

Capítulo 1

Método East-West

El método de Rayleigh se basa ajustar la tasa de eventos en función de la ascensión recta mediante una función armónica. El mismo permite calcular la amplitud de la anisotropía para distintos armónicos, su fase y la probabilidad de detectar la misma señal debido a fluctuaciones de una distribución isotropa de RCs.

La dificultad en utilizar el método Rayleigh recae en procesamiento de los datos: efectos del clima, variaciones de la área del Observatorio y al sensibilidad de los instrumentos deben tenerse en cuenta. Los efectos mencionados deben ser corregidos de la tasa de eventos medida, ya que los mismos inducen modulaciones espurias en la tasa de eventos.

En el método East - West consiste en el ajuste de una función armónica a la diferencia entre las tasas de eventos provenientes del Este y del Oeste. Si se consideran que las modulaciones espurias producidas por los efectos atmosféricos y sistemáticos son las mismas en ambas direcciones, la diferencia de tasas remueve estos efectos sin realizar correcciones adicionales. Una desventaja de este método es que su sensibilidad es menor que el método de Rayleigh [1].

1.1. Descripción de una anisotropía dipolar

Una anisotropía dipolar se puede describir de la siguiente manera:

$$\Phi(\hat{\mathbf{u}}) = \Phi_0(1 + \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{u}}) \quad (1.1)$$

donde Φ_0 es el flujo medio, $\hat{\mathbf{u}}$ es un versor que apunta a alguna dirección a estudiar y \mathbf{d} es el vector con módulo d igual a la amplitud del dipolo y con dirección con eje del dipolo, Tomando coordenadas ecuatoriales ¹, la dirección de \mathbf{d} es $(\alpha_d, \delta_d)^2$ y de $\hat{\mathbf{u}}$ es

¹Agregar también un apéndice de ecuatoriales

²Agregar fórmulas de cambio de sistema de referencia ecuatorial-local

(α, δ) , por lo tanto el producto se puede escribir de la siguiente manera ³:

$$\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{u}} = d(\cos \delta_d \cos \delta \cos(\alpha - \alpha_d) + \sin \delta_d \sin \delta)$$

Otro aspecto importante de la representación del dipolo en coordenadas ecuatoriales es que la proyección de la amplitud del dipolo sobre el plano ecuatorial se puede aproximar de la siguiente manera:

$$r_1 \simeq d_{\perp} \langle \cos \delta \rangle \quad (1.2)$$

donde r_1 es la amplitud de la aproximación a primer orden en Fourier.

1.1.1. Representación en coordenadas locales de la anisotropía dipolar

Podemos reescribir el producto escalar entre dipolo \mathbf{d} y el versor apunta en la dirección de integración mediante las coordenadas locales.

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= d_x(\alpha^0)\hat{x} + d_y(\alpha^0)\hat{y} + d_z(\alpha^0)\hat{z} \\ \hat{\mathbf{u}} &= \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z} \\ \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{u}} &= d_x(\alpha^0) \sin \theta \cos \phi + d_y(\alpha^0) \sin \theta \sin \phi + d_z(\alpha^0) \cos \theta \end{aligned}$$

donde los versores \hat{x} , \hat{y} y \hat{z} apuntan a la dirección Este, a la dirección Norte y a la dirección de cenit respectivamente.

1.2. Descripción formal del método East-West

1.2.1. Flujo de eventos del Este y Oeste

El flujo de eventos observado $I^{obs}(\alpha_0)$ para la ascensión recta del cenit α^0 , entre los ángulos azimutales ϕ_1 y ϕ_2 puede calcularse mediante el flujo total de RCs Φ (expresado en coordenadas locales) como

$$I^{obs}(\alpha^0) = \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int_0^{\theta_{max}} d\theta \sin \theta \tilde{\omega}(\theta, \alpha^0) \Phi(\theta, \phi, \alpha^0), \quad (1.3)$$

donde el término $\tilde{\omega}$ representa la exposición del observatorio. Este término también incluye los efectos sistemáticos y atmosféricos, como la variación de los hexágonos del arreglo y las correcciones de la modulación del clima, mediante su dependencia con α^0 .

³Faltaría mencionar el producto de versor de esta representación para decir sale de acá, en el apéndice capaz. No sé, al final el cálculo me sale fácil poniendo todo en cartesianas.)

Para calcular los flujos de eventos del Este y Oeste, I_E^{obs} y I_O^{obs} respectivamente, se integra la Ec.1.3 en los siguientes rangos:

- Para el Este: entre $\phi_1 = -\pi/2$ y $\phi_2 = \pi/2$.
- Para el Oeste: entre $\phi_1 = \pi/2$ y $\phi_2 = 3\pi/2$.

1.2.2. Aproximaciones del método

Se considera que las amplitudes de las variaciones asociadas a $\tilde{\omega}$ son pequeñas con respecto al valor medio de $\tilde{\omega}$, y que pueden desacoplarse de la dependencia de θ . Por lo tanto, por lo que podemos expresar $\tilde{\omega}$ de la siguiente manera:

$$\tilde{\omega}(\theta, \alpha^0) = \omega(\theta)(1 + \eta(\alpha^0)) \quad (1.4)$$

Por una cuestión de notación, definimos la siguiente expresión:

$$\overline{f(\theta)} = \int_0^{\theta_{max}} d\theta \sin \theta \omega(\theta) f(\theta) \quad (1.5)$$

donde $\overline{f(\theta)}$ es la media de la función $f(\theta)$ sobre el ángulo cenital pesado por la exposición del observatorio, hasta un ángulo máximo. En este trabajo se centra en eventos hasta 2 EeV, por lo que $\theta_{max} = 60^\circ$ para los datos del observatorio.

Teniendo en cuenta la Ec.1.4 y 1.1, se tiene la siguiente expresión:

$$I^{obs}(\alpha^0) = \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int_0^{\theta_{max}} d\theta \sin \theta \omega(\theta) (1 + \eta(\alpha^0)) \Phi_0 (1 + \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{u}})$$

la primera parte de la igualdad puede simplificarse con la definición 1.5 e integrando sobre ϕ

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int_0^{\theta_{max}} d\theta \sin \theta \omega(\theta) (1 + \eta(\alpha^0)) \Phi_0 = \Phi_0 (1 + \eta(\alpha^0)) \bar{1}$$

la integral sobre ϕ tiene el mismo valor para el Este y Oeste. Para la segunda parte de la expresión del ítem 8

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int_0^{\theta_{max}} d\theta \sin \theta \omega(\theta) (1 + \eta(\alpha^0)) \Phi_0 \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \quad (1.6)$$

$$= \Phi_0 (1 + \eta(\alpha^0)) \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int_0^{\theta_{max}} d\theta \sin \theta \omega(\theta) \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{u}} \quad (1.7)$$

El dipolo está fijo en el cielo pero visto desde las coordenadas locales para poder trabajar con θ y ϕ , sus proyecciones en los ejes de interés tienen una dependencia con

la ascensión recta α^0 y declinación δ_0 del cenit.

1.2.3. Cálculo de la diferencia de tasas

Al integrar el ángulo ϕ entre $[-\pi/2, \pi/2]$ o $[\pi/2, 3\pi/2]$, el segundo término se anula, por lo que la expresión 1.7 queda como:

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \int_0^{\theta_{max}} d\theta \sin \theta \omega(\theta) \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \int_0^{\theta_{max}} d\theta (\pm 2d_x(\alpha^0) \sin \theta + \pi d_z(\alpha^0) \cos \theta)$$

donde +2 corresponde al Este y -2 al Oeste. Podemos simplificar la expresión usando la definición 1.5

$$\begin{aligned} \int_0^{\theta_{max}} d\theta (\pm 2d_x(\alpha^0) \sin \theta + \pi d_z(\alpha^0) \cos \theta) &= \\ &= \pm 2d_x(\alpha^0) \overline{\sin \theta} + \pi d_z(\alpha^0) \overline{\cos \theta} \end{aligned}$$

1. Volviendo a la expresión de I^{obs} , teniendo en cuenta que necesitamos I_E^{obs} y I_O^{obs} :

$$\begin{aligned} I_E^{obs} &= \Phi_0(1 + \eta(\alpha^0)) \left(\pi \bar{1} + 2d_x(\alpha^0) \overline{\sin \theta} + \pi d_z(\alpha^0) \overline{\cos \theta} \right) \\ I_O^{obs} &= \Phi_0(1 + \eta(\alpha^0)) \left(\pi \bar{1} - 2d_x(\alpha^0) \overline{\sin \theta} + \pi d_z(\alpha^0) \overline{\cos \theta} \right) \end{aligned}$$

2. Como estamos buscando la diferencia entre estos valores, la resta queda como:

$$I_E^{obs} - I_O^{obs} = \Phi_0(1 + \eta(\alpha^0)) \times 4d_x(\alpha^0) \overline{\sin \theta}$$

3. Solo necesitamos las componentes del vector \mathbf{d} , para obtenerlas tenemos que considerar que los componentes que necesitamos están en el plano x-z. Para hacer esto, consideremos que los versores $\hat{\mathbf{u}}_z$ y $\hat{\mathbf{u}}_x$ que apuntan al cenit y al Este respectivamente. Considerando la fórmula para proyectar un vector sobre la dirección de un versor:

$$d_x(\alpha^0) \hat{x} = (\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{u}}_x) \hat{\mathbf{u}}_x \rightarrow d_x(\alpha^0) = \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{u}}_x \quad (1.8)$$

podemos obtener las proyecciones con un producto escalar con versores a las direcciones de interés. Estos versores en coordenadas ecuatoriales son los siguientes:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}_z &= (\alpha^0, \delta_0) \\ \hat{\mathbf{u}}_x &= (\alpha^0 + \frac{\pi}{2}, 0), \end{aligned}$$

se suma $\frac{\pi}{2}$ para apuntar al Este, cuando el versor recorre $\pi/2$ en ascensión recta, llega al plano del ecuador que tiene declinación 0.

4. Finalmente para obtener las componentes:

$$\begin{aligned}\mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{u}}_z &= d(\cos \delta_d \cos \delta_0 \cos(\alpha^0 - \alpha_d) + \sin \delta_d \sin \delta_0) \\ \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{u}}_x &= d(\cos \delta_d \cos(\alpha^0 + \frac{\pi}{2} - \alpha_d) = -d \cos \delta_d \sin(\alpha^0 - \alpha_d)\end{aligned}$$

Entonces,

$$I_E^{obs} - I_O^{obs} = -4d\Phi_0(1 + \eta(\alpha^0)) \cos \delta_d \sin(\alpha^0 - \alpha_d) \overline{\sin \theta} \quad (1.9)$$

5. Esta diferencia se debe relacionar con la variación del flujo verdadero, es decir el flujo que se observaría si no existieran variaciones temporales (ascensión recta) en la exposición. Esto implica que $\eta(\alpha^0) = 0$. Además el flujo total I es la suma de los flujos de ambas direcciones, por lo tanto se puede afirmar que:

$$I = I_E + I_O = 2\pi\Phi_0(1 + 0) \left(\overline{1} + d_z(\alpha^0) \overline{\cos \theta} \right) \quad (1.10)$$

$$\frac{dI^{obs}}{d\alpha^0} = 2\pi\Phi_0 \overline{\cos \theta} \frac{d d_z(\alpha^0)}{d\alpha^0} \quad (1.11)$$

$$\frac{dI^{obs}}{d\alpha^0} = -2d\pi\Phi_0 \overline{\cos \theta} \cos \delta_d \cos \delta_0 \sin(\alpha^0 - \alpha_d) \quad (1.12)$$

6. Para llegar a la expresión 1.9, hicimos la expansión hasta el primer orden de $\omega(\theta, \alpha_0)$ y de $\Phi(\alpha, \delta)$. Para ser consistentes, desperdiciamos el término de segundo orden de la expresión 1.9 que es proporcional de $\eta \cdot d$ y la expresión 1.9 queda:

$$I_E^{obs} - I_O^{obs} \approx -4d\Phi_0 \cos \delta_d \sin(\alpha^0 - \alpha_d) \overline{\sin \theta} \quad (1.13)$$

Por lo tanto,

$$I_E^{obs} - I_O^{obs} \approx \frac{2}{\pi \cos \delta_0} \frac{\langle \sin \theta \rangle}{\langle \cos \theta \rangle} \frac{dI^{obs}}{d\alpha^0} \quad (1.14)$$

donde se usa la expresión:

$$\langle f(\theta) \rangle = \frac{\overline{f(\theta)}}{\overline{1}} = \frac{\int_0^{\theta_{max}} d\theta \sin \theta \omega(\theta) f(\theta)}{\int_0^{\theta_{max}} d\theta \sin \theta \omega(\theta)}$$

que es equivalente a hacer la media ponderada con $\sin \theta \omega(\theta)$ de todos los datos de $f(\theta)$.

1.3. Estimación de la componente ecuatorial del dipolo mediante el análisis del primer armónico

Ya con la Ec.1.14 podemos estimar la modulación dipolar de $I(\alpha^0)$ a partir de la amplitud r y la fase ϕ_0 :

$$\frac{dI(\alpha^0)}{d\alpha^0} = r \cos(\alpha^0 - \phi), \quad (1.15)$$

podemos estimar estos parámetros con un análisis similar a Rayleigh, salvo modificaciones menores para tener en cuenta la dirección de los eventos, así podemos restar los coeficientes de los sectores Este y Oeste. Los coeficientes de Fourier en este caso se determinan con las siguientes expresiones:

$$a_{EW} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \cos(\alpha_i^0 - \beta_i)$$

$$b_{EW} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \sin(\alpha_i^0 - \beta_i)$$

donde N es la cantidad de eventos en el rango de tiempo estudiado y $\beta_i = 0$ si el evento proviene del Este, caso contrario $\beta_i = 1$. La amplitud $r_{EW} = \sqrt{a_{EW}^2 + b_{EW}^2}$ y la fase $\phi_{EW} = \tan^{-1}(b_{EW}/a_{EW})$ mediante este análisis en frecuencia es posible estimar los valores r y ϕ de la Ec.1.15:

$$r = \frac{\pi \cos \delta_0}{2} \frac{\langle \cos \theta \rangle}{\langle \sin \theta \rangle} r_{EW}$$

$$\text{integración} \rightarrow r_I = \frac{N}{2\pi} r$$

$$\phi = \phi_{EW}$$

$$\text{integración} \rightarrow \phi_I = \phi_{EW} + \frac{\pi}{2}$$

La amplitud obtenida por el Método E-W no es la amplitud del dipolo físico aunque está relacionada con la misma. La Ec.1.14 puede expresarse con la proyección del dipolo físico sobre el ecuador $d_{\perp} = d \cos \delta_0$, teniendo en cuenta la ecuación 1.13:

$$I_E^{obs} - I_O^{obs} \approx -4d_{\perp} \Phi_0 \sin(\alpha^0 - \alpha_d) \overline{\sin \theta}, \quad (1.16)$$

1.4 Cálculo de la amplitud del dipolo para la frecuencia sidérea con el método East-West⁷

si multiplicamos la expresión por una identidad y consideramos $N \sim 4\pi^2\Phi_0\bar{1}^4$:

$$I_E^{obs} - I_O^{obs} \approx -4d_\perp \frac{N}{4\pi^2\bar{1}} \sin(\alpha^0 - \alpha_d) \overline{\sin\theta} \frac{1}{\bar{1}} \quad (1.17)$$

$$I_E^{obs} - I_O^{obs} \approx -4d_\perp \frac{N}{4\pi^2} \sin(\alpha^0 - \alpha_d) \langle \sin\theta \rangle \quad (1.18)$$

$$I_E^{obs} - I_O^{obs} \approx -\frac{N}{2\pi} d_\perp \frac{2\langle \sin\theta \rangle}{\pi} \sin(\alpha^0 - \alpha_d) \quad (1.19)$$

Como esto es equivalente a $-r_I \sin(\alpha^0 - \alpha_d)$ por la ecuación 1.15, además de considerar la ecuación 1.2:

$$r = r_1 \frac{2\langle \sin\theta \rangle}{\pi} \quad (1.20)$$

$$r = \frac{\pi \cos\delta_0}{2} \frac{\langle \cos\theta \rangle}{\langle \sin\theta \rangle} r_{EW} \quad (1.21)$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{\pi}{2} \frac{\langle \cos\delta \rangle}{\langle \sin\theta \rangle} r_{EW} \quad (1.22)$$

donde la última ecuación es la relación entre la amplitud del dipolo y la amplitud obtenida con el método East-West. Como en el caso del análisis de Rayleigh, la probabilidad de obtener una amplitud mayor o igual a que r_{EW} a partir de una distribución isotropa una distribución acumulada de Rayleigh:

$$P(\geq r_{EW}) = \exp\left\{-\frac{N}{4} r_{EW}^2\right\} = \exp\left\{-\frac{N}{4} \left(\frac{2\langle \sin\theta \rangle}{\pi \langle \cos\delta \rangle}\right)^2 r_1^2\right\} \quad (1.23)$$

1.4. Cálculo de la amplitud del dipolo para la frecuencia sidérea con el método East-West

1. Definimos el rango de tiempo a estudiar, para estos resultados se utilizaron los límites: 1 de Enero del 2014 hasta el 1 de Enero del 2020.
2. Se recorre cada evento que cumpla con las siguientes características:
 - Pertenezca el rango de energía a estudiar
 - Sea un evento 6T5 con ángulo cenital menor a 60°
 - Se haya registrado en el rango de tiempo seleccionado

En cada evento se calcula los siguientes valores:

$$a' = \cos(X - \beta) \quad (1.24)$$

$$b' = \sin(X - \beta) \quad (1.25)$$

⁴Porque es la integral con respecto a los dos ángulos, θ y ϕ

1.4 Cálculo de la amplitud del dipolo para la frecuencia sidérea con el método East-West8

el valor de X depende la frecuencia a estudiar, la misma es igual a la ascensión recta del cenit α_i^0 al momento del evento si se estudia la frecuencia sidérea, en cambio para la frecuencia solar es igual al equivalente en grados de la hora local de Malargüe. El valor de β es depende si el evento provino del Este donde $\beta = 180^\circ$ o $\beta = 0$ caso contrario. Se intentó hacer un barrido de frecuencias análogo al análisis de Rayleigh pero la variable utilizada para generalizar el análisis a frecuencias arbitrarias:

$$\tilde{\alpha} = 2\pi f_x t_i + \alpha_i - \alpha_i^0(t_i) \quad (1.26)$$

es tal que la variable es igual a la ascensión recta del evento a estudiar y no al cenit como es el caso del EW.

3. Una vez corridos todos los eventos se calculan los parámetros:

$$a_{EW} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N a \quad b_{EW} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N b$$

que es equivalente a haber calculado

$$a_{EW} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \cos(\alpha_i^0 - \beta_i)$$

$$b_{EW} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \sin(\alpha_i^0 - \beta_i)$$

donde N indica la cantidad eventos considerados. La cantidad de eventos por rango de energía se muestran en la tabla 3.1.

Con esto puedo calcular la amplitud asociada al análisis r_{EW} y la fase ϕ_{EW} :

$$r_{EW} = \sqrt{a_{EW}^2 + b_{EW}^2}$$

$$\phi_{EW} = \tan^{-1}(b_{EW}/a_{EW})$$

Estos valores se traducen a los valores de amplitud r y fase ϕ del dipolo físico mediante las expresiones:

$$r = \frac{\pi}{2} \frac{\langle \cos \delta \rangle}{\langle \sin \theta \rangle} r_{EW}$$

$$d_{\perp} = \frac{\pi}{2 \langle \sin \theta \rangle} r_{EW} = \frac{r}{\langle \cos \delta \rangle}$$

$$\phi = \phi_{EW} + \frac{\pi}{2}$$

Se suma $\frac{\pi}{2}$ por el artificio de agregar π en los coeficientes para obtener la diferencia

entre tasas del este y oeste. Los valores $\langle \cos \delta \rangle$ y $\langle \sin \delta \rangle$ son los valores medios de estas variables en los años estudiados.

4. Se calcula la amplitud límite r_{99} y la probabilidad de que las amplitudes calculadas sea ruido $P(r_{EW})$ mediante:

$$P(\geq r_{EW}) = \exp\left\{\left(-\frac{N}{4}r_{EW}^2\right)\right\}$$

$$r_{99} = \frac{\pi}{2} \frac{\langle \cos \delta \rangle}{\langle \sin \theta \rangle} \sqrt{\frac{4}{N} \ln(100)}$$

$$d_{\perp,99} = \frac{r_{99}}{\langle \cos \delta \rangle}$$

5. Una vez obtenidos los valores a considerar, se calculan los errores asociados a cada variable, con las expresión a continuación:

- Error asociado a la amplitud r y d_{\perp}

$$r \rightarrow \sigma = \frac{\pi \langle \cos \delta \rangle}{2 \langle \sin \theta \rangle} \sqrt{\frac{2}{N}}$$

$$d_{\perp} \rightarrow \sigma_{x,y} = \frac{\sigma}{\langle \cos \delta \rangle}$$

- Error asociado a la fase ϕ de la amplitud:

$$\sigma_{\phi} = \frac{1}{r_{EW}} \sqrt{\frac{2}{N}}$$

Por último, estos resultados se comparan con los valores obtenidos con el método EW en el trabajo [2] en frecuencia sidérea, aplicado al conjunto de eventos del disparo estándar registrados entre el 1 de Enero del 2004 y el 1 de Agosto del 2018.

1.5. Cómo se hace el cálculo para frecuencias arbitrarias

Cambiamos las variable de la ascensión recta del cenit α_0 por

$$\tilde{\alpha} = 2\pi f_x t_i \tag{1.27}$$

donde f_x es la frecuencia arbitraria a estudiar y t_i es el momento donde ocurre el evento a estudiar. Luego se realizan el mismo procedimiento que lo anterior para calcular el valor de la amplitud r .

En la siguiente sección se verifica que se obtiene los mismo resultados con esta variable general que con el valor de α_0 para la frecuencia sidérea.

1.6. Verificación del código

1.6.1. Comparación con el trabajo [2] de la colaboración

Se verificó el código escrito en este trabajo de la siguiente manera:

1. El conjunto de eventos del disparo estándar registrados entre el 1 de Enero del 2004 y el 1 de Agosto del 2018 fue analizado en el trabajo [2].
2. Utilizando el código y los datos de los eventos del paper [2], obtenidos de la página del *Publications Committee* de la colaboración Auger, se replicaron los datos del paper.
3. Luego utilizando el código escrito para este trabajo, se realizó el análisis de EW con los datos del trabajo [2].
4. Finalmente se verificó que los valores obtenidos en los item 2 y 3, con ambos códigos, sean el mismo.

1.6.2. Tabla comparando con Right ascension

Para verificar que la variable de la Ec.1.27 es útil para estudiar otras frecuencias, en la Tabla 1.1 se comparan los resultados de la referencia para el rango $0.25 - 0.5$ EeV, los obtenidos usando la ascensión recta del cenit y los valores obtenidos con la Ec.1.27 en el mismo rango de energía. Se observan que los valores son comparables entre sí.

	[2]	α_0	$\alpha = 2\pi f_x t_i$
Frecuencia:	366.25	366.25	366.25
d_{\perp} [%]:	0.60	0.60	0.60
$\sigma_{x,y}$ [%]	0.48	0.48	0.48
Probabilidad:	0.45	0.45	0.45
Fase[°]:	225 ± 64 [3]	225 ± 45	227 ± 45
r_{99} [%]:	1.5	1.5	1.5
$d_{\perp,99}$ [%]:	1.8	1.8	1.8

Tabla 1.1: Verificando la variable $\alpha = 2\pi f t$

Capítulo 2

Distribución de probabilidad de la amplitud y fase del dipolo

En el trabajo [4] se estudia los límites de confianza para la amplitud y la fase obtenidos mediante el análisis del primer armónico en Fourier. Las fórmulas que se describen a continuación describen a un conjunto de N mediciones cuya anisotropía está caracterizada por el vector \vec{s} con una dispersión $\sigma = \sqrt{2/N}$, sin pérdida de generalidad debido a la periodicidad de la fase, la misma puede considerarse nula. Este vector puede ser obtenido mediante distintos métodos, en este trabajo se utilizaron el método de Rayleigh e East - West.

La distribución de probabilidad de la amplitud y la fase está dada por la Ec.2.1. Las variables r y ψ representan las variaciones de las mediciones con respecto a \vec{s}

$$p(r, \psi) = dr d\psi \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left\{-\frac{(r^2 + s^2 - 2rs \cos \psi)}{2\sigma^2}\right\} \quad (2.1)$$

2.1. Distribución de probabilidad de la amplitud

Integrando la Ec.2.1 con respecto a ψ , se obtiene la función de densidad de probabilidad $p(r)$ y el nivel de confianza $CL(s)$.

$$p(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{(r^2 + s^2)}{2\sigma^2}\right\} K_0\left(\frac{rs}{\sigma^2}\right) \quad (2.2)$$

$$CL_r(r_0, r_1 s) = \int_{r_0}^{r_1} dr p(r) \quad (2.3)$$

Estas ecuaciones nos permiten determinar el nivel de confianza CL con el cual se puede afirmar que el módulo del dipolo se encuentra entre los valores r_0 y r_1 .

Se define el valor r^{UL} como el límite superior donde se puede afirmar que el módulo de dipolo se encuentra entre 0 y r^{UL} con un 99 % de certeza.

$$CL_r(0, r^{UL}, s) = 0.99 = \int_0^{r^{UL}} dr p(r) \quad (2.4)$$

Suponiendo que mediante el análisis de un conjunto de eventos, se obtiene que $s = 0.005$ y $\sigma = 0.038$. El gráfico de la función $p(r)$ y el límite de confianza en función de r se muestra a continuación:

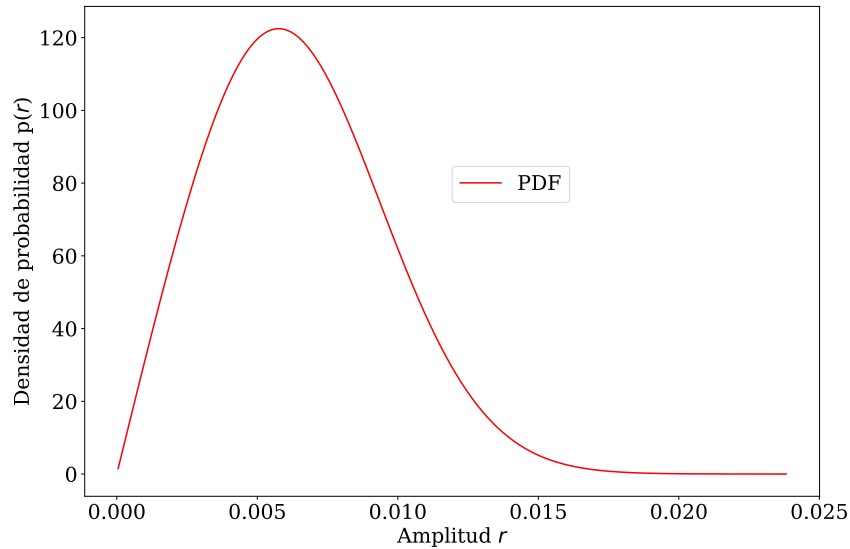


Figura 2.1: El gráfico de la función $p(r)$ y el límite de confianza para $s = 0.005$ y $\sigma = 0.038$

Esta figura nos dice por ejemplo que la probabilidad que el dipolo físico se encuentre entre 0 y 0.015 es del 85 %.

2.1.1. Haciendo la cuenta de los márgenes de confianza de la amplitud

(???)Calculemos los márgenes de confianza para el ejemplo anterior de $s = 0.005$ y $\sigma = 0.038$. En este trabajo los márgenes que se obtuvieron nos dicen que el nivel de confianza en ese intervalo del 68.27 %, dado que si N fuera muy grande, la pdf tiende a una gaussiana y el nivel de confianza sería a una sigma.

Los pasos que sigo son los siguientes:

1. Dado que la pdf tiene una función de Bessel modificada de primer orden que diverge en el 0, se toma una aproximación a la función con los primeros 8 términos de la sucesión. (agregar el anexo). Por ende la pdf no está normalizada.

Para normalizarla calculo la probabilidad asociada a $r_{max} = r + 10\sigma$. Dado que

está tan alejada del valor de amplitud obtenida, el $CL \simeq 1$, por lo que uso este valor para normalizar la Ec. 2.2 en el código.

2. Una vez que tengo la función normalizada, finalmente hago la integral de la ecuación 2.3 $CL(0, s, s)$ hasta un valor inicial de s y el valor de la función $p(s) = p_1$.

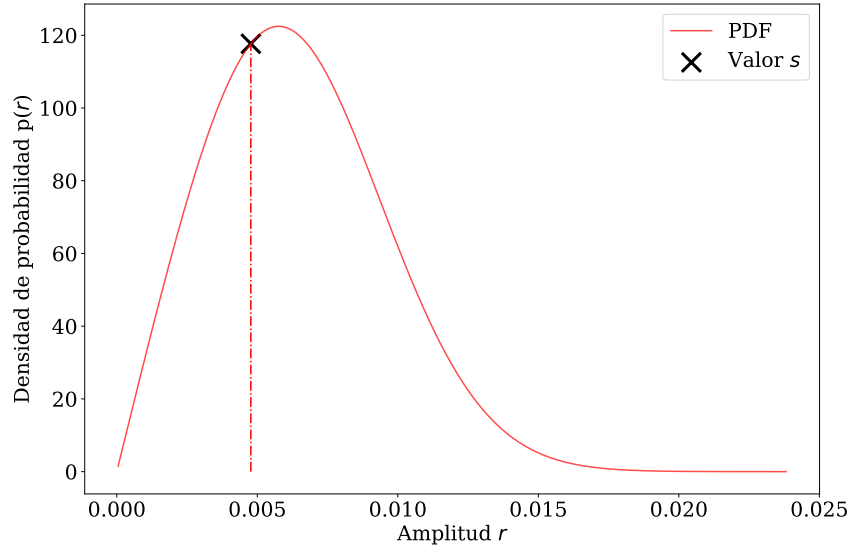
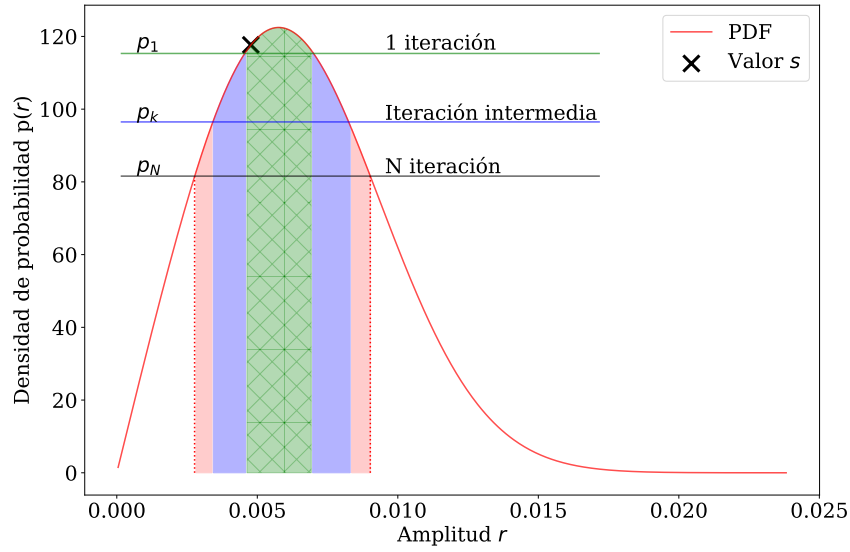


Figura 2.2

3. Si $CL(0, s, s) < 0.683$:
 - a) Teniendo en cuenta el valor inicial de p_1 , se actualiza el valor $p_2 \leftarrow p_1 - 0.01p_1$.
 - b) Se calcula la integral entre los dos puntos con valores igual a $p(r)_2$.
 - c) Si la integral es menor a 0.6827, se repite el proceso desde el paso 3a. Caso contrario, si esta integral es mayor o igual a 0.6827, se calculan los valores límites de r mediante el valor p_2 en el siguiente paso.

**Figura 2.3**

4. Si $CL(0, s, s) > 0.683$:

a) Se toma como límite inferior r^- el valor s y se busca el límite superior r^+ de tal forma que $CL(s, s + \sigma^+, s) \simeq 0.683$. En este trabajo no se encontró este caso pero se menciona por completitud ya que está implementado en el código del trabajo [2].

5. Para calcular los límites de confianza superior r^+ y inferior r^- , teniendo en cuenta el valor final p_N del paso 3c, se calculan los valores de r_i donde se cumple que $p(r_i) = p_N$, los mismos son r^+ y r^- . Finalmente los límites de confianza se calculan como:

$$\sigma^- = s - r^-$$

$$\sigma^+ = s^+ - r$$

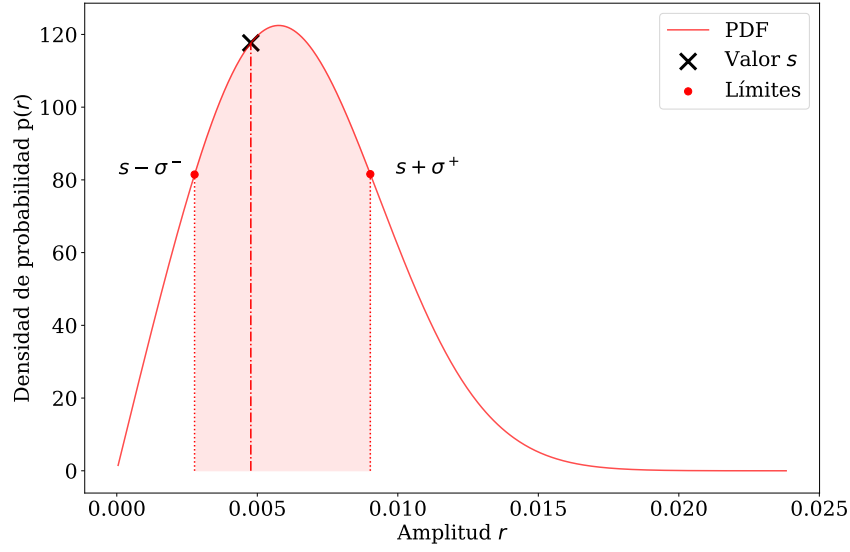


Figura 2.4

2.2. Distribución de probabilidad de la fase del dipolo

Si ahora se integra la ecuación 2.1 se obtiene la distribución de probabilidad de la fase ψ de la Ec.2.6.

$$p(\psi) = d\psi \frac{1}{2\pi} e^{-k} \left[1 + (\pi k)^{1/2} \cos \psi e^{(k \cos^2 \psi)} \left(1 + L \operatorname{erf}(L k^{1/2} \cos \psi) \right) \right] \quad (2.5)$$

$$CL_\psi(\phi_1, \phi_2, s) = \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\psi p(\psi) \quad (2.6)$$

donde $k = s^2/\sigma^2$ y $\operatorname{erf}(x)$ es la función error, y

$$L = \begin{cases} +1 & \text{Si } -\frac{\pi}{2} \geq x \leq \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{Caso contrario} \end{cases}$$

La distribución de probabilidad tiene la característica de ser simétrica respecto a 0, por eso los límites de integración son $[-\pi, \pi]$.

Se definió que el nivel de confianza para la fase reportada en este trabajo sea del 95.45%, ya que $k \gg 1$ la distribución de la fase se acerca a una distribución normal y este nivel de confianza es equivalente a 2σ . Para calcular CL_ψ dada la simétrica con respecto al 0, se siguen los siguientes pasos:

1. Se toma un valor inicial de $\sigma_{\psi,0} = 0.01 * |\psi|$, donde ψ es valor de fase obtenida ya sea por el método Rayleigh o East-West. Se eligió este valor inicial por conveniencia.
2. Se integra la Ec.2.6 en el rango $[-\sigma_{\psi,0}, \sigma_{\psi,0}]$ y se verifica si $CL_{\psi}(-\sigma_{\psi,0}, \sigma_{\psi,0}, s) = 0.9545$.
3. Si ese es el caso, se reporta la fase como $\psi \pm \sigma_{\psi,0}$, caso contrario se vuelve al paso anterior con $\sigma_{\psi,1} \leftarrow \sigma_{\psi,0} + 0.01\sigma_{\psi,0}$.
4. Se entre los pasos 2 y 3 hasta obtener el valor de $\sigma_{\psi,N}$ que cumpla $CL_{\psi}(-\sigma_{\psi,N}, \sigma_{\psi,N}, s) = 0.9545$

En la Fig.2.5 se muestra la distribución de probabilidad de la fase para $s = 0.005$ y $\sigma = 0.0038$, también se incluye los límites de confianza obtenidos.

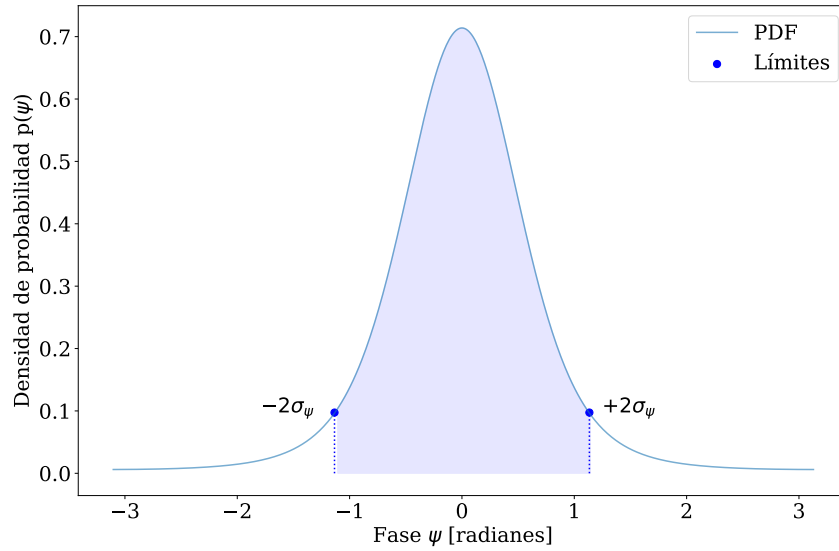


Figura 2.5: La distribución de probabilidad de la fase para $s = 0.005$ y $\sigma = 0.0038$ con los límites de confianza del 95.45 %.

Capítulo 3

Resultados del método East - West

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos mediante el método East-West con los eventos de Todos los Disparos en distintos rangos de energía. Estos resultados se comparan con los valores obtenidos en [2] sobre los eventos del Disparo Estándar.

Los eventos son clasificados en los distintos rangos con la energía reportada el conjunto de eventos registrados mediante de todos los disparos entre el 2014 y 2019 y para el disparo estándar entre el 2004 y 2018.

Rango Tiempo	Todos 6 años	Inicio	1 de Enero, 2014
		Fin	1 de Enero, 2020
	Estándar 14.8 años	Inicio	1 de Enero, 2004
		Fin	1 de Octubre, 2018

Rango [EeV]		0.25 - 0.5	0.5 - 1	1 - 2
Eventos	Todos	3 967 368	3 638 226	1 081 846
	Estándar	770 323	2 388 468	1 243 098
Energía	Todos	0.38	0.69	1.32
Media	Estándar	0.42	0.71	1.34

Tabla 3.1: Tabla de eventos por rango de energía

3.1. Resultados en distintos rangos de energía

3.1.1. Resultados en el rango 0.25 EeV - 0.5 EeV

En la Fig. 3.1 se comparan las direcciones en las que apuntan la fase en frecuencia sidérea obtenida en este trabajo con la obtenida en [2]. Las fases tiene un margen donde se solapan en la incertidumbre pero no son comparables, la línea punteada marca la

dirección del centro galáctico.

	Todos los disparos		Disparo Estándar
Frecuencia:	Solar	Sidérea	Sidérea [2]
Amplitud r [%]:	$0.17^{+0.22}_{-0.07}$	$0.12^{+0.24}_{-0.03}$	$0.5^{+0.4}_{-0.2}$ [5]
r_{99} [%]:	0.58		1.1[5]
r^{UL} [%]:	0.67	0.64	1.4[5]
σ [%]:	0.19		0.38[5]
Amplitud d_{\perp} [%]:	-	$0.16^{+0.31}_{-0.04}$	$0.6^{+0.5}_{-0.3}$
d_{99} [%]:	-	0.73	1.5 [5]
d_{\perp}^{UL} [%]:	-	0.80	1.8
$\sigma_{x,y}$ [%]:	-	0.24	0.48
Probabilidad :	0.66	0.81	0.45
Fase[°]:	221 ± 93	280 ± 124	225 ± 64
$\langle \cos \delta \rangle$	0.79		0.79 [5]
$\langle \sin \theta \rangle$	0.46		0.52 [5]

Tabla 3.2: Características para las frecuencias solar y sidérea con el método East-West en el primer armónico en rango de energía 0.25 EeV - 0.5 EeV.

Realizando el barrido de frecuencias con la variable de la Ec.1.27, se obtiene que en este rango de energía las amplitudes se distribuyen en frecuencia como se muestra en la Fig.3.2. La línea horizontal indica el valor de r_{99} para cada frecuencia, además se observa que ninguna frecuencia supera dicho umbral.

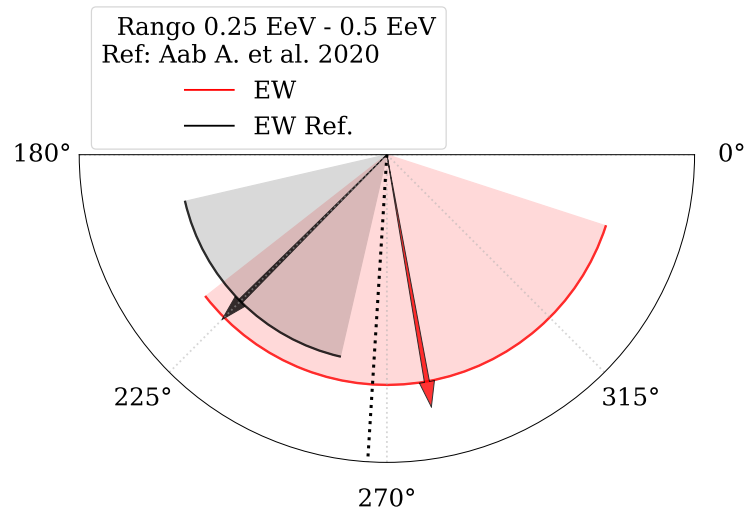


Figura 3.1: Valores de las fases obtenidos en este trabajo y en la referencia con sus respectivas incertidumbres para la frecuencia sidérea en el rango 0.25 EeV - 0.5 EeV .

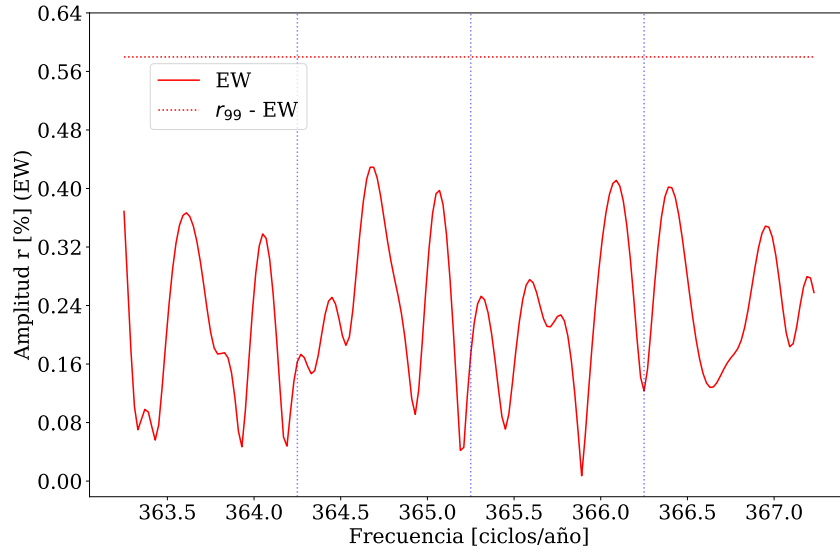


Figura 3.2: Barrido de frecuencias en el rango 0.25 EeV - 0.50 EeV .

3.1.2. Resultados en el rango 0.5 EeV - 1 EeV

En este rango de energía se observa una diferencia entre las probabilidades de este trabajo y [2] en la frecuencia sidérea. Este valor dice cuando probable es que las amplitudes sean debido al ruido. Este trabajo obtiene que la amplitud en sidérea es significativa por un 6 %.

En la Fig. 3.3 se comparan las direcciones en las que apuntan la fase en frecuencia sidérea obtenida en este trabajo con la obtenida en [2]. En esta figura se observa que las fases son comparables entre sí y apuntan a una dirección cercana al centro galáctico (línea punteada).

El barrido de frecuencias con la variable de la Ec.1.27 para este rango de energía se observa en la Fig.3.4. La línea horizontal indica el valor de r_{99} para cada frecuencia, además se observa que ninguna frecuencia supera dicho umbral. Otro aspecto es que la zona de la frecuencia anti-sidérea no tiene picos pronunciados, como en la frecuencia solar o sidérea.

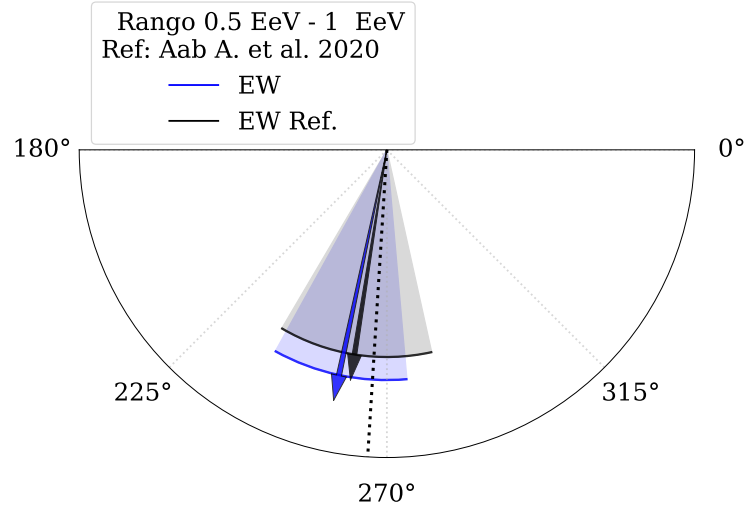


Figura 3.3: Valores de las fases obtenidos en este trabajo y en la referencia con sus respectivas incertidumbres para la frecuencia sidérea en el rango 0.5 EeV - 1.0 EeV .

	Todos los disparos		Disparo Estándar
Frecuencia:	Solar	Sidérea	Sidérea [2]
Amplitud r [%]:	$0.43^{+0.21}_{-0.14}$	$0.44^{+0.21}_{-0.14}$	$0.38^{+0.20}_{-0.14}$ [5]
r_{99} [%]:	0.56		0.64[5]
r^{UL} [%]:	0.89	0.90	0.90 [5]
σ [%]:	0.18		0.21 [5]
Amplitud d_{\perp} [%]:	-	$0.56^{+0.27}_{-0.18}$	$0.5^{+0.3}_{-0.2}$
d_{99} [%]:	-	0.71	0.8 [5]
d_{\perp}^{UL} [%]:	-	1.1	1.1
$\sigma_{x,y}$ [%]:	-	0.23	0.21
Probabilidad :	0.065	0.055	0.20
Fase[°]:	205 ± 35	258 ± 34	261 ± 43
$\langle \cos \delta \rangle$	0.79		0.79 [5]
$\langle \sin \theta \rangle$	0.50		0.54[5]

Tabla 3.3: Características para las frecuencias solar y sidérea con el método East-West en el primer armónico en rango de energía 0.5 EeV - 1 EeV

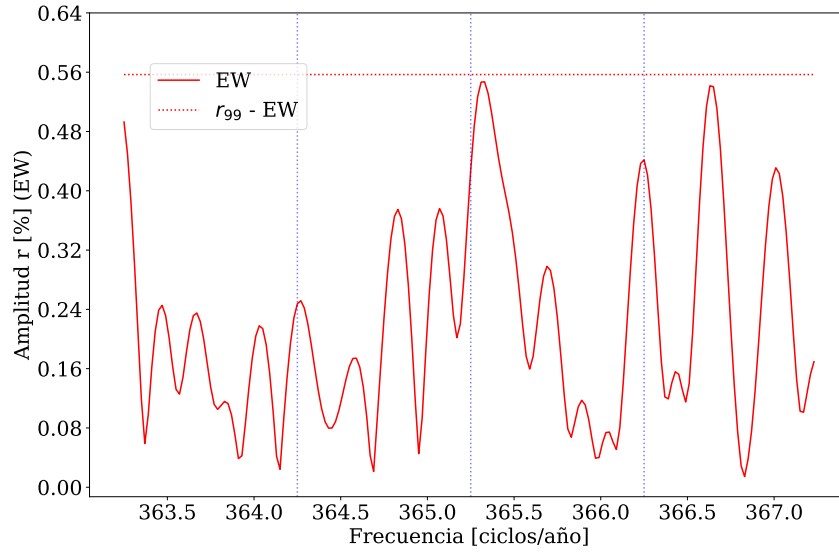


Figura 3.4: Barrido de frecuencias en el rango 0.5 EeV - 1.0 EeV .

3.1.3. Resultados en el rango 1 EeV - 2 EeV

En las Tablas 3.4 y 3.5 se comparan los resultados de este trabajo y los obtenidos en [2] para la frecuencia solar y sidérea respectivamente. En el Fig.3.5 se observan en un gráfico polar las fases de la referencia y este trabajo para la frecuencia sidérea. Los resultados son comparables entre sí.

	Todos los disparos	
	Rayleigh	East - West
Frecuencia:	Solar	
Amplitud r [%]:	$0.24^{+0.16}_{-0.09}$	$0.28^{+0.35}_{-0.11}$
r_{99} [%]:	0.41	0.91
r_{UL} [%]:	0.58	1.1
σ :	0.14	0.30
Probabilidad:	0.22	0.65
Fase:	260 ± 48	279 ± 90

Tabla 3.4: Características para la frecuencia solar con los métodos de Rayleigh e East-West en el primer armónico.

	Todos los Disparos		Disparo Estándar
	Rayleigh	East - West	East - West[2]
Frecuencia:	Sidérea		Sidérea
Amplitud r [%]:	$0.32^{+0.16}_{-0.10}$	$0.5^{+0.3}_{-0.2}$	$0.14^{+0.37}_{-0.02}$ [5]
r_{99} [%]:	0.41	0.91	0.84[5]
r^{UL} [%]	0.66	1.3	0.89 [5]
σ [%]:	0.14	0.30	0.28 [5]
Amplitud d_{\perp} [%]:	$0.41^{+0.20}_{-0.13}$	$0.6^{+0.4}_{-0.3}$	$0.18^{+0.47}_{-0.02}$
d_{99} [%]:	0.53	1.1	1.1[5]
d_{\perp}^{UL} [%]	0.84	1.6	1.1
$\sigma_{x,y}$ [%]:	0.17	0.38	0.35
Probabilidad:	0.063	0.26	0.87
Fase[°]:	357 ± 35	320 ± 50	291 ± 100
$\langle \cos \delta \rangle$	0.78		0.78
$\langle \sin \theta \rangle$	0.55		0.57

Tabla 3.5: Características para la frecuencia sidérea con los métodos de Rayleigh e East-West en el primer armónico.

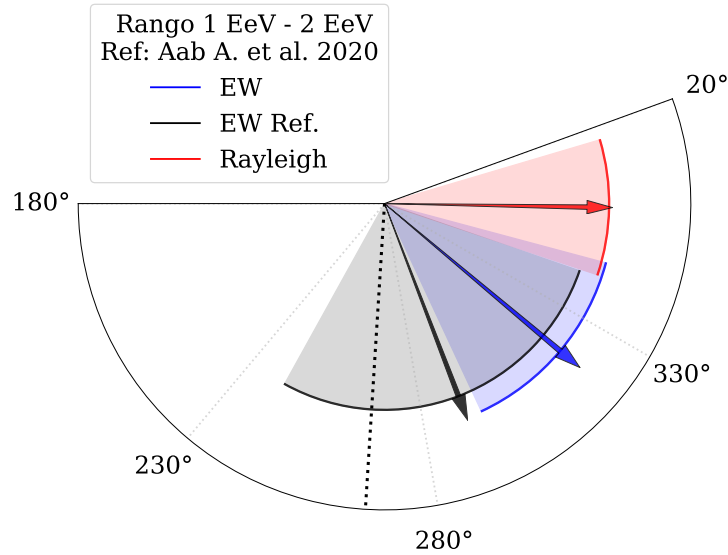


Figura 3.5: Valores de las fases obtenidos en este trabajo y en la referencia con sus respectivas incertidumbres para la frecuencia sidérea en el rango 1.0 EeV - 2.0 EeV .

El barrido de frecuencias con la variable de la Ec.1.27 para este rango de energía se observa en la Fig.3.6. La línea horizontal indica el valor de r_{99} para cada frecuencia y se observa que ninguna frecuencia supera dicho umbral. En la frecuencia solar no se observa ningún pico, esto se debe a que el método East - West es robusto con respecto a

las modulación del clima. Se observa un pico en sidérea pero el mismo no es significativo con respecto al r_{99} .

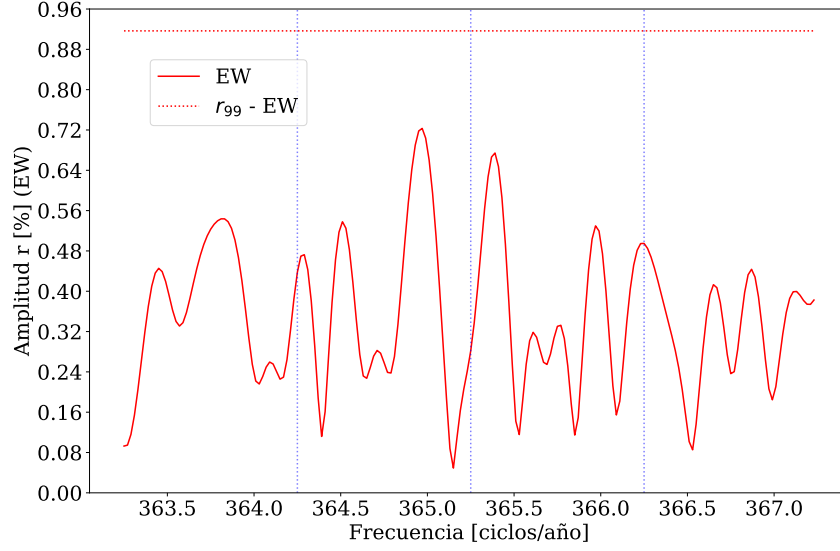


Figura 3.6: Barrido de frecuencias en el rango 1 EeV - 2 EeV .

3.2. Gráficos

Para poder comparar los resultados de d_{\perp} entre sí, podríamos graficar los valores de la proyección y de la límite del 99 % como se muestra en la Fig.3.7. El inconveniente es la cantidad de datos en cada rango de energía entre los conjuntos de datos, todos los disparos y disparo estándar, son distintos.

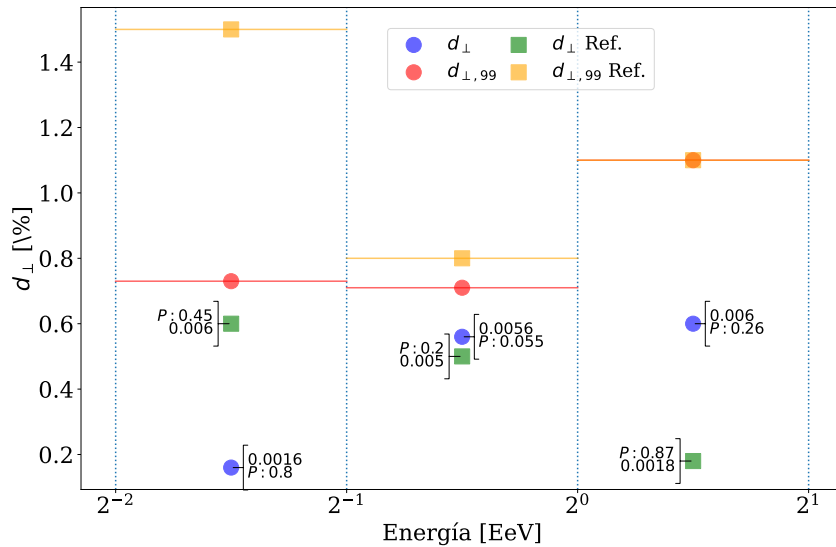


Figura 3.7: Sin normalizar

También podemos comparar cuan apartados están con respecto al valor $\sigma_{x,y}$ y normalizar los valores en cada rango de energía, así se obtiene la Fig.3.8.

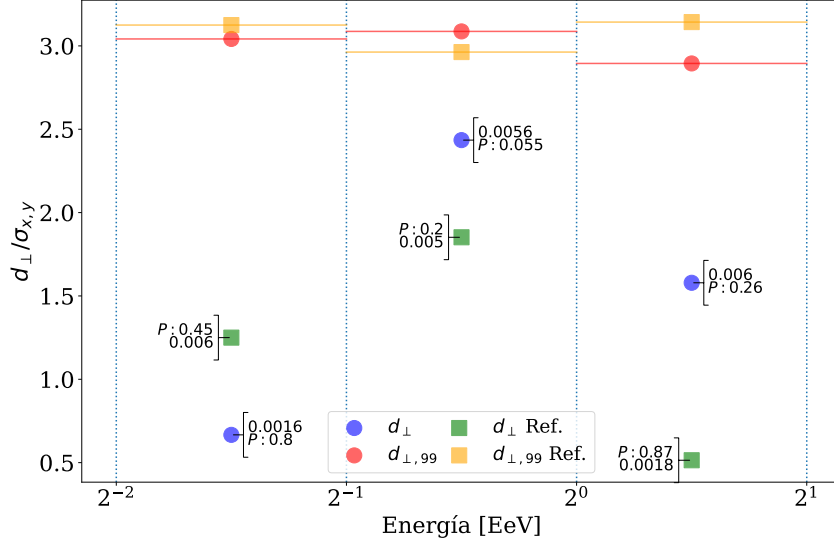


Figura 3.8: Valores normalizados con $d_{\perp,UL}$

Por lo que ahora podemos decir que en los rangos entre 0.5 EeV - 1.0 EeV y 1.0 EeV - 2.0 EeV, la amplitud obtenida en este trabajo está por encima que la referencia.

Para comparar los resultados en el rango 0.25 EeV - 0.5 EeV, tenemos que tener en cuenta que el disparo estándar tiene una sensibilidad menor que el todos los disparos. Esto se ve claramente en la Tabla 3.1, donde el primer tiene 7 veces menos eventos para analizar. Por lo tanto, la discrepancia entre la referencia y los trabajos puede deberse a la diferencia de eventos a estudiar causada por la sensibilidad del disparo.

Considerando los valores de σ y d_{\perp} para cada rango de energía, puedo comparar las direcciones, valores e incertidumbres en un sola figura como en la Fig.3.9. Las líneas punteadas están centradas en los valores de referencia en cada rango de energía y con radio igual a sus incertidumbres.

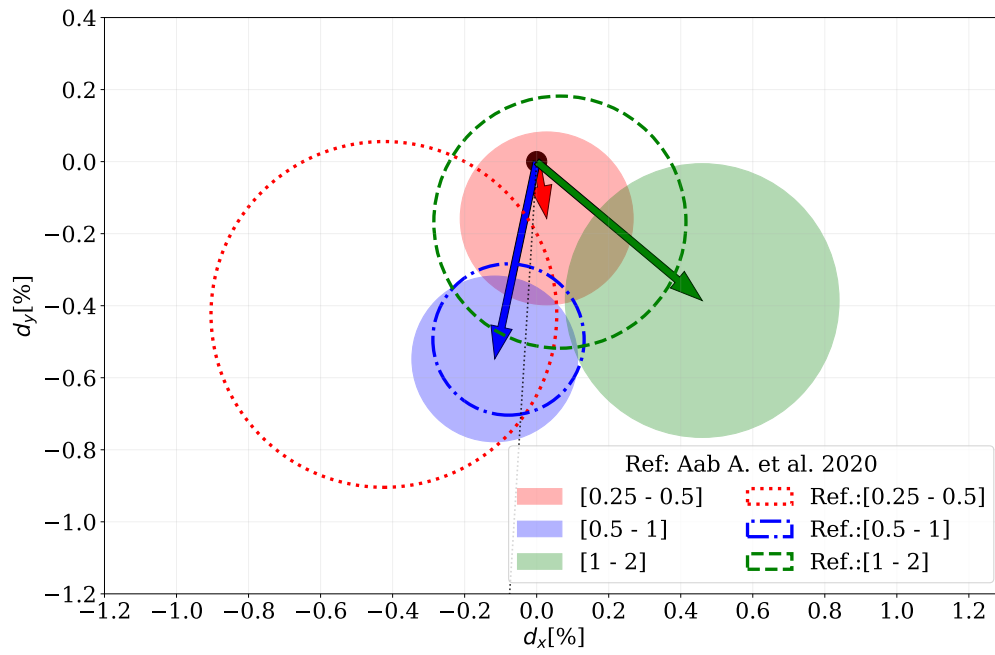


Figura 3.9: Amplitudes con incertidumbre, apuntando en la dirección de la fase. Los círculos punteados los valores de referencia del trabajo [2] con sus respectivas incertidumbres y la línea punteada en negro marca la dirección del centro galáctico.

Capítulo 4

Esto va a ir en otro capítulo que todavía no armé

4.1. Comparando resultados entre métodos para barridos de frecuencias

4.2. Verificación del código escrito durante la maestría

Para ver que todo cierre, obtuve los resultados del paper [2] con el código del Rayleigh para distintos bins. En el bin 2 EeV - 4 EeV tuve incongruencias entre mi código y los valores reportados en el paper, pero si comparo los valores obtenidos con el código utilizado para el paper con mis resultados si se corresponden. En los demás bins los resultados entre el código implementado en [2], los resultados publicados y los resultados de mi código se corresponden.

En el bin 2 EeV - 4 EeV, verifiqué sin cambiaba los números considerando los eventos hasta 80° , pero los parámetros de Rayleigh eran los mismos que usar 60° como límite en θ . Cuando no considero los pesos en mi código, obtengo resultados congruentes con los publicados pero eso puede ser una casualidad.

	2 EeV - 4 EeV			
Frecuencia:	Sidérea	Sidérea (Sin pesos)	Sidérea [5]	Sidérea [2]
Amplitud r [%]:	$0.5^{+0.3}_{-0.2}$	$0.4^{+0.3}_{-0.2}$	$0.5^{+0.3}_{-0.2}$	-
r_{99} [%]:	0.8	0.8	0.8	-
Amplitud d_{\perp} [%]:	$0.7^{+0.4}_{-0.2}$	$0.5^{+0.4}_{-0.2}$	$0.7^{+0.4}_{-0.2}$	$0.5^{+0.4}_{-0.2}$
d_{99} [%]:	1.0	1.0	1.0	-
$d_{\perp, UL}$ [%]:	1.9	1.7	-	1.4
$\sigma_{x,y}$ [%]:	0.34	0.34	0.34	0.34
Probabilidad :	0.14	0.33	0.15	0.34
Fase[°]:	355 ± 29	351 ± 38	346 ± 29	349 ± 55

Tabla 4.1: Características para las frecuencias solar y sidérea con el método Rayleigh en el primer armónico en el rango de energía 2 EeV - 4 EeV, obtenidos con el código de este trabajo aplicado al conjunto de datos de la referencia [2] y comparados con los resultados reportados en el último.

	8 EeV - 16 EeV		16 EeV - 32 EeV	
Frecuencia:	Sidérea	Sidérea [2]	Sidérea	Sidérea [2]
Amplitud r [%]:	$4.4^{+1.0}_{-0.8}$	-	$5.8^{+1.8}_{-1.3}$	-
r_{99} [%]:	2.6	-	4.9	-
Amplitud d_{\perp} [%]:	$5.6^{+1.2}_{-1.0}$	$5.6^{+1.2}_{-1.0}$	$7.5^{+2.3}_{-1.8}$	$7.5^{+2.3}_{-1.8}$
d_{99} [%]:	3.3	-	6.3	-
$d_{\perp, UL}$ [%]:	10	-	16	-
$\sigma_{x,y}$ [%]:	1.1	1.1	2.1	2.1
Probabilidad :	2.3×10^{-6}	2.3×10^{-6}	1.5×10^{-3}	1.5×10^{-3}
Fase[°]:	96 ± 11	97 ± 12	80 ± 16	80 ± 17

Tabla 4.2: Características para las frecuencias solar y sidérea con el método Rayleigh en el primer armónico en distintos rangos de energía, obtenidos con el código de este trabajo aplicado al conjunto de datos de la referencia [2] y comparados con los resultados reportados en el último.

4.3. Comparando amplitud en función de la frecuencia

En las Figs.4.1, 4.2 y 4.3 se comparan el barrido en frecuencia con el método East - West y el barrido con Rayleigh considerando los pesos de los hexágonos en distintos rangos de energía.

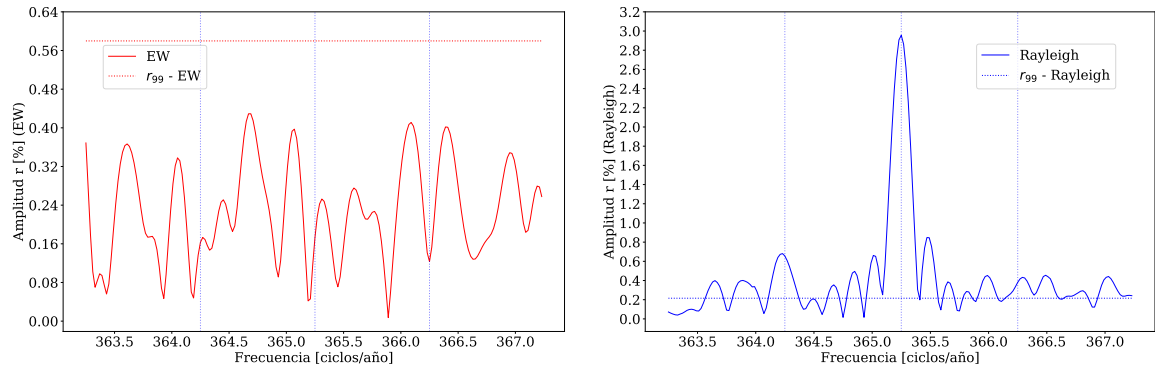


Figura 4.1: Barrido de frecuencias en el rango 0.25 EeV - 0.5 EeV .

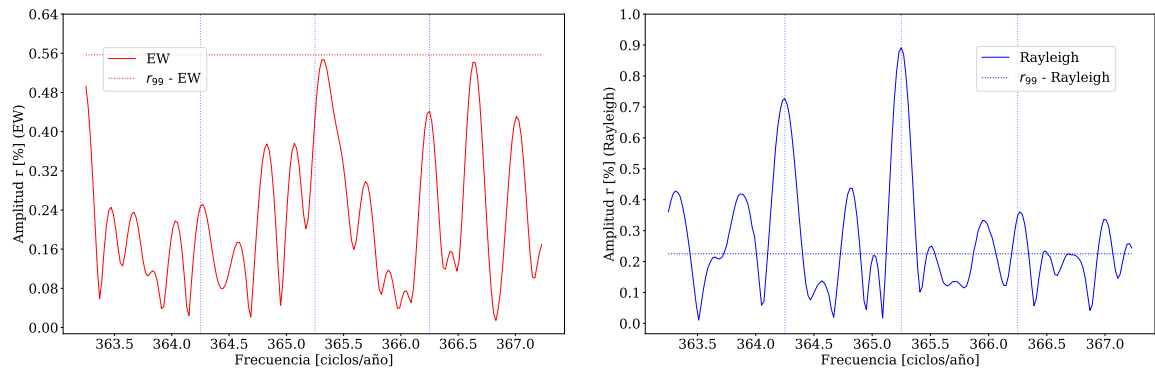


Figura 4.2: Barrido de frecuencias en el rango 0.5 EeV - 1 EeV .

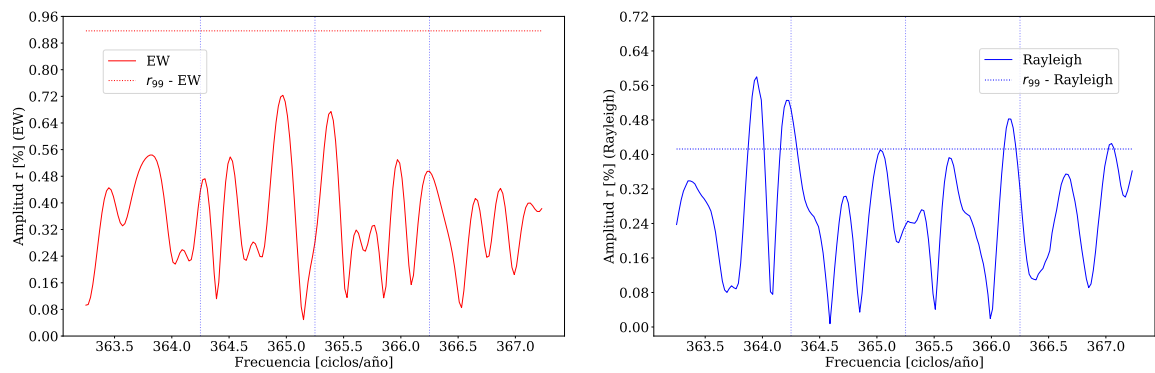


Figura 4.3: Barrido de frecuencias en el rango 1 EeV - 2 EeV .

Bibliografía

- [1] Taborda, O. Estudios de anisotropías a grandes escalas angulares de los rayos cósmicos de alta energía detectados por el observatorio Pierre Auger. Tesis Doctoral, Instituto Balseiro, 2018.
- [2] Aab A. et al. Cosmic-Ray Anisotropies in Right Ascension Measured by the Pierre Auger Observatory. *The Astrophysical Journal*, **891** (2), 142, mar 2020. URL <https://doi.org/10.3847/2F1538-4357%2Fab7236>.
- [3] Discrepancia de $\sqrt{2}$ entre lo reportado y entre el código implementado para los resultados del trabajo [2].
- [4] Linsley, J. Fluctuation effects on directional data. *Physical Review Letters*, **34** (24), 1530, 1975.
- [5] Este valor fue obtenido con el código implementado en el trabajo [2].