UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ - UFPI
CENTRO DE TECNOLOGIA - CT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA - PPGEE
DISCIPLINA: TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO (PARTE I)
PROFESSOR: RICARDO DE ANDRADE

Lista de Exercícios – Unidade I (Conceitos e Princípios Gerais em Cálculo Numérico)

Exercícios de Fixação (EF)

1 – Desde o início do ano, o preço de garrafa de cajuína nos supermercados vem subindo a uma taxa constante de 2 centavos por mês. No dia primeiro de novembro, o preço era R$ 1,56. Seja x o número de meses que se passaram desde o início do ano e y o preço da garrafa de cajuína, e baseado no exposto:

a) Determine o modelo matemático que expressa o preço da garrafa de cajuína em função do tempo;

b) Determine quanto custava a garrafa de cajuína no início do ano (mês de janeiro).

2 – Um fabricante produz papel para impressora a um custo de R$ 2,00 a resma. O papel vem sendo vendido a R$ 5,00 a resma; por este preço, são vendidos 4.000 por mês. O fabricante pretende aumentar o preço do papel e calcula que, para cada R$ 1,00 de aumento do preço, menos 400 resmas serão vendidas por mês.

a) Determine o modelo matemático que expressa o lucro mensal do fabricante em função do preço de venda das resmas. Obs.: Lucro = (número de resmas vendidas) * (lucro por resma); como o objetivo é expressar o lucro em função do preço, a variável independente é o preço e a variável dependente é o lucro; considere x o preço de venda de uma resma e $y = f(x)$ o lucro mensal correspondente;

b) Para que preço o lucro é R$ 0,00?

c) Faça um gráfico da função que expresse o lucro mensal. Para que preço o lucro é máximo? Qual é o lucro máximo?

3 – Considere o problema de se calcular as raízes de uma equação quadrática, tal como $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$, usando as seguintes expressões analíticas:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ e } x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Considere então os seguintes valores numéricos particulares: $a = 1$; $b = 62{,}10$; $c = 1$. Determine os valores das raízes da equação quadrática pelas expressões analíticas indicadas.

4 – A função demanda $D(x)$ de um produto relaciona o número x de unidades produzidas ao preço unitário $p = D(x)$ pelo qual todas as x unidades são demandadas (vendidas) no mercado. Analogamente, a função oferta $S(x)$ fornece o preço $p = S(x)$ pelo qual os produtores estão dispostos a oferecer ao mercado x unidades do produto. Em geral, quando o preço de um produto aumenta, o número de unidades oferecidas pelo fabricante aumenta e o número de unidades demandadas pelos compradores diminui. Assim, quando o nível de produção x aumenta, o preço de oferta $p = S(x)$ tende a aumentar e o preço de demanda $p = D(x)$ tende a diminuir. Isso significa que uma curva típica de oferta é crescente e uma curva típica de demanda é decrescente. De acordo com a lei da oferta e da demanda, em um mercado competitivo, a oferta tende a ser igual à demanda; quando isto ocorre,

dizemos que o mercado está em equilíbrio. Assim, o equilíbrio do mercado ocorre exatamente no nível de produção x_e para o qual $S(x_e) = D(x_e)$. O preço unitário correspondente, pe, recebe o nome de preço de equilíbrio. Temos, portanto: $pe = S(x_e) = D(x_e)$. Se o mercado não está em equilíbrio, dizemos que há escassez do produto quando a demanda é maior que a oferta [$S(x) < D(x)$] e excesso do produto quando a oferta é maior que a demanda [$S(x) > D(x)$].

Uma pesquisa de mercado mostra que os fabricantes oferecerão x unidades de um certo produto ao mercado se o preço unitário for $p = S(x)$ reais e que o mesmo número de unidades será demandado (comprado) pelos consumidores se o preço unitário for $p = D(x)$ reais, em que as funções oferta e demanda são dadas por: $S(x) = x^2 + 14$ e $D(x) = 174 - 6x$. Para que nível de produção x e preço unitário p o equilíbrio é atingido?

5 – Seja o cálculo de: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Do Cálculo Diferencial e Integral, sabe-se que tal limite existe e que seu valor é o número irracional e, cuja utilidade em matemática e em outras ciências, se deve ao alto número de propriedades interessantes que possui. Entretanto, com a definição dada, encontra-se a dificuldade de calcular o valor exato, não somente pela impossibilidade de atingir o limite, mas também pela complexidade das operações a efetuar. Apela-se, então, para processos de cálculo mais simples, que forneçam um valor aproximado desse número dentro de um certo grau de exatidão considerado satisfatório, como o que aparece no mostrador de uma máquina de calcular. O valor e pode ser expresso pela soma infinita: $e = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}$, que é também um limite inatingível numericamente, mas implica em operações aritméticas bem mais simples. Nesta expressão, cada uma das partes formadas por $\frac{1}{i!}$ é denominada "termo". Pode se observar que os dois primeiros termos são obtidos quando "i" vale 0 e 1, respectivamente. Determine o valor de e para as seguintes quantidades de "termos" (n):

a) $n = 1$;
b) $n = 2$;
c) $n = 3$;
d) $n = 4$;
e) $n = 5$;
f) $n = 6$;
g) $n = 7$;
h) $n = 8$;
i) $n = 9$;
j) $n = 10$.

6 – Dado um polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$, um problema que se coloca é o de calcular o valor de $P(x)$ para $x = \bar{x}$, ou seja, $P(\bar{x}) = a_n\bar{x}^n + a_{n-1}\bar{x}^{n-1} + a_{n-2}\bar{x}^{n-2} + \cdots + a_2\bar{x}^2 + a_1\bar{x} + a_0$. Para calcular $P(x)$, é necessário realizar

multiplicações e adições. Determine o esforço computacional (isto é, o número de operações) para calcular o valor dos polinômios a seguir:

a) $P(x) = x^2 - 3x + 1$;
b) $P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 4x - 8$;
c) $P(x) = -x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 4x - 1$;
d) $P(x) = 3x^9 + 2x^8 - 10x^7 + 2x^6 - 15x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 16x^2 + 3x - 5$.

Exercícios Propostos (EP)

1 – No início de um período letivo, alunos em uma universidade decidem organizar uma festa de boas vindas, em que estudantes cursando o 1º ano (calouros) contribuem com R$ 10,00 e do 2º ano contribuem com R$ 15,00. Contando com a colaboração exata de 164 alunos, para uma arrecadação de R$ 2.000,00, deseja-se saber:

a) O modelo matemático para permitir a determinação da contribuição dos alunos do 1º e 2º ano;
b) Quantos calouros devem contribuir e também verificar se o número de contribuintes calouros suplanta o de alunos do 2º ano.

2 – Dado um polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, determine a expressão matemática do esforço computacional, em função do grau do polinômio n, (isto é, o número de operações) para calcular o valor de $P(x)$ para $x = \bar{x}$, ou seja, $P(\bar{x}) = a_n \bar{x}^n + a_{n-1}\bar{x}^{n-1} + a_{n-2}\bar{x}^{n-2} + \cdots + a_2\bar{x}^2 + a_1\bar{x} + a_0$.

Exercícios para Implementação Computacional (EI)

1 – Implemente os procedimentos computacionais necessários para obter o valor de e^x, por meio do seguinte somatório: $e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$. Os dados de entrada são:

a) Argumento da função (x);
b) Quantidade de termos a serem utilizados (n).

Os dados de saída são:

a) O valor de e^x;

i) Determine o valor de e^1, e^2, e^4, e^6 para as seguintes quantidades de termos: 3, 6, 9, 12 e 15.

2 – Implemente os procedimentos computacionais necessários para obter o valor da raiz da equação $e^x - \operatorname{sen} x - 2 = 0$, por meio da iteração ou aproximação sucessiva. Os dados de entrada são:

a) Tentativa inicial: $x^{(0)} = 0{,}5$;
b) Equação de recorrência: $x^{(i+1)} = x^{(i)} - \frac{e^{x^{(i)}} - \operatorname{sen} x^{(i)} - 2}{e^{x^{(i)}} - \cos x^{(i)}}$;
c) Teste de parada: $\left|x^{(i+1)} - x^{(i)}\right| \leq 10^{-5}$.

3 – Implemente os procedimentos computacionais necessários para obter o valor das seguintes séries: $sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$ e $cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$. Os dados de entrada são:

a) Argumento da função (x);

b) Precisão (número de casas decimais)

i) Determine o valor de $sen(x)$ e $cos(x)$ com uma precisão de 10 casas decimais para os seguintes valores de x: 0; 1; -0,2; 3,1415926535; 1,57 e 2,7;

ii) Determine o valor de $sen(x)$ e $cos(x)$ com uma precisão de 15 casas decimais para os seguintes valores de x: 0; 1; -0,2; 3,1415926535; 1,57 e 2,7.

4 – Implemente os procedimentos computacionais necessários para se calcular o valor de um polinômio $P(x)$ para $x = \bar{x}$, ou seja $P(\bar{x})$. Os dados de entrada são:

a) Grau do polinômio (n);

b) Coeficientes do polinômio (a_n, a_{n-1} a_{n-2},.., a_2, a_1,a_0);

c) Argumento do polinômio $\bar{x}$.

i) Determine o valor de $P(x) = -x^5 + 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 4x - 1$, para $\bar{x} = -2$;

ii) Determine o valor de $P(x) = 3x^9 + 2x^8 - 10x^7 + 2x^6 - 15x^5 - 3x^4 + 2x^3 - 16x^2 + 3x - 5$, para $\bar{x} = 2$.

5 – Uma cidade A em 2020 possui 100 mil habitantes e tem uma taxa de crescimento de 1% ao ano. Uma cidade B em 2020 possui 30 mil habitantes e tem uma taxa de crescimento de 3% ao ano. Pode-se imaginar que, mantidas essas condições, ao longo de vários anos a cidade B terá mais habitantes que a cidade A. A questão é: em que ano a cidade B terá ultrapassado a cidade A em termos de quantitativo de habitantes? Qual será a população de cada cidade quando isso acontecer? Implemente os procedimentos computacionais necessários para determinar o ano que a população da cidade B terá ultrapassado a população da cidade A, bem como a população nessa data. O programa computacional deve mostrar a evolução populacional de cada cidade até o ano em que a cidade B terá uma população maior que a cidade A.

OBSERVAÇÕES:

1 – A resolução das questões deve ser entregue em sequência, iniciando-se pelos Exercícios de Fixação (EF), seguindo-se pelos Exercícios Propostos (EP), finalizando-se com os Exercícios de Implementação Computacional (EI);

2 – A lista de exercícios pode ser resolvida em duplas. Se for o caso, entregar somente uma resolução com o nome dos dois integrantes. Os alunos devem assinar (ou rubricar) em todas as folhas de resolução.

3 – Em se tratando de Lista de Exercícios que tenha implementação computacional, deve-se anexar (em um único arquivo) o código-fonte do programa fonte referente à implementação computacional.