**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ - UFPI**
**CENTRO DE TECNOLOGIA - CT**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA - PPGEE**
**DISCIPLINA: TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO (PARTE I)**
**PROFESSOR: RICARDO DE ANDRADE**

**Lista de Exercícios – Unidade III (Solução Numérica de Equações Algébricas Não Lineares)**

## Exercícios de Fixação (EF)

1 – Determine a raiz real das seguintes equações:

a) $f(x) = x - 2{,}965 = 0$

b) $f(x) = x^2 - 23x + 132 = 0$

c) $f(x) = x^3 - 64 = 0$

d) $f(x) = x^4 - 7x^3 + 12x^2 = 0$

e) $f(x) = e^x - 1 = 0$

f) $f(x) = sen(x)$

g) $f(x) = \sqrt{x} - 2 = 0$

2 – Determine a raiz das seguintes equações:

a) $f(x) = x^4 + 81 = 0$

b) $f(x) = (x^2 - 6x + 10)(x - 1) = 0$

3 – Determine a raiz real da equação $f(x) = e^x - \operatorname{sen} x - 2 = 0$. Utilize a implementação computacional da Lista de Exercícios da Unidade I (Conceitos e Princípios Gerais em Cálculo Numérico) para auxiliar no processo de obtenção da raiz real da equação.:

4 – Considere a equação $f(x) = (x^{-3}) \ln x = 0$, em que a única raiz é $\bar{x} = 1$. Determine o valor de $f(x)$ para os seguintes valores de $x = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192$ e $16384$.

| # | $x$ | $f(x)$ | # | $x$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | | 8 | 256 | |
| 2 | 4 | | 9 | 512 | |
| 3 | 8 | | 10 | 1024 | |
| 4 | 16 | | 11 | 2048 | |
| 5 | 32 | | 12 | 4096 | |
| 6 | 64 | | 13 | 8192 | |
| 7 | 128 | | 14 | 16384 | |

5 –Determine o zero das funções, por meio do Método da Bisseção (retenha, durante os cálculos, cinco casas decimais):

a) $f(x) = x^2 - 3$; $[1; 2]$ com $\epsilon = 10^{-2}$;

b) $f(x) = x^2 + \ln x$; $[0{,}5; 1{,}0]$ com $\epsilon = 10^{-2}$;

c) $f(x) = 4\cos x - e^x$; $[0{,}0; 1{,}0]$ com $\epsilon = 10^{-2}$.;

d) $f(x) = x^2 + 62{,}10x + 1$; $[-1; 0]$ com $\epsilon = 10^{-4}$;

e) $f(x) = x^2 + 62{,}10x + 1$; $[-63; -61]$ com $\epsilon = 10^{-4}$.

6 – Determine a aproximação linear das seguintes funções por meio da expansão em série de Taylor (retenha, durante os cálculos, cinco casas decimais):

a) $f(x) = x^2 - 3$; $x_k = 2{,}0$;

b) $f(x) = x^2 + \ln x$; $x_k = 1{,}0$;

c) $f(x) = 4\cos x - e^x$; $x_k = 1{,}0$.

7 – Determine o zero de cada função linear, obtida a partir da linearização por meio da expansão em série de Taylor, do Exercício anterior (retenha, durante os cálculos, cinco casas decimais).

8 – Determine o zero das funções, por meio do método de Newton (retenha, durante os cálculos, cinco casas decimais):

a) $f(x) = x^2 - 3$; $[1; 2]$ com $\epsilon = 10^{-2}$;

b) $f(x) = x^2 + \ln x$; $[0{,}5; 1{,}0]$ com $\epsilon = 10^{-2}$;

c) $f(x) = 4\cos x - e^x$; $[0{,}0; 1{,}0]$ com $\epsilon = 10^{-2}$.;

d) $f(x) = x^2 + 62{,}10x + 1$; $[-1; 0]$ com $\epsilon = 10^{-4}$;

e) $f(x) = x^2 + 62{,}10x + 1$; $[-63; -61]$ com $\epsilon = 10^{-4}$.

9 – Determine o zero da função, por meio do método de Newton (retenha, durante os cálculos, quatro casas decimais):

$f(x) = x^3 - 5\,\mathrm{sen}\,x$; $[1; 2]$ com $\epsilon = 10^{-3}$.

Proceda com o método de Newton, adotando como $x_0 = 1$ e $x_0 = 2$. Para cada aproximação inicial escolhida, determine a trajetória (ou a sequência) de aproximações determinadas pelo processo iterativo.

10 – Determine o zero da função por meio do método de Newton com derivada constante (retenha, durante os cálculos, quatro casas decimais):

$f(x) = x^3 - 1/2$; $[0; 1]$ com $\epsilon = 10^{-2}$

11 – Determine o zero da função por meio do método das secantes (retenha, durante os cálculos, quatro casas decimais):

$f(x) = x^3 - 1/2$; $[0; 1]$; $x_0 = 0{,}0$; $x_1 = 1{,}0$; com $\epsilon = 10^{-2}$

12 – Determine o zero da função por meio do método de Newton, método de Newton com derivada constante e método das secantes (retenha, durante os cálculos, oito casas decimais):

$f(x) = \cos x - 3 + e^x$; $[0; 1]$; $x_0 = 0{,}0$; $x_1 = 0{,}8$; com $\epsilon = 10^{-7}$

Proceda com um quadro (ou tabela) comparativo de modo a ilustrar as aproximações e a quantidade de iterações obtidas em cada método.

13 – Determine o zero da função por meio do método *regula falsi* (retenha, durante os cálculos, quatro casas decimais):

$f(x) = x - \cos x$; $[0{,}7; 0{,}8]$; $x_0 = 0{,}0$; $x_1 = 1{,}0$; com $\epsilon = 10^{-3}$

---

**Exercícios Propostos (EP)**

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ - UFPI**
**CENTRO DE TECNOLOGIA - CT**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA - PPGEE**
**DISCIPLINA: TÉCNICAS DE OTIMIZAÇÃO (PARTE I)**
**PROFESSOR: RICARDO DE ANDRADE**

1 – Determine o zero das funções, por meio do Método da Bisseção, Método de Newton, Método das Secantes e Método *Regula Falsi*. Adicionalmente, determine o número de iterações em cada método:

a) $f(x) = 2x^3 + \ln x - 5$; $[1; 2]$ com $\epsilon = 10^{-7}$;

b) $f(x) = e^{-0,1x} + x^2 - 10$; $[2,5; 3,5]$ com $\epsilon = 10^{-5}$;

2 – Determine a "raiz negativa" (zero da função no $\mathbb{R}_-$) da equação $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 3 = 0$; com $\epsilon = 10^{-5}$, por meio de qualquer método (método da Bisseção, método de Newton, Método das Secantes e Método *Regula Falsi*), retendo, durante os cálculos, seis casas decimais. Para realizar o isolamento (localização) das raízes, proceda com o esboço do gráfico da função (Exercício de Implementação Computacional 1), de modo a determinar o intervalo que contenha uma raiz negativa da equação:

3 – Determine o zero da função por meio do método das secantes (retenha, durante os cálculos, três casas decimais):

$f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$; $[0; 3]$; $x_0 = 1,4$; $x_1 = 1,5$; com $\epsilon = 10^{-2}$

4 – O método das secantes é uma modificação do método de Newton, inclusive as condições de convergência são parecidas. Explique qual o principal problema que pode surgir durante a aplicação do método das secantes quando $f(x_k) \cong f(x_{k-1})$.

---

**Exercícios para Implementação Computacional (EI)**

1 – Implemente os procedimentos computacionais necessários para a obtenção do gráfico de uma função $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A execução da implementação computacional deve exibir o gráfico da função, bem como os eixos das abcissas e das ordenadas. Os dados de entrada são:

a) A expressão algébrica da função $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. De modo a facilitar a implementação computacional, pode-se considerar a expressão algébrica da função diretamente no código-fonte;

b) O intervalo do domínio no qual deve-se exibir o gráfico da função $x \in [a, b]$.

Considerando o gráfico obtido a partir da implementação computacional, procure isolar todas as raízes das seguintes funções:

*i)* $f(x) = x^2 - \operatorname{sen} x - 1$; $[-3; 3]$

*ii)* $f(x) = x^3 - 2x^2 - 20x + 30$; $[-8; 8]$

*iii)* $f(x) = x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 29x + 30$; $[-6; 6]$

*iv)* $f(x) = 4\cos x - e^x$, $[0; 2]$

2 – Implemente os procedimentos computacionais necessários para a determinação do zero de uma função $f(x)$ (raiz da equação $f(x) = 0$) por meio do Método da Bisseção. A execução da implementação computacional deve fornecer a sequência de aproximações (inclusive o zero da função), além da imagem da função para todas os termos da sequência. Os dados de entrada são:

a) Expressão analítica da função ($f(x)$). De modo a facilitar a implementação computacional, pode-se considerar a expressão algébrica da função diretamente no código-fonte;

b) Intervalo $[a; b]$, contendo uma e somente uma raiz real da equação $f(x)$;

c) Tolerância $\epsilon$;

d) Número máximo de iterações $M$.

Os dados de saída devem ser exibidos em formato tabular, compreendendo:

a) Sequência de intervalos obtidos durante a execução do método da Bisseção;

b) Sequência de aproximações sucessivas (termos iterados);

c) Imagem da função relativa às aproximações sucessivas;

d) Sequência de valores relativos ao cálculo da verificação do critério de parada ($E = |x_k - x_{k-1}|$).

Complementarmente, os dados de saída devem exibir:

a) Número de iterações;

b) Zero da função ($\bar{x}$);

c) Imagem da função no ponto ($\bar{x}$).

Determine o zero das seguintes funções:

*i)* $f(x) = x^2 - \operatorname{sen} x$; $[0; 1]$; $\epsilon = 10^{-5}$ e $M = 100$;

*ii)* $f(x) = 3x^3 - 76x^2 + 163x - 46$; $[20; 25]$; $\epsilon = 10^{-8}$ e $M = 100$;

*iii)* $f(x) = x^2 + \ln x$; $[0,1; 1,0]$; $\epsilon = 10^{-3}$ e $M = 100$;

*iv)* $f(x) = \cos x - x$; $[0,7; 1,0]$; $\epsilon = 10^{-8}$ e $M = 100$;

*v)* $f(x) = x^5 + x^3 + x^2 + x - 25$; $[0,96; 1,93]$ com $\epsilon = 10^{-5}$;

*vi)* $f(x) = 2x^2 + \operatorname{sen} x - 10$; $[1,57080; 3,14159]$ com $\epsilon = 10^{-3}$;

*vii)* $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$; $[0; 3]$; com $\epsilon = 10^{-6}$

*viii)* $f(x) = 10^x + x^3 + 2$; $[-2,1; 1,0]$ com $\epsilon = 10^{-8}$;

*ix)* $f(x) = e^x - \tan x$; $[0,7; 1,9126]$ com $\epsilon = 10^{-10}$;

*x)* $f(x) = 5 - xe^x$; $[1,0; 2,0]$ com $\epsilon = 10^{-5}$.

3 – Implemente os procedimentos computacionais necessários para a determinação do zero de uma função $f(x)$ (raiz da equação $f(x) = 0$) por meio do Método de Newton. A execução da implementação computacional deve fornecer a sequência de aproximações (inclusive o zero da função), além da imagem da função para todas os termos da sequência. Os dados de entrada são:

a) Expressão analítica da função ($f(x)$). De modo a facilitar a implementação computacional, pode-se considerar a expressão algébrica da função diretamente no código-fonte;

b) Expressão analítica da derivada primeira da função ($f'(x)$). De modo a facilitar a implementação computacional, pode-se considerar a expressão algébrica da função diretamente no código-fonte;

c) Expressão analítica da derivada segunda da função ($f''(x)$). De modo a facilitar a implementação computacional, pode-se considerar a expressão algébrica da função diretamente no código-fonte;

d) Intervalo $[a; b]$, contendo uma e somente uma raiz real da equação $f(x)$;

e) Tolerância $\epsilon$;

f) Número máximo de iterações $M$.

Os dados de saída devem ser exibidos em formato tabular, compreendendo:

a) Sequência de intervalos obtidos durante a execução do método de Newton;

b) Sequência de aproximações sucessivas (termos iterados);

c) Imagem da função relativa às aproximações sucessivas;

d) Sequência de valores relativos ao cálculo da verificação do critério de parada ($E = |x_k - x_{k-1}|$).

Complementarmente, os dados de saída devem exibir:

a) Número de iterações;

b) Zero da função $(\bar{x})$;

c) Imagem da função no ponto $(\bar{x})$.

Determine o zero das seguintes funções:

*i)* $f(x) = x^2 - \operatorname{sen} x$; $[0; 1]$; $\epsilon = 10^{-5}$ e $M = 100$;

*ii)* $f(x) = 3x^3 - 76x^2 + 163x - 46$; $[20; 25]$; $\epsilon = 10^{-8}$ e $M = 100$;

*iii)* $f(x) = x^2 + \ln x$; $[0{,}1; 1{,}0]$; $\epsilon = 10^{-3}$ e $M = 100$;

*iv)* $f(x) = \cos x - x$; $[0{,}7; 1{,}0]$; $\epsilon = 10^{-8}$ e $M = 100$;

*v)* $f(x) = x^5 + x^3 + x^2 + x - 25$; $[0{,}96; 1{,}93]$ com $\epsilon = 10^{-5}$;

*vi)* $f(x) = 2x^2 + \operatorname{sen} x - 10$; $[1{,}57080; 3{,}14159]$ com $\epsilon = 10^{-3}$;

*vii)* $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$; $[0; 3]$; com $\epsilon = 10^{-6}$

*viii)* $f(x) = 10^x + x^3 + 2$; $[-2{,}1; 1{,}0]$ com $\epsilon = 10^{-8}$;

*ix)* $f(x) = e^x - \tan x$; $[0{,}7; 1{,}9126]$ com $\epsilon = 10^{-10}$;

*x)* $f(x) = 5 - xe^x$; $[1{,}0; 2{,}0]$ com $\epsilon = 10^{-5}$.

4 – Implemente os procedimentos computacionais necessários para a determinação do zero de uma função $f(x)$ (raiz da equação $f(x) = 0$) por meio do Método de Newton com derivada constante. A execução da implementação computacional deve fornecer a sequência de aproximações (inclusive o zero da função), além da imagem da função para todas os termos da sequência. Os dados de entrada são:

a) Expressão analítica da função $(f(x))$. De modo a facilitar a implementação computacional, pode-se considerar a expressão algébrica da função diretamente no código-fonte;

b) Expressão analítica da derivada primeira da função $(f'(x))$. De modo a facilitar a implementação computacional, pode-se considerar a expressão algébrica da função diretamente no código-fonte;

c) Expressão analítica da derivada segunda da função ($f''(x)$). De modo a facilitar a implementação computacional, pode-se considerar a expressão algébrica da função diretamente no código-fonte;
d) Intervalo $[a; b]$, contendo uma e somente uma raiz real da equação $f(x)$;
e) Tolerância $\epsilon$;
f) Número máximo de iterações $M$.

Os dados de saída devem ser exibidos em formato tabular, compreendendo:

a) Sequência de intervalos obtidos durante a execução do método de Newton com derivada constante;
b) Sequência de aproximações sucessivas (termos iterados);
c) Imagem da função relativa às aproximações sucessivas;
d) Sequência de valores relativos ao cálculo da verificação do critério de parada ($E = |x_k - x_{k-1}|$).

Complementarmente, os dados de saída devem exibir:

a) Número de iterações;
b) Zero da função ($\bar{x}$);
c) Imagem da função no ponto ($\bar{x}$).

Determine o zero das seguintes funções:

*i)* $f(x) = x^2 - \operatorname{sen} x$; $[0; 1]$; $\epsilon = 10^{-5}$ e $M = 100$;
*ii)* $f(x) = 3x^3 - 76x^2 + 163x - 46$; $[20; 25]$; $\epsilon = 10^{-8}$ e $M = 100$;
*iii)* $f(x) = x^2 + \ln x$; $[0{,}1; 1{,}0]$; $\epsilon = 10^{-3}$ e $M = 100$;
*iv)* $f(x) = \cos x - x$; $[0{,}7; 1{,}0]$; $\epsilon = 10^{-8}$ e $M = 100$;
*v)* $f(x) = x^5 + x^3 + x^2 + x - 25$; $[0{,}96; 1{,}93]$ com $\epsilon = 10^{-5}$;
*vi)* $f(x) = 2x^2 + \operatorname{sen} x - 10$; $[1{,}57080; 3{,}14159]$ com $\epsilon = 10^{-3}$;
*vii)* $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$; $[0; 3]$; com $\epsilon = 10^{-6}$
*viii)* $f(x) = 10^x + x^3 + 2$; $[-2{,}1; 1{,}0]$ com $\epsilon = 10^{-8}$;
*ix)* $f(x) = e^x - \tan x$; $[0{,}7; 1{,}9126]$ com $\epsilon = 10^{-10}$;
*x)* $f(x) = 5 - xe^x$; $[1{,}0; 2{,}0]$ com $\epsilon = 10^{-5}$.

5 – Implemente os procedimentos computacionais necessários para a determinação do zero de uma função $f(x)$ (raiz da equação $f(x) = 0$) por meio do Método das Secantes. A execução da implementação computacional deve fornecer a sequência de aproximações (inclusive o zero da função), além da imagem da função para todas os termos da sequência. Os dados de entrada são:

a) Expressão analítica da função ($f(x)$). De modo a facilitar a implementação computacional, pode-se considerar a expressão algébrica da função diretamente no código-fonte;
b) Intervalo $[a; b]$, contendo uma e somente uma raiz real da equação $f(x)$;
c) Aproximações iniciais ($x_0$ e $x_1$);

d) Tolerância $\epsilon$;

e) Número máximo de iterações $M$.

Os dados de saída devem ser exibidos em formato tabular, compreendendo:

a) Sequência de intervalos obtidos durante a execução do método das Secantes;

b) Sequência de aproximações sucessivas (termos iterados);

c) Imagem da função relativa às aproximações sucessivas;

d) Sequência de valores relativos ao cálculo da verificação do critério de parada ($E = |x_k - x_{k-1}|$).

Complementarmente, os dados de saída devem exibir:

a) Número de iterações;

b) Zero da função ($\bar{x}$);

c) Imagem da função no ponto ($\bar{x}$).

Determine o zero das seguintes funções:

*i)* $f(x) = x^2 - \text{sen}\, x$; $[0; 1]$; $\epsilon = 10^{-5}$ e $M = 100$;

*ii)* $f(x) = 3x^3 - 76x^2 + 163x - 46$; $[20; 25]$; $\epsilon = 10^{-8}$ e $M = 100$;

*iii)* $f(x) = x^2 + \ln x$; $[0,1; 1,0]$; $\epsilon = 10^{-3}$ e $M = 100$;

*iv)* $f(x) = \cos x - x$; $[0,7; 1,0]$; $\epsilon = 10^{-8}$ e $M = 100$;

*v)* $f(x) = x^5 + x^3 + x^2 + x - 25$; $[0,96; 1,93]$ com $\epsilon = 10^{-5}$;

*vi)* $f(x) = 2x^2 + \text{sen}\, x - 10$; $[1,57080; 3,14159]$ com $\epsilon = 10^{-3}$;

*vii)* $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$; $[0; 3]$; com $\epsilon = 10^{-6}$

*viii)* $f(x) = 10^x + x^3 + 2$; $[-2,1; 1,0]$ com $\epsilon = 10^{-8}$;

*ix)* $f(x) = e^x - \tan x$; $[0,7; 1,9126]$ com $\epsilon = 10^{-10}$;

*x)* $f(x) = 5 - xe^x$; $[1,0; 2,0]$ com $\epsilon = 10^{-5}$;

6 – Implemente os procedimentos computacionais necessários para a determinação do zero de uma função $f(x)$ (raiz da equação $f(x) = 0$) por meio do Método *Regula Falsi*. A execução da implementação computacional deve fornecer a sequência de aproximações (inclusive o zero da função), além da imagem da função para todas os termos da sequência. Os dados de entrada são:

a) Expressão analítica da função ($f(x)$). De modo a facilitar a implementação computacional, pode-se considerar a expressão algébrica da função diretamente no código-fonte;

b) Intervalo $[a; b]$, contendo uma e somente uma raiz real da equação $f(x)$;

c) Tolerância $\epsilon$;

d) Número máximo de iterações $M$.

Os dados de saída devem ser exibidos em formato tabular, compreendendo:

a) Sequência de intervalos obtidos durante a execução do método *Regula Falsi*;

b) Sequência de aproximações sucessivas (termos iterados);

c) Imagem da função relativa às aproximações sucessivas;

d) Sequência de valores relativos ao cálculo da verificação do critério de parada ($E = |x_k - x_{k-1}|$).

Complementarmente, os dados de saída devem exibir:

a) Número de iterações;

b) Zero da função ($\bar{x}$);

c) Imagem da função no ponto ($\bar{x}$).

Determine o zero das seguintes funções:

*i)* $f(x) = x^2 - \operatorname{sen} x$; $[0; 1]$; $\epsilon = 10^{-5}$ e $M = 100$;

*ii)* $f(x) = 3x^3 - 76x^2 + 163x - 46$; $[20; 25]$; $\epsilon = 10^{-8}$ e $M = 100$;

*iii)* $f(x) = x^2 + \ln x$; $[0{,}1; 1{,}0]$; $\epsilon = 10^{-3}$ e $M = 100$;

*iv)* $f(x) = \cos x - x$; $[0{,}7; 1{,}0]$; $\epsilon = 10^{-8}$ e $M = 100$;

*v)* $f(x) = x^5 + x^3 + x^2 + x - 25$; $[0{,}96; 1{,}93]$ com $\epsilon = 10^{-5}$;

*vi)* $f(x) = 2x^2 + \operatorname{sen} x - 10$; $[1{,}57080; 3{,}14159]$ com $\epsilon = 10^{-3}$;

*vii)* $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$; $[0; 3]$; com $\epsilon = 10^{-6}$;

*viii)* $f(x) = 10^x + x^3 + 2$; $[-2{,}1; 1{,}0]$ com $\epsilon = 10^{-8}$;

*ix)* $f(x) = e^x - \tan x$; $[0{,}7; 1{,}9126]$ com $\epsilon = 10^{-10}$;

*x)* $f(x) = 5 - xe^x$; $[1{,}0; 2{,}0]$ com $\epsilon = 10^{-5}$;

7 –

**<u>OBSERVAÇÕES</u>:**

1 – A resolução das questões deve ser entregue em sequência, iniciando-se pelos Exercícios de Fixação (EF), seguindo-se pelos Exercícios Propostos (EP), finalizando-se com os Exercícios de Implementação Computacional (EI);

2 – A lista de exercícios pode ser resolvida em duplas. Se for o caso, entregar somente uma resolução com o nome dos dois integrantes. Os alunos devem assinar (ou rubricar) em <u>todas</u> as folhas de resolução.

3 – Em se tratando de Lista de Exercícios que tenha implementação computacional, deve-se anexar (em um único arquivo) o código-fonte do programa fonte referente à implementação computacional.