

Практическое задание по ОММ

Задача #1

Выполнил студент 335 группы
Будалян Я. С.
Преподаватель Домбровская Ж. О.

1 Постановка задачи

Задача 2. Используя схему бегущего счета и итерационные методы, решить задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad -1 \leq x < 0, \\ u(x, 0) = 2 - \frac{4}{\pi} \arctg(x + 2), \\ u(0, t) = (2 - \frac{4}{\pi} \arctg 2)e^{-t} \end{array} \right. \quad (1)$$

2 Метод решения

Во первых, чтобы определить, нет ли у решения разрыва, необходимо составить уравнение характеристик и посмотреть, пересекаются ли они:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-u} = \frac{du}{0},$$

откуда получаем:

$$\begin{aligned} du = 0 &\rightarrow u = const, \\ dt = -\frac{1}{u}dx &\rightarrow t - t_0 = -\frac{1}{u}(x - x_0) \end{aligned}$$

Подставив начальные условия, получаем уравнения для характеристик, выходящих из оси t :

$$x = (\frac{4}{\pi} \arctan 2 - 2)(t - t_0)e^{-t_0}, \quad (2)$$

и оси x :

$$x = x_0 - t(2 - \frac{4}{\pi} \arctan(x_0 + 2)) \quad (3)$$

Построим графики семейств характеристик:

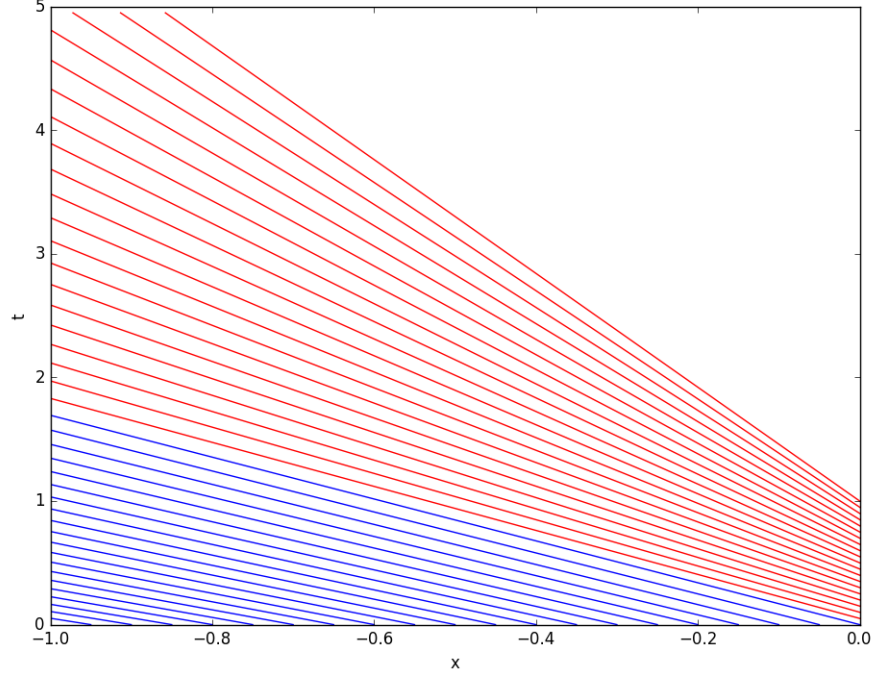


Рис. 1: Семейства характеристик, красные соответствуют (2), синие - (3)

Как видно из рисунка, в рассматриваемой области $-1 \leq x < 0$ характеристики не пересекаются. Следовательно, временной интервал расчета может быть выбран произвольно, например, $t \in [0, 1]$. Введем равномерные разностные сетки:

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih; i = \overline{0, N}; hN = 1\}$$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau; j = \overline{0, S}; \tau S = T\}$$

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j) \in \bar{D}\}$$

$$\bar{D} = \{-1 \leq x < 0; 0 \leq t \leq T\}$$

Перепишем основное уравнение (1) в дивергентном виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-u^2}{2} \right) = 0$$

Введем сеточную функцию:

$$y_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} u(x_i, t_j)$$

Запишем разностную схему задачи (1), используя неявный четырехточечный шаблон с весовыми пространственными и временными производными с весом $\sigma = \frac{1}{2}$:

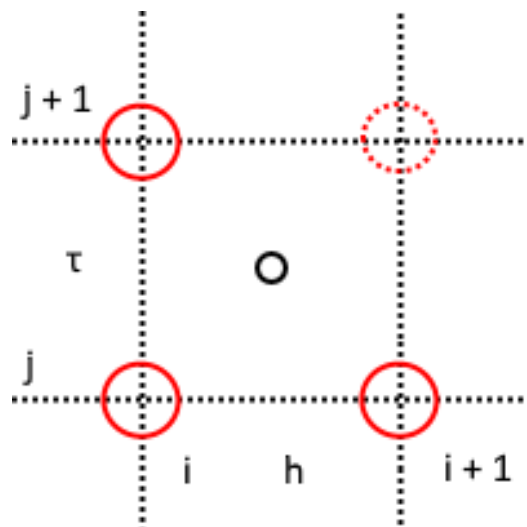


Рис. 2: Шаблон "прямоугольник", i - x , j - t

$$\frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow$$