

Numerické metody v astrofyzice

Viktor Votruba, Zdeněk Janák

Přírodovědecká fakulta, sekce fyzika

Masarykova univerzita Brno

21. ledna 2016



What a computer is to me is the most remarkable tool that we have ever come up with. It's the equivalent of a bicycle for our minds.

Steve Jobs

Obsah

1	Úvod	4
2	Jak pulsují hvězdy	5
2.1	Numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic	5
2.1.1	Jednokrokové metody	6
2.1.2	Vícekrokové metody	6
2.2	Jak pulsují hvězdy	7
3	Základy řešení parciálních diferenciálních rovnic	9
3.1	Metoda konečných diferencí	9
3.2	Nejjednodušší numerická schémata	13
3.3	Numerické testy	15
4	Numerické simulace hvězdného větru	16
4.1	Základní rovnice hydrodynamiky	16
4.2	Základy numerické dynamiky tekutin	17
4.2.1	Konzervativní schéma	17
4.2.2	Technika oddělených toků	19
4.3	Advekční člen	19
4.3.1	VanLeerova metoda	21
4.4	Zdrojové členy	22
4.4.1	Tvorba vlastního kódu	23
4.5	Astrofyzikální aplikace - hvězdný vítr	23
5	Optimalizace - řešení inverzních úloh	26
6	Jak na GIT	27

Kapitola 1

Úvod

TBD

Kapitola 2

Jak pulsují hvězdy

2.1 Numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic

S nutností řešit obyčejné diferenciální rovnice se můžeme setkat na každém kroku již během studií fyziky. Když pomineme učebnicové případy, většinu z nich nelze řešit analyticky a musíme se uchýlit k numerickým metodám. V následující kapitole si ukážeme nejběžněji používané metody pro jejich řešení, které jsou součástí mnoha numerických knihoven v různých programovacích jazycích, včetně jazyka PYTHON.

Nejprve se zaměříme na obyčejné diferenciální rovnici I. řádu

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y), \quad (2.1)$$

závěry a zkušenosti pak zobecníme na soustavu N obyčejných diferenciálních rovnic I. řádu

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}), \quad (2.2)$$

kde $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$. Je třeba si uvědomit, že se nejedá o žádné omezení. Diferenciální rovnice vyšších řádů je vždy možné nahradit soustavou rovnic 1.řádu. Dále se omezíme na řešení počátečních úloh (*Cauchyho úlohy*), kde k diferenciálním rovnicím máme ještě specifikované počáteční podmínky, přičemž hledáme řešení této rovnice na nějakém intervalu $x \in \langle a, b \rangle$. Počáteční podmínky v případě (2.1) jsou dány $y(x_0) = y_0$, nebo v případě soustavy rovnic (2.2) $\mathbf{y}_0 = (y_1(x_0), y_2(x_0), \dots, y_n(x_0))$.

Základem řešení rovnice (2.1) je její diskretizace. Spočívá v nahrazení spojitého průběhu funkce, jejich derivací i nezávislé proměnné veličiny sadou diskrétních bodů. Vytvoříme na intervalu $\langle a, b \rangle$ síť ekvidistantních bodů, kterou aproximuje spojitou

nezávislou veličinu x

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b \quad (2.3)$$

Předpoklad ekvidistantních bodů není nutný, nicméně je pro běžné úlohy velmi častý a celou situaci zjednodušuje.

2.1.1 Jednokrokové metody

S pomocí této sítě aproximujeme potřebnou derivaci a stačí nám k tomu Taylorův rozvoj. Taylorův rozvoj funkce y v bodě $x + h$

$$y(x + h) = y(x) + \frac{dy}{dx}h + \frac{d^2}{2!}h^2 + \dots \quad (2.4)$$

kde h je malý increment. Pokud zanedbáme členy druhého řádu a vyšší můžeme obratem vyjádřit aproximaci derivace s využitím sítě ekvidistantních bodů x_k

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} + O(h) \quad k = 0, \dots, N-1, \quad (2.5)$$

$O(h^2)$ značí chybu druhého řádu, index k značí hodnotu funkce y odpovídající diskrétní hodnotě proměnné x_k . Dosazením do rovnice (2.1) a drobnou úpravou dostáváme

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k)h_k \quad \text{kde} \quad x_{k+1} = x_k + h \quad (2.6)$$

Tato jednoduchá metoda numerického řešení ODE se nazývá *Eulerova metoda*. Vzhledem k tomu, že jsme v během odvozování v Taylorově rozvoje zanedbali členy druhého řádu, jedná se o méně přesnou metodu prvního řádu. Metoda sama patří mezi *jednokrokové metody*, protože k závisí na informaci jednoho bodu. Přesněji řečeno, k tomu abychom určily další bod funkce y_{k+1} stačí nám k tomu informace z bodu y_k .

2.1.2 Vícekrokové metody

Nevýhodou předchozí zmíněné metody pro řešení ODE je její přesnost. Abychom docílili vyšší přesnosti museli bychom v Taylorově rozvoji použít více členů

$$y(x + h) = y(x) + \frac{dy}{dx}h + \frac{1}{2} \frac{d^2y}{dx^2}h^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3y}{dx^3}h^3 + \dots \quad (2.7)$$

Tím však vyvstává problém, protože v diskretní reprezentaci pro metodu druhého řádu vyvstává nutnost určení derivace vyšších řádů. Konkrétně v našem případě druhého řádu

$$y_{k+1} = y_k + \left. \frac{dy}{dx} \right|_k h_k + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_k h_k^2 \quad (2.8)$$

S použitím pravidla pro derivaci složené funkce, můžeme pro diferenciaci $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ psát

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f_x(x, y) + f_y(x, y) \frac{dy}{dx} = f_x(x, y) + f_y(x, y) f(x, y) \quad (2.9)$$

následně využijeme Taylorův rozvoj pro funkci dvou proměnných, s pomocí které se budeme snažit vyjádřit druhou derivaci

$$f(x + h, y + hf) = f(x, y) + h \frac{df}{dx} + h \frac{df}{dy} f + O(h^2) \quad (2.10)$$

skombinováním obou rovnic dostáváme rovnici

$$\frac{df}{dx} + h \frac{df}{dy} f = \frac{f(x + h, y + hf) - f(x, y)}{h} + O(h^2) \quad (2.11)$$

Aproximaci druhé derivace s použitím diskretní reprezentace využijeme pro úpravu (2.8)

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) h_k + \frac{f(x_k + h_k, y_k + h_k f(x_k, y_k)) - f(x_k, y_k)}{2 h_k} h_k^2 = \quad (2.12)$$

$$y_k + \frac{f(x_k, y_k) + f(x_k + h_k, y_k + h_k f(x_k, y_k))}{2} h_k \quad (2.13)$$

Už se blížíme k finálnímu výrazu, stačí jenom použít substituci

$$k_1 = f(x_k, y_k) h_k \quad (2.14)$$

$$k_2 = f(x_k + h_k, y_k + k_1) h_k \quad (2.15)$$

2.2 Jak pulsují hvězdy

V reálné praxi astrofyzika se nutností řešení diferenciláních rovnic setkává prakticky na každém kroku. Problémy nebeské mechaniky, určování pohybu těles ve sluneční soustavě, teorii hvězdných atmosfér, hvězdné stavby a mnohé další. My si jako ilustrační

příklad vezmeme nám blízký problém hvězdných pulsací. Z kurzu *Základů astronomie* si určitě vzpomínáte, že některé hvězdy nezůstávají ve hydrostatické rovnováze, ale namísto toho hvězdná obálka rozpíná a smršťuje - pulzuje.

Uvedem si teď jednoduchý model pulsující hvězdy - cefeidy, který však vede k poměrně přesným závěrům, zejména ve vztahu k periodě. Model se skládá z centrálního bodu reprezentující celou hvězdu o hmotnosti M , která je obklopena tenkou sféricky symetrickou obálkou o hmotnosti m a poloměru R , která reprezentuje povrch hvězdy. Vnitřek hvězdy je vyplněn plynem se zanedbatelnou hmotností a tlakem, který kompenzuje přitažlivý gravitační vliv centrální hvězdy na obálku. S použitím Newtonových rovnic můžeme psát

$$m \frac{d^2 R}{dt^2} = -\frac{GMm}{R^2} + 4\pi R^2 P. \quad (2.16)$$

kteřou dále přepíšeme na soustavu

$$\frac{dR}{dt} = v \quad (2.17)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{GM}{R^2} + 4\pi R^2 P/m. \quad (2.18)$$

Ještě se musíme vypořádat s tlakem, poslouží nám stavová rovnice, kdy budeme předpokládat, že oscilace od rovnovážné polohy dané poloměrem R_0 jsou adiabatické, tedy platí vztah

$$PV^\gamma = \text{konst.} \rightarrow P_0 V_0^\gamma = PV^\gamma \quad (2.19)$$

S použitím vztahu pro objem plynu v kouli $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, můžeme dále psát

$$P_0 R_0^3 = PR^3 \rightarrow P = P_0 \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} \quad (2.20)$$

Dosazením do soustavy (2.17) dostáváme finální podobu soustavu obyčejných diferenciálních rovnic popisujících hradiální hvězdné pulsace

$$\frac{dR}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{GM}{R^2} + 4\pi R^2 \frac{P_0}{m} \left(\frac{R_0}{R} \right)^{3\gamma} \quad (2.21)$$

Tuto soustavu budeme řešit numericky, je však ještě třeba ji doplnit hodnoty parametrů a počáteční podmínky. Naší modelovou hvězdou bude hvězda δ Cep

Kapitola 3

Základy řešení parciálních diferenciálních rovnic

Zavzpomínáme-li na základní kurzy matematické analýzy, jistě si vzpomene, jak nesnadné je analytické řešení parciálních diferenciálních rovnic, pokud vůbec lze řešení najít. Když pomineme učebnicové příklady (za zmínku stojí například vlnová rovnice), stojíme většinou před neřešitelným problémem. Naštěstí pro nás ale ne pro fyziku obecně, pomocnou ruku nám podá numerické řešení problému a síla současné výpočetní techniky – počítače. Jak ale na to? Jak převést rovnici, kterou jsme dostali aplikací fyzikálních zákonů pro konkrétní problém do řeči čísel? Následující kapitola se vám pokusí v tom udělat trochu jasněji.

3.1 Metoda konečných diferencí

Jednou z nejpoužívanějších metod, která je zároveň vhodná pro názornou ilustraci, je *metoda konečných diferencí*. Nejedná se o nic jiného než diskrétní reprezentaci patřičných proměnných, funkcí a derivací definovaného problému. Zní to složitě ale ve skutečnosti je to velmi jednoduché a vše co k tomu budeme potřebovat je znalost Taylorova rozvoje funkce. Názorně si to ilustrujeme na jednoduché rovnici

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.1)$$

zahrnující v sobě jak difúzní $D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, tak advekční člen $v \frac{\partial u}{\partial x}$. Funkce $u(x, t)$ nám udává x -ovou hodnotu rychlosti. Numerický přístup řešení této rovnice spočívá v reprezentaci u souborem diskrétních hodnot u_i v bodech diskrétní sítě

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N \quad (x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_N)$$

Na první pohled je patrné, že s rostoucím počtem bodů sítě, se bude naše reprezentace blížit skutečné, které bychom dosáhli pro $N = \infty$.

Prostorové derivace

S touto reprezentací se můžeme dále pustit do aproximací prostorových derivací. K tomu využijeme Taylorova rozvoje okolo bodu u_i pro hodnotu v bodě u_{i+1} . Směle můžeme psát

$$u_{i+1} = u_i + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i \frac{(\Delta x)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots \quad (3.2)$$

Obdobně pro hodnotu u_{i-1}

$$u_{i-1} = u_i - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \Delta x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i \frac{(\Delta x)^2}{2} - \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots \quad (3.3)$$

Z Taylorova rozvoje můžeme jednoduše vyjádřit vztah pro derivaci v daném bodě i pomocí hodnot např. u_i a u_{i+1} (nebo také u_i a u_{i-1})

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i \frac{\Delta x}{2} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i \frac{(\Delta x)^2}{6} + \dots \quad (3.4)$$

Tím se dostáváme k určení prvních derivací podle prostorové souřadnice, rozlišujeme

Difference I. řádu - první derivace

- **Prostorové difference (vpřed) FDS**

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.5)$$

- **Prostorové difference (dozadu) BDS**

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.6)$$

Vidíme tak, že první prostorové derivace naší funkce můžeme jednoduše vyjádřit ze znalostí hodnot funkce u v diskrétních bodech $i-1, i, i+1$, v závislosti na zvoleném způsobu (3.10) resp. (3.13). Chyba, které se při této aproximaci dopouštíme, je prvního řádu, jak je patrné z Taylorova rozvoje.

V mnoha případech není však metoda prvního řádu dostatečná, je třeba použít přesnější metody, tedy druhého řádu. Odečtením rovnic (3.2) a (3.3) pro diferenci vzad a vpřed s Taylorovým rozvojem dostaneme výraz pro středovou diferenci (CD) s

přesností druhého řádu

Diference II.řádu - první derivace

• **Prostorové difference (centrální) CDS**

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (3.7)$$

Nic nám již nebrání, abychom vyjádřili i druhé derivace. Stačí nám k tomu sečíst rovnice (3.2) a (3.3) a po úpravě dostáváme pro druhou derivaci diferenční vztah s přesností třetího řádu

Diference I. řádu - druhá derivace

Diferenční vztah pro druhou derivaci

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} \quad (3.8)$$

Časové derivace

Obdobně budeme postupovat při určování časové derivace, nicméně je třeba přiznat, že se nám situace trochu komplikuje. Příčina změny je patrná z předchozích vzorců, rozdíl spočívá ve znalosti prostorových hodnot u_i v daném časovém okamžiku. Prostorové derivace můžeme vyjádřit velmi snadno, pro časovou derivaci je třeba uvážit, že známé hodnoty funkce $u_i(t)$ jsou pouze ty současné (přítomnost) a z předchozích kroků (minulost). Hodnoty následující nám známé nejsou a je třeba je určit. Pro lepší pochopení si nejprve formálně vyjádříme časovou derivaci z rovnice (3.1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = h(u, x, t) \quad (3.9)$$

Dále budeme postupovat jako pro prostorové derivace, nejprve diskretizujeme čas na jednotlivé kroky

$$t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots, t_M \quad (t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_M)$$

a určíme jednotlivé derivace podle stejného receptu

Časové difference I. řádu

• (vpřed) FDT

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (3.10)$$

Díky počátečním podmínkám známe v daném počátečním okamžiku všechny hodnoty u_i , pro $i = 1, \dots, N$. Jak je naznačeno indexem u derivace na pravé straně, v tomto případě použijeme známé hodnoty z času $t = n$. Pro časovou derivaci (3.9) platí

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = h(u^n, x^n, t) \quad (3.11)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + h^n \Delta t + O(\Delta x) \quad (3.12)$$

Tento hojně využívaný přístup je označován jako explicitní metoda konečných diferencí v čase směrem vpřed (FFTD). Obdobně pokud využijeme druhý způsob vyjádření derivace, tedy

Časové difference I. řádu

• Časové difference (dozadu) BDT

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n = \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} + O(\Delta t) = \|^{n+1} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (3.13)$$

Rozdíl oproti předchozímu způsobu vyjádření spočívá v použití neznámých hodnot z času $t = n + 1$. Pro časovou derivaci (3.9) tak plyne

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = h(u^{n+1}, x^{n+1}, t) \quad (3.14)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + h^{n+1} \Delta t + O(\Delta x), \quad (3.15)$$

která je označována jako implicitní metoda (BFTD). Zcela analogicky pak dostaneme obdobné vyjádření (taktéž implicitní) pokud použijeme centrální diferenční schéma (s přesností druhého řádu)

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{(h^{n+1} + h^n)}{2} \Delta t + O(\Delta x)^2 \quad (3.16)$$

O tom, který ze způsobu vyjádření je lepší lze vést dlouhé diskuze, každý z těchto způsobů má své výhody a nevýhody, ať už z hlediska výpočetních nároků a nebo stability.

Nyní je již vše připraveno pro převod (3.1) do diskrétního schématu. Pro náš ilustrační případ zvolme pro časovou derivaci FD diferenci a CD pro advekční člen, druhá derivace je dána vztahem (3.8). Dostáváme výraz

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -v \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + D \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (3.17)$$

který ještě přeuspořádáme do podoby numerického schématu (označovaného jako FTCS), abychom neznámé veličiny měli na leve straně a známe na pravé straně

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2} \frac{v\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + D \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (3.18)$$

Je patrné, že způsob, jakým lze původní rovnici přepsat (3.1) do diferenčního schématu není jednoznačný, máme nepřeberné množství možností explicitních i implicitních způsobů, které se navzájem liší výpočetní náročností, složitostí i stabilitou. V následujících odstavcích se seznámíme s nejpoužívanějšími metodami.

3.2 Nejjednodušší numerická schémata

Laxova metoda

Je jednou z nejjednodušších metod, hojně využívanou v numerické hydrodynamice. Dostaneme ji nahrazením u_i^n v časové derivaci v rovnici (3.18) průměrnou hodnotou určenou z jejich sousedů

$$u_i^n \approx \frac{(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n)}{2}$$

Obdržíme Laxovo diferenční schéma

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) - \frac{1}{2} \frac{v\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + D \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \quad (3.19)$$

Upwind schéma

Zvolené schéma volí jiný přístup, respektuje fyzikální podstatu problému, jinými slovy respektuje směr šíření proudu (tedy informace) v advekčním členu rovnice (3.1). Místo použití CD prostorové difference pro advekční člen se použije buď FD pro případ záporné advekční rychlosti $v < 0$, nebo BD v případě kladné advekční rychlosti $v > 0$. Výsledné schéma

$$u_i^{n+1} = u_i^n + D \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) - \begin{cases} \frac{v\Delta t}{\Delta x} (u_i^n - u_{i-1}^n) & v > 0 \\ \frac{v\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^n - u_i^n) & v < 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

Crank-Nicholson

Nemusíme se však omezit pouze na explicitní metody. Znamým příkladem implicitní metody je Crankovo-Nicholsonovo schéma, kde pro výpočet použijeme hodnoty v čase t a $t + \Delta$ a to tak, že pro stanovení výsledné hodnoty použijeme průměr obou hodnot. Rovnici přepíšeme (3.1),

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2} \frac{v\Delta t}{\Delta x} \left(\frac{1}{2}(u_{i+1}^{n+1} + u_{i+1}^n) - \frac{1}{2}(u_{i-1}^{n+1} + u_{i-1}^n) \right) \quad (3.21)$$

$$+ D \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \left(\frac{1}{2}(u_{i+1}^{n+1} + u_{i+1}^n) - \frac{1}{2}(2u_i^{n+1} + 2u_i^n) + \frac{1}{2}(u_{i-1}^{n+1} + u_{i-1}^n) \right) \quad (3.22)$$

a následně ještě schéma upravíme

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{1}{4} \frac{v\Delta t}{\Delta x} (u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1} + u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \\ &+ D \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \frac{1}{2} (u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1} + u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Vidíme, že na rozdíl od předchozích případů nám neznámé hodnoty funkce u_j^{n+1} v diskretních bodech j vystupují i na pravé straně. Toto schéma vede v tomto případě k řešení soustavy (ne)lineárních rovnic (v případě nelinearity nutno linearizovat - například Burgersova rovnice). Pokud však $v = 0$, dostáváme difúzní rovnici a lineární soustavu. Soustavu rovnic nejprve přepíšeme tak, že všechny neznáme veličiny převedeme na levou stranu. Označme

$$\sigma = \frac{D\Delta t}{2\Delta x^2} \quad (3.24)$$

$$\rho = \frac{1}{4} \frac{v\Delta t}{\Delta x} \quad (3.25)$$

pak můžeme psát pro rovnice (3.24)

$$u_{i-1}^{n+1}(-\sigma - \rho) + u_i^{n+1}(1 + 2\sigma) + u_{i+1}^{n+1} = u_{i-1}^n(\sigma + \rho) + u_i^n(1 - 2\sigma) + u_{i+1}^n(\sigma - \rho) \quad (3.26)$$

V maticovém formalismu můžeme rovnice přepsat následovně s použitím substituce $A = -(\sigma + \rho)$, $B = (1 + 2\sigma)$, $C = (\rho - \sigma)$

$$\begin{pmatrix} B & C & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ A & B & C & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & A & B & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & A & B & C \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ R_M \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Vektor pravých stran je dán vztahem

$$R_i = u_{i-1}^n(\sigma + \rho) + u_i^n(1 - 2\sigma) + u_{i+1}^n(\sigma - \rho) \quad (i \neq 1, M) \quad (3.28)$$

Pro případ hodnoty R_0, R_M , je nutné si uvědomit, že hodnota funkce u_0^{n+1} a u_{M+1}^{n+1} je známa díky počátečním podmínkám, konkrétně

$$u_0^{n+1} = u_0^n \quad (3.29)$$

$$u_{M+1}^{n+1} = u_{M+1}^n \quad (3.30)$$

3.3 Numerické testy

Kapitola 4

Numerické simulace hvězdného větru

V předcházející kapitole jsme se stručně seznámili se způsobem, kterým lze úspěšně parciální diferenciální rovnice převést na řešitelný numerický problém. Studovali jsme je na jednotlivých zjednodušených typech parciálních diferenciálních rovnic, které však již v některých aspektech odráželi vlastnosti hydrodynamických rovnic. Nyní jsme vlastně již jen krůček od sestavení vlastního hydrodynamického kódu, který budeme moci použít pro studium praktického astrofyzikálního problému. V této kapitole probereme základní pojmy, veličiny a rovnice z klasické hydrodynamiky potřebné k sestavení rovnic popisujících hvězdný vítr. Zvolená symetrie popisu koresponduje s předpokládanou symetrií hvězdného větru. Pochopení matematického popisu hydrodynamiky je nezbytným krokem při sestavování vlastního kódu. V další části této kapitoly se pak již zaměříme na numerické řešení těchto rovnic, metodu výpočtu a další aspekty, které je nutné znát pro tvorbu kódu. Na závěr si sestavíme co nejjednodušší hydrodynamický kód, který použijeme pro simulaci dvou nejznámějších typů hvězdného větru, slunečního a zářením hnaného větru horkých hvězd.

4.1 Základní rovnice hydrodynamiky

K popisu pohybu kontinua můžeme použít dva alternativní přístupy, Eulerův popis a Lagrangeův popis. V Eulerově popisu je pohyb popsán vůči pevnému souřadnicovému systému (ne nutně inerciálnímu). Hydrodynamické rovnice jsou potom parciální diferenciální rovnice vzhledem k prostoru a času, popisující vývoj jednotlivých hydrodynamických veličin. Naproti tomu v Lagrangeově popisu je celé kontinuum rozděleno na určité elementární části objemu a je sledován pohyb každé této elementární části. Oba dva tyto přístupy mají své výhody a nevýhody. V našem popisu a kódu se omezíme na první, tedy Eulerův přístup.

Nejprve zavedeme značení jednotlivých hydrodynamických veličin, kterého se budeme držet v celém dalším textu. Základními hydrodynamickými veličinami jsou

skalární hustota ρ , tlak p , vektorová rychlost elementu kontinua \mathbf{v} a vnitřní energie plynu U . Tyto veličiny jsou vzájemně svázány pomocí hydrodynamických rovnic. Dále se v našem přístupu omezíme na ideální tekutinu, nebudeme tedy započítávat vazkost tekutiny. To je v případě drtivé většiny astrofyzikálních aplikací zcela oprávněná aproximace. V takovém případě lze kontinuum popsat Eulerovými rovnicemi: rovnicí kontinuity, rovnicí pro hybnost a rovnicí pro energii. Obecný tvar rovnice kontinuity je podle (?)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (4.1)$$

Obecný tvar rovnice pro hybnost za předpokladu gravitačního zrychlení \mathbf{g}_* a zářivého zrychlení \mathbf{g}_{rad} , lze psát

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{\nabla p}{\rho} = \mathbf{g}_* + \mathbf{g}_{\text{rad}}. \quad (4.2)$$

Obecný tvar rovnice pro energii je dán

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} v^2 + \rho U \right) - \operatorname{div} \left(\rho \mathbf{v} \left(\frac{1}{2} v^2 + H \right) \right) = 0, \quad (4.3)$$

kde U značí vnitřní energii plynu a H entalpii. V rámci naší problematiky rovnici pro energii nebudeme nadále uvažovat. Pro jednoduchost budeme uvažovat pouze izotermické procesy (pokud bychom však chtěli započítat realističtější neizotermické procesy, je níže uvedený postup analogický). V rámci této aproximace ještě doplníme soustavu o stavovou rovnici ideálního plynu

$$p = a^2 \rho, \quad (4.4)$$

kde a značí rychlost zvuku a v případě ideálního plynu závisí na teplotě podle vztahu

$$a = \sqrt{\frac{k_B T}{\mu m_H}}. \quad (4.5)$$

$k_B = 1.3807 \cdot 10^{-16} [\text{erg K}^{-1}]$ je Boltzmannova konstanta, m_H je hmotnost atomu vodíku a μ_m je střední molekulová hmotnost plynu. Přesný výpočet μ je poměrně komplikovaný a závisí na určení stupně ionizace všech chemických elementů v plynu.

4.2 Základy numerické dynamiky tekutin

4.2.1 Konzervativní schéma

Hydrodynamické rovnice lze numericky formulovat jak v Lagrangeově formalismu, tak v Eulerově formalismu. Základní vlastností Lagrangeova přístupu je, že celková

hmota se zachovává. Pro numerické schéma v Eulerově formalismu to nemusí být obecně pravda. Je však možné Eulerovy rovnice do konzervativní formy přepsat. Jaký je tedy v tom rozdíl? Uvažme derivaci z rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x}, \quad (4.6)$$

kteřou diskretizujeme následujícím způsobem,

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} = \frac{(\rho u)_i - (\rho u)_{i-1}}{\Delta x}. \quad (4.7)$$

Můžeme však také derivaci (4.6) rozepsat

$$\rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x}. \quad (4.8)$$

Což s použitím stejné numerické aproximace jako v případě (4.7) vede

$$\rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho_i \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + u_i \frac{\rho_i - \rho_{i-1}}{\Delta x}, \quad (4.9)$$

Vidíme, že výsledne numerické schéma (4.7) a (4.9) aproximované derivace (4.6) není stejné, ač vychází ze stejné rovnice a stejného numerického přístupu. Ale zachovává vztah (4.7) skutečně hmotu na rozdíl od (4.9)? Abychom se o tom přesvědčili, stačí sečíst výsledný vztah přes všechny body sítě. Zvolme pro jednoduchost případ sítě se čtyřmi body, dostáváme

$$\frac{(\rho u)_1 - (\rho u)_0}{\Delta x} + \frac{(\rho u)_2 - (\rho u)_1}{\Delta x} + \frac{(\rho u)_3 - (\rho u)_2}{\Delta x} \quad (4.10)$$

ze kterého je ihned patrné, že zbývají pouze členy na okraji $i = 0$ a $i = 3$, tedy pouze na tom kolik hmoty vchází dovnitř a kolik vychází ven. V případě druhém (4.9) je situace komplikovanější

$$\rho_1 \frac{u_1 - u_0}{\Delta x} + u_1 \frac{\rho_1 - \rho_0}{\Delta x} + \rho_2 \frac{u_2 - u_1}{\Delta x} + u_2 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\Delta x} + \rho_3 \frac{u_3 - u_2}{\Delta x} + u_3 \frac{\rho_3 - \rho_2}{\Delta x} \quad (4.11)$$

jednotlivé vnitřní členy se nevyruší, pokud přidáme další bod sítě přidáme i další člen a výsledná suma je větší. Nelze tedy hovořit o zachování hmoty.

V praxi je použití konzervativního schématu velkou výhodou, poněvadž respektuje fyzikální podstatu problému. Navíc oproti nekonzervativním schématům vykazují větší stabilitu a přesnost v případě existence rázových vln během studovaného procesu. Eulerovy hydrodynamické rovnice (rovnice pro energii pro jednoduchost neuvažujeme) tedy přepíšeme do konzervativního tvaru

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{F}(\mathbf{u})_x = 0. \quad (4.12)$$

kde

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Abychom lépe ilustrovali výhody, které přináší tento přístup, zavedeme speciální typ sítě, který se ve spojitosti s konzervativním typem schématu často používá. Jedná se o střídavou síť (v anglické literatuře označovanou jako *staggered*), ve které hustota (a další skalární veličiny) je definována ve středu výpočetní buňky, zatímco rychlost (vektorová veličina) na jejím okraji (viz. obrázek 4.1). S použitím konzervativního schématu Eulerových rovnic, lze pak říci, že hustota ve středu výpočetní buňky je dána tokem hmoty, přes její okraje.

4.2.2 Technika oddělených toků

Tato metoda, známá spíše pod svým anglickým názvem *flux splitting* technika (? , stránka 415), umožňuje rozdělit řešení parciální diferenciální rovnice na části, kde každá část reprezentuje jeden samostatný člen z uvažované rovnice. Schématicky zapsáno, pro dynamický systém daný rovnicí

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathcal{L}(\mathbf{u}) \quad (4.14)$$

je \mathbf{u} je reprezentováno sloupcovým vektorem (4.13). Operátor $\mathcal{L}(\mathbf{y})$ můžeme rozložit na součet částečných operátorů $\mathcal{L}(\mathbf{u}) = \mathcal{L}_1(\mathbf{u}) + \mathcal{L}_2(\mathbf{u}) + \dots + \mathcal{L}_m(\mathbf{u})$, přičemž každý operátor představuje jeden člen z rovnice. Tedy například advekční člen, člen odpovídající tlakovým, gravitačním silám apod. Numerické řešení rovnice (4.14) pak obdržíme postupnou aplikací jednotlivých operátorů

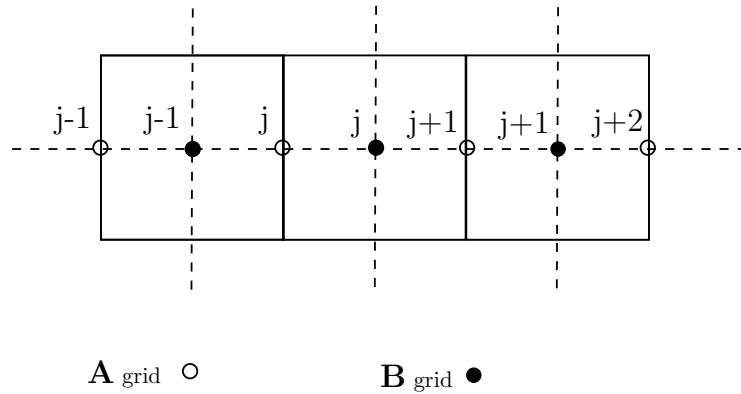
$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{n+1/m} &= \mathcal{L}_1(\mathbf{u}^n, \Delta t), \\ \mathbf{u}^{n+2/m} &= \mathcal{L}_2(\mathbf{u}^{n+1/m}, \Delta t), \\ \mathbf{u}^{n+3/m} &= \mathcal{L}_3(\mathbf{u}^{n+2/m}, \Delta t), \\ &\vdots \\ \mathbf{u}^{n+1} &= \mathcal{L}_m(\mathbf{u}^{n+m-1/m}, \Delta t) \end{aligned} \quad (4.15)$$

4.3 Advekční člen

Rozepíšeme Eulerovy rovnice 1D v kartézských souřadnicích a v konzervativním tvaru (4.12) dostáváme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v}{\partial x} = 0 \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (4.17)$$



Obrázek 4.1: *Střídavý typ sítě, skalární veličiny jsou definovány na středu výpočetní buňky - body B, vektorové veličiny jsou definovány na okrajích výpočetní buňky - body A.*

první dva členy v obou rovnicích reprezentují změnu hustoty a momentu hybnosti jako výsledek přenosu hmoty a momentu hybnosti podél sítě. To je podstata advekčního členu, nedochází k celkové změně hmotnosti a momentu hybnosti, vyjma toho co do systému vchází a odchází v důsledku okrajových podmínek. Z numerického hlediska je však podstatné, aby ta část numerického výpočtu, která počítá advekční člen byla provedena konzistentně. Tím máme na mysli, aby advekce všech fyzikálních veličin, tedy jak hustoty, tak momentu hybnosti byly počítány stejným způsobem. Jinak řečeno, pokud dochází k přetoku hmotnostního elementu z jedné výpočetní buňky do druhé, dochází také ve stejný okamžik k přetoku momentu hybnosti. Pro ilustraci se podívejme na rovnici kontinuity (4.16), obecné numerické schéma pro řešení této rovnice pro advekci

$$\rho_{B,i}^{n+1} = \rho_{B,i}^n - \frac{\Delta t^{n+1/2}}{\Delta x_{B,i}} (F_{i+1} - F_i) = \rho_{B,i}^n - \frac{\Delta t^{n+1/2}}{\Delta x_{B,i}} ((\bar{\rho}v)_{i+1} - (\bar{\rho}v)_i) \quad (4.18)$$

kde

$$\Delta x_{B,i} = x_{A,i+1} - x_{A,i}. \quad (4.19)$$

Pro vysvětlení: horní index u časového kroku je zde proto, že velikost časového kroku se během časového vývoje mění tak, aby vždy byla splněna Courantova podmínka stability. Hustota $\bar{\rho}$ vystupující v členech odpovídající toku hmoty skrze hranice výpočetní buňky, by měla co nejvíce odpovídat množství hmoty protékající skrze hranice buňky. Její hodnotu dostaneme interpolací, záleží však na metodě, kterou zvolíme. Dále je třeba upozornit, že byla použita střídavá síť, kde skalární veličiny jsou definovány na středu výpočetní buňky (typ B) a vektorové veličiny na jejích okrajích (typ A).

Možností je více, aby však schéma bylo stabilní schéma musíme respektovat směr šíření informací skrze hranici výpočetní buňky (viz. ??). V nejjednodušším případě stačí použít hodnotu hustoty ze středu buňky ze které přitéká hmota (*donor cell* schéma). Tedy například pro hraniční bod buňky x_i oddělující výpočetní buňky s hustotou $\rho_{B,i-1}$ a $\rho_{B,i}$ platí pro tento postup

$$\bar{\rho} = \begin{cases} \rho_{B,i-1} & v_i > 0 \\ \rho_{B,i} & v_i < 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

Toto schéma však je metodou prvního řádu, není příliš přesné díky většímu vlivu numerické difúze. Mnohem přesnější metodou dostaneme, pokud do interpolované veličiny, v našem případě $\bar{\rho}$ zahrneme aproximativně průběh změny této veličiny mezi středy výpočetní buňky. Nejjednodušší možností aproximace je lineární průběh.

4.3.1 VanLeerova metoda

Podívejme se dobře na obrázek ??, uvažme situaci na hranici buňky x_i . Nejjednodušší způsob, jak lineární funkcí aproximovat průběh hustoty uvnitř výpočetní buňky za předpokladu, že známe hodnotu hustoty v jejím středu by bylo použití hodnot $\rho_{B,i-1}$ a $\rho_{B,i}$ ke stanovení směrnice přímky a tuto hodnotu použít pro stanovení průběhu v obou buňkách včetně jejich okrajů, to by však vedlo ke značně zkresleným hodnotám na krajích $x_{A,i-1}$ a $x_{A,i+1}$. Další možností by mohlo být použití průměru $\Delta\bar{\rho}_i$ ze směrnic určených z bodů $\rho_{B,i-1}, \rho_{B,i}$ a $\rho_{B,i}, \rho_{B,i+1}$ pro buňku mezi body $x_{A,i}, x_{A,i+1}$ a obdobně $\Delta\bar{\rho}_{i-1}$ ze směrnic určených z bodů $\rho_{B,i-2}, \rho_{B,i-1}$ pro buňku mezi body $x_{A,i-1}, x_{A,i}$. Ani v tomto případě se nevyhneme problémům s existencí nereálných maxim na krajích buněk viz obrázek. S těmito obtížemi se lze vypořádat použitím vanLeerovy monotonizace. Její princip je velmi jednoduchý, nejprve určíme směrnice

$$\Delta\rho_{A,i} = \frac{\rho_{B,i} + \rho_{B,i-1}}{\Delta x_{A,i}} \quad (4.21)$$

kde $\Delta x_{A,i} = 0.5(\Delta x_{B,i-1} + \Delta x_{B,i})$. Pro hledanou hodnotu interpolované veličiny použijeme hodnoty, které odpovídají směru toku šíření informace. Tedy s využitím směru šíření informace

Advekce hustoty - VanLeer schéma

$$\bar{\rho} = \begin{cases} \rho_{B,i-1} + (\Delta x_{B,i-1} - v_{A,i}\Delta t)\frac{d\rho_{B,i-1}}{2} & v_i > 0 \\ \rho_{B,i} - (\Delta x_{B,i} + v_{A,i}\Delta t)\frac{d\rho_{B,i}}{2} & v_i < 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

kde směrnice přímky $d\rho_{i-1}, d\rho_i$ je dána geometrickým průměrem

$$d\rho_{B,i-1} = \frac{2\Delta\rho_{A,i}\Delta\rho_{A,i-1}}{\Delta\rho_{A,i} + \Delta\rho_{A,i-1}} \quad (4.23)$$

$$d\rho_{B,i} = \frac{2\Delta\rho_{A,i}\Delta\rho_{A,i+1}}{\rho_{A,i} + \rho_{A,i+1}} \quad (4.24)$$

pokud $\Delta\rho_{A,i}\Delta\rho_{A,i-1} > 0$ resp. $\Delta\rho_{A,i}\Delta\rho_{A,i+1} > 0$ a na druhou stranu

$$d\rho_{B,i-1} = 0, \quad d\rho_{B,i} = 0 \quad (4.25)$$

za předpokladu, že $\Delta\rho_{A,i}\Delta\rho_{A,i-1} < 0$ resp. $\Delta\rho_{A,i}\Delta\rho_{A,i+1} < 0$. Tento postup použijeme i na další interpolovanu veličinu v advektivním členu, moment hybnosti $\overline{\rho v}$. Musíme si však uvědomit, že moment hybnosti je definován na krajích výpočetní buňky (na síti typu A) na rozdíl od hustoty. Tedy

Advekce momentu hybnosti - VanLeer schéma

$$\overline{\rho v} = \begin{cases} \rho v_{A,i} + (\Delta x_{A,i} - v_{B,i}\Delta t) \frac{d(\rho v)_{A,i}}{2} & v_i > 0 \\ \rho v_{A,i+1} - (\Delta x_{A,i+1} + v_{B,i}\Delta t) \frac{d(\rho v)_{A,i+1}}{2} & v_i < 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

přičemž pro derivaci platí obdobně jako v předchozím případě

$$d(\rho v)_{A,j} = \begin{cases} \frac{2\Delta(\rho v)_{B,j}\Delta(\rho v)_{B,j+1}}{\Delta(\rho v)_{B,j} + \Delta(\rho v)_{B,j+1}} & \text{pokud } \Delta(\rho v)_{B,j}\Delta(\rho v)_{B,j+1} > 0 \\ 0 & \text{pokud } \Delta(\rho v)_{B,j}\Delta(\rho v)_{B,j+1} < 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

kde $j = i, i + 1$.

4.4 Zdrojové členy

V předchozí části jsme se zabývali advekčním členem přítomným v Eulerových rovnicích. Zbývající m — dynamických členů jako je gravitační síla, tlaková síla a další nazýváme shrnutě zdrojové členy. Tyto členy do numerického schématu zahrnujeme s pomocí techniky oddělených toků. Tedy každý člen bude zahrnut samostatně, jeden po druhém.

Zdrojové členy

$$\rho v_i^{n+1/m} = \rho v_i^n + \Delta t \mathcal{L}_1 \quad (4.28)$$

$$\rho v_i^{n+2/m} = \rho v_i^{n+1/m} + \Delta t \mathcal{L}_2 \quad (4.29)$$

...

$$\rho v_i^{n+1} = \rho v_i^{n+(m-1)/m} + \Delta t \mathcal{L}_m \quad (4.30)$$

Pro ilustraci, předpokládejme, že například \mathcal{L}_1 reprezentuje tlakovou sílu, pak ma operátor tvar

$$\mathcal{L}_1 = a^2 \frac{(\rho_{B,i} - \rho_{B,i-1})}{x_{B,i} - x_{B,i-1}} \quad (4.31)$$

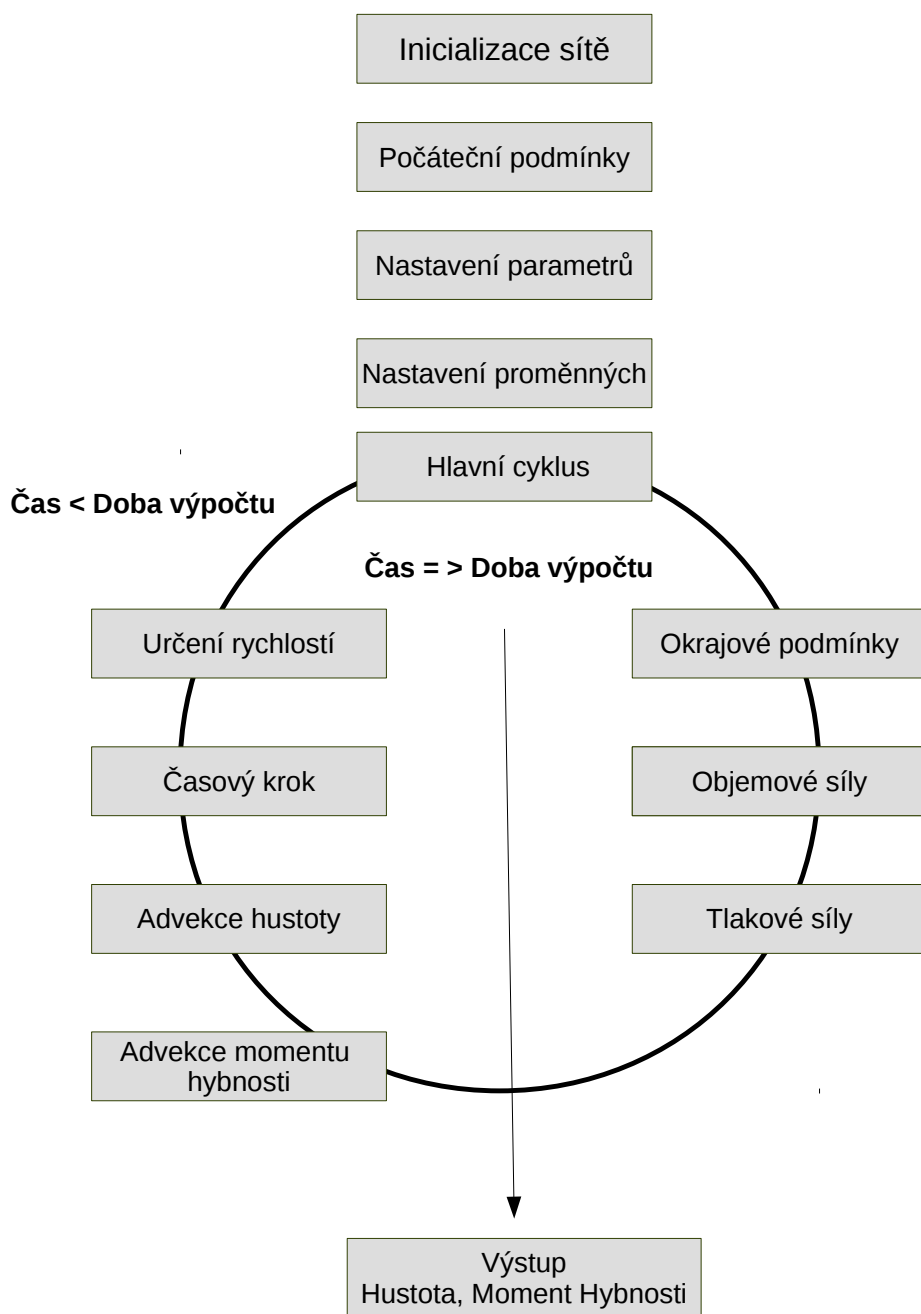
Obdobně bychom postupovali při konstrukci operátory reprezentujících další zdrojové členy.

4.4.1 Tvorba vlastního kódu

Nyní již máme skoro všechny potřebné znalosti k tvorbě vlastního kódu. Stačí jen si tyto znalosti utřídit. Rozdělíme si náš úkol do tří základních fází: *přípravnou, výpočetní a výstupní*. V přípravné fázi vytvoříme střídavou síť, inicializujeme potřebné proměnné a nastavíme počáteční podmínky studovaného problému. Ve výpočetní fázi budeme provádět vlastní numerické řešení Eulerových rovnic pro daný problém. Konkrétně vyřešíme advekční členy pro hustotu i moment hybnosti, změnu momentu hybnosti v důsledku existence zdrojových členů, aplikujeme okrajové podmínky a aktualizujeme všechny potřebné veličiny pro další krok výpočtu. Výpočet probíhá dokud doba výpočtu neodpovídá času, v kterém hledáme řešení. V závěrečné výstupní fázi určíme veličiny, vhodné ke grafickému či jinému výstupu pro další analýzu.

4.5 Astrofyzikální aplikace - hvězdný vítr

Náš hydrodynamický nebude jen pouhou hříčkou, lze jej použít ke studiu různých astrofyzikálních problémů. Jedním z takových problémů je hvězdný vítr hvězd. Mezi dva nejznámější typy hvězdného větru patří sluneční vítr a hvězdný vítr horkých hvězd. Sluneční vítr je typ hvězdného větru, ve kterém dominantní hnací složkou jsou tlakové síly v důsledku velké teploty koróny, tak jak je tomu u našeho Slunce. Naproti tomu v případě hvězdného větru horkých hvězd je hlavní hnací složkou zářivá síla, která souhrně popisuje interakci záření s hmotou. Detailní popis obou typů hvězdného větru můžeme najít například v (?), popřípadě (?).



Obrázek 4.2: Schéma procesu výpočtu v hydrodynamickém kódu

Podívejme se teď trochu podrobněji na druhý typ hvězdného větru. To proto, že musíme do hydrodynamických rovnic přidat nový zdrojový člen, konkrétně zářivá síla. Zářivá síla v CAK aproximaci je dána

$$g_{\text{rad}} = \frac{C}{r^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dv}{dr} \right)^\alpha \quad (4.32)$$

kde C označujeme jako zářivou konstantu

$$C = \frac{k}{4\pi c} \frac{(\kappa_e^{\text{ref}})^{1-\alpha}}{v_{\text{th}}^\alpha} L_* \quad (4.33)$$

Hodnota CAK parametru α je v původní verzi (??) tabelována, nicméně lze použít s výhodou hodnotu $\alpha = 0.5$.

Náš hydrodynamický kód je časově závislý, který umožňuje simulaci i časově proměnných, nicméně nás bude v případě simulace hvězdného větru stacionární, časově neproměnné řešení. To odpovídá realitě, kdy základní dynamické charakteristiky hvězdného větru jsou dlouhodobě relativně stabilní. Ze všech možných stacionárních řešení se dále budeme snažit o nalezení kritického CAK řešení, což je řešení které začíná u povrchu hvězdy s podzvukovou rychlostí, prochází přes kritický CAK bod dále do nadzvukové oblasti. Detaily lze opět nalézt v (?). Analyticky lze pro případ kritického CAK řešení určit rychlost ztráty hmoty

$$\dot{M}_{\text{CAK}} = 4\pi\rho(r)v(r)r^2 = \frac{(k\kappa_e^{\text{ref}}L_*)^{1/\alpha}}{\kappa_e^{\text{ref}}(4\pi c)^{1/\alpha}} \frac{4\pi(GM_*(1-\Gamma_e))^{(\alpha-1)/\alpha}}{v_{\text{th}}} \frac{\alpha(1-\alpha)^{1/\alpha}}{(1-\alpha)} \quad (4.34)$$

Tuto skutečnost s výhodou využijeme při upravě rovnic do bezrozměrného tvaru. Jednoduše řečeno, není pro nás podstatný průběh pro konkrétní hvězdu s danou hmotností, teplotou a luminositou. Zajímá nás průběh kritického řešení pro hvězdu u které je hvězdný vítr hnaný zářením. Základem je vhodná volba normalizačních konstant pro jednotku délky R_N , hmotnosti M_N a času S_N . S využitím zvolených normalizačních podmínek $GM_* = 1$, $R_* = 1$ a $\dot{M}_{\text{CAK}}/4\pi = 1$, dostáváme

$$R_N = R_*, \quad (4.35)$$

$$S_N = \sqrt{\frac{R_N^3}{GM_*}}, \quad (4.36)$$

$$M_N = \frac{\dot{M}_{\text{CAK}}}{S_N} \quad (4.37)$$

Kapitola 5

Optimalizace - řešení inverzních úloh

Kapitola 6

Jak na GIT

Literatura