高等线性代数 Homework 11

Due: Dec. 2, 2024
姓名: 雍崔扬
学号: 21307140051

Problem 1

计算以下矩阵的极分解和 Moore-Penrose 广义逆:

$$B := A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

- **Lemma:**
  我们可以这样将两个线性相关的向量 $x, \alpha x \in \mathbb{R}^n$ 正交化:

$$\begin{bmatrix} x & \alpha x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha^2+1}x & 0_n \end{bmatrix} \text{ where } \begin{cases} c = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}} \\ s = \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1}} \end{cases}$$

(1) 奇异值分解

回忆起 $\text{Homework 10 Problem 5}$ 的内容:
注意到 A 的列向量组中，第 $1,2,3$ 列相互正交，而第 4 列与第 1 列线性相关.
单边 Jacobi 迭代的思想指导我们使用一个正交变换 $Q_{1,4}$ 将第 4 列化为零:

$$Q_{1,4} := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & & & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & & & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$AQ_{1,4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & & & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & & & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

这样 $AQ_{1,4}$ 的列向量就相互正交了.
此时可取:

$$
U := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}
$$

$$
\Sigma := \begin{bmatrix} \sqrt{6} & & & 0 \\ & \sqrt{2} & & 0 \\ & & \sqrt{6} & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
V := Q_{1,4} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & & & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & & & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}
$$

$$
A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}
$$

为保证奇异值从大到小排列，我们可以交换 Σ 的 $(2,2),(3,3)$ 位置，
并对应交换 U 的 $2,3$ 列和 V 的 $2,3$ 行:

$$
U := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
\Sigma := \begin{bmatrix} \sqrt{6} & & & 0 \\ & \sqrt{6} & & 0 \\ & & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}
$$

$$
V := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & & & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & & & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}
$$

$$
A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}
$$

因此 $B = A^{\mathrm{T}} = (U\Sigma V^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = V\Sigma U^{\mathrm{T}}$.

(2) 极分解

取 V 的前 3 列构成 $V_1 \in \mathbb{R}^{4\times 3}$，记 $\Sigma_1 = \operatorname{diag}\{\sqrt{6},\sqrt{6},\sqrt{2}\}$.
于是 B 的精简 SVD 分解为:

$$
B = V_1\Sigma_1 U^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & & \\ & \sqrt{6} & \\ & & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}
$$

注意到:

$$
\begin{aligned}
B &= V_1\Sigma_1 U^{\mathrm{T}} \\
&= (V_1 U^{\mathrm{T}}) U\Sigma_1 U^{\mathrm{T}} \\
&= QP
\end{aligned}
$$

我们就得到了 B 的极分解 $B = QP$,
其中 $Q \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ 列标准正交，P 为 Hermite 正定阵.

$$
\begin{aligned}
Q &:= V_1 U^{\mathrm{T}} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P &:= U\Sigma_1 U^{\mathrm{T}} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & & \\ & \sqrt{6} & \\ & & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

(3) Moore-Penrose 逆

B 的精简 SVD 分解为:

$$
B = V_1\Sigma_1 U^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & & \\ & \sqrt{6} & \\ & & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}
$$

因此 B 的 Moore-Penrose 逆为:

$$
\begin{aligned}
B^\dagger &:= U\Sigma_1^{-1}V_1^{\mathrm{T}} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & & \\ & \sqrt{6} & \\ & & \sqrt{2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{6}} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Problem 2

给定正整数 m,n，设 $A \in \mathbb{C}^{(m+n)\times(m+n)}, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 满足:

$$
A = \begin{bmatrix} I_m & B \\ B^{\mathrm{H}} & I_n \end{bmatrix}.
$$

若 $\|B\|_2 < 1$，试证明:

$$
\kappa_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \frac{1+\|B\|_2}{1-\|B\|_2}.
$$

- **Lemma: (Matrix Analysis 定理 $7.3.3$)**
  给定复矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$，记 $q := \min\{m,n\}$.
  设 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_q$ 为 A 的奇异值.
  定义 Hermite 阵:

  $$
  \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0_{m\times m} & A \\ A^{\mathrm{H}} & 0_{n\times n} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(m+n)\times(m+n)}
  $$

  则 $\tilde{A}$ 的特征值为:

  $$
  -\sigma_1 \leq \cdots \leq -\sigma_q \leq \underbrace{0 = \cdots = 0}_{|m-n|} \leq \sigma_q \leq \cdots \leq \sigma_1.
  $$

  Proof:
  首先假设 $m \geq n$，设 A 的奇异值分解为:

$$
\begin{aligned}
A &= U\Sigma V^{\mathrm{H}} \\
&= [U_1, U_2]\begin{bmatrix} \Sigma_n \\ 0_{(m-n)\times n} \end{bmatrix} V^{\mathrm{H}} \\
&= U_1 \Sigma_n V^{\mathrm{H}},
\end{aligned}
$$

其中 $U \in \mathbb{C}^{m\times m}$ 和 $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为酉矩阵，$U_1 \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 由 U 的前 n 列构成，$\Sigma_n = \mathrm{diag}\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$. 于是我们有:

$$
\begin{aligned}
A &= U_1 \Sigma_1 V^{\mathrm{H}} \\
0_{m\times n} &= U_2 0_{(m-n)\times n} V^{\mathrm{H}} \\
A^{\mathrm{H}} &= V \Sigma_1 U_1^{\mathrm{H}} \\
0_{n\times m} &= V 0_{n\times (m-n)} U_2^{\mathrm{H}}
\end{aligned}
$$

定义 $m+n$ 阶矩阵:

$$
Q := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} U_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} U_1 & U_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} V & \frac{\sqrt{2}}{2} V & 0_{m\times (n-m)} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}
$$

容易验证 Q 是酉矩阵:

$$
\begin{aligned}
Q^{\mathrm{H}} Q &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} U_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} U_1 & U_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} V & \frac{\sqrt{2}}{2} V & 0_{m\times (n-m)} \end{bmatrix}^{\mathrm{H}} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} U_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} U_1 & U_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} V & \frac{\sqrt{2}}{2} V & 0_{m\times (n-m)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} U_1^{\mathrm{H}} & \frac{\sqrt{2}}{2} V^{\mathrm{H}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} U_1^{\mathrm{H}} & \frac{\sqrt{2}}{2} V^{\mathrm{H}} \\ U_2^{\mathrm{H}} & 0_{m\times (n-m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} U_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} U_1 & U_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} V & \frac{\sqrt{2}}{2} V & 0_{m\times (n-m)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} U_1^{\mathrm{H}} U_1 + \frac{1}{2} V^{\mathrm{H}} V & -\frac{1}{2} U_1^{\mathrm{H}} U_1 + \frac{1}{2} V^{\mathrm{H}} V & \frac{\sqrt{2}}{2} U_1^{\mathrm{H}} U_2 \\ -\frac{1}{2} U_1^{\mathrm{H}} U_1 + \frac{1}{2} V^{\mathrm{H}} V & \frac{1}{2} U_1^{\mathrm{H}} U_1 + \frac{1}{2} V^{\mathrm{H}} V & -\frac{\sqrt{2}}{2} U_1^{\mathrm{H}} U_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} U_2^{\mathrm{H}} U_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} U_2^{\mathrm{H}} U_1 & U_2^{\mathrm{H}} U \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times n} & 0_{n\times (m-n)} \\ 0_{n\times n} & I_n & 0_{n\times (m-n)} \\ 0_{(m-n)\times n} & 0_{(m-n)\times n} & I_{m-n} \end{bmatrix} \\
&= I_{m+n}
\end{aligned}
$$

同时我们有:

$$
\begin{aligned}
Q^{\mathrm{H}}\tilde{A}Q &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}U_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}U_1 & U_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}V & \frac{\sqrt{2}}{2}V & 0_{m\times(n-m)} \end{bmatrix}^{\mathrm{H}} \begin{bmatrix} 0_{m\times m} & A \\ A^{\mathrm{H}} & 0_{n\times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}U_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}U_1 & U_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}V & \frac{\sqrt{2}}{2}V & 0_{m\times(n-m)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}U_1^{\mathrm{H}} & \frac{\sqrt{2}}{2}V^{\mathrm{H}} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}U_1^{\mathrm{H}} & \frac{\sqrt{2}}{2}V^{\mathrm{H}} \\ U_2^{\mathrm{H}} & 0_{m\times(n-m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}AV & \frac{\sqrt{2}}{2}AV & 0_{m\times(n-m)} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}A^{\mathrm{H}}U_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}A^{\mathrm{H}}U_1 & A^{\mathrm{H}}U_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}U_1^{\mathrm{H}}AV + \frac{1}{2}V^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}U_1 & \frac{1}{2}U_1^{\mathrm{H}}AV - \frac{1}{2}V^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}U_1 & \frac{\sqrt{2}}{2}V^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}U_2 \\ -\frac{1}{2}U_1^{\mathrm{H}}AV + \frac{1}{2}V^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}U_1 & -\frac{1}{2}U_1^{\mathrm{H}}AV - \frac{1}{2}V^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}U_1 & \frac{\sqrt{2}}{2}V^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}U_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}U_2^{\mathrm{H}}AV & \frac{\sqrt{2}}{2}U_2^{\mathrm{H}}AV & 0_{(m-n)\times(m-n)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \Sigma_n & 0_{n\times n} & 0_{n\times(m-n)} \\ 0_{n\times n} & -\Sigma_n & 0_{n\times(m-n)} \\ 0_{(m-n)\times n} & 0_{(m-n)\times n} & 0_{(m-n)\times(m-n)} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

因此 $\tilde{A}$ 的特征值为:

$$
-\sigma_1 \le \cdots \le -\sigma_n \le \underbrace{0 = \cdots = 0}_{m-n} \le \sigma_n \le \cdots \le \sigma_1.
$$

当 $m < n$ 时我们可对 A^{H} 应用上述结论便可知

$$
\begin{bmatrix} 0_{n\times n} & A^{\mathrm{H}} \\ A & 0_{m\times m} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(m+n)\times(m+n)}
$$

的特征值为:

$$
-\sigma_1 \le \cdots \le -\sigma_m \le \underbrace{0 = \cdots = 0}_{n-m} \le \sigma_m \le \cdots \le \sigma_1.
$$

注意到:

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} & I_n \\ I_m & \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & A^{\mathrm{H}} \\ A & 0_{m\times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & I_n \\ I_m & \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} & I_m \\ I_n & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{\mathrm{H}} & 0_{n\times n} \\ 0_{m\times m} & A \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0_{m\times m} & A \\ A^{\mathrm{H}} & 0_{n\times n} \end{bmatrix} \\
&= \tilde{A}
\end{aligned}
$$

因此 $\tilde{A}$ 的特征值为:

$$
-\sigma_1 \le \cdots \le -\sigma_m \le \underbrace{0 = \cdots = 0}_{n-m} \le \sigma_m \le \cdots \le \sigma_1.
$$

综上所述，$\tilde{A}$ 的特征值为

$$
-\sigma_1 \le \cdots \le -\sigma_q \le \underbrace{0 = \cdots = 0}_{|m-n|} \le \sigma_q \le \cdots \le \sigma_1,
$$

其中 $q = \min\{m, n\}$.

Proof:
设 B 的奇异值为 $\sigma_1(B) \geq \cdots \geq \sigma_q(B)$ (其中 $q = \min\{m,n\}$).
根据引理可知 $A = \begin{bmatrix} I_m & B \\ B^{\mathrm{H}} & I_n \end{bmatrix}$ 的特征值为:

$$1 - \sigma_1(B) \leq \cdots \leq 1 - \sigma_q(B) \leq \underbrace{1 = \cdots = 1}_{|m-n|} \leq 1 + \sigma_q(B) \leq \cdots \leq 1 + \sigma_1(B)$$

显然 A 的模最大特征值 $\lambda_{\max}(A) = 1 + \sigma_1(B) = 1 + \|B\|_2$.
根据 $\sigma_1(B) = \|B\|_2 < 1$ 可知 A 的模最小特征值 $\lambda_{\min}(A) = 1 - \sigma_1(B) = 1 - \|B\|_2$.
注意到 A 是 Hermite 正定阵，因此有:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}(A) &= \lambda_{\max}(A) = 1 + \|B\|_2 \\ \sigma_{\min}(A) &= \lambda_{\min}(A) = 1 - \|B\|_2 \end{aligned}$$

于是有:

$$\begin{aligned} \kappa_2(A) &= \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 \\ &= \frac{\sigma_{\max}(A)}{\sigma_{\min}(A)} \\ &= \frac{1 + \|B\|_2}{1 - \|B\|_2} \end{aligned}$$

命题得证.

Problem 3

给定正整数 $n \geq 2$，设 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$.
试举例说明下列情况可能发生:

- ① $(AB)^\dagger \neq B^\dagger A^\dagger$
- ② $(A^k)^\dagger \neq (A^\dagger)^k$ (其中 $k \in \mathbb{Z}_+ \backslash \{1\}$)
- ③ $A^\dagger$ 的非零特征值的倒数不是 A 的特征值

Solution:
我们取以下 2 阶方阵:

$$\begin{aligned} A &:= \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 1 \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其特征值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}, 0$.
根据其精简 SVD 分解可知 A 的 Moore-Penrose 逆为:

$$
\begin{aligned}
A^\dagger &:= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot 1^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

注意到 $A^\dagger$ 的非零特征值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，其倒数 $\sqrt{2}$ 并非 A 的特征值.
因此命题 ③ 是有可能发生的.

取 $B = A$.
于是我们有:

$$
\begin{aligned}
AB &= A^2 \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
$$

根据其精简 SVD 分解可知 $AB = A^2$ 的 Moore-Penrose 逆为:

$$
\begin{aligned}
(AB)^\dagger &= (A^2)^\dagger \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

注意到:

$$
\begin{aligned}
B^\dagger A^\dagger &= (A^\dagger)^2 \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \\
&\neq (A^2)^\dagger = (AB)^\dagger
\end{aligned}
$$

因此命题 ①② 都是有可能发生的.

Problem 4

给定正整数 m, n, k.
若 $X \in \mathbb{C}^{m\times k}$ 列满秩，而 $Y \in \mathbb{C}^{k\times n}$ 行满秩，试证明 $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$.

Proof:
设 $X \in \mathbb{C}^{m\times k}$ 和 $Y \in \mathbb{C}^{k\times n}$ 的精简 SVD 分解为:

$$
\begin{aligned}
X &= U_1 \Sigma_1 V_1^{\mathrm{H}} \\
Y &= U_2 \Sigma_2 V_2^{\mathrm{H}},
\end{aligned}
$$

其中 $U_1 \in \mathbb{C}^{m\times k}$ 和 $V_2 \in \mathbb{C}^{n\times k}$ 列标准正交，$V_1, U_2 \in \mathbb{C}^{k\times k}$ 为酉矩阵，
而 $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是对角元均为正实数的对角阵.
则 X, Y 的 Moore-Penrose 逆为:

$$
\begin{aligned}
X^{\dagger} &= V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^{\mathrm{H}} \\
&= (V_1 \Sigma_1^{-2} V_1^{\mathrm{H}})(V_1 \Sigma_1 U_1^{\mathrm{H}}) \\
&= (V_1 \Sigma_1^2 V_1^{\mathrm{H}})^{-1} (U_1 \Sigma_1 V_1^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}} \\
&= [(U_1 \Sigma_1 V_1^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}} (U_1 \Sigma_1 V_1^{\mathrm{H}})]^{-1} (U_1 \Sigma_1 V_1^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}} \\
&= (X^{\mathrm{H}} X)^{-1} X^{\mathrm{H}} \\
\hline
Y^{\dagger} &= V_2 \Sigma_2^{-1} U_2^{\mathrm{H}} \\
&= (V_2 \Sigma_2 U_2^{\mathrm{H}})(U_2 \Sigma_2^{-2} U_2^{\mathrm{H}}) \\
&= (U_2 \Sigma_2 V_2^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}} (U_2 \Sigma_2^2 U_2^{\mathrm{H}})^{-1} \\
&= (U_2 \Sigma_2 V_2^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}} [(U_2 \Sigma_2 V_2^{\mathrm{H}})(U_2 \Sigma_2 V_2^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}]^{-1} \\
&= Y^{\mathrm{H}} (Y Y^{\mathrm{H}})^{-1}
\end{aligned}
$$

记:

$$
\begin{cases}
A := XY \\
B := Y^{\dagger} X^{\dagger} = Y^{\mathrm{H}} (Y Y^{\mathrm{H}})^{-1} (X^{\mathrm{H}} X)^{-1} X^{\mathrm{H}}
\end{cases}
$$

我们可以验证 B 满足 Penrose 方程组:

$$
\begin{aligned}
ABA &= (XY)[Y^{\mathrm{H}} (Y Y^{\mathrm{H}})^{-1} (X^{\mathrm{H}} X)^{-1} X^{\mathrm{H}}](XY) \\
&= X(Y Y^{\mathrm{H}})(Y Y^{\mathrm{H}})^{-1} (X^{\mathrm{H}} X)^{-1} (X^{\mathrm{H}} X) Y \\
&= XY \\
&= A \\
\hline
BAB &= [Y^{\mathrm{H}} (Y Y^{\mathrm{H}})^{-1} (X^{\mathrm{H}} X)^{-1} X^{\mathrm{H}}](XY)[Y^{\mathrm{H}} (Y Y^{\mathrm{H}})^{-1} (X^{\mathrm{H}} X)^{-1} X^{\mathrm{H}}] \\
&= Y^{\mathrm{H}} (Y Y^{\mathrm{H}})^{-1} (X^{\mathrm{H}} X)^{-1} (X^{\mathrm{H}} X)(Y Y^{\mathrm{H}})(Y Y^{\mathrm{H}})^{-1} (X^{\mathrm{H}} X)^{-1} X^{\mathrm{H}} \\
&= Y^{\mathrm{H}} (Y Y^{\mathrm{H}})^{-1} (X^{\mathrm{H}} X)^{-1} X^{\mathrm{H}} \\
&= B \\
\hline
(AB)^{\mathrm{H}} &= B^{\mathrm{H}} A^{\mathrm{H}} \\
&= [Y^{\mathrm{H}} (Y Y^{\mathrm{H}})^{-1} (X^{\mathrm{H}} X)^{-1} X^{\mathrm{H}}]^{\mathrm{H}} (XY)^{\mathrm{H}} \\
&= [X (X^{\mathrm{H}} X)^{-1} (Y Y^{\mathrm{H}})^{-1} Y](Y^{\mathrm{H}} X^{\mathrm{H}}) \\
&= X (X^{\mathrm{H}} X)^{-1} X^{\mathrm{H}} \\
&= (XY)[Y^{\mathrm{H}} (Y Y^{\mathrm{H}})^{-1} (X^{\mathrm{H}} X)^{-1} X^{\mathrm{H}}] \\
&= AB \\
\hline
(BA)^{\mathrm{H}} &= A^{\mathrm{H}} B^{\mathrm{H}} \\
&= (XY)^{\mathrm{H}} [Y^{\mathrm{H}} (Y Y^{\mathrm{H}})^{-1} (X^{\mathrm{H}} X)^{-1} X^{\mathrm{H}}]^{\mathrm{H}} \\
&= (Y^{\mathrm{H}} X^{\mathrm{H}})[X (X^{\mathrm{H}} X)^{-1} (Y Y^{\mathrm{H}})^{-1} Y] \\
&= Y^{\mathrm{H}} (Y Y^{\mathrm{H}})^{-1} Y \\
&= [Y^{\mathrm{H}} (Y Y^{\mathrm{H}})^{-1} (X^{\mathrm{H}} X)^{-1} X^{\mathrm{H}}](XY) \\
&= BA
\end{aligned}
$$

因此 $A = XY$ 的 Moore-Penrose 逆即为 $B = Y^{\dagger} X^{\dagger} = Y^{\mathrm{H}} (Y Y^{\mathrm{H}})^{-1} (X^{\mathrm{H}} X)^{-1} X^{\mathrm{H}}$.
命题得证.

Problem 5

给定正整数 m,n，$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，试求:

$$\max_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}\\ y\in\mathbb{C}^m\backslash\{0_m\}}}\frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2}\quad\text{and}\quad\min_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}\\ y\in\mathbb{C}^m\backslash\{0_m\}}}\frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2}$$

根据它们可以直接得出实数域上的结果.

Solution:
设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 的奇异值分解为 $A=U\Sigma V^{\mathrm{H}}$,
其中 $U\in\mathbb{C}^{m\times m}$ 和 $V\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 为酉矩阵，而 $\Sigma\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 的对角元均为非负实数.

任意给定 $x\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}$ 和 $y\in\mathbb{C}^m\backslash\{0_m\}$.
根据 $\mathrm{span}\{U\}=\mathbb{C}^m$ 和 $\mathrm{span}\{V\}=\mathbb{C}^n$ 可知:
存在 $\alpha\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}$ 和 $\beta\in\mathbb{C}^m\backslash\{0_m\}$ 使得:

$$\begin{cases}x=V\alpha\\ y=U\beta.\end{cases}$$

根据 l_2 范数的酉不变性可知:

$$\begin{aligned}\frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2}&=\frac{|(U\beta)^{\mathrm{H}}A(V\alpha)|}{\|U\beta\|_2\|V\alpha\|_2}\\&=\frac{|\beta^{\mathrm{H}}U^{\mathrm{H}}AV\alpha|}{\|\alpha\|_2\|\beta\|_2}\\&=\frac{|\beta^{\mathrm{H}}\Sigma\alpha|}{\|\alpha\|_2\|\beta\|_2}\end{aligned}$$

- ① 首先假设 $m=n$，则可设 $\Sigma=\mathrm{diag}\{\sigma_1,\dots,\sigma_n\}$,
  其中 $\sigma_{\max}=\sigma_1\geq\cdots\geq\sigma_n=\sigma_{\min}\geq 0$.
  于是我们有:

  $$\begin{aligned}\frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2}&=\frac{|\beta^{\mathrm{H}}\Sigma\alpha|}{\|\alpha\|_2\|\beta\|_2}\quad\text{(use Cauchy-Schwarz inequality)}\\&\leq\frac{\|\Sigma^{\frac{1}{2}}\alpha\|_2\|\Sigma^{\frac{1}{2}}\beta\|_2}{\|\alpha\|_2\|\beta\|_2}\\&\leq\frac{\sqrt{\sigma_{\max}}\|\alpha\|_2\cdot\sqrt{\sigma_{\max}}\|\beta\|_2}{\|\alpha\|_2\|\beta\|_2}\\&=\sigma_{\max}\end{aligned}$$

  当且仅当 $x=v_1,y=u_1$ 或 $x=-v_1,y=-u_1$ 时取等.
  因此我们有:

  $$\max_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}\\ y\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}}}\frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2}=\max_{\substack{\alpha\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}\\ \beta\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}}}\frac{|\beta^{\mathrm{H}}\Sigma\alpha|}{\|\alpha\|_2\|\beta\|_2}=\sigma_{\max}$$

  另一方面我们有:

$$\frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2} = \frac{|\beta^{\mathrm{H}}\Sigma\alpha|}{\|\alpha\|_2\|\beta\|_2} \geq 0$$

当且仅当 $\beta \perp \Sigma\alpha$ (即 $y \perp Ax$) 时取等.
因此我们有:

$$\min_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}\\ y\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}}} \frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2} = \min_{\substack{\alpha\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}\\ \beta\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}}} \frac{|\beta^{\mathrm{H}}\Sigma\alpha|}{\|\alpha\|_2\|\beta\|_2} = 0$$

- ② 其次假设 $m > n$，则我们可记:

$$\begin{aligned} A &= U\Sigma V^{\mathrm{H}} \\ &= [U_1, U_2]\begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ 0_{(m-n)\times n} \end{bmatrix} V^{\mathrm{H}} \\ &= U_1\Sigma_1 V^{\mathrm{H}} \end{aligned}$$

其中 $U_1 \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 由 U 的前 n 列构成，而 $\Sigma_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是对角元均为非负实数的对角阵.
将 $\beta \in \mathbb{C}^m\backslash\{0_m\}$ 对应地划分为 $\beta = [\beta_1 \quad \beta_2]^{\mathrm{T}}$ (其中 $\beta_1 \in \mathbb{C}^n$),
则我们有:

$$\begin{aligned} \frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2} &= \frac{|\beta^{\mathrm{H}}\Sigma\alpha|}{\|\alpha\|_2\|\beta\|_2} \\ &= \frac{\left|\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{H}} \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ 0_{(m-n)\times n} \end{bmatrix}\alpha\right|}{\|\alpha\|_2\|\beta\|_2} \\ &= \frac{|\beta_1^{\mathrm{H}}\Sigma\alpha|}{\|\alpha\|_2\|\beta\|_2} \quad (\text{note that } \|\beta_1\|_2 \leq \|\beta\|_2) \\ &\leq \frac{|\beta_1^{\mathrm{H}}\Sigma\alpha|}{\|\alpha\|_2\|\beta_1\|_2} \quad (\text{use conclusion of case (1)}) \\ &= \sigma_{\max} \end{aligned}$$

注意到当 $x = v_1, y = u_1$ 时我们有 $\frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2} = \frac{|u_1^{\mathrm{H}}Av_1|}{\|v_1\|_2\|u_1\|_2} = |u_1^{\mathrm{H}}(u_1\sigma_{\max})| = \sigma_{\max}$.
因此我们有:

$$\max_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}\\ y\in\mathbb{C}^m\backslash\{0_m\}}} \frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2} = \sigma_{\max}$$

另一方面我们有:

$$\begin{aligned} \frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2} &= \frac{|\beta^{\mathrm{H}}\Sigma\alpha|}{\|\alpha\|_2\|\beta\|_2} \\ &= \frac{|\beta_1^{\mathrm{H}}\Sigma_1\alpha|}{\|\alpha\|_2\|\beta\|_2} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

当且仅当 $\beta_1 \perp \Sigma_1\alpha$ (即 $y \perp Ax$) 时取等.
因此我们有:

$$\min_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}\\ y\in\mathbb{C}^m\backslash\{0_m\}}} \frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2} = \min_{\substack{\alpha\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}\\ \beta\in\mathbb{C}^m\backslash\{0_m\}}} \frac{|\beta^{\mathrm{H}}\Sigma\alpha|}{\|\alpha\|_2\|\beta\|_2} = 0$$

- ③ 最后假设 $m < n$，根据 ② 中的结论我们有:
  (显然 A, A^{H} 具有相同的奇异值)

$$\begin{aligned}
\max_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0_n\}\\ y\in\mathbb{C}^m\setminus\{0_m\}}} \frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2} &= \max_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0_n\}\\ y\in\mathbb{C}^m\setminus\{0_m\}}} \frac{|x^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}y|}{\|x\|_2\|y\|_2} = \sigma_{\max}(A^{\mathrm{H}}) = \sigma_{\max}(A) = \sigma_{\max} \\
\min_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0_n\}\\ y\in\mathbb{C}^m\setminus\{0_m\}}} \frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2} &= \min_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0_n\}\\ y\in\mathbb{C}^m\setminus\{0_m\}}} \frac{|x^{\mathrm{H}}A^{\mathrm{H}}y|}{\|x\|_2\|y\|_2} = 0
\end{aligned}$$

综上所述，我们有:

$$\begin{aligned}
\max_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0_n\}\\ y\in\mathbb{C}^m\setminus\{0_m\}}} \frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2} &= \sigma_{\max} \\
\min_{\substack{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0_n\}\\ y\in\mathbb{C}^m\setminus\{0_m\}}} \frac{|y^{\mathrm{H}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2} &= 0
\end{aligned}$$

推论:
在实数域上我们有:

$$\begin{aligned}
\min_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0_n\}\\ y\in\mathbb{R}^m\setminus\{0_m\}}} \frac{y^{\mathrm{T}}Ax}{\|x\|_2\|y\|_2} &= -\max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0_n\}\\ y\in\mathbb{R}^m\setminus\{0_m\}}} \frac{|y^{\mathrm{T}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2} = -\sigma_{\max} \\
\max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0_n\}\\ y\in\mathbb{R}^m\setminus\{0_m\}}} \frac{y^{\mathrm{T}}Ax}{\|x\|_2\|y\|_2} &= \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0_n\}\\ y\in\mathbb{R}^m\setminus\{0_m\}}} \frac{|y^{\mathrm{T}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2} = \sigma_{\max} \\
\min_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0_n\}\\ y\in\mathbb{R}^m\setminus\{0_m\}}} \frac{|y^{\mathrm{T}}Ax|}{\|x\|_2\|y\|_2} &= 0
\end{aligned}$$

命题得证.

Problem 6 (optional)

试证明对于任意复矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 都有:

$$A^{\dagger} = \lim_{\delta\to 0_+} (A^{\mathrm{H}}A + \delta I_n)^{-1}A^{\mathrm{H}} = \lim_{\delta\to 0_+} A^{\mathrm{H}}(AA^{\mathrm{H}} + \delta I_m)^{-1}.$$

Proof:
记 $r := \operatorname{rank}(A)$
设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 的奇异值分解为:

$$\begin{aligned}
A &= U\Sigma V^{\mathrm{H}} \\
&= [U_1, U_2]\begin{bmatrix} \Sigma_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}[V_1, V_2]^{\mathrm{H}} \\
&= U_1\Sigma_r V_1^{\mathrm{H}},
\end{aligned}$$

其中 $U \in \mathbb{C}^{m\times m}, V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为酉矩阵，$U_1 \in \mathbb{C}^{m\times r}, V_1 \in \mathbb{C}^{n\times r}$ 分别由 U, V 的前 r 列构成.
而 $\Sigma_r = \operatorname{diag}\{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$ ($\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$),
因此 A 的 Moore-Penrose 逆为 $A^{\dagger} := V_1\Sigma_r^{-1}U_1^{\mathrm{H}}$.

- ① 首先考虑 $(A^{\mathrm{H}}A+\delta I_n)^{-1}A^{\mathrm{H}}\ (\delta>0)$

$$
\begin{aligned}
(A^{\mathrm{H}}A+\delta I_n)^{-1}A^{\mathrm{H}} &= [(U\Sigma V^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}(U\Sigma V^{\mathrm{H}})+\delta I_n]^{-1}(U\Sigma V^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}} \\
&= (V\Sigma^{\mathrm{H}}\Sigma V^{\mathrm{H}}+\delta I_n)^{-1}(V\Sigma^{\mathrm{H}}U^{\mathrm{H}}) \\
&= V(\Sigma^{\mathrm{H}}\Sigma+\delta I_n)^{-1}V^{\mathrm{H}}V\Sigma^{\mathrm{H}}U^{\mathrm{H}} \\
&= V(\Sigma^{\mathrm{H}}\Sigma+\delta I_n)^{-1}\Sigma^{\mathrm{H}}U^{\mathrm{H}} \\
&= [V_1,V_2]\left(\begin{bmatrix}\Sigma_r^2+\delta I_r & \\ & \delta I_{n-r}\end{bmatrix}\right)^{-1}\left(\begin{bmatrix}\Sigma_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)}\end{bmatrix}\right)^{\mathrm{H}}[U_1,U_2]^{\mathrm{H}} \\
&= [V_1,V_2]\begin{bmatrix}(\Sigma_r^2+\delta I_r)^{-1} & \\ & \delta I_{n-r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Sigma_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(m-r)}\end{bmatrix}[U_1,U_2]^{\mathrm{H}} \\
&= [V_1,V_2]\begin{bmatrix}(\Sigma_r^2+\delta I_r)^{-1}\Sigma_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(m-r)}\end{bmatrix}[U_1,U_2]^{\mathrm{H}} \\
&= V_1(\Sigma_r^2+\delta I_r)^{-1}\Sigma_r U_1^{\mathrm{H}} \\
&\to V_1\Sigma_r^{-1}U_1^{\mathrm{H}} \quad (\delta\to 0_+)
\end{aligned}
$$

  因此我们有;

$$
A^{\dagger}=\lim_{\delta\to 0_+}(A^{\mathrm{H}}A+\delta I_n)^{-1}A^{\mathrm{H}}=V_1\Sigma_r^{-1}U_1^{\mathrm{H}}.
$$

- ② 其次考虑 $A^{\mathrm{H}}(AA^{\mathrm{H}}+\delta I_m)^{-1}\ (\delta>0)$

$$
\begin{aligned}
A^{\mathrm{H}}(AA^{\mathrm{H}}+\delta I_m)^{-1} &= (U\Sigma V^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}[(U\Sigma V^{\mathrm{H}})(U\Sigma V^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}+\delta I_m]^{-1} \\
&= (V\Sigma^{\mathrm{H}}U^{\mathrm{H}})(U\Sigma\Sigma^{\mathrm{H}}U+\delta I_m)^{-1} \\
&= V\Sigma^{\mathrm{H}}U^{\mathrm{H}}U(\Sigma\Sigma^{\mathrm{H}}+\delta I_m)^{-1}U^{\mathrm{H}} \\
&= V\Sigma^{\mathrm{H}}(\Sigma\Sigma^{\mathrm{H}}+\delta I_m)^{-1}U^{\mathrm{H}} \\
&= [V_1,V_2]\left(\begin{bmatrix}\Sigma_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)}\end{bmatrix}\right)^{\mathrm{H}}\left(\begin{bmatrix}\Sigma_r^2+\delta I_r & \\ & \delta I_{m-r}\end{bmatrix}\right)^{-1}[U_1,U_2]^{\mathrm{H}} \\
&= [V_1,V_2]\begin{bmatrix}\Sigma_r & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(m-r)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\Sigma_r^2+\delta I_r)^{-1} & \\ & \delta I_{m-r}\end{bmatrix}[U_1,U_2]^{\mathrm{H}} \\
&= [V_1,V_2]\begin{bmatrix}\Sigma_r(\Sigma_r^2+\delta I_r)^{-1} & 0_{r\times(m-r)} \\ 0_{(n-r)\times r} & 0_{(n-r)\times(m-r)}\end{bmatrix}[U_1,U_2]^{\mathrm{H}} \\
&= V_1\Sigma_r(\Sigma_r^2+\delta I_r)^{-1}U_1^{\mathrm{H}} \\
&\to V_1\Sigma_r^{-1}U_1^{\mathrm{H}} \quad (\delta\to 0_+)
\end{aligned}
$$

  因此我们有;

$$
A^{\dagger}=\lim_{\delta\to 0_+}A^{\mathrm{H}}(AA^{\mathrm{H}}+\delta I_m)^{-1}=V_1\Sigma_r^{-1}U_1^{\mathrm{H}}
$$

综上所述，我们有:

$$
\begin{aligned}
A^{\dagger} &= \lim_{\delta\to 0_+}(A^{\mathrm{H}}A+\delta I_n)^{-1}A^{\mathrm{H}} \\
&= \lim_{\delta\to 0_+}A^{\mathrm{H}}(AA^{\mathrm{H}}+\delta I_m)^{-1} \\
&= V_1\Sigma_r^{-1}U_1^{\mathrm{H}}
\end{aligned}
$$

命题得证.

Problem 7 (optional)

试证明对于任意实数 $a,b,c\in\mathbb{R}$ 都有:

$$-\frac{3}{2}(a^2+b^2+2c^2)\le 3ab+bc+ca\le\frac{3+\sqrt{13}}{4}(a^2+b^2+2c^2).$$

Proof:
首先考虑证明左侧的不等式:

$$\begin{gathered}
-\frac{3}{2}(a^2+b^2+2c^2)\le 3ab+bc+ca\quad(\forall\ a,b,c\in\mathbb{R})\\
\Leftrightarrow\\
\frac{3}{2}a^2+\frac{3}{2}b^2+3c^2+3ab+bc+ca\ge 0\quad(\forall\ a,b,c\in\mathbb{R})\\
\Leftrightarrow\\
\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}3&3&1\\3&3&1\\1&1&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}\ge 0\quad(\forall\ a,b,c\in\mathbb{R})\\
\Leftrightarrow\\
\lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix}3&3&1\\3&3&1\\1&1&6\end{bmatrix}\right)\ge 0\quad(\text{Rayleigh-Ritz Theorem})
\end{gathered}$$

我们只需说明上述系数矩阵半正定即可，
即只需说明系数矩阵的任意主子式 (注意不仅仅是顺序主子式) 都是非负实数:

$$\begin{gathered}
\det\left(\begin{bmatrix}3&3\\3&3\end{bmatrix}\right)=0\\
\det\left(\begin{bmatrix}3&1\\1&6\end{bmatrix}\right)=17\\
\det\left(\begin{bmatrix}3&3&1\\3&3&1\\1&1&6\end{bmatrix}\right)=0
\end{gathered}$$

这样我们就证明了左侧不等式成立.

接下来考虑证明右侧的不等式:

$$
3ab+bc+ca \le \frac{3+\sqrt{13}}{4}(a^2+b^2+2c^2) \quad (\forall\, a,b,c \in \mathbb{R})
$$

$$
\Leftrightarrow
$$

$$
\frac{3+\sqrt{13}}{4}(a^2+b^2+2c^2) - 3ab - bc - ca \ge 0 \quad (\forall\, a,b,c \in \mathbb{R})
$$

$$
\Leftrightarrow
$$

$$
\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{13}}{2} & -3 & -1 \\ -3 & \frac{3+\sqrt{13}}{2} & -1 \\ -1 & -1 & 3+\sqrt{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \ge 0 \quad (\forall\, a,b,c \in \mathbb{R})
$$

$$
\Leftrightarrow
$$

$$
\lambda_{\min}\left(\begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{13}}{2} & -3 & -1 \\ -3 & \frac{3+\sqrt{13}}{2} & -1 \\ -1 & -1 & 3+\sqrt{13} \end{bmatrix} \right) \ge 0
$$

我们只需说明上述系数矩阵半正定即可,
即只需说明系数矩阵的任意主子式 (注意不仅仅是顺序主子式) 都是非负实数:

$$
\begin{aligned}
\det\left(\begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{13}}{2} & -3 \\ -3 & \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{bmatrix} \right) &= \frac{3\sqrt{13}-7}{2} \ge 0 \\
\det\left(\begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{13}}{2} & -1 \\ -1 & 3+\sqrt{13} \end{bmatrix} \right) &= 10+3\sqrt{13} \ge 0 \\
\det\left(\begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{13}}{2} & -3 & -1 \\ -3 & \frac{3+\sqrt{13}}{2} & -1 \\ -1 & -1 & 3+\sqrt{13} \end{bmatrix} \right) &= \frac{\sqrt{13}-3}{2} \begin{vmatrix} \frac{3+\sqrt{13}}{2} & -3 & \frac{3-\sqrt{13}}{2} \\ -3 & \frac{3+\sqrt{13}}{2} & \frac{3-\sqrt{13}}{2} \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\
&= \frac{\sqrt{13}-3}{2} \begin{vmatrix} \frac{3+\sqrt{13}}{2} & -3 & 0 \\ -3 & \frac{3+\sqrt{13}}{2} & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

这样我们就证明了右侧不等式成立.

The End