

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М. В. ЛОМОНОСОВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Курсовая работа

**Статистический анализ спектра
акустического сигнала
электромеханического устройства**

Выполнил студент 212 группы
Будакян Я. С.

Научный руководитель
к.т.н. доц. Грачев Е. А.

Москва, 2015

Содержание

1	Введение	2
2	Постановка задачи	2
3	Алгоритм сегментации на основе метода динамического программирования	3
4	Алгоритм CUSUM	5
5	Результаты	7
5.1	Модельный сигнал	7
5.2	Сигнал с вентилятора	9
6	Выводы	11
	Литература	12

1 Введение

Различные акустические сигналы несут в себе огромное множество разнообразной информации. Задачи анализа акустических сигналов возникают не только при проведении большого количества разных физических экспериментов, но и в сугубо прикладных целях.

Одной из таких задач является задача о разладке(или, как обобщение, "переключения состояний" — сегментации) сигнала. Например, мы снимаем некоторый сигнал с какого-либо объекта. В какой-то момент с объектом что-то происходит, и свойства сигнала некоторым образом меняются. Задача состоит в том, чтобы автоматически отслеживать такие моменты, и принимать в зависимости от этого какие-либо решения. Практические приложения этой задачи довольно разнообразны. Они возникают в различных областях:

- Обнаружение неисправностей и диагностика
- Техническое обслуживание промышленности
- Безопасность сложных систем(самолетов, лодок, ракет, АЭС, и т.д.)
- Контроль качества
- Прогнозирование природных катастроф(землетрясения, цунами, и т.д.)
- Мониторинг в биомедицине

В качестве математической модели таких акустических сигналов будет использоваться авторегрессионный процесс. Такой подход часто применяется при моделировании различных случайных сигналов, от человеческой речи и шума от устройств [1, 2] до биологических сигналов [3].

2 Постановка задачи

Дан авторегрессионный процесс

$$x_t = \phi_0(h_t) + \sum_{i=1}^n \phi_i(h_t)x_{t-i} + B(h_t)\xi_t$$

где ξ_t - стандартный белый шум.

Параметры процесса могут скачкообразно изменяться, принимая в каждый момент времени $t \geq 0$ один из m известных наборов значений

$\phi_0(h_t), \dots, \phi_n(h_t), B(h_t), ; h_t \in \{1, \dots, m\}$. Также задана матрица Q вероятностей переходов между наборами параметров (классами):

$$P(h_t|h_{t-1}) = q(h_{t-1}, h_t)$$

Под задачей сегментации понимается задача отношения каждого отсчета процесса x_t некоторому классу h_t , т.е. восстановление ненаблюдаемой последовательности "переключений" состояний $h_i \rightarrow h_j$.

Одним из алгоритмов, решающим задачу сегментации является алгоритм на основе метода динамического программирования [4].

3 Алгоритм сегментации на основе метода динамического программирования

При данном подходе оптимальной считается сегментация H_1^N (набор чисел h_t , соответствующих отсчетам x_t), доставляющая минимум критерию

$$J(H_0^N) = d_0(h_0) + \sum_{t=1}^N \beta_t(h_{t-1}, h_t) \quad (1)$$

$$\beta_t(h_{t-1}, h_t) = \frac{1}{2B(h_t)} [x_t - \phi_0(h_t) - \sum_{i=1}^n \phi_i(h_t) x_{t-i}]^2 - \ln q(h_{t-1}, h_t)$$

В критерии (1) величина $\beta_t(h_{t-1}, h_t)$ имеет смысл несогласованности формы кривой в точке t при данной предыстории X_{t-n}^{t-1} с предполагаемыми значениями параметров авторегрессии с учетом априорной предпочтительности данных значений, учитываемой членом $\ln q(h_{t-1}, h_t)$; $d_0(h_0)$ - член, выражающий априорную нежелательность отнесения нулевого отсчета классу $h_0 = 1, \dots, m$. Определим последовательность векторов

$$d_t(h_t) = \min_{H_0^{t-1}} [d_0(h_0) + \sum_{s=1}^{t-1} \beta_s(h_{s-1}, h_s) + \beta_t(h_{t-1}, h_t)], \quad h_t = 1, \dots, m; \quad t = 1, \dots, N$$

Компоненты этого вектора показывают, какое минимальное значение критерия (1) можно получить за счет различной классификации отсчетов до $(t-1)$ -го включительно, если принять класс последнего отсчета равным h_t . Поскольку минимальная компонента вектора $d_N(h_N)$ совпадает с минимальным значением критерия (1), то

$$\hat{h}_N = \arg \min [d_N(h_N)] \quad (2)$$

является последним элементом оптимальной сегментации \hat{H}_0^N . Векторы $d_t(h_t)$ вычисляются рекуррентно по правилу

$$d_t(h_t) = \min[d_{t-1}(h_{t-1}) + \beta_t(h_{t-1}, h_t)],$$

начиная с начальных значений $d_0(h_0) = -\ln p(h_0)$. При этом в процессе вычисления векторов $d_t(h_t)$ величины

$$k_t(h_t) = \arg \min[d_{t-1}(h_{t-1}) + \beta_t(h_{t-1}, h_t)]$$

записываются в матрицу $K_1^N[m \times N]$. Эта матрица позволяет найти оптимальную последовательность \hat{H}_0^{N-1} по рекуррентной формуле

$$\hat{h}_{s-1} = k_s(\hat{h}_s), \quad s = N, N-1, \dots, 1 \quad (3)$$

с начальным условием (2).

Описанный алгоритм позволяет найти оптимальную сегментацию, но он работает в "оффлайн" режиме, т.е. анализ проводится уже после того, как весь сигнал получен. Однако, этот подход можно обобщить и на случай "онлайн" сегментации, т.е. анализа сразу во время считывания сигнала.

Возьмем от построенной матрицы K_1^N часть K_1^t для некоторого момента времени t . Она позволяет найти оптимальную сегментацию \tilde{H}_0^{t-1} , при начальном условии

$$\tilde{h}_t^i = i, \quad i = 1, \dots, m. \quad (4)$$

Можно ожидать, что при достаточно больших t найдется момент времени $u_t < t$ такой, что на интервале $0 \leq s \leq u_t$ выполнится условие

$$\tilde{h}_s^1 = \dots = \tilde{h}_s^m. \quad (5)$$

Выполнение этого условия означает, что совпадут все построенные сегментации $\tilde{H}_0^{u_t}$ при различных выборах \tilde{h}_t . В таком случае, этот кусок сегментации будет содержаться в оптимальной сегментации всего сигнала как составная часть и может быть построен, не дожидаясь последнего отсчета.

Назовем u_t правой границей принятия решения — это номер последнего отсчета сигнала, для которого уже принято решение о его принадлежности некоторому классу. Для нулевого отсчета полагается $u_0 = -1$. Также, назовем особыми моментами времени t^* моменты, в которые меняется граница принятия решения, первый особый момент $t^* = 0$.

Таким образом, работа алгоритма будет заключаться в проверке, является ли текущий момент времени особым, на каждом шаге вычислений, и, в случае особого момента, построении куска оптимальной сегментации.

Пусть t^* последний зафиксированный особый момент времени, с соответствующей границей u_{t^*} . Начиная с $t = t^* + 1$ на каждом шаге вычисляется новый столбец $k_t(i)$, $i = 1, \dots, m$ по правилу

$$k_t(i) = \arg \min [d_{t-1}(j) + \beta_t(j, i)],$$

добавляемый к матрице $K_{u_t+2}^{t-1}$. Для обнаружения особого момента рекуррентно пересчитывается вектор $g_t(i)$, $i = 1, \dots, m$ по правилу

$$g_t(i) = g_{t-1}[k_t(i)]$$

с начальным условием

$$g_{t^*}(i) = \tilde{h}_{u_{t^*}+1}^i$$

Компоненты этого вектора показывают, к какому классу будет отнесен отсчет с номером $u_t + 1$, если зафиксировать принадлежность отсчета $\tilde{h}_t = i$.

Пока не выполняется равенство

$$g_t(1) = \dots = g_t(m) \tag{6}$$

особый момент еще не наступил, положение границы принятия решения не изменяется и происходит накопление матрицы K . Момент выполнения условия (6) регистрируется как очередной особый момент t^* . Для того, чтобы найти новую границу принятия решения u_{t^*} нужно, приняв в качестве начального условия вектор (4), вычислять в обратном порядке $s = t - 1, t - 2, \dots$ векторы \tilde{h}_s^i , $i = 1, \dots, m$, пока на некотором шаге s^* выполнится условие (5). Тогда $u_{t^*} = s^*$, и можно строить отрезок оптимальной сегментации между предыдущим и новыми положениями границы принятия решений по рекуррентному правилу (3). Фрагмент матрицы $K_{u_{t^*}-1+2}^{u_{t^*}+1}$ более не нужен и может быть сброшен.

4 Алгоритм CUSUM

Другой алгоритм для решения той же задачи — это алгоритм на основе статистики кумулятивных сумм.

Рассмотрим последовательность распределений случайных величин x_t

при условии фиксированной предыстории x_{t-1}, \dots, x_1 . Поскольку распределение до и после момента переключения отличается только коэффициентами авторегрессии $\phi_k(h_t)$, то условное распределение величин x_t $p(x_t|x_{t-1}, \dots, x_1)$ до и после момента переключения отличается математическим ожиданием; отличием дисперсии шума можно пренебречь. Будем также считать, что распределение x_t является нормальным. Зафиксируем некоторый переход $h_i \rightarrow h_j$ и вычислим плотности распределения $p_i(x_t|x_{t-1}, \dots, x_1)$ и $p_j(x_t|x_{t-1}, \dots, x_1)$ в каждой точке исходного ряда x_t . Найдем логарифм отношения правдоподобия

$$L_t = \ln \frac{p_j(x_t|x_{t-1}, \dots, x_1)}{p_i(x_t|x_{t-1}, \dots, x_1)}$$

Если $L_t > 1$, то вероятность, что отсчет x_t был получен из распределения, соответствующего классу h_j , выше, чем обратного.

Найдем L_t в явном виде:

$$p_i(x_t|x_{t-1}, \dots, x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(h_i)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2(h_i)} (x_t - \phi_0(h_i) - \sum_{k=1}^n \phi_k(h_i)x_{t-k})^2 \right\},$$

$$p_j(x_t|x_{t-1}, \dots, x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(h_j)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2(h_j)} (x_t - \phi_0(h_j) - \sum_{k=1}^n \phi_k(h_j)x_{t-k})^2 \right\}$$

Поскольку мы считаем, что дисперсия при переключении не меняется, т.е. $\sigma^2(h_i) = \sigma^2(h_j)$, то:

$$\begin{aligned} L_t &= \ln \frac{p_j(x_t|x_{t-1}, \dots, x_1)}{p_i(x_t|x_{t-1}, \dots, x_1)} = \\ &= \ln \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(h_j)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2(h_j)} (x_t - \phi_0(h_j) - \sum_{k=1}^n \phi_k(h_j)x_{t-k})^2 \right\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(h_i)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2(h_i)} (x_t - \phi_0(h_i) - \sum_{k=1}^n \phi_k(h_i)x_{t-k})^2 \right\}} = \\ &= \ln \frac{\exp \left\{ -(x_t - \phi_0(h_j) - \sum_{k=1}^n \phi_k(h_j)x_{t-k})^2 \right\}}{\exp \left\{ -(x_t - \phi_0(h_i) - \sum_{k=1}^n \phi_k(h_i)x_{t-k})^2 \right\}} = \\ &= (x_t - \phi_0(h_i) - \sum_{k=1}^n \phi_k(h_i)x_{t-k})^2 - (x_t - \phi_0(h_j) - \sum_{k=1}^n \phi_k(h_j)x_{t-k})^2 \end{aligned}$$

Кумулятивные суммы рассчитываются с помощью рекуррентных соотношений:

$$\begin{cases} z_1 = 0, \\ z_t = \max(0, z_{t-1} + L_t), \quad t = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Теперь необходимо задать некоторый порог T_{ij} . Если на некотором шаге вычислений t значение z_t превысило T_{ij} , то считается, что произошло переключение $h_i \rightarrow h_j$.

Таким образом, работа алгоритма представляет собой вычисление $m(m-1)$ кумулятивных сумм до обнаружения первого момента переключения и $m-1$ на каждом последующем шаге (так как переключения происходят последовательно).

5 Результаты

Оба описанных выше алгоритма были реализованы в программном коде на языке Python. Было проведено экспериментальное исследование алгоритмов на модельном сигнале и на реальных данных с электромеханического устройства - вентилятора.

5.1 Модельный сигнал

Ниже приведены графики (1, 2, 3, 4), на которых изображены сегментации модельного сигнала, построенные обеими программами, наложенные на оригинальную сегментацию.

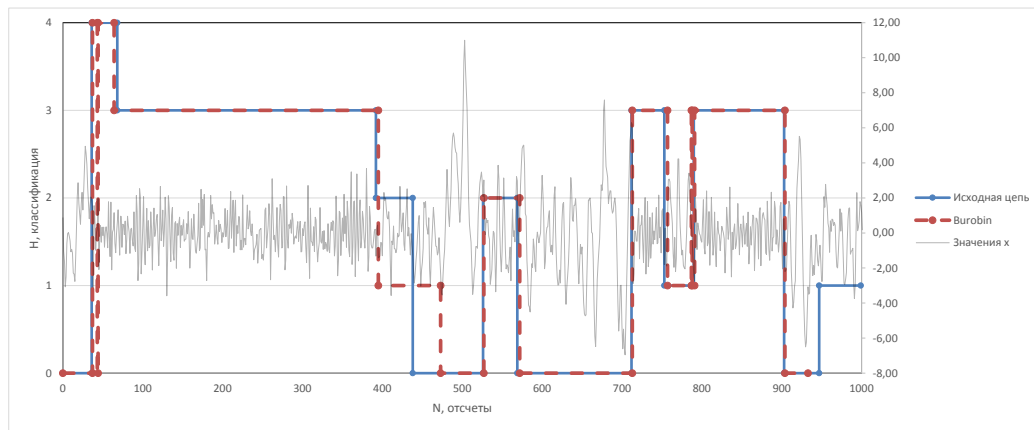


Рис. 1: Сигнал 1, $t = 1000$, алгоритм[4]

Было проведено исследование качества обоих алгоритмов. В качестве меры точности алгоритма было взято среднее время совпадения постро-

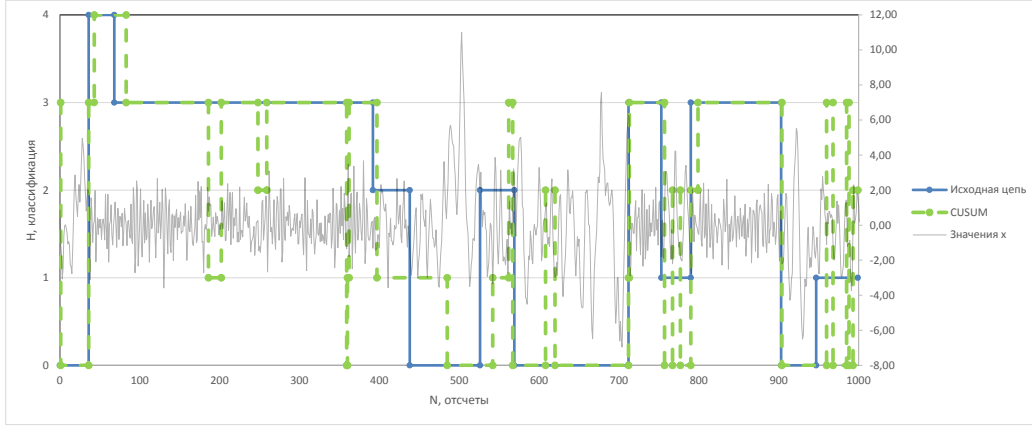


Рис. 2: Сигнал 1, $t = 1000$, алгоритм CUSUM

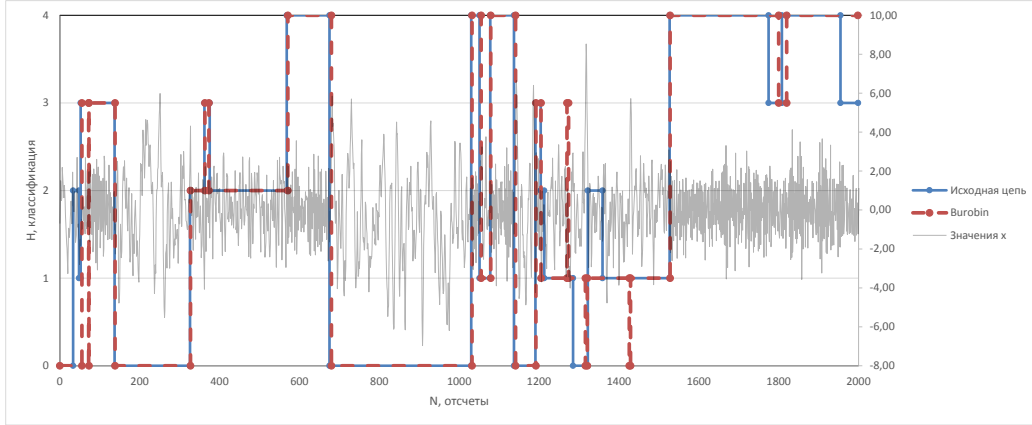


Рис. 3: Сигнал 2, $t = 2000$, алгоритм[4]

енной сегментации с оригинальной, усредненное по всем запускам:

$$Q_A = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \delta_i(h_t^A, h_t^0) \right],$$

где

$$\delta_i(h_t^A, h_t^0) = \begin{cases} 0, & \text{если } h_t^A \neq h_t^0 \\ 1, & \text{если } h_t^A = h_t^0 \end{cases}$$

в i -том запуске, а h_t^A и h_t^0 есть классификации отсчета x_t по версии алгоритма A и истинное значение соответственно.

Для экспериментов использовался генератор модельного сигнала с $n = 2, m = 5$. Параметры модельного сигнала указаны в таблице 1.

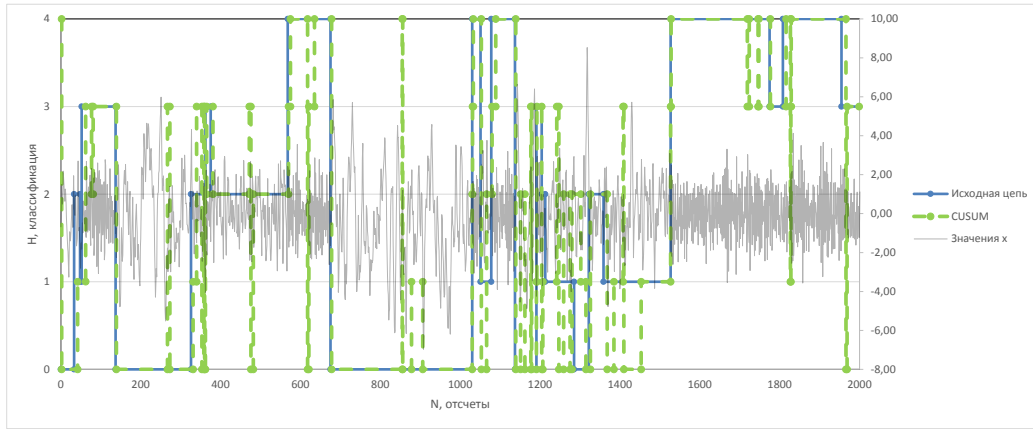


Рис. 4: Сигнал 2, $t = 2000$, алгоритм CUSUM

Таблица 1: Параметры модельного сигнала

h	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	B
0	0	1.36	-0.49	1
1	0	1.02	-0.40	1
2	0	0.82	-0.49	1
3	0	0	-0.49	1
4	0	-0.82	-0.49	1
$q_{ii} = 0.99$				
$q_{ij} = 0.0025, i \neq j$				

Усреднение проводилось по $N = 20000$ запусков. Были получены следующие результаты:

$$t = 1000, Q_B = 0.86795, Q_{CUSUM} = 0.76240$$

$$t = 2000, Q_B = 0.86408, Q_{CUSUM} = 0.75599$$

$$t = 3000, Q_B = 0.86235, Q_{CUSUM} = 0.75323$$

5.2 Сигнал с вентилятора

Были произведены записи шума вентилятора в нормальном режиме работы и с разладкой - в работающий вентилятор засовывалась бумажка. Формат записи - 20 секунд нормального режима, 20 секунд - разладка, последние 20 секунд - опять нормальный режим. Частота дискретизации записи - 44100 Гц. Всего было сделано 3 записи по 1 минуте. После

было составлено 3 обрезанных до 3-х секунд сигналов для анализа (по одной вырезанной секунде из каждого 20-секундного отрезка). Общее количество отсчетов в каждом сигнале составило $3с \cdot 44100\text{Гц} = 132300$.

Один из сигналов был использован для подбора параметров для алгоритмов. С помощью МНК были определены коэффициенты авторегрессии с глубиной модели $P = 10$. На рисунке 5 показаны зависимости коэффициентов авторегрессии для этого сигнала а) до разладки, б) во время разладки от количества отсчетов, анализируемых МНК. Оценки

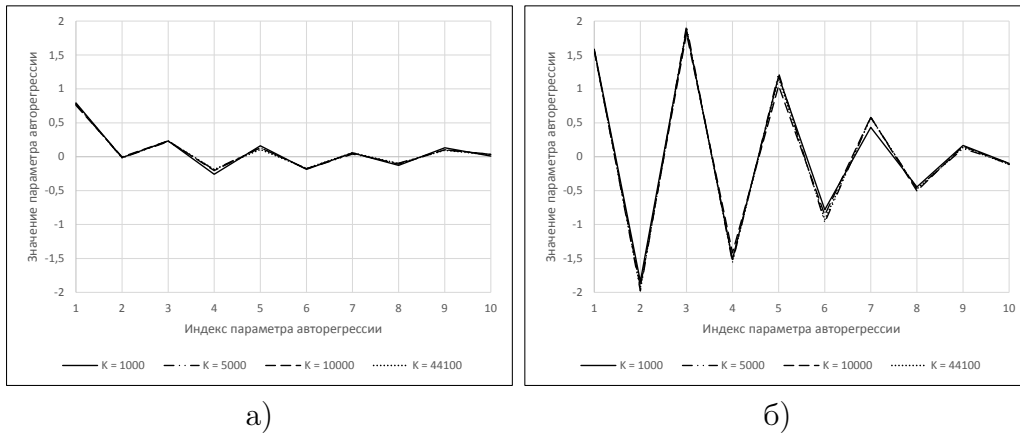


Рис. 5: Значения коэффициентов авторегрессии до и во время разладки параметров авторегрессий приведены в таблице 2.

Таблица 2: Оценки коэффициентов авторегрессий, полученные МНК

h	ϕ_0	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_7	ϕ_8	ϕ_9	ϕ_{10}
0	0	0.78	0	0.23	-0.19	0.11	-0.17	0.06	-0.1	0.1	0
1	0	1.58	-1.94	1.88	-1.53	1.16	-0.93	0.58	-0.47	0.14	-0.11

В таблице 2 h_0 соответствует нормальной работе вентилятора, а h_1 - разладке. Подобранные параметры для алгоритма[4] и CUSUM составили $B(h_i) = 10^5$, $q_{ii} = 0.99999$, $T_{ij} = 4 \cdot 10^6$. Полученные обоими алгоритмами сегментации изображены на рисунке 6(вариант а) соответствует алгоритму[4], б) - CUSUM)

Потом, не изменяя найденных параметров, алгоритмы были применены к другим двум оставшимся сигналам. Результаты изображены на графиках 7 и 8.

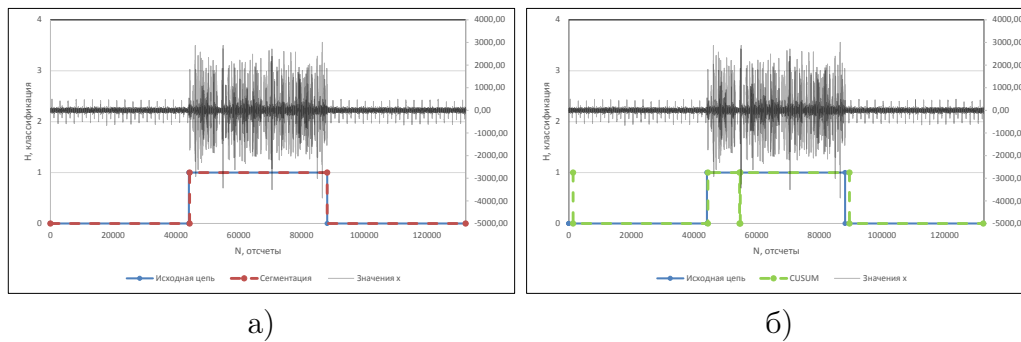


Рис. 6: Сегментация первого сигнала с вентилятора обоими алгоритмами

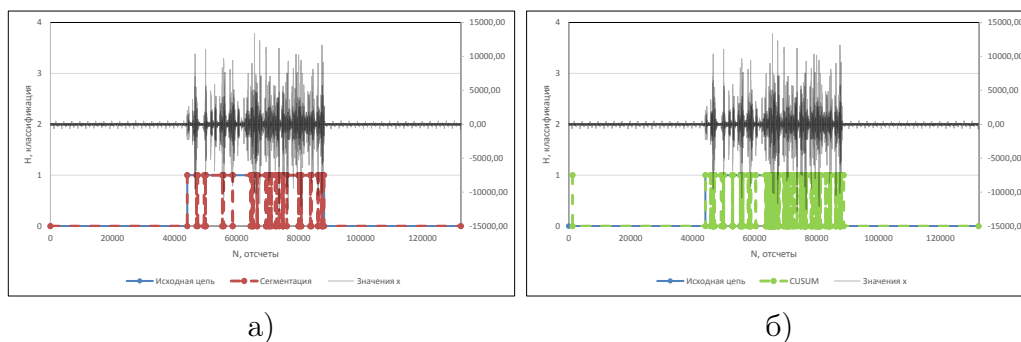


Рис. 7: Сегментация второго сигнала с вентилятора обоими алгоритмами

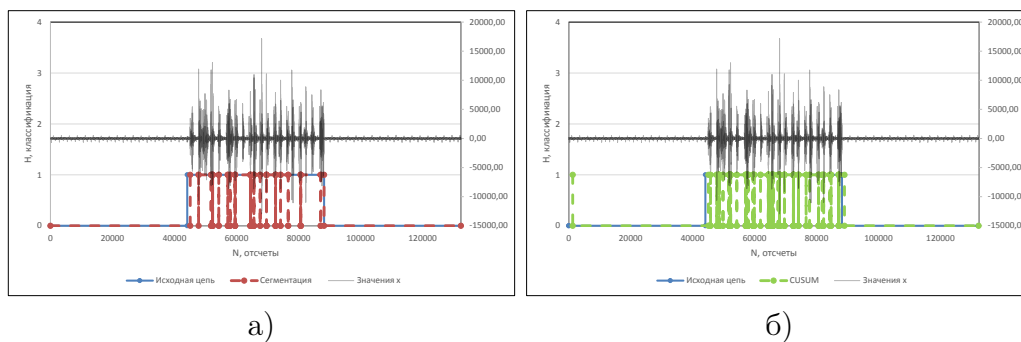


Рис. 8: Сегментация сигнала 3 с вентилятора обоими алгоритмами

6 Выводы

Результаты, полученные из экспериментов с модельным сигналом показывают, что алгоритм[4] имеет в среднем на 10 % большую точность. Это логично, поскольку он учитывает больше данных о входном сигнале, чем CUSUM(а именно вероятности переходов, заданные в матрице Q). Алгоритм CUSUM является более легким в реализации и работает

быстрее, однако его точность сильно зависит от выбора пороговых значений T_{ij} для каждой пары переходов, что само по себе является довольно неочевидной задачей.

Эксперименты на реальном сигнале с электромеханического устройства(вентилятора) показали, что рассматриваемый подход применим к реальным сигналам, однако требует некоторой доработки.

Список литературы

- [1] Chukiet Sodsri, “Time-varying autoregressive modelling for nonstationary acoustic signal and its frequency analysis”, 2003
- [2] Kie B. Eom, “Analysis of Acoustic Signatures from Moving Vehicles Using Time-Varying Autoregressive Models”, Multidimensional Systems and Signal Processing 10, pp. 357-378, 1999
- [3] Akay, Y.M., “Noninvasive acoustical detection of coronary artery disease: a comparative study of signal processing methods”, Biomedical Engineering 40, pp. 571-578, 1993
- [4] Николай Буробин, Вадим Моттль, Илья Мучник, “Алгоритм определения моментов многократного изменения свойств случайного процесса на основе метода динамического программирования”, Статистические проблемы управления 65, стр. 49-57, 1984.
- [5] Michèle Basseville, Igor V. Nikiforov, “Detection of Abrupt Changes: Theory and Application”, pp. 35-43, 1998