

Практическое задание по ОММ

Задача #1

Выполнил студент 335 группы
Будалян Я. С.
Преподаватель Домбровская Ж. О.

1 Постановка задачи

Задача 2. Используя схему бегущего счета и итерационные методы, решить задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad -1 \leq x < 0, \\ u(x, 0) = 2 - \frac{4}{\pi} \arctg(x + 2), \\ u(0, t) = (2 - \frac{4}{\pi} \arctg 2)e^{-t} \end{array} \right. \quad (1)$$

2 Метод решения

Во первых, чтобы определить, нет ли у решения разрыва, необходимо составить уравнение характеристик и посмотреть, пересекаются ли они:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{-u} = \frac{du}{0},$$

откуда получаем:

$$\begin{aligned} du = 0 &\rightarrow u = const, \\ dt = -\frac{1}{u}dx &\rightarrow t - t_0 = -\frac{1}{u}(x - x_0) \end{aligned}$$

Подставив начальные условия, получаем уравнения для характеристик, выходящих из оси t :

$$x = (\frac{4}{\pi} \arctan 2 - 2)(t - t_0)e^{-t_0}, \quad (2)$$

и оси x :

$$x = x_0 - t(2 - \frac{4}{\pi} \arctan(x_0 + 2)) \quad (3)$$

Построим графики семейств характеристик:

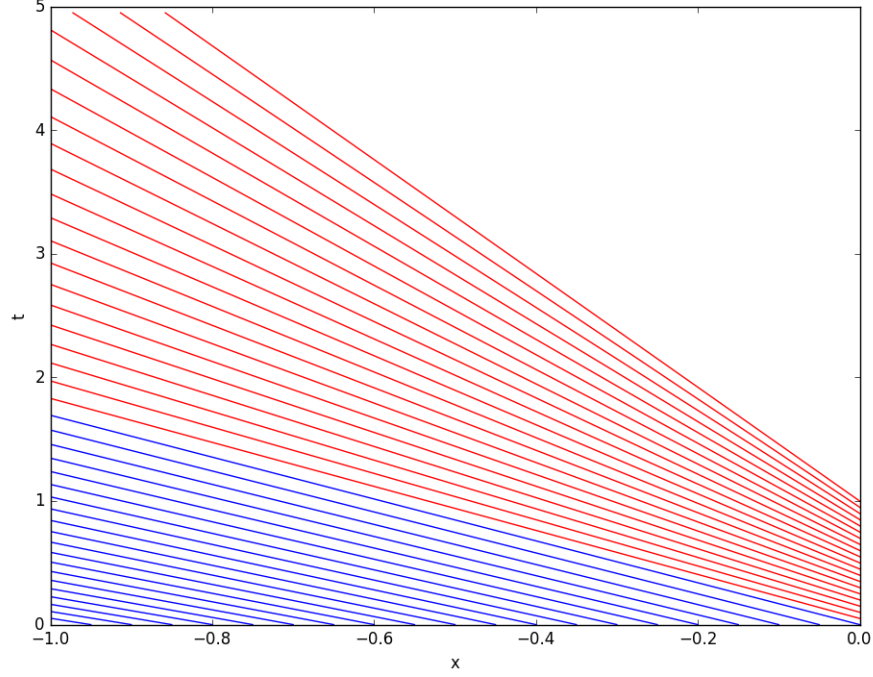


Рис. 1: Семейства характеристик, красные соответствуют (2), синие - (3)

Как видно из рисунка, в рассматриваемой области $-1 \leq x < 0$ характеристики не пересекаются. Следовательно, временной интервал расчета может быть выбран произвольно, например, $t \in [0, 1]$. Введем равномерные разностные сетки:

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih; i = \overline{0, N}; hN = 1\}$$

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau; j = \overline{0, S}; \tau S = T\}$$

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j) \in \bar{D}\}$$

$$\bar{D} = \{-1 \leq x < 0; 0 \leq t \leq T\}$$

Перепишем основное уравнение (1) в дивергентном виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-u^2}{2} \right) = 0 \quad (4)$$

Введем сеточную функцию:

$$y_i^j \stackrel{\text{def}}{=} u(x_i, t_j)$$

Запишем разностную схему задачи (1), используя неявный четырех-точечный шаблон с весовыми пространственными и временными производными с весом $\sigma = \frac{1}{2}$:

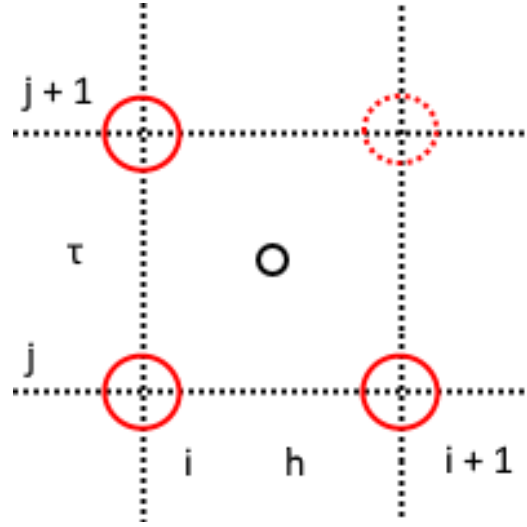


Рис. 2: Шаблон "прямоугольник", i - x , j - t

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j + y_{i+1}^{j+1} - y_{i+1}^j}{2\tau} + \frac{F_{i+1}^j - F_i^j + F_{i+1}^{j+1} - F_i^{j+1}}{2h} = 0, \quad (5)$$

где $F_i^j \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{(y_i^j)^2}{2}$. Запуская схему бегущего счета с известных граничных и начальных значений, можно последовательно определить всю сеточную функцию. Для вычисления новой точки y_{i+1}^{j+1} нужно решить возникающее алгебраическое уравнение, например, итерационным методом. Определим функцию:

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{y_i^{j+1} - y_i^j + x - y_{i+1}^j}{2\tau} + \frac{F_{i+1}^j - F_i^j + F(x) - F_i^{j+1}}{2h}$$

Для корня $f(x) = 0$ справедливо

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

В качестве начального приближения можно взять $x_0 = y_i^{j+1}$.

3 Порядок аппроксимации

Определим порядок аппроксимации построенной разностной схемы. Для этого введем функцию погрешности

$$\psi_{h\tau} = \frac{y_i^{j+1} - y_i^j + y_{i+1}^{j+1} - y_{i+1}^j}{2\tau} + \frac{F_{i+1}^j - F_i^j + F_{i+1}^{j+1} - F_i^{j+1}}{2h} - \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (6)$$

и разложим ее в ряд Тейлора в центральной точке шаблона

$$(\bar{x}, \bar{t}) = (x_i + \frac{h}{2}, t_j + \frac{\tau}{2}) :$$

$$\begin{aligned} y_{i+1}^{j+1} = y(\bar{x} + \frac{h}{2}, \bar{t} + \frac{\tau}{2}) &= y(\bar{x}, \bar{t}) + \frac{h}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\tau^2}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{h\tau}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right\} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} + o(h^3 + \tau^3) \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{i+1}^j = y(\bar{x} + \frac{h}{2}, \bar{t} - \frac{\tau}{2}) &= y(\bar{x}, \bar{t}) + \frac{h}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\tau^2}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{h\tau}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right\} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} + o(h^3 + \tau^3) \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_i^{j+1} = y(\bar{x} - \frac{h}{2}, \bar{t} + \frac{\tau}{2}) &= y(\bar{x}, \bar{t}) - \frac{h}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \\ &+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\tau^2}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{h\tau}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right\} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} + o(h^3 + \tau^3) \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_i^j &= y(\bar{x} - \frac{h}{2}, \bar{t} - \frac{\tau}{2}) = y(\bar{x}, \bar{t}) - \frac{h}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\tau^2}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{h\tau}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right\} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} + o(h^3 + \tau^3) \quad (10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{i+1}^{j+1} &= F(y_{i+1}^{j+1}) = F(y(\bar{x} + \frac{h}{2}, \bar{t} + \frac{\tau}{2})) = F(y(\bar{x}, \bar{t})) + \frac{h}{2} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \\
&\quad + \frac{\tau}{2} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{h^2}{4} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 u \partial F}{\partial x^2 \partial u} \right] + \frac{\tau^2}{4} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial^2 u \partial F}{\partial t^2 \partial u} \right] \right\} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{h\tau}{4} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \frac{\partial u \partial u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u \partial F}{\partial x \partial t \partial u} \right] \right\} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} + o(h^3 + \tau^3) \quad (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{i+1}^j &= F(y_{i+1}^j) = F(y(\bar{x} + \frac{h}{2}, \bar{t} - \frac{\tau}{2})) = F(y(\bar{x}, \bar{t})) + \frac{h}{2} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} - \\
&\quad - \frac{\tau}{2} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{h^2}{4} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 u \partial F}{\partial x^2 \partial u} \right] + \frac{\tau^2}{4} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial^2 u \partial F}{\partial t^2 \partial u} \right] \right\} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{h\tau}{4} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \frac{\partial u \partial u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u \partial F}{\partial x \partial t \partial u} \right] \right\} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} + o(h^3 + \tau^3) \quad (12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_i^{j+1} &= F(y_i^{j+1}) = F(y(\bar{x} - \frac{h}{2}, \bar{t} + \frac{\tau}{2})) = F(y(\bar{x}, \bar{t})) - \frac{h}{2} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \\
&\quad + \frac{\tau}{2} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{h^2}{4} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 u \partial F}{\partial x^2 \partial u} \right] + \frac{\tau^2}{4} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial^2 u \partial F}{\partial t^2 \partial u} \right] \right\} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{h\tau}{4} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \frac{\partial u \partial u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u \partial F}{\partial x \partial t \partial u} \right] \right\} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} + o(h^3 + \tau^3) \quad (13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_i^j = F(y_i^j) = F(y(\bar{x} - \frac{h}{2}, \bar{t} - \frac{\tau}{2})) = F(y(\bar{x}, \bar{t})) - \frac{h}{2} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} - \\
- \frac{\tau}{2} \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{h^2}{4} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial u} \right] + \frac{\tau^2}{4} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial F}{\partial u} \right] \right\} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} + \\
+ \frac{1}{2} \left\{ \frac{h\tau}{4} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \frac{\partial F}{\partial u} \right] \right\} \Big|_{(\bar{x}, \bar{t})} + o(h^3 + \tau^3) \quad (14)
\end{aligned}$$

После подстановки и приведения подобных, получаем

$$\psi_{h\tau} = o(h^2 + \tau^2)$$

4 Устойчивость схемы

Для того, чтобы выбрать шаг сетки по времени и координатам, необходимо проверить устойчивость разностной схемы. Это можно сделать с помощью метода замороженных коэффициентов и спектрального критерия Неймана (в задачах переноса, критерий Неймана является не только необходимым, но и достаточным условием устойчивости). Для этого будем рассматривать линейное уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x}$, где $c = -u(x^*, t^*)$ - "замороженный коэффициент" в некоторой точке (x^*, t^*) . Утверждается, что если схема безусловно устойчива, то она будет устойчива и при условиях вида $y_n^m = \lambda^m e^{i\alpha n}$. Подставим в разностную схему:

$$\frac{1}{2\tau} \{y_n^{m+1} - y_n^m + y_{n+1}^{m+1} - y_{n+1}^m\} + \frac{c}{2h} \{y_{n+1}^m - y_n^m + y_{n+1}^{m+1} - y_n^{m+1}\} = 0 \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\tau} \{ \lambda^{m+1} e^{i\alpha n} - \lambda^m e^{i\alpha n} + \lambda^{m+1} e^{i\alpha(n+1)} - \lambda^m e^{i\alpha(n+1)} \} + \\
+ \frac{c}{h} \{ \lambda^m e^{i\alpha(n+1)} - \lambda^m e^{i\alpha n} + \lambda^{m+1} e^{i\alpha(n+1)} - \lambda^{m+1} e^{i\alpha n} \} = 0 \quad (16)
\end{aligned}$$

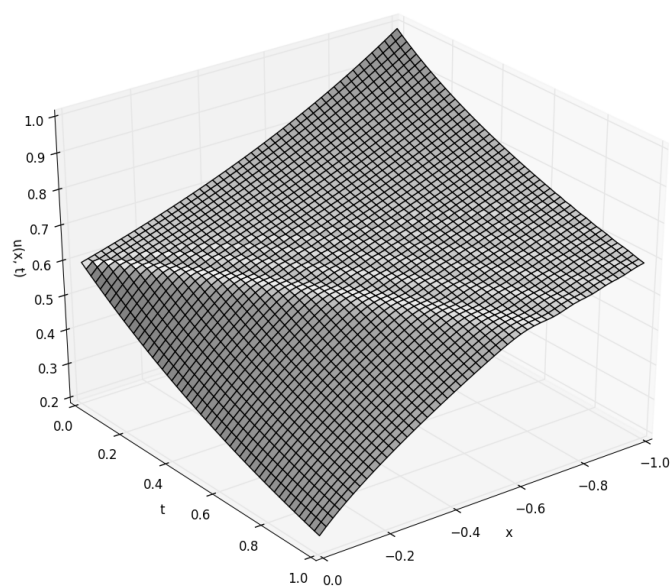
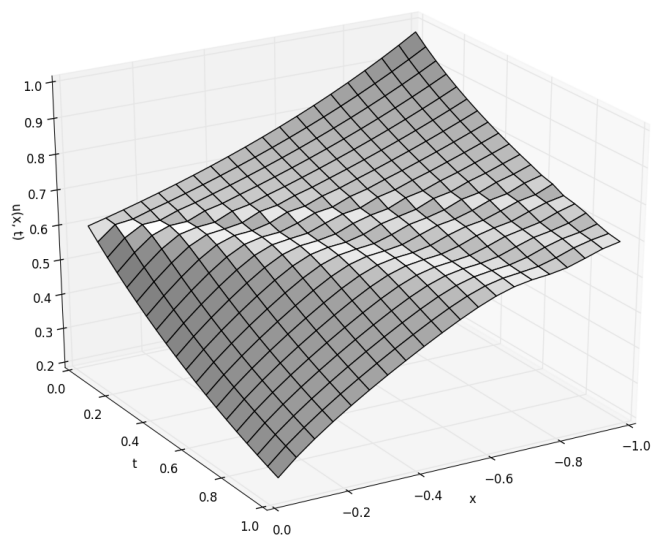
$$\frac{1}{\tau} \{ \lambda - 1 + \lambda e^{i\alpha} - e^{i\alpha} \} + \frac{c}{h} \{ e^{i\alpha} - 1 + \lambda e^{i\alpha} - \lambda \} = 0 \quad (17)$$

$$\lambda = \frac{h(1 + e^{i\alpha} + c\tau(1 - e^{i\alpha}))}{h(1 + e^{i\alpha} + c\tau(e^{i\alpha} - 1))} = \frac{ictg(\frac{\alpha}{2}) + r}{ictg(\frac{\alpha}{2}) - r}, \quad (18)$$

где $r = \frac{c\tau}{h}$. Получаем, что $|\lambda| = 1$, что означает выполнение спектрального критерия. Следовательно, выбор параметров h и τ может быть произволен.

5 Результаты

Численный расчет с помощью описанного алгоритма дает следующий результат:



6 Листинг программы

```
1  #-*- coding: utf-8 -*-
2  """
3  Created on Sun May 15 20:13:52 2016
4
5  @author: Yan
6  """
7
8  import numpy as np
9  import matplotlib.pyplot as plt
10 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
11 from math import atan, exp, pi
12
13 #функции граничных условий
14 #на границе  $t = 0$ 
15 def u_x0(x):
16     return 2 - (4/pi)*atan(x+2)
17
18 #на границе  $x = 0$ 
19 def u_0t(t):
20     return (2 - (4/pi)*atan(2))*exp(-t)
21
22 #функция  $F$  из дивергентной формы уравнения
23 def f_y(y):
24     return -y**2 / 2
25
26 #производная  $f_y$ 
27 def df_y(y):
28     return -y
29
30 #генератор разностного уравнения на данном шаге
31 def gen_F(y_ij, y_ij1, y_ij, h, tau, f_y=f_y):
32     #разностное уравнение
33     def F(y_ij1):
34         return (y_ij1 - y_ij + y_ij1 - y_ij) * h + \
35             (f_y(y_ij) - f_y(y_ij) + f_y(y_ij1) - f_y(y_ij1)) * tau
36     return F
37
38 #производная  $F$ 
39 def dF(y, h, tau, df_y=df_y):
40     return h + df_y(y) * tau
41
42 #итерационный метод поиска корня функции
43 def newton_iteration(y0, F, dF, eps, h, tau):
44     eps_cur = eps + 1
45     while eps_cur > eps:
46         y_iter = y0 - F(y0) / dF(y0, h, tau)
47         eps_cur = np.abs(y_iter - y0)
48         y0 = y_iter
49     return y_iter
50
51 #шаги по времени и координате
52 N = 50
53 S = 50
54 T = 1
55
56 #поскольку рассматривается область  $x < 0$ 
57 h = -1 / N
58 tau = T / S
59
60 #массив для искомого решения
61 #первый индекс - координата, второй - время
62 y = np.zeros((N,S))
63
64 #заполняем граничные точки
65 for i in range(N):
66     y[i][0] = u_x0(h*i)
67
68 for j in range(S):
69     y[0][j] = u_0t(tau*j)
70
71 #основной цикл расчета
72 for j in range(S-1):
73     for i in range(N-1):
74         F = gen_F(y[i+1][j], y[i][j+1], y[i][j], h, tau)
```

```

75         y[i+1][j+1] = newton_iteration(y[i][j], F, dF, 0.0001, h, tau)
76
77     #отражаем массив, тк..  $x < 0$ 
78     y = y[::-1,...]
79
80     #визуализация
81     ax = Axes3D(plt.figure())
82     X = np.arange(-1, 0, -h)
83     Y = np.arange(0, T, tau)
84     X, Y = np.meshgrid(X, Y)
85     Z = np.transpose(y)
86
87     ax.plot_surface(X, Y, Z, rstride=1, cstride=1, color='1')
88     ax.set_xlabel('x')
89     ax.set_ylabel('t')
90     ax.set_zlabel('u(x, t)')
91
92     plt.show()

```