Departamento de Lenguajes y Ciencias de la Computación
Universidad de Málaga

Conjuntos y Sistemas Difusos
(Lógica Difusa y Aplicaciones)

1. Introducción: Conceptos Básicos

E.T.S.I. Informática

J. Galindo Gómez

Introducción

- **Conjuntos Difusos y su Lógica Difusa** (o borrosa)**:**
  - La palabra ***fuzzy*** viene del ingles *fuzz* (tamo, pelusa, vello) y se traduce por **difuso** o **borroso**.
  - **Lotfi A. Zadeh:** Es el padre de toda esta teoría (Zadeh, 1965).
  - **Importancia:** En la actualidad es un campo de investigación muy importante, tanto por sus implicaciones matemáticas o teóricas como por sus aplicaciones prácticas.
    - **Revistas Int.:** Fuzzy Sets and Systems, IEEE Transactions on Fuzzy Systems...
    - **Congresos:** FUZZ-IEEE, IPMU, EUSFLAT, ESTYLF...
    - **Bibliografía Gral.:** (Kruse, 1994), (McNeill, 1994), (Mohammd, 1993), (Pedrycz, 1998)...
  - **Problemas Básicos subyacentes:**
    - **Conceptos SIN definición clara:** Muchos conceptos que manejamos los humanos a menudo, no tienen una definición clara: ¿Qué es una persona alta? ¿A partir de qué edad una persona deja de ser joven?
    - **La lógica clásica o bivaluada es demasiado restrictiva:** Una afirmación puede no ser ni VERDAD (*true*) ni FALSA (*false*).
      - "Yo leeré El Quijote": ¿En qué medida es cierto? Depende de quien lo diga y...
      - "Él es bueno en Física": ¿Es bueno, muy bueno o un poco mejor que regular?
  - **Otras Herramientas con las que se ha usado:** Sistemas basados en Reglas, Redes Neuronales, Algoritmos Genéticos, Bases de Datos...

Introducción

- **¿Cuándo usar la tecnología fuzzy o difusa?** (Sur, Omron, 1997)
  - En procesos complejos, si no existe un modelo de solución sencillo.
  - En procesos no lineales.
  - Cuando haya que introducir la experiencia de un operador "experto" que se base en conceptos imprecisos obtenidos de su experiencia.
  - Cuando ciertas partes del sistema a controlar son desconocidas y no pueden medirse de forma fiable (con errores posibles).
  - Cuando el ajuste de una variable puede producir el desajuste de otras.
  - En general, cuando se quieran representar y operar con conceptos que tengan imprecisión o incertidumbre (como en las Bases de Datos Difusas).
- **Aplicaciones** (Sur, Omron, 1997; Zimmermann, 1993)**:**
  - **Control de sistemas:** Control de tráfico, control de vehículos (helicópteros...), control de compuertas en plantas hidroeléctricas, centrales térmicas, control en máquinas lavadoras, control de metros (mejora de su conducción, precisión en las paradas y ahorro de energía), ascensores...
  - **Predicción y optimización:** Predicción de terremotos, optimizar horarios...
  - **Reconocimiento de patrones y Visión por ordenador:** Seguimiento de objetos con cámara, reconocimiento de escritura manuscrita, reconocimiento de objetos, compensación de vibraciones en la cámara
  - **Sistemas de información o conocimiento:** Bases de datos, sistemas expertos...

Introducción: *Conjuntos Crisp y Difusos*

- **Conceptos sobre Conjuntos Difusos:**
  - Surgieron como una nueva forma de representar la **imprecisión** y la **incertidumbre**.
  - **Herramientas que usa:** Matemáticas, Probabilidad, Estadística, Filosofía, Psicología...
  - Es un puente entre dos tipos de computaciones:
    - **C.Numérica:** Usada en aplicaciones científicas, por ejemplo.
    - **C. Simbólica:** Usada en todos los campos de la **Inteligencia Artificial.**
- **Conjuntos Clásicos (*crisp*):** Surgen de forma natural, por la necesidad del ser humano de clasificar objetos y conceptos.
  - **Conjunto de Frutas:** Manzana $\in$ Frutas, Lechuga $\notin$ Frutas...
  - **Función de pertenencia $A(x)$, $x \in X$:**
    - **X es el Universo de Discurso.**
    - **Restricción de la Función $A: X \to \{0,1\}$**
  - **Conjunto Vacío** $\Rightarrow$ $\emptyset(x)=0, \ \forall x \in X$
  - **Conjunto Universo** $\Rightarrow$ $U(x)=1, \ \forall x \in X$

$$A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

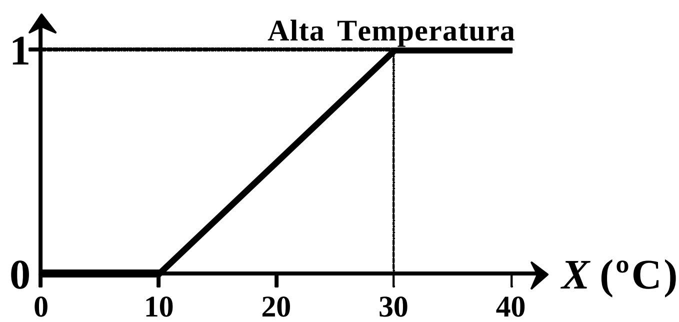
- **Conjuntos Difusos (*fuzzy*):** Relajan la restricción, $A: X \to [0,1]$
  - **Hay conceptos que no tienen límites claros:**
    - ¿La temperatura 25ºC es "alta"?
    - Definimos, por ejemplo: Alta(30)=1, Alta(10)=0, Alta(25)=**0.75**...

Conjuntos Difusos: Definición

- **Definición:** Un conjunto difuso A se define como una **Función de Pertenencia** que enlaza o empareja los elementos de un dominio o Universo de discurso X con elementos del intervalo **[0,1]:**
  - $A: X \rightarrow [0,1]$
- **Cuanto más cerca esté $A(x)$ del valor 1, mayor será la pertenencia del objeto x al conjunto A.**
  - Los valores de pertenencia varían entre **0 (no pertenece en absoluto) y 1 (pertenencia total)**.
- **Representación:** Un conjunto difuso A puede representarse como un conjunto de pares de valores: Cada elemento $x \in X$ con su grado de pertenencia a A. También puede ponerse como una "suma" de pares**:**
  - $A = \{ A(x)/x,\ x \in X \}$
  - $A = \sum_{i=1}^{n} A(x_i)/x_i$ (Los pares en los que $A(x_i)=0$, no se incluyen)
- **Ejemplo:** Conj. de alturas del concepto difuso "Alto" en Personas:
  - **A = 0.25/1.75 + 0.5/1.8 + 0.75/1.85 + 1/1.9** (su universo es discreto)
- **Si el Universo es Continuo:** $A = \int_x A(x)/x$
- La **suma** y la **integral** no deben considerarse como operaciones algebráicas.

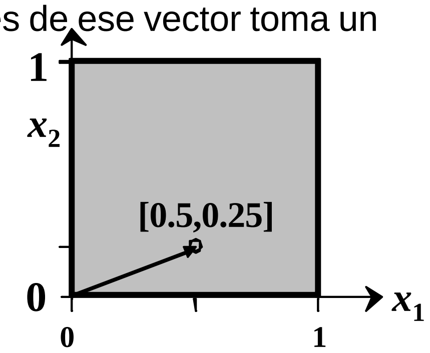
Conjuntos Difusos: Definición

- **Contexto:** Es fundamental en la definición de conjuntos difusos.
  - No es lo mismo el concepto "Alto" aplicado a personas que a edificios.
- **Función de Pertenencia:** Un conjunto difuso puede representarse también **gráficamente** como una función, especialmente cuando el universo de discurso X (o dominio subyacente) es continuo (no discreto).
  - **Abcisas (eje X):** Universo de discurso X.
  - **Ordenadas (eje Y):** Grados de pertenecia en el intervalo **[0,1].**
- **Ejemplo:** Concepto de Temperatura "Alta".



Conj. Difusos: *Interpretación de Kosko* (1992)

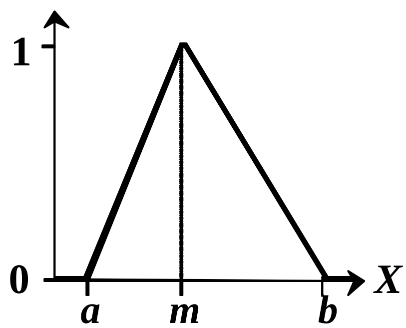
- Un Universo X es un conjunto (finito o infinito) de valores.
  - Por ejemplo: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, donde X tiene n valores.
- Cada subconjunto de X es miembro del conjunto potencia de X, denotado como **P(X)** o **2^X.**
  - **P(X)** tiene **2^n** elementos, incluyendo Æ (conj. vacío).
  - Cada valor de X puede pertenecer al subconjunto o no pertenecer.
- Cada uno de los **2^n** elementos de **P(X)**, puede representarse como un vector de n dimensiones (Kosko, 1992). Forma un hipercubo unidad n-dimensional.
  - **Conjuntos Crisp:** Cada uno de los componentes de ese vector toma un valor en el conjunto **{1,0}**, según ese componente de X pertenezca o no a ese elemento de **P(X)**. Ejemplo: El conjunto vacío tiene n ceros {0, 0, ... 0}.
  - **Conjuntos Difusos:** Cada uno de los componentes de ese vector toma un valor en el intervalo **[0,1]**, según ese componente de X pertenezca a ese elemento o no. Existen infinitos valores posibles.
- Ejemplo con n=2: **P(X)={Æ,{x_1},{x_2},{x_1, x_2} }** ®
  - **Crisp: P(X)={[0,0], [0,1], [1,0], [1,1]}.**
    - Son las 4 esquinas de un cuadrado unidad:
  - **Difuso:** Cubre toda la superficie del cuadrado.



Tipos de Funciones de Pertenencia

- **Función de Pertenencia: A: X ® [0,1]**
  - Cualquier función A es válida: Su definicion exacta depende del **concepto** a definir, del **contexto** al que se refiera, de la **aplicación**...
  - En general, es preferible usar **funciones simples**, debido a que simplifican muchos cálculos y no pierden exactitud, debido a que precisamente se está definiendo un concepto **difuso**.
- **Funciones de Pertenencia Típicas:**
  - **1. Triangular:** Definido por sus límites inferior a y superior b, y el valor modal m, tal que $a<m<b$.

$$A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le a \\ (x-a)/(m-a) & \text{si } x \in (a,m] \\ (b-x)/(b-m) & \text{si } x \in (m,b) \\ 0 & \text{si } x \ge b \end{cases}$$



- También puede representarse así:

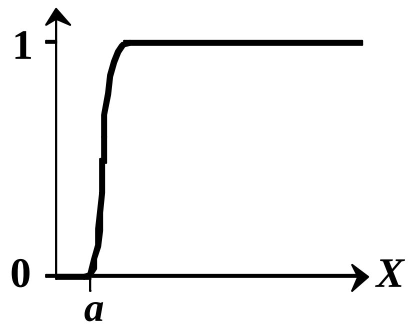
$$A(x;a,m,b) = \text{máx } \{ \text{ mín}\{ (x-a)/(m-a), (b-x)/(b-m) \}, 0 \}$$

Tipos de Funciones de Pertenencia

– **2.** **Función Γ** (*gamma*)**:** Definida por su límite inferior a y el valor $k>0$.

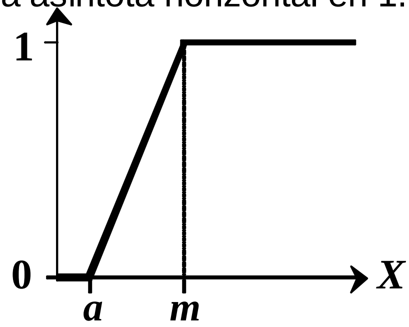
$$A(x)=\begin{cases} 0 & \textbf{si} \quad x \le a \\ 1-e^{-k(x-a)^2} & \textbf{si} \quad x > a \end{cases}$$

$$A(x)=\begin{cases} 0 & \textbf{si} \quad x \le a \\ \dfrac{k(x-a)^2}{1+k(x-a)^2} & \textbf{si} \quad x > a \end{cases}$$



- Esta función se caracteriza por un rápido crecimiento a partir de a.
- Cuanto mayor es el valor de k, el crecimiento es más rápido aún.
- La primera definición tiene un crecimiento más rápido.
- Nunca toman el valor 1, aunque tienen una asíntota horizontal en 1.
- Se aproximan linealmente por:

$$A(x)=\begin{cases} 0 & \textbf{si} \quad x \le a \\ (x-a)/(m-a) & \textbf{si} \quad x \in (a,m) \\ 1 & \textbf{si} \quad x \ge m \end{cases}$$



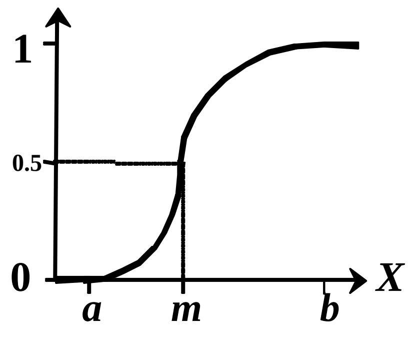
- La función opuesta se llama **Función Λ**.

Tipos de Funciones de Pertenencia

– **3.** **Función S:** Definida por sus límites inferior a y superior b, y el valor m, o punto de inflexión tal que $a<m<b$.

- Un valor típico es: $m=(a+b)/2$.
- El crecimiento es más lento cuanto mayor sea la distancia a-b.

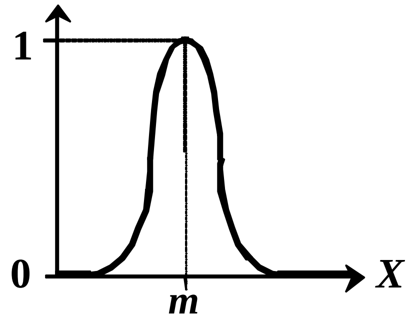
$$A(x)=\begin{cases} 0 & \textbf{si} \quad x \le a \\ 2\,\{(x-a)/(b-a)\}^2 & \textbf{si} \quad x \in (a,m] \\ 1-2\,\{(x-b)/(b-a)\}^2 & \textbf{si} \quad x \in (m,b) \\ 1 & \textbf{si} \quad x \ge b \end{cases}$$



– **4.** **Función Gausiana:** Definida por su valor medio m y el valor $k>0$.

$$A(x)=e^{-k(x-m)^2}$$

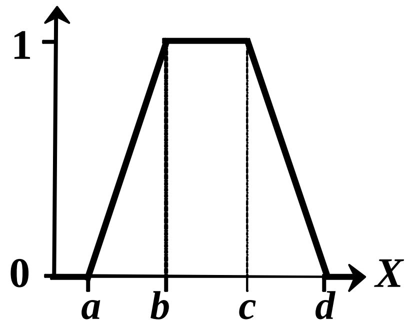
- Es la típica campana de Gauss.
- Cuanto mayor es k, más estrecha es la campana.



Tipos de Funciones de Pertenencia

– **5. <u>Función Trapezoidal</u>:** Definida por sus límites inferior a y superior d, y los límites de su soporte, b y c, inferior y superior respectivamente.

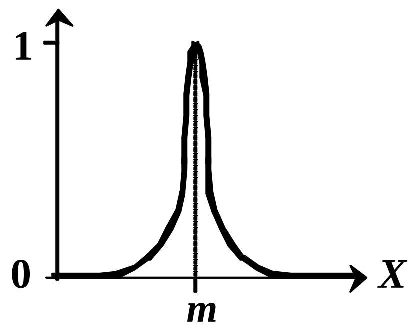
$$A(x)=\begin{cases} \mathbf{0} & \textbf{si}\quad (x \le a)\ \textbf{o}\ (x \ge d) \\ (x-a)/(b-a) & \textbf{si}\quad x \in (a,b] \\ \mathbf{1} & \textbf{si}\quad x \in (b,c) \\ (d-x)/(d-c) & \textbf{si}\quad x \in (b,d) \end{cases}$$



– **6. <u>Función Pseudo-Exponencial</u>:** Definida por su valor medio m y el valor $k>1$.

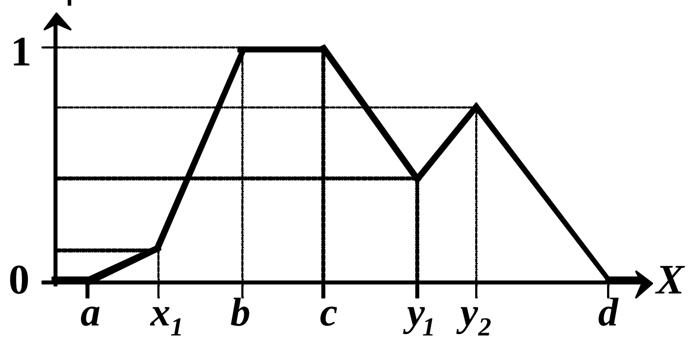
$$A(x)=\frac{1}{1+k(x-m)^2}$$

- Cuanto mayor es el valor de k, el crecimiento es más rápido aún y la “campana” es más estrecha.



Tipos de Funciones de Pertenencia

– **7. <u>Función Trapecio Extendido</u>:** Definida por los cuatro valores de un trapecio $[a, b, c, d]$, y una lista de puntos entre a y b, o entre c y d, con su valor de pertenencia asociado a cada uno de esos puntos.



– En general, la función **Trapezoidal** se adapta bastante bien a la definición de cualquier concepto, con la ventaja de su fácil definición, representación y simplicidad de cálculos.

– En casos particulares, el **Trapecio Extendido** puede ser de gran utilidad. Éste permite gran expresividad aumentando su complejidad.

– En general, usar **una función más compleja no añade mayor precisión**, pues debemos recordar que se está definiendo un concepto **difuso**.

Características de un Conjunto Difuso

- **Altura de un Conjunto Difuso** (*height*)**:** El valor más grande de su función de pertenencia: **sup**$_{x \in X}\ A(x)$**.**
- **Conjunto Difuso Normalizado** (*normal*)**:** Si existe algún elemento $x \in X$, tal que pertenece al conjunto difuso totalmente, es decir, con grado **1**. O también, que: **Altura(**A**) = 1.**
- **Soporte de un Conjunto Difuso** (*support*)**:** Elementos de X que pertenecen a A con grado mayor a **0**: **Soporte(**A**) = {**$x \in X \mid A(x) > 0$**}.**
- **Núcleo de un Conjunto Difuso** (*core*)**:** Elementos de X que pertenecen al conjunto con grado **1**: **Nucleo(**A**) = {**$x \in X \mid A(x) = 1$**}.** Lógicamente, **Nucleo(**A**)** $\subseteq$ **Soporte(**A**).**
- **α-Corte:** Valores de X con grado mínimo α: A_α **= {**$x \in X \mid A(x) \geq \alpha$**}.**
- **Conjunto Difuso Convexo o Concavo** (*convex, concave*)**:** Si su función de pertenencia cumple que $\forall x_1, x_2 \in X$ y $\forall \lambda \in [0,1]$:
  - **Convexo:** $A(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \geq \min\{A(x_1), A(x_2)\}$.
  - **Concavo:** $A(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \max\{A(x_1), A(x_2)\}$.
- **Cardinalidad de un Conjunto Difuso** con un Universo finito (*cardinality*)**: Card(**A**) =** $\sum_{x \in X} A(x)$**.**

Que cualquier punto entre x_1 y x_2 tenga un grado de pertenencia mayor que el mínimo de x_1 y x_2.

Operaciones Unarias sobre C. Difusos

- **Normalización:** Convierte un conj. difuso NO normalizado en uno normalizado, dividiendo por su altura: **Norm_**$A(x) = A(x)$ / **Altura(**A**).**
- **Concentración** (*concentration*)**:** Su función de pertenencia tomará valores más pequeños, concentrándose en los valores mayores:
  - **Con_**$A(x) = A^p(x)$**,** con p>**1,** (normalmente, p=2).
- **Dilatación** (*dilation*)**:** Efecto contrario a la concentración. 2 formas:
  - **Dil_**$A(x) = A^p(x)$**,** con $p \in$ **(0,1),** (normalmente, p=0.5).
  - **Dil_**$A(x) = 2A(x) - A^2(x)$**.**
- **Intensificación del Contraste** (*contrast intensification*)**:** Se disminuyen los valores menores a 1/2 y se aumentan los mayores
  - $$\text{Int\_}A(x) = \begin{cases} 2^{p-1} A^p(x) & \textbf{si } A(x) \leq 0.5 \\ 1 - 2^{p-1}(1 - A(x))^p & \textbf{en otro caso} \end{cases}$$
  - Con p>**1.** Normalmente p=2. Cuanto mayor p, mayor intensificación.
- **Difuminación** (*fuzzification*)**:** Efecto contrario al anterior:
  - $$\text{Fuzzy\_}A(x) = \begin{cases} \sqrt{A(x)/2} & \textbf{si } A(x) \leq 0.5 \\ 1 - \sqrt{(1 - A(x))/2} & \textbf{en otro caso} \end{cases}$$

Relaciones entre Conjuntos Difusos

- **Igualdad** (*equality*)**:** Dos conjuntos difusos, definidos en el mismo Universo, son iguales si tienen la misma función de pertenencia:

$$A = B \;\Leftrightarrow\; A(x) = B(x),\ \forall\ x \in X$$

- **Inclusión** (*inclusion*)**:** Un conjunto difuso está incluido en otro si su función de pertenencia toma valores más pequeños:

$$A \subseteq B \;\Leftrightarrow\; A(x) \leq B(x),\ \forall\ x \in X$$

- **Inclusión Difusa:** Si el Universo es finito, podemos relajar la condición anterior para medir el grado en el que un conjunto difuso está incluido en otro (Kosko, 1992):

$$S(A,B) = \frac{1}{\mathrm{Card}(A)} \left\{ \mathrm{Card}(A) - \sum_{x \in X} \max\{0, A(x) - B(x)\} \right\}$$

  – Ejemplo:
    - A = 0.2/1+ 0.3/2+ 0.8/3+ 1/4 + 0.8/5 $\Rightarrow$ **Card(A) = 3.1**;
    - B = 0.2/2+ 0.3/3+ 0.8/4+ 1/5 + 0.1/6 $\Rightarrow$ **Card(B) = 2.4**;
    - **$S(A, B)$ =** 1/3.1 {3.1 – {0.2+0.1+0.5+0.2+0+0} } = 2.1 / 3.1 **= 0.68**;
    - **$S(B, A)$ =** 1/2.4 {2.4 – {0+0+0+0+0.2+0.1} } = 2.1 / 2.4 **= 0.88**;
    - B está más incluido en A, que A en B.

El Teorema de Representación

- **Teorema de Representación o Principio de Identidad:** Todo conj. difuso puede descomponerse en una familia de conjs. difusos.
  – Para ello, utilizaremos diversos α**-cortes**, teniendo en cuenta la **Restricción de Consistencia: Si** $\alpha 1 > \alpha 2$**, entonces** $A_{\alpha 1} \subset A_{\alpha 2}$
  – Cualquier conjunto difuso A puede descomponerse en una serie de sus α**-cortes:** $A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha$

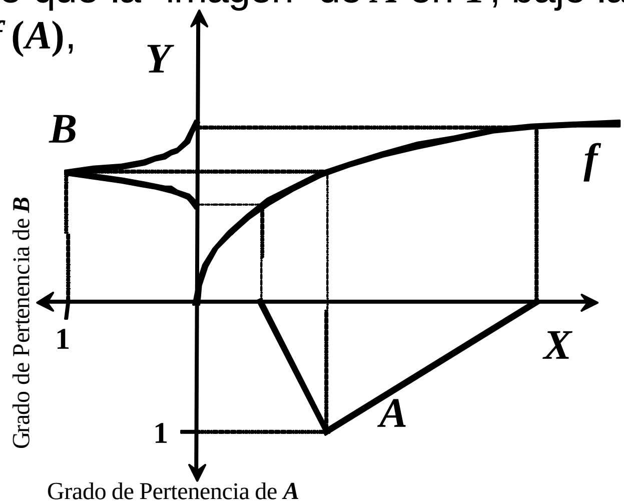
  o, lo que es lo mismo: $$\boxed{A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \{\alpha A_\alpha(x)\}}$$

  donde $A_\alpha(x) \in \{0,1\}$, dependiendo de si x pertenece o no al α-corte A_α.
  – **Reconstrucción:** Cualquier conjunto difuso puede reconstruirse a partir de una familia de conjuntos α-cortes anidados.
  – **Conclusiones:**
    - Cualquier problema formulado en el marco de los conjuntos difusos puede resolverse transformando esos conjuntos difusos en su familia de α-cortes anidados, determinando la solución para cada uno usando técnicas no difusas.
    - Resalta que los conjuntos difusos son una generalización.

El Principio de Extensión

- **<u>Principio de Extensión</u>** (*Extension Principle*)**:** Usado para transformar conjuntos difusos, que tengan iguales o distintos universos, según una función de transformación en esos universos.
  - Sean X e Y dos conjuntos y f una función de transformación de uno en otro: ***f:*** X ® Y
  - Sea A un conjunto difuso en X.
  - El **Principio de Extensión** sostiene que la "imagen" de A en Y, bajo la función f es un conjunto difuso B=f (A), definido como:

    B(y) = sup {A(x) | x Î X, y=f(x) }
  - Ejemplo, representado gráficamente**:**
  - La función **sup** se aplica si existen dos o más valores de x que tengan igual valor f (x).
    - Ese caso no ocurre en el ejemplo.



El Principio de Extensión: Generalización

- Se puede **<u>generalizar el Principio de Extensión</u>** para el caso en el que el Universo X sea el producto cartesiano de n Universos:
  - $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$
  - La función de transformación: ***f:*** **X** ® **Y**, $y = f(x)$, con $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
  - El **Principio de Extensión** transforma n Conjuntos Difusos $A_1, A_2, \ldots$ y A_n, de los universos $X_1, X_2, \ldots$ y X_n respectivamente, en un conjunto difuso B=f ($A_1, A_2, \ldots, A_n$) en Y, definido como:

    B(y) = sup { min[A_1 (x_1), A_2 (x_2), ... , A_n (x_n)] | x Î X, y=f(x) }
- **<u>Ejemplos</u>:** Sean X e Y, ambos, el universo de los números naturales.
  - Función **sumar 4:** $y = f(x) = x + 4$:
    - A = 0.1/2 + 0.4/3 + 1/4 + 0.6/5;
    - B = f (A) = 0.1/6 + 0.4/7 + 1/8 + 0.6/9;
  - Función **suma:** $y = f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$:
    - A_1 = 0.1/2 + 0.4/3 + 1/4 + 0.6/5;
    - A_2 = 0.4/5 + 1/6;
    - B = f (A_1, A_2) = 0.1/7 + 0.4/8 + 0.4/9 + 1/10 + 0.6/11;

Cálculo de la Función de Pertenencia

- Las **Funciones de Pertenencia** pueden calcularse de diversas formas. El método a elegir depende de la aplicación en particular, del modo en que se manifieste la incertidumbre y en el que ésta sea medida durante los experimentos.
  - **1. Método HORIZONTAL:**
    - Se basa en las respuestas de un grupo de **N** "expertos".
    - La pregunta tiene el formato siguiente: "¿Puede x ser considerado compatible con el concepto A ?".
    - Sólo se acepta un "SÍ" o un "NO", de forma que:

      $A(x)$ = **(Respuestas Afirmativas) / N.**
  - **2. Método VERTICAL:**
    - Se escogen varios valores para a, para construir sus a**–cortes**.
    - Ahora la pregunta es la siguiente, efectuada para esos valores de a predeterminados: "¿Identifique los elementos de X que pertenecen a A con grado no menor que a ?".
    - A partir de esos a**–cortes** se identifica el conjunto difuso A (usando el llamado Principio de Identidad o Teorema de Representación).

Cálculo de la Función de Pertenencia

- **3. Método de Comparación de Parejas** (Saaty, 1980)**:**
  - Suponemos que tenemos ya el conjunto difuso A, sobre el Universo X de n valores $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.
  - Calcular la **Matriz Recíproca M=[a$_{hi}$]**, matriz cuadrada $n \times n$:
    - a) Diagonal Ppal. es siempre 1.
    - b) Propiedad de Reciprocidad:

      $a_{hi}\, a_{ih} = 1$
    - c) Propiedad Transitiva:

      $a_{hi}\, a_{ik} = a_{hk}$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{A(x_1)}{A(x_1)} & \frac{A(x_1)}{A(x_2)} & \cdots & \frac{A(x_1)}{A(x_n)} \\ \frac{A(x_2)}{A(x_1)} & \frac{A(x_2)}{A(x_2)} & \ddots & \frac{A(x_2)}{A(x_n)} \\ \vdots & \ddots & \frac{A(x_i)}{A(x_j)} & \vdots \\ \frac{A(x_n)}{A(x_1)} & \frac{A(x_n)}{A(x_2)} & \cdots & \frac{A(x_n)}{A(x_n)} \end{bmatrix}$$

  - El proceso es el inverso:
    - Se calcula la matriz **M**.
    - Se calcula A a partir de **M**.
  - Para calcular **M**, se cuantifica numéricamente el nivel de prioridad o mayor pertenencia de una pareja de valores: x_i con respecto a x_j.
    - Número de comparaciones: $n(n–1)/2$;
    - La transitividad es difícil de conseguir (el autovalor más grande de la matriz sirve para medir la consistencia de los datos: Si es muy bajo, deberían repetirse los experimentos).

Cálculo de la Función de Pertenencia

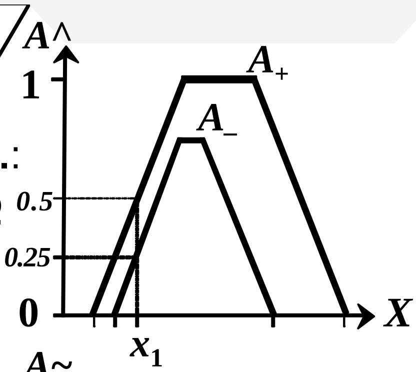
- **4. <u>Método basado en la Especificación del Problema</u>:**
  - Requieren una función numérica que quiera ser aproximada.
  - El error se define como un conjunto difuso: Mide la calidad de la aproximación.
- **5. <u>Método basado en la Optimización de Parámetros</u>:**
  - La forma de un conjunto difuso A, depende de unos parámetros, denotados por el vector **p**: Representado por $A(x;\ \mathbf{p})$.
  - Obtenemos algunos resultados experimentales, en la forma de parejas (elemento, Grado de pertenencia): **(E_k, G_k)** con **k=1, 2, ..., N**.
  - El problema consiste en optimizar el vector **p**, por ejemplo minimizando el error cuadrático: $\min_{\mathbf{p}} \sum_{k=1}^{N} [G_k - A(E_k;\mathbf{p})]^2$
- **6. <u>Método basado en la Agrupación Difusa</u>** (*Fuzzy Clustering*)**:**
  - Se trata de agrupar los objetos del Universo en grupos (solapados) cuyos niveles de pertenencia a cada grupo son vistos como grados difusos.
  - Existen varios algoritmos de Fuzzy Clustering, pero el más aceptado es el algoritmo de "fuzzy isodata" (Bezdek, 1981).

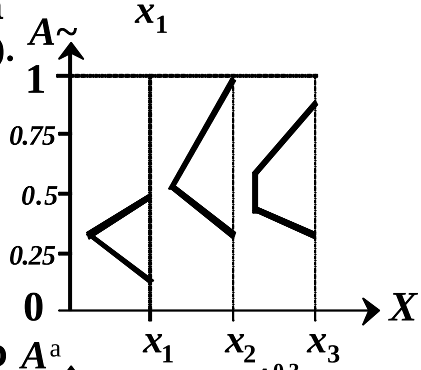
Agrupamiento Difuso: *Algoritmo de Bezdek*

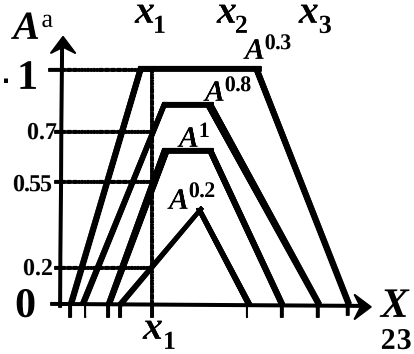
- **Algoritmo "Fuzzy Isodata"** (Bezdek, 1981)**:** Agrupar en c Grupos.
  - Supongamos N elementos $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$, entre los que existe una medida de **distancia** entre cada dos elementos: $\| x_i - x_j \|$.
  - Crear una matriz **F=[** f_{ij} **]**, de c filas y N columnas, donde $f_{ij} \in$ **[0,1]**, denota el grado de pertenencia de x_j al grupo i-ésimo y se **cumple** que: $\forall j = 1, 2, \ldots, N$: $\sum_{i=1}^{c} f_{ij} = 1$, y que $\forall i = 1, 2, \ldots, c$: $\sum_{j=1}^{N} f_{ij} \in (0, N)$.
    - Fila i: Grados de pertenencia de los N elementos al grupo i-ésimo.
  - <u>**Algoritmo**</u>**:**
    - **1. k:=0;** Hallar una matriz inicial **F(0)**.
    - **2.** Usando **F(k)**, calcular los centroides v_i**(k)**: $v_i(k) = \dfrac{\sum_{j=1}^{N} f_{ij}^2(k)\, x_j}{\sum_{j=1}^{N} f_{ij}^2(k)}$
    - **3.** Calcular **F(k+1):** $(f_{ij}(k+1))^{-1} = \sum_{h=1}^{c} \left(\dfrac{\|x_j - v_i\|}{\|x_j - v_h\|} \right)^2$
    - **4.** Comparar **F(k)** con **F(k+1)**: Si son suficientemente parecidos, **PARAR**. En otro caso, **k:=k+1**; Ir al paso **2.**
  - Obtenemos soluciones locales a la siguiente optimización no lineal, **cumpliendo** la matriz **[** f_{ij} **]** las condiciones anteriores: $\min_{v_i, f_{ij}} \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{c} f_{ij}^2 \|x_j - v_i\|^2$

Extensiones de los Conjs. Difusos

- Hay muchas formas de extender el concepto de **C.D.**:
  - **1. <u>Conjuntos Difusos Evaluados en Intervalo</u>** A**^:** Si resulta difícil definir una determinada función de pertenencia, podemos definir dos:
    - A**^=(**$A_{\_}$, A_{+}**)** siendo las funciones de pertenencia inferior y superior respectivamente: $A_{\_}(x) \leq A_{+}(x)$.
    - Así, cada valor x_i tiene dos valores entre los que se encuentra su grado de pertenencia.
  - **2. <u>Conjuntos Difusos de Segundo Orden</u>** A**~:**
    - Los grados de pertenencia son, a su vez conjuntos difusos en el intervalo unidad.
    - Sólo es posible en universos finitos.
  - **3. <u>Conjuntos Difusos Evaluados en Intervalo Difuso</u>** A^{α}**:** Es una mezcla de los dos anteriores.
    - Se eligen unos determinados valores α_k y se crea una función de pertenencia f^k para cada uno de ellos, de forma que $\forall i \ f^k(x_i) = \alpha_k$
    - Es factible en universos infinitos.
    - **Lectura:** x_1 pertenece al conjunto A con grado **0.8** y la certeza de que eso sea cierto es de **0.7**.







Extensiones de los Cjs. Difusos

- 4. **<u>Conjuntos Difusos Tipo-Dos</u>** (*Type-Two*)**:** Los grados de pertenencia son representados por conjuntos difusos definidos, en general, en el intervalo [0,1]:
  - En universos finitos es como una colección de conjuntos difusos: Uno para cada elemento.
  - **Ejemplo:** Para medir la intensidad del tráfico según distintas categorías de vehículos:
    - **Tráfico = {***medio*/motos, *ligero*/camiones, *pesado*/coches...**}** donde *medio*, *ligero*, *pesado*... son conjuntos difusos en el espacio que mide la intensidad del tráfico.
  - Es similar a los conjuntos difusos de Segundo Orden.
- **Otras generalizaciones:** Pueden definirse, pero con **precaución**.
  - Es posible que el concepto que se desea representar ya se pueda representar de alguna forma más simple ya existente.
  - Podrían construirse estructuras que sean imposibles de manejar de forma efectiva.
    - Esto ocurre, por ejemplo con lo que serían los conjuntos difusos de Tercer Orden: A**~~**.

Bibliografía

(⇒ indica que se trata de un libro general o introductorio)

- J. Bezdek, “Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms”. Plenum Press, New York, 1981.
- B. Kosko, “Neural Networks and Fuzzy Systems: A Dynamical Systems Approach to Machine Intelligence”. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1992.
- ⇒ R. Kruse, J. Gebhardt, F. Klawonn, “Foundations of Fuzzy Systems”'. John Wiley & Sons, 1994. ISBN 0-471-94243X.
- ⇒ F.M. McNeill, E. Thro, “Fuzzy Logic: A Practical Approach”. AP professional, 1994. ISBN0-12-485965-8.
- ⇒ J. Mohammd, N. Vadiee, T.J. Ross, Eds. “Fuzzy Logic and Control. Software and Hardware Applications”. Eaglewood Cliffs, NJ:PTR. Prentice Hall, 1993.
- ⇒ W. Pedrycz, F. Gomide, “An introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design”. A Bradford Book. The MIT Press, Massachusetts, 1998. ISBN 0-262-16171-0.
- T.L. Saaty, “The Analytic Hierarchy Processes”. McGraw Hill, New York, 1980.
- ⇒ Sur A&C, Omron Electronics, S.A., “Lógica Fuzzy para Principiantes”. Ed. I. Hernández, 1997. ISBN 84-920326-3-4.
- R. Sambuc, “Fonctions d’F-flous: Application a l’aide au diagnostic en pathologie thyroidienne”. Ph. D. Thesis, Universite de Marseille, 1975.
- L.A. Zadeh, “Fuzzy Sets”. Information and Control, 8, pp. 338-353, 1965.
- ⇒ H. Zimmermann, “Fuzzy Set Theory and Its Applications”. 2d ed. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1993.