Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова
Физический факультет

Практическое задание по ОММ

Задача #1

Выполнил студент 335 группы
Будакян Я. С.
Преподаватели: Пикунов В. М.
Домбровская Ж. О.

1 Постановка задачи

Задача 2. Используя схему бегущего счета и итерационные методы, решить задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - u\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad -1 \le x < 0, \\ u(x,0) = 2 - \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg}(x+2), \\ u(0,t) = (2 - \frac{4}{\pi}\operatorname{arctg} 2)e^{-t} \end{cases} \tag{1}$$

2 Метод решения

Во первых, чтобы определить, нет ли у решения разрыва, необходимо составить уравнение характеристик и посмотреть, пересекаются ли они:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-u} = \frac{du}{0},$$

откуда получаем:

$$du = 0 \to u = const,$$

$$dt = -\frac{1}{u}dx \to t - t_0 = -\frac{1}{u}(x - x_0)$$

Подставив начальные условия, получаем уравнения для характеристик, выходящих из оси t:

$$x = (\frac{4}{\pi}\arctan 2 - 2)(t - t_0)e^{-t_0}, \tag{2}$$

и оси x:

$$x = x_0 - t(2 - \frac{4}{\pi}\arctan(x_0 + 2)) \tag{3}$$

Построим графики семейств характеристик:

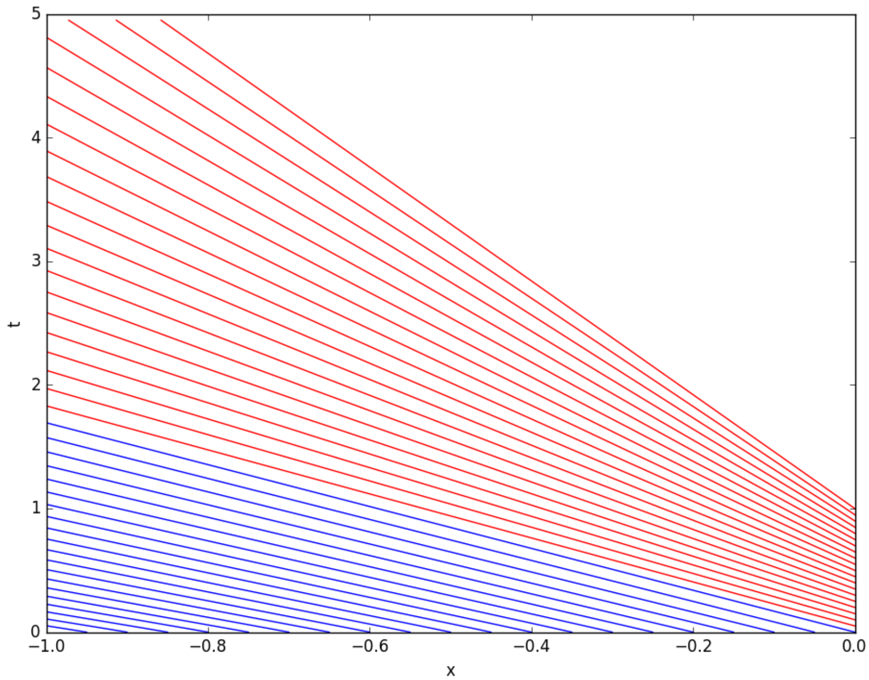


Рис. 1: Семейства характеристик, красные соответствуют (2), синие - (3)

Как видно из рисунка, в рассматриваемой области $-1 \leq x < 0$ характеристики не пересекаются. Следовательно, временной интервал расчета может быть выбран произвольно, например, $t \in [0, 1]$. Введем равномерные разностные сетки:

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih;\ i = \overline{0, N};\ hN = 1\}$$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau;\ j = \overline{0, S};\ \tau S = T\}$$

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j) \in \bar{D}\}$$

$$\bar{D} = \{-1 \leq x < 0;\ 0 \leq t \leq T\}$$

Перепишем основное уравнение (1) в дивергентном виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-u^2}{2}\right) = 0 \tag{4}$$

Введем сеточную функцию:

$$y_i^j \stackrel{\text{def}}{=} u(x_i, t_j)$$

Запишем разностную схему задачи (1), используя неявный четырехточечный шаблон с весовыми пространственными и временными производными с весом $\sigma = \frac{1}{2}$:

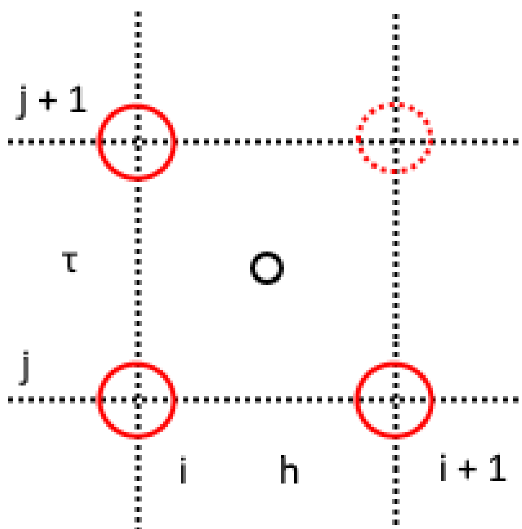


Рис. 2: Шаблон "прямоугольник" , i - x, j - t

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j + y_{i+1}^{j+1} - y_{i+1}^j}{2\tau} + \frac{F_{i+1}^j - F_i^j + F_{i+1}^{j+1} - F_i^{j+1}}{2h} = 0, \qquad (5)$$

где $F_i^j \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{(y_i^j)^2}{2}$. Запуская схему бегущего счета с известных граничных и начальных значений, можно последовательно определить всю сеточную функцию. Для вычисления новой точки y_{i+1}^{j+1} нужно решить возникающее алгебраическое уравнение, например, итерационным методом. Определим функцию:

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j + x - y_{i+1}^j}{2\tau} + \frac{F_{i+1}^j - F_i^j + F(x) - F_i^{j+1}}{2h}$$

Для корня $f(x) = 0$ справедливо

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

В качестве начального приближения можно взять $x_0 = y_i^{j+1}$.

3 Порядок аппроксимации

Определим порядок аппроксимации построенной разностной схемы. Для этого введем функцию погрешности

$$\psi_{h\tau} = \frac{y_i^{j+1} - y_i^j + y_{i+1}^{j+1} - y_{i+1}^j}{2\tau} + \frac{F_{i+1}^j - F_i^j + F_{i+1}^{j+1} - F_i^{j+1}}{2h} - \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} \quad (6)$$

и разложим ее в ряд Тейлора в центральной точке шаблона

$$(\bar{x}, \bar{t}) = (x_i + \frac{h}{2}, t_j + \frac{\tau}{2}) :$$

$$y_{i+1}^{j+1} = y(\bar{x} + \frac{h}{2}, \bar{t} + \frac{\tau}{2}) = y(\bar{x}, \bar{t}) + \frac{h}{2}\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} + \frac{\tau}{2}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} + \\ + \frac{1}{2}\left.\left\{\frac{h^2}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\tau^2}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{h\tau}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right\}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} + o(h^3 + \tau^3) \quad (7)$$

$$y_{i+1}^{j} = y(\bar{x} + \frac{h}{2}, \bar{t} - \frac{\tau}{2}) = y(\bar{x}, \bar{t}) + \frac{h}{2}\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} - \frac{\tau}{2}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} + \\ + \frac{1}{2}\left.\left\{\frac{h^2}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\tau^2}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{h\tau}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right\}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} + o(h^3 + \tau^3) \quad (8)$$

$$y_{i}^{j+1} = y(\bar{x} - \frac{h}{2}, \bar{t} + \frac{\tau}{2}) = y(\bar{x}, \bar{t}) - \frac{h}{2}\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} + \frac{\tau}{2}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} + \\ + \frac{1}{2}\left.\left\{\frac{h^2}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\tau^2}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{h\tau}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right\}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} + o(h^3 + \tau^3) \quad (9)$$

$$y_i^j = y(\bar{x} - \frac{h}{2}, \bar{t} - \frac{\tau}{2}) = y(\bar{x}, \bar{t}) - \frac{h}{2}\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} - \frac{\tau}{2}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left.\left\{\frac{h^2}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\tau^2}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{h\tau}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\right\}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} + o(h^3 + \tau^3) \quad (10)$$

$$F_{i+1}^{j+1} = F(y_{i+1}^{j+1}) = F(y(\bar{x} + \frac{h}{2}, \bar{t} + \frac{\tau}{2})) = F(y(\bar{x}, \bar{t})) + \frac{h}{2}\frac{\partial F}{\partial u}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} +$$

$$+\frac{\tau}{2}\frac{\partial F}{\partial u}\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} + \frac{1}{2}\left.\left\{\frac{h^2}{4}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial u}\right] + \frac{\tau^2}{4}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial F}{\partial u}\right]\right\}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left.\left\{\frac{h\tau}{4}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\frac{\partial F}{\partial u}\right]\right\}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} + o(h^3 + \tau^3) \quad (11)$$

$$F_{i+1}^{j} = F(y_{i+1}^{j}) = F(y(\bar{x} + \frac{h}{2}, \bar{t} - \frac{\tau}{2})) = F(y(\bar{x}, \bar{t})) + \frac{h}{2}\frac{\partial F}{\partial u}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} -$$

$$-\frac{\tau}{2}\frac{\partial F}{\partial u}\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} + \frac{1}{2}\left.\left\{\frac{h^2}{4}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial u}\right] + \frac{\tau^2}{4}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial F}{\partial u}\right]\right\}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left.\left\{-\frac{h\tau}{4}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\frac{\partial F}{\partial u}\right]\right\}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} + o(h^3 + \tau^3) \quad (12)$$

$$F_{i}^{j+1} = F(y_{i}^{j+1}) = F(y(\bar{x} - \frac{h}{2}, \bar{t} + \frac{\tau}{2})) = F(y(\bar{x}, \bar{t})) - \frac{h}{2}\frac{\partial F}{\partial u}\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} +$$

$$+\frac{\tau}{2}\frac{\partial F}{\partial u}\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} + \frac{1}{2}\left.\left\{\frac{h^2}{4}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial u}\right] + \frac{\tau^2}{4}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial F}{\partial u}\right]\right\}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left.\left\{-\frac{h\tau}{4}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\frac{\partial F}{\partial u}\right]\right\}\right|_{(\bar{x},\bar{t})} + o(h^3 + \tau^3) \quad (13)$$

$$
F_i^j = F(y_i^j) = F(y(\bar{x} - \frac{h}{2}, \bar{t} - \frac{\tau}{2})) = F(y(\bar{x}, \bar{t})) - \frac{h}{2}\frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{(\bar{x},\bar{t})} -
$$

$$
-\frac{\tau}{2}\frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{(\bar{x},\bar{t})} + \frac{1}{2}\left\{\frac{h^2}{4}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial u}\right] + \frac{\tau^2}{4}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\frac{\partial F}{\partial u}\right]\right\}\bigg|_{(\bar{x},\bar{t})} +
$$

$$
+\frac{1}{2}\left\{\frac{h\tau}{4}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\frac{\partial F}{\partial u}\right]\right\}\bigg|_{(\bar{x},\bar{t})} + o(h^3 + \tau^3) \quad (14)
$$

После подстановки и приведения подобных, получаем

$$
\psi_{h\tau} = o(h^2 + \tau^2)
$$

4 Устойчивость схемы

Для того, чтобы выбрать шаг сетки по времени и координатам, необходимо проверить устойчивость разностной схемы. Это можно сделать с помощью метода замороженных коэффициентов и спектрального критерия Неймана(в задачах переноса, критерий Неймана является не только необходимым, но и достаточным условием устойчивости). Для этого будем рассматривать линейное уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x}$, где $c = -u(x^*, t^*)$ - "замороженный коэффициент" в некоторой точке (x^*, t^*). Утверждается, что если схема безусловно устойчива, то она будет устойчива и при условиях вида $y_n^m = \lambda^m e^{i\alpha n}$. Подставим в разностную схему:

$$
\frac{1}{2\tau}\left\{y_n^{m+1} - y_n^m + y_{n+1}^{m+1} - y_{n+1}^m\right\} + \frac{c}{2h}\left\{y_{n+1}^m - y_n^m + y_{n+1}^{m+1} - y_n^{m+1}\right\} = 0 \quad (15)
$$

$$
\frac{1}{\tau}\left\{\lambda^{m+1}e^{i\alpha n} - \lambda^m e^{i\alpha n} + \lambda^{m+1}e^{i\alpha(n+1)} - \lambda^m e^{i\alpha(n+1)}\right\} +
$$

$$
+\frac{c}{h}\left\{\lambda^m e^{i\alpha(n+1)} - \lambda^m e^{i\alpha n} + \lambda^{m+1}e^{i\alpha(n+1)} - \lambda^{m+1}e^{i\alpha n}\right\} = 0 \quad (16)
$$

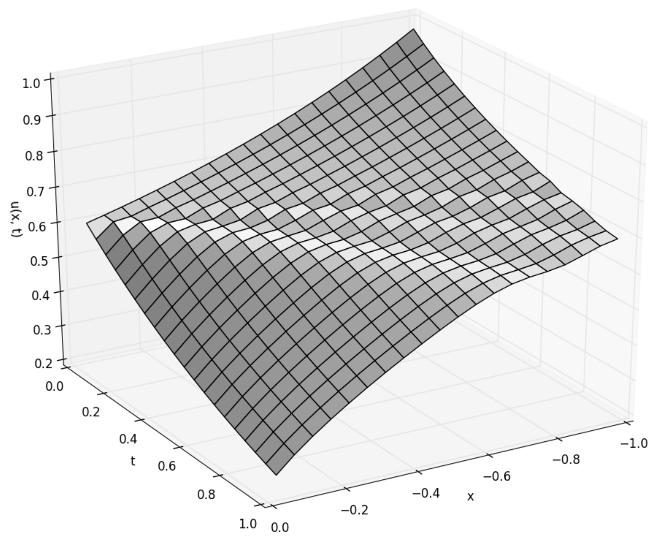
$$\frac{1}{\tau}\left\{\lambda - 1 + \lambda e^{i\alpha} - e^{i\alpha}\right\} + \frac{c}{h}\left\{e^{i\alpha} - 1 + \lambda e^{i\alpha} - \lambda\right\} = 0 \tag{17}$$

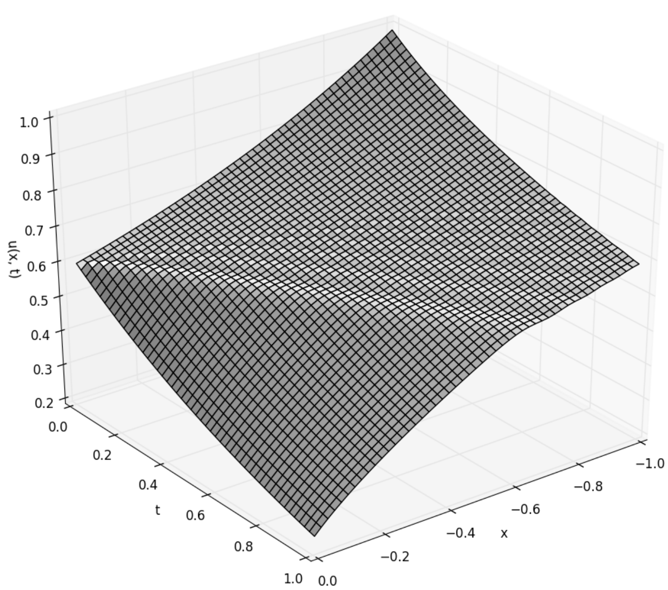
$$\lambda = \frac{h(1 + e^{i\alpha} + c\tau(1 - e^{i\alpha}))}{h(1 + e^{i\alpha} + c\tau(e^{i\alpha} - 1))} = \frac{ictg(\frac{\alpha}{2}) + r}{ictg(\frac{\alpha}{2}) - r}, \tag{18}$$

где $r = \frac{c\tau}{h}$. Получаем, что $|\lambda| = 1$, что означает выполнение спектрального критерия. Следовательно, выбор параметров h и τ может быть произволен.

5 Результаты

Численный расчет с помощью описанного алгоритма дает следующий результат:





6 Листинг программы

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Created on Sun May 15 20:13:52 2016

@author: Yan
"""

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from math import atan, exp, pi

#функции граничных условий
#на границе t = 0
def u_x0(x):
    return 2 - (4/pi)*atan(x+2)

#на границе x = 0
def u_0t(t):
    return (2 - (4/pi)*atan(2))*exp(-t)

#функция F из дивергентной формы уравнения
def f_y(y):
    return -y**2 / 2

#производная f_y
def df_y(y):
    return -y

#генератор разностного уравнения на данном шаге
def gen_F(y_i1j, y_ij1, y_ij, h, tau, f_y=f_y):
    #разностное уравнение
    def F(y_i1j1):
        return (y_ij1 - y_ij + y_i1j1 - y_i1j) * h + \
            (f_y(y_i1j) - f_y(y_ij) + f_y(y_i1j1) - f_y(y_ij1)) * tau
    return F

#производная F
def dF(y, h, tau, df_y=df_y):
    return h + df_y(y) * tau

#итерационный метод поиска корня функции
def newton_iteration(y0, F, dF, eps, h, tau):
    eps_cur = eps + 1
    while eps_cur > eps:
        y_iter = y0 - F(y0) / dF(y0, h, tau)
        eps_cur = np.abs(y_iter - y0)
        y0 = y_iter
    return y_iter

#шаги по времени и координате
N = 50
S = 50
T = 1

#поскольку рассматривается область x < 0
h = -1 / N
tau = T / S

#массив для искомого решения
#первый индекс - координата, второй - время
y = np.zeros((N,S))

#заполняем граничные точки
for i in range(N):
    y[i][0] = u_x0(h*i)

for j in range(S):
    y[0][j] = u_0t(tau*j)

#основной цикл расчета
for j in range(S-1):
    for i in range(N-1):
        F = gen_F(y[i+1][j], y[i][j+1], y[i][j], h, tau)
```

```
        y[i+1][j+1] = newton_iteration(y[i][j], F, dF, 0.0001, h, tau)

#отражаем массив, тк.. x < 0
y = y[::-1,...]

#визуализация
ax = Axes3D(plt.figure())
X = np.arange(-1, 0, -h)
Y = np.arange(0, T, tau)
X, Y = np.meshgrid(X, Y)
Z = np.transpose(y)

ax.plot_surface(X, Y, Z, rstride=1, cstride=1, color='1')
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('t')
ax.set_zlabel('u(x, t)')

plt.show()
```