How to: East-West Method

Evelyn G. Coronel
Tesis de Maestría en Ciencias Físicas
Instituto Balseiro

(6 de octubre de 2020)

Este método se basa en el análisis de la diferencia entre las tasas de eventos provenientes del Este y del Oeste.

La exposición del observatorio en un momento dado es la misma para el Este como para el Oeste, si se considera que la misma depende del ángulo cenital θ solamente, y no del ángulo azimutal ϕ. [1]

Si se consideran las modulaciones espurias producidas por los efectos atmosféricos y sistemáticos son las mismas en ambas direcciones [2], la diferencia de tasas remueve sin realizar correcciones teniendo una ventaja en el caso de no poder corregir efectos sistemáticos. La desventaja es que la sensibilidad de este método es menor que el análisis de Rayleigh [3].

1. Un forma de obtener flujo de eventos $I(\alpha)$ para un α dado es la siguiente:

$$I(\alpha) = \int_{\delta_{min}}^{\delta_{max}} d\delta \cos\delta \frac{\mathrm{d}N(\alpha,\delta)}{\mathrm{d}\Omega} \tag{1}$$

donde Ω es el ángulo sólido en la esfera celeste expresada en las coordenadas ecuatoriales.

2. Considerando que la distribución de direcciones observada es un convolución entre e flujo de RCs Φ y la exposición direccional ω:

$$\tilde{N} = \int d\Omega \Phi(\alpha,\delta)\omega(\alpha,\delta), \tag{2}$$

y junto a la Ec.1 se obtiene lo siguiente:

$$I(\alpha) = \int_{\delta_{min}}^{\delta_{max}} d\delta \cos\delta \ \Phi(\alpha,\delta)\omega(\alpha,\delta) \tag{3}$$

3. El flujo de eventos observado I^{obs} para la ascensión recta del cenit α_0, entre los ángulos azimutales ϕ_1 y ϕ_2 puede calcularse mediante el flujo total de RCs Φ (expresado en coordenadas locales) como

$$I^{obs}(\alpha_0) = \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int_0^{\theta_{max}} d\theta \sin\theta \tilde{\omega}(\theta,\alpha^0)\Phi(\theta,\phi,\alpha_0), \tag{4}$$

donde el término $\tilde{\omega}$ representa la exposición del observatorio, este término incluye los efectos sistemáticos y atmosféricos, como la variación de los hexágonos del arreglo y las correcciones de la modulación del clima, mediante la dependencia con α_0.

4. Para calcular los flujos de eventos del Este y Oeste, I_E^{obs} y I_O^{obs} respectivamente, se integra la Ec.4 en los siguientes rangos:
   - Para el Este: entre $\phi_1 = -\pi/2$ y $\phi_2 = \pi/2$.
   - Para el Oeste: entre $\phi_1 = \pi/2$ y $\phi_2 = 3\pi/2$.

5. Se considera que las amplitudes de las variaciones asociadas a $\tilde{\omega}$ son pequeñas con respecto al valor medio de $\tilde{\omega}$, y que pueden desacoplarse de la dependencia de θ. Por lo tanto, por lo que podemos expresar $\tilde{\omega}$ de la siguiente manera:

$$\tilde{\omega}(\theta,\alpha_0) = \omega(\theta)\big(1+\eta(\alpha_0)\big) \tag{5}$$

6. Una anisotropía dipolar se puede describir de la siguiente manera:

$$\Phi(\hat{\mathbf{u}}) = \Phi_0(1+\mathbf{d}\cdot\hat{\mathbf{u}}) \tag{6}$$

donde Φ_0 es el flujo medio, $\hat{\mathbf{u}}$ es un versor que apunta a alguna dirección a estudiar y $\mathbf{d}$ es el vector con módulo d igual a la amplitud del dipolo y con dirección con eje del dipolo, Tomando coordenadas ecuatoriales [4], la dirección de $\mathbf{d}$ es (α_d,δ_d)[5] y de $\hat{\mathbf{u}}$ es (α,δ), por lo tanto el producto se puede escribir de la siguiente manera [6]:

$$\mathbf{d}\cdot\hat{\mathbf{u}} = d(\cos\delta_d\cos\delta\cos(\alpha-\alpha_d) + \sin\delta_d\sin\delta)$$

7. Por una cuestión de notación, definimos la siguiente expresión:

$$\overline{f(\theta)} = \int_0^{\theta_{max}} d\theta \sin\theta\omega(\theta)f(\theta) \tag{7}$$

donde $f(\bar{\theta})$ es la media de la función $f(\theta)$ sobre el ángulo cenital pesado por la exposición del observatorio, hasta un ángulo máximo. En este trabajo se centra en el rango de energía 1 EeV - 2 EeV, por lo que $\theta_{max} = 60^o$ para los datos del observatorio.

8. Teniendo en cuenta la Ec.5 y 6, se tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} I^{obs}(\alpha_0) &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int_0^{\theta_{max}} d\theta \sin\theta\omega(\theta)\big(1+\eta(\alpha_0)\big)\Phi_0(1+\mathbf{d}\cdot\hat{\mathbf{u}}) \\ &= \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int_0^{\theta_{max}} d\theta \sin\theta\omega(\theta)\big(1+\eta(\alpha_0)\big)\Phi_0 + \\ &+ \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int_0^{\theta_{max}} d\theta \sin\theta\omega(\theta)\big(1+\eta(\alpha_0)\big)\Phi_0\mathbf{d}\cdot\hat{\mathbf{u}} \end{aligned}$$

la primera parte de la igualdad puede simplificarse con la definición 7 e integrando sobre ϕ

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int_0^{\theta_{max}} d\theta \sin\theta\omega(\theta)\big(1+\eta(\alpha_0)\big)\Phi_0 =$$
$$= \Phi_0(1+\eta(\alpha_0))\pi \int_0^{\theta_{max}} d\theta \sin\theta\omega(\theta)$$
$$= \Phi_0(1+\eta(\alpha_0))\overline{1}$$

la integral sobre ϕ tiene el mismo valor para el Este y Oeste. Para la segunda parte de la expresión del item 8

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int_0^{\theta_{max}} d\theta \sin\theta\omega(\theta)\big(1+\eta(\alpha_0)\big)\Phi_0 \mathbf{d}\cdot\hat{\mathbf{u}} = \tag{8}$$
$$= \Phi_0(1+\eta(\alpha_0)) \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int_0^{\theta_{max}} d\theta \sin\theta\omega(\theta)\mathbf{d}\cdot\hat{\mathbf{u}} \tag{9}$$

El dipolo está fijo en el cielo pero visto desde las coordenadas locales para poder trabajar con θ y ϕ, sus proyecciones en los ejes de interés tienen una dependencia con la ascensión recta α_0 y declinación δ_0 del cenit. Consideremos el dipolo proyectado en las dirección de los versores $\hat{x}$ que apunta en la dirección Este, $\hat{y}$ en la dirección Norte y $\hat{z}$ en la dirección de cenit.

$$\mathbf{d} = d_x(\alpha_0)\hat{x} + d_y(\alpha_0)\hat{y} + d_z(\alpha_0)\hat{z},$$

mientras que el versor apunta en la dirección de integración

$$\hat{\mathbf{u}} = \sin\theta\cos\phi\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\hat{y} + \cos\theta\hat{z}$$

Finalmente,

$$\mathbf{d}\cdot\hat{\mathbf{u}} = d_x(\alpha_0)\sin\theta\cos\phi + d_y(\alpha_0)\sin\theta\sin\phi$$
$$+ d_z(\alpha_0)\cos\theta$$

Al integrar el ángulo ϕ entre $[{-\pi}/2, \pi/2]$ o $[\pi/2, 3\pi/2]$, el segundo término se anula, por lo que la expresión 9 queda como:

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int_0^{\theta_{max}} d\theta \sin\theta\omega(\theta)\mathbf{d}\cdot\hat{\mathbf{u}} =$$
$$\int_0^{\theta_{max}} d\theta(\pm 2d_x(\alpha_0)\sin\theta + \pi d_z(\alpha_0)\cos\theta)$$

donde $+2$ corresponde al Este y -2 al Oeste. Podemos simplificar la expresión usando la definición 7

$$\int_0^{\theta_{max}} d\theta(\pm 2d_x(\alpha_0)\sin\theta + \pi d_z(\alpha_0)\cos\theta) =$$
$$= \pm 2d_x(\alpha_0)\overline{\sin\theta} + \pi d_z(\alpha_0)\overline{\cos\theta}$$

9. Volviendo a la expresión de I^{obs}, teniendo en cuenta que necesitamos I_E^{obs} y I_O^{obs}:

$$I_E^{obs} = \Phi_0(1+\eta(\alpha_0))\Big(\pi\overline{1} + 2d_x(\alpha_0)\overline{\sin\theta} + \pi d_z(\alpha_0)\overline{\cos\theta}\Big)$$
$$I_O^{obs} = \Phi_0(1+\eta(\alpha_0))\Big(\pi\overline{1} - 2d_x(\alpha_0)\overline{\sin\theta} + \pi d_z(\alpha_0)\overline{\cos\theta}\Big)$$

10. Como estamos buscando la diferencia entre estos valores, la resta queda como:

$$I_E^{obs} - I_O^{obs} = \Phi_0(1+\eta(\alpha_0)) \times 4d_x(\alpha_0)\overline{\sin\theta}$$

11. Solo necesitamos las componentes del vector $\mathbf{d}$, para obtenerlas tenemos que considerar que los componentes que necesitamos están en el plano x-z. Para hacer esto, consideremos que los versores $\hat{\mathbf{u}}_z$ y $\hat{\mathbf{u}}_x$ que apuntan al cenit y al Este respectivamente. Considerando la fórmula para proyectar un vector sobre la dirección de un versor:

$$d_x(\alpha_0)\hat{x} = (\mathbf{d}\cdot\hat{\mathbf{u}}_x)\hat{\mathbf{u}_\mathbf{x}} \to d_x(\alpha_0) = \mathbf{d}\cdot\hat{\mathbf{u}}_x \tag{10}$$

podemos obtener las proyecciones con un producto escalar con versores a las direcciones de interés. Estos versores en coordenadas ecuatoriales son los siguientes:

$$\hat{\mathbf{u}}_z = (\alpha_0, \delta_0)$$
$$\hat{\mathbf{u}}_x = (\alpha_0 + \frac{\pi}{2}, 0),$$

se suma $\frac{\pi}{2}$ para apuntar al Este, cuando el versor recorre $\pi/2$ en ascensión recta, llega al plano del ecuador que tiene declinación 0.

12. Finalmente para obtener las componentes:

$$\mathbf{d}\cdot\hat{\mathbf{u}}_z = d(\cos\delta_d\cos\delta_0\cos(\alpha_0-\alpha_d) + \sin\delta_d\sin\delta_0)$$
$$\mathbf{d}\cdot\hat{\mathbf{u}}_x = d(\cos\delta_d\cos\Big(\alpha_0 + \frac{\pi}{2} - \alpha_d\Big) = -d\cos\delta_d\sin(\alpha_0-\alpha_d)$$

Entonces,

$$I_E^{obs} - I_O^{obs} = -4d\Phi_0(1+\eta(\alpha_0))\cos\delta_d\sin(\alpha_0-\alpha_d)\overline{\sin\theta} \tag{11}$$

13. Esta diferencia se debe relacionar con la variación del flujo verdadero, es decir el flujo que se observaría si no existieran variaciones temporales (ascensión recta) en la exposición. Esto implica que $\eta(\alpha_0) = 0$. Además el flujo total I es la suma de los flujos de ambas direcciones, por lo tanto se puede afirmar que:

$$I = I_E + I_O = 2\pi\Phi_0(1+0)\Big(\overline{1} + d_z(\alpha_0)\overline{\cos\theta}\Big) \tag{12}$$
$$\frac{\mathrm{d}I^{obs}}{\mathrm{d}\alpha_0} = 2\pi\Phi_0\overline{\cos\theta}\frac{\mathrm{d}\, d_z(\alpha_0)}{\mathrm{d}\alpha_0} \tag{13}$$
$$\frac{\mathrm{d}I^{obs}}{\mathrm{d}\alpha_0} = -2d\pi\Phi_0\overline{\cos\theta}\cos\delta_d\cos\delta_0\sin(\alpha_0-\alpha_d) \tag{14}$$

14. Para llegar a la expresión 11, hicimos la expansión hasta el primer orden de $\omega(\theta, alpha_0)$ y de $\Phi(\alpha,\delta)$. Para ser consistentes, desperdiciemos el término de segundo orden de la expresión 11 que es proporcional de $\eta \cdot d$ y la expresión 11 queda:

$$I_E^{obs} - I_O^{obs} \approx -4d\Phi_0 \cos\delta_d \sin(\alpha_0 - \alpha_d)\overline{\sin\theta} \tag{15}$$

Por lo tanto,

$$I_E^{obs} - I_O^{obs} \approx \frac{2}{\pi\cos\delta_0}\frac{\langle\sin\theta\rangle}{\langle\cos\theta\rangle}\frac{\mathrm{d}I^{obs}}{\mathrm{d}\alpha_0} \tag{16}$$

donde se usa la expresión:

$$\langle f(\theta)\rangle = \frac{\overline{f(\theta)}}{\overline{1}} = \frac{\int_0^{\theta_{max}} d\theta \sin\theta\omega(\theta)f(\theta)}{\int_0^{\theta_{max}} d\theta\sin\theta\omega(\theta)}$$

que es equivalente a hacer la media ponderada con $\sin\theta\omega(\theta)$ de todos los datos de $f(\theta)$.

COMO IMPLEMENTARLO EN CÓDIGO

---

[1] Tengo que agregar un apéndice explicando las coordenadas locales.
[2] ¿Cuán factible es afirmar esto? No discuto que funciona, sino porqué :).
[3] Agregar referencia.
[4] Agregar también un apéndice de ecuatoriales.
[5] Agregar fórmulas de cambio de sistema de referencia ecuatorial-local.
[6] Faltaría mencionar el producto de versor de esta representación para decir sale de acá, en el apéndice capaz. No sé, al final el cálculo me sale fácil poniendo todo en cartesianas.).