

期中考试 (2024 秋)

2024 年 11 月 4 日 (8 : 00 ~ 9 : 40)

Problem 1

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 试证明 $\det(A \otimes B) = \det(B \otimes A)$,
其中 \otimes 代表 Kronecker 乘积.

- 这个结论是显然的:
 $A \otimes B$ 和 $B \otimes A$ 是置换相似的,
即存在置换矩阵 $P \in \mathbb{R}^{mn \times mn}$ (满足 $P^{-1} = P^T$) 使得 $P^T(B \otimes A)P = (A \otimes B)$.
因此我们有:

$$\begin{aligned}\det(A \otimes B) &= \det(P^T(B \otimes A)P) \\ &= \det((B \otimes A)PP^T) \quad (\text{note that } P^{-1} = P^T) \\ &= \det(B \otimes A).\end{aligned}$$

实际上这源自于从 $B \otimes A$ 得到 $A \otimes B$ 的行列重排是对称的, 因此行列重排次数是偶数次, 行列式不变.
但上述讨论并不严谨, 也不本质.

- Kronecker 乘积的性质:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD) \text{ if the matrix products } AC \text{ and } BD \text{ are well-defined}$$
$$\begin{cases} (A \otimes B)^T = A^T \otimes B^T \\ (A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1} \\ (A \otimes B)^\dagger = A^\dagger \otimes B^\dagger \end{cases}$$

解法一:

设 A 的 Jordan 分解为 $A = P_1 J_1 P_1^{-1}$, B 的 Jordan 分解为 $B = P_2 J_2 P_2^{-1}$.
设 A 的特征值是 $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ (于是 J_1 的对角元为 $\lambda_1, \dots, \lambda_m$).
设 B 的特征值是 $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{C}$ (于是 J_2 的对角元为 μ_1, \dots, μ_n).
则我们有:

$$\begin{aligned}\det(A \otimes B) &= \det((P_1 J_1 P_1^{-1}) \otimes (P_2 J_2 P_2^{-1})) \\ &= \det((P_1 \otimes P_2)(J_1 \otimes J_2)(P_1^{-1} \otimes P_2^{-1})) \\ &= \det((P_1 \otimes P_2)(J_1 \otimes J_2)(P_1 \otimes P_2)^{-1}) \\ &= \det((J_1 \otimes J_2)(P_1 \otimes P_2)^{-1}(P_1 \otimes P_2)) \\ &= \det(J_1 \otimes J_2) \\ &= \prod_{i=1}^m \left\{ \lambda_i \prod_{j=1}^n \mu_j \right\} \\ &= \prod_{i,j=1}^{m,n} \lambda_i \mu_j \\ &= \prod_{j=1}^n \left\{ \mu_j \prod_{i=1}^m \lambda_i \right\} \\ &= \det(J_2 \otimes J_1) \\ &= \det((J_2 \otimes J_1)(P_2 \otimes P_1)^{-1}(P_2 \otimes P_1)) \\ &= \det((P_2 \otimes P_1)(J_2 \otimes J_1)(P_2 \otimes P_1)^{-1}) \\ &= \det((P_2 \otimes P_1)(J_2 \otimes J_1)(P_2^{-1} \otimes P_1^{-1})) \\ &= \det((P_2 J_2 P_2^{-1}) \otimes (P_1 J_1 P_1^{-1})) \\ &= \det(B \otimes A).\end{aligned}$$

事实上我们有更本质的解法,

这个解法表明 $\{\text{eig}(A \otimes B)\} = \{\text{eig}(B \otimes A)\}$ if A, B are square matrices.

解法二:

设 A 的特征值是 $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$, B 的特征值是 $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{C}$.

可以证明 $A \otimes B$ 的特征值是 $\lambda_i \mu_j$ ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$)

- 设 (x, λ) 是 A 的特征对 (即满足 $Ax = x\lambda$), 而 (y, μ) 是 B 的特征对 (即满足 $By = y\mu$), 则我们有:

$$\begin{aligned}(A \otimes B)(x \otimes y) &= (Ax) \otimes (By) \\ &= (x\lambda) \otimes (y\mu) \\ &= (x \otimes y)(\lambda\mu).\end{aligned}$$

因此 $(x \otimes y, \lambda\mu)$ 就是 $A \otimes B$ 的特征对.

这说明 $A \otimes B$ 的特征值是 $\lambda_i \mu_j$ ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$).

类似地, 我们可以说明 $B \otimes A$ 的特征值是 $\mu_j \lambda_i$ ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$)

因此我们有:

$$\begin{aligned}\det(A \otimes B) &= \prod_{i,j=1}^{m,n} \lambda_i \mu_j \\ &= \prod_{i,j=1}^{m,n} \mu_j \lambda_i \\ &= \det(B \otimes A)\end{aligned}$$

命题得证.

事实上, 当 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ 时 $\det(A \otimes B) = \det(B \otimes A)$ 也是成立的.

证明:

不妨设 $m < n$, 则 A 的列一定线性相关, 因此存在 $u \neq 0_n \in \mathbb{C}^n$ 使得 $Au = 0_m$.

对于任意非零向量 $v \neq 0_m \in \mathbb{C}^m$ 我们都有:

$$\begin{aligned}(A \otimes B)(u \otimes v) &= (Au) \otimes (Bv) = 0_n \otimes (Bv) = 0_{mn} \\ (B \otimes A)(v \otimes u) &= (Bv) \otimes (Au) = (Bv) \otimes 0_n = 0_{mn}\end{aligned}$$

注意到 $(u \otimes v)$ 和 $(v \otimes u)$ 均为 mn 维非零向量, 故 $(A \otimes B)$ 和 $(B \otimes A)$ 均为奇异矩阵.

因此我们有 $\det(A \otimes B) = \det(B \otimes A) = 0$ 成立.

Problem 2

设 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 试证明 $\|A\|_2^2 \leq \|A\|_1 \|A\|_\infty$.

解法一:

- **Note:** 根据列和范数 $\|\cdot\|_1$ 与行和范数 $\|\cdot\|_\infty$ 的定义, 我们有 $\|A^H\|_1 = \|A^T\|_1 = \|A\|_\infty$ 成立.

- **Lemma (谱半径定理):**

设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 上的相容范数.

若 λ 是 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的一个特征值, 则我们有 $|\lambda| \leq \rho(A) \leq \|A\|$ 成立.

使用谱半径定理以及 $\|A^H\|_1 = \|A^T\|_1 = \|A\|_\infty$ 的恒等式, 我们有:

$$\begin{aligned}\|A\|_2^2 &= \rho(A^H A) \quad (\text{use spectral radius theorem}) \\ &\leq \|A^H A\|_1 \\ &\leq \|A^H\|_1 \|A\|_1 \\ &= \|A\|_\infty \|A\|_1.\end{aligned}$$

解法二 (存疑):

首先注意到:

$$\begin{aligned}
\|x\|_2^2 &= \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \\
&\leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \cdot \sum_{i=1}^n |x_i| \\
&= \|x\|_\infty \|x\|_1
\end{aligned}$$

(值得注意的是, 直接使用 **Hölder 不等式** $|x^H y| \leq \|x\|_p \|y\|_q$ (where $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) 得到上述不等式是不严谨的)

因此我们有:

(其中 \max 操作符与 $\sqrt{\cdot}$ 操作符的可交换性依赖于 $f(x) = \sqrt{x}$ 是 $\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ 的双射)

$$\begin{aligned}
\|A\|_2 &= \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 \\
&\leq \max_{\|x\|_2=1} \sqrt{\|Ax\|_1 \|Ax\|_\infty} \\
&= \sqrt{\max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_1 \|Ax\|_\infty} \\
&\leq \sqrt{\max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_1 \cdot \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_\infty} \\
&= \sqrt{\|A\|_1 \|A\|_\infty}
\end{aligned}$$

于是我们有 $\|A\|_2^2 \leq \|A\|_1 \|A\|_\infty$ 成立.

Problem 3

设 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 非奇异, 试证明 $\text{rank}(A^{-1} - B^{-1}) = \text{rank}(A - B)$.

解法一:

注意到:

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}.$$

由于 A^{-1}, B^{-1} 非奇异, 故我们有 $\text{rank}(A^{-1} - B^{-1}) = \text{rank}(A - B)$ 成立.

不放心的话, 我们可以这样说明:

$$\begin{aligned}
A^{-1} - B^{-1} &= A^{-1}(B - A)B^{-1} \\
B - A &= A(A^{-1} - B^{-1})B
\end{aligned}$$

因此我们有:

$$\begin{aligned}
\text{rank}(A^{-1} - B^{-1}) &= \text{rank}(A^{-1}(B - A)B^{-1}) \\
&\leq \min\{\text{rank}(A^{-1}), \text{rank}(B - A), \text{rank}(B^{-1})\} \\
&= \min\{n, \text{rank}(B - A), n\} \\
&= \text{rank}(B - A) \\
&= \text{rank}(A - B) \\
\hline
\text{rank}(A - B) &= \text{rank}(B - A) \\
&= \text{rank}(A(A^{-1} - B^{-1})B) \\
&\leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(A^{-1} - B^{-1}), \text{rank}(B)\} \\
&= \min\{n, \text{rank}(A^{-1} - B^{-1}), n\} \\
&= \text{rank}(A^{-1} - B^{-1}).
\end{aligned}$$

于是我们有 $\text{rank}(A^{-1} - B^{-1}) = \text{rank}(A - B)$ 成立.

解法二:

SMW 公式 $(A + UV^H)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(I + V^H A^{-1}U)^{-1}V^H A^{-1}$.

注意到 $A + UV^H = A^{-1}(I + A^{-1}UV^H)$ 可逆时, $I + V^H A^{-1}U$ 也可逆 (矩阵乘积交换的谱不变性).

设 $B - A = UV^H$.

于是有:

$$B^{-1} - A^{-1} = -A^{-1}U(I + V^H A^{-1}U)^{-1}V^H A^{-1}$$

$$\text{rank}(B^{-1} - A^{-1}) = \text{rank}(UV^H) = \text{rank}(B - A).$$

Problem 4

设 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 满足 $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) < n$, 试证明 A, B 存在公共特征对.

解法一:

注意到:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leq \text{rank} \begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix} = \text{rank}(A) + \text{rank}(B) < n.$$

因此线性方程组

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 0_n \\ 0_n \end{bmatrix}$$

存在非零解 x , 于是就得到公共特征对 $(x, 0)$, 满足:

$$\begin{cases} Ax = 0_n = x \cdot 0 \\ Bx = 0_n = x \cdot 0. \end{cases}$$

解法二:

这个解法与解法一没有本质的不同, 仅仅是陈述方式有区别而已.

我们有:

$$\begin{aligned} & \dim(\text{Ker}(A) \cap \text{Ker}(B)) \\ &= \dim(\text{Ker}(A)) + \dim(\text{Ker}(B)) - \dim(\text{Ker}(A) + \text{Ker}(B)) \\ &= (n - \text{rank}(A)) + (n - \text{rank}(B)) - \dim(\text{Ker}(A) + \text{Ker}(B)) \\ &= 2n - (\text{rank}(A) + \text{rank}(B)) - \dim(\text{Ker}(A) + \text{Ker}(B)) \quad (\text{note that } \begin{cases} \text{rank}(A) + \text{rank}(B) < n \\ \dim(\text{Ker}(A) + \text{Ker}(B)) \leq n \end{cases}) \\ &> 2n - n - n \\ &= 0. \end{aligned}$$

因此 $\text{Ker}(A) \cap \text{Ker}(B) \neq \{0_n\}$,

即存在非零向量 $x \in \text{Ker}(A) \cap \text{Ker}(B)$.

于是 x 满足:

$$\begin{cases} Ax = 0_n = x \cdot 0 \\ Bx = 0_n = x \cdot 0, \end{cases}$$

表明 $(x, 0)$ 是 A, B 的公共特征对.

Problem 5

求解以下矩阵的 Jordan 标准型:

$$\exp(A) := \exp \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 0 & 2 \\ & & 2 & 0 & 0 & 3 \\ & & & 2 & 0 & 0 \\ & & & & 3 & 0 \\ 4 & & & & & 3 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

- 直观上我们很容易看出 A 的特征值至少有 1, 2, 3
因为对角元 1, 2, 3 均有独占 A 的某一行或一列, 因此 $A - I, A - 2I, A - 3I$ 的行列式必然为零.

Solution:

首先求解 A 的特征值:

$$\begin{aligned}
& \det(\lambda I - A) \\
&= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & -1 \\ & \lambda-1 & 0 & 0 & -2 \\ & & \lambda-2 & 0 & 0 & -3 \\ & & & \lambda-2 & 0 & 0 \\ & & & & \lambda-3 & 0 \\ -4 & & & & & \lambda-3 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 & -2 \\ & \lambda-2 & 0 & 0 & -3 \\ & & \lambda-2 & 0 & 0 \\ & & & \lambda-3 & 0 \\ & & & & \lambda-3 \end{vmatrix} + (-1)^{6+1}(-4) \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \lambda-1 & 0 & 0 & -2 \\ & \lambda-2 & 0 & 0 & -3 \\ & & \lambda-2 & 0 & 0 \\ & & & \lambda-3 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-3) + 4 \cdot (-1)^{2+1}(\lambda-1) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \lambda-2 & 0 & 0 & -3 \\ & \lambda-2 & 0 & 0 \\ & & \lambda-3 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)^2(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2 - 4(\lambda-1)(-1)^{2+1}(\lambda-2) \begin{vmatrix} -1 \\ \lambda-2 & 0 & 0 \\ & \lambda-3 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)^2(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2 + 4(\lambda-1)(\lambda-2) \cdot 0 \\
&= (\lambda-1)^2(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2
\end{aligned}$$

令 $\det(\lambda I - A) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)^2(\lambda-3)^2 = 0$.

便解得 A 的特征值为 1, 2, 3, 代数重数均为 2.

下面求解特征向量, 得到几何重数:

- 考虑特征值 1:

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 2 \\ & & 1 & 0 & 0 & 3 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 2 & 0 \\ 4 & & & & & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Ker}(A - I) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

因此特征值 1 的几何重数是 2.

也可根据 $\text{rank}(A - I) = 4$ 反推特征值 1 的几何重数是 2.

- 考虑特征值 2:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ & -1 & 0 & 0 & 2 \\ & & 0 & 0 & 0 & 3 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 0 \\ 4 & & & & & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Ker}(A - I) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

因此特征值 2 的几何重数是 1.

也可根据 $\text{rank}(A - I) = 5$ 反推特征值 2 的几何重数是 1.

- 考虑特征值 3:

$$A - I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ & -2 & 0 & 0 & 2 \\ & & -1 & 0 & 0 & 3 \\ & & & -1 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ 4 & & & & & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Ker}(A - I) = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

因此特征值 3 的几何重数是 2.

也可根据 $\text{rank}(A - 3I) = 4$ 反推特征值 3 的几何重数是 2.

综上所述, 我们得到 A 的 Jordan 标准型 J 为:

$$J = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & 1 & \\ & & & 2 & \\ & & & & 3 \\ & & & & & 3 \end{bmatrix}$$

因此 $\exp(J)$ 为:

$$\exp(J) = \begin{bmatrix} e & & & & \\ & e & & & \\ & & e^2 & e^2 & \\ & & & e^2 & \\ & & & & e^3 \\ & & & & & e^3 \end{bmatrix}$$

要求 $\exp(A)$ 的 Jordan 标准型, 即要求 $\exp(J)$ 的 Jordan 标准型.

我们取对角相似变换 $D = \text{diag}\{1, 1, 1, \frac{1}{e^2}, 1, 1\}$ 即得到 $\exp(J)$ 的 Jordan 标准型:

$$\begin{aligned} J_{\exp(A)} &:= D^{-1} \exp(J) D \\ &= \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & e^2 & \\ & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & & & & \\ & e & & & \\ & & e^2 & e^2 & \\ & & & e^2 & \\ & & & & e^3 \\ & & & & & e^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \frac{1}{e^2} & \\ & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e & & & & \\ & e & & & \\ & & e^2 & 1 & \\ & & & e^2 & \\ & & & & e^3 \\ & & & & & e^3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Problem 6

设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 为 Hermite 半正定阵, 试证明存在下三角阵 $L \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使得 $A = LL^H$.

解法一:

注意到 A 是一个 Hermite 阵 (自然是正规矩阵), 故 A 可酉对角化.

即存在酉矩阵 $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使得 $\Lambda = U^H A U$ 为对角阵, 且对角元均为实数.

又注意到 A 是半正定的, 故 $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ 的对角元均为非负实数.

定义:

$$\begin{cases} \Lambda^{\frac{1}{2}} = \text{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\} \\ A^{\frac{1}{2}} = U \Lambda^{\frac{1}{2}} U^H \end{cases}$$

显然 $A^{\frac{1}{2}}$ 也是 Hermite 半正定阵.

设其 QR 分解为 $A^{\frac{1}{2}} = QR$,

其中 $Q \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 为酉矩阵, 而 $R \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 为具有非负实对角元的上三角阵 (不唯一), 则我们有:

$$\begin{aligned}
A &= U\Lambda U^H \\
&= U\Lambda^{\frac{1}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}}U^H \\
&= U\Lambda^{\frac{1}{2}}U^H U\Lambda^{\frac{1}{2}}U^H \\
&= A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} \quad (\text{note that } A^{\frac{1}{2}} \text{ is also Hermitian}) \\
&= (A^{\frac{1}{2}})^H A^{\frac{1}{2}} \quad (\text{note that } A^{\frac{1}{2}} = QR) \\
&= (QR)^H (QR) \\
&= R^H Q^H Q R \quad (\text{note that } Q^H Q = I_n) \\
&= R^H R.
\end{aligned}$$

记 $L := R^H$, 则我们有 $A = R^H R = LL^H$ (不唯一).
命题得证.

解法二:

我们对 A 施加小扰动 εI ($0 < \varepsilon < 1$) 得到 Hermite 正定阵 $A + \varepsilon I$.
根据课上的结论, 存在唯一的下三角阵 $L(\varepsilon) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使得 $A + \varepsilon I = L(\varepsilon)L(\varepsilon)^H$.
注意到 $\|L(\varepsilon)\|_2^2 = \|L(\varepsilon)L(\varepsilon)^H\|_2 = \|A + \varepsilon I\|_2 \leq \|A + I\|_2$,
因此 $L(\varepsilon)$ ($0 < \varepsilon < 1$) 关于 ε 是有界的.
于是存在收敛子列 $\{L(\varepsilon_n)\}_{n=1}^\infty$ (其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$),
其极限 L 自然也是下三角阵, 满足 $A = LL^H$.

解法三:

我们对 Hermite 半正定阵 A 进行不选主元的 Gauss 消元.
考虑第一步 Gauss 消元:

- 若 $(1, 1)$ 位置的对角元为 0,
则根据 A 的半正定性可知 A 的第一行和第一列的所有元素均为 0.
我们直接将矩阵降阶, 继续对降阶后的矩阵进行 Gauss 消元.
- 若 $(1, 1)$ 位置的对角元不为 0,
则可以证明消元后得到的右下 $n - 1$ 阶子阵仍是 Hermite 半正定的, 这是 Schur 补的经典结论.

将上述过程重复 $n - 1$ 次, 便可得到 $A = LU$,
其中 L 为单位下三角阵, 而 U 为上三角阵, 且 U 的对角元均为非负实数.

值得说明的是, 若出现对角元为 0 的情况,
这个 0 所在行列的所有元素均为 0.
因此我们可以将全 0 行列重排到左上角, 将矩阵降阶, 继续对降阶后的矩阵进行 Gauss 消元.

将 U 的对角元提取出来得到 D , 其对角元均为非负实数, 因此满足 $D^H = D$.
根据 A 的 Hermite 性我们断言 $U = DL^H$.
即有 $A = LDL^H = (LD^{\frac{1}{2}})(LD^{\frac{1}{2}})^H = \tilde{L}\tilde{L}^H$,
其中 $\tilde{L} := LD^{\frac{1}{2}}$ 即为所求的下三角阵.

Problem 7

设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, 试证明级数 $\sum_{k=0}^\infty (A^H)^k A^k$ 收敛当且仅当 $\rho(A) < 1$.

- 尽管谱半径函数 $\rho(\cdot)$ 并不是 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 上的相容范数,
但对于任意 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\rho(A)$ 都是所有相容范数取值的下确界.
(Matrix Analysis 引理 5.6.10)
任意给定 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 和 $\varepsilon > 0$, 都存在一个 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 上的相容范数 $\|\cdot\|_\varepsilon$ 使得 $\rho(A) \leq \|A\|_\varepsilon \leq \rho(A) + \varepsilon$.
- 尽管说当 $k \rightarrow \infty$ 时 A^k 的单个元素的性状与 $\rho(A)^k$ 的性状相仿是不够准确的,
但对于任意相容范数 $\|\cdot\|$, 序列 $\{\|A^k\|\}$ 的确都有这个渐近性质.
(Gelfand 公式, Matrix Analysis 推论 5.6.14)
若 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{C}^{n \times n}$ 上的一个相容范数, 则对于任意 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 我们都有:

$$\rho(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$$

这表明极限情况下特征值决定一切.

Proof:

• **必要性:**

设级数 $\sum_{k=0}^{\infty} (A^H)^k A^k$ 收敛, 记其极限为 $S := \sum_{k=0}^{\infty} (A^H)^k A^k$.

对于 A 的任意单位特征对 (x, λ) , 我们都有:

$$\begin{aligned} x^H S x &= x^H \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (A^H)^k A^k \right\} x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \bar{\lambda}^k \lambda^k x^H x \quad (\text{note that } x^H x = \|x\|_2^2 = 1) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda|^{2k} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

于是有 $|\lambda| < 1$.

注意到 λ 可以是 A 的任意特征值, 因此 $\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| < 1$.

• **充分性:**

设 $\rho(A) < 1$.

根据 **Matrix Analysis 引理 5.6.10** 可知存在相容范数 $\|\cdot\|$ 使得 $\|A\| < 1$.

注意到 $\rho(A^H) = \rho(A) < 1$.

因此根据 **Gelfand 公式** 可知 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|(A^H)^k\| = \lim_{k \rightarrow \infty} (\rho(A^H))^k = 0$.

这表明 $\{\|(A^H)^k\|\}$ 是有界序列, 即存在 $M > 0$ 使得 $\|(A^H)^k\| \leq M \ (\forall k \in \mathbb{Z}_+)$.

对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N = \lceil \log_{\|A\|} \left(\frac{\varepsilon}{M} (1 - \|A\|) \right) \rceil$ 使得:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=N}^{\infty} (A^H)^k A^k \right\| &\leq \sum_{k=N}^{\infty} \|(A^H)^k\| \|A^k\| \quad (\text{note that } \|(A^H)^k\| \leq M \ (\forall k \in \mathbb{Z}_+)) \\ &= M \sum_{k=N}^{\infty} \|A^k\| \\ &\leq M \sum_{k=N}^{\infty} \|A\|^k \\ &= M \cdot \|A\|^N \cdot \frac{1}{1 - \|A\|} \quad (\text{note that } 0 < \|A\| < 1 \text{ and } N = \lceil \log_{\|A\|} \left(\frac{\varepsilon}{M} (1 - \|A\|) \right) \rceil) \\ &\leq M \cdot \frac{\varepsilon}{M} (1 - \|A\|) \cdot \frac{1}{1 - \|A\|} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

因此级数 $\sum_{k=0}^{\infty} (A^H)^k A^k$ 收敛.

命题得证.

Problem 8

给定正整数 m, n , 设 $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 为 Hermite 正定阵.

试证明:

$$\det \left(\frac{A_1 + \dots + A_m}{m} \right) \geq \det(A_1)^{\frac{1}{m}} \dots \det(A_m)^{\frac{1}{m}}.$$

解法一:

对数-行列式函数 (Log-determinant) $\begin{cases} f(X) = \log(\det(X)) \\ \text{dom}(f) = \mathbb{S}_{++}^n \end{cases}$ 是凹函数.

我们证明其凹性的方法是将其转化为任意 "直线" 上的单变量函数:

对于任意给定的 $\begin{cases} X \in \mathbb{S}_{++}^n \\ V \in \mathbb{S}^n \end{cases}$ 考虑关于 t 的函数 $\begin{cases} g(t) = f(X + tV) \\ \text{dom}(g) = \{t \in \mathbb{R} : X + tV \in \text{dom}(f) = \mathbb{S}_{++}^n\} \end{cases}$

记 $X^{-\frac{1}{2}} V X^{-\frac{1}{2}}$ 的特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, 则对于任意 $t \in \text{dom}(g)$ 都有:

$$\begin{aligned}
g(t) &= f(X + tV) \\
&= \log(\det(X + tV)) \\
&= \log\{\det(X^{\frac{1}{2}}(I_n + tX^{-\frac{1}{2}}VX^{-\frac{1}{2}})X^{\frac{1}{2}})\} \\
&= \log\{\det((I_n + tX^{-\frac{1}{2}}VX^{-\frac{1}{2}})X)\} \\
&= \sum_{i=1}^n \log(1 + t\lambda_i) + \log(\det(X))
\end{aligned}$$

故有:

$$\begin{cases} g'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1+t\lambda_i} \\ g''(t) = -\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^2}{(1+t\lambda_i)^2} \leq 0 \end{cases}$$

这说明任意 "直线" 上的单变量函数 $g(t)$ 都是凹函数, 因此 $f(X)$ 为凹函数.

因此我们有:

$$\begin{aligned}
\log\left(\det\left(\frac{A_1 + \cdots + A_m}{m}\right)\right) &= f\left(\frac{A_1 + \cdots + A_m}{m}\right) \quad (\text{use concavity of } f(X) = \log(\det(X))) \\
&\geq \frac{1}{m}f(A_1) + \cdots + \frac{1}{m}f(A_m) \\
&= \frac{1}{m}\log(\det(A_1)) + \cdots + \frac{1}{m}\log(\det(A_m)) \\
&= \log\left(\det(A_1)^{\frac{1}{m}} \cdots \det(A_m)^{\frac{1}{m}}\right)
\end{aligned}$$

即有:

$$\det\left(\frac{A_1 + \cdots + A_m}{m}\right) \geq \det(A_1)^{\frac{1}{m}} \cdots \det(A_m)^{\frac{1}{m}}$$

解法二:

- 首先我们证明两个 Hermite 正定阵 A, B 可以同时合同对角化:
 设 A 的 Cholesky 分解为 $A = LL^H$, 其中 L 为 (唯一的) 具有正实数对角元的下三角阵.
 注意到 $L^{-1}BL^{-H}$ 仍为 Hermite 阵, 因而有谱分解 $L^{-1}BL^{-H} = Q\Lambda Q^H$.
 记 $C = LQ$, 则我们有:

$$\begin{aligned}
A &= LL^H = LQQ^H L^H = (LQ)(LQ)^H = CC^H \\
B &= LQ\Lambda Q^H L^H = (LQ)\Lambda(LQ)^H = C\Lambda C^H
\end{aligned}$$

这表明两个 Hermite 正定阵 A, B 可以同时合同对角化.
 (实际上如果 B 退化为 Hermite 阵, 结论也成立)

- 现在证明命题对 $m = 2$ 的情况成立:
 设 A, B 为两个 Hermite 正定阵.
 根据上面的结论可知, 存在非奇异阵 $C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使得:

$$\begin{cases} A = CC^H \\ B = C\Lambda C^H, \end{cases}$$

其中 $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$.
 于是我们有:

$$\begin{aligned}
\det\left(\frac{A+B}{2}\right) &= \det\left(\frac{CC^H + C\Lambda C^H}{2}\right) \\
&= \det(C) \det(C^H) \det\left(\frac{I+\Lambda}{2}\right) \\
&= \det(C) \det(C^H) \prod_{i=1}^n \frac{1+\lambda_i}{2} \\
&\geq \det(C) \det(C^H) \prod_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i} \\
&= \sqrt{\det(C) \det(C^H) \cdot \det(C) \det(\Lambda) \det(C^H)} \\
&= \sqrt{\det(CC^H) \cdot \det(C\Lambda C^H)} \\
&= \sqrt{\det(A) \det(B)} \\
&= \det(A)^{\frac{1}{2}} \det(B)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

因此命题对 $m = 2$ 的情况成立.

- 对于 $m = 2^k$ ($k \in \mathbb{Z}_+$) 的情况, 我们也很容易处理.
例如 $m = 2^2 = 4$ 时, 我们有:

$$\begin{aligned}
\det\left(\frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{4}\right) &= \det\left(\frac{\frac{A_1+A_2}{2} + \frac{A_3+A_4}{2}}{2}\right) \quad (\text{use the conclusion of case } m = 2) \\
&\geq \det\left(\frac{A_1 + A_2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \det\left(\frac{A_3 + A_4}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{use the conclusion of case } m = 2 \text{ again}) \\
&\geq \det(A_1)^{\frac{1}{4}} \det(A_2)^{\frac{1}{4}} \det(A_3)^{\frac{1}{4}} \det(A_4)^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}$$

以此类推, 可知命题对 $m = 2^k$ ($k \in \mathbb{Z}_+$) 的情况也成立.

- 现固定 $k \in \mathbb{Z}_+$, 考虑 $m = 2^k + p$ ($p = 1, \dots, 2^k - 1$) 的情况:
记 $\tilde{m} = 2^{k+1}$, 并定义:

$$\begin{aligned}
B &:= \frac{A_1 + \dots + A_m}{m} \\
A_{m+1} = \dots = A_{\tilde{m}} &:= B
\end{aligned}$$

容易验证:

$$\begin{aligned}
\frac{A_1 + \dots + A_{\tilde{m}}}{\tilde{m}} &= \frac{A_1 + \dots + A_m + A_{m+1} + \dots + A_{\tilde{m}}}{\tilde{m}} \\
&= \frac{mB + (\tilde{m} - m)B}{\tilde{m}} \\
&= \frac{\tilde{m}B}{\tilde{m}} \\
&= B
\end{aligned}$$

根据前面的结论, 我们有:

$$\begin{aligned}
\det(B)^{\tilde{m}} &= \det\left(\frac{A_1 + \dots + A_{\tilde{m}}}{\tilde{m}}\right)^{\tilde{m}} \quad (\text{note that } \tilde{m} = 2^{k+1}) \\
&\geq [\det(A_1)^{\frac{1}{\tilde{m}}} \dots \det(A_{\tilde{m}})^{\frac{1}{\tilde{m}}}]^{\tilde{m}} \\
&= \det(A_1) \dots \det(A_{\tilde{m}}) \\
&= \det(A_1) \dots \det(A_m) \det(A_{m+1}) \dots \det(A_{\tilde{m}}) \quad (\text{note that } A_{m+1} = \dots = A_{\tilde{m}} = B) \\
&= \det(A_1) \dots \det(A_m) \cdot \det(B)^{\tilde{m}-m}
\end{aligned}$$

这样我们就得到了 $\det(B)^m \geq \det(A_1) \dots \det(A_m)$.

于是有:

$$\begin{aligned}
\det\left(\frac{A_1 + \dots + A_m}{m}\right) &= \det(B) \\
&\geq [\det(A_1) \dots \det(A_m)]^{\frac{1}{m}} \\
&= \det(A_1)^{\frac{1}{m}} \dots \det(A_m)^{\frac{1}{m}}
\end{aligned}$$

因此命题对一般的 m 也成立.

The End