Práctica 2: Dinámica de sistemas acoplados

Evelyn G. Coronel
Redes Neuronales - Instituto Balseiro

(11 de marzo de 2020)

Soluciones a los ejercicios de la práctica 2 de la materia de Redes Neuronales. En esta práctica se describe la interacción entre neuronas como sistemas dinámicos acoplados.

EJERCICIO 1

Las dos poblaciones de neuronas están descritas por las siguientes ecuaciones:

$$\tau^{df_e}/_{dt} = -f_e + g_{ee} f_e \Theta(f_e) - g_{ei} f_i \Theta(f_i) + I_e \quad (1)$$
$$\tau^{df_i}/_{dt} = -f_i + g_{ie} f_e \Theta(f_e) - g_{ii} f_i \Theta(f_i) + I_i \quad (2)$$

donde f_i y f_e son las tasas de disparo, g_{ee} y g_{ii} son las conductancias asociadas a la auto-interacción de la neuronas y los términos g_{ie} y g_{ei} son las conductancias de la interacción entre las neuronas.

Sabemos que la solución es estable cuando las derivadas se anulan

$$0 = -f_e + g_{ee} f_e \Theta(f_e) - g_{ei} f_i \Theta(f_i) + I_e \quad (3)$$
$$0 = -f_i + g_{ie} f_e \Theta(f_e) - g_{ii} f_i \Theta(f_i) + I_i \quad (4)$$

Considerando que las tasas de disparo f_e y f_i son positivas, donde 0 implicaría la ausencia de spikes, y las conductancias son mayores o iguales a 0, las condiciones de estabilidad quedan como

$$(1 - g_{ee}) f_e = -g_{ei} f_i + I_e \quad (5)$$
$$(1 + g_{ii}) f_i = g_{ie} f_e + I_i \quad (6)$$

Por lo que finalmente llegamos a un sistema de ecuaciones lineales para las tasas. Resolviendo este sistema, las tasas son iguales a

$$f_i = (g_{ie} I_e + I_i A)(g_{ei} g_{ie} + AB)^{-1} \quad (7)$$
$$f_i = (g_{ei} I_i + I_e B)(g_{ei} g_{ie} + AB)^{-1} \quad (8)$$

donde $A = 1 - g_{ee}$ y $B = 1 + g_{ii}$. Como buscamos que las tasas sean positivas, implica que

$$\frac{g_{ie} I_e + I_i - g_{ee} I_i}{1 + g_{ei} g_{ie} - g_{ii} g_{ee} - g_{ee} - g_{ii}} > 0 \quad (9)$$
$$\frac{g_{ei} I_i + I_e + g_{ii} I_e}{1 + g_{ei} g_{ie} - g_{ii} g_{ee} - g_{ee} - g_{ii}} > 0 \quad (10)$$

EJERCICIO 2

A. Introducción

Las neuronas del tipo Hogdkin-Huxley se basan las ecuaciones presentadas en [1]. En este trabajo, se agrega un parámetro más, s, que corresponde a la función inhibitoria [2], usado para modelar la inhibición sináptica. Este parámetro es descrito mediante la siguiente ecuación diferencial,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{s_\infty(V) - s}{\tau} \quad (11)$$
$$s_\infty(V) = 0.5(1 + tanh(^V/_5)), \quad (12)$$

donde V es el potencial de la neurona y τ es el tiempo característico asociado a la inhibición. En este trabajo se considera $\tau = 3\,\text{ms}$.

Para estudiar la interacción entre dos neuronas de Hogdkin-Huxley, consideramos que están conectadas simétricamente, es decir, la corriente $I(t)$ para ambas tiene de la forma $I(t) = I_0 + I_{syn}(t)$ con

$$I_{syn}(t) = -g_{syn} s(t)(V - V_{syn}), \quad (13)$$

donde la corriente I_0 debe ser un valor tal que para las dos neuronas produzcan spikes periódicamente, $s(t)$ es el parámetro descrito anteriormente, g_{syn} es la conductancia asociada con la entrada sináptica y V_{syn} es el potencial sináptico.

B. Simulaciones

1. Caso $V_{syn} = 0\,mV$ con $I_0 = 15\,\mu A$

En esta sección se varía el parámetro g_{syn} entre 0 y 2 mS/cm^2 con $\Delta g_{syn} = 0.02\,\text{mS/cm}^2$ para un total 100 iteraciones. En cada interación se mantiene fijo un valor para V_{syn}. La simulación de la evolución temporal se utiliza una variación de tiempo de $\Delta t = 0.005\,\text{ms}$ y realizan 50000 interaciones, para un total de 250 ms. Para cada iteración de los valores de g_{syn}, las condiciones iniciales de las neuronas son tales que las mismas no estén en fase. Estás condiciones están dadas en la Tabla I.

Neurona	V [mV]	m	h	n	s
1	80	0.1	0.7	0.1	0.0
2	-80	0.1	0.3	0.3	0.0

Tabla I: Condiciones iniciales las neuronas del tipo Hodgkin-Huxley.

Los parámetros adimensionales m, h y n están asociados a los canales de activación e inactivación de sodio y al canal de potasio respectivamente.

En la Fig. 1 se observa las curvas de la frecuencia y del desfase Θ de las dos neuronas en función de la conductancia g_{syn}. Los valores de la frecuencia y la conductancia se encuentra a la izquierda y derecha del gráfico respectivamente. Se observa la disminución de la frecuencia de las neuronas con el aumento del valor de g_{syn}, debido a que la corriente I_{syn} disminuye en media la corriente dentro de la neurona, esto es consistente con la curva f-I de las neuronas del tipo Hodgkin-Huxley, donde la frecuencia disminuye con la corriente en la neurona.

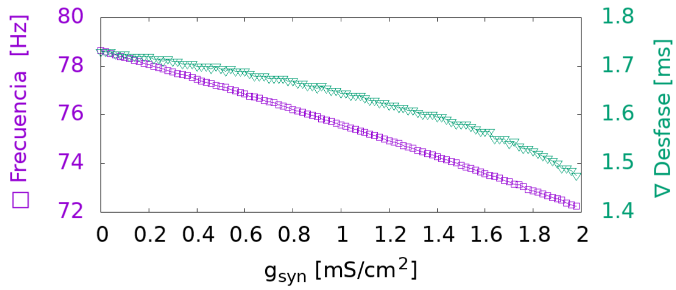

Fig. 1: Desfase y frecuencia de las neuronas en función de g_{syn}.

Analizando la curva del desfase, se observa que este valor disminuye a media que aumenta el valor de g_{syn}. Por lo que aumentando este parámetro, puedo lograr que las dos neuronas se sincronicen, en otras palabras que $\Theta = 0\,\mathrm{s}$.

2. Caso $V_{syn} = 80\,mV$ con $I_0 = 15\,\mu A$

En esta sección se varía el parámetro g_{syn} de la misma manera que la sección anterior. En la simulación de la evolución temporal se utiliza una variación de tiempo de $\Delta t = 0.01\,\mathrm{ms}$ y realizan 100000 interaciones, para un total de 1000 ms. Para cada iteración de g_{syn}, las condiciones iniciales de las neuronas son tales que las mismas estén desfasadas por un valor pequeño. Estás condiciones están dadas en la Tabla II.

Neurona	V [mV]	m	h	n	s
1	8	0.1	0.4	0.3	0.01
2	-8	0.1	0.4	0.1	0.01

Tabla II: Condiciones iniciales las neuronas del tipo Hodgkin-Huxley.

En la Fig. 2 se observa que para valores pequeños de la conductancia g_{syn} las neuronas empiezan con $\Theta = 0.06\,\mathrm{ms}$. A medida que g_{syn} aumenta su valor también aumenta Θ, a diferencia de cuando $V_{syn} = 0\,\mathrm{mV}$. Dado que $-T/2 < \Theta < T/2$, alrededor de $g_{syn} = 1.2\,\mathrm{mS/cm^2}$ se observa una discontinuidad asociada al cambio del signo de Θ. Así como también para otro valores de g_{syn}. Análogo al caso $V_{syn} = 0\,\mathrm{mV}$, la frecuencia disminuye con el g_{syn}.

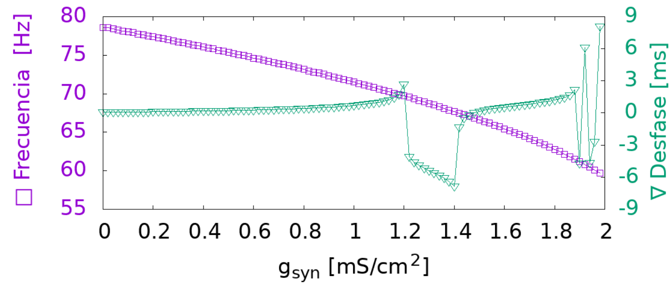

Fig. 2: Desfase y frecuencia de las neuronas en función de g_{syn} para $V_{syn} = -80\,\mathrm{mV}$.

En las Figs. 3 y 4 se observan los spikes de ambas neuronas en función del tiempo para valores de g_{syn} igual a $0.1\,\mathrm{mS/cm^2}$ y $1.2\,\mathrm{mS/cm^2}$ respectivamente. En la Fig. 3 se ve como los spikes están sincronizadas con un desfase despreciable. En cambio en la Fig. 4, para $g_{syn} = 1.2\,\mathrm{mS/cm^2}$, los spikes están desfasados.

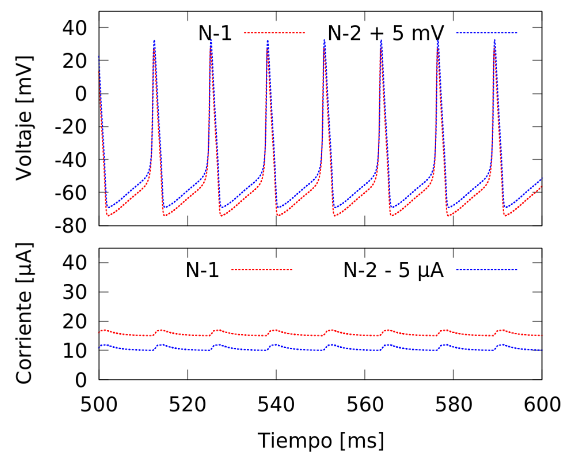

Fig. 3: Curvas del voltaje y la corriente en función del tiempo para un valor de $g_{syn} = 0.1\,\mathrm{mS/cm^2}$

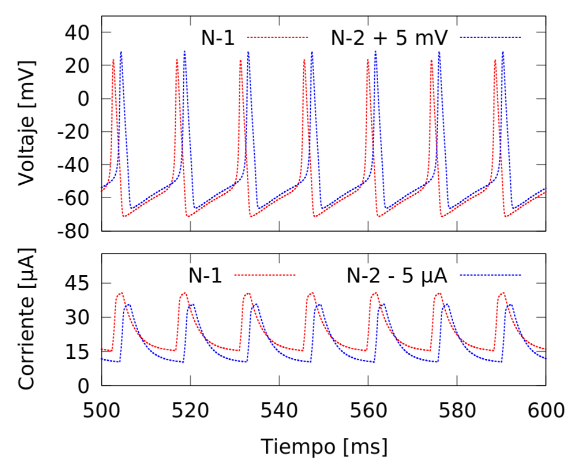

Fig. 4: Curvas del voltaje y la corriente en función del tiempo para un valor de $g_{syn} = 1.2\,\mathrm{mS/cm^2}$

[1] Izhikevich E. M. Capítulo 2. Sección 2.3: Hodgkin-Huxley Model en *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting* (2005). The Neurosciences Institute.

[2] Börgers C, Krupa M, Gielen S. The response of a classical Hodgkin-Huxley neuron to an inhibitory input pulse. J Comput Neurosci. 2010;28(3):509–526. doi:10.1007/s10827-010-0233-8