FDU 随机过程导论 6. Brown 运动

本文根据王老师课堂笔记整理而成，并参考了以下教材：

- 随机过程 (苏中根) 第 7 章
- Introduction to Probability Models: Applied Stochastic Processes (S. Ross)
- 应用随机过程概率论模型导论 (S. Ross) 龚光鲁译 第 10 章

欢迎批评指正!

6.1 Brown 运动

6.1.1 第一种定义

考虑连续时间的随机过程 $\mathbf{B}=\{B(t):t\geq 0\}$，其状态空间 $\mathcal{E}=\mathbb{R}$
若 $\{B(t):t\geq 0\}$ 满足：

- **初始状态**：$B(0)=0$
- **具有独立平稳增量**：
  - **独立增量**：
    对于任意 $0<t_1<t_2<\cdots<t_k$ 都有 $B(t_1),B(t_2)-B(t_1),\ldots,B(t_k)-B(t_{k-1})$ 相互独立.
  - **平稳增量**：
    对于任意 $0<s<t$ 都有 $B(t)-B(s)\overset{\mathrm{d}}{=}B(t-s)$
- **正态分布**：对于任意 $t>0$ 都有 $B(t)\sim N(0,\sigma^2 t)$

则我们称 $\{B(t):t\geq 0\}$ 是参数为 σ^2 的 **Brown 运动**.
特别地，当 $\sigma^2=1$ 时，称为**标准 Brown 运动**.
任意 Brown 运动都可通过 $\widetilde{B}(t)=\frac{1}{\sigma}B(t)$ 转化为标准 Brown 运动.
因此除非特别声明，我们默认考虑标准 Brown 运动.

6.1.2 基本性质

- **均值函数**：
  $\mathbb{E}[B(t)]\equiv 0$
- **方差函数**：
  $\operatorname{Var}(B(t))=t\ \ (t\geq 0)$
- **自相关函数**：(假设 $0<s<t$)
  $$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(B(s),B(t))&=\mathbb{E}[(B(s)-0)(B(t)-0)]\\&=\mathbb{E}[B(s)(B(s)+B(t)-B(s))]\\&=\mathbb{E}[(B(s))^2]+\mathbb{E}[B(s)]\mathbb{E}[B(t)-B(s)]\\&=\operatorname{Var}[B(s)]+(\mathbb{E}[B(s)])^2+\mathbb{E}[B(s)](\mathbb{E}[B(t)]-\mathbb{E}[B(s)])\\&=s+0^2+0\cdot(0-0)\\&=s\end{aligned}$$
  表明对于任意 $s,t\geq 0$ 都有 $\operatorname{Cov}(B(s),B(t))=\min\{s,t\}=s\wedge t$
  这是 Brown 运动的典型特征.
- 值得注意的是，对于任意 $s,t\geq 0$ 都有：
  $$\begin{aligned}\operatorname{Var}(B(s)-B(t))&=\operatorname{Var}(B(s))-2\operatorname{Cov}(B(s),B(t))+\operatorname{Var}(B(t))\\&=s-2\min\{s,t\}+t\\&=|t-s|\end{aligned}$$

注意到 $\begin{cases} B(t_1) = B(t_1) \\ B(t_2) = B(t_1) + B(t_2) - B(t_1) \\ \quad \cdots \\ B(t_n) = B(t_1) + B(t_2) - B(t_1) + \cdots + B(t_n) - B(t_{n-1}) \end{cases}$

根据 Brown 运动的正态分布性和增量独立性，我们知道：

$$\begin{bmatrix} B(t_1) \\ B(t_2) - B(t_1) \\ \vdots \\ B(t_n) - B(t_{n-1}) \end{bmatrix} \sim N(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t_1 & & & \\ & t_2 - t_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_n - t_{n-1} \end{bmatrix})$$ (我们记其协方差矩阵为 D_n)

基于 $\begin{bmatrix} B(t_1) \\ B(t_2) \\ \vdots \\ B(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B(t_1) \\ B(t_2) - B(t_1) \\ \vdots \\ B(t_n) - B(t_{n-1}) \end{bmatrix}$ (我们记其变换矩阵为 A)

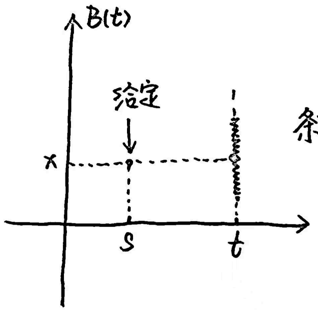
我们容易知道 $(B(t_1), B(t_2), \ldots, B(t_n)) \sim N(0_n, \Sigma_n)$

其中**协方差矩阵** $\Sigma_n = (t_i \wedge t_j)_{n\times n} = (\min\{t_i, t_j\})_{n\times n} = AD_nA^T$

这表明 Brown 运动是 **Gauss 过程** (正态过程)，即**任意有限维联合分布都是正态分布**.

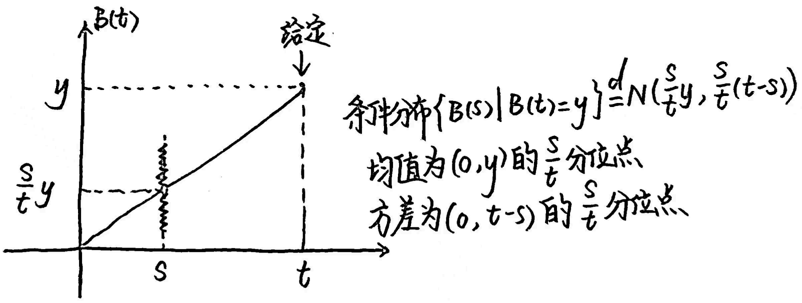
我们有以下推论：

- **Brown 运动的任意有限线性组合都服从正态分布：**
  对于任意 $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ 都有 $\sum_{k=1}^n c_k B(t_k) \sim N(0, \sigma_n^2)$
  其中 $\sigma_n^2 = c^T\Sigma_n c = c^TAD_nA^Tc = \sum_{k=1}^n \{(\sum_{i=k}^n c_i)^2 \cdot (t_k - t_{k-1})\}$ (我们假设 $t_0 = 0$)
  具体来说是这样的：
  $$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= c^T\Sigma_n c \\ &= c^TAD_nA^Tc \\ &= (A^Tc)^TD_n(A^Tc) \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n c_i \\ \sum_{i=2}^n c_i \\ \vdots \\ \sum_{i=n}^n c_i \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} t_1 & & & \\ & t_2 - t_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_n - t_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n c_i \\ \sum_{i=2}^n c_i \\ \vdots \\ \sum_{i=n}^n c_i \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^n \{(\sum_{i=k}^n c_i)^2 \cdot (t_k - t_{k-1})\} \end{aligned}$$
- 对于任意 $0 < s < t$ 都有联合分布：
  $\begin{bmatrix} B(s) \\ B(t) - B(s) \end{bmatrix} \sim N(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s & \\ & t - s \end{bmatrix})$
  因此**条件分布** $\{B(t)|B(s) = x\} \sim N(x, t - s)$
  条件密度函数为：
  $\mathrm{P}\{B(t) = y|B(s) = x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\exp\{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\}\ \ (\forall\, y \in \mathbb{R})$

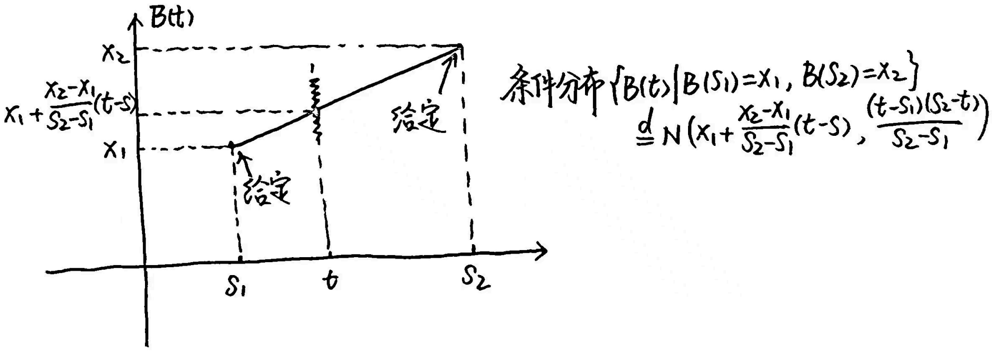


条件分布 $\{B(t)|B(s)=x\} \overset{d}{=} N(x, t-s)$
均值不变，相当于重启Brown运动

反过来，**条件分布** $\{B(s)|B(t)=y\} \sim N(\frac{s}{t}y, \frac{s}{t}(t-s))$
条件密度函数为：
$\mathrm{P}\{B(s)=x|B(t)=y\} = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{2\pi s(t-s)}}\exp\{-\frac{(tx-sy)^2}{2st(t-s)}\}\ \ (\forall\, x\in\mathbb{R})$



- 对于任意 $0<s_1<t<s_2$ 都有联合分布：
  $\begin{bmatrix} B(s_1) \\ B(t)-B(s_1) \\ B(s_2)-B(t) \end{bmatrix} \sim N(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_1 & & \\ & t-s_1 & \\ & & s_2-t \end{bmatrix})$
  条件分布 $\{B(t)|B(s_1)=x_1, B(s_2)=x_2\} \sim N(x_1+\frac{x_2-x_1}{s_2-s_1}(t-s), \frac{(t-s_1)(s_2-t)}{s_2-s_1})$



Brown 运动的样本曲线非常奇特.
它的每条样本曲线**几乎处处连续**，但**无处可微**.
即对于任意 t_0 都有 $\lim\limits_{t\to t_0}\mathrm{P}\{|B(t)-B(t_0)|>\varepsilon\}=0\ \ (\forall\,\varepsilon>0)$,
但另一方面 $|B(t)-B(t_0)|\approx|t-t_0|^{\frac{1}{2}}$，表明曲线 $B(t)$ 不可微.
我们用离散点列逼近 Brown 运动的样本曲线：(就像压缩版的一维对称简单随机游动)

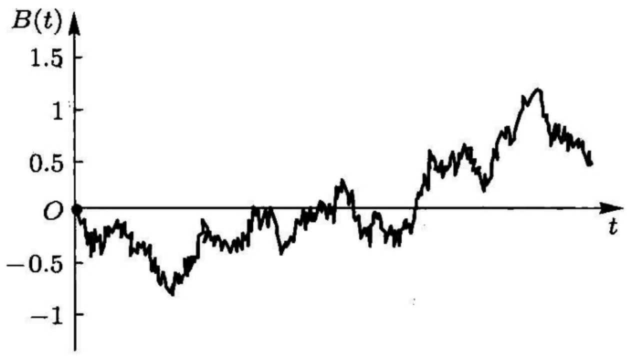


图 7.1

- **几乎处处连续**：

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta t\to 0}\mathrm{P}\{|B(t+\Delta t)-B(t)|>\varepsilon\} &= \lim_{\Delta t\to 0}\mathrm{P}\{|N(0,\Delta t)|>\varepsilon\} \\
&\le \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbb{E}[(N(0,\Delta t))^2]}{\varepsilon^2} \quad \text{(Chebyshev inequality)} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathrm{Var}[N(0,\Delta t)]}{\varepsilon^2} \\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta t}{\varepsilon^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

因此对于任意 $\varepsilon > 0$ 都有 $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \mathrm{P}\{|B(t+\Delta t)-B(t)|>\varepsilon\}=0$ 成立,
表明 $\mathbf{B}=\{B(t):t\geq 0\}$ 的样本轨道几乎处处连续.

- **无处可微:**
  直观上，可以将 Brown 运动的样本路径想象为一种极其不规则的曲线.
  虽然这条曲线是连续的，但在任意小的时间间隔内，它都会经历剧烈的波动,
  使得无法在任何点上定义其切线，即无法计算其导数.

  考虑一维 Brown 运动的变化率:
  $$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{B(t+\Delta t)-B(t)}{\Delta t}&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{N(0,\Delta t)}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{N(0,1)}{\sqrt{\Delta t}}\end{aligned}$$
  显然
  根据 t 的任意性可知 $\mathbf{B}=\{B(t):t\geq 0\}$ 的样本轨道无处可微.

6.1.3 第二种定义

定理 6.1.1: (Brown 运动的第二种等价定义, 苏中根 定理 7.1)
若 $\mathbf{X}=\{X(t):t\geq 0\}$ 是一个**实数值 Gauss 过程** (即任意有限维联合正态),
且 $\begin{cases}\mathbb{E}[X(t)]=0\\ \operatorname{Cov}[X(s),X(t)]=s\wedge t=\min\{s,t\}\end{cases}$
则 $\mathbf{X}=\{X(t):t\geq 0\}$ 是**标准 Brown 运动**.

- $\mathbf{X}=\{X(t):t\geq 0\}$ 为 Gauss 过程当且仅当任意线性组合为正态随机变量,
  即任意给定 n 个时刻 $t_1,t_2,\ldots,t_n$ 和 $c_1,c_2,\ldots,c_n$
  其线性组合 $\sum\limits_{i=1}^{n}c_iX(t_i)$ 为正态随机变量.

> **Brown 运动的第一种等价定义:**
> 考虑连续时间的随机过程 $\mathbf{B}=\{B(t):t\geq 0\}$，其状态空间 $\mathcal{E}=\mathbb{R}$
> 若 $\{B(t):t\geq 0\}$ 满足:
>
> - **初始状态:** $B(0)=0$
> - **具有独立平稳增量:**
>   - **独立增量:**
>   对于任意 $0<t_1<t_2<\cdots<t_k$ 都有 $B(t_1),B(t_2)-B(t_1),\ldots,B(t_k)-B(t_{k-1})$ 相互独立.
>   - **平稳增量:**
>   对于任意 $0<s<t$ 都有 $B(t)-B(s)\overset{\mathrm{d}}{=}B(t-s)$
> - **正态分布:** 对于任意 $t>0$ 都有 $B(t)\sim N(0,\sigma^2 t)$
>
> 则我们称 $\{B(t):t\geq 0\}$ 是参数为 σ^2 的 **Brown 运动**.
> 特别地，当 $\sigma^2=1$ 时，称为**标准 Brown 运动**.

定理 6.1.1 的证明:
我们逐一验证第一种定义中的各项性质:

- **正态分布:**
  对于任意 $t>0$ 都有 $X(t)\sim N(0,t)$
- **初始状态:**
  根据 $\begin{cases}\mathbb{E}[X(t)]=0\\ \operatorname{Cov}[X(s),X(t)]=s\wedge t=\min\{s,t\}\end{cases}$ 可知 $\begin{cases}\mathbb{E}[X(0)]=0\\ \operatorname{Var}[X(0)]=0\end{cases}$
  因此 $X(0)\overset{a.s.}{=}0$
- **增量平稳性:**
  对于任意给定的 $0<s<t$，增量 $X(t)-X(s)$ 都服从正态分布,
  且满足 $\begin{cases}\mathbb{E}[X(t)-X(s)]=\mathbb{E}[X(t)]-\mathbb{E}[X(s)]=0-0=0\\ \begin{aligned}\operatorname{Var}[X(t)-X(s)]&=\operatorname{Var}[X(t)]+\operatorname{Var}[X(s)]-2\operatorname{Cov}(X(t),X(s))\\&=t+s-2t\wedge s\\&=t-s\end{aligned}\end{cases}$
  因此 $X(t)-X(s)\sim N(0,t-s)$，从而与 $X(t-s)$ 同分布.

- **增量独立性:**
  对于任意给定的 $0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，
  我们知道 $X(t_1),X(t_2)-X(t_1),\ldots,X(t_n)-X(t_{n-1})$ **联合正态**，
  并且两两之间协方差为 0，表明两两之间**不相关**，等价于两两之间**相互独立**.

  > 对于任意 $0<s<t$ 我们有:
  > $$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X(s),X(t)-X(s))&=\operatorname{Cov}(X(s),X(t))-\operatorname{Var}(X(s))\\&=s\wedge t-s\\&=s-s\\&=0\end{aligned}$$

综上所述 $\{X(t):t\geq 0\}$ 是**标准 Brown 运动**，命题得证.

定理 6.1.1 的推论:
设 $\mathbf{B}=\{B(t):t\geq 0\}$ 是标准 Brown 运动.
下列基于 $B(t)$ 得到的三个过程均是标准 Brown 运动:

- 给定 $t_0\geq 0$，定义 $X(t)=B(t+t_0)-B(t_0)\quad(t\geq 0)$
- 给定 $\alpha>0$，定义 $X(t)=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}B(\alpha t)\;\;(t\geq 0)$
- 定义 $X(t)=\begin{cases}tB(t^{-1}) & t>0\\0 & t=0\end{cases}$

基于定理 6.1.1 (标准 Brown 运动第二种等价定义) 的证明:

- 给定 $t_0\geq 0$，定义 $X(t)=B(t+t_0)-B(t_0)\quad(t\geq 0)$
  - 任意给定 n 个时刻 $t_1,t_2,\ldots,t_n$ 和 $c_1,c_2,\ldots,c_n$
    考虑其**线性组合** $\sum\limits_{i=1}^n c_iX(t_i)$:
    $$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n c_iX(t_i)&=\sum_{i=1}^n c_i[B(t_i+t_0)-B(t_0)]\\&=\sum_{i=1}^n c_iB(t_i+t_0)-\sum_{i=1}^n c_iB(t_0)\end{aligned}$$
    它作为正态随机变量 $\{B(t_i+t_0)\}_{i=1}^n$ 和 $B(t_0)$ 的线性组合，也是**正态随机变量**.
    表明 $\mathbf{X}=\{X(t):t\geq 0\}$ 是 **Gauss 过程** (正态过程).
  - 我们计算 $\mathbf{X}=\{X(t):t\geq 0\}$ 的均值函数和自相关函数:
    $$\begin{cases}\begin{aligned}\mathbb{E}[X(t)]&=\mathbb{E}[B(t+t_0)-B(t_0)]\\&=0-0\\&=0\quad(\forall\, t\geq 0)\end{aligned}\\ \begin{aligned}\operatorname{Cov}(X(s),X(t))&=\mathbb{E}[(X(s)-0)(X(t)-0)]\\&=\mathbb{E}[(B(s+t_0)-B(t_0))(B(t+t_0)-B(t_0))]\\&=\operatorname{Cov}(B(s+t_0),B(t+t_0))-\operatorname{Cov}(B(t_0),B(t+t_0))-\operatorname{Cov}(B(s+t_0),B(t_0))+\operatorname{Var}(B(t_0))\\&=(s+t_0)\wedge(t+t_0)-t_0\wedge(t+t_0)-(s+t_0)\wedge t_0+t_0\\&=\{s\wedge t+t_0\}-t_0-t_0+t_0\\&=s\wedge t\quad(\forall\, s,t\geq 0)\end{aligned}\end{cases}$$

  综上所述，$\mathbf{X}=\{X(t):t\geq 0\}$ 符合**标准 Brown 运动的第二种等价定义**.
- 给定 $\alpha>0$，定义 $X(t)=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}B(\alpha t)\;\;(t\geq 0)$
  - 任意给定 n 个时刻 $t_1,t_2,\ldots,t_n$ 和 $c_1,c_2,\ldots,c_n$
    考虑其**线性组合** $\sum\limits_{i=1}^n c_iX(t_i)=\sum\limits_{i=1}^n c_i\frac{1}{\sqrt{\alpha}}B(\alpha t_i)$
    它作为正态随机变量 $\{B(\alpha t_i)\}_{i=1}^n$ 的线性组合，也是**正态随机变量**.
    表明 $\mathbf{X}=\{X(t):t\geq 0\}$ 是 **Gauss 过程** (正态过程).
  - 我们计算 $\mathbf{X}=\{X(t):t\geq 0\}$ 的均值函数和自相关函数:
    $$\begin{cases}\begin{aligned}\mathbb{E}[X(t)]&=\mathbb{E}[\tfrac{1}{\sqrt{\alpha}}B(\alpha t)]\\&=\tfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\cdot 0\\&=0\quad(\forall\, t\geq 0)\end{aligned}\\ \begin{aligned}\operatorname{Cov}(X(s),X(t))&=\mathbb{E}[(X(s)-0)(X(t)-0)]\\&=\mathbb{E}[\tfrac{1}{\sqrt{\alpha}}B(\alpha s)\cdot\tfrac{1}{\sqrt{\alpha}}B(\alpha t)]\\&=\tfrac{1}{\alpha}\cdot[(\alpha s)\wedge(\alpha t)]\\&=s\wedge t\quad(\forall\, s,t\geq 0)\end{aligned}\end{cases}$$

  综上所述，$\mathbf{X}=\{X(t):t\geq 0\}$ 符合**标准 Brown 运动的第二种等价定义**.

- 定义 $X(t)=\begin{cases}tB(t^{-1}) & t>0\\ 0 & t=0\end{cases}$
  - 不失一般性 (包含零时刻的情况非常容易处理，就是下面的情况简单地加上了常数 0)，
    任意给定 n 个**非零**时刻 $t_1,t_2,\ldots,t_n\neq 0$ 和 $c_1,c_2,\ldots,c_n$
    考虑其**线性组合** $\sum_{i=1}^n c_iX(t_i)=\sum_{i=1}^n c_i\cdot t_iB(t_i^{-1})$
    它作为正态随机变量 $\{B(t_i^{-1})\}_{i=1}^n$ 的线性组合，也是**正态随机变量**.
    表明 $\mathbf{X}=\{X(t):t\geq 0\}$ 是 **Gauss 过程** (正态过程).
  - 我们计算 $\mathbf{X}=\{X(t):t\geq 0\}$ 的均值函数和自相关函数：
    首先考虑非平凡情况 $\begin{cases}\mathbb{E}[X(t)]=\mathbb{E}[tB(t^{-1})]\\ \qquad\quad\;\; =t\cdot 0\\ \qquad\quad\;\; =0\quad(\forall\, t>0)\\ \mathrm{Cov}(X(s),X(t))=\mathbb{E}[(X(s)-0)(X(t)-0)]\\ \qquad\qquad\qquad\quad\;\; =\mathbb{E}[sB(s^{-1})\cdot tB(t^{-1})]\\ \qquad\qquad\qquad\quad\;\; =st\cdot[(s^{-1})\wedge(t^{-1})]\\ \qquad\qquad\qquad\quad\;\; =t\wedge s\quad(\forall\, s,t>0)\end{cases}$
    对于 $t=0$ 的平凡情况，$\mathbb{E}[X(0)]=0$ 依然满足通式 $\mathbb{E}[X(t)]=0$.
    对于 s,t 中至少有一个是 0 的平凡情况 (不妨假设 $s=0$)，
    $\mathrm{Cov}(X(0),X(t))=\mathrm{Cov}(0,X(t))=0$ 依然满足通式 $\mathrm{Cov}(X(s),X(t))=s\wedge t$.

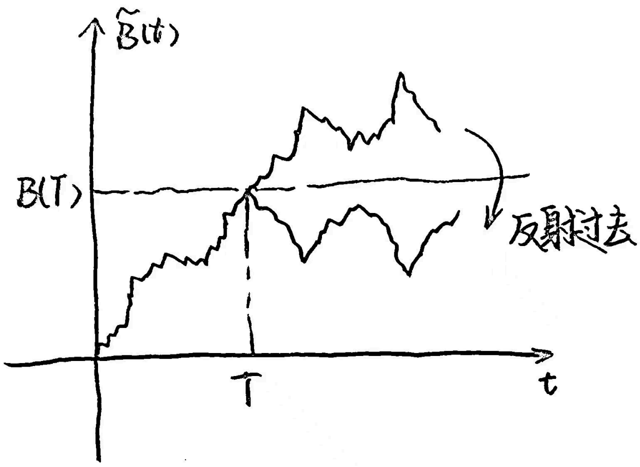
  综上所述，$\mathbf{X}=\{X(t):t\geq 0\}$ 符合**标准 Brown 运动的第二种等价定义**.

概率空间 $(\Omega,\mathcal{E},\mathrm{P})$ 由**样本空间** Ω、**事件空间** $\mathcal{E}=\{E:E\subseteq\Omega\}$、**概率函数** $\mathrm{P}:\mathcal{E}\to[0,1]$ 构成.
我们定义 $\{E_t\}_{t\geq 0}$ 是概率空间的一个**过滤** (filtration)，
即一族逐渐增大的 σ-代数，对于任意 $0\leq s\leq t$ 满足 $E_s\subseteq E_t$
过滤 $\{E_t\}_{t\geq 0}$ 通常被解释为随时间 t 推移的信息积累.

考虑随机变量 τ
若对于任意 $t\geq 0$，事件 $\{\tau\leq t\}$ 都属于 E_t，
则我们称 τ 为 $\{E_t\}_{t\geq 0}$ 的**停时** (stopping time).
换句话说，在时刻 t 时，根据已有的观察结果能够确定停时 τ 是否已经发生.

停时是一个随机时刻，其是否发生只取决于当前及之前的观察结果，而与未来无关.
例如在赌徒问题中，赌徒停止赌博的时刻可以被看作是一个停时，
因为这一时刻的发生取决于赌徒截至到目前为止的输赢情况，而不依赖于未来的输赢.

- 停时的**反射原理** (reflect principle)
  若 T 是停时，则 $\tilde{B}(t)\overset{\Delta}{=}\begin{cases}B(t) & t\leq T\\ 2B(T)-B(t) & t>T\end{cases}$ 定义了一个**标准 Brown 运动**



我们刚刚证明了：
若 $\mathbf{B}=\{B(t):t\geq 0\}$ 是**标准 Brown 运动**，
则随机过程 $\mathbf{X}=\{X(t)=B(t+t_0)-B(t_0):t\geq 0\}$ 也是**标准 Brown 运动**.
事实上，我们可以推广这个结论：

- 记 $\mathbf{B}=\{B(t):t\geq 0\}$ 的**自然过滤** $E_t=\sigma(B(s):0\leq s\leq t)$，
  它表示由 Brown 运动在时间区间 $[0,t]$ 上所有值生成的最小的 σ-代数.
  这一过滤表示在时间 t 时刻我们能够获取的所有信息.

记 T 是 $\{E_t : t \geq 0\}$ 的**停时**,
定义 $X(t) = B(t+T) - B(T) \ \ (t \geq 0)$
则 $\mathbf{X} = \{X(t) : t \geq 0\}$ 是**标准 Brown 运动**.
这称为**强 Markov 性**.

6.1.4 相关过程

Brown 运动是最基本的一类过程，基于它可以产生一些有趣的过程.

(1) Brown 桥

定义 **Brown 桥** $\mathbf{B}^0 = \{B^0(t) = B(t) - tB(1) : 0 \leq t \leq 1\}$
显然它是一个**均值函数**恒为 0 的**正态过程**.
对于任意 $0 \leq s, t \leq 1$，其**自相关函数**为:

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(B^0(s), B^0(t)) &= \mathbb{E}[B^0(s)B^0(t)] \\ &= \mathbb{E}[(B(s) - sB(1))(B(t) - tB(1))] \\ &= \operatorname{Cov}(B(s), B(t)) - s\operatorname{Cov}(B(1), B(t)) - t\operatorname{Cov}(B(s), B(1)) + st\operatorname{Var}(B(1)) \\ &= s \wedge t - s \cdot (1 \wedge t) - t \cdot (s \wedge 1) + st \cdot 1 \\ &= s \wedge t - s \cdot t - t \cdot s + st \cdot 1 \\ &= s \wedge t - st\end{aligned}$$

(苏中根 7.1 节(五(1)) 将上述结果写为 $s \wedge t(1 - s \vee t)$，或许有他的理由吧 (雾))

我们可以写出其任意有限维的联合分布 (其中 $0 < t_1 < \cdots < t_n$):

$$\begin{bmatrix} B^0(t_1) \\ B^0(t_2) \\ \vdots \\ B^0(t_n) \end{bmatrix} \sim N(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t_1 - t_1^2 & t_1 - t_1 t_2 & \cdots & t_1 - t_1 t_n \\ t_1 - t_2 t_1 & t_2 - t_2^2 & \cdots & t_2 - t_2 t_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_1 - t_n t_1 & t_2 - t_n t_2 & \cdots & t_n - t_n^2 \end{bmatrix})$$

- **回忆起之前的结论:**
  对于任意 $0 < s < t$ 都有**条件分布** $\{B(s)|B(t) = y\} \sim N(\frac{s}{t}y, \frac{s}{t}(t-s))$
  根据 $\mathbf{B}^0 = \{B^0(t) = B(t) - tB(1) : 0 \leq t \leq 1\}$ 的定义,
  我们有 $B^0(t) \overset{\text{d}}{=} (B(t)|B(1) = 0) \sim N(0, \frac{t}{1}(1-t)) = N(0, t - t^2)$
  这表明 Brown 桥与 $(B(t)|B(1) = 0)$ 同分布.

Brown 桥在非参数统计中假设检验问题的研究中起着非常重要的作用.

(2) 反射 Brown 运动

定义**反射 Brown 运动** $\mathbf{X} = \{X(t) = |B(t)| : t \geq 0\}$
显然 $X(t)$ 仅取非负实数值，**不再是正态过程**.
给定 $t > 0$，$X(t)$ 的概率密度函数为 $p(x;t) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$
(对于 $t = 0$ 的平凡情况，$X(0)$ 为 0 处的退化分布，即单点分布)

- 计算 $X(t)$ 的**均值函数**:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(t)] &= \int_0^\infty x \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cdot t \int_0^\infty \frac{x}{t} \cdot e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\ &= \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \int_0^\infty e^{-u} du \quad (u = \frac{x^2}{2t}) \\ &= \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \cdot \Gamma(1) \\ &= \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \quad (\forall\, t > 0)\end{aligned}$$

  对于 $t = 0$ 的平凡情况，$\mathbb{E}[X(0)] = 0$ 依然满足通式 $\mathbb{E}[X(t)] = \sqrt{\frac{2t}{\pi}}$
  因此我们有 $\mathbb{E}[X(t)] = \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \ \ (\forall\, t \geq 0)$

- 计算 $X(t)$ 的**二阶矩函数** (此时它不等于方差函数):
  $$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X(t))^2]&=\mathbb{E}[(B(t))^2]\\&=\text{Var}(B(t))\\&=t\quad(\forall\, t\geq 0)\end{aligned}$$
- 计算 $X(t)$ 的**方差函数**:
  $$\begin{aligned}\text{Var}(X(t))&=\mathbb{E}[(X(t))^2]-(\mathbb{E}[X(t)])^2\\&=t-(\sqrt{\frac{2t}{\pi}})^2\\&=t-\frac{2t}{\pi}\\&=(1-\frac{2}{\pi})t\quad(\forall\, t\geq 0)\end{aligned}$$

(3) 几何 Brown 运动

给定 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，定义几何 Brown 运动 $\mathbf{X}=\{X(t)=\exp\{\alpha t+\beta B(t)\}:t\geq 0\}$
显然 $X(t)$ 仅取非负实数值，**不再是正态过程**.
它通常用于描述股票价格，因而对金融市场的研究非常重要.

记 $x=\exp\{\alpha t+\beta b\}$ (这是变量 b 向变量 x 的转换)
记 $b=\frac{1}{\beta}(\log(x)-\alpha t)$ (这是变量 x 向变量 b 的转换)
给定 $t>0$，$X(t)$ 的概率密度函数为：**(指数正态分布)**
$$\begin{aligned}p(x;t)&=\{\frac{dx}{db}\}^{-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\{-\frac{b^2}{2t}\}\\&=\{\frac{d}{db}\exp\{\alpha t+\beta b\}\}^{-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\{-\frac{[\frac{1}{\beta}(\log(x)-\alpha t)]^2}{2t}\}\\&=\{\beta\exp\{\alpha t+\beta b\}\}^{-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\{-\frac{(\log(x)-\alpha t)^2}{2\beta^2 t}\}\\&=\{\beta x\}^{-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\{-\frac{(\log(x)-\alpha t)^2}{2\beta^2 t}\}\\&=\frac{1}{\beta x\sqrt{2\pi t}}\exp\{-\frac{(\log(x)-\alpha t)^2}{2\beta^2 t}\}\quad(x>0)\end{aligned}$$
(对于 $t=0$ 的平凡情况，$X(0)$ 为 1 处的退化分布，即单点分布)

回忆起 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的**矩母函数** $\mathbb{E}[e^{t\xi}]=\exp\{\mu t+\frac{\sigma^2}{2}t^2\}$

- 计算 $X(t)$ 的**均值函数**:
  $$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(t)]&=\mathbb{E}[\exp\{\alpha t+\beta B(t)\}]\\&=e^{\alpha t}\cdot\mathbb{E}[e^{\beta B(t)}]\\&=e^{\alpha t}\cdot\exp\{0\cdot\beta+\frac{t}{2}\beta^2\}\\&=e^{\alpha t+\frac{1}{2}\beta^2 t}\quad(\forall\, t\geq 0)\end{aligned}$$
- 计算 $X(t)$ 的**二阶矩函数** (此时它不等于方差函数):
  $$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X(t))^2]&=\mathbb{E}[\exp\{2\alpha t+2\beta B(t)\}]\\&=e^{2\alpha t}\cdot\mathbb{E}[e^{2\beta B(t)}]\\&=e^{2\alpha t}\cdot\exp\{0\cdot 2\beta+\frac{t}{2}\cdot(2\beta)^2\}\\&=e^{2\alpha t+2\beta^2 t}\quad(\forall\, t\geq 0)\end{aligned}$$
- 计算 $X(t)$ 的**方差函数**:
  $$\begin{aligned}\text{Var}(X(t))&=\mathbb{E}[(X(t))^2]-(\mathbb{E}[X(t)])^2\\&=e^{2\alpha t+2\beta^2 t}-(e^{\alpha t+\frac{1}{2}\beta^2 t})^2\\&=e^{2\alpha t+2\beta^2 t}-e^{2\alpha t+\beta^2 t}\\&=e^{2\alpha t+\beta^2 t}(e^{\beta^2 t}-1)\quad(\forall\, t\geq 0)\end{aligned}$$

(4) 积分过程

对 Brown 运动而言，每条样本曲线都几乎处处连续，
即存在零测度集 Ω_0 使得任意 $\omega\in\Omega\backslash\Omega_0$，$B(\omega,t)$ 作为 t 的函数在 $[0,\infty)$ 上连续.
定义 $X(\omega,t)=\begin{cases}\int_0^t B(\omega,s)ds & \omega\in\Omega\backslash\Omega_0\\ 0 & \omega\in\Omega_0\end{cases}$
上述定义中的积分是 Riemann 积分，它存在且有限.
(实际上当 $\omega\in\Omega_0$ 时，其值可以任意选择，并不必须设为 0)

定义**积分过程** $\mathbf{X} = \{X(t) = \int_0^t B(s)ds : t \geq 0\}$
对于任何固定的 $t \geq 0$，$X(t) = \int_0^t B(s)ds$ 都是由许多小的正态随机变量的和构成的.
因此我们基本上可以认定它是一个**正态过程**了 (事实也确实如此, 详细证明从略)

- 计算 $X(t)$ 的**均值函数**:
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X(t)] &= \int_0^t \mathbb{E}[B(s)]ds \\ &= \int_0^t 0 \cdot ds \\ &= 0 \quad (\forall\, t \geq 0)\end{aligned}$$
- 计算 $X(t)$ 的**自相关函数**:
$$\begin{aligned}\text{Cov}(X(s), X(t)) &= \mathbb{E}[(X(s) - 0)(X(t) - 0)] \\ &= \int_0^s \int_0^t \mathbb{E}[B(u)B(v)]dudv \\ &= \int_0^s \int_0^t (u \wedge v)dudv \\ &= \int_0^s \{\int_0^v udu + \int_v^t vdu\}dv \\ &= \int_0^s \{\frac{1}{2}v^2 + v(t-v)\}dv \\ &= (\frac{t}{2}v^2 - \frac{1}{6}v^3)|_0^s \\ &= \frac{s^2 t}{2} - \frac{s^3}{6} \quad (\forall\, 0 \leq s \leq t)\end{aligned}$$

6.2 最大值分布

6.2.1 最大值

考虑**一维标准 Brown 运动** $\mathbf{B} = \{B(t) : t \geq 0\}$
任意给定 $t > 0$，记其在 $[0, t]$ 内的最大值为 $M_t = \max_{0 \leq s \leq t} B(s)$
其分布与下面定义的**首次命中时刻**有着密切的关系.

任意给定非零实数 a，定义 $T_a = \begin{cases} \inf\{t \geq 0 : B(t) > a\} & \text{if } a > 0 \\ \inf\{t \geq 0 : B(t) < a\} & \text{if } a < 0 \end{cases}$
由于 $\mathbf{B} = \{B(t) : t \geq 0\}$ 几乎处处连续,
故无论 $a < 0$ 还是 $a > 0$ 都有:
$$\begin{aligned}T_a &= \begin{cases} \inf\{t \geq 0 : B(t) > a\} & \text{if } a > 0 \\ \inf\{t \geq 0 : B(t) < a\} & \text{if } a < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \inf\{t \geq 0 : B(t) \geq a\} & \text{if } a > 0 \\ \inf\{t \geq 0 : B(t) \leq a\} & \text{if } a < 0 \end{cases} \\ &\stackrel{a.s.}{=} \inf\{t \geq 0 : B(t) = a\}\end{aligned}$$

- **注意:**
  记 $\mathbf{B} = \{B(t) : t \geq 0\}$ 的**自然过滤** $E_t = \sigma(B(s) : 0 \leq s \leq t)$,
  它表示由 Brown 运动在时间区间 $[0, t]$ 上所有值生成的最小的 σ-代数.
  这一过滤表示在时间 t 时刻我们能够获取的所有信息.
  我们定义 $E_{t+} = \bigcap_{\varepsilon > 0} E_{t+\varepsilon}$ (它包含的信息多于 E_t)

  首次命中时刻 T_a 关于 $\{E_t\}_{t \geq 0}$ 不是**停时** (停时的定义参见 6.1.3 节),
  实际上它关于 $\{E_{t+}\}_{t \geq 0}$ 才是停时,
  即对于任意 $t \geq 0$ 都有 $\{T_a \leq t\}$ 属于 E_{t+}

  不管怎样，我们有**强 Markov 性**:
  $\mathbf{X} = \{X(t) = B(t + T_a) - B(T_a) : t \geq 0\}$ 是标准 Brown 运动,
  并且它与 $\{B(t) : 0 \leq t \leq T_a\}$ 相互独立.

定理 6.2.1：(苏中根 定理 7.2)
考虑**一维标准 Brown 运动** $\mathbf{B} = \{B(t) : t \geq 0\}$
给定 $t > 0$ 都有 $M_t = \max_{0 \leq s \leq t} B(s) \stackrel{\text{d}}{=} |B(t)|$

定理 6.2.1 的证明:
由于 $B(0)=0$，故对于任意 $t\geq 0$ 都有 $M_t\geq 0$
任意给定 $x>0$ 都有 $\mathrm{P}\{B(t)=x\}=0$ 成立
因此我们有:
$\mathrm{P}\{M_t>x\}=\mathrm{P}\{M_t>x,B(t)>x\}+\mathrm{P}\{M_t>x,B(t)<x\}$

显然第一项 $\mathrm{P}\{M_t>x,B(t)>x\}=\mathrm{P}\{B(t)>x\}$
我们考虑第二项 $\mathrm{P}\{M_t>x,B(t)<x\}$
我们希望证明 $\mathrm{P}\{M_t>x,B(t)<x\}=\mathrm{P}\{M_t>x,B(t)>x\}=\mathrm{P}\{B(t)=x\}$

- 若事件 $\{M_t>x,B(t)<x\}$ 成立，
  则一定存在某个时刻 $s\in(0,t)$ 使得 $B(s)=x$ 成立，
  表明 x 的首次命中时刻 $T_x<t$ 并且 $B(T_x)=x$
- 将坐标原点平移至 (T_x,x) 处:

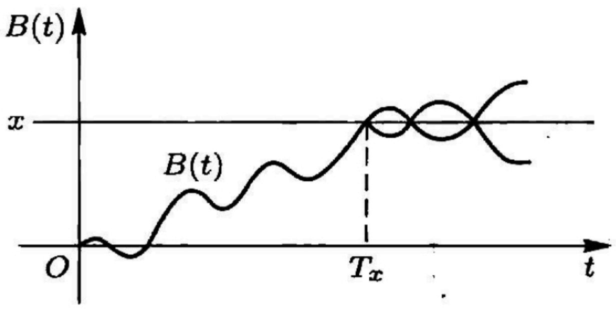


图 7.4

  考虑过程 $X(t)=B(t+T_x)-B(T_x)\ \ (t\geq 0)$
  根据我们之前的讨论，$\mathbf{X}=\{X(t):t\geq 0\}$ 是一个**标准 Brown 运动**，
  并且它独立于截断的过程 $\{B(t):0\leq t\leq T_x\}$
- 因此在给定 $\{T_x<t\}$ 的条件下，
  事件 $\{B(t)-x>0\}$ 和 $\{B(t)-x<0\}$ 具有相同概率 (根据一维 Brown 运动的对称性)
  因此我们有 $\mathrm{P}\{M_t>x,B(t)<x\}=\mathrm{P}\{M_t>x,B(t)>x\}=\mathrm{P}\{B(t)>x\}$

综上所述，对于任意 $x>0$ 我们都有:
$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{M_t>x\}&=\mathrm{P}\{M_t>x,B(t)>x\}+\mathrm{P}\{M_t>x,B(t)<x\}\\&=2\mathrm{P}\{B(t)>x\}\\&=\mathrm{P}\{|B(t)|>x\}\end{aligned}$$

表明 $M_t=\max\limits_{0\leq s\leq t}B(s)\stackrel{\mathrm{d}}{=}|B(t)|$，定理得证.

定义**反射 Brown 运动** $\mathbf{X}=\{X(t)=|B(t)|:t\geq 0\}$
回顾 6.1.4 (2) 的内容，我们知道:
给定 $t>0$，$X(t)$ 的概率密度函数为 $\mathrm{P}\{X(t)=x\}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$
(对于 $t=0$ 的平凡情况，$X(0)$ 为 0 处的退化分布，即单点分布)

根据**定理 6.2.1** 我们知道 $M_t\stackrel{\mathrm{d}}{=}|B(t)|$
因此任意给定 $t>0$，最大值 M_t 的概率密度函数为 $(x\geq 0)$:
$\mathrm{P}\{M_t=x\}=\mathrm{P}\{|B(t)|=x\}=\sqrt{\frac{2}{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$

另外，我们有:
$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{M_t\geq x\}&=\mathrm{P}\{|B(t)|\geq x\}\\&=2\mathrm{P}\{B(t)\geq x\}\\&=2\mathrm{P}\{N(0,t)\geq x\}\\&=2(1-\Phi(\frac{x}{\sqrt{t}}))\end{aligned}$$

首中时 $T_x\ (x>0)$ 满足 $\mathrm{P}\{T_x\leq t\}=\mathrm{P}\{M_t\geq x\}=2(1-\Phi(\frac{x}{\sqrt{t}}))$

对称地，我们考虑最小值 $M_t^- = \min\limits_{0\le s\le t} B(s) = -\max\limits_{0\le s\le t}(-B(s))$
$-B(t)$ 实际上也是标准 Brown 运动.

因此任意给定 $t>0$，最大值 M_t 的概率密度函数为 $(x\le 0)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\{M_t^- \le x\} &= \mathrm{P}\{-\max_{0\le s\le t}(-B(s)) \le x\} \\
&= \mathrm{P}\{-\max_{0\le s\le t} B(s) \le x\} \\
&= \mathrm{P}\{-M_t \le x\} \\
&= \mathrm{P}\{M_t \ge -x\} \\
&= \mathrm{P}\{|B(t)| \ge -x\} \\
&= 2\mathrm{P}\{B(t) \ge -x\} \\
&= 2\mathrm{P}\{N(0,t) \ge -x\} \\
&= 2(1-\Phi(\frac{-x}{\sqrt{t}})) \\
&= 2\Phi(\frac{x}{\sqrt{t}})
\end{aligned}$$

首中时 T_x $(x<0)$ 满足 $\mathrm{P}\{T_x \le t\} = \mathrm{P}\{M_t^- \le x\} = 2\Phi(\frac{x}{\sqrt{t}}) = 2(1-\Phi(\frac{-x}{\sqrt{t}}))$

综上所述，首中时 T_x $(x\neq 0)$ 我们有 $\mathrm{P}\{T_x \le t\} = 2(1-\Phi(\frac{|x|}{\sqrt{t}}))$

6.2.2 首次命中时刻

定理 6.2.2:（苏中根 定理 7.3）
$a\neq 0$ 的首次命中时刻 T_a 的概率密度函数为 $f_a(t) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi}t^{3/2}}\exp\{-\frac{a^2}{2t}\}\;\;(t>0)$

定理 6.2.2 的证明:
不失一般性，假设 $a>0$ ($a<0$ 的情况与之对称)
对于任意 $t>0$ 都有:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\{T_a \le t\} &= \mathrm{P}\{M_t \ge a\} \\
&= \mathrm{P}\{|B(t)| \ge a\} \\
&= 2\mathrm{P}\{N(0,t) \ge a\} \\
&= 2\int_a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_a^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx
\end{aligned}$$

上式对 t 求导可得:

$$\begin{aligned}
f_a(t) &= \mathrm{P}\{T_a = t\} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_a^\infty (-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{2}t^{-\frac{5}{2}})\exp\{-\frac{x^2}{2t}\}dx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^{-\frac{3}{2}}\int_a^\infty \exp\{-\frac{x^2}{2t}\}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^{-\frac{5}{2}}\int_a^\infty x^2\exp\{-\frac{x^2}{2t}\}dx
\end{aligned}$$

使用**分部积分法**:

$$\begin{aligned}
\int_a^\infty \exp\{-\frac{x^2}{2t}\}dx &= (x\cdot\exp\{-\frac{x^2}{2t}\})|_a^\infty - \int_a^\infty x\cdot(-\frac{x}{t}\exp\{-\frac{x^2}{2t}\})dx \\
&= -a\exp\{-\frac{a^2}{2t}\} + t^{-1}\int_a^\infty x^2\exp\{-\frac{x^2}{2t}\}dx
\end{aligned}$$

代入原式可得:

$$\begin{aligned}
f_a(t) &= \mathrm{P}\{T_a = t\} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^{-\frac{3}{2}}\int_a^\infty \exp\{-\frac{x^2}{2t}\}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^{-\frac{5}{2}}\int_a^\infty x^2\exp\{-\frac{x^2}{2t}\}dx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^{-\frac{3}{2}}\cdot(-a\exp\{-\frac{a^2}{2t}\} + t^{-1}\int_a^\infty x^2\exp\{-\frac{x^2}{2t}\}dx) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^{-\frac{5}{2}}\int_a^\infty x^2\exp\{-\frac{x^2}{2t}\}dx \\
&= -\frac{a}{\sqrt{2\pi}t^{3/2}}\exp\{-\frac{a^2}{2t}\} - frac1\sqrt{2\pi}t^{-\frac{5}{2}}\int_a^\infty x^2\exp\{-\frac{x^2}{2t}\}dx + frac1\sqrt{2\pi}t^{-\frac{5}{2}}\int_a^\infty x^2\exp\{-\frac{x^2}{2t}\}dx \\
&= -\frac{a}{\sqrt{2\pi}t^{3/2}}\exp\{-\frac{a^2}{2t}\}
\end{aligned}$$

定理得证.

定理 6.2.3：(苏中根 推论 7.2)
对于任意 $a \in \mathbb{R}$ 都有 $\begin{cases} \mathrm{P}\{T_a < \infty\} = 1 \\ \mathbb{E}[T_a] = \infty \end{cases}$

- **上述定理揭示了一个有趣的现象：**
  一方面，无论 $|a|$ 离 0 有多远，从 0 点出发的 Brown 运动总会在有限时间内到达 a.
  另一方面，无论 $|a|$ 离 0 有多近，从 0 点出发的 Brown 运动到达 a 所需的平均时间为 ∞

定理 6.2.3 的证明：

- 不失一般性，设 $a > 0$ ($a < 0$ 的情况与之对称)
  对于任意 $t > 0$ 都有：
  $$\begin{aligned} \mathrm{P}\{T_a \le t\} &= \mathrm{P}\{M_t \ge a\} \\ &= \mathrm{P}\{|B(t)| \ge a\} \\ &= \int_a^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \quad \text{(即 } 2\mathrm{P}\{B(t) \ge a\} = 2(1 - \Phi(\tfrac{\sqrt{a}}{t}))\text{)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \end{aligned}$$
  因此我们有：
  $$\begin{aligned} \mathrm{P}\{T_a < \infty\} &= \lim_{t\to\infty} \mathrm{P}\{T_a \le t\} \\ &= \lim_{t\to\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_a^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx \\ &= \lim_{t\to\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{a\cdot t^{-\frac{1}{2}}}^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (u = x \cdot t^{-\frac{1}{2}}) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$
  其中我们使用了 Gauss 积分的结论 $\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{2\pi}$
  因此 $\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2\pi} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$
  这就证明了第一个命题 $\mathrm{P}\{T_a < \infty\} = 1$
- 至于第二个命题，根据**定理 6.2.2** 可知：
  $a \neq 0$ 的首次命中时刻 T_a 的概率密度函数为 $f_a(t) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi} t^{3/2}} \exp\{-\frac{a^2}{2t}\} \ \ (t > 0)$
  因此我们有：
  $$\begin{aligned} \mathbb{E}[T_a] &= \int_0^\infty t \cdot f_a(t) dt \\ &= \int_0^\infty t \cdot \frac{|a|}{\sqrt{2\pi} t^{3/2}} \exp\{-\frac{a^2}{2t}\} dt \\ &= \frac{|a|}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} \exp\{-\frac{a^2}{2t}\} dt \end{aligned}$$
  下面我们说明积分 $\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} \exp\{-\frac{a^2}{2t}\} dt$ 发散：
  $$\begin{aligned} \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} \exp\{-\frac{a^2}{2t}\} dt &> \int_1^\infty t^{-\frac{1}{2}} \exp\{-\frac{a^2}{2t}\} dt \\ &> \exp\{-\frac{a^2}{2}\} \int_1^\infty t^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= \exp\{-\frac{a^2}{2}\} \cdot (2t^{\frac{1}{2}})|_1^\infty \\ &= \infty \end{aligned}$$
  这就证明了第二个命题 $\mathbb{E}[T_a] = \infty$

定理 6.2.4：(苏中根 定理 7.4)
对于任意 $a < 0 < b$ 都有 $\begin{cases} \mathrm{P}\{T_a < T_b\} = \frac{|b|}{|a|+|b|} \\ \mathrm{P}\{T_a > T_b\} = \frac{|a|}{|a|+|b|} \end{cases}$ (二者都是连续随机变量，相等概率为 0)

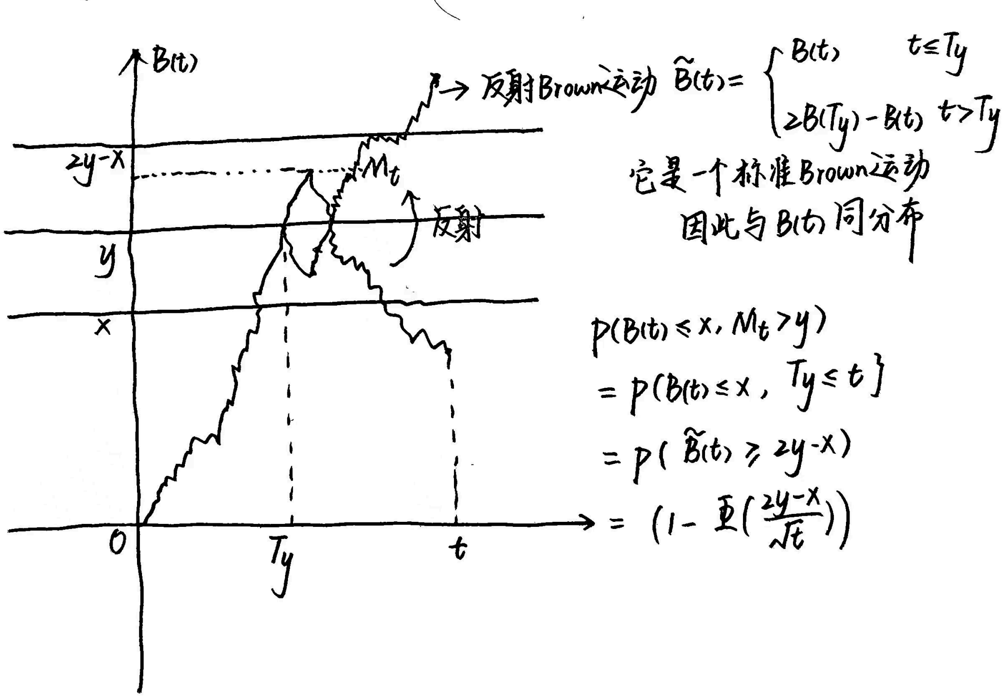
- 证明需要**鞅** (Martingale) 的结论，因此省略.
  最终通过求解方程组 $\begin{cases} a\mathrm{P}\{T_a < T_b\} + b\mathrm{P}\{T_a > T_b\} = 0 \\ \mathrm{P}\{T_a < T_b\} + \mathrm{P}\{T_a > T_b\} = 1 \end{cases}$ 得到命题.

6.2.3 联合分布

考虑 (B_t, M_t) 的**联合分布** $(x \le y)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{B_t \le x, M_t \le y\} &= \mathrm{P}\{B_t \le x\} - \mathrm{P}\{B_t \le x, M_t > y\} \\ &= \mathrm{P}\{B_t \le x\} - \mathrm{P}\{B_t \le x, T_y \le t\} \\ &= \mathrm{P}\{B_t \le x\} - \mathrm{P}\{\tilde{B}_t \ge 2y - x\} \\ &= \mathrm{P}\{\frac{B_t}{\sqrt{t}} \le \frac{x}{\sqrt{t}}\} - \mathrm{P}\{\frac{\tilde{B}_t}{\sqrt{t}} \ge \frac{2y-x}{\sqrt{t}}\} \\ &= \Phi(\frac{x}{\sqrt{t}}) - (1 - \Phi(\frac{2y-x}{\sqrt{t}})) \\ &= \Phi(\frac{x}{\sqrt{t}}) - 1 + \Phi(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}) \end{aligned}$$

其中 T_y 为 y 的**首中时** (它是一个停时),
而 $\tilde{B}(t) \overset{\Delta}{=} \begin{cases} B(t) & t \le T_y \\ 2B(T_y) - B(t) & t > T_y \end{cases}$ 是一个标准 Brown 运动.



下面我们计算 (B_t, M_t) 的**联合概率密度函数** $(x \le y)$:

$$\begin{aligned} f_{(B_t, M_t)}(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \mathrm{P}\{B_t \le x,\ M_t \le y\} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \{\Phi(\frac{x}{\sqrt{t}}) - 1 + \Phi(\frac{2y-x}{\sqrt{t}})\} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \{\frac{1}{\sqrt{t}} \phi(\frac{x}{\sqrt{t}}) - \frac{1}{\sqrt{t}} \phi(\frac{2y-x}{\sqrt{t}})\} \\ &= -\frac{2}{t} \phi'(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}) \\ &= -\frac{2}{t}(-\frac{2y-x}{\sqrt{t}}) \phi(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}) \quad (\phi'(z) = -z\phi(z)) \\ &= \frac{2(2y-x)}{t\sqrt{t}} \phi(\frac{2y-x}{\sqrt{t}}) \end{aligned}$$

其中 $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \phi(t) dt = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ 是 $N(0,1)$ 的累计分布函数.
而 $\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ 是 $N(0,1)$ 的概率密度函数.
注意到其导函数 $\phi'(z) = -z \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} = -z\phi(z)$

下面我们计算 $(B_t|M_t)$ 的**条件概率密度函数** $(x \leq y)$:
根据**定理 6.2.1** 我们有:

$$\begin{aligned} f_{M_t}(y) &= \mathrm{P}\{M_t = y\} \\ &= \mathrm{P}\{|B(t)| = y\} \\ &= 2\mathrm{P}\{B(t) = y\} \\ &= 2\frac{d}{dy}\mathrm{P}\{B(t) \leq y\} \\ &= 2\frac{d}{dy}\Phi(\frac{y}{\sqrt{t}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}}\phi(\frac{y}{\sqrt{t}}) \end{aligned}$$

因此我们有:

$$\begin{aligned} f_{B_t|M_t}(x|y) &= \frac{f_{B_t,M_t}(x,y)}{f_{M_t}(y)} \\ &= \frac{\frac{2(2y-x)}{t\sqrt{t}}\phi(\frac{2y-x}{\sqrt{t}})}{2\frac{1}{\sqrt{t}}\phi(\frac{y}{\sqrt{t}})} \\ &= \frac{(2y-x)}{t}\exp\{-\frac{(2y-x)^2}{2t} + \frac{y^2}{2t}\} \\ &= \frac{(2y-x)}{t}\exp\{-\frac{(y-x)(3y-x)}{2t}\} \end{aligned}$$

下面我们计算 $(M_t|B_t)$ 的**条件概率密度函数** $(x \leq y)$:
根据 $B(t) \sim N(0,t)$ 我们有:

$$\begin{aligned} f_{B_t}(x) &= \mathrm{P}\{B_t = x\} \\ &= \frac{d}{dx}\mathrm{P}\{B(t) \leq x\} \\ &= \frac{d}{dx}\Phi(\frac{x}{\sqrt{t}}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}}\phi(\frac{x}{\sqrt{t}}) \end{aligned}$$

因此我们有:

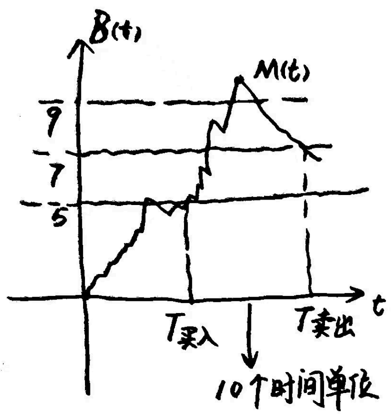
$$\begin{aligned} f_{M_t|B_t}(y|x) &= \frac{f_{B_t,M_t}(x,y)}{f_{B_t}(x)} \\ &= \frac{\frac{2(2y-x)}{t\sqrt{t}}\phi(\frac{2y-x}{\sqrt{t}})}{\frac{1}{\sqrt{t}}\phi(\frac{x}{\sqrt{t}})} \\ &= \frac{2(2y-x)}{t}\exp\{-\frac{(2y-x)^2}{2t} + \frac{x^2}{2t}\} \\ &= \frac{2(2y-x)}{t}\exp\{-\frac{2y(2y-x)}{t}\} \end{aligned}$$

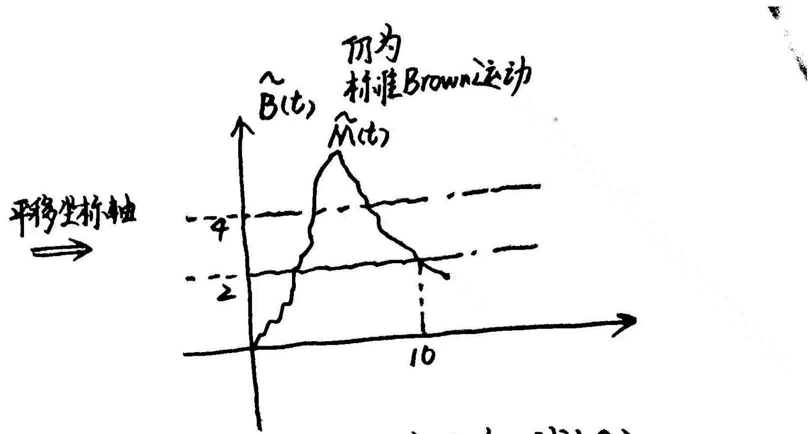
我们最终可以得到:

$$\mathrm{P}\{M_t \geq y|B_t = x\} = \exp\{-\frac{2y(y-x)}{t}\}$$

(王勤文补充示例)
设股市价格随时间变化的过程是一个标准 Brown 运动.
假设某时刻某人以 5 元每股的价格买入某支股票,
并在 10 个时间单位后以 7 元每股的价格卖出这支股票.
试求在此人买入卖出的 10 个时间单位中，股票价格达到过 9 元每股的概率.

(图中答案写错了，是 $\exp\{-1.6\}$)





p(买入卖出时间内股价达到过9)

$= p(M(t) \geq 9 \mid B(T_{买入})=5, B(10+T_{买入})=7)$

$= p\{\hat{M}(t) \geq 4 \mid B(10)=2\}$

$= \exp\{-\frac{2 \cdot 4(4-2)}{10}\}$

$= \exp\{1.6\}$

6.2.4 推广: 漂移 Brown 运动

我们称 $\{X(t): t \geq 0\}$ 为具有参数 (μ, σ^2) 的漂移 Brown 运动，如果它满足:

- $X(0) = 0$
- 具有独立平稳增量
- $X(t) \sim N(\mu t, t\sigma^2)$

它可以表示为 $X(t) = \sigma B(t) + \mu t$

考虑 $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 的**联合分布**:

$$\begin{bmatrix} X(t_1) \\ X(t_2) \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} B(t_1) \\ B(t_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mu t_1 \\ \mu t_2 \end{bmatrix} \overset{\mathrm{d}}{=} N(\begin{bmatrix} \mu t_1 \\ \mu t_2 \end{bmatrix}, \sigma^2 \begin{bmatrix} t_1 & t_1 \wedge t_2 \\ t_2 \wedge t_1 & t_2 \end{bmatrix})$$

对于任意 $0 < t_1 < t_2$，考虑**条件分布** $(X(t_2)|X(t_1) = x_1)$:

$$(X(t_2)|X(t_1) = x_1) \overset{\mathrm{d}}{=} N(x_1 + \mu(t_2 - t_1), \sigma^2(t_2 - t_1))$$

对于任意 $0 < t_1 < t_2$，考虑**条件分布** $(X(t_1)|X(t_2) = x_2)$:

$$(X(t_1)|X(t_2) = x_2) \overset{\mathrm{d}}{=} N(\frac{t_1}{t_2}x_2, \frac{t_1}{t_2}\sigma^2(t_2 - t_1))$$

我们发现它与 μ 无关，即完全可以等同于 $\mu = 0$ 的情况.
也就是说，对于任意 $\mu \in \mathbb{R}$ 都有 $(X(t_1)|X(t_2) = x_2) \overset{\mathrm{d}}{=} (\sigma B(t_1)|\sigma B(t_2) = x_2)$ 成立.

考虑**最大值** $M(t) = \max\limits_{0 \leq s \leq t} X(s) = \max\limits_{0 \leq s \leq t}\{\sigma B(s) + \mu s\}$ 的分布:
其中:

- 第二步转化是基于 $x \geq y$ 时条件概率 $\mathrm{P}\{M_t \geq y | X_t = x\} = 1$ 的事实进行分类讨论的.
- 第三步转化用到了 $(X(t_1)|X(t_2) = x_2) \overset{\mathrm{d}}{=} (\sigma B(t_1)|\sigma B(t_2) = x_2)$ 的结论
- 第四步转化用到了 $\mathrm{P}\{\max\limits_{0 \leq s \leq t} B_s \geq y | B_t = x\} = \exp\{-\frac{2y(y-x)}{t}\}$ 的结论

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\{M(t)\geq y\}\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{P}\{M_t\geq y|X_t=x\}\cdot\mathrm{P}\{X_t=x\}dx\\
&=\int_{-\infty}^{y}\mathrm{P}\{M_t\geq y|X_t=x\}\cdot\mathrm{P}\{X_t=x\}dx+\int_{y}^{\infty}1\cdot\mathrm{P}\{X_t=x\}dx\\
&=\int_{-\infty}^{y}\mathrm{P}\{\max_{0\leq s\leq t}\{\sigma B(s)\}\geq y|\sigma B(t)=x\}\cdot\mathrm{P}\{N(\mu t,\sigma^2 t)=x\}dx+\int_{y}^{\infty}\mathrm{P}\{N(\mu t,\sigma^2 t)=x\}dx\\
&=\int_{-\infty}^{y}\exp\{-\frac{2y(y-x)}{\sigma^2 t}\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\exp\{-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\}dx+\mathrm{P}\{N(\mu t,\sigma^2 t)>y\}\\
&=\exp\{\frac{2\mu y}{\sigma^2}\}\int_{-\infty}^{y}\mathrm{P}\{N(\mu t+2y,\sigma^2 t)=x\}dx+(1-\Phi(\frac{y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}}))\\
&=\exp\{\frac{2\mu y}{\sigma^2}\}\mathrm{P}\{N(\mu t+2y,\sigma^2 t)\leq y\}+1-\Phi(\frac{y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}})\\
&=\exp\{\frac{2\mu y}{\sigma^2}\}\Phi(\frac{-y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}})+1-\Phi(\frac{y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}})
\end{aligned}
$$

因此 $\mathrm{P}\{T_y\leq t\}=\mathrm{P}\{M_t\geq y\}=\exp\{\frac{2\mu y}{\sigma^2}\}\Phi(\frac{-y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}})+1-\Phi(\frac{y-\mu t}{\sigma\sqrt{t}})$
对 t 求导可得:
$\mathrm{P}\{T_y=t\}=\frac{y}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}\exp\{-\frac{(y-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\}$
并且可以计算出 $\begin{cases}\mathbb{E}[T_y]=\frac{y}{\mu}\\\mathrm{Var}[T_y]=\frac{y\sigma^2}{\mu^3}\end{cases}$ 均为有限值,
这与 $\mu=0$ 的情况 (即 $\sigma B(t)$, 例如标准 Brown 运动) 不同.

对于 $y>x$, 我们有条件分布:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\{M(t)\geq y|X(t)=x\}&=\mathrm{P}\{\max_{0\leq s\leq t}\{\sigma B(s)\}\geq y|\sigma B(t)=x\}\\
&=\exp\{-\frac{2y(y-x)}{\sigma^2 t}\}\quad(y\geq 0)
\end{aligned}
$$

6.2.4 推广: 漂移 Brown 运动

本节推广 Brown 运动**最大值**和**首中时**的相关结论.

设漂移系数 $b\in\mathbb{R}$, 定义**漂移 Brown 运动** $X(t)=B(t)-bt\ \ (t\geq 0)$
显然 $\mathbf{X}=\{X(t):t\geq 0\}$ 仍是**连续正态过程**, 但不再是 Brown 运动.

任意给定 $t>0$, 记其在 $[0,t]$ 内的最大值为 $\max\limits_{0\leq s\leq t}X(s)$
其分布与下面定义的**首次命中时刻**有着密切的关系.

任意给定 $a\in\mathbb{R}$, 定义:

$$
\begin{aligned}
T_{a,b}&=\begin{cases}\inf\{t\geq 0:X(t)\geq a\}&\text{if }a>0\\\inf\{t\geq 0:X(t)\leq a\}&\text{if }a<0\end{cases}\\
&=\begin{cases}\inf\{t\geq 0:B(t)\geq a+bt\}&\text{if }a>0\\\inf\{t\geq 0:B(t)\leq a+bt\}&\text{if }a<0\end{cases}
\end{aligned}
$$

它实际上是 Brown 运动首次命中直线 $a+bt$ 的时刻.

显然, 对于任意 $a>0$, 我们都有 $\mathrm{P}\{\max\limits_{0\leq s\leq t}X(s)\geq a\}=\mathrm{P}\{T_{a,b}\leq t\}$ 成立.

引理 6.2.5: (测度变换定理, 苏中根 定理 7.6 前文)
设原概率空间为 $(\Omega,\mathcal{E},\mathrm{P})$
给定常数 $\begin{cases}b\in\mathbb{R}\\t_0>0\end{cases}$
对于任意 $E\in\mathcal{E}$, 定义 $\hat{\mathrm{P}}(E)=\mathbb{E}[\exp\{bB(t_0)-\frac{1}{2}b^2t_0\}\cdot I_E]$ (原概率 $\mathrm{P}(E)=\mathbb{E}[I_E]$)

> 回忆起 $\xi\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的**矩母函数** $\mathbb{E}[e^{t\xi}]=\exp\{\mu t+\frac{\sigma^2}{2}t^2\}$

注意到:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp\{bB(t_0)-\frac{1}{2}b^2t_0\}] &= e^{-\frac{1}{2}b^2t_0}\cdot\mathbb{E}[e^{bB(t_0)}] \\ &= e^{-\frac{1}{2}b^2t_0}\cdot\mathbb{E}[e^{bN(0,t_0)}] \\ &= e^{-\frac{1}{2}b^2t_0}\cdot\exp\{0\cdot b+\frac{t_0}{2}\cdot b^2\} \\ &= e^0 \\ &= 1\end{aligned}$$

因此 $\hat{\mathrm{P}}:\mathcal{E}\mapsto[0,1]$ 是概率，这样就得到了新概率空间 $(\Omega,\mathcal{E},\hat{\mathrm{P}})$

定理 6.2.6：(苏中根 定理 7.6)
在新定义的概率空间 $(\Omega,\mathcal{E},\hat{\mathrm{P}})$ 上，
正态过程 $\mathbf{X}=\{X(t)=B(t)-bt:t\geq 0\}$ 是标准 Brown 运动.

- **证明:**
  记概率 $\hat{\mathrm{P}}$ 下的期望为 $\hat{\mathbb{E}}[\cdot]$
  对于任意 $u\in\mathbb{R}$ 我们都有:
  $$\begin{aligned}\hat{\mathbb{E}}[e^{uX(t)}] &= \hat{\mathbb{E}}[e^{u(B(t)-bt)}] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}e^{u(x-bt)}\cdot\hat{\mathrm{P}}\{B(t)=x\}dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}e^{u(x-bt)}\cdot\mathbb{E}[\exp\{bB(t_0)-\frac{1}{2}b^2t_0\}\cdot I_{B(t)=x}]dx \\ &= e^{-ubt-\frac{1}{2}b^2t_0}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ux}\cdot\mathbb{E}[\exp\{bB(t_0)\}\cdot I_{B(t)=x}]dx \\ &= e^{-ubt-\frac{1}{2}b^2t_0}\mathbb{E}[e^{uB(t)+bB(t_0)}] \\ &= e^{\frac{1}{2}u^2t}\end{aligned}$$
  (最后两步我不知道是如何转化的)

定理 6.2.5：(定理 6.2.2 的推广, 苏中根 定理 7.5)
给定 $\begin{cases}a\neq 0\in\mathbb{R}\\ b\in\mathbb{R}\end{cases}$，首中时 $T_{a,b}$ 的概率密度函数为:
$f_{a,b}(t)=\frac{|a|}{\sqrt{2\pi}t^{3/2}}\exp\{-\frac{(a+bt)^2}{2t}\}\ \ (t>0)$

- 特别地，当 $b=0$ 时即为**定理 6.2.2** 的结论:
  首次命中时刻 $T_{a,0}$ 的概率密度函数为 $f_{a,0}(t)=\frac{|a|}{\sqrt{2\pi}t^{3/2}}\exp\{-\frac{a^2}{2t}\}\ \ (t>0)$

定理 6.2.5 的证明：(有些超纲, 参见课本)

6.3 随机积分

回顾 **Riemann 积分** $\int_a^b f(x)dx$，它的定义方式如下:

- **划分:** 将区间 $[a,b]$ 划分为 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，记这个划分为 π
  记区间长度的上确界 $\Delta=\sup\limits_{i=1,\ldots,n}\{x_i-x_{i-1}\}$
- **取点:** 在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 中各选取一点 ξ_i
- **求和:** $S_n=\sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$
- **取极限:**
  若存在 s，使得对于区间 $[a,b]$ 的任意划分 π 和任意取点 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，
  都有 $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \|\Delta\|\to 0}}S_n=s$
  则我们定义 $\int_a^b f(x)dx=s$

若 f 连续 (或分段连续)，则 Riemann 积分 $\int_a^b f(x)dx$ 存在.

将 **Riemann 积分** $\int_a^b f(x)dx$ 推广至 **Riemann-Stieltjes 积分** $\int_a^b f(x)dG(x)$:

- **划分:** 将区间 $[a,b]$ 划分为 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，记这个划分为 π
  记区间长度的上确界 $\Delta=\sup\limits_{i=1,\ldots,n}\{x_i-x_{i-1}\}$
- **取点:** 在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 中各选取一点 ξ_i
- **求和:** $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)[G(x_i)-G(x_{i-1})]$
- **取极限:**
  若存在 s，使得对于区间 $[a,b]$ 的任意划分 π 和任意取点 $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$，
  都有 $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \|\Delta\|\to 0}}S_n=s$
  则我们定义 $\int_a^b f(x)dG(x)=s$

若 f 连续且 $G(x)$ **有界变差** (bounded variance)，
即对于任意划分 π，求和 $\sum\limits_{i=1}^{n}|G(x_i)-G(x_{i-1})|<\infty$ 都有界，
则 **Riemann-Stieltjes 积分** $\int_a^b f(x)dG(x)$ 存在.

考虑积分 $\int_0^t f(s)dB(s)$，我们可以证明 $B(s)$ 不是有界变差函数，因而这个积分不一定存在.

- 我们只需找到一个划分 π 使得求和 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}|B(x_i)-B(x_{i-1})|=\infty$ 即可，
  等价于证明 $\mathrm{P}\{S_n=\infty\}=1$ 成立，
  等价于证明对于任意 $M>0$ 都有 $\mathrm{P}\{S_n>M\}=1$ 成立，
  等价于证明对于任意 $M>0$ 都有 $\mathrm{P}\{S_n\le M\}=0$ 成立，
  只要证明 $\begin{cases}\mathbb{E}[S_n]\to\infty\\ \mathrm{Var}[S_n]=O(1)\end{cases}$ 即可.

  这是因为如果 $\begin{cases}\mathbb{E}[S_n]\to\infty\\ \mathrm{Var}[S_n]=O(1)\end{cases}$ 成立，
  则对于任意 $M>0$，当 n 足够大时都有 $\mathbb{E}[S_n]>2M$，即有 $M<\frac{1}{2}\mathbb{E}[S_n]$ 成立.
  于是我们有：

  $$\begin{aligned}\mathrm{P}\{S_n\le M\}&=\mathrm{P}\{S_n-\mathbb{E}[S_n]\le M-\mathbb{E}[S_n]\}\\&=\mathrm{P}\{S_n-\mathbb{E}[S_n]<-\frac{1}{2}\mathbb{E}[S_n]\}\\&\le\mathrm{P}\{|S_n-\mathbb{E}[S_n]|>\frac{1}{2}\mathbb{E}[S_n]\}\\&\le\frac{\mathbb{E}[|S_n-\mathbb{E}[S_n]|^2]}{(\frac{1}{2}\mathbb{E}[S_n])^2}\\&=\frac{4\mathrm{Var}[S_n]}{(\mathbb{E}[S_n])^2}\to 0\ \ (n\to\infty)\end{aligned}$$

  表明对于任意 $M>0$ 都有 $\mathrm{P}\{S_n\le M\}=0$ 成立.

  > **命题1.7 (Chebyshev 不等式)**
  > 若 X 是具有均值 μ 和 $k\ge 2$ 阶中心距 $\mathbb{E}[|X-\mu|^k]<\infty$ 的随机变量，
  > 则对于任意 $a>0$ 都有 $\mathrm{P}\{|X-\mu|\ge a\}\le\frac{\mathbb{E}[|X-\mu|^k]}{a^k}$ 成立.

- 考虑将 $[0,t]$ 划分为 2^n 个等份，则我们有：

  $$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_n]&=\sum_{i=1}^{2^n}\mathbb{E}\left[\left|B\left(\frac{i}{2^n}\right)-B\left(\frac{i-1}{2^n}\right)\right|\right]\\&=2^n\mathbb{E}\left[\left|N\left(0,\frac{1}{2^n}\right)\right|\right]\quad(\mathbb{E}[|N(0,\sigma^2)|]=\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}})\\&=2^n\sqrt{\frac{2}{\pi 2^n}}\\&=\sqrt{\frac{2^{n+1}}{\pi}}\to\infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(S_n) &= \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{2^n}\left|B\left(\frac{i}{2^n}\right)-B\left(\frac{i-1}{2^n}\right)\right|\right)\\ &= \sum_{i=1}^{2^n}\mathrm{Var}\left(\left|B\left(\frac{i}{2^n}\right)-B\left(\frac{i-1}{2^n}\right)\right|\right)\\ &\le \sum_{i=1}^{2^n}\mathbb{E}\left(\left|B\left(\frac{i}{2^n}\right)-B\left(\frac{i-1}{2^n}\right)\right|^2\right)\\ &= \sum_{i=1}^{2^n}\mathbb{E}\left(\left|N\left(0,\frac{1}{2^n}\right)\right|^2\right)\quad(\mathbb{E}[|N(0,\sigma^2)|^2]=\sigma^2\mathbb{E}[\chi^2(1)]=\sigma^2)\\ &= 2^n\cdot\frac{1}{2^n}\\ &= 1\end{aligned}$$

这样我们就证明了 $\begin{cases}\mathbb{E}[S_n]\to\infty\\ \mathrm{Var}[S_n]=O(1)\end{cases}$

进而可以推出 $\mathrm{P}\{S_n=\infty\}=1$，说明 $B(s)$ 不是有界变差函数.

考虑积分 $\int_0^t f(s)dB(s)$，其中 $f(s)$ 是给定的连续函数，不具有随机性.

- **划分:** 将区间 $[a,b]$ 划分为 $t=s_0<s_1<\cdots<s_n=t$，记这个划分为 π
  记区间长度的上确界 $\Delta=\sup\limits_{i=1,\ldots,n}\{s_i-s_{i-1}\}$
- **取点:** 在每个小区间 $[s_{i-1},s_i]$ 中各选取一点 ξ_i
- **求和:**

$$\begin{aligned}S_n &= \sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)[B(s_i)-B(s_{i-1})]\\ &= f(\xi_n)B(s_n)-\sum_{i=2}^{n}B(s_{i-1})(f(\xi_i)-f(\xi_{i-1}))-f(\xi_1)B(s_0)\\ &= f(\xi_n)B(t)-\sum_{i=1}^{n-1}B(s_i)(f(\xi_{i+1})-f(\xi_i))-f(\xi_1)B(0)\\ &= f(\xi_n)B(t)-\sum_{i=1}^{n-1}B(s_i)(f(\xi_{i+1})-f(\xi_i))\quad(B(0)=0)\end{aligned}$$

- **取极限:**

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n &= \lim_{n\to\infty}\{f(\xi_n)B(t)-\sum_{i=1}^{n-1}B(s_i)(f(\xi_{i+1})-f(\xi_i))\}\\ &= f(t)B(t)-\int_0^t B(s)df(s)\end{aligned}$$

我们假设 $f(s)$ 是有界变差函数 (同时注意到 $B(s)$ 几乎处处连续),
此时我们可以定义 $\int_0^t f(s)dB(s)=f(t)B(t)-\int_0^t B(s)df(s)$

考虑积分 $\int_0^t f(s)dB(s)$，其中 $f(s)$ 是一个随机过程.
取 $f(s)=B(s)$，即考虑 $\int_0^t B(s)dB(s)$

- **划分:** 将区间 $[a,b]$ 划分为 $t=s_0<s_1<\cdots<s_n=t$，记这个划分为 π
  设区间长度的上确界 $\Delta=\sup\limits_{i=1,\ldots,n}\{s_i-s_{i-1}\}\to 0\ \ (n\to\infty)$
- **取点:** **Ito 积分**规定取点 ξ_i 总是取区间 $[s_{i-1},s_i]$ 的左端点 s_{i-1}
- **求和:** $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}B(s_i)(B(s_i)-B(s_{i-1}))$
- **取极限:**
  若存在 s 使得 $\mathbb{E}[|S_n-s|^2]\to 0$ 成立，则我们定义 $\int_0^t B(s)dB(s)=s$

我们希望证明这个 $s=\frac{(B(t))^2-t}{2}$，
即等价于证明 $\mathbb{E}[|S_n-s|^2]=\mathbb{E}[|S_n-\frac{B_t^2-t}{2}|^2]\to 0$ 成立.
即等价于证明 $\mathbb{E}[|2S_n-B_t^2+t|]\to 0$ 成立.

注意到:

- $B(t)$ 可拆分为：

$$\begin{aligned}
B_t^2 &= B_t^2 - B_{s_{n-1}}^2 + B_{s_{n-1}}^2 - \cdots - B_{s_1}^2 + B_{s_1}^2 - B_{s_0}^2 + B_{s_0^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n}(B_{s_i}^2 - B_{s_{i-1}}^2) + B_0^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(B_{s_i} + B_{s_{i-1}})(B_{s_i} - B_{s_{i-1}})
\end{aligned}$$

- t 可拆分为：

$$\begin{aligned}
t &= t - s_{n-1} + s_{n-1} - s_{n-2} + s_{n-2} + \cdots - s_1 + s_1 - s_0 + s_0 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(s_i - s_{i-1}) + s_0 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(s_i - s_{i-1})
\end{aligned}$$

因此我们有：

$$\begin{aligned}
2S_n - B_t^2 + t &= 2\sum_{i=1}^{n} B_{s_i}(B_{s_i} - B_{s_{i-1}}) - \sum_{i=1}^{n}(B_{s_i} + B_{s_{i-1}})(B_{s_i} - B_{s_{i-1}}) + \sum_{i=1}^{n}(s_i - s_{i-1}) \\
&= -\sum_{i=1}^{n}[(B_{s_i} - B_{s-i})^2 - (s_i - s_{i-1})] \\
&= -\sum_{i=1}^{n}[X_i^2 - (s_i - s_{i-1})] \quad (X_i = B_{s_i} - B_{s_{i-1}} \overset{\mathrm{d}}{=} N(0, s_i - s_{i-1})) \\
&= -\sum_{i=1}^{n}[X_i^2 - \mathbb{E}[X_i^2]]
\end{aligned}$$

于是我们有：

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|2S_n - B_t^2 + t|^2] &= \mathbb{E}\{[-\sum_{i=1}^{n}[X_i^2 - \mathbb{E}[X_i^2]]]^2\} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\{[X_i^2 - \mathbb{E}[X_i^2]]^2\} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}[X_i^2] \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[(X_i^2)^2] \\
&= \sum_{i=1}^{n}(s_i - s_{i-1})^2 \\
&\leq \max_{i=1,\ldots,n}\{s_i - s_{i-1}\}\sum_{i=1}^{n}(s_i - s_{i-1}) \\
&= \max_{i=1,\ldots,n}\{s_i - s_{i-1}\}(s_n - s_0) \\
&= \max_{i=1,\ldots,n}\{s_i - s_{i-1}\} \cdot t \to 0 \ \ (n \to \infty)
\end{aligned}$$

这样就得证了 $\mathbb{E}[|S_n - s|^2] = \mathbb{E}[|S_n - \frac{B_t^2 - t}{2}|^2] \to 0$
我们定义 $\int_0^t B(s)dB(s) = s = \frac{B_t^2 - t}{2}$

The End