Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова Физический факультет

Практическое задание по ОММ Задача #1

Выполнил студент 335 группы Будакян Я.С. Преподаватель Домбровская Ж.О.

1 Постановка задачи

Задача 2. Используя схему бегущего счета и итерационные методы, решить задачу:

$$\begin{cases}
\frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & -1 \le x < 0, \\
u(x,0) = 2 - \frac{4}{\pi} \arctan(x+2), \\
u(0,t) = (2 - \frac{4}{\pi} \arctan 2)e^{-t}
\end{cases} \tag{1}$$

2 Метод решения

Во первых, чтобы определить, нет ли у решения разрыва, необходимо составить уравнение характеристик и посмотреть, пересекаются ли они:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-u} = \frac{du}{0},$$

откуда получаем:

$$du = 0 \rightarrow u = const,$$

$$dt = -\frac{1}{u}dx \to t - t_0 = -\frac{1}{u}(x - x_0)$$

Подставив начальные условия, получаем уравнения для характеристик, выходящих из оси t:

$$x = (\frac{4}{\pi}\arctan 2 - 2)(t - t_0)e^{-t_0},$$
(2)

и оси х:

$$x = x_0 - t(2 - \frac{4}{\pi}\arctan(x_0 + 2))$$
 (3)

Построим графики семейств характеристик:

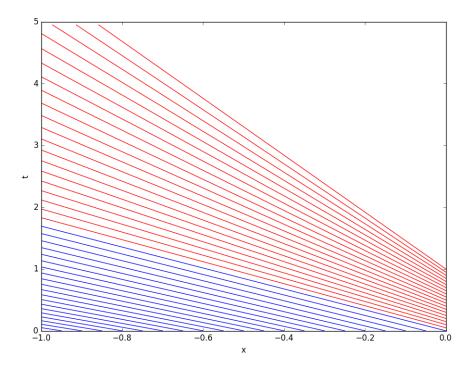


Рис. 1: Семейства характеристик, красные соответствуют (2), синие - (3)

Как видно из рисунка, в рассматриваемой области $-1 \le x < 0$ характеристики не пересекаются. Следовательно, временной интервал расчета может быть выбран произвольно, например, $t \in [0,1]$. Введем равномерные разностные сетки:

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih; \ i = \overline{0, N}; \ hN = 1\}$$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau; \ j = \overline{0, S}; \ \tau S = T\}$$

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j) \in \bar{D}\}$$

$$\bar{D} = \{-1 \le x < 0; \ 0 \le t \le T\}$$

Перепишем основное уравнение (1) в дивергентном виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-u^2}{2} \right) = 0 \tag{4}$$

Введем сеточную функцию:

$$y_i^j \stackrel{\text{def}}{=} u(x_i, t_j)$$

Запишем разностную схему задачи (1), используя неявный четырехточечный шаблон с весовыми пространственными и временными производными с весом $\sigma = \frac{1}{2}$:

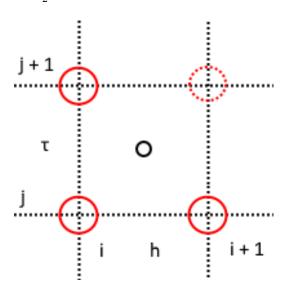


Рис. 2: Шаблон "прямоугольник", i - x, j - t

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j + y_{i+1}^{j+1} - y_{i+1}^j}{2\tau} + \frac{F_{i+1}^j - F_i^j + F_{i+1}^{j+1} - F_i^{j+1}}{2h} = 0,$$
 (5)

где $F_i^j \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\frac{(y_i^j)^2}{2}$. Запуская схему бегущего счета с известных граничных и начальных значений, можно последовательно определить всю сеточную функцию. Для вычисления новой точки y_{i+1}^{j+1} нужно решить возникающее алгебраическое уравнение, например, итерационным методом. Определим функцию:

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j + x - y_{i+1}^j}{2\tau} + \frac{F_{i+1}^j - F_i^j + F(x) - F_i^{j+1}}{2h}$$

Для корня f(x) = 0 справедливо

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

В качестве начального приближения можно взять $x_0 = y_i^{j+1}$. Определим порядок аппроксимации построенной разностной схемы. Для этого введем функцию погрешности

$$\psi_{h\tau} = \frac{y_i^{j+1} - y_i^j + y_{i+1}^{j+1} - y_{i+1}^j}{2\tau} + \frac{F_{i+1}^j - F_i^j + F_{i+1}^{j+1} - F_i^{j+1}}{2h} - \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$
(6)

и разложим ее в ряд Тейлора в центральной точке шаблона

$$(\bar{x},\bar{t}) = (x_i + \frac{h}{2}, t_j + \frac{\tau}{2}):$$

$$y_{i+1}^{j+1} = y(\bar{x} + \frac{h}{2}, \bar{t} + \frac{\tau}{2}) = y(\bar{x}, \bar{t}) + \frac{h}{2} \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \frac{\tau}{2} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \frac{1}{2} \left. \left\{ \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\tau^2}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{h\tau}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right\} \right|_{(\bar{x}, \bar{t})} + o(h^3 + \tau^3) \quad (7)$$

$$y_{i+1}^{j} = y(\bar{x} + \frac{h}{2}, \bar{t} - \frac{\tau}{2}) = y(\bar{x}, \bar{t}) + \frac{h}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \bigg|_{(\bar{x}, \bar{t})} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\tau^2}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{h\tau}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right\} \bigg|_{(\bar{x}, \bar{t})} + o(h^3 + \tau^3) \quad (8)$$

$$y_i^{j+1} = y(\bar{x} - \frac{h}{2}, \bar{t} + \frac{\tau}{2}) = y(\bar{x}, \bar{t}) - \frac{h}{2} \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \frac{\tau}{2} \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \left. + \frac{1}{2} \left. \left\{ \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\tau^2}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{h\tau}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right\} \right|_{(\bar{x}, \bar{t})} + o(h^3 + \tau^3) \quad (9)$$

$$\begin{split} y_i^j &= y(\bar{x} - \frac{h}{2}, \bar{t} - \frac{\tau}{2}) = y(\bar{x}, \bar{t}) - \frac{h}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \bigg|_{(\bar{x}, \bar{t})} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\tau^2}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{h\tau}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right\} \bigg|_{(\bar{x}, \bar{t})} + o(h^3 + \tau^3) \quad (10) \end{split}$$

$$\begin{split} F_{i+1}^{j+1} &= F(y_{i+1}^{j+1}) = F(y(\bar{x} + \frac{h}{2}, \bar{t} + \frac{\tau}{2})) = F(y(\bar{x}, \bar{t})) + \frac{h}{2} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \\ &\quad + \frac{\tau}{2} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \bigg|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{h^2}{4} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial u} \right] + \frac{\tau^2}{4} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial u} \right] \right\} \bigg|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{h\tau}{4} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial u} + \frac{\partial^2 u}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u} \right] \right\} \bigg|_{(\bar{x}, \bar{t})} + o(h^3 + \tau^3) \quad (11) \end{split}$$

$$\begin{split} F_{i+1}^j &= F(y_{i+1}^j) = F(y(\bar{x} + \frac{h}{2}, \bar{t} - \frac{\tau}{2})) = F(y(\bar{x}, \bar{t})) + \frac{h}{2} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial u} \bigg|_{(\bar{x}, \bar{t})} - \\ &\quad - \frac{\tau}{2} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \bigg|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{h^2}{4} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial t} \right] + \frac{\tau^2}{4} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial t} \right] \right\} \bigg|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{h\tau}{4} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial u} + \frac{\partial^2 u}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u} \right] + \frac{\tau^2}{4} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial t} \right] \right\} \bigg|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \\ &\quad + \frac{\tau}{2} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial u} \bigg|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{h^2}{4} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial u} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u} \right] \right\} \bigg|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{h\tau}{4} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u} \right] + \frac{\tau^2}{4} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial u} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial u} \right] \right\} \bigg|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{h\tau}{4} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u} \right] + \frac{\tau^2}{4} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial u} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial u} \right] \right\} \bigg|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{h\tau}{4} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u$$

$$\begin{split} F_{i}^{j} &= F(y_{i}^{j}) = F(y(\bar{x} - \frac{h}{2}, \bar{t} - \frac{\tau}{2})) = F(y(\bar{x}, \bar{t})) - \frac{h}{2} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_{(\bar{x}, \bar{t})} - \\ &- \frac{\tau}{2} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \bigg|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{h^{2}}{4} \left[\frac{\partial^{2} F}{\partial u^{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^{2} + \frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}} \frac{\partial F}{\partial u} \right] + \frac{\tau^{2}}{4} \left[\frac{\partial^{2} F}{\partial u^{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^{2} + \frac{\partial^{2} u}{\partial t^{2}} \frac{\partial F}{\partial u} \right] \right\} \bigg|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{h\tau}{4} \left[\frac{\partial^{2} F}{\partial u^{2}} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^{2} u}{\partial x \partial t} \frac{\partial F}{\partial u} \right] \right\} \bigg|_{(\bar{x}, \bar{t})} + o(h^{3} + \tau^{3}) \quad (14) \end{split}$$

После подстановки и приведения подобных, получаем

$$\psi_{h\tau} = o(h^2 + \tau^2)$$

Для того, чтобы выбрать шаг сетки по времени и координатам, необходимо проверить устойчивость разностной схемы. Это можно сделать с помощью метода замороженных коэффициентов и спектрального критерия Неймана(в задачах переноса, критерий Неймана является не только необходимым, но и достаточным условием устойчивости). Для этого будем рассматривать линейное уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x}$, где $c = -u(x^*, t^*)$ - "замороженный коэффициент"в некоторой точке (x^*, t^*) . Утверждается, что если схема безусловно устойчива, то она будет устойчива и при условиях вида $y_n^m = \lambda^m e^{i\alpha n}$. Подставим в разностную схему:

$$\frac{1}{2\tau} \left\{ y_n^{m+1} - y_n^m + y_{n+1}^{m+1} - y_{n+1}^m \right\} + \frac{c}{2h} \left\{ y_{n+1}^m - y_n^m + y_{n+1}^{m+1} - y_n^{m+1} \right\} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{1}{\tau} \left\{ \lambda^{m+1} e^{i\alpha n} - \lambda^{m} e^{i\alpha n} + \lambda^{m+1} e^{i\alpha(n+1)} - \lambda^{m} e^{i\alpha(n+1)} \right\} + \\
+ \frac{c}{h} \left\{ \lambda^{m} e^{i\alpha(n+1)} - \lambda^{m} e^{i\alpha n} + \lambda^{m+1} e^{i\alpha(n+1)} - \lambda^{m+1} e^{i\alpha n} \right\} = 0 \quad (16)$$

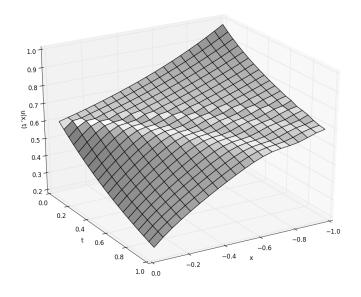
$$\frac{1}{\tau} \left\{ \lambda - 1 + \lambda e^{i\alpha} - e^{i\alpha} \right\} + \frac{c}{h} \left\{ e^{i\alpha} - 1 + \lambda e^{i\alpha} - \lambda \right\} = 0 \tag{17}$$

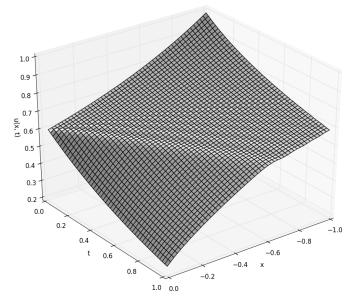
$$\lambda = \frac{h(1 + e^{i\alpha} + c\tau(1 - e^{i\alpha}))}{h(1 + e^{i\alpha} + c\tau(e^{i\alpha} - 1))} = \frac{ictg(\frac{\alpha}{2}) + r}{ictg(\frac{\alpha}{2}) - r},$$
(18)

где $r=\frac{c\tau}{h}$. Получаем, что $|\lambda|=1$, что означает выполнение спектрального критерия. Следовательно, выбор параметров h и τ может быть произволен.

3 Результаты

Численный расчет с помощью описанного алгоритма дает следующий результат:





4 Листинг программы

```
\# -*- coding: utf-8 -*-
      Created on Sun May 15 20:13:52 2016
      @author\colon Yan
     import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from math import atan, exp, pi
11
13
      #функции граничных условий
      #на границе t = 0 def u_x0(x):
14
16
           return 2 - (4/pi)*atan(x+2)
17
      \#на границе x=0
\frac{19}{20}
      \begin{array}{c} \mathbf{def} \ \mathbf{u}_{-}0\mathbf{t}(\mathbf{t}): \\ \mathbf{return} \ (2 - (4/pi)*atan(2))*exp(-t) \end{array}
      #функция F из дивиргентной формы уравнения \mathbf{def}\ \mathbf{f}_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}) :
\frac{24}{25}
           return -y**2 / 2
      #производная f_y
26
27
28
      def df_y(y):
return -y
     30
31
33
34
35
36
37
     #производная F def dF(y, h, tau, df_y=df_y): return h + df_y(y) * tau
38
39
41
     42
\frac{44}{45}
46
\frac{47}{48}
49
50
51
      #шаги по времени и координате
52
53
54
55
     N = 50

S = 50
     #поскольку рассматривается область x < 0 h = -1 / N tau = T / S
56
57
58
59
60
      #массив для искомого решения
61
     #первый индекс — координата, второй — время y = np.zeros((S,N))
62
63
      #заполняем граничные точки for i in range(N): y[i][0] = u_x0(h*i)
64
65
66
67
      for j in range (S):
69
70
           y[0][j] = u_0t(tau*j)
71
72
73
      #основной цикл расчета
      for j in range (S-1):
for i in range (N-1):
                 F = gen_F(y[i+1][j], y[i][j+1], y[i][j], h, tau)
```