

## Práctica 2: Dinámica de sistemas acoplados

Evelyn G. Coronel  
Redes Neuronales - Instituto Balseiro

(11 de marzo de 2020)

Soluciones a los ejercicios de la práctica 2 de la materia de Redes Neuronales. En esta práctica se describe la interacción entre neuronas como sistemas dinámicos acoplados.

### EJERCICIO 1

Las dos poblaciones de neuronas están descritas por las siguientes ecuaciones:

$$\tau df_e/dt = -f_e + g_{ee}f_e\Theta(f_e) - g_{ei}f_i\Theta(f_i) + I_e \quad (1)$$

$$\tau df_i/dt = -f_i + g_{ie}f_e\Theta(f_e) - g_{ii}f_i\Theta(f_i) + I_i \quad (2)$$

donde  $f_i$  y  $f_e$  son las tasas de disparo,  $g_{ee}$  y  $g_{ii}$  son las conductancias asociadas a la auto-interacción de las neuronas y los términos  $g_{ie}$  y  $g_{ei}$  son las conductancias de la interacción entre las neuronas.

Sabemos que la solución es estable cuando las derivadas se anulan

$$0 = -f_e + g_{ee}f_e\Theta(f_e) - g_{ei}f_i\Theta(f_i) + I_e \quad (3)$$

$$0 = -f_i + g_{ie}f_e\Theta(f_e) - g_{ii}f_i\Theta(f_i) + I_i \quad (4)$$

Considerando que las tasas de disparo  $f_e$  y  $f_i$  son positivas y las conductancias son mayores o iguales a 0, las condiciones de estabilidad quedan como

$$(1 - g_{ee})f_e = -g_{ei}f_i + I_e \quad (5)$$

$$(1 + g_{ii})f_i = g_{ie}f_e + I_i \quad (6)$$

Por lo que finalmente llegamos a un sistema de ecuaciones lineales para las tasas. Resolviendo este sistema, las tasas son iguales a

$$f_i = (g_{ie}I_e + I_iA)(g_{ei}g_{ie} + AB)^{-1} \quad (7)$$

$$f_e = (g_{ei}I_i + I_eB)(g_{ei}g_{ie} + AB)^{-1} \quad (8)$$

donde  $A = 1 - g_{ee}$  y  $B = 1 + g_{ii}$ . Como buscamos que las tasas sean positivas, los parámetro deben cumplir las siguiente relaciones:

$$\frac{g_{ie}I_e + I_i - g_{ee}I_i}{1 + g_{ei}g_{ie} - g_{ii}g_{ee} - g_{ee} - g_{ii}} > 0 \quad (9)$$

$$\frac{g_{ei}I_i + I_e + g_{ii}I_e}{1 + g_{ei}g_{ie} - g_{ii}g_{ee} - g_{ee} - g_{ii}} > 0. \quad (10)$$

### EJERCICIO 2

#### A. Introducción

Las neuronas del tipo Hodgkin-Huxley se basan en las ecuaciones presentadas en [1]. En este trabajo, se agrega

un parámetro  $s$  que corresponde a la función inhibitoria [2] usada para modelar la inhibición sináptica. Este parámetro es descrito mediante la siguiente ecuación diferencial,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{s_\infty(V) - s}{\tau} \quad (11)$$

$$s_\infty(V) = 0.5(1 + \tanh(V/5)), \quad (12)$$

donde  $V$  es el potencial de la neurona y  $\tau$  es el tiempo característico asociado a la inhibición. En este trabajo se considera  $\tau = 3$  ms.

Para estudiar la interacción entre dos neuronas N-1 y N-2 del tipo Hodgkin-Huxley, consideramos que están conectadas simétricamente, es decir, la corriente  $I(t)$  para ambas tiene de la forma  $I(t) = I_0 + I_{syn}(t)$  con

$$I_{syn}(t) = -g_{syn}s(t)(V - V_{syn}), \quad (13)$$

donde la corriente  $I_0$  es valor tal que las dos neuronas produzcan spikes periódicamente,  $s(t)$  es el parámetro descrito anteriormente,  $g_{syn}$  es la conductancia asociada con la entrada sináptica y  $V_{syn}$  es el potencial sináptico.

#### B. Simulaciones

##### 1. Caso $V_{syn} = 0$ mV con $I_0 = 15 \mu A$

En esta sección se varía el parámetro  $g_{syn}$  entre 0 y 2 mS/cm<sup>2</sup> con un paso de  $\Delta g_{syn} = 0.02$  mS/cm<sup>2</sup> para un total 100 iteraciones. En cada interacción se mantiene fijo un valor para  $V_{syn}$ . La simulación de la evolución temporal de las neuronas utiliza  $\Delta t = 0.005$  ms y realizan 50000 iteraciones, para un total de 250 ms. En cada iteración de los valores de  $g_{syn}$ , las condiciones iniciales de las neuronas son tales que las mismas no estén en fase. Estas condiciones están dadas en la Tabla I.

	V [mV]	m	h	n	s
N-1	80	0.1	0.7	0.1	0.0
N-2	-80	0.1	0.3	0.3	0.0

Tabla I: Condiciones iniciales las neuronas del tipo Hodgkin-Huxley.

Los parámetros adimensionales m, h y n están asociados a los canales de activación e inactivación de sodio y al canal de potasio respectivamente.

En la Fig. 1 se observan las curvas de la frecuencia y del desfase  $\Theta$  de las dos neuronas en función de la conductancia  $g_{syn}$ . Los valores de la frecuencia y la conductancia se encuentra a la izquierda y derecha de la figura respectivamente. Se observa la disminución de la frecuencia de las neuronas con el aumento del valor de  $g_{syn}$ , debido a que la corriente  $I_{syn}$  disminuye en media la corriente  $I(t)$  dentro de la neurona, esto es consistente con la curva f-I de las neuronas del tipo Hodgkin-Huxley, donde la frecuencia disminuye con la corriente en la neurona.

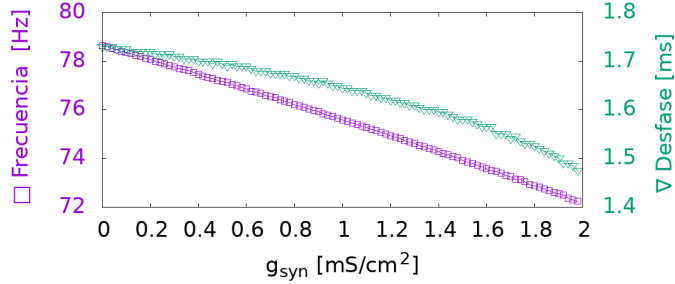


Fig. 1: Desfase y frecuencia de las neuronas en función de  $g_{syn}$ .

Analizando la curva del desfase, se observa que este valor disminuye a media que aumenta el valor de  $g_{syn}$ . Por lo que aumentando este parámetro se obtiene  $\Theta = 0$  s.

## 2. Caso $V_{syn} = 80$ mV con $I_0 = 15$ $\mu$ A

En esta sección se varía el parámetro  $g_{syn}$  de la misma manera que la sección anterior. En la simulación de la evolución temporal se utiliza una variación de tiempo de  $\Delta t = 0.01$  ms y realizan 100000 interacciones, para un total de 1000 ms. Para cada iteración de  $g_{syn}$ , las condiciones iniciales de las neuronas son tales que las mismas estén ligeramente desfasadas. Estas condiciones iniciales están dadas en la Tabla II.

	V [mV]	m	h	n	s
N-1	8	0.1	0.4	0.3	0.01
N-2	-8	0.1	0.4	0.1	0.01

Tabla II: Condiciones iniciales las neuronas del tipo Hodgkin-Huxley.

En la Fig. 2 se observa que para valores pequeños de la conductancia  $g_{syn}$  las neuronas empiezan con  $\Theta = 0.06$  ms. A medida que  $g_{syn}$  aumenta su valor también aumenta  $\Theta$ , a diferencia del caso  $V_{syn} = 0$  mV. Dado que  $-T/2 < \Theta < T/2$ , alrededor de  $g_{syn} = 1.2$  mS/cm<sup>2</sup> se observa una discontinuidad asociada al cambio del signo de  $\Theta$ . Así como también para otros valores de  $g_{syn}$ . Análogo al caso  $V_{syn} = 0$  mV, la frecuencia disminuye con el  $g_{syn}$ , pero en este caso se debe al potencial inhibitorio que ralentiza la frecuencia de spikes de tal manera que los mismos estén desfasados.

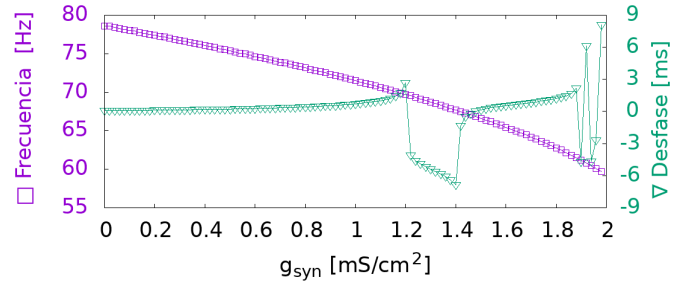


Fig. 2: Desfase y frecuencia de las neuronas en función de  $g_{syn}$  para  $V_{syn} = -80$  mV.

En las Figs. 3 y 4 se observan los spikes de ambas neuronas en función del tiempo para valores de  $g_{syn}$  igual a 0.1 mS/cm<sup>2</sup> y 1.2 mS/cm<sup>2</sup> respectivamente. En la Fig. 3 se ve como los spikes están sincronizados con un desfase despreciable. En cambio en la Fig. 4, para  $g_{syn} = 1.2$  mS/cm<sup>2</sup>, los spikes están desfasados.

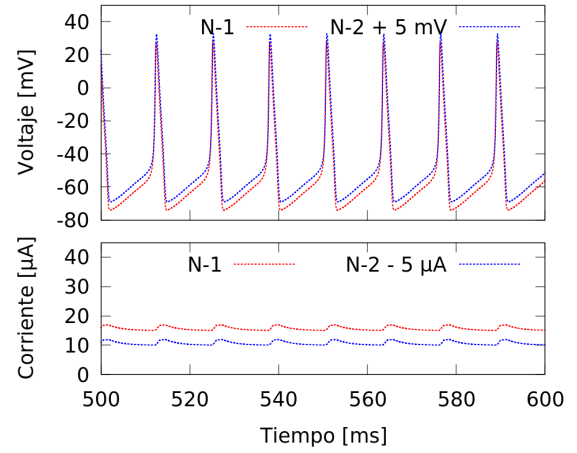


Fig. 3: Curvas del voltaje y la corriente en función del tiempo para un valor de  $g_{syn} = 0.1$  mS/cm<sup>2</sup>

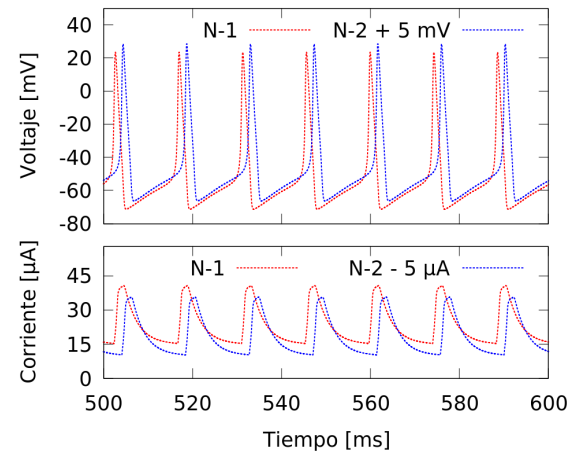


Fig. 4: Curvas del voltaje y la corriente en función del tiempo para un valor de  $g_{syn} = 1.2$  mS/cm<sup>2</sup>

- 
- [1] Izhikevich E. M. Capítulo 2. Sección 2.3: Hodgkin-Huxley Model en *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting* (2005). The Neurosciences Institute.
- [2] Börgers C, Krupa M, Gielen S. The response of a classical Hodgkin-Huxley neuron to an inhibitory input pulse. *J Comput Neurosci*. 2010;28(3):509–526. doi:10.1007/s10827-010-0233-8