{y}, x^2+1\rangle = 0 \\ \langle P-\hat{y}, x\rangle = 0 \\ \hat{y} = a(x^2+1)+bx \end{cases}$$

$P-\hat{y} = (1-a)x^2 + (2-b)x + (3-a)$

$\langle P-\hat{y}, x^2+1\rangle = (1-a)\underbrace{\langle x^2,x^2\rangle}_{\frac{2}{7}} + (2-b)\underbrace{\langle x,x^2\rangle}_{0} + (3-a)\underbrace{\langle 1,x^2\rangle}_{\frac{2}{5}} +$

$(1-a)\underbrace{\langle x^2,1\rangle}_{\frac{2}{5}} + (2-b)\underbrace{\langle x,1\rangle}_{0} + (3-a)\underbrace{\langle 1,1\rangle}_{\frac{2}{3}} =$

$(1-a)\frac{24}{35} + (3-a)\frac{16}{15} = -\frac{184}{105}a + \frac{136}{35} = 0 \to a = \frac{51}{23}$

$\langle P-\hat{y}, x\rangle = (2-b)\underbrace{\langle x,x\rangle}_{\frac{2}{5}} = 0 \to b = 2$

$\hat{y} = \frac{51}{23}(x^2+1) + 2x$

$P-\hat{y} = -\frac{28}{23}x^2 + \frac{18}{23}$

$$\|P-\hat{y}\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2\left(-\frac{28}{23}x^2+\frac{18}{23}\right)\left(-\frac{28}{23}x^2+\frac{18}{23}\right)$$

Desarrollo 25/8/21(Parte 3)

domingo, 13 de febrero de 2022 21:20

1. Hallar la solución de la ecuación diferencial $y'' + 16y = 3\cos(4t)$ tal que $y(0) = 9$, $y'(0) = 0$.

$L = D^2 + 16I$ $\quad \text{nul}(L) = \text{gen}\{\cos(4t), \text{sen}(4t)\}$ $\quad A = D^2 + 16I$

$A \circ L = (D^2 + 16I)^2$ $\quad B_{AL} = \{\cos(4t), \text{sen}(4t), x\cos(4t), x\,\text{sen}(4t)\}$ $\quad B_{AL} \setminus B_L = \{x\cos(4t), x\,\text{sen}(4t)\}$

$y_p = a x \cos(4t) + b x\,\text{sen}(4t) = x(a\cos(4t) + b\,\text{sen}(4t))$

$L[y_p] = 3\cos(4t)$

$y_p' = (a\cos(4t) + b\,\text{sen}(4t)) + x(-4a\,\text{sen}(4t) + 4b\cos(4t))$

$y_p'' = 2(-4a\,\text{sen}(4t) + 4b\cos(t)) + x(-16a\cos(4t) - 16b\,\text{sen}(4t))$

$y_p + 16I = -8a\,\text{sen}(4t) + 8b\cos(4t) = 3\cos(4t) \rightarrow a = 0 \wedge b = \frac{3}{8}$

$y(t) = \frac{3}{8} x\,\text{sen}(4t) + \lambda\cos(4t) + \beta\,\text{sen}(4t)$

$y(0) = \lambda = 9$ $\quad y'(0) = 4\beta = 0 \rightarrow \beta = 0$

$$\boxed{y(t) = \frac{3}{8} t\,\text{sen}(4t) + 9\cos(4t)}$$

Choice 18/8/21(Parte 1)

lunes, 14 de febrero de 2022 13:09

Sea $A = \frac{1}{22}\begin{bmatrix} 19 & -6 & 9 \\ -3 & 16 & 9 \\ 8 & 16 & -2 \end{bmatrix}$

$\lim_{k\to\infty} A^k x = \begin{bmatrix} \frac{10}{11} & \frac{32}{11} & \frac{74}{33} \end{bmatrix}^T$ si y solo si

a. $x = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T + a\begin{bmatrix}-3 & -3 & 8\end{bmatrix}^T, a \in \mathbb{R}$

b. $x = \begin{bmatrix}2 & 3 & 1\end{bmatrix}^T + a\begin{bmatrix}-3 & -3 & 8\end{bmatrix}^T, a \in \mathbb{R}$

c. $x = \begin{bmatrix}1 & 3 & 2\end{bmatrix}^T + a\begin{bmatrix}-3 & -3 & 8\end{bmatrix}^T, a \in \mathbb{R}$ ✔

d. $x = \begin{bmatrix}3 & 2 & 1\end{bmatrix}^T + a\begin{bmatrix}-3 & -3 & 8\end{bmatrix}^T, a \in \mathbb{R}$

La respuesta correcta es:
$x = \begin{bmatrix}1 & 3 & 2\end{bmatrix}^T + a\begin{bmatrix}-3 & -3 & 8\end{bmatrix}^T, a \in \mathbb{R}$

$A^K = \left(-\frac{1}{2}\right)^k P_1 + 1^k P_2$

$\lim_{k\to\infty} A^k = P_2$

$\begin{bmatrix} \frac{7}{4} \\ \cancel{15/4} \\ 0 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$

Pregunta **4**
Incorrecta
Puntúa como 1

Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz diagonalizable tal que

la matriz en base canónica de la proyección sobre $\text{nul}(A - I)$ en la dirección de $\text{col}(A - I)$ es $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

y $A\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}2 & 2 & -2\end{bmatrix}^T$.

Sea $Y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ la solución del sistema $Y' = AY$ tal que $Y(0) = \begin{bmatrix}-1 & 2 & 0\end{bmatrix}^T$. Vale que

a. $Y(1) = e\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}^T + e^2\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}^T$ ✘

b. $Y(1) = e\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\end{bmatrix}^T + e^2\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T$

c. $Y(1) = e\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\end{bmatrix}^T + e^2\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\end{bmatrix}^T$

d. $Y(1) = e\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}^T + e^2\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}^T$

La respuesta correcta es:
$Y(1) = e\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}^T + e^2\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}^T$

$\sigma(A) = \{\overset{\text{doble}}{1}, 2\}$ $\quad \text{nul}(A - 2I) = \text{gen}\{[1\ 1\ -1]^T\}$ $\quad \text{nul}(A - I) = \text{gen}\{[1\ -1\ 1]^T, [0\ 2\ 0]^T\}$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

Conjunto $\left\{ e^t\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}, e^t\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}, e^{2t}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} \right\}$

$y(0) = \lambda\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix} + \alpha\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{P}\begin{bmatrix}\lambda\\\beta\\\alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix} \longrightarrow y(t) = -\frac{1}{2}e^t\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} + e^t\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{2}e^{2t}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$

$y(1) = e\begin{bmatrix}-1/2\\5/2\\1/2\end{bmatrix} + e^{2t}\begin{bmatrix}-1/2\\-1/2\\1/2\end{bmatrix}$

Sean $Q, R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ las formas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$ definidas por
$Q(x) = 8x_1^2 - 10x_1x_2 + 8x_2^2$ y $R(x) = 5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2$.

Seleccione una:

a. $\min_{R(x)=8} Q(x) = 13$

b. $\min_{R(x)=8} Q(x) = 3$ ✔

c. $\min_{R(x)=8} Q(x) = -12$

d. $\min_{R(x)=8} Q(x) = -3$

La respuesta correcta es: $\min_{R(x)=8} Q(x) = 3$

$R(x) \to$ def positiva $\to$ Rayleigh generalizado $\quad \min_{R(x)=\rho^2} Q(x) = \lambda_m \rho^2 \quad A = \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \quad B^{-1}A = \begin{bmatrix} 55 & -49 \\ -49 & 55 \end{bmatrix}\frac{1}{16} \to \sigma(B^{-1}A) = \left\{\frac{3}{8}; \frac{13}{2}\right\}$

$\min_{R(x)=(\sqrt{8})^2} Q(x) = \frac{3}{\cancel{8}}\cancel{(\sqrt{8})^2} = \boxed{3}$

Pregunta **6**
Incorrecta
Puntúa como 1

Sea $a \in \mathbb{R}$. Vale que

$\text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2+a \\ 2-a & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & 2 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right\} = \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} a & 2 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right\}$

si y sólo si

Seleccione una:

a. $a = 2$

b. $a = -2$

c. $a \in \{-2, \frac{2}{3}\}$

d. $a \in \{-\frac{2}{3}, 2\}$ ✘

La respuesta correcta es: $a = 2$

$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$

$\begin{vmatrix} 1 & (2+a) & (2-a) \\ a & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = (2-a)(6a-4) = 0$

$a = 2 \qquad \frac{2}{3}$

Choice 18/8/21(Parte 2)

lunes, 14 de febrero de 2022 14:08

Pregunta **7**
Correcta
Puntúa como 1

Sea

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&1\\1&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$$

Si $b=\begin{bmatrix}3&-1&2\end{bmatrix}^T$, entonces la solución por mínimos cuadrados de norma mínima de la ecuación $Ax=b$ es

Seleccione una:

- a. $\hat{x}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4&-2\end{bmatrix}^T$. ✔
- b. $\hat{x}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2&4\end{bmatrix}^T$.
- c. $\hat{x}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&3\end{bmatrix}^T$.
- d. $\hat{x}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3&1\end{bmatrix}^T$.

La respuesta correcta es: $\hat{x}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}4&-2\end{bmatrix}^T$.

$$A=\begin{bmatrix}1/\sqrt3&1/\sqrt2&1/\sqrt6\\1/\sqrt3&-1/\sqrt2&1/\sqrt6\\1/\sqrt3&0&-2/\sqrt6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overbrace{2\sqrt3\sqrt2}^{2\sqrt6}&0\\0&\sqrt2\sqrt2\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt2&1/\sqrt2\\1/\sqrt2&-1/\sqrt2\end{bmatrix}=U_r\Sigma_r V_r^T=\begin{bmatrix}1/\sqrt3&1/\sqrt2\\1/\sqrt3&-1/\sqrt2\\1/\sqrt3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\sqrt6&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt2&1/\sqrt2\\1/\sqrt2&-1/\sqrt2\end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{2\sqrt6}\cdot\frac{\sqrt6}{\sqrt6}=\frac{\sqrt6}{12}$$

$$A^+=V_r\Sigma^{-1}U_r^T=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt6}{12}&0\\0&\frac12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt3&=&\\1/\sqrt2&-1/\sqrt2&0\end{bmatrix}$$

Pregunta **8**
Correcta
Puntúa como 1

Sea $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por $Q(x)=x^T\begin{bmatrix}5&-2&0\\-2&6&-2\\0&-2&7\end{bmatrix}x$.

$Q(x)=3\|x\|^2$ si, y solo si,

Seleccione una:

- a. $x\in\text{gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}\right\}$
- b. $x\in\text{gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$ ✔
- c. $x\in\text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\-2\\2\end{bmatrix}\right\}$
- d. $x\in\text{gen}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}\right\}$

La respuesta correcta es: $x\in\text{gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$

$$x\in\text{nul}(A-3I)=\text{gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}\right\}$$

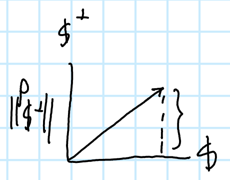
Pregunta **9**
Correcta
Puntúa como 1

En $\mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico, la distancia de $\underbrace{\begin{bmatrix}-2\\3\\4\end{bmatrix}}_{b}$ al subespacio $\text{gen}\left\{\begin{bmatrix}8\\2\\7\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-5\\1\\8\end{bmatrix}\right\}$ es

Seleccione una:

- a. $\frac{\sqrt{14}}{14}$.
- b. $\frac{13\sqrt{14}}{14}$.
- c. $\frac{11\sqrt{14}}{14}$.
- d. $\frac{9\sqrt{14}}{14}$. ✔

La respuesta correcta es: $\frac{9\sqrt{14}}{14}$.



$$\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\8&2&7\\-5&1&8\end{vmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}9\\-99\\18\end{bmatrix}}_{u}$$

$$\underbrace{\frac{\langle b,u\rangle}{\|u\|^2}u}_{z}$$

$$\langle b,u\rangle=-243\qquad \|u\|^2=10206$$

$$\left\|-\frac{243}{10206}u\right\|^2=\sqrt{\left(\frac{243}{10206}\right)^{\cancel{2}}10206}=\frac{243}{10206}\sqrt{10206}=\boxed{\frac{9\sqrt{14}}{14}}$$

Pregunta **10**
Correcta
Puntúa como 1

Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x)=Ax$, donde $A=\begin{bmatrix}2&-1\\2&-1\\1&4\end{bmatrix}$.

La imagen por T de la circunferencia unitaria $S_1=\{x\in\mathbb{R}^2:\|x\|=1\}$ es

Seleccione una:

- a. una elipse con centro en el origen, eje mayor de longitud $6\sqrt2$ contenido en la recta generada por $\begin{bmatrix}1&-1&0\end{bmatrix}^T$ y eje menor de longitud 6 contenido en la recta generada por $\begin{bmatrix}2&2&1\end{bmatrix}^T$.
- b. una elipse con centro en el origen, eje mayor de longitud $6\sqrt2$ contenido en la recta generada por $\begin{bmatrix}-1&1&4\end{bmatrix}^T$ y eje menor de longitud 6 contenido en la recta generada por $\begin{bmatrix}2&-2&1\end{bmatrix}^T$.
- c. una elipse con centro en el origen, eje mayor de longitud $6\sqrt2$ contenido en la recta generada por $\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}^T$ y eje menor de longitud 6 contenido en la recta generada por $\begin{bmatrix}2&-2&1\end{bmatrix}^T$.
- d. una elipse con centro en el origen, eje mayor de longitud $6\sqrt2$ contenido en la recta generada por $\begin{bmatrix}-1&-1&4\end{bmatrix}^T$ y eje menor de longitud 6 contenido en la recta generada por $\begin{bmatrix}2&2&1\end{bmatrix}^T$. ✔

La respuesta correcta es: una elipse con centro en el origen, eje mayor de longitud $6\sqrt2$ contenido en la recta generada por $\begin{bmatrix}-1&-1&4\end{bmatrix}^T$ y eje menor de longitud 6 contenido en la recta generada por $\begin{bmatrix}2&2&1\end{bmatrix}^T$.

$$x=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2\qquad \lambda_1^2+\lambda_2^2=1$$

```
A= Matrix([[2,-1],[2,-1],[1,4]])
A.singular_value_decomposition()
```
✓ 0.7s

$$\left(\begin{bmatrix}\frac23&-\frac{\sqrt2}{6}\\\frac23&-\frac{\sqrt2}{6}\\\frac13&\frac{2\sqrt2}{3}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&0\\0&3\sqrt2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)$$

$$\underbrace{3\lambda_1}_{h_1}\begin{bmatrix}2/3\\2/3\\1/3\end{bmatrix}+3\sqrt2\,\lambda_2\begin{bmatrix}\\ \\ \end{bmatrix}\qquad \lambda_1^2+\lambda_2^2=1$$

$$\left(\frac{h_1}{3}\right)^2+\left(\frac{h_2}{3\sqrt2}\right)^2=1$$

Choice 18/8/21(Parte 3)

lunes, 14 de febrero de 2022 21:57

Pregunta **11**

Correcta

Puntúa como 1

Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por:

$T\left([1 \ \ 0 \ \ 0]^T\right) = [-3 \ \ 0 \ \ -4]^T.$

$T\left([1 \ \ 1 \ \ 0]^T\right) = [-5 \ \ 1 \ \ -6]^T.$

$T\left([1 \ \ 1 \ \ 1]^T\right) = [-3 \ \ 1 \ \ -3]^T.$

Entonces,

Seleccione una:

a. T es la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre $\{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$ en la dirección de $\text{gen}\left\{[2 \ \ 0 \ \ 1]^T\right\}$

b. T es la simetría de $\mathbb{R}^3$ con respecto a $\{x \in \mathbb{R}^3 : \ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ en la dirección de $\text{gen}\left\{[1 \ \ 0 \ \ 1]^T\right\}$ ✔

c. T es la proyección de $\mathbb{R}^3$ sobre $\{x \in \mathbb{R}^3 : \ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ en la dirección de $\text{gen}\left\{[1 \ \ 0 \ \ 1]^T\right\}$

d. T es la simetría de $\mathbb{R}^3$ con respecto a $\{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$ en la dirección de $\text{gen}\left\{[2 \ \ 0 \ \ 1]^T\right\}$

La respuesta correcta es: T es la simetría de $\mathbb{R}^3$ con respecto a $\{x \in \mathbb{R}^3 : \ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ en la dirección de $\text{gen}\left\{[1 \ \ 0 \ \ 1]^T\right\}$

simetría

$[-3 \ \ 0 \ -4] + [-3 \ \ 1 \ -3] - [-5 \ \ 1 \ -6] = [-1 \ \ 0 \ \ -1]$

Desarrollo 18/8/21(Parte 1)

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ tal que $\operatorname{nul}(A) = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ y $\operatorname{traza}(A^T A) = 2$. Hallar

$$\max_{\|x\|=3} \|Ax\| \quad y \quad \min_{\|x\|=3} \|Ax\|$$

y los vectores que los realizan.

$\operatorname{nul}(A) = \operatorname{gen}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}}_{u_3}, \underbrace{\begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \end{bmatrix}}_{v_2} \right\}$ $\quad$ $\operatorname{Col}(A^T) = \operatorname{gen}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{bmatrix}}_{u_1} \right\}$ $\quad$ $\operatorname{Traza}(A^TA) = 2O + \beta = 2 \rightarrow \beta = 2$

$X = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda u_3 \longrightarrow \|X\| = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 3$

$AX = \sigma_1 \lambda_1 v_1 \longrightarrow$ Con $\lambda_1^2 \leq 3$

$AX = \sqrt{2}\,\lambda_1 v_1$

$\max\limits_{\|x\|=3} \|Ax\| = 3\sqrt{2}$ $\quad$ $\arg\max\limits_{\|x\|=3} \|Ax\| = \{\pm u_1\}$

$\min\limits_{\|x\|=3} \|Ax\| = 0$ $\quad$ $\arg\min\limits_{\|x\|=3} \|Ax\| = \{a u_2 + b u_3 \text{ con } a^2 + b^2 = 3^2\}$

$3\operatorname{sen}(\theta) u_2 + 3\cos(\theta) u_3$

4. Hallar, si existen, el máximo y el mínimo de la forma cuadrática $Q_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q_1(x) = \|x\|^2$ sujeto a la restricción $5x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 = 8$ y determinar los vectores que los realizan.

$R(x) = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}}_{B} \rightarrow$ Def positiva.

$\begin{bmatrix} 5-x & 3 \\ 3 & 5-x \end{bmatrix} = (5-x)^2 - 9 = 0$

$(5-x)^2 = 9$

$5 - x = \pm 3 \rightarrow x = 2,\ x = 8$

$\frac{1}{16}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \rightarrow \frac{1}{8},\ \frac{1}{2}$

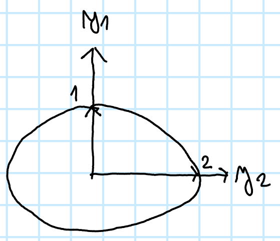
$\operatorname{nul}(B-2) = \operatorname{gen}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$ $\quad$ $\operatorname{nul}(B-8) = \operatorname{gen}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ $\quad$ $\Delta = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \operatorname{Det}(P) = 1 \rightarrow$ Es una rotación

$\tilde{R}(y) = R(Py) = y^T \underbrace{P^T B P}_{\Delta} y = 8y_1^2 + 2y_2^2$

$R(x) = 8 \rightarrow \tilde{R}(y) = y_1^2 + \frac{y_2^2}{2^2} = 1$

S



$\max\limits_{R(x)=8} Q(x) = 2^2 = 4$ $\quad$ $\arg\max\limits_{R(x)=8} Q(x) = \left\{\pm \frac{2}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$\min\limits_{R(x)=8} Q(x) = 1$ $\quad$ $\arg\min\limits_{R(x)=8} Q(x) = \left\{\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$

Choice 11/8/21(Parte 1)

lunes, 14 de febrero de 2022 14:37

Pregunta **3**

Incorrecta

Puntúa como 1

Si $v = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$, entonces el conjunto de los puntos de la superficie de nivel $x^T\left(I - \frac{2}{9}vv^T\right)x = -4$ más cercanos al origen es

Seleccione una:

a. $\left\{\begin{bmatrix} 4/3 \\ 4/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4/3 \\ -4/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}\right\}$.

b. $\left\{\begin{bmatrix} -4/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4/3 \\ -2/3 \\ -4/3 \end{bmatrix}\right\}$.

c. $\left\{2\cos(\theta)\begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} + 2\sin(\theta)\begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} : \theta \in [0, 2\pi)\right\}$.

d. $\left\{2\cos(\theta)\begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} + 2\sin(\theta)\begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} : \theta \in [0, 2\pi)\right\}$. ✖

La respuesta correcta es: $\left\{\begin{bmatrix} -4/3 \\ 2/3 \\ 4/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4/3 \\ -2/3 \\ -4/3 \end{bmatrix}\right\}$.

$\mathbb{S} = gen\{u\}$

$u = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\quad v = 3u$ $\quad vv^T = 9uu^T$

$x^T(I - 2uu^T)x = -4$

$x = P_{\mathbb{S}}(x) + P_{\mathbb{S}^\perp}(x)$

$x^T\left(P_{\mathbb{S}}(x) + P_{\mathbb{S}^\perp}(x) - 2P_{\mathbb{S}}(x)\right)x = -4$

$x^T\left(P_{\mathbb{S}^\perp}(x) - P_{\mathbb{S}}(x)\right)x = -4$

$x_1 = P_{\mathbb{S}^\perp}(x) \quad x_2 = P_{\mathbb{S}}(x)$

$Q(x) = \lambda\|x\|^2$

$\|x_1\|^2 - \|x_2\|^2 = -4$

$\frac{\|x_2\|^2}{2^2} - \frac{\|x_1\|^2}{2^2} = 1$

$\{u_1, u_2\}^\perp = u$

mas cercanos $\{\pm 2u\} = \left\{\pm\frac{2}{3}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$

$\{\lambda u_1 + \beta u_2 \text{ tal que } \lambda^2 + \beta^2 = 4\}$

$\lambda = 2\cos(\theta) \quad \beta = 2\sin(\theta)$

$2\cos(\theta)u_1 + 2\sin(\theta)u_2$

con $\theta \in [0, 2\pi)$

Pregunta **4**

Correcta

Puntúa como 1

Sea $A = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 1 & 7 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

Si $b = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}^T$, entonces la solución por mínimos cuadrados de norma mínima de la ecuación $Ax = b$ es

Seleccione una:

a. $\hat{x} = \begin{bmatrix} 0 & 12 & 6 \end{bmatrix}^T$.

b. $\hat{x} = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 6 \end{bmatrix}^T$.

c. $\hat{x} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 \end{bmatrix}^T$. ✔

d. $\hat{x} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 6 \end{bmatrix}^T$.

La respuesta correcta es: $\hat{x} = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 6 \end{bmatrix}^T$.

```
A.pinv()*Matrix([9,6,3])
✓ 0.5s
```

$\begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

Pregunta **5**

Correcta

Puntúa como 1

Sea $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ el $\mathbb{R}$-espacio euclídeo canónico. El conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^3$ equidistantes a los subespacios $\mathbb{S}_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0\}$ y $\mathbb{S}_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0\}$ es

a. $\{x \in \mathbb{R}^3 : 8x_1 - 32x_2 - 16x_3 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^3 : 20x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0\}$. ✔

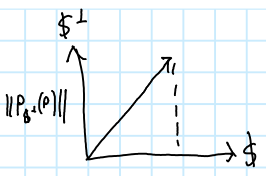
b. $\{x \in \mathbb{R}^3 : 8x_1 + 16x_2 - 4x_3 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^3 : 20x_1 - 2x_2 + 32x_3 = 0\}$.

c. $\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 20x_2 - 32x_3 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^3 : 16x_1 + 8x_2 - 4x_3 = 0\}$.

d. $\{x \in \mathbb{R}^3 : 5x_1 - 32x_2 + x_3 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^3 : 23x_1 + 4x_2 + 13x_3 = 0\}$.

La respuesta correcta es:
$\{x \in \mathbb{R}^3 : 8x_1 - 32x_2 - 16x_3 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^3 : 20x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0\}$.

$\mathbb{S}_1^\perp = gen\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}}_{v_1}\right\}$ $\qquad \mathbb{S}_2^\perp = gen\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$



$d(x, \mathbb{S}_1) = \|P_{\mathbb{S}_1^\perp}(x)\| = \|P_{\mathbb{S}_2^\perp}(x)\| = d(x, \mathbb{S}_2)$

$\left\|\frac{\langle x, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1\right\| = \left\|\frac{\langle x, v_2\rangle}{\|v_2\|^2}v_2\right\|$

$\left|\frac{\langle x, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}\right|\|v_1\| = \left|\frac{\langle x, v_2\rangle}{\|v_2\|^2}\right|\|v_2\|$

$\cancel{7}^{1}\left|\frac{2x_1 + 6x_2 + 3x_2}{\cancel{49}\,7}\right| = \cancel{3}^{1}\left|\frac{2x_1 - 2x_2 - x_3}{\cancel{9}\,3}\right|$

$\frac{2x_1 + 6x_2 + 3x_3}{7} = \frac{2x_1 - 2x_2 - x_3}{3}$

$6x_1 + 18x_2 + 9x_3 = 14x_1 - 14x_2 - 7x_3$

$-8x_1 + 32x_2 + 16x_3 = 0$

$\frac{2x_1 + 6x_2 + 3x_3}{7} = -\frac{(2x_1 - 2x_2 - x_3)}{3}$

$6x_1 + 18x_2 + 9x_3 = -14x_1 + 14x_2 + 7x_3$

$20x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0$

Choice 11/8/21(Parte 2)

lunes, 14 de febrero de 2022 20:32

Pregunta **6**
Correcta
Puntúa como 1

Sea Σ la simetría de $\mathbb{R}^3$ con respecto al subespacio $\operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right\}$ en la dirección del subespacio $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$. La imagen por Σ del triángulo de vértices $\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}-2 & 1 & -2\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}-2 & -2 & 1\end{bmatrix}^T$ es

a. el triángulo de vértices $\begin{bmatrix}-3 & 0 & -4\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & -3 & -4\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}12 & 12 & 29\end{bmatrix}^T$.
b. el triángulo de vértices $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}4 & -3 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}-8 & 12 & 9\end{bmatrix}^T$. ✔
c. el triángulo de vértices $\begin{bmatrix}1 & 4 & 4\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}4 & 1 & 4\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}-8 & -8 & -11\end{bmatrix}^T$.
d. el triángulo de vértices $\begin{bmatrix}-3 & 4 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}12 & -8 & 9\end{bmatrix}^T$.

La respuesta correcta es:
el triángulo de vértices $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}4 & -3 & 0\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}-8 & 12 & 9\end{bmatrix}^T$.

$$\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & -2 & -2\\ -2 & 1 & -2\\ -2 & -2 & 1\end{bmatrix} =$$

```
A= Matrix([[-1,1,1],[1,0,-1],[1,1,0]])
B= Matrix([[1,0,0],[0,-1,0],[0,0,-1]])
C= Matrix([[1,-2,-2],[-2,1,-2],[-2,-2,1]])
A*B*A.inv()*C
```

✓ 0.5s

$$\begin{bmatrix}1 & 4 & -8\\ 0 & -3 & 12\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}$$

Pregunta **7**
Correcta
Puntúa como 1

Sea $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ la transformación lineal definida por $T(x) = Ux$, donde $U = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1\end{bmatrix}$.

a. T es la simetría ortogonal con respecto al plano $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$. ✔
b. T es la simetría ortogonal con respecto a la recta $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 = 0,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
c. T es la simetría ortogonal con respecto a la recta $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_3 = 0, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$.
d. T es la simetría ortogonal con respecto al plano $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$.

La respuesta correcta es:
T es la simetría ortogonal con respecto al plano $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\}$.

a djo

Pregunta **8**
Correcta
Puntúa como 1

$\{x \in \mathbb{R}^3 : (a-2)x_1 - (a-2)x_3 = 0\} \neq \operatorname{gen}\left\{\begin{bmatrix}a\\ 3\\ 6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}a-3\\ 3-a\\ 3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\ 2\\ 3\end{bmatrix}\right\}$ si y sólo si

a. $a \notin \{-2, 6\}$.
b. $a \in \{-2, 6\}$.
c. $a = 6$
d. $a \neq 6$ ✔

$a \neq 6$
$a \neq 6$

La respuesta correcta es:
$a \neq 6$

Pregunta **9**
Correcta
Puntúa como 1

Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz simétrica tal que $A^2 - 3A + I = \begin{bmatrix}10 & -3 & 0\\ -3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ y $\operatorname{tr}(A) = 1$.

Sea $Y \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ la solución del sistema $Y' = AY$ tal que $Y(0) = \begin{bmatrix}1 & -2 & 0\end{bmatrix}^T$. Si $\|Y(t)\|$ es acotada cuando $t \to +\infty$ entonces

a. $\lim_{t\to+\infty} Y(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & -3 & 0\end{bmatrix}^T$. ✔
b. $\lim_{t\to+\infty} Y(t) = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}-1 & -3 & 0\end{bmatrix}^T$.
c. $\lim_{t\to+\infty} Y(t) = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\end{bmatrix}^T$.
d. $\lim_{t\to+\infty} Y(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\end{bmatrix}^T$.

La respuesta correcta es:
$\lim_{t\to+\infty} Y(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1 & -3 & 0\end{bmatrix}^T$.

$p(\lambda) \in \sigma(p(A))$

$p(x) = x^2 - 3x + 1$

$x^2 - 3x + 1 = 1$
$x(x-3) = 0$
$x = 0 \quad x = 3$

$x^2 - 3x + 1 = 11$ 5, -2

```
A= Matrix([[10,-3,0],[-3,2,0],[0,0,1]])
A.eigenvects()
```

✓ 0.6s

$$\left[\left(1,\ 2,\ \left[\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ 1\\ 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\right]\right), \left(11,\ 1,\ \left[\begin{bmatrix}-3\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\right]\right)\right]$$

$\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$
$= 0 + 3 + \lambda_2 = 1$
$\lambda_2 = -2$

$$\begin{bmatrix}| & | & |\\ v_1 & v_2 & v_3\\ | & | & |\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{bmatrix}$$

$\{e^{\lambda_1 t} v_1, e^{\lambda_2 t} v_2, e^{\lambda_3 t} v_3\}$

Choice 11/8/21(Parte 3)

lunes, 14 de febrero de 2022 21:24

Pregunta **10**

Correcta

Puntúa como 1

Sea $A = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}$.

$\lim_{k\to\infty} A^k x = [0 \quad 0 \quad 0]^T$ si y solo si

$P_3 x = [0\,0\,0]^T$

- a. $x \in \text{gen}\left\{[-17 \quad 35 \quad -13]^T, [9 \quad -55 \quad 41]^T\right\}$ ✓
- b. $x \in \text{gen}\left\{[-27 \quad 21 \quad -6]^T, [-21 \quad 3 \quad 17]^T\right\}$
- c. $x \in \text{gen}\left\{[-9 \quad 19 \quad -5]^T, [-7 \quad -23 \quad 25]^T\right\}$
- d. $x \in \text{gen}\left\{[17 \quad -11 \quad -7]^T, [-19 \quad -3 \quad 29]^T\right\}$

$A^k = \left(\frac{-1}{5}\right)^k P_1 + \left(\frac{1}{5}\right)^k P_2 + 1^k P_3$

$\lim_{k\to\infty} A^k = P_3$

La respuesta correcta es:
$x \in \text{gen}\left\{[-17 \quad 35 \quad -13]^T, [9 \quad -55 \quad 41]^T\right\}$

$\text{gen}\left\{\begin{bmatrix} -29 \\ 36 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -31 \\ 0 \\ 36 \end{bmatrix}\right\}$

```
(B[2][1]).nullspace()
✓ 0.5s
```

$\left[\begin{bmatrix} -\frac{29}{36} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -\frac{31}{36} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right]$

Pregunta **11**

Correcta

Puntúa como 1

Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2/7 \\ -6/7 \\ 3/7 \end{bmatrix}[2/7 \quad -6/7 \quad 3/7] + \begin{bmatrix} -6/7 \\ -3/7 \\ -2/7 \end{bmatrix}[6/7 \quad 3/7 \quad 2/7] + \begin{bmatrix} 3/7 \\ -2/7 \\ -6/7 \end{bmatrix}[3/7 \quad -2/7 \quad -6/7]$$

y $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por $Q(x) = x^T A x$. Entonces $Q(x) = \|x\|^2$ si, y solo si,

Seleccione una:

- a. $x \in \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$.
- b. $x \in \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}\right\}$. ✓
- c. $x \in \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$.
- d. $x \in \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}\right\}$.

La respuesta correcta es: $x \in \text{gen}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}\right\}$.

Desarrollo 11/8/21(Parte 1)

martes, 15 de febrero de 2022 15:18

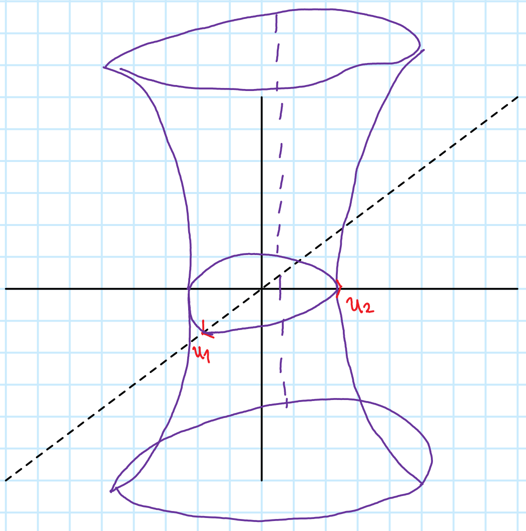
4. Sea $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática definida por $Q(x) = x^T A x$, donde $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es una matriz tal que el conjunto

$$\left\{ e^{9t}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T, e^{9t}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^T, e^{-t}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\end{bmatrix}^T \right\}$$

es un sistema fundamental de soluciones de $Y' = AY$. Caracterizar geométricamente el conjunto de nivel $\mathcal{N}_9(Q) = \{x \in \mathbb{R}^3 : Q(x) = 9\}$, graficarlo en el sistema cartesiano definido por los ejes principales de Q y determinar los puntos de $\mathcal{N}_9(Q)$ más cercanos al origen, indicando su distancia al mismo.

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ -1\\ -2\end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3}\\ 0 & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3}\end{bmatrix} \qquad \Delta = \begin{bmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\tilde{Q}(y) = Q(Py) = 9y_1^2 + 9y_2^2 - y_3^2 \qquad Q(x) = \tilde{Q}(y) = 9 \to y_1^2 + y_2^2 - \frac{1}{9}y_3^2 = 1$$



$$u_1 = \begin{bmatrix}1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\\ 0\end{bmatrix} \qquad u_2 = \begin{bmatrix}-1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{6}\end{bmatrix}$$

Es una hiperboloide de una hoja

$$\min_{x\in N_9} Q(x) = 1 \qquad \arg\min_{x \in N_9} Q(x) = \left\{ \cos(\theta) u_1 + \operatorname{sen}(\theta) u_2 \text{ con } \theta \in [0, 2\pi] \right\}$$

1. Sea $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ el $\mathbb{R}$-espacio euclídeo canónico. Hallar el conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^3$ equidistantes a los subespacios

$$\mathbb{S}_1 = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix}2 & -2 & 1\end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix}2 & 1 & -2\end{bmatrix}^T \right\} \text{ y } \mathbb{S}_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\},$$

y describirlo geométricamente.

$$d(x, \mathbb{S}_1) = \| P_{\mathbb{S}_1^\perp}(x) \| \qquad \| P_{\mathbb{S}_1^\perp}(x) \| = \| P_{\mathbb{S}_2^\perp}(x) \|$$

$$d(x, \mathbb{S}_2) = \| P_{\mathbb{S}_2^\perp}(x) \| \qquad \left\| \frac{\langle x, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \right\| = \left\| \frac{\langle x, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2 \right\| \qquad v_2 = \begin{bmatrix}2\\ -2\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\left| \frac{\langle x, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} \right| \|v_1\| = \left| \frac{\langle x, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} \right| \|v_2\|$$

$$\underbrace{\begin{vmatrix}i & j & k\\ 2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix} = \begin{bmatrix}3\\ 6\\ 6\end{bmatrix}}_{v_1} \qquad \frac{|\langle x, v_1\rangle|}{\|v_1\|} = \frac{|\langle x, v_2\rangle|}{\|v_2\|}$$

$$\frac{|3x_1 + 6x_2 + 6x_3|}{9} = \frac{|2x_1 - 2x_2 + x_3|}{3}$$

$$3x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 3(2x_1 - 2x_2 + x_3) \qquad 3x_1 + 6x_2 + 6x_3 = -3(2x_1 - 2x_2 + x_3)$$

$$-3x_1 + 12x_2 + 3x_3 = 0 \qquad 9x_1 + 9x_3 = 0$$

$$-x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 \qquad x_1 + x_3 = 0$$

$$\boxed{\{x \in \mathbb{R}^3 / -x_1 + 4x_2 + x_3 = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_3 = 0\}}$$

2. Hallar una matriz inversible $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que

$$A^2 - 3A + I = \begin{bmatrix}10 & -3 & 0\\ -3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

¿Es única? Si la respuesta es afirmativa explicar por qué, sino hallar otra.

$$\begin{vmatrix}10-\lambda & -3 & 0\\ -3 & 2-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((10-\lambda)(2-\lambda) - 9\right) = 0$$

$$(1-\lambda)(20$$

Extras

martes, 15 de febrero de 2022 12:37

Sean $\mathbb{V} = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A^T = A\}$ el $\mathbb{R}$ -espacio vectorial de la matrices simétricas de $\mathbb{R}^{2\times 2}$, y $T : \mathbb{V} \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$[T]_B^C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es la matriz de T con respecto a las bases $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ de $\mathbb{V}$ y $C = \left\{ [1 \; 1 \; 0]^T, [1 \; 0 \; 1]^T, [0 \; 1 \; 1]^T \right\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Todas las soluciones de la ecuación $T(A) = [1 \; 0 \; 1]^T$ son de la forma

Seleccione una:

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$. ✗

b. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$.

$\left[[1 \; 0 \; 1]^T\right]_C = [0 \; 1 \; 0]$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow b = 1 \text{ y } a = c = 0 \quad \downarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_B$

$\text{nul}\left([T]_B^C\right) = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}_B \right\}$

Reescribo todo respecto la base $\longrightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

ÁLGEBRA II (61.08 – 81.02)

Evaluación Integradora — Segundo cuatrimestre – 2020

Duración: 90 minutos. — 7/IV/21 – 13:00 hs.

Apellido y Nombres:

Padrón:

1. Hallar la solución de la ecuación diferencial $y'' - 5y' + 6y = 2xe^{3x}$ tal que $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

2. Explicar por qué la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

no es diagonalizable, y hallar una matriz invertible P y una matriz de Jordan J tales que $A = PJP^{-1}$.

3. Determinar la solución por cuadrados mínimos de norma mínima de la ecuación $Ax = b$ cuando

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

4. Sean $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la forma cuadrática definida por $Q(x) = x^T Ax$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \; 1 \; 1].$$

Hallar los puntos de la superficie de nivel $Q(x) = 4$ más cercanos al origen.

4) $A = I - 2P_{\text{gen}\{u\}}$

$A = \left(P_{\text{gen}\{u\}} + P_{\text{gen}\{u\}^\perp}\right) - 2P_{\text{gen}\{u\}}$

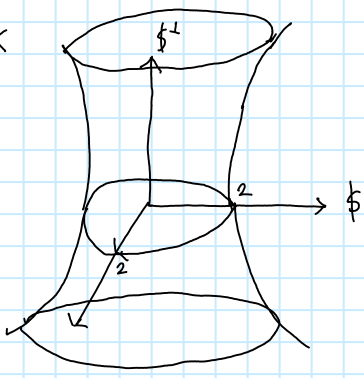
$A = -\underbrace{P_{\text{gen}\{u\}}}_{x_1} + \underbrace{P_{\text{gen}\{u\}^\perp}}_{x_2} x$

$Q(x) = -\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = 4$

$-\dfrac{\|x_1\|^2}{2^2} + \dfrac{\|x_2\|^2}{2^2} = 1$

$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$



$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\displaystyle\min_{x \in N_4} Q(x) = 2$

$\left\{ 2\lambda u_2 + 2\beta u_3 \quad \lambda^2 + \beta^2 = 1 \right\}$

$\left\{ 2\cos(\theta) u_2 + 2\,\text{sen}(\theta) u_3 \text{ con } \theta \in [0, 2\pi) \right\}$

3) $A = \underbrace{\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{U_r} \underbrace{\begin{bmatrix} 9\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 6\sqrt{6} \end{bmatrix}}_{\Sigma_r} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}}_{V_r^T} \longrightarrow A^+ = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{18} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{12} \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1/18 & 1/12 \\ -1/18 & 1/12 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7/36 & -5/18 \\ & \end{bmatrix}$

Final 1

miércoles, 16 de febrero de 2022 08:42

$A = \begin{bmatrix} -17 & 8 & 22 \\ -3 & 3 & 4 \\ -14 & 6 & 18 \end{bmatrix}$

```
A.jordan_form()
```

✓ 0.1s

$$\left(\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$y(t) = \lambda e^t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \beta e^t \Big($$

$$y(t) = \frac{7}{2} e^t \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{5}{2} e^t \underbrace{\left(t \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)}_{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3/2 \\ -1 \end{bmatrix}} + 2 e^{2t} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y(1) = e$$

$$A \, [2 \; -6 \; 3]^T = [16 \; -13 \; -4]^T$$
$$A \, [6 \; 3 \; 2]^T = [-8 \; 10 \; 9]^T$$
$$A \, [3 \; -2 \; -6] = [-11 \; 5 \; 1]$$

$$A \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$B = \{1, x, x^2\}$

$q = a + bx + cx^2$

$$\begin{bmatrix} \langle 1,1 \rangle & \langle 1,x \rangle & \langle 1,x^2 \rangle \\ \langle x,1 \rangle & \langle x,x \rangle & \langle x,x^2 \rangle \\ \langle x^2,1 \rangle & \langle x^2,x \rangle & \langle x^2,x^2 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(1) \\ \phi(x) \\ \phi(x^2) \end{bmatrix}$$

$\phi(1) = 1$

$\phi(x) = \frac{1}{2}$

$\phi(x^2) = \frac{1}{3}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

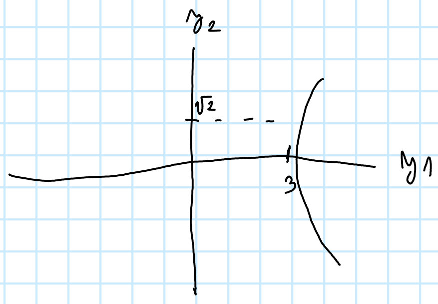
$$\boxed{q = -2 + 7x - 3x^2}$$

$$q = \frac{5}{12} + \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}x^2$$

$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 29 & 12 \\ 12 & 36 \end{bmatrix}$ $\quad P = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad \Delta^{-\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$\tilde{Q}(y) = Q(My) = y^T \underbrace{M^T A M}_{I} y = \|y\|^2$$

$$\bar{R}(y) = R(My) = \frac{1}{9}y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 = 1$$



$min = 9$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{bmatrix} \to \text{normalizo } \frac{1}{\sqrt{18}}$$

$A =$

$$A = P \Delta P = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - c_1 - \\ - c_2 - \\ - c_3 - \end{bmatrix}$$

$$A^n = \lambda_1^n \underbrace{v_1 c_1}_{P_1} + \lambda_2^n v_2 c_2 + \lambda_3^n v_3 c_3$$

$$A^n = \lambda_1^n P_1 + \lambda_2^n P_2 + \lambda_3^n P_3$$

3. Se considera la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hallar todas las soluciones por cuadrados mínimos de la ecuación $Ax = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ y determinar la de norma mínima.

$$A^T A x = A^T b \longrightarrow \begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} \longrightarrow x = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}}_{\in \hat{x}}$$

$$\left\langle \hat{x}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \longrightarrow \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \hat{x}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \qquad \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\begin{cases} 2a - b = 0 \\ 1 - a + 2b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \longrightarrow a = -\frac{1}{3} \quad b = -\frac{2}{3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ una matriz simétrica que satisface las siguientes propiedades: la dimensión del subespacio $\text{nul}(A - 3I) = 2$; $\det(A) = 36$; el plano $\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0\}$ es un autoespacio de A. El conjunto de todos los $x \in \mathbb{R}^3$ de norma 1 que maximizan la forma cuadrática $Q(x) = x^T A x$ es

Dim

Seleccione una:

a. $\left\{ \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix} \right\}$.

b. $\left\{ \cos(\theta) \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} + \sin(\theta) \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} : \theta \in [0, 2\pi) \right\}$.

c. $\left\{ \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix} \right\}$.

d. $\left\{ \cos(\theta) \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} + \sin(\theta) \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} : \theta \in [0, 2\pi) \right\}$. ✗

$\downarrow$

$x_2 = -2x_3 + 2x_1$

- $\lambda_1 = 3$

  $S_{\lambda_1} = \text{gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

- $\det(A) = 36 = \underset{\underset{3}{\shortparallel}}{\lambda_1} \cdot \lambda_2 \cdot \underset{\underset{3}{\shortparallel}}{\lambda_1} \Rightarrow$

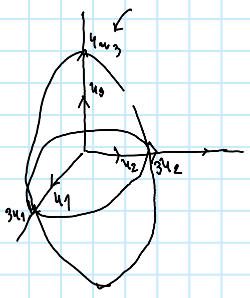
$\text{nul}(A - 3I) = \text{gen}\{u_1, u_2\}$ $\qquad$ $\text{Det}(A) = 3 \cdot 3 \cdot \lambda_2 = 36$ $\qquad$ $\text{nul}(A - 4I) = \{u_3\}$

$\lambda_2 = 4$

$A = P \Delta P^T$ $\qquad$ $P = \begin{bmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$

$$A = 3 \underbrace{\begin{bmatrix} | & | \\ u_1 & u_2 \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - u_1 - \\ - u_2 - \end{bmatrix}}_{P_{\text{gen}\{u_1, u_2\}}} + 4 \underbrace{\begin{bmatrix} | \\ u_3 \\ | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} - u_3 - \end{bmatrix}}_{P_{\text{gen}\{u_3\}} = \text{gen}\{u_1, u_2\}^{\perp}}$$

$$Q(x) = x^t \left(3 P_{\text{gen}\{u_1,u_2\}} + 4 P_{\text{gen}\{u_3\}}\right) x = 3 \| P^{(x)}_{\text{gen}\{u_1,u_2\}} \|^2 + 4 \| P^{(x)}_{\text{gen}\{u_3\}} \|^2$$



$4u_3 \quad y \quad -4u_3$ $\qquad$ $u_3 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$$