기초수학 – 3 주차

Jong-Kyou Kim, PhD

2013-10-08

Administrivia

- 학기초 강의 피드백 설문 → 공지사항

논리식과 이진수의 더하기

- 문제정의
  - 더하는 비트: A, B
  - 덧셈 결과: S
  - 올림값이 있는지: C_{in}
  - 계산결과 올림이 있다면: C_{out}
- 계산
  - $S = A \otimes B \otimes C_{\text{in}}$
  - $C_{\text{out}} = (A \wedge B) \vee (C_{\text{in}} \wedge (A \otimes B))$

Full adder

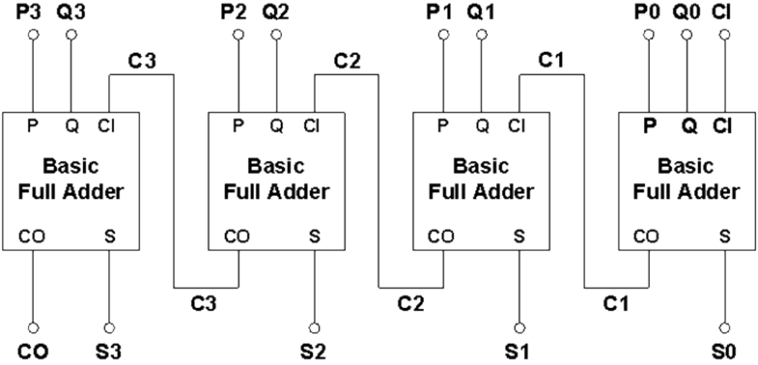


그림 : Full adder

Problem: 다음 프로그램의 출력은?


```
#include <stdio.h>
main()
{
  unsigned int x = 4294967295;
  printf("intsize = %d\n", (int)sizeof(unsigned int))
  printf("x = %u\n", x);
  printf("x + 1 = %u\n", x + 1);
}
```

```
intsize = 4
x = 4294967295
x + 1 = 0
```

컴퓨터에서의 계산

- 덧셈은 논리식을 이용한 특별한 회로로 수행
- (이진수) 자릿수에 제한
  - 아주 큰수는?
  - 뺄셈은? 음수는?
  - 아주 작은 수는? (예: 0.000000001)

네자리만 알고 + 덧셈만 잘하는 사람 (컴퓨터)

- 다음을 계산하시오
  - $860 - 758 = \ 102$
- 다음을 계산하시오
  - $860 + 242 = 1102$
- 규칙성: 10 의 보수
  - $758 + 242 = 1000$

10 의 보수를 이용한 음수의 표현 (컴퓨터)

- 네 자리 이상은 미련없이 버리는 사람이 안전하게 덧셈을 하려면? → 세 자리만 주면 된다
- 맨 앞자리 숫자는 마음대로 쓸 수 있을 듯
- $0860 - 0758 = 0860 + 9242 = 10102$
- 맨 앞자리가 9 이면 음수?

→ 10 의 보수에서는 가능

10의 보수: 간편한 계산법

- 10000 에 대한 758 의 보수: $10000 - 0758 = 9242$
  - *여전히 뺄셈을 해야한다*
  - 더 간단하게 할 수는 없을까? (복선. 반전을 기대할 것)
- $9999 - 0758 + 1 = 9241 + 1 = 9242$
  - 간단한 규칙과 덧셈만으로 된다. 왜?
- 9 의 보수: $9999 - 0758$
- 공식: 10 의 보수 = 9 의 보수 + 1

9의 보수

- 단순한 규칙: 숫자 바꾸기

$$9 \to 0$$
$$8 \to 1$$
$$\cdots$$
$$1 \to 8$$
$$0 \to 9$$

- 9의보수(0758) $\to$ 9241
- 10000 - 0758 = 10의보수(0758) = 9의보수(0758) + 1 = 9241 + 1 = 9242
- 규칙: 숫자 바꾸기 and +1 ; 뺄셈은 없다

진법과 0

- 10 진수
  - 0, 1, 2, 3, ..., 8, 9, 10
  - 단위가 증가하면 위치가 증가 $\rightarrow$ 위대한 발견 (?)

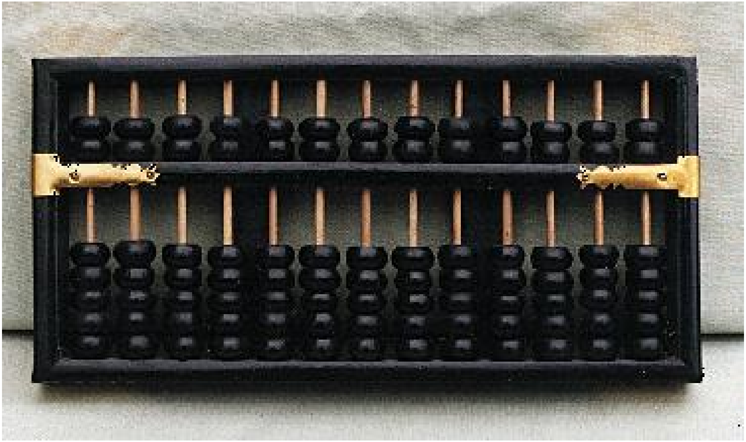


그림 : 주판

10 진법의 특징

- 10 을 곱하면? 무조건 한 칸씩 왼쪽으로 이동
  - $34 \times 10 = 340$
- 10 을 나누면? 무조건 한 칸씩 오른쪽으로 이동
  - $343/10 = 34$ 나머지는 신경쓰지 않는다
- 음수를 10 으로 나누면?
  - 10 의 보수표현: 한 칸씩 오른쪽으로 옮기고 맨 왼쪽칸은 9 로 채운다

컴퓨터의 숫자: 2 진수

10 진수	2 진수
0_{10}	0_2
1_{10}	1_2
2_{10}	10_2
3_{10}	11_2
4_{10}	100_2
5_{10}	101_2
6_{10}	110_2
7_{10}	111_2
$\cdots$	$\cdots$

2 진법의 특징

- 2 을 곱하면? 무조건 한 칸씩 왼쪽으로 이동
  - $10_2 \times 10_2 = 100_2$
- 2 을 나누면? 무조건 한 칸씩 오른쪽으로 이동
  - $101_2 / 10_2 = 10_2$ 나머지는 신경쓰지 않는다
- 음수를 2 로 나누면?
  - 2 의 보수표현: 한 칸씩 오른쪽으로 옮기고 맨 왼쪽칸은 1 로 채운다

왜 2 진수일까?

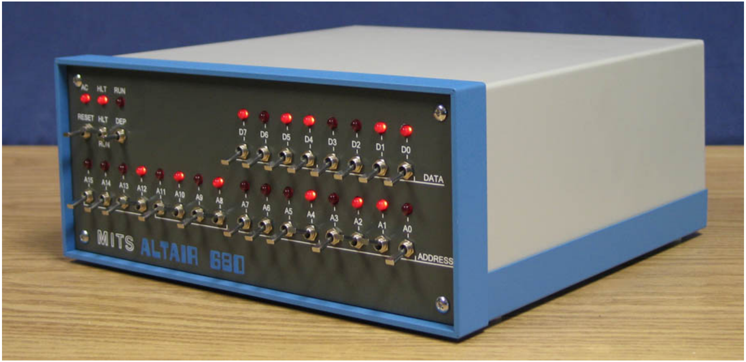


그림 : 최초의 PC (복제본)

사람이 좀 편하려면: 16 진수

- 니블을 하나의 숫자로 표현 0 .. 15
- 10 진수에 A,B,C,D,E,F 를 추가

0	0000	0
1	0001	1
...		
8	1000	8
8	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

음수

- 음수의 표현: 2 의 보수
- 2 의 보수: 네 자리 숫자 $\rightarrow$ 네 비트 숫자
  - 음수를 표현하는 비트값: 1
  - 9 의 보수에 대응되는 개념: 1 의 보수
  - 1 의 보수를 계산하는 변환표: 0 $\rightarrow$ 1, 1 $\rightarrow$ 0
  - 2 의 보수를 계산하는 방식: 1의 보수 + 1

정수에 대한 단상: 숫자표현으로 쓸만할 것 같다

- 미련없이 버리는 것: 그다지 나쁜 것 같지 않다
- 보수를 이용한 음수표현: 어디에나 적용할 수 있을 것 같다
- 세금계산에서 본 문제: 정수 이용하면 풀 수 있을 것 같다

$$\frac{70}{100} \times \frac{105}{100} = \frac{735}{1000}$$

$\rightarrow$ 나는 천재인걸까?

유리수

$$\frac{1}{983} + \frac{1}{991}$$

$$= \frac{1974}{974153}$$

- 더이상 약분이 되지 않는다. 이유는
- 983 과 991 은 모두 소수

유리수를 표현하는 간단한 방법

- 분모와 분자를 각각 정수로 표현한다
- 장점: 유리수를 정확하게 계산할 수 있다
- 단점: 분모에 필요한 자릿수가 쉽게 증가한다
  - 컴퓨터에 적용하기 매우 불편함

진정한 숫자: 실수 (real number)

- 유리수는 실수의 아주 작은 부분이다
- 정수에서 사용한 기술은 대부분 적용되지 않는다
  - 특히 2 의 보수표현
- 애초의 질문: 자릿수를 제한하는 것은 바보같은 일 아닐까?
  - 그렇다. 특히 자연을 관찰하고 해석할 때는 그렇다.

자연에 대한 이해: 과학

- 아주 큰 숫자: 지구의 지름은 몇 mm 일까?

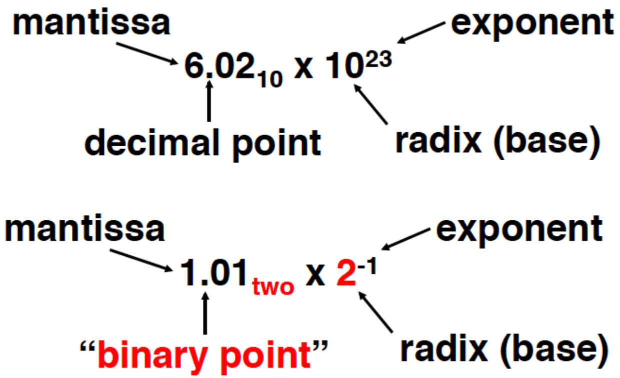
  $\Rightarrow$ $12,742,000,000 = 1.2742 \times 10^{10}$ mm

  - 1.2742×10^{10} mm 정도라고 알아도 되지 않나?
- 아주 작은 숫자: 양성자와 전자의 거리 (Bohr Radius)

  $\Rightarrow$ 0.0000000000529177 (meter) $= 5.29177 \times 10^{-11}$
- 5.291×10^{-11} 정도로 알고 있어도 되지 않나?

$\rightarrow$ 크기와 정밀도를 모두 설명할 방법이 없을까? 과학적 표현법

과학적 표현법



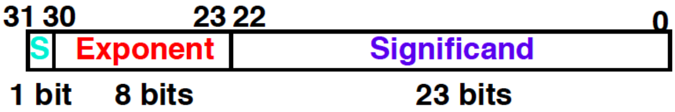
- Mantissa: 가수
- Exponent: 지수

과학적 표현법의 성질

- 가수: 유효숫자를 표현 (다른 말로, 얼마나 정확한지)
  - 10 진수: 0 보다 크고 10 보다 작은 값
  - 2 진수: 0 보다 크고 2 보다 작은 값
- 지수: 자릿수를 표현 (크기를 표현)
  - 10 진수: 10 의 제곱
  - 2 진수: 2 의 제곱
- 지수가 크면 무조건 큰 값
  - $9 \times 10^{100} < 1 \times 10^{101}$

실수표현의 얼개

- IEEE-754



Arithmetic

- 70 센트짜리 물건에 5% 의 세금을 붙여 판매한다고 가정하고 다음 물음에 답하시오
  - 고객에게는 얼마를 받아야 하는가?
  - 다음 프로그램은 위의 결과와 일치하는가?

```
main()
{
  printf("%30.20f\n", 0.70 * 1.05);
}
```

```
0.73499999999999998668
```

실수표현의 한계

```
/* https://leansys.com/download/math/lec03.c */
#include <stdio.h>
main()
{
  float d = 0.000000001, x = 0;
  int i;
  for (i = 0; i < 1000000000; i++) {
    x = x + d;
  }
  printf("x = %f\n", x);
}
```

```
x = 0.031250
```

$\sqrt{2}$ 는 유리수가 아니다

- 양변을 제곱하면

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$
$$a^2 = 2b^2$$

- 따라서 a 는 짝수 $\Rightarrow a = 2k$ 로 나타낼 수 있다
- 마찬가지로 b 는 짝수
- a/b 는 더 이상 약분되지 않는다는 가정에 위배
- 따라서 $\sqrt{2}$ 는 유리수가 아니다

증명의 얼개

- 명제: $\sqrt{2}$ 는 유리수가 아니다
- 모순증명법에 의함 (proof by contradiction)
- 모순을 도출하기 위해 $\sqrt{2}$ 를 유리수라고 가정
- $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ 형태로 나타낼 수 있고 a/b 는 더 이상 약분이 되지 않는다

8-puzzle

1	2	3
4	5	6
7	8	

그림 : 최종상태

8-puzzle

Jong-Kyou Kim, PhD

- 답이 있을까?

1	2	3
4	5	6
8	7	

A

1	2	3
4	6	5
8	7	

B

그림 : 8-퍼즐의 해가 A,B 모두 존재하는가?

수학적 귀납법 (Mathematical induction)

- $\forall$ 에 대한 증명 (자연수)
  - base case: $n \in \mathbb{N}, P(n)$
  - inductive step: $k \in \mathbb{N}, P(k) \Rightarrow P(k+1)$
  - $\forall_x x \in \mathbb{N}, x \geq n, P(x)$
- 추론규칙 (공리)

$$\frac{n \in \mathbb{N}, P(n), k \in \mathbb{N}, P(k) \Rightarrow P(k+1)}{\forall_x x \in \mathbb{N}, x \geq n, P(x)}$$

수학적 귀납법

- $P(n)$: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- by mathematical induction
- base case
  - $P(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$

수학적 귀납법

- inductive step
  - Assume $P(k)$ is true, i.e., $\sum_{i=1}^{k} = \frac{k(k+1)}{2}$
  - $P(k+1) = \sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1)$
  - $P(k) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$
  - $P(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$
  - $P(k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$
  - $P(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

  $\rightarrow$ $P(k+1)$ true

수학적 귀납법

- 추론규칙 (공리)

$$\frac{n \in \mathbb{N}, P(n), k \in \mathbb{N}, P(k) \Rightarrow P(k+1)}{\forall_x x \in \mathbb{N}, x \geq n, P(x)}$$

- 결론

$$\frac{1 \in \mathbb{N}, P(1), k \in \mathbb{N}, P(k) \Rightarrow P(k+1)}{\forall_n n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Pólya 의 연습문제

- 수학적 귀납법을 잘못 적용하여 발생하는 오류
- base case: 말이 한 마리만 있을 때?

  $\Rightarrow$ 모든 말의 색은 같다
- induction step
  - 가정: n 마리 말의 색이 같다
  - $n+1$ 마리 말을 $1, 2, \cdots n, n+1$ 로 번호를 붙이자
  - 집합 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 에 속한 말은 색이 같다
  - $\{2, 3, \cdots, n, n+1\}$ 에 속한 말은 색이 같다
  - $\{2, 3, \cdots, n\}$ 의 색과 1 의 색은 같다
  - $\{2, 3, \cdots, n\}$ 의 색과 $n+1$ 의 색은 같다
  - 따라서 $\{1, 2, \cdots, n, n+1\}$ 의 색은 모두 같다

  $\Rightarrow$ 세상에 모든 말은 한 가지 색이다

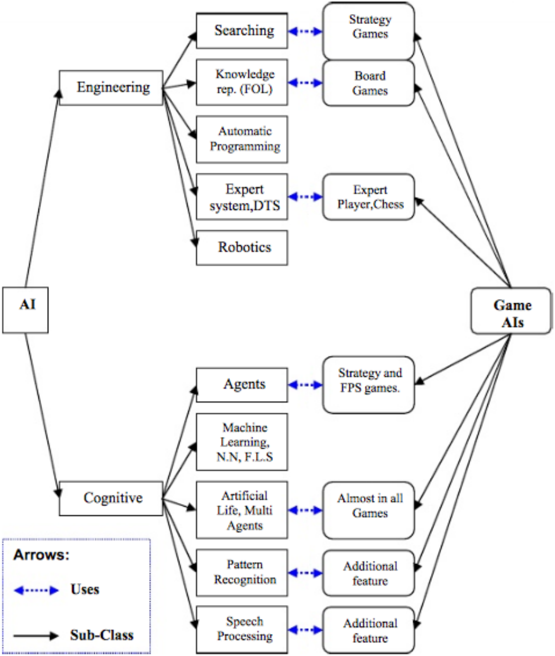


Fig.6 –The AI/Game AIs Combination relation.

Jong-Kyou Kim, PhD