DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ALGEBRA II - A

TEORÍA DE CONJUNTOS Y FUNCIONES

María Gabriela Gröer
Licenciada en Ciencias Matemáticas (UBA)
Agrimensora (UBA)

SEGUNDO CUATRIMESTRE - 2023

TEORÍA DE CONJUNTOS

Un conjunto es una colección de objetos y a los objetos que forman un conjunto se los llama elementos del conjunto.
En un conjunto, no importa el orden de los elementos, ni se tienen en cuenta repeticiones de elementos.

Definiciones

- $\varnothing$ (conjunto vacío) es el conjunto que no tiene elementos.

$$\varnothing = \{\} \neq \{\varnothing\}$$

Sean A y B dos conjuntos.

- Si x es un elemento de A diremos que $x \in A$
- Si x no es un elemento de A diremos que $x \notin A$
- $A \subseteq B \Leftrightarrow x \in B\ \forall x \in A$. Y en este caso diremos que A está incluido en B o que A es un subconjunto de B
- $A \subset B \Leftrightarrow x \in B\ \forall x \in A$ y $\exists\, b \in B$ tal que $b \notin A$.
- $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ y $B \subseteq A$
- A y B son mutuamente disjuntos si $A \cup B = \varnothing$

⋆ ⋆ ⋆ ⋆ ⋆

Dos formas de describir un conjunto son por ***extensión*** y por ***comprensión***. Por ejemplo, el conjunto A que contiene a todos los números naturales del 1 al 4 se puede defnir como sigue:

- (***por extensión***) enumerando todos sus elementos, escritos entre llaves: |

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

- (***por comprensión***) a través de una propiedad que verifcan los elementos del conjunto y ningún otro:

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 4\}.$$

Para definir un conjunto por comprensión se necesita dar un conjunto de referencia, también llamado conjunto universal al que llamaremos Ω, y de donde se eligen los elementos que formarán el nuevo subconjunto de Ω.

Diagramas de Venn

Los diagramas de Venn son esquemas usados en la teoría de conjuntos. Estos diagramas muestran colecciones (conjuntos) de cosas (elementos) por medio de líneas cerradas que se superponen para ilustrar las relaciones lógicas entre dos o más conjuntos de elementos. La línea cerrada exterior abarca a todos los elementos bajo consideración agrupados en el conjunto Ω. Los diagramas de Venn fueron ideados hacia 1880 por John Venn.

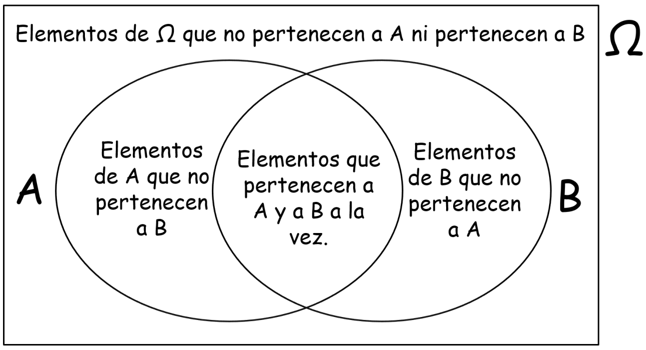

figura 1

Ejemplo

Supongamos que queremos comprar una mascota para una familia de tres miembros. Para elegir consideramos el conjunto Ω de las mascotas.
Ω es sólo una marco de referencia. También podríamos haber elegido el conjunto de los animales o el conjunto de las mascotas legales como conjunto Ω, lo que importa es que sea un conjunto que contenga todos los elementos bajo consideración.

- El conjunto A contiene las preferencias del miembro 1: perro, pez, serpiente.
- El conjunto B contiene las preferencias del miembro 2: perro, tortuga, hámster.
- El conjunto C contiene las preferencias del miembro 3: perro, gato, canario, hámster.

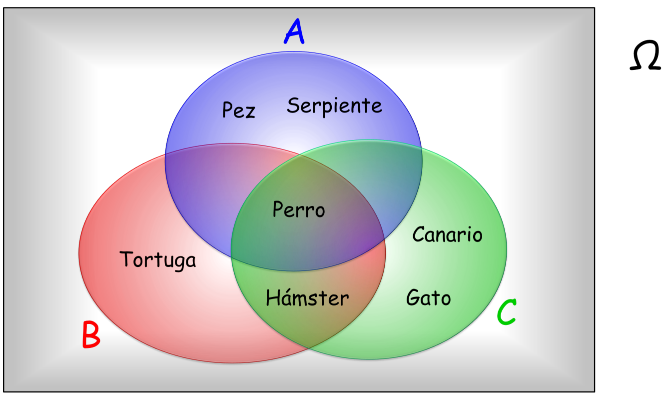

figura 2

La superposición, o intersección, de los tres conjuntos incluye solamente al perro (figura 2), que será la mascota elegida. La línea cerrada exterior abarca a todos los elementos bajo consideración agrupados en el conjunto Ω.

Álgebra de conjuntos

Sean A y B dos subconjuntos de un conjunto Ω. Definimos:

- Unión: $A \cup B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ ó } x \in B\}$
- Intersección: $A \cap B = \{x \in \Omega : x \in A \text{ y } x \in B\}$
- Diferencia: $A - B = \{x \in A : x \in A \text{ y } x \notin B\}$
- Producto cartesiano: $A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ y } b \in B\}$
- Complemento en Ω: $A^c = \Omega - A = \{x \in \Omega : x \notin A\}$

Observación:

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ $\qquad$ $\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ $\qquad$ $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$

Funciones

Imagen de un conjunto a través de una función

Definición

Sean A y B dos conjuntos, y sea $f : A \to B$ una función. Definimos:

$$f(A) = \{y = f(x) : x \in A\}$$

Ejemplos

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = cos(x)$
   - Si $A = \{\pi, 2\pi, 3\pi\}$, entonces $f(A) = \{f(\pi), f(2\pi), f(3\pi)\} = \{-1, 1\}$
   - Si $B = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ entonces $f(B) = [0, 1]$
2. $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $F(z) = e^{i\frac{\pi}{3}}z$
   Observar que F es una rotación alrededor del origen en sentido positivo.
   - Si $A = \{1, -1, e^{i\frac{\pi}{4}}, 0\}$, entonces

$$F(A) = \{F(1), F(-1), F(e^{i\frac{\pi}{4}}), F(0)\} = \{-e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{\pi}{3}}, \underbrace{e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{\pi}{4}}}_{=e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})}}, e^{i\frac{\pi}{3}}0\} = \{-e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i(\frac{7\pi}{12}}, 0\}$$

- Si B es la circunferencia de centro 1 y radio $r = 2$ entonces

$$z \in B \Leftrightarrow z = 1 + 2e^{it} \text{ con } t \in [0, 2\pi)$$

$F(B) = \{w = F(z) : z \in B\} = \{w = F(1 + 2e^{it}) : t \in [0, 2\pi)\}$

$F(1 + 2e^{it}) = e^{i\frac{\pi}{3}}(1 + 2e^{it}) = e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{3}}2e^{it} = e^{i\frac{\pi}{3}} + 2e^{i(\overbrace{\frac{\pi}{3}+t}^{s})}$

Si $s = \frac{\pi}{3} + t$ entonces $s \in [\frac{\pi}{3}, 2\pi + \frac{\pi}{3})$, que es un intervalo de longitud 2π; por lo tanto $F(B) \subseteq \mathcal{C}$: circunferencia de centro $e^{i\frac{\pi}{3}}$ y radio $r = 2$

Veamos que también vale la otra inclusión, es decir que $\mathcal{C} \subseteq F(B)$.

Sea $w \in \mathcal{C} \Rightarrow w = e^{i\frac{\pi}{3}} + 2e^{i(\frac{\pi}{3}+t)}$, con $t \in [\frac{\pi}{3}, 2\pi + \frac{\pi}{3})$. Hay que probar que $\exists z \in B$ tal que $F(z) = w$.

Es inmediato que $w = e^{i\frac{\pi}{3}} + 2e^{i(\frac{\pi}{3}+t)} = F(1 + 2e^{it})$ y $z = 1 + 2e^{it} \in B$.

Imagen inversa de un conjunto

Definición

Sean A y B dos conjuntos, y sea $f : A \to B$ una función.

Si C es un subconjunto de B, definimos la ***imagen inversa de*** C ***por la función*** f al conjunto $f^{-1}(C)$ dado por:

$$f^{-1}(C) = \{a \in A : f(a) \in C\} \subseteq A$$

Ejemplos

1. $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ dada por $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, y $C = [0, 2] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 2\}$

   $f^{-1}(C) = \{x \in \mathbb{R} - \{0 : f(x) \in C\} = \left\{x \in \mathbb{R} - \{0\} : 0 \leq \dfrac{1}{x-1} \leq 2\right\}$

   - $0 \leq \dfrac{1}{x-1} \Leftrightarrow x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$
   - Como $x \geq 1$, $\dfrac{1}{x-1} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 2x - 2 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{3}{2}$

   Por lo tanto $f^{-1}(C) = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{3}{2}\right\} = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right]$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = sen(x)$, y $C = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

   $f^{-1}(C) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in C\} = \left\{x \in \mathbb{R}- : \frac{1}{2} \leq sen(x) \leq \frac{3}{2}\right\}$ $f^{-1}(C) = \cdots \cup [\frac{\pi}{6} - 2\pi, \pi - \frac{\pi}{6} - 2\pi] \cup [\frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}] \cup [\frac{\pi}{6} + 2\pi, \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi] \cup [\frac{\pi}{6} + 4\pi, \pi - \frac{\pi}{6} + 4\pi] \cup \ldots$

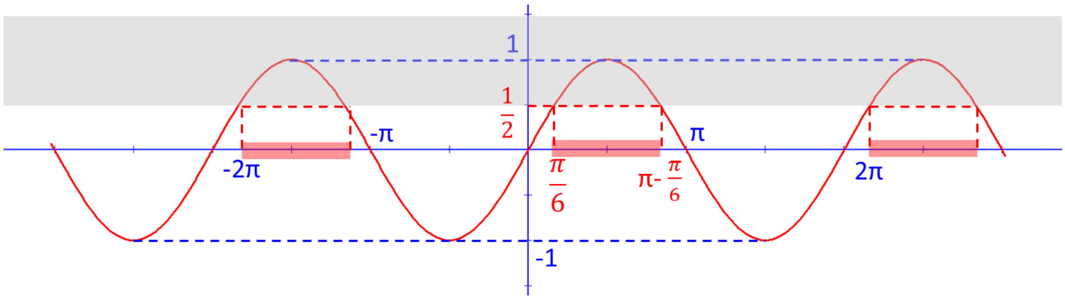

figura 3

$$f^{-1}(C) = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} \left[\tfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \pi - \tfrac{\pi}{6} + 2k\pi\right]$$

Funciones inversibles

Sean A y B dos conjuntos, y sea $f : A \to B$ una función.
Diremos que f es inversible si existe otra función $f^{-1} : B \to A$ tal que:

- $f^{-1}(f(a)) = a \ \ \forall a \in A$
- $f(f^{-1}(b)) = b \ \ \forall b \in B$

f^{-1} es la función inversa de f, o simplemente la inversa de f.
Observar que $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$

Ejemplos

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \mathbb{Z}$ y $f : A \to B$ dada por $f(a) = a$
   f no es inversible: si existiera f^{-1} debería ser $f(f^{-1}(z)) = z \ \forall z \in \mathbb{Z}$.
   Pero entonces, como $f(a) = a$, resultaría $f^{-1}(z) = z \in A \ \forall z \in \mathbb{Z}$ lo que es absurdo.

2. $g : [-\infty, 2) \to [-1, +\infty)$ dada por $g(x) = x^2 - 4x + 3$
   Para probar que g es inversible basta mostrar la inversa de g
   $g^{-1}(y) = x \Leftrightarrow g(x) = x^2 - 4x + 3 = y \Leftrightarrow (x-2)^2 - 1 = y \Leftrightarrow (x-2)^2 = y + 1 \Leftrightarrow |x-2| = \sqrt{y+1}$
   Pero si $x < 2$ entonces $|x - 2| = 2 - x$, y entonces:

   $$\Rightarrow g^{-1}(y) = 2 - \sqrt{y+1}$$

   Es inmediato que $g^{-1} : [-1, +\infty) \to [-\infty, 2)$

3. $g : \mathbb{R} \to [-1, +\infty)$ dada por $g(x) = x^2 - 4x + 3$
   $g^{-1}(y) = x \Leftrightarrow g(x) = x^2 - 4x + 3 = y \Leftrightarrow (x-2)^2 - 1 = y \Leftrightarrow (x-2)^2 = y + 1 \Leftrightarrow |x-2| = \sqrt{y+1}$
   Entonces

$$(x-2)=\sqrt{y+1} \quad \text{o} \quad -(x-2)=\sqrt{y+1}$$

Podría ser $g^{-1}(y)=\sqrt{y+1}+2$ o $g^{-1}(y)=2-\sqrt{y+1}$, pero ninguna de las dos verifica que $g^{-1}(g(x))=x \ \forall x \in \mathbb{R}$ ya que con la primera opción sería

$$g^{-1}(g(0))=g^{-1}(3)=\sqrt{3+1}+2=4$$

y con la segunda opción sería

$$g^{-1}(g(4))=g^{-1}(3)=2-\sqrt{3+1}=0$$

Entonces la función g no es inversible.