

高等线性代数 Homework 08

Due: Nov. 4, 2024

姓名: 雍崔扬

学号: 21307140051

Problem 1

记 $J_4(0)$ 为零特征值对应的 4 阶 Jordan 块, 定义:

$$A := \begin{bmatrix} J_4(0) & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ where } c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

试构造相似变换 P 使得 $P^{-1}AP$ 为 Jordan 标准型.

- Lemma 1: (幂零 Jordan 块的性质, Matrix Analysis 引理 3.1.4)

给定正整数 $n \geq 2$ 和 $x \in \mathbb{C}^n$, 记 \mathbb{C}^n 的第 i 个标准单位基向量为 e_i , 则我们有:

- $J_n(0)e_{i+1} = e_i (\forall i = 1, \dots, n-1)$
- $J_n(0)^T J_n(0) = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & I_{n-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_1 \end{bmatrix}$
- $[I_n - J_n(0)^T J_n(0)]x = (x^T e_1)e_1$
- $J_n(0)^k = \begin{cases} \begin{bmatrix} & & & \\ & I_{n-k} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0_{k \times k} \end{bmatrix} & \text{if } 1 \leq k < n \\ 0_{n \times n} & \text{if } k \geq n \end{cases}$

- Lemma 2: (严格上三角阵的 Jordan 标准型, Matrix Analysis 定理 3.1.5)

若 $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是严格上三角阵, 则存在一个非奇异矩阵 $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 和正整数 $n_1 \geq \dots \geq n_p \geq 1$ 使得:

$$S^{-1}TS = J_{n_1}(0) \oplus \dots \oplus J_{n_p}(0)$$

若 T 是实方阵, 则相似矩阵 S 也可取成实的.

Proof:

我们使用数学归纳法.

当 $n = 1$ 时, 命题显然成立.

当 $n > 1$ 时, 假设命题对所有小于 n 阶的严格上三角阵都成立.

我们可将 T 分块成:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & a^T \\ & T_1 \end{bmatrix},$$

其中 $a \in \mathbb{C}^{n-1}$, T_1 为 $n-1$ 阶的严格上三角阵.

根据归纳假设, 存在 $n-1$ 阶非奇异阵 S_1 使得:

$$S_1^{-1}T_1S_1 = \begin{bmatrix} J_{n_1}(0) & & & \\ & J_{n_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{n_k}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{n_1}(0) & & \\ & \ddots & \\ & & J \end{bmatrix},$$

其中 $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k \geq 1$ 满足 $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n-1$.

而 $J = J_{n_2}(0) \oplus \dots \oplus J_{n_k}(0)$ 为 $n-1-n_1$ 阶 Jordan 矩阵, 显然它满足 $J^{n_1} = 0_{n_1 \times n_1}$.

于是我们有:

$$\begin{bmatrix} 1 & \\ & S_1^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a^T \\ & T_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & S_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a^T S_1 \\ & S_1^{-1} T_1 S_1 \end{bmatrix}.$$

将 $S_1^{-1}T_1S_1$ 分块为 $S_1^{-1}T_1S_1 = J_{n_1}(0) \oplus J$,
并对应地将 $a^T S_1$ 分块为 $[a_1^T, a_2^T]$, 其中 a_1, a_2 维数分别为 n_1 和 $n - 1 - n_1$,
则我们有:

$$\begin{bmatrix} 0 & a^T S_1 \\ & S_1^{-1}T_1P_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_1^T & a_2^T \\ \hline & J_{n_1}(0) & \\ & & J \end{bmatrix}.$$

考虑如下的相似变换:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & -a_1^T J_{n_1}(0) \\ & I_{n_1} \\ & & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a_1^T & a_2^T \\ & J_{n_1}(0) & \\ & & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a_1^T J_{n_1}(0) \\ & I_{n_1} \\ & & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & a_1^T(I_{n_1} - J_{n_1}^T(0)J_{n_1}(0)) & a_2^T \\ & J_{n_1}(0) & \\ & & J \end{bmatrix} \quad (\text{note that } J_{n_1}^T(0)J_{n_1}(0) = I_{n_1} - e_1e_1^T) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & (a_1^T e_1)e_1^T & a_2^T \\ & J_{n_1}(0) & \\ & & J \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

其中 e_1 为对应维数的 Euclid 空间的第 1 个单位标准基向量.

- ① 若 $a_1^T e_1 = 0$, 则上式化为 $\begin{bmatrix} 0 & a_2^T \\ & J_{n_1}(0) \\ & & J \end{bmatrix}$ 并置换相似于 $\begin{bmatrix} J_{n_1}(0) & \\ & 0 & a_2^T \\ & & J \end{bmatrix}$.

根据归纳假设, $n - n_1$ 阶严格上三角阵 $\begin{bmatrix} 0 & a_2^T \\ 0 & J \end{bmatrix}$ 相似于一个 $n - n_1$ 阶 Jordan 矩阵.

因此 $\begin{bmatrix} J_{n_1}(0) & \\ & 0 & a_2^T \\ & & J \end{bmatrix}$ 相似于一个 n 阶 Jordan 矩阵, 于是命题对 n 阶的情况也成立.

- ② 若 $a_1^T e_1 \neq 0$, 则可对 $\begin{bmatrix} 0 & (a_1^T e_1)e_1^T & a_2^T \\ & J_{n_1}(0) & \\ & & J \end{bmatrix}$ 做如下相似变换:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1^T e_1} & & \\ & I_{n_1} & \\ & & \frac{1}{a_1^T e_1} I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & (a_1^T e_1)e_1 & a_2^T \\ & J_{n_1}(0) & \\ & & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (a_1^T e_1) & & \\ & I_{n_1} & \\ & & (a_1^T e_1)I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & e_1^T & a_2^T \\ & J_{n_1}(0) & \\ & & J \end{bmatrix} \quad (\text{note that } J_{n_1+1}(0) = \begin{bmatrix} 0 & e_1^T \\ & J_{n_1}(0) \end{bmatrix} \text{ and } e_1 a_2^T = \begin{bmatrix} a_2^T \\ 0_{n_1 \times (n-1-n_1)} \end{bmatrix}) \\ &= \begin{bmatrix} J_{n_1+1}(0) & e_1 a_2^T \\ & J \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

其中 e_1 为对应维数的 Euclid 空间的第 1 个单位标准基向量.

对 $\begin{bmatrix} J_{n_1+1}(0) & e_1 a_2^T \\ & J \end{bmatrix}$ 做如下的相似变换:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_{n_1+1} & e_2 a_2^T \\ & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{n_1+1}(0) & e_1 a_2^T \\ & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_1+1} & -e_2 a_2^T \\ & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} J_{n_1+1}(0) & -J_{n_1+1}(0)e_2 a_2^T + e_1 a_2^T + e_2 a_2^T J \\ & J \end{bmatrix} \quad (\text{note that } J_{n_1+1}(0)e_2 = e_1) \\ &= \begin{bmatrix} J_{n_1+1}(0) & e_2 a_2^T J \\ & J \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

一般来说, 可对 $\begin{bmatrix} J_{n_1+1}(0) & e_k a_2^T J^{k-1} \\ & J \end{bmatrix}$ ($k = 1, \dots, n_1$) 做如下相似变换:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_{n_1+1} & e_{k+1} a_2^T \\ & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_{n_1+1}(0) & e_k a_2^T J^{k-1} \\ & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_1+1} & -e_{k+1} a_2^T \\ & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} J_{n_1+1}(0) & -J_{n_1+1}(0)e_{k+1} a_2^T J^{k-1} + e_k a_2^T J^{k-1} + e_k a_2^T J^k \\ & J \end{bmatrix} \quad (\text{note that } J_{n_1+1}(0)e_{k+1} = e_k) \\ &= \begin{bmatrix} J_{n_1+1}(0) & e_k a_2^T J^k \\ & J \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

注意到 $J^{n_1} = 0_{n_1 \times n_1}$ (因为 J 中的幂零 Jordan 块的阶数均小于等于 n_1)

因此我们重复上述相似变换 n_1 次便可将 $\begin{bmatrix} J_{n_1+1}(0) & e_1 a_2^T \\ & J \end{bmatrix}$ 化为 $\begin{bmatrix} J_{n_1+1}(0) & \\ & J \end{bmatrix}$.

于是命题对 n 阶的情况也成立.

综上所述, 引理得证.

Solution:

$$A := \begin{bmatrix} J_4(0) & c \\ & 0 \end{bmatrix} \text{ where } c = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

根据 Lemma 2 证明过程的指导, 我们做如下相似变换:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_4 & J_4^T(0)c \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_4(0) & c \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 & -J_4^T(0)c \\ & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} J_4(0) & c \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 & -J_4^T(0)c \\ & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} J_4(0) & (I_4 - J_4(0)J_4^T(0))c \\ & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{note that } J_4(0)J_4^T(0) = I_4 - e_4 e_4^T) \\ &= \begin{bmatrix} J_4(0) & e_4 e_4^T c \\ & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{note that } e_4^T c = 4) \\ &= \begin{bmatrix} J_4(0) & 4e_4 \\ & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

其中 e_4 为对应维数的 Euclid 空间的第 1 个单位标准基向量.

再对 $\begin{bmatrix} J_4(0) & 4e_4 \\ & 0 \end{bmatrix}$ 做如下相似变换:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_4 & \\ & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_4(0) & 4e_4 \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 & \\ & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} J_4(0) & 4e_4 \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 & \\ & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} J_4(0) & e_4 \\ & 0 \end{bmatrix} \\ &= J_5(0). \end{aligned}$$

因此可将相似变换矩阵 P 定义为:

$$\begin{aligned}
P &:= \begin{bmatrix} I_4 & -J_4^T(0)c \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 & \frac{1}{4} \\ & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I_4 & -\frac{1}{4}J_4^T(0)c \\ & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & 1 & -\frac{1}{4} \\ & & 1 & -\frac{2}{4} \\ & & & 1 & -\frac{3}{4} \\ & & & & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\
P^{-1} &:= \begin{bmatrix} I_4 & J_4^T(0)c \\ & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 & J_4^T(0)c \\ & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} I_4 & J_4^T(0)c \\ & 4 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 & 2 \\ & & & 1 & 3 \\ & & & & 4 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

下面我们验证其正确性:

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} I_4 & J_4^T(0)c \\ & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_4(0) & c \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 & -\frac{1}{4}J_4^T(0)c \\ & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} J_4(0) & c \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_4 & -\frac{1}{4}J_4^T(0)c \\ & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} J_4(0) & \frac{1}{4}(I_4 - J_4(0)J_4^T(0))c \\ & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{note that } J_4(0)J_4^T(0) = I_4 - e_4e_4^T) \\
&= \begin{bmatrix} J_4(0) & \frac{1}{4}(e_4e_4^T)c \\ & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} J_4(0) & \frac{1}{4}e_4(e_4^Tc) \\ & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{note that } e_4^Tc = 4) \\
&= \begin{bmatrix} J_4(0) & e_4 \\ & 0 \end{bmatrix} \\
&= J_5(0)
\end{aligned}$$

另解:

直接取:

$$\begin{aligned}
P &= \begin{bmatrix} 1 & & & a \\ & 1 & & b \\ & & 1 & c \\ & & & 1 & d \\ & & & & e \end{bmatrix} \\
P^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & & & -ae^{-1} \\ & 1 & & -be^{-1} \\ & & 1 & -ce^{-1} \\ & & & 1 & -de^{-1} \\ & & & & e^{-1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

我们有:

$$\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} 1 & -ae^{-1} \\ 1 & -be^{-1} \\ 1 & -ce^{-1} \\ 1 & -de^{-1} \\ e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \\ 1 & c \\ 1 & d \\ e \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -ae^{-1} \\ 1 & -be^{-1} \\ 1 & -ce^{-1} \\ 1 & -de^{-1} \\ e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & b+e \\ 0 & 1 & c+2e \\ 0 & 1 & d+3e \\ 0 & 4e \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & b+e \\ 0 & 1 & c+2e \\ 0 & 1 & d+3e \\ 0 & 4e \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

求解

$$\begin{cases} b+e=0 \\ c+2e=0 \\ d+3e=0 \\ 4e=1 \end{cases}$$

可得:

$$\begin{cases} b=-\frac{1}{4} \\ c=-\frac{2}{4} \\ d=-\frac{3}{4} \\ e=\frac{1}{4} \end{cases}$$

而 $a \in \mathbb{R}$ 可以任取.

Problem 2

给定正整数 n , 设 A 是所有上三角元(包括对角元)都为 1 的 n 阶上三角阵.
试求 A 的 Jordan 标准型.

- Lemma: (Matrix Analysis 定理 3.3.15)

设 n 阶方阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的特征多项式和极小多项式分别为 $p_A(t)$ 和 $m_A(t)$,
则下列命题等价:

- $m_A(t)$ 的次数为 n
- $m_A(t) \equiv p_A(t)$
- A 是非退化的(nondiagonalizable), 即 A 所有特征值的几何重数都是 1(即每个不同的特征值只对应一个 Jordan 块)
- A 相似于 $p_A(t)$ 对应的 Frobenius 酷型

Solution:

显然 A 的所有特征值均为 1(因为特征多项式 $p_A(t) = \det(tI_n - A) = (t-1)^n$).
我们有两种方法可以证明 A 的特征值 1 的几何重数为 1:

- Method 1:

注意到:

$$(A - I_n)^T = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

⇓

$$\text{Range}((A - I_n)^T) = \text{span}\{e_2, e_3, \dots, e_n\}$$

因此特征空间 $\text{Ker}(A - I_n) = \text{Range}((A - I_n)^T)^\perp = \text{span}\{e_1\}$ 的维数为 1.

这表明 A 的特征值 1 的几何重数为 1, 即只对应 1 个 Jordan 块.

- **Method 2:**

注意到 $A - I_n$ 为严格上三角阵, 因此 $(A - I_n)^k = 0_{n \times n}$ 当且仅当 $k \geq n$.

于是能够零化 A 的次数最小的首一多项式就是 $(t - 1)^n$.

这表明 A 的极小多项式 $m_A(t) = (t - 1)^n = p_A(t)$.

根据 Lemma 可知 A 是非退化的, 即 A 所有特征值的几何重数都是 1 (即每个不同的特征值只对应一个 Jordan 块).

无论如何, 我们知道 A 的 Jordan 标准型仅由关于特征值 1 的一个 n 阶 Jordan 块构成:

$$J := J_n(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Problem 3

设 $J_3(1)$ 是关于特征值 1 的 3 阶 Jordan 块.

试求关于 $X \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ 的矩阵方程 $X^2 = J_3(1)$ 的一个解.

Solution:

注意到 $J_3(1)$ 是一个上三角阵, 且对角元均为 1.

故我们不妨将矩阵方程 $X^2 = J_3(1)$ 的候选解范围缩小到对角元均为 1 的 3 阶上三角阵.

设 $X = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{bmatrix}$ ($a, b, c \in \mathbb{C}$) 是方程的一个解, 则我们有:

$$\begin{aligned} X^2 &= \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ & 1 & c \\ & & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2a & 2b + ac \\ & 1 & 2c \\ & & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2a = 1 \\ 2b + ac = 0 \\ 2c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{8} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因此 $X = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} \\ & 1 & \frac{1}{2} \\ & & 1 \end{bmatrix}$ 是矩阵方程 $X^2 = J_3(1)$ 的一个解.

Problem 4

(可与非退化矩阵交换的矩阵)

给定正整数 n , J 是一个 n 阶 Jordan 块, A 是一个 n 阶复方阵, 满足 $AJ = JA$.

试证明存在不超过 $n - 1$ 次的复系数多项式 $g(t)$ 使得 $A = g(J)$.

- **Lemma: (幂零 Jordan 块的性质, Matrix Analysis 引理 3.1.4)**

给定正整数 $n \geq 2$ 和 $x \in \mathbb{C}^n$, 记 \mathbb{C}^n 的第 i 个标准单位基向量为 e_i , 则我们有:

- $J_n(0)e_{i+1} = e_i (\forall i = 1, \dots, n - 1)$
- $J_n(0)^T J_n(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ & I_{n-1} \end{bmatrix}$
- $[I_n - J_n(0)^T J_n(0)]x = (x^T e_1)e_1$
- $J_n(0)^k = \begin{cases} \begin{bmatrix} & I_{n-k} \\ 0_{k \times k} & \end{bmatrix} & \text{if } 1 \leq k < n \\ 0_{n \times n} & \text{if } k \geq n \end{cases}$

Proof:

设 $J := J_n(\lambda)$ (其中 $\lambda \in \mathbb{C}$) 并记 $A = [a_1, \dots, a_n]$,

则等式 $AJ = JA$ 可等价表示为:

(其中 \otimes 代表 Kronecker 乘积, $\text{vec}(\cdot)$ 代表向量化操作符)

$$\begin{aligned}
 J_n(\lambda)A - AJ_n(\lambda) &= 0_{n \times n} \\
 \Updownarrow \\
 (I_n \otimes J_n(\lambda) - J_n^T(\lambda) \otimes I_n)\text{vec}(A) &= \text{vec}(0_{n \times n}) \\
 \Updownarrow \\
 \left(\begin{bmatrix} J_n(\lambda) & & & \\ & J_n(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_n(\lambda) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda I_n & & & \\ I_n & \lambda I_n & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & I_n & \lambda I_n \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0_n \\ 0_n \\ \vdots \\ 0_n \end{bmatrix} \\
 \Updownarrow \\
 \begin{bmatrix} J_n(0) & & & \\ -I_n & J_n(0) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -I_n & J_n(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0_n \\ 0_n \\ \vdots \\ 0_n \end{bmatrix} \\
 \Updownarrow \\
 \begin{cases} J_n(0)a_1 = 0_n \\ J_n(0)a_k = a_{k-1} (k = 2, \dots, n) \end{cases}
 \end{aligned}$$

我们可知 a_1, \dots, a_n 具有如下形式:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= c_0 e_1 \\
 a_2 &= c_1 e_1 + c_0 e_2 \\
 a_3 &= c_2 e_1 + c_1 e_2 + c_0 e_3 \quad (\text{where } c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{C}) \\
 &\dots \\
 a_n &= c_{n-1} e_1 + \dots + c_0 e_n
 \end{aligned}$$

因此 A 一定是上三角 Toeplitz 矩阵:

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_n] = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ c_0 & c_1 & \ddots & & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & c_2 & \\ & & c_0 & c_1 & \\ & & & c_0 & \end{bmatrix} \quad (\text{where } c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{C})$$

根据 Lemma 可知幂零 Jordan 块满足:

$$J_n(0)^k = \begin{cases} \begin{bmatrix} & I_{n-k} \\ 0_{k \times k} & \end{bmatrix} & \text{if } 1 \leq k < n \\ 0_{n \times n} & \text{if } k \geq n \end{cases}$$

因此 A 一定可以写成幂零 Jordan 块 $J_n(0)$ 的一个不超过 $n - 1$ 次的复系数多项式，进而可以写成任意 Jordan 块 $J_n(\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) 的一个不超过 $n - 1$ 次的复系数多项式：

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{n-1} \\ & c_0 & c_1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & c_2 \\ & & & c_0 & c_1 \\ & & & & c_0 \end{bmatrix} \quad (\text{where } c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{C}) \\ &= c_0 I_n + c_1 \begin{bmatrix} & I_{n-1} \\ 0_{1 \times 1} & \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} & I_{n-2} \\ 0_{2 \times 2} & \end{bmatrix} + \cdots + c_{n-1} \begin{bmatrix} & & & I_1 \\ 0_{(n-1) \times (n-1)} & \end{bmatrix} \\ &= c_0 I_n + c_1 J_n(0) + c_2 J_n^2(0) + \cdots + c_{n-1} J_n^{n-1}(0) \\ &= c_0 I_n + c_1 [J_n(\lambda) - \lambda I_n] + c_2 [J_n(\lambda) - \lambda I_n]^2 + \cdots + c_{n-1} [J_n(\lambda) - \lambda I_n]^{n-1} \\ &\stackrel{\Delta}{=} g(J_n(\lambda)) \end{aligned}$$

命题得证。

Problem 5

(Jordan-Chevalley 分解)

给定正整数 n 。

试证明对于任意复方阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ，都存在可对角化阵 A_D 和幂零阵 A_N 使得：

$$\begin{cases} A = A_D + A_N \\ A_D A_N = A_N A_D. \end{cases}$$

Proof:

复方阵的 Jordan-Chevalley 分解基于这样一个事实：

任意 Jordan 块都能分解为一个对角阵与一个幂零 Jordan 块的和。

考虑关于 λ 的 Jordan 块 $J_m(\lambda)$ ，它可分解为：

$$J_m(\lambda) = J_m(0) + \lambda I_m.$$

更一般地，设复方阵 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的 Jordan 标准型为：

$$S^{-1} A S = J = \begin{bmatrix} J^{(1)}(\lambda_1) & & & \\ & J^{(2)}(\lambda_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J^{(d)}(\lambda_d) \end{bmatrix},$$

其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ 互不相同， $J_1(\lambda_1), \dots, J_d(\lambda_d)$ 为对应的 Jordan 矩阵：

$$\begin{cases} J^{(1)}(\lambda_1) = J_{n_1^{(1)}}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus J_{n_1^{(p_1)}}(\lambda_1) \text{ where } n_1 = \sum_{i=1}^{p_1} n_1^{(i)} \quad (n_1^{(1)} \geq \cdots \geq n_1^{(p_1)} \geq 1) \\ \cdots \\ J^{(d)}(\lambda_d) = J_{n_d^{(1)}}(\lambda_d) \oplus \cdots \oplus J_{n_d^{(p_d)}}(\lambda_d) \text{ where } n_d = \sum_{i=1}^{p_d} n_d^{(i)} \quad (n_d^{(1)} \geq \cdots \geq n_d^{(p_d)} \geq 1) \end{cases}$$

我们可以将 Jordan 标准型写为一个幂零矩阵和一个对角阵的和：

$$\begin{aligned}
J_D &:= D_1 \oplus \cdots \oplus D_d \\
\begin{cases} D_1 = \lambda_1 I_{n_1^{(1)}} \oplus \cdots \oplus \lambda_1 I_{n_1^{(p_1)}} = \lambda_1 I_{n_1} \\ \cdots \\ D_d = \lambda_d I_{n_d^{(1)}} \oplus \cdots \oplus \lambda_d I_{n_d^{(p_d)}} = \lambda_d I_{n_d} \end{cases} \\
J_N &:= N_1 \oplus \cdots \oplus N_d \\
\begin{cases} N_1 = J_{n_1^{(1)}}(0) \oplus \cdots \oplus J_{n_1^{(p_1)}}(0) \\ \cdots \\ N_d = J_{n_d^{(1)}}(0) \oplus \cdots \oplus J_{n_d^{(p_d)}}(0) \end{cases}
\end{aligned}$$

我们有 $J = J_N + J_D$ 成立.

可定义:

$$\begin{cases} A_N := SJ_N S^{-1} \\ A_D := SJ_D S^{-1}, \end{cases}$$

它们满足 $A_N + A_D = SJ_N S^{-1} + SJ_D S^{-1} = S(J_N + J_D)S^{-1} = SJS^{-1} = A$.

显然 A_N 是一个幂零矩阵 (注意到 $A_N^k = SJ_N^k S^{-1}$, 因此 A_N 继承了 J_D 的幂零性), 而 A_D 是一个可相似对角化的矩阵.

由于 J_N, J_D 分块方式一致且 J_D 为对角阵,

故我们有 $J_N J_D = J_D J_N$, 进而有 $A_N A_D = A_D A_N$.

命题得证.

Problem 6 (optional)

若递归数列 $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ 的初值为 $a_0 = 0$, 递归关系为 $a_{n+1} = \frac{4a_n - 3}{3a_n + 4}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$). 试求 $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ 的通项公式.

- Lemma: (和差角公式)

$$\begin{aligned}
\tan(\theta_1 - \theta_2) &= \frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\cos(\theta_1 + \theta_2)} \\
&= \frac{\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)}{\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)} \\
&= \frac{\tan(\theta_1) - \tan(\theta_2)}{1 + \tan(\theta_1)\tan(\theta_2)}
\end{aligned}$$

Solution:

记 $\theta_0 := \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$ 和 $b_n := \arctan(a_n)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$),

则我们有:

$$\begin{aligned}
\frac{b_0 = \arctan(a_0) = \arctan(0) = 0}{b_{n+1} = \arctan(a_{n+1})} \\
&= \arctan\left(\frac{4a_n - 3}{3a_n + 4}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{4\tan(b_n) - 3}{3\tan(b_n) + 4}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{\tan(b_n) - \frac{3}{4}}{\frac{3}{4}\tan(b_n) + 1}\right) \quad (\text{note that } \tan(\theta_0) = \frac{3}{4}) \\
&= \arctan\left(\frac{\tan(b_n) - \tan(\theta_0)}{\tan(b_n)\tan(\theta_0) + 1}\right) \quad (\text{note that } \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan(\theta_1) - \tan(\theta_2)}{1 + \tan(\theta_1)\tan(\theta_2)}) \\
&= \arctan(\tan(b_n - \theta_0)) \\
&= b_n - \theta_0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

于是我们得到 b_n 的通项公式为 $b_n = -(n-1)\theta_0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$),
 进而得到 a_n 的通项公式为 $a_n = \tan(-(n-1)\theta_0)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$),
 其中 $\theta_0 := \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$.

Matlab 代码验证:

```
% 初始参数
N = 10; % 要生成的项数
a = zeros(1, N); % 初始化 a_n 序列
b = zeros(1, N); % 初始化 b_n 序列
theta_0 = atan(3/4); % 计算 theta_0

% 设置初值
a(1) = 0; % a_0 = 0

% 生成 a_n 序列
for n = 1:N-1
    a(n+1) = (4*a(n) - 3) / (3*a(n) + 4);
end

% 计算 b_n 序列
for n = 1:N
    b(n) = -(n-1)*theta_0;
end

% 计算 c_n 序列
c = tan(b);

% 输出结果
disp('a_n 序列:');
disp(a);
disp('b_n = -(n-1)theta_0 序列:');
disp(b);
disp('c_n = tan(b_n) 序列:');
disp(c);
```

运行结果:

```
a_n 序列:
      0   -0.7500   -3.4286    2.6591    0.6376   -0.0761   -0.8760   -4.7409
2.1485    0.5355

b_n = -(n-1)theta_0 序列:
      0   -0.6435   -1.2870   -1.9305   -2.5740   -3.2175   -3.8610   -4.5045
-5.1480   -5.7915

c_n = tan(b_n) 序列:
      0   -0.7500   -3.4286    2.6591    0.6376   -0.0761   -0.8760   -4.7409
2.1485    0.5355
```

邵老师提供的一般方法:

考虑递归公式 $x_{k+1} = \frac{ax_k+b}{cx_k+d}$ ($\forall k \in \mathbb{Z}_+$), 我们可以将其等价写作:

$$\begin{cases} u_{k+1} = au_k + bv_k \\ v_{k+1} = cu_k + dv_k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix}$$

$$x_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{v_{k+1}}$$

对于本题, 我们有:

$$\begin{cases} u_{k+1} = 4u_k - 3v_k \\ v_{k+1} = 3u_k + 4v_k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} u_{k+1} \\ v_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix}$$

$$x_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{v_{k+1}}$$

设初值 $x_0 = 0$ (对应地 $u_0 = 0$ 而 $v_0 = 1$).

系数矩阵的谱分解为:

$$\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 4+3i & \\ & 4-3i \end{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \right)^H$$

于是我们有:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \dots \\ &= \left(\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \right)^n \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} (4+3i)^n & \\ & (4-3i)^n \end{bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \right)^H \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (4+3i)^n & \\ & (4-3i)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ -i \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (4+3i)^n i - (4-3i)^n i \\ (4+3i)^n + (4-3i)^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因此我们有 $x_n = \frac{(4+3i)^n - (4-3i)^n}{(4+3i)^n + (4-3i)^n} \cdot i$ ($\forall n \in \mathbb{Z}_+$).

Matlab 代码验证:

```
% 初始化参数
N = 10; % 要生成的项数
a = zeros(1, N); % 初始化 a_n 序列
x = zeros(1, N); % 初始化 x_k 序列
y = zeros(1, N); % 初始化 y_n 序列

% 设置初值
u_k = 0; % u_0 = 0
v_k = 1; % v_0 = 1
x(1) = u_k / v_k; % x_0 = 0

a(1) = 0; % a_0 = 0

% 生成 x_k 序列和 a_n 序列
for k = 1:N-1
    % 更新 u_k 和 v_k
    u_k_next = 4*u_k - 3*v_k;
    v_k_next = 3*u_k + 4*v_k;

    % 计算 x_k
    u_k = u_k_next;
    v_k = v_k_next;
    x(k+1) = u_k / v_k; % 计算 x_{k+1}

    % 生成 a_n 序列
    a(k+1) = (4*a(k) - 3) / (3*a(k) + 4);

    % 计算 y_n 序列
    y(k+1) = ((4 + 3i)^k - (4 - 3i)^k) / ((4 + 3i)^k + (4 - 3i)^k) * 1i;
end
```

```
% 输出结果
disp('a_n 序列:');
disp(a);
disp('x_k 序列:');
disp(x);
disp('y_n 序列:');
disp(y);
```

运行结果:

a_n 序列:	0	-0.7500	-3.4286	2.6591	0.6376	-0.0761	-0.8760	-4.7409
	2.1485	0.5355						
x_k 序列:	0	-0.7500	-3.4286	2.6591	0.6376	-0.0761	-0.8760	-4.7409
	2.1485	0.5355						
y_n 序列:	0	-0.7500	-3.4286	2.6591	0.6376	-0.0761	-0.8760	-4.7409
	2.1485	0.5355						

Problem 7 (optional)

试证明 Jordan 标准型在不计 Jordan 块次序的意义下是唯一的.

Proof:

Jordan 标准型的唯一性论断基于以下两个事实:

- ① 秩是一个相似不变量
- ② 若两个相似矩阵通过一个纯量矩阵(形如 λI)进行平移, 则平移后它们仍是相似的.

注意到非幂零 Jordan 块和幂零 Jordan 块可通过幂运算来区分:

$$\text{rank}(J_m(\lambda)^k) = \begin{cases} m & (\forall k \in \mathbb{Z}_+) \\ \begin{cases} m-k-1 & \text{if } 0 \leq k \leq m-1 \\ 0 & \text{if } k \geq m \end{cases} & \text{if } \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{if } \lambda = 0 \end{cases}$$

因此非幂零 Jordan 块求幂不会出现降秩, 而幂零 Jordan 块求幂会逐步降秩, 直到秩为零.

这启发我们用 $\text{rank}((A - \lambda I_n)^k) = \text{rank}((J - \lambda I_n)^k)$ 来刻画特征值 λ 对应的 Jordan 块的个数.

设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}, \lambda \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{N}$, 我们定义:

$$r_k(A, \lambda) := \begin{cases} n & \text{if } k = 0 \\ \text{rank}((A - \lambda I_n)^k) & \text{if } k \geq 1 \end{cases}$$

$$w_k(A, \lambda) := \begin{cases} n - r_1(A, \lambda) & \text{if } k = 1 \\ r_{k-1}(A, \lambda) - r_k(A, \lambda) & \text{if } k \geq 2 \end{cases}$$

我们定义 A 关于特征值 λ (设代数重数为 n_λ) 的 Weyr 特征为 $w(A, \lambda) := (w_1(A, \lambda), \dots, w_{n_\lambda}(A, \lambda))$.

设 J 是一个与 A 相似的 Jordan 矩阵, 显而易见 $w(J, \lambda) = w(A, \lambda)$.

因此我们可以看出 $w_k(A, \lambda)$ 等于与特征值 λ 对应的 Jordan 块中阶数 $\geq k$ 的个数.

于是 $w_k(A, \lambda) - w_{k+1}(A, \lambda)$ 即为与特征值 λ 对应的 Jordan 块中阶数 $= k$ 的个数.

这表明一个与 A 相似的 Jordan 矩阵 J 的构造完全由 A 关于不同特征值的 Weyr 特征所决定.

我们将上述讨论总结为以下引理:

(Matrix Analysis 引理 3.1.18)

- 设 $\lambda \in \mathbb{C}$ 是 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 的一个给定的特征值, 代数重数是 n_λ .
若 $w_1(A, \lambda), \dots, w_{n_\lambda}(A, \lambda)$ 的与 $\lambda \in \mathbb{C}$ 相关的 Weyr 特征,
则一个与 A 相似的 Jordan 矩阵 J 中与 λ 相关的 k 阶 Jordan 块 $J_k(\lambda)$ 的个数为
 $w_k(A, \lambda) - w_{k+1}(A, \lambda)$ ($k = 1, \dots, n_\lambda$).
- 两个复方阵 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 相似, 当且仅当:
 - ① 它们具有相同的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ 及其代数重数 (这 d 个特征值之间互不相同)
 - ② 每一个与特征值相关的 Weyr 特征都是相同的.
即 $w_k(A, \lambda_i) = w_k(B, \lambda_i)$ ($\forall i = 1, \dots, d, k = 1, \dots, n_i$)

如果 A 可相似变换为两个 Jordan 矩阵 J, \tilde{J} (其中 $\tilde{J} \neq J$),

那么它们关于任意特征值的 Weyr 特征都是相同的,

即关于任意特征值的 Jordan 块都是相同的 (不考虑排列).

Jordan 标准型的唯一性得证.

Problem 8 (optional)

给定正整数 k 和复数 ξ_1, \dots, ξ_k

设关于 λ 的方程 $\lambda^k = \xi_1 \lambda^{k-1} + \dots + \xi_{k-1} \lambda + \xi_k$ 所有互不相同的复根是 $\lambda_1, \dots, \lambda_d$, 代数重数分别为 m_1, \dots, m_d .

试证明存在一组常数 β_{ij} 使得线性递归数列 $a_n = \xi_1 a_{n-1} + \dots + \xi_{k-1} a_{n-k+1} + \xi_k a_{n-k}$ 的通项公式为:

$$a_n = \sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=0}^{m_i-1} \beta_{ij} n^j \right) \lambda_i^n.$$

Proof:

$\{a_n\}$ 的线性递归公式可等价表示为矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} a_{n+k-1} \\ a_{n+k-2} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_k \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n+k-2} \\ a_{n+k-3} \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$

注意到上述递推公式的系数矩阵 $B := \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_k \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{k \times k}$ 是一个 Frobenius 友阵,

其特征多项式和极小多项式均为 $p_B(t) := t^k - \xi_1 t^{k-1} - \dots - \xi_{k-1} t - \xi_k$.

根据题设可知 $p_B(t)$ 所有互不相同的复根是 $\lambda_1, \dots, \lambda_d$, 代数重数分别为 m_1, \dots, m_d .

注意到 $p_B(t)$ 同时也是 B 的极小多项式,

因此 B 所有互不相同的复根是 $\lambda_1, \dots, \lambda_d$, 代数重数分别为 m_1, \dots, m_d , 几何重数均为 1.

于是其 Jordan 标准型 $J_B := J_{m_1}(\lambda_1) \oplus \dots \oplus J_{m_d}(\lambda_d)$ (每个不同的特征值只对应一个 Jordan 块).

根据 **Jordan 标准型定理** 可知存在非奇异阵 $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使得 $B = SJ_BS^{-1}$.

于是我们有:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_{n+k-1} \\ a_{n+k-2} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} &= B \begin{bmatrix} a_{n+k-2} \\ a_{n+k-3} \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} \\
&= B^2 \begin{bmatrix} a_{n+k-3} \\ a_{n+k-4} \\ \vdots \\ a_{n-2} \end{bmatrix} \\
&= \dots \\
&= B^n \begin{bmatrix} a_{k-1} \\ a_{k-2} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} \\
&= (S^{-1} J_B S)^n \begin{bmatrix} a_{k-1} \\ a_{k-2} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix} \\
&= S^{-1} J_B^n S \begin{bmatrix} a_{k-1} \\ a_{k-2} \\ \vdots \\ a_0 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

其中我们假设迭代序列的初值 a_0, \dots, a_{k-1} 是已知的，而相似矩阵 S 的具体结构我们不需要弄清楚。注意到 $J_B^n = (J_{m_1}(\lambda_1))^n \oplus \dots \oplus (J_{m_d}(\lambda_d))^n$ ，而且：

$$\begin{aligned}
J_{m_i}(\lambda_i) &= \lambda_i I + J_{m_i}(0) \\
(J_{m_i}(\lambda_i))^n &= \sum_{k=0}^{\min(n, m_i-1)} \binom{n}{k} \lambda_i^{n-k} (J_{m_i}(0))^k \\
\text{where } J_{m_i}(0)^k &= \begin{cases} I_{m_i} & \text{if } k = 0 \\ \begin{bmatrix} I_{m_i} & \\ & I_{m_i-k} \end{bmatrix} & \text{if } 1 \leq k < m_i \\ 0_{m_i \times m_i} & \text{if } k \geq m_i \end{cases}
\end{aligned}$$

因此每个 $(J_{m_i}(\lambda_i))^n$ 元素的线性组合都可表示为 $(\sum_{j=0}^{m_i-1} \alpha_{ij} n^j) \lambda_i^n$ 。

(关于 n 的不超过 $m_i - 1$ 次的多项式乘以 λ_i^n ；将 λ_i^k 放在系数上，因此 λ_i^{n-k} 变为 λ_i^n)

考虑到 $S^{-1}, S, a_0, \dots, a_{k-1}$ 均为常值，

因此 a_n 具有形如 $a_n = \sum_{i=1}^d \left(\sum_{j=0}^{m_i-1} \beta_{ij} n^j \right) \lambda_i^n$ 的通项公式。

The End