

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ И ИНФОРМАТИКИ

Нейросетевой синтез текстур с трендами

Выполнил студент

435 группы:

Будакян Я. С.

Научный руководитель:

к.т.н., доц. Грачев Е. А.

Москва

2017

1 Введение

Задача состоит в синтезе изображений среды, которые будут содержать в себе тренд, т.е. изменение некоторой статистической характеристики. Такими трендами могут быть, например, изменение интенсивности появления частиц среды вдоль изображения, или изменение пористости среды.

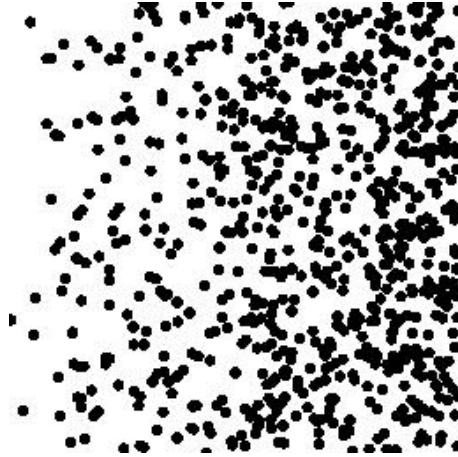


Рис. 1: Пример текстуры с трендом интенсивности частиц

2 Математическая постановка

С математической точки зрения, задача сводится к синтезу случайного изображения X' (и построению соответствующей процедуры синтеза), принадлежащему распределению, близкому к желаемому:

$$P_{X'} \approx P_X,$$

где P_X - распределение изображений с трендами, удовлетворяющих следующим ограничениям (для упрощения задачи):

- Это монохромные изображения 256 x 256 пикселей
- Изменяющимся свойством является интенсивность появления частиц λ
- Тренд является линейным и направлен вдоль оси x: $\lambda = \lambda_0 + kx$

Распределение P_X задается обучающей выборкой.

3 Существующие подходы к решению задачи

Есть несколько подходов к решению задач подобного рода:

- 'Классический' статистический подход
- Базовый нейросетевой подход
- Генеративные состязательные сети (GAN)

3.1 'Классический' статистический подход

- Вводится параметризованное семейство распределений вероятности $P_\theta(x)$
- Параметры θ находятся из обучающей выборки:

$$\mathcal{L}_\theta(D) = \prod_{x \in D} P_\theta(x)$$

$$\theta^* = \arg \max_{\theta} \mathcal{L}_\theta(D)$$

- Сгенерировать семпл из P_{θ^*}

Этот подход приводит к проблемам:

- Пространство параметров θ может быть огромной размерности
- Или же известной параметрической модели распределения может вообще не существовать

Простой пример - генерирование человеческих лиц, похожих на реальные: параметрической модели для такой задачи не существует.

3.2 Базовый нейросетевой подход

- Вводится параметризованное семейство распределений вероятности $P_\theta(x)$
 - Вводятся скрытые переменные V и функция(нейросеть) для получения x из V (фактически, классификация, развернутая в другую сторону)
- Определяются параметры распределения (т.е. обучение нейросети)
- Генерируются семплы из P_{θ^*}

Этот подход возможен, однако на практике трудноосуществим.

3.3 GAN - генеративные состязательные сети

Вернемся к изначальной задаче: найти процедуру генерирования X' так, чтобы $P_{X'} \approx P_X$. Переформулируем:

$$\rho(P_{X'}, P_X) \longrightarrow \min_{P_{X'}}$$

Введем некоторые скрытые переменные с фиксированным распределением, например

$$V \sim U^n[-1, 1],$$

и параметризованную процедуру генерации:

$$X' = g_\theta(V)$$

Переформулируем:

$$\rho(P_{X'}, P_X) \longrightarrow \min_{P_{X'}}$$

$$\rho(g_\theta(V), P_X) \longrightarrow \min_{g_\theta(V)}$$

$$\rho(g_\theta(V), P_X) \longrightarrow \min_\theta$$

Остается вопрос: что использовать в качестве метрики похожести двух распределений ρ , где одно из распределений задано обучающей выборкой. В качестве метрики статистической похожести можно использовать loss-функцию обученного классификатора:

$$\rho(P_{X'}, P_X) \longrightarrow \min \Leftrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \max,$$

где \mathcal{L} - функция потерь обученного классификатора. Соответственно, можно ввести две нейросети:

- $d_\zeta(x)$ - классификатор для измерения расстояния, **дискриминатор**
- $g_\theta(x)$ - сеть, трансформирующая V в X' , **генератор**

Введем loss-функцию дискриминатора(например, кросс-энтропия):

$$\begin{aligned} L(X, X') &= \frac{1}{2} \mathbb{E}_{x \sim X} l(d_\zeta(x), 1) + \frac{1}{2} \mathbb{E}_{x' \sim X'} l(d_\zeta(x'), 0) = \\ &= -\frac{1}{2} (\mathbb{E}_{x \sim X} \log d_\zeta(x) + \mathbb{E}_{x' \sim X'} \log(1 - d_\zeta(x'))) = \\ &= -\frac{1}{2} (\mathbb{E}_{x \sim X} \log d_\zeta(x) + \mathbb{E}_{v \sim V} \log(1 - d_\zeta(g_\theta(v)))) = \\ &= L(\zeta, \theta) \end{aligned}$$

Loss-функция обученного классификатора:

$$L^*(\theta) = \min_\zeta L(\zeta, \theta)$$

Соответственно,

$$\begin{aligned} \min_\zeta L(\zeta, \theta) &\longrightarrow \max_\theta \\ \theta^* &= \arg \max_\theta \left[\min_\zeta L(\zeta, \theta) \right] \end{aligned}$$

Определим оптимальный дискриминатор:

$$\begin{aligned} d_\theta^* &= d_{\zeta^*(\theta)} \\ \zeta^*(\theta) &= \arg \min_\zeta L(\zeta, \theta) \end{aligned}$$

4 Обучение GAN

Итак, задача обучения GAN свелась к нахождению

$$\theta^* = \arg \max_\theta \left[\min_\zeta L(\zeta, \theta) \right]$$

Решить ее можно, например, методом стохастического градиентного спуска:

$$\Delta\theta \sim \nabla L(\zeta^*(\theta), \theta)$$

Для малых изменений $\Delta\theta$:

$$\nabla L(\zeta^*(\theta), \theta) \approx \nabla L(\zeta^*(\theta), \theta + \Delta\theta)$$

В итоге, процесс обучения принимает следующий вид:

- Обучаем дискриминатор при 'замороженном' генераторе
- Обучаем генератор при 'замороженном' дискриминаторе
- Повторяем много раз

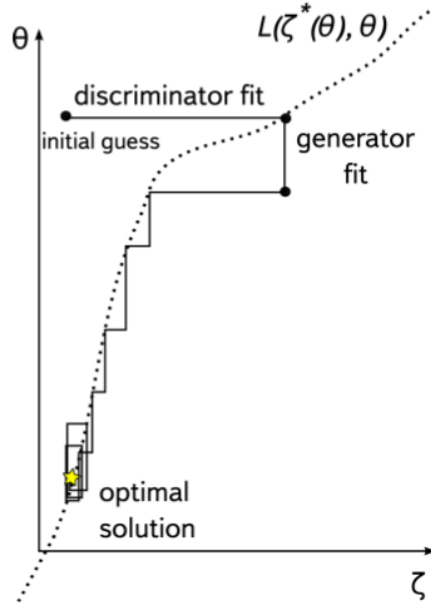


Рис. 2: Схематическое изображение процесса обучения GAN

5 pix2pix GAN

Для решения задачи было попробовано применить модификацию GAN-сети по названием "pix2pix GAN". Для нее функционал потерь выглядит следующим образом:

$$\mathcal{L}(G, D) = \mathcal{L}_{adv}(G, D) + \eta \mathbb{E}_{s_1, s_2, r \sim p_{data}(s_1, s_2, r)} (\| r - G(s_1, s_2) \|_1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{adv}(G, D) = & \mathbb{E}_{s_1, s_2, r \sim p_{data}(s_1, s_2, r)} \log D(s_1, s_2, r) + \\ & + \mathbb{E}_{s_1, s_2 \sim p_{data}(s_1, s_2)} \log(1 - D(s_1, s_2, G(s_1, s_2))) \end{aligned}$$

где G, D - генератор и дискриминатор, (s_1, s_2, r) - тройка изображений (интенсивность слева, справа и реальное изображение с трендом), $\mathbb{E}_{s_1, s_2, r \sim p_{data}(s_1, s_2, r)}$ - мат. ожидание логарифмического правдоподобия того, что тройка изображений (s_1, s_2, r) принадлежит вероятностному распределению реальных троек $p_{data}(s_1, s_2, r)$, а $p_{data}(s_1, s_2)$ соответствует распределению реальных изображений s_1, s_2 .

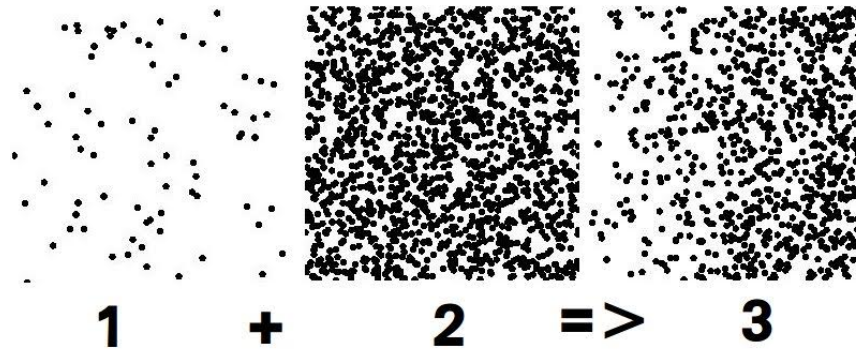


Рис. 3: Вход и желаемый выход нейросети

6 Критерий качества

После обучения генератора, необходимо проверить, что сгенерированные им изображения действительно имеют искомые характеристики. Для этого нужно ввести специальную метрику, которая будет учитывать наличие в изображении тренда интенсивности частиц. Было решено использовать среднюю плотность черных пикселей в некотором окне, и проходить этим окном по изображению (Рис. 4):

$$\xi_k = \frac{1}{Hw} \sum_{i=k}^{k+w} \sum_{j=0}^H \left| \frac{x(i, j) - 255}{255} \right|,$$
$$k = \overline{1, W - w + 1}$$

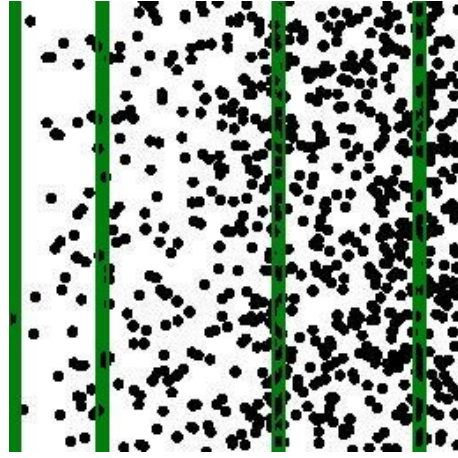


Рис. 4: Прохождение окном, W , H - размеры изображения, w - ширина окна

Построив график $\xi(k)$ можно увидеть, как меняется плотность пикселей и прослеживаются ли тренд. В качестве метрики можно взять среднеквадратичную ошибку:

$$\xi = \frac{1}{W - w} \sum_{k=1}^{W-w+1} (\xi_k - \xi_{0k})^2,$$

где ξ_{0k} - ξ_k , усредненное по примерам из обучающей выборки.

7 Результаты