FDU 随机过程导论 3. Poisson 过程

本文根据王老师课堂笔记整理而成，并参考了以下教材:

- 随机过程 (苏中根) 第 3 章
- Introduction to Probability Models: Applied Stochastic Processes (S. Ross)
- 应用随机过程概率论模型导论 (S. Ross) 龚光鲁译 第 5 章

欢迎批评指正!

3.1 指数分布 (The Exponential Distribution)

在实际问题的建模中，我们常做的一个简化假设是假定某些随机变量是服从指数分布的.
这是因为指数分布不仅处理起来相对容易，而且它常常是实际分布的一个良好的近似.
我们将说明指数分布具有**无记忆性** (Memoryless Property):
它的行为不随时间而改变，
即如果一个零件的寿命服从指数分布，
那么不论该零件已经使用了多长时间，其预期的剩余使用寿命仍与全新零件一样长.
(也就是说，这个零件并不记住它已经使用了多长时间)
我们将证明**指数分布是具有无记忆性的唯一的连续型分布**.
(另一种具有无记忆性的分布是几何分布 $\text{Geo}(p)$，它是离散型分布)
我们随后会研究一类称为 Poisson 过程的计数过程，并揭示它与指数分布的紧密联系.

3.1.1 指数分布的定义

定义3.1: (指数分布)
我们称一个连续随机变量 X 服从具有参数 λ $(\lambda>0)$ 的**指数分布** $\exp(\lambda)$，
当且仅当它的**概率密度函数**为 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & \text{if } x\geq 0\\ 0, & \text{if } x<0\end{cases}$
或者等价地说，它的**累计分布函数**为 $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & \text{if } x\geq 0\\ 0, & \text{if } x<0\end{cases}$
或者等价地说，它的**矩母函数**为 $M(t)=\mathrm{E}[e^{tX}]=\frac{\lambda}{\lambda-t}\quad(t<\lambda)$
或者等价地说，它的**特征函数**为 $\phi(t)=\mathrm{E}[e^{itX}]=\frac{\lambda}{\lambda-it}\quad(t\in\mathbb{R})$

定理3.1: (指数随机变量的任意阶矩)
我们可以利用矩母函数计算 $X\sim\exp(\lambda)$ 的任意阶矩:
对于任意 $k\geq 1$ 都有 $\mathrm{E}[X^k]=\mathrm{E}[X^ke^{0\cdot X}]=M_X^{(k)}(0)=\lambda\cdot\frac{k!}{(\lambda-t)^{k+1}}|_{t=0}=\frac{k!}{\lambda^k}$ 成立
因此 $\begin{cases}\mathrm{E}[X]=\frac{1}{\lambda}\\ \mathrm{E}[X^2]=\frac{2}{\lambda}\end{cases}\Rightarrow\ \mathrm{Var}[X]=\mathrm{E}[X^2]-(\mathrm{E}[X])^2=\frac{1}{\lambda^2}$

- 一个具体的例子:
  设我们连续地以随机变化的速率接受报酬，记 t 时刻的速率为随机变量 $R(t)$
  定义**折扣后的总报酬**为 $R=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}R(t)\mathrm{d}t$，其中**折扣率** $\lambda\geq 0$
  则**折扣后的平均总报酬**为 $\mathrm{E}[R]=\mathrm{E}[\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}R(t)\mathrm{d}t]=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\mathrm{E}[R(t)]\mathrm{d}t$
  定义表示时间的随机变量 $T\sim\exp(\lambda)$，满足 $T\perp R(t)\ \ (\forall\ t\geq 0)$
  对于任意 $t\geq 0$，定义 $I_{[0,T]}(t)=\begin{cases}1, & \text{if }\ 0\leq t\leq T\\ 0, & \text{if }\ t>T\end{cases}$
  我们希望证明 $\mathrm{E}[R]=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\mathrm{E}[R(t)]\mathrm{d}t=\mathrm{E}[\int_0^{T}R(t)\mathrm{d}t]$:
  $$\begin{aligned}\mathrm{E}[\int_0^{T}R(t)\mathrm{d}t]&=\mathrm{E}[\int_0^{\infty}R(t)I_{[0,T]}(t)\mathrm{d}t]\\&=\int_0^{\infty}\mathrm{E}[R(t)I_{[0,T]}(t)]\mathrm{d}t\quad(T\perp R(t)\text{ for all }t\geq 0)\\&=\int_0^{\infty}\mathrm{E}[R(t)]\cdot\mathrm{E}[I_{[0,T]}(t)]\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\infty}\mathrm{E}[R(t)]\mathrm{P}\{T\geq t\}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\infty}[1-(1-e^{-\lambda t})]\mathrm{E}[R(t)]\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\mathrm{E}[R(t)]\mathrm{d}t\end{aligned}$$
  得证 $\mathrm{E}[R]=\mathrm{E}[\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}R(t)\mathrm{d}t]=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\mathrm{E}[R(t)]\mathrm{d}t=\mathrm{E}[\int_0^{T}R(t)\mathrm{d}t]$
  表明**折扣率**为 λ 的平均总报酬 $=$ 服从 $\exp(\lambda)$分布的随机时间 T 里**无折扣**的平均总报酬.

3.1.2 指数分布的性质

(1) 无记忆性

我们称随机变量 X 具有**无记忆性** (memoryless property)，
当且仅当对于一切 $s,t\geq 0$ 都有 $\mathrm{P}\{X>s+t|X>t\}=\mathrm{P}\{X>s\}$ 成立，
或者等价地，都有 $\frac{\mathrm{P}\{X>s+t,X>t\}}{\mathrm{P}\{X>t\}}=\frac{\mathrm{P}\{X>s+t\}}{\mathrm{P}\{X>t\}}=\mathrm{P}\{X>s\}$ 成立，
或者等价地，都有 $\mathrm{P}\{X>s+t\}=\mathrm{P}\{X>s\}\mathrm{P}\{X>t\}$ 成立.

定理3.2:
指数分布是**唯一**具有**无记忆性**的连续型分布:
它的行为不随时间而改变，
即如果一个零件的寿命服从指数分布，
那么不论该零件已经使用了多长时间，其预期的剩余使用寿命仍与全新零件一样长.
(也就是说，这个零件并不记住它已经使用了多长时间)

证明:

- **① 指数分布具有无记忆性:**
  对于任意给定的 $\lambda>0$，设随机变量 $X\sim\exp(\lambda)$，则有:
  $$\begin{aligned}\mathrm{P}\{X>s+t\}-\mathrm{P}\{X>s\}\mathrm{P}\{X>t\}&=e^{-\lambda(s+t)}-e^{-\lambda s}\cdot e^{-\lambda t}\\&=0\end{aligned}$$
  因此有 $\mathrm{P}\{X>s+t\}=\mathrm{P}\{X>s\}\mathrm{P}\{X>t\}$ 成立，
  说明指数分布 $\exp(\lambda)$ 具有无记忆性.
- **② 具有无记忆性的分布一定是指数分布:**
  假定 X 的分布具有无记忆性，记 $\bar{F}(x)=1-F(x)=\mathrm{P}\{X>x\}\ \ (x\geq 0)$
  则对于任意 $s,t\geq 0$ 都有 $\mathrm{P}\{X>s+t\}=\mathrm{P}\{X>s\}\mathrm{P}\{X>t\}$ 成立，
  即 $\bar{F}(s+t)=\bar{F}(s)\cdot\bar{F}(t)$ 成立，
  即函数 $\bar{F}(x)$ 满足函数方程 $g(s+t)=g(s)g(t)$:
  - 显然 $g(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上是非增函数，取值范围为 $[0,1]$
  - 根据 $\forall\ s,t\geq 0,\ g(s+t)=g(s)g(t)$ 可知 $g(\frac{2}{n})=g(\frac{1}{n}+\frac{1}{n})=g^2(\frac{1}{n})$
    重复上述过程可得 $\forall\ m,n\geq 1,\ g(\frac{m}{n})=g^m(\frac{1}{n})$
    取 $m=n$ 则有 $g(1)=g^n(\frac{1}{n})$
    从而有 $g(\frac{1}{n})=(g(1))^{\frac{1}{n}}$
    因此有 $\forall\ m,n\geq 1,\ g(\frac{m}{n})=(g(1))^{\frac{m}{n}}$
  - 根据有理数在实数域上的稠密性，我们知道:
    对于任意实数 $x\geq 0$，都存在有理数序列 $\{x_n\}$ 满足 $\begin{cases}\forall\ n\geq 1,\ x_n>x\\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=x\end{cases}$
    假设 g 是右连续函数 (这是因为**分布函数** $F(x)$ **总是右连续的**，故 $\bar{F}(x)$ 也右连续)，
    则我们有 $g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(g(1))^{x_n}=(g(1))^x$
    - 若 $g(1)=0$，则 $\forall\ x>0,\ g(x)=0$，
      根据右连续性可知 $g(0)=\lim\limits_{x\to 0_+}g(x)=0$
      说明 $\mathrm{P}\{X=0\}=1$，X 为 0 处的**退化分布**，这一情况通常不在我们考虑范围内.
    - 若 $g(1)\in(0,1]$，则可取 $\lambda=-\log(g(1))\geq 0$
      于是 $\bar{F}(x)=g(x)=e^{-\lambda x}\ \ (x\geq 0)$
      说明 $F(x)=1-e^{-\lambda x}\ \ (x>0)$，即 X 服从**指数分布** $\exp(\lambda)$

综上所述，命题得证.

3.2 Poisson 过程

3.2.1 计数过程 (Counting Processes)

定义3.2: (计数过程)
若 $N(t)$ 表示到时刻 $t\geq 0$ 为止发生的事件总数，则称随机过程 $\{N(t):t\geq 0\}$ 为**计数过程**.
从定义我们看到，一个计数过程 $\{N(t):t\geq 0\}$ 必须满足:

- 对于任意 $t\geq 0$，$N(t)$ 都取非负整数值;

- 对于任意 $0 < s < t$ 都有 $N(s) \leq N(t)$ 成立;
- 对于任意 $0 < s < t$，增量 $N(t) - N(s)$ 都表示区间 $(s, t]$ 中发生的事件数;

为方便起见，记 $\begin{cases} N(t) = N(0, t] \\ N(s, t) = N(t) - N(s) \end{cases}$

3.2.2 Poisson 过程的定义

考虑某服务系统为顾客提供服务:

- 该系统服务设施、服务内容是确定的，不具有随机性.
- 每位顾客是否需要服务是随机的，并且顾客之间的到达是相互独立的;
- 在不同时间段内寻求服务的顾客量基本相同，意味着顾客到达遵循一个恒定的平均速率;
- 系统提供服务不占用时间 (非占用性)，但不能同时为两名以上顾客提供服务 (排他性);
- 系统遵循 "先来后到" 原则，顾客依序排队等待服务;

上述顾客流即为一个 **Poisson 流**,
其计数过程即为一个 **Poisson 过程**，它是最重要的计数过程之一.

定义3.3: (高阶无穷小量)
我们称函数 $f(\cdot)$ 为 x 的高阶无穷小量 (记为 $o(x)$)，如果它满足 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$
记号 $o(x)$ 的使用可以使命题的描述更加简洁.

定理3.3: (高阶无穷小量的运算性质)

- 若函数 $f(\cdot), g(\cdot)$ 都是 $o(x)$，则函数 $f(\cdot) \pm g(\cdot)$ 也是 $o(x)$
- 若函数 $f(\cdot)$ 是 $o(x)$，则对于任意常数 $c \in \mathbb{R}$，函数 $cf(\cdot)$ 也是 $o(x)$
- 综合上述两点可知，若一列函数都是 $o(x)$，则它们的任意有限线性组合也是 $o(x)$

定义3.4: (Poisson 过程)
我们称计数过程 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 为 **Poisson 过程**，它满足:

- **初始条件:** $N(0) = 0$
- **独立增量:** 对于任意 $\begin{cases} k \geq 1 \\ 0 < t_1 < \cdots < t_k \end{cases}$ 都有 $N(t_1), N(t_2) - N(t_1), \ldots, N(t_k) - N(t_{k-1})$ 相互独立
- **平稳增量:** 对于任意 $0 < s < t$ 都有 $N(t) - N(s) \stackrel{\mathrm{d}}{=} N(t - s)$
- **稀有性:** 存在常数 $\lambda > 0$ 使得对于任意 $t > 0$ 都有 $\begin{cases} \mathrm{P}\{N(t, t + \mathrm{d}t) = 0\} = (1 - \lambda)\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) \\ \mathrm{P}\{N(t, t + \mathrm{d}t) = 1\} = \lambda \mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) \\ \mathrm{P}\{N(t, t + \mathrm{d}t) \geq 2\} = o(\mathrm{d}t) \end{cases}$
  其中 $\mathrm{d}t$ 是一个相对小的时间增量,
  而 $o(\mathrm{d}t)$ 代表比 $\mathrm{d}t$ 高阶的无穷小，即有 $\lim\limits_{\mathrm{d}t \to 0} \frac{o(\mathrm{d}t)}{\mathrm{d}t} = 0$
  我们称常数 $\lambda > 0$ 为该 Poisson 过程的**速率** (rate)
  它刻画系统的平均繁忙程度: λ 越大，平均客流量越大，系统越繁忙.
  (根据后面的结论我们知道 $\lambda = \frac{\mathrm{E}[N(t)]}{t} = \mathrm{E}[N(1)]$)

定理3.4 (Poisson 过程的分布规律, Introduction to Probability Models 定理5.1)
若 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 是一个参数为 $\lambda > 0$ 的 Poisson 过程,
则对于任意 $s, t > 0$ (**存疑**: 原来写的是 $0 < s < t$) 都有 $N(s + t) - N(s) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ 成立,
即对于任意 $t > 0$ 都有 $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ 成立,
即对于任意 $\begin{cases} t > 0 \\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$ 都有 $\mathrm{P}\{N(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$ 成立.

- **证明:**
  定义 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 的 Laplace 变换为 $\mathrm{E}[e^{-uN(t)}]$
  任意给定 $u > 0$，记 $g(t) = \mathrm{E}[e^{-uN(t)}]$，我们有:
  $$\begin{aligned} g(t + h) &= \mathrm{E}[e^{-uN(t+h)}] \\ &= \mathrm{E}[e^{-uN(t)} e^{-u(N(t+h) - N(t))}] \quad (\text{增量独立性}) \\ &= \mathrm{E}[e^{-uN(t)}] \cdot \mathrm{E}[e^{-u(N(t+h) - N(t))}] \\ &= g(t)\mathrm{E}[e^{-uN(t, t+h)}] \\ &= g(t)\mathrm{E}[e^{-uN(h)}] \end{aligned}$$
  由**稀有性**可知 $\begin{cases} \mathrm{P}\{N(h) = 0\} = \mathrm{P}\{N(t, t + h) = 0\} = (1 - \lambda)h + o(h) \\ \mathrm{P}\{N(h) = 1\} = \mathrm{P}\{N(t, t + h) = 1\} = \lambda h + o(h) \\ \mathrm{P}\{N(h) \geq 2\} = \mathrm{P}\{N(t, t + h) \geq 2\} = o(h) \end{cases}$
  因此对 $N(h) = 0,\ N(h) = 1,\ N(h) \geq 2$ 取条件，根据**全期望公式**可得:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[e^{-uN(h)}] &= e^{-u\cdot 0}(1-\lambda)h + e^{-u\cdot 1}\lambda h + o(h) \\
&= 1-\lambda h + e^{-u}(\lambda h) + o(h) \\
&= 1+\lambda h(e^{-u}-1) + o(h)
\end{aligned}
$$

于是我们有 $g(t+h) = g(t)\mathrm{E}[e^{-uN(h)}] = g(t)[1+\lambda h(e^{-u}-1)] + o(h)$
由此推出:

$$
\begin{aligned}
g'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}[g(t)\lambda(e^{-u}-1) + \frac{o(h)}{h}] \\
&= g(t)\lambda(e^{-u}-1)
\end{aligned}
$$

于是有 $\frac{d}{\mathrm{d}t}\log(g(t)) = \frac{g'(t)}{g(t)} = \lambda(e^{-u}-1)$
积分后得到 $\log(g(t)) = \lambda(e^{-u}-1)t + C$
根据 $g(0) = \mathrm{E}[e^{-uN(0)}] = \mathrm{E}[e^{-u\cdot 0}] = 1$ 可知常数 $C=0$
所以 $g(t) = e^{\lambda t(e^{-u}-1)}$
因此对于任意 $\begin{cases} u>0 \\ t\geq 0\end{cases}$ 都有 $\mathrm{E}[e^{-uN(t)}] = g_u(t) = e^{\lambda t(e^{-u}-1)}$ (其中 g_u 即固定 u 时的函数 g)

考虑 $X\sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$ 的 Laplace 变换:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[e^{-uX}] &= \sum_{i=0}^{\infty} e^{-ui}\cdot e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^i}{i!} \\
&= e^{-\lambda t}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda t e^{-u})^i}{i!} \\
&= e^{-\lambda t}e^{\lambda t e^{-u}} \\
&= e^{\lambda t(e^{-u}-1)}
\end{aligned}
$$

由于 Laplace 变换唯一地确定了分布，因此我们得出结论: $N(t)\sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$

定义3.5 (Poisson 过程的等价定义)
若计数过程 $\{N(t): t\geq 0\}$ 满足 $N(0)=0$，具有**独立平稳增量**，
并且对于任意 $t\geq 0$ 都有 $N(t)\sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$ (自然有 $\lambda>0$)，
则称 $\{N(t): t\geq 0\}$ 是参数为 λ 的 **Poisson 过程**.
(这也是我们日后最常用的 Poisson 过程的定义)

3.2.3 Poisson 过程的基本性质

(1) 数字特征

考虑参数为 $\lambda>0$ 的 Poisson 过程 $\mathbf{N} = \{N(t): t\geq 0\}$.
对于任意 $t>0$，都有 $N(t)\sim \mathrm{Poisson}(\lambda t)$ 成立.
因此对于任意 $t>0$ 都有 $\begin{cases} M(u,t) = \mathrm{E}[e^{uN(t)}] = e^{\lambda t(e^u-1)} & (u\in\mathbb{R}) \\ \varphi(u,t) = \mathrm{E}[e^{iuN(t)}] = e^{\lambda t(e^{iu}-1)} & (u\in\mathbb{R}) \\ \mu_{\mathbf{N}}(t) = \mathrm{E}[N(t)] = \lambda t \\ \sigma_{\mathbf{N}}^2(t) = \mathrm{Var}[N(t)] = \lambda t \\ \mathrm{E}[N(t)[N(t)-1]\cdots \mathrm{E}[N(t)-k+1]] = (\lambda t)^k \end{cases}$

下面计算 Poisson 过程 $\{N(t): t\geq 0\}$ 的自相关函数和自协方差函数:
对于任意 $0<s<t$:

- 自相关函数:
$$
\begin{aligned}
r_{\mathbf{N}}(s,t) &= \mathrm{E}[N(s)N(t)] \\
&= \mathrm{E}[N(s)(N(s)+N(t)-N(s))] \\
&= \mathrm{E}[(N(s))^2] - \mathrm{E}[N(s)(N(t)-N(s))] \\
&= \mathrm{E}[(N(s))^2] - \mathrm{E}[N(s)]\cdot\mathrm{E}[N(t-s)] \\
&= [(\lambda s)^2 + (\lambda s)] + \lambda s\cdot\lambda(t-s) \\
&= \lambda^2 st + \lambda s
\end{aligned}
$$
- 自协方差函数:
$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}_{\mathbf{N}}(s,t) &= \mathrm{Cov}(N(s),N(t)) \\
&= \mathrm{E}[N(s)N(t)] - \mathrm{E}[N(s)]\mathrm{E}[N(t)] \\
&= \lambda^2 st + \lambda s - \lambda s\cdot\lambda t \\
&= \lambda s
\end{aligned}
$$

下面计算 Poisson 过程的联合分布:
对于任意 $\begin{cases} m \geq 1 \\ 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m \\ 0 \leq k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_m \end{cases}$ 都有:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\{N(t_1)=k_1,\ldots,N(t_m)=k_m\} &= \mathrm{P}\{N(t_1)=k_1, N(t_2)-N(t_1)=k_2-k_1,\ldots,N(t_m)-N(t_{m-1})=k_m-k_{m-1}\} \\
&= \mathrm{P}\{N(t_1)=k_1\}\mathrm{P}\{N(t_2-t_1)=k_2-k_1\}\cdots\mathrm{P}\{N(t_m-t_{m-1})=k_m-k_{m-1}\} \\
&= \frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!}e^{-\lambda t_1}\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^{k_2-k_1}}{(k_2-k_1)!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}\cdots\frac{[\lambda(t_m-t_{m-1})]^{k_m-k_{m-1}}}{(k_m-k_{m-1})!}e^{-\lambda(t_m-t_{m-1})} \\
&= \frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!}\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^{k_2-k_1}}{(k_2-k_1)!}\cdots\frac{[\lambda(t_m-t_{m-1})]^{k_m-k_{m-1}}}{(k_m-k_{m-1})!}e^{-\lambda t_m}
\end{aligned}$$

有了联合分布，就可以计算条件分布:
假设 $0 < s < t$

- **给定总时间段的某个子时间段发生的事件数，考虑剩余事件段内发生的事件数:**
  在给定 $N(s)=n$ 的条件下，对于任意 $k \geq n$ 都有:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\{N(t)=k|N(s)=n\} &= \frac{\mathrm{P}\{N(t)=k,N(s)=n\}}{\mathrm{P}\{N(s)=n\}} \\
&= \frac{\mathrm{P}\{N(s)=n\}\mathrm{P}\{N(t-s)=k-n\}}{\mathrm{P}\{N(s)=n\}} \\
&= \mathrm{P}\{N(t-s)=k-n\} \\
&= \frac{[\lambda(t-s)]^{k-n}}{(k-n)!}e^{-\lambda(t-s)}
\end{aligned}$$

  等式 $\mathrm{P}\{N(t)=k|N(s)=n\}=\mathrm{P}\{N(t-s)=k-n\}$ 说明了 Poisson 过程的**无后效性**,
  即在给定时间段内已知某个子时间段发生的事件数量后,
  剩余时间段内发生的事件数量仅取决于该剩余时间段的长度，与之前的事件发生时间无关.
  这也直接反映了 Poisson 过程**增量的平稳性**.

- **给定总时间段内发生的总事件数，考虑某个子时间段内发生的事件数:**
  在给定 $N(t)=n$ 的条件下，对于任意 $0 \leq k \leq n$ 都有:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\{N(s)=k|N(t)=n\} &= \frac{\mathrm{P}\{N(s)=k,N(t)=n\}}{\mathrm{P}\{N(t)=n\}} \\
&= \frac{(\lambda s)^k}{k!}\frac{[\lambda(t-s)]^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda t}\Big/\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!}(\frac{s}{t})^k(1-\frac{s}{t})^{n-k} \\
&= \mathrm{P}\{B(n,\frac{s}{t})=k\}
\end{aligned}$$

  等式 $\mathrm{P}\{N(s)=k|N(t)=n\}=\mathrm{P}\{B(n,\frac{s}{t})=k\}$ 说明了在一个 Poisson 过程中,
  给定总时间段内事件的总数后，在该时间段的一个子区间内事件数量的分布，可以通过二项分布来描述,
  这体现了 Poisson 过程的事件在时间上的均匀分布性质 (**增量的平稳性**).

总结得到以下定理:
定理3.5: (Poisson 过程的条件分布, 随机过程 (苏中根) 3.1节)
对于任意给定的 $0 < s < t$ 和 $n \geq 0$ 都有:

- 给定 $N(s)=n$ 时，$N(t)$ 的条件分布为 $\mathrm{Poisson}(\lambda(t-s))+n$
  即对于任意 $k \geq n$ 都有:

$$\mathrm{P}\{N(t)=k|N(s)=n\}=\mathrm{P}\{N(t-s)=k-n\}=\frac{[\lambda(t-s)]^{k-n}}{(k-n)!}e^{-\lambda(t-s)}$$

- 给定 $N(t)=n$ 时，$N(s)$ 的条件分布为 $B(n,\frac{s}{t})$
  即对于任意 $0 \leq k \leq n$ 都有:

$$\mathrm{P}\{N(s)=k|N(t)=n\}=\mathrm{P}\{B(n,\frac{s}{t})=k\}=\frac{n!}{k!(n-k)!}(\frac{s}{t})^k(1-\frac{s}{t})^{n-k}$$

最后分析 Poisson 过程的样本曲线:
记 $T_1,T_2,\ldots$ 为事件发生的时刻 (或者称为**到达时刻**, arrival time)，令 $T_0=0$
这些事件还未发生时，$T_1,T_2,\ldots$ 都是随机的,
然而一旦这些事件发生，$T_1,T_2,\ldots$ 就变为固定的值 $t_1,t_2,\ldots$,
即变成了一系列样本点，也就是说，成为了**随机变量的实现** (Realization of Random Variable).

这一系列样本点的整体 $\{t_0, t_1, t_2, \dots\}$ 构成了**随机过程 $\{T_0, T_1, T_2, \dots\}$ 的实现** (Realization of Stochastic Process).
此时，样本曲线便完全确定了:

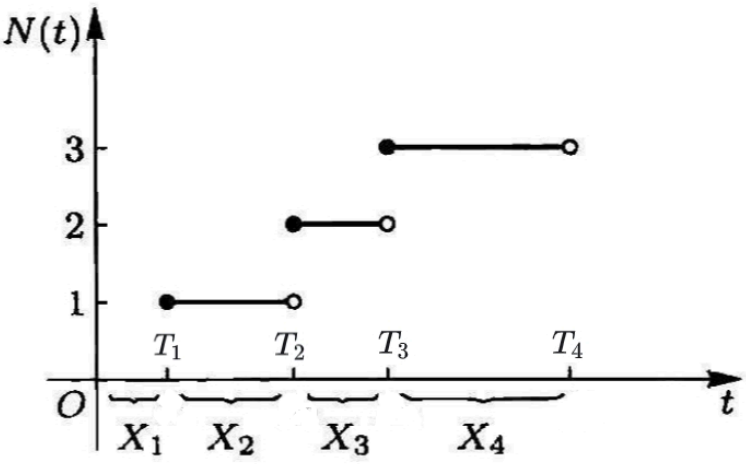

图 3.1

(2) 到达时刻 & 等待时间的分布

刚刚我们定义了 Poisson 过程的**到达时刻** (Arrival Time) 为 $T_1, T_2, \dots$，并且令 $T_0 = 0$
我们现在定义 Poisson 过程的第 i 个**等待时间** (Waiting Time) 为 $X_i = T_i - T_{i-1} \quad (\forall\, i = 1, 2, \dots)$
现在我们来确定等待时间 X_n 的分布:

- 首先我们注意到事件 $\{X_1 > t\}$ 发生，当且仅当区间 $(0, t]$ 内没有事件发生，
  也就等价于事件 $\{N(t) = 0\}$ 发生.
  因此 $\mathrm{P}\{X_1 > t\} = \mathrm{P}\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t} = \mathrm{P}\{\exp(\lambda) > t\}$
  说明 $X_1 \sim \exp(\lambda)$
- 现在考虑事件 $\{X_2 > t\}$:
  对 X_1 取条件有: $\mathrm{P}\{X_2 > t\} = \mathrm{E}[\mathrm{P}\{X_2 > t | X_1\}]$
  对于任意 $s \geq 0$，都有:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{X_2 > t | X_1 = s\} &= \mathrm{P}\{(s, s+t]\text{内没有事件发生} \mid X_1 = s\} \\ &= \mathrm{P}\{N(s+t) - N(s) = 0 \mid X_1 = s\} \quad (\text{Poisson 过程增量的独立平稳性}) \\ &= \mathrm{P}\{N(t) = 0\} \\ &= e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

  说明 $\mathrm{P}\{X_2 > t | X_1 = s\}$ 的值与 X_1 的取值 s 无关
  因此 $\mathrm{P}\{X_2 > t\} = \mathrm{E}[\mathrm{P}\{X_2 > t | X_1\}] = e^{-\lambda t} = \mathrm{P}\{\exp(\lambda) > t\}$
  说明 $X_2 \sim \exp(\lambda)$ 且 $X_2 \perp X_1$

不断重复上述论证，我们就得到下面的定理:
定理3.6: (Poisson 过程等待时间的分布, Introduction to Probability Models 命题5.2)
Poisson 过程等待时间 $X_n (n = 1, 2, \dots)$ 是独立同分布的指数随机变量
即 $\{X_n\} \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \exp(\lambda) = \mathrm{Gamma}(1, \lambda)$
这个命题并不使我们感到惊奇:
独立平稳增量的假设本质上等价于限定在任意时间点，过程概率意义下重新开始.
即过程从任意时间点往后，独立于它以前发生的一切 (由独立增量性)，
而且也有与原过程相同的分布 (由平稳增量性).
换句话说，**Poisson 过程没有记忆**，因而等待时间服从指数分布是相当自然的.

至于到达时间 $T_n (n = 1, 2, \dots)$ 的分布:
对于任意 $n = 1, 2, \dots$，我们有:
$T_n = \sum_{i=1}^n (T_i - T_{i-1}) = \sum_{i=1}^n X_i$
因此 T_n 作为 n 个独立指数随机变量的和，它服从 $\mathrm{Gamma}(n, \lambda)$ 分布
(这个结论我们在 FDU 随机过程导论 1. 概率论回顾 1.4.2 已经说明过了: **Gamma 分布的可再生性**)
其概率密度 $f_{T_n}(t) = \mathrm{P}\{T_n = t\} = \mathrm{P}\{\mathrm{Gamma}(n, \lambda) = t\} = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \quad (t \geq 0)$
实际上，我们还有另外两种方法证明 $T_n \sim \mathrm{Gamma}(n, \lambda)$:

- **法二:**
  任意给定 $t\geq 0$
  注意到第 n 个事件在时刻 t 发生 (即事件 $\{T_n\leq t\}$ 发生),
  当且仅当直到 t 为止发生事件的个数至少是 n (即事件 $\{N(t)\geq n\}$ 发生)
  因此有:
  $$\begin{aligned}F_{T_n}(t)&=\mathrm{P}\{T_n\leq t\}\\&=\mathrm{P}\{N(t)\geq n\}\\&=\sum_{k=n}^{\infty}\mathrm{P}\{N(t)=k\}\\&=\sum_{k=n}^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\end{aligned}$$
  对上式求微分导出:
  $$\begin{aligned}f_{T_n}(t)&=\sum_{k=n}^{\infty}[-\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}+e^{-\lambda t}\lambda\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}]\\&=\lambda e^{-\lambda t}[\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}-\sum_{k=n}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}]\\&=\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\\&=\mathrm{P}\{\mathrm{Gamma}(n,\lambda)=t\}\end{aligned}$$
  说明 $T_n\sim\mathrm{Gamma}(n,\lambda)$.
- **法三:**
  注意到 T_n 是第 n 个事件的到达时刻，因此对于任意 $t\geq 0$ 都有:
  $$\begin{aligned}\mathrm{P}\{t<T_n<t+h\}&=\mathrm{P}\{N(t)=n-1,\text{在 }(t,t+h)\text{ 内有一个事件}\}+o(h)\\&=\mathrm{P}\{N(t)=n-1\}\mathrm{P}\{N(t+h)-N(h)=1\}+o(h)\\&=\mathrm{P}\{N(t)=n-1\}\mathrm{P}\{N(t,t+h)=1\}+o(h)\quad(\text{根据 Poisson 过程的稀有性})\\&=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot[\lambda h+o(h)]+o(h)\\&=\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}h+o(h)\end{aligned}$$
  令 $h\to 0$ 即有 $f_{T_n}(t)=\mathrm{P}\{T_n=t\}=\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}=\mathrm{P}\{\mathrm{Gamma}(n,\lambda)=t\}$
  说明 $T_n\sim\mathrm{Gamma}(n,\lambda)$.

定理3.6 为我们提供了 Poisson 过程的另一个等价定义:
定义3.6: (Poisson 过程的等价定义, Introduction to Probability Models 5.3.3节)
设 $\{X_n:n\geq 1\}$ 是独立同分布的指数随机变量序列，每一项都服从 $\exp(\lambda)$ 分布.
定义 $T_n=X_1+X_2+\cdots+X_n\ \ (\forall\, n=1,2,\ldots)$
现在我们定义一个**计数过程** $\{N(t):t\geq 0\}$，其中 $N(t)\equiv\max\{n:T_n\leq t\}$,
则这个计数过程是速率为 λ 的 **Poisson 过程**.

证明定义3.6和定义3.5的等价性:
我们只需证明定义3.6中计数过程 $\{N(t):t\geq 0\}$ 满足定义3.5的前提条件:

- **(1) 证明对于任意 $t\geq 0$ 都有 $N(t)\sim\mathrm{Poisson}(\lambda t)$**
  若固定 $t\geq 0$，则等价于证明对于任意 $k\geq 0$ 都有 $\mathrm{P}\{N(t)=k\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$ 成立:
  $$\begin{aligned}\mathrm{P}\{N(t)=k\}&=\mathrm{P}\{T_k\leq t<T_{k+1}\}\\&=\mathrm{P}\{T_k\leq t<T_k+X_{k+1}\}\\&=\mathrm{E}[\mathrm{P}\{T_k\leq t<T_k+X_{k+1}|T_k\}]\\&=\mathrm{E}[\mathrm{P}\{X_{k+1}>t-T_k|T_k\}]\\&=\int_0^t\mathrm{P}\{X_{k+1}>t-s|T_k=s\}\mathrm{P}\{T_k=s\}\mathrm{d}s\quad(X_{k+1}\perp T_k)\\&=\int_0^t\mathrm{P}\{X_{k+1}>t-s\}\mathrm{P}\{T_k=s\}\mathrm{d}s\\&=\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\cdot\lambda e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{d}s\\&=e^{-\lambda t}\int_0^t\lambda\frac{(\lambda s)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{d}s\\&=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\end{aligned}$$
  于是得证对于任意 $t\geq 0$ 都有 $N(t)\sim\mathrm{Poisson}(\lambda t)$

- **(2) 证明计数过程 $\{N(t): t \geq 0\}$ 的增量具有独立性、平稳性**

  即要证明对于任意 $0 < s < t$，都有 $\begin{cases} N(t)-N(s) \perp N(s) \\ N(t)-N(s) \overset{\mathrm{d}}{=} N(t-s) \end{cases}$ 成立:

  不失一般性，我们固定 $0 < s < t$

  - **① 证明 $N(t)-N(s) \perp N(s)$:**

    即要证明对于任意 $\begin{cases} k \geq 0 \\ m \geq 0 \end{cases}$ 都有 $\mathrm{P}\{N(t)-N(s)=k|N(s)=m\}$ 的值不依赖于 m

    我们从 $\mathrm{P}\{N(t)-N(s)=k|N(s)=m\} = \frac{\mathrm{P}\{N(t)-N(s)=k, N(s)=m\}}{\mathrm{P}\{N(s)=m\}}$ 出发:

    - **(i) 当 $k=0$ 时:**

      $$\begin{aligned}
      &\mathrm{P}\{N(t)-N(s)=0, N(s)=m\} \\
      &= \mathrm{P}\{T_m \leq s < t < T_{m+1}\} \\
      &= \mathrm{P}\{T_m \leq s < t < T_m + X_{m+1}\} \\
      &= \mathrm{E}[\mathrm{P}\{T_m \leq s < t < T_m + X_{m+1}|T_m\}] \\
      &= \mathrm{E}[\mathrm{P}\{X_{m+1} > t - T_m|T_m\}] \\
      &= \int_0^s \mathrm{P}\{X_{m+1} > t-u|T_m=u\}\mathrm{P}\{T_m=u\}du \quad (X_{m+1} \perp T_m) \\
      &= \int_0^s \mathrm{P}\{X_{m+1} > t-u\}\mathrm{P}\{T_m=u\}du \\
      &= \int_0^s \mathrm{P}\{\exp(\lambda) > t-u\}\mathrm{P}\{\mathrm{Gamma}(m,\lambda)=u\}du \\
      &= \int_0^s e^{-\lambda(t-u)}\lambda e^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^{m-1}}{(m-1)!}du \\
      &= e^{-\lambda t}\int_0^s \lambda\frac{(\lambda u)^{m-1}}{(m-1)!}du \\
      &= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda u)^m}{m!}du
      \end{aligned}$$

      因此:

      $$\begin{aligned}
      \mathrm{P}\{N(t)-N(s)=0|N(s)=m\} &= \frac{\mathrm{P}\{N(t)-N(s)=0, N(s)=m\}}{\mathrm{P}\{N(s)=m\}} \\
      &= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda s)^m}{m!}\Big/ e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^m}{m!} \\
      &= e^{-\lambda(t-s)} \\
      &= \mathrm{P}\{\mathrm{Poisson}(\lambda(t-s))=0\}
      \end{aligned}$$

      表明当 $k=0$ 时，条件概率 $\mathrm{P}\{N(t)-N(s)=k|N(s)=m\}$ 的值不依赖于 m

    - **(ii) 当 $k \geq 1$ 时:**

      $$\begin{aligned}
      &\mathrm{P}\{N(t)-N(s)=k, N(s)=m\} \\
      &= \mathrm{P}\{T_{m+k} \leq t < T_{m+k+1}, T_m \leq s < T_{m+1}\} \\
      &= \mathrm{P}\{T_m \leq s < T_{m+1} < T_{m+k} \leq t < T_{m+k+1}\} \\
      &= \mathrm{P}\{T_m \leq s < T_m + X_{m+1} < T_{m+k} \leq t < T_{m+k} + X_{m+k+1}\} \\
      &= \int_0^s \int_{s-u}^{t-u} \mathrm{P}\{X_{m+1} > s-u, X_{m+k+1} > t-u-v|T_m=u, T_{m+k}-T_m=v\}\mathrm{P}\{T_m=u, T_{m+k}-T_m=v\}dvdu \\
      &= \int_0^s \int_{s-u}^{t-u} \mathrm{P}\{X_{m+1} > s-u\}\mathrm{P}\{X_{m+k+1} > t-u-v\}\mathrm{P}\{T_m=u\}\mathrm{P}\{T_{m+k}-T_m=v\}dvdu \\
      &= \int_0^s \int_{s-u}^{t-u} \mathrm{P}\{\exp(\lambda) > s-u\}\mathrm{P}\{\exp(\lambda) > t-u-v\}\mathrm{P}\{\mathrm{Gamma}(m,\lambda)=u\}\mathrm{P}\{\mathrm{Gamma}(k,\lambda)=v\}dvdu \\
      &= \int_0^s \int_{s-u}^{t-u} e^{-\lambda(s-u)}e^{-\lambda(t-u-v)}\lambda e^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^{m-1}}{(m-1)!}\lambda e^{-\lambda v}\frac{(\lambda v)^{k-1}}{(k-1)!}dvdu \\
      &=
      \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\{N(t)-N(s)=k,N(s)=m\} \\
&=\mathrm{P}\{T_{m+k}\le t<T_{m+k+1},T_m\le s<T_{m+1}\} \\
&=\mathrm{P}\{T_m\le s<T_{m+1}<T_{m+k}\le t<T_{m+k+1}\} \\
&=\mathrm{P}\{T_m\le s<T_m+X_{m+1}<T_{m+k}\le t<T_{m+k}+X_{m+k+1}\} \\
&=\int_0^s\int_u^t \mathrm{P}\{X_{m+1}>s-u,X_{m+k+1}>t-v|T_m=u,T_{m+k}=v\}\mathrm{P}\{T_m=u,T_{m+k}=v\}dvdu \\
&=\int_0^s\int_u^t \mathrm{P}\{X_{m+1}>s-u\}\mathrm{P}\{X_{m+k+1}>t-v\}\mathrm{P}\{T_m=u\}\mathrm{P}\{T_{m+k}-T_m=v-u\}dvdu \\
&=\int_0^s\int_u^t \mathrm{P}\{\exp(\lambda)>s-u\}\mathrm{P}\{\exp(\lambda)>t-v\}\mathrm{P}\{\mathrm{Gamma}(m,\lambda)=u\}\mathrm{P}\{\mathrm{Gamma}(k,\lambda)=v-u\}dvdu \\
&=\int_0^s\int_u^t e^{-\lambda(s-u)}e^{-\lambda(t-v)}\lambda e^{-\lambda u}\frac{(\lambda u)^{m-1}}{(m-1)!}\lambda e^{-\lambda(v-u)}\frac{[\lambda(v-u)]^{k-1}}{(k-1)!}dvdu \\
&=e^{-\lambda t}\int_0^s \lambda e^{-\lambda(s-u)}\frac{(\lambda u)^{m-1}}{(m-1)!}\int_u^t\lambda\frac{[\lambda(v-u)]^{k-1}}{(k-1)!}dvdu \\
&=e^{-\lambda t}\int_0^s \lambda e^{-\lambda(s-u)}\frac{(\lambda u)^{m-1}}{(m-1)!}\frac{[\lambda(t-u)]^{k}}{k!}du \\
&=e^{-\lambda t}[e^{-\lambda(s-u)}\frac{(\lambda u)^{m}}{m!}\frac{[\lambda(t-u)]^{k}}{k!}]\Big|_0^s \\
&=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda s)^{m}}{m!}\frac{[\lambda(t-s)]^{k}}{k!}
\end{aligned}
$$

因此:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\{N(t)-N(s)=k|N(s)=m\}&=\frac{\mathrm{P}\{N(t)-N(s)=k,N(s)=m\}}{\mathrm{P}\{N(s)=m\}} \\
&=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda s)^{m}}{m!}\frac{[\lambda(t-s)]^{k}}{k!}\Big/e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^{m}}{m!} \\
&=e^{-\lambda(t-s)}\frac{[\lambda(t-s)]^{k}}{k!} \\
&=\mathrm{P}\{\mathrm{Poisson}(\lambda(t-s))=k\}
\end{aligned}
$$

表明当 $k\ge 0$ 时，条件概率 $\mathrm{P}\{N(t)-N(s)=k|N(s)=m\}$ 的值不依赖于 m

- **综合 (i)(ii) 可知:**
  任意给定 $0<s<t$
  对于任意 $\begin{cases}k\ge 0\\ m\ge 0\end{cases}$ 都有 $\mathrm{P}\{N(t)-N(s)=k|N(s)=m\}$ 的值不依赖于 m
  说明对于任意 $0<s<t$ 都有 $N(t)-N(s)\perp N(s)$
  表明计数过程 $\{N(t):t\ge 0\}$ 的增量具有独立性.
  因此对于任意 $k\ge 0$ 都有:
  $$
  \begin{aligned}
  &\mathrm{P}\{N(t)-N(s)=k\}\quad(\text{根据增量独立性}) \\
  &\quad=\mathrm{P}\{N(t)-N(s)=k|N(s)=m\}\quad(\forall\, m\ge 0) \\
  &\quad=e^{-\lambda(t-s)}\frac{[\lambda(t-s)]^{k}}{k!} \\
  &\quad=\mathrm{P}\{\mathrm{Poisson}(\lambda(t-s))=k\}
  \end{aligned}
  $$

- **② 证明 $N(t)-N(s)\overset{\mathrm{d}}{=}N(t-s)$:**
  根据 (2)①(i)(ii) 中的结论可知:
  任意给定 $0<s<t$
  对于任意 $k\ge 0$ 都有 $\mathrm{P}\{N(t)-N(s)=k\}=\mathrm{P}\{\mathrm{Poisson}(\lambda(t-s))=k\}$
  说明 $N(t)-N(s)\sim\mathrm{Poisson}(\lambda(t-s))$
  再结合 (1) 中的结论 $N(t-s)\sim\mathrm{Poisson}(\lambda(t-s))$,
  我们就证明了 $N(t)-N(s)\overset{\mathrm{d}}{=}N(t-s)$
  表明计数过程 $\{N(t):t\ge 0\}$ 的增量具有平稳性.

- 综合(1)(2)可知，计数过程 $\{N(t):t\ge 0\}$ 满足**定义3.5**的前提条件，因而是一个 **Poisson 过程**.
  表明**定义3.6**是 Poisson 过程的一个等价定义.

(3) 到达时刻的条件分布

定理 3.7: (到达时刻的联合条件分布, Introduction to Probability Models 定理5.2)
假设 $\mathbf{N}=\{N(t):t\ge 0\}$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程，记 $T_1,T_2,\dots$ 为到达时刻.
给定 $t>0$，则有 $(T_1,T_2,\dots,T_n|N(t)=n)\overset{\mathrm{d}}{=}(U_{(1)},U_{(2)},\dots,U_{(n)})$
其中 $U_{(1)},U_{(2)},\dots,U_{(n)}$ 为对应于 $U_1,U_2,\dots,U_n\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}\mathrm{Uniform}(0,t)$ 的次序统计量.
上面的结论通常可表述为:

在 $(0,t)$ 中已经发生了 n 个事件的条件下，
事件发生的时间 $T_1,T_2,\dots,T_n$ (考虑为无次序的随机变量时) 是在 $(0,t)$ 上独立均匀地分布的.

- **引理 3.8: (次序统计量的性质1)**
  令 $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ 为 n 个随机变量.
  我们记 $Y_{(1)},Y_{(2)},\dots,Y_{(n)}$ 为对应于 $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ 的次序统计量，
  其中 $Y_{(k)}$ 是在 $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ 中第 k 小的值.
  若 $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ 为具有概率密度函数 $f_Y(\cdot)$ 的**独立同分布**的连续随机变量，
  则**次序统计量** $Y_{(1)},Y_{(2)},\dots,Y_{(n)}$ 的联合密度为:
  $f_{Y_{(1)},\dots,Y_{(n)}}(y_1,\dots,y_n)=n!\prod_{i=1}^n f_Y(y_i)\quad(\forall\ y_1<\cdots<y_n)$
  上式的得到是由于:
  - ① 次序统计量 $Y_{(1)},Y_{(2)},\dots,Y_{(n)}$ 的取值是 $y_1,y_2,\dots,y_n$，
    当且仅当 $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ 的取值是 $y_1,y_2,\dots,y_n$ 的 $n!$ 个排列中的任意一个.
  - ② 对于 $1,2,\dots,n$ 的任意排列 $i_1,i_2,\dots,i_n$，
    $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ 的取值为 $y_{i_1},y_{i_2},\dots,y_{i_n}$ 的概率密度都是 $\prod_{j=1}^n f_Y(y_{i_j})=\prod_{j=1}^n f_Y(y_j)$

  特殊地，如果 $Y_1,Y_2,\dots,Y_n\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}\text{Uniform}(0,t)$，
  则次序统计量 $Y_{(1)},Y_{(2)},\dots,Y_{(n)}$ 的联合概率密度为:
  $$f_{Y_{(1)},\dots,Y_{(n)}}(y_1,\dots,y_n)=n!\prod_{i=1}^n\frac{1}{t}=\frac{n!}{t^n}\quad(\forall\ 0<y_1<\cdots<y_n<t)$$

定理 3.7 的证明:
给定条件 $N(t)=n$
注意到对于 $0<t_1<\cdots<t_n<t$，
事件 $\{T_1=t_1,\dots,T_n=t_n,N(t)=n\}$ 发生等价于
事件 $\{X_1=t_1,X_2=t_2-t_1,\dots,X_n=t_n-t_{n-1},X_{n+1}>t-t_n\}$ 发生.
利用**定理3.6**我们知道:
$$\begin{aligned}\text{P}\{T_1=t_1,\dots,T_n=t_n|N(t)=n\}&=\frac{\text{P}\{T_1=t_1,\dots,T_n=t_n,N(t)=n\}}{\text{P}\{N(t)=n\}}\\&=\frac{\text{P}\{X_1=t_1,X_2=t_2-t_1,\dots,X_n=t_n-t_{n-1},X_{n+1}>t-t_n\}}{\text{P}\{N(t)=n\}}\\(\text{定理3.6})&=\frac{\text{P}\{X_1=t_1\}\text{P}\{X_2=t_2-t_1\}\cdots\text{P}\{X_n=t_n-t_{n-1}\}\text{P}\{X_{n+1}>t-t_n\}}{\text{P}\{N(t)=n\}}\\&=\frac{\lambda e^{-\lambda t_1}\lambda e^{-\lambda(t_2-t_1)}\cdots\lambda e^{-\lambda(t_n-t_{n-1})}e^{-\lambda(t-t_n)}}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!}\\&=\frac{n!}{t^n}\\(\text{引理3.8})&=\text{P}\{U_{(1)}=t_1,\dots,U_{(n)}=t_n\}\quad(\forall\ 0<t_1<\cdots<t_n<t)\end{aligned}$$
这就证明了结论: $(T_1,T_2,\dots,T_n|N(t)=n)\overset{\text{d}}{=}(U_{(1)},U_{(2)},\dots,U_{(n)})$

定理 3.9: (到达时刻的边缘条件分布)
假设 $\mathbf{N}=\{N(t):t\ge 0\}$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程，记 $T_1,T_2,\dots$ 为到达时刻.
给定 $t>0$，则对于任意 $1\le k\le n$ 都有 $(T_k|N(t)=n)\overset{\text{d}}{=}U_{(k)}$
其中 $U_{(1)},U_{(2)},\dots,U_{(n)}$ 为对应于 $U_1,U_2,\dots,U_n\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}\text{Uniform}(0,t)$ 的次序统计量.

- **引理 3.10: (次序统计量的性质2)**
  若 $Y_1,Y_2,\dots,Y_n$ 为具有概率密度函数 $f_Y(\cdot)$ 的**独立同分布**的连续随机变量，
  记累计分布函数为 $F_Y(\cdot)$，
  对应的**次序统计量**为 $Y_{(1)},Y_{(2)},\dots,Y_{(n)}$
  下面我们计算 $Y_{(k)}$ 的概率密度函数:
  $$\begin{aligned}&\text{P}\{Y_{(k)}\in[x,x+\text{d}x]\}\\&=\binom{n}{k-1}\binom{n-k+1}{1}\text{P}\{Y_1\le x,\dots,Y_{k-1}\le x,Y_k\in[x,x+\text{d}x],Y_{k+1}>x+\text{d}x,Y_n>x+\text{d}x\}\\&=\binom{n}{k-1}\binom{n-k+1}{1}\prod_{i=1}^{k-1}\text{P}\{Y_i\le x\}\cdot\text{P}\{Y_k\in[x,x+\text{d}x]\}\cdot\prod_{i=k+1}^n\text{P}\{Y_i>x+\text{d}x\}\\&=\binom{n}{k-1}\binom{n-k+1}{1}F_Y(x)^{k-1}\text{P}\{Y_k\in[x,x+\text{d}x]\}[1-F_Y(x+\text{d}x)]^{n-k}\end{aligned}$$
  于是我们左右同除 $\text{d}x$，并令 $\text{d}x\to 0$，则有:

$$
\begin{aligned}
f_{Y_{(k)}}(x) &= \mathrm{P}\{Y_{(k)}=x\} \\
&= \binom{n}{k-1}\binom{n-k+1}{1}F(x)^{k-1}\mathrm{P}\{Y_k=x\}[1-F_Y(x)]^{n-k} \\
&= \binom{n}{k-1}\binom{n-k+1}{1}F_Y(x)^{k-1}f_Y(x)[1-F_Y(x)]^{n-k}
\end{aligned}
$$

我们就得到了第 k 个次序统计量 $Y_{(k)}$ 的概率密度函数.

- 特殊地，如果 $Y_1,Y_2,\dots,Y_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Uniform}(0,t)$，
  则第 k 个次序统计量 $Y_{(k)}$ 的概率密度函数为:
  $$
  \begin{aligned}
  f_{Y_{(k)}}(x) &= \mathrm{P}\{Y_{(k)}=x\} \\
  &= \binom{n}{k-1}\binom{n-k+1}{1}F_Y(x)^{k-1}f_Y(x)[1-F_Y(x)]^{n-k} \\
  &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}(n-k+1)(\frac{x}{t})^{k-1}\frac{1}{t}(1-\frac{x}{t})^{n-k} \\
  &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}(\frac{x}{t})^{k-1}\frac{1}{t}(1-\frac{x}{t})^{n-k}
  \end{aligned}
  $$

定理 3.9 的证明:
我们首先复述**定理3.5**的第二条结论:

> 给定 $N(t)=n$ 时，$N(s)$ 的条件分布为 $B(n,\frac{s}{t})$
> 即对于任意 $0\le k\le n$ 都有:
> $\mathrm{P}\{N(s)=k|N(t)=n\}=\mathrm{P}\{B(n,\frac{s}{t})=k\}=\frac{n!}{k!(n-k)!}(\frac{s}{t})^k(1-\frac{s}{t})^{n-k}$

- **① T_k 累积分布函数为:** (其中 $1\le k\le n$)
  $$
  \begin{aligned}
  \mathrm{P}\{T_k\le s|N(t)=n\} &= \sum_{i=k}^{n}\mathrm{P}\{N(s)=i|N(t)=n\} \\
  (\text{定理3.5}) &= \sum_{i=k}^{n}\mathrm{P}\{B(n,\frac{s}{t})=i\} \\
  &= \sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}(\frac{s}{t})^i(1-\frac{s}{t})^{n-i}
  \end{aligned}
  $$
- **② T_k 的条件概率密度函数为:** (其中 $1\le k\le n$)
  $$
  \begin{aligned}
  \mathrm{P}\{T_k=s|N(t)=n\} &= \frac{d}{\mathrm{d}s}\mathrm{P}\{T_k\le s|N(t)=n\} \\
  &= \sum_{i=k}^{n}\{\binom{n}{i}i(\frac{s}{t})^{i-1}\frac{1}{t}(1-\frac{s}{t})^{n-i}+\binom{n}{i}(\frac{s}{t})^i(n-i)(1-\frac{s}{t})^{n-i-1}(-\frac{1}{t})\} \\
  &= \sum_{i=k}^{n}\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}(\frac{s}{t})^{i-1}\frac{1}{t}(1-\frac{s}{t})^{n-i}-\sum_{i=k}^{n-1}\frac{n!}{i!(n-i-1)!}(\frac{s}{t})^{i}\frac{1}{t}(1-\frac{s}{t})^{n-i-1} \\
  (\text{第二项中令 } l=i+1) &= \sum_{i=k}^{n}\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}(\frac{s}{t})^{i-1}\frac{1}{t}(1-\frac{s}{t})^{n-i}-\sum_{l=k+1}^{n}\frac{n!}{(l-1)!(n-l)!}(\frac{s}{t})^{l-1}\frac{1}{t}(1-\frac{s}{t})^{n-l} \\
  &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}(\frac{s}{t})^{k-1}\frac{1}{t}(1-\frac{s}{t})^{n-k} \\
  (\text{引理3.10}) &= \mathrm{P}\{U_{(k)}=s\}
  \end{aligned}
  $$
  这就证明了结论: $(T_k|N(t)=n)\overset{\text{d}}{=}U_{(k)}$

下面我们看两个具体的例子:

- ① 假设 $\mathbf{N}=\{N(t):t\ge 0\}$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程.
  记 T_1,T_2 分别为第 $1,2$ 个事件发生的时刻，
  计算 $\mathrm{E}[T_1T_2|N(t)=2]$:
  $$
  \begin{aligned}
  \mathrm{E}[T_1T_2|N(t)=2] &= \mathrm{E}[U_{(1)}U_{(2)}] \\
  &= \mathrm{E}[U_1U_2] \\
  &= \mathrm{E}[U_1]\cdot\mathrm{E}[U_2] \\
  &= (\frac{t}{2})^2 \\
  &= \frac{t^2}{4}
  \end{aligned}
  $$
  其中 $U_{(1)},U_{(2)}$ 为对应于 $U_1,U_2\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}\text{Uniform}(0,t)$ 的次序统计量.

- ② 假设 $\mathbf{N}=\{N(t):t\geq 0\}$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程，代表一个车站的乘客计数过程.
  一辆公交车将在 t 时刻到达，
  请计算能够乘坐这辆公交车的所有乘客的总等待时间的期望:
  这个问题可以翻译成:
  $$\mathrm{E}[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)]=\mathrm{E}\{\mathrm{E}[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)|N(t)]\}$$
  考虑条件分布 $[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)|N(t)=n]=[\sum_{i=1}^{n}(t-T_i)|N(t)=n]$:
  根据**定理3.7**可知在给定 $N(t)=n$ 的条件下，
  我们有 $(T_1,T_2,\dots,T_n|N(t)=n)\overset{\mathrm{d}}{=}(U_{(1)},U_{(2)},\dots,U_{(n)})$ 成立.
  其中 $U_{(1)},U_{(2)},\dots,U_{(n)}$ 为对应于 $U_1,U_2,\dots,U_n\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}\text{Uniform}(0,t)$ 的次序统计量.
  因此在给定 $N(t)=n$ 的条件下:
  $$\begin{aligned}\mathrm{E}[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)|N(t)=n]&=\mathrm{E}[\sum_{i=1}^{n}(t-T_i)|N(t)=n]\\(\text{定理}3.7)&=\mathrm{E}[\sum_{i=1}^{n}(t-U_{(i)})]\\&=\mathrm{E}[\sum_{i=1}^{n}(t-U_i)]\\&=nt-\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}[U_i]\\&=nt-n\frac{t}{2}\\&=\frac{1}{2}nt\end{aligned}$$
  因此我们有:
  $$\begin{aligned}\mathrm{E}[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)]&=\mathrm{E}\{\mathrm{E}[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-T_i)|N(t)]\}\\&=\mathrm{E}[\frac{1}{2}N(t)t]\\&=\frac{1}{2}t\mathrm{E}[N(t)]\\&=\frac{1}{2}t\mathrm{E}[\text{Poisson}(\lambda t)]\\&=\frac{1}{2}t\cdot\lambda t\\&=\frac{1}{2}\lambda t^2\end{aligned}$$

(4) Poisson 过程的拆分

我们复述 3.2.3 (3) 中**定理 3.7** 的结论:

> **定理 3.7: (到达时刻的联合条件分布)**
> 假设 $\mathbf{N}=\{N(t):t\geq 0\}$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程，记 $T_1,T_2,\dots$ 为到达时刻.
> 给定 $t>0$，则有 $(T_1,T_2,\dots,T_n|N(t)=n)\overset{\mathrm{d}}{=}(U_{(1)},U_{(2)},\dots,U_{(n)})$
> 其中 $U_{(1)},U_{(2)},\dots,U_{(n)}$ 为对应于 $U_1,U_2,\dots,U_n\overset{\text{i.i.d.}}{\sim}\text{Uniform}(0,t)$ 的次序统计量.

定理 3.7 的应用: (Poisson 过程的拆分, 又称时间抽样, Introduction to Probability Models 命题5.4)
考虑一个参数为 $\lambda>0$ 的 Poisson 过程 $\mathbf{N}=\{N(t):t\geq 0\}$:
假设有 k 种可能类型的事件，
而一个事件被分类为类型 i $(i=1,\dots,k)$ 事件的概率依赖于事件发生的时间.
特别地，我们假设若一个事件在时刻 t 发生，
则它将以概率 $p_i(t)$ 被分类到类型 i $(i=1,\dots,k)$ (独立于以前发生的任何事件)，
其中 $\{p_i(t)\}_{i=1}^k$ 满足 $\sum_{i=1}^k p_i(t)=1$ $(\forall\, t>0)$
利用定理 3.7，我们可以证明以下有用的命题:
定理 3.10: (Poisson 过程的拆分)
在之前的假设下，记 $N_i(t)$ $(i=1,\dots,k)$ 为到时刻 t 为止类型 i 事件发生的个数，
则 $N_i(t)$ $(i=1,\dots,k)$ 是具有均值 $\mathrm{E}[N_i(t)]=\lambda\int_0^t p_i(t)\mathrm{d}s$ 的**独立 Poisson 随机变量**，
即 $N_i(t)\sim\text{Poisson}(\lambda\int_0^t p_i(t)\mathrm{d}s)$ 且它们相互独立.
这样我们就拆分得到了一系列非齐次 Poisson 过程 $\{N_i(t):t\geq 0\}$.

- **推论:**
  特殊地，取 $k=2$ 并令 $\begin{cases} p_1(s)\equiv p \\ p_2(s)\equiv 1-p \end{cases}$
  也就是说，只有两种可能类型的事件 (例如顾客性别为男/女)，
  并且任意时刻 s 时发生的事件分成两类的概率恒为 p 和 $1-p$，
  则我们有 $\begin{cases} N_1(t)\sim \text{Poisson}(\lambda pt) \\ N_2(t)\sim \text{Poisson}(\lambda(1-p)t) \end{cases}$ 且它们相互独立，
  即 $\{N_1(t):t\geq 0\}$ 和 $\{N_2(t):t\geq 0\}$ 分别是参数为 λp 和 $\lambda(1-p)$ 的独立 Poisson 过程.
- **进一步推论:**
  特殊地，若 $p_1(\cdot),p_2(\cdot),\dots,p_k(\cdot)$ 都是常数函数，
  则对于任意 $i=1,2,\dots,k$ 我们有 $N_i(t)=\text{Poisson}(\lambda p_i)$ 且它们相互独立，
  即 $\{N_i(t):t\geq 0\}$ 是参数为 λp_i 的独立 Poisson 过程.

定理 3.10 的证明:
我们想要计算 $N_1(t),N_2(t),\dots,N_k(t)$ 的联合概率密度 $\text{P}\{N_i(t)=n_i,i=1,\dots,k\}$.
为此首先注意，我们需要取条件 $N(t)=\sum_{i=1}^k n_i$ 以保证可行性:
$\text{P}\{N_i(t)=n_i,i=1,\dots,k\}=\text{P}\{N_i(t)=n_i,i=1,\dots,k|N(t)=\sum_{i=1}^k n_i\}\times \text{P}\{N(t)=\sum_{i=1}^k n_i\}$
现在考虑发生在区间 $[0,t]$ 中的一个任意的事件，
如果它在时刻 s 发生，则根据定理 3.10 的假设，它被分入类型 i 的概率将是 $p_i(s)$.
根据**定理 3.7** 可知，这个事件的发生时刻在 $[0,t]$ **均匀分布** (并且**独立**于其他事件)，
因此它是类型 i 事件的概率为 $P_i\overset{\Delta}{=}\frac{1}{t}\int_0^t p_i(s)\mathrm{d}s$.
故条件分布 $(N_1(t),N_2(t),\dots,N_k(t)|N(t))$ 是一个 k **维多项分布** $M(k,P_1,P_2,\dots,P_k)$，
有 $\text{P}\{N_i(t)=n_i,i=1,\dots,k|N(t)=\sum_{i=1}^k n_i\}=\frac{(\sum_{i=1}^k n_i)!}{n_1!\dots n_k!}P_1^{n_1}\dots P_k^{n_k}$
从而有:

$$\begin{aligned}
\text{P}\{N_i(t)=n_i,i=1,\dots,k\}&=\text{P}\{N_i(t)=n_i,i=1,\dots,k|N(t)=\sum_{i=1}^k n_i\}\times \text{P}\{N(t)=\sum_{i=1}^k n_i\}\\
&=\frac{(\sum_{i=1}^k n_i)!}{n_1!\dots n_k!}P_1^{n_1}\dots P_k^{n_k}\times e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{\sum_{i=1}^k n_i}}{(\sum_{i=1}^k n_i)!}\\
&=\prod_{i=1}^k e^{-\lambda P_i t}\frac{(\lambda P_i t)^{n_i}}{n_i!}\\
&=\prod_{i=1}^k \text{P}\{\text{Poisson}(\lambda P_i t)=n_i\}\\
&=\prod_{i=1}^k \text{P}\{\text{Poisson}(\lambda\int_0^t p_i(s)\mathrm{d}s)=n_i\}
\end{aligned}$$

这样我们就证明了 $N_i(t)\sim \text{Poisson}(\lambda\int_0^t p_i(s)\mathrm{d}s)$ 且它们相互独立.

一个具体的例子 (奖券收集问题, Introduction to Probability Models 例5.17)
有 m 种类型的奖券，某人每次以概率 p_i $(\sum_{i=1}^m p_i=1)$ 收集一张类型 i 的奖券 (独立于过去收集的奖券)，
记 N 为这个人为了全套收藏 (每种类型至少一张) 所需要收藏的奖券的张数，请计算 $\text{E}[N]$:

- **Solution:**
  假设奖券的收集过程可由 $\lambda=1$ **(待推广至一般情况)** 的 Poisson 过程 $\{N(t):t\geq 0\}$ 表征.
  记 $N_i(t)$ 为直到时刻 t 为止收集到的类型 i 的张数.
  根据**定理 3.10**可知 $\{N_i(t):t\geq 0\}$ $(i=1,\dots,m)$ 是参数为 $\lambda p_i=p_i$ 的独立 Poisson 过程.
  记 T_i 为 $\{N_i(t):t\geq 0\}$ 的**首次到达时刻**，
  记 $T=\max\limits_{1\leq i\leq m} T_i$ 为集齐全套收藏的时刻.
  我们知道 $T_i\sim\exp(p_i)$ $(i=1,\dots,m)$ 且相互独立，因此有:
  $$\begin{aligned}
  \text{P}\{T\leq t\}&=\text{P}\{\max_{1\leq i\leq m} T_i\leq t\}\\
  &=\text{P}\{T_i\leq t \text{ for all } i=1,\dots,m\}\\
  &=\prod_{i=1}^m \text{P}\{T_i\leq t\}\\
  &=\prod_{i=1}^m \text{P}\{\exp(p_i)\leq t\}\\
  &=\prod_{i=1}^m (1-e^{-p_i t})
  \end{aligned}$$
  于是 $\text{E}[T]=\int_0^\infty \text{P}\{T>t\}\mathrm{d}t=\int_0^\infty\{1-\prod\limits_{i=1}^m(1-e^{-p_i t})\}\mathrm{d}t$
  我们记 X_i 为 Poisson 过程 $\{N(t):t\geq 0\}$ 的第 i 个等待时间，则我们有:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[T] &= \mathrm{E}[\sum_{i=1}^{N} X_i] \\ &= \mathrm{E}[\mathrm{E}[\sum_{i=1}^{N} X_i|N]] \\ &= \mathrm{E}[N\mathrm{E}[X]] \\ &= \mathrm{E}[N]\mathrm{E}[X] \quad (\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[\exp(1)] = 1) \\ &= \mathrm{E}[N]\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{E}[N] = \mathrm{E}[T] = \int_0^\infty \{1 - \prod_{i=1}^{m}(1 - e^{-p_i t})\}\mathrm{d}t$

我们现在计算在最后的全套收藏中只出现一张的类型的数量的期望.

- **Solution:**
  定义随机变量 I_i，若在最后的全套收藏中类型 i 有且仅有一张，则 $I_i = 1$；否则 $I_i = 0$.
  我们的目标是计算 $\mathrm{E}[\sum_{i=1}^m I_i] = \sum_{i=1}^m \mathrm{E}[I_i] = \sum_{i=1}^m \mathrm{P}\{I_i = 1\}$
  记 S_i 为 $\{N_i(t) : t \geq 0\}$ 的**第二个到达时刻** (首次到达时刻记为 T_i)
  我们知道 $\mathrm{P}\{I_i = 1\} = \mathrm{P}\{T_j < S_i \text{ for all } j \neq i\}$
  ($T_i < S_i$ 是平凡的，因此我们规定 $j \neq i$)
  也就是说，如果每一种类型在类型 i 第二次出现之前都已经出现，
  那么最终的全套收藏中有且仅有一张类型 i.

  我们知道 $S_i \sim \mathrm{Gamma}(2, p_i) \ \ (i = 1, \ldots, m)$，可以推出:
  $$\begin{aligned}\mathrm{P}\{I_i = 1\} &= \int_0^\infty \mathrm{P}\{T_j < S_i \text{ for all } j \neq i|S_i = x\}\mathrm{P}\{S_i = x\}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty \mathrm{P}\{T_j < x \text{ for all } j \neq i\}\frac{p_i^2}{1!}xe^{-p_i x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty \prod_{j\neq i}(1 - e^{-p_i x})p_i^2 xe^{-p_i x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$
  因此我们有结果:
  $$\begin{aligned}\mathrm{E}[\sum_{i=1}^m I_i] &= \sum_{i=1}^m \mathrm{E}[I_i] \\ &= \sum_{i=1}^m \mathrm{P}\{I_i = 1\} \\ &= \sum_{i=1}^m \{\int_0^\infty \prod_{j\neq i}(1 - e^{-p_i x})p_i^2 xe^{-p_i x}\mathrm{d}x\} \\ &= \int_0^\infty \sum_{i=1}^m \{\prod_{j\neq i}(1 - e^{-p_i x})p_i^2 xe^{-p_i x}\}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty x\{\prod_{j=1}^m (1 - e^{-p_i x})\} \cdot \sum_{i=1}^m p_i^2 \frac{e^{-p_i x}}{1 - e^{-p_i x}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

有趣的探索: (Introduction to Probability Models 5.3.4 节)
我们想要确定一个 Poisson 过程中 n 个事件的发生
先于另一个与之独立的 Poisson 过程中 m 个事件的发生的概率.
具体来说，设 $\{N_1(t) : t \geq 0\}$ 和 $\{N_1(t) : t \geq 0\}$ 是分别具有速率 λ_1 和 λ_2 的独立 Poisson 过程.
记 $T_n^{(1)}$ 和 $T_m^{(2)}$ 分别为第一个过程的第 n 个事件发生的时刻、第二个过程的第 m 个事件发生的时刻.
我们想要确定 $\mathrm{P}\{T_n^{(1)} < T_m^{(2)}\}$

- **首先考虑 $n = m = 1$ 的特殊情形:**
  我们知道 $T_1^{(1)} \sim \exp(\lambda_1)$，$T_1^{(2)} \sim \exp(\lambda_2)$，对 $T_1^{(1)}$ 取条件可知:
  $$\begin{aligned}\mathrm{P}\{T_1^{(1)} < T_1^{(2)}\} &= \int_0^\infty \mathrm{P}\{T_1^{(1)} < T_1^{(2)}|T_1^{(1)} = x\}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty \mathrm{P}\{x < T_1^{(2)}\}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda_2 x}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\mathrm{d}x \\ &= \lambda_1 \int_0^\infty e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\end{aligned}$$

- **其次考虑 $n=2,\ m=1$ 的情况:**
  (待补充)

(5) Poisson 过程的加和

定理 3.11:
假设 $\mathbf{N}_i=\{N_i(t):t\geq 0\}\ (i=1,\dots,k)$ 是 k 个独立的 Poisson 过程，参数分别为 $\lambda_i\ (i=1,\dots,k)$
令 $N(t)=N_1(t)+N_2(t)+\cdots+N_k(t)$
则 $\mathbf{N}=\{N(t):t\geq 0\}$ 也是 Poisson 过程，参数为 $\sum_{i=1}^k\lambda_i$

- **推论:**
  在定理 3.11 假设下，
  条件分布 $(N_i(t)|N(t)=n)\overset{\text{d}}{=}B(n,\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^k\lambda_i})\ (i=1,\dots,k)$

这个定理可以这样理解 (以 $k=2$ 的情况为例):
两个独立的 Poisson 流在某处汇合，形成一个新的 Poisson 流 (如图所示)

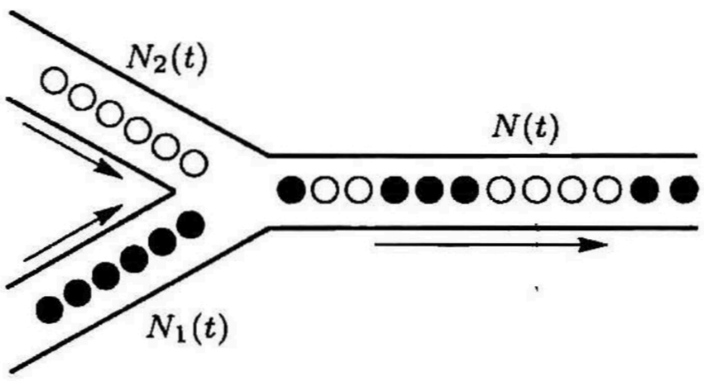

图 3.2

证明:

- **① 证明 $N(t)\sim\text{Poisson}((\lambda_1+\lambda_2)t)$:**
  给定 $t>0$，对于任意整数 $k\geq 0$ 都有:
  $$\begin{aligned}\text{P}\{N(t)=k\}&=\text{P}\{N_1(t)+N_2(t)=k\}\\&=\sum_{i=0}^k\text{P}\{N_1(t)=i,N_2(t)=k-i\}\\&=\sum_{i=0}^k\frac{}{i!}\end{aligned}$$
  (待补充)

3.3 Poisson 过程的推广

3.3.1 复合 Poisson 过程

Poisson 过程是一个计数过程，用于统计一段时间内稀有事件发生的次数.
但是在很多实际问题中，仅仅统计次数并不是我们的目的，
例如对于表征顾客人次的 Poisson 过程 $\{N(t):t\geq 0\}$，记第 i 名顾客的消费为 ξ_i
我们可能更关心的是 $[0,t]$ 时间内所有顾客的消费总额 $Z(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}\xi_i$

定义 3.7: (复合 Poisson 过程)
一个随机过程 $\mathbf{Z}=\{Z(t):t\geq 0\}$ 称为**复合 Poisson 过程**，
如果它的每一项可以表示为 $Z(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}\xi_i$，
其中 $\mathbf{N}=\{N(t):t\geq 0\}$ 是一个 Poisson 过程，
而 $\{\xi_n\}$ 是独立于 $\mathbf{N}$ 的一列独立同分布的随机变量.
我们称 $Z(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}\xi_i$ 为**复合 Poisson 随机变量**.

- 特殊地，若 ξ 的分布为在点 1 处的**退化分布**，
  则复合 Poisson 过程 $\mathbf{Z}=\{Z(t):t\geq 0\}$ 退化为 Poisson 过程 $\mathbf{N}=\{N(t):t\geq 0\}$

- 特殊地，若 ξ 的分布为 **Bernoulli 分布** $B(1,p)$，
  则复合 Poisson 过程 $\mathbf{Z}=\{Z(t):t\geq 0\}$ 退化为参数为 λp 的 Poisson 过程 $\mathbf{N}_1=\{N_1(t):t\geq 0\}$
  (回忆 3.2.3 (4) Poisson 过程的拆分)

由于 $Z(t)$ 的分布依赖于随机变量 $\xi_1,\xi_2,\dots$，
故一般情况下很难显式地计算出 $Z(t)$ 的分布.
但在一定条件下，可以计算出 $Z(t)$ 的**数学期望**和**方差**.

引理 3.12: (复合随机变量的期望和方差, 这个第一章出现过, 可省略证明)
设 $X_1,X_2,\dots$ 是一列独立同分布的随机变量，具有均值 $\mathrm{E}[X]=\mu$ 和方差 $\mathrm{Var}(X)=\sigma^2$
假设它们与取非负整数值的随机变量 N 独立.
我们称 $S=\sum_{i=1}^N X_i$ 为**复合随机变量**，有 $\begin{cases}\mathrm{E}[S]=\mu\mathrm{E}[N]\\ \mathrm{Var}[S]=\sigma^2\mathrm{E}[N]+\mu^2\mathrm{Var}(N)\end{cases}$ 成立.

- 特殊地，如果 $N\sim\mathrm{Possion}(\lambda)$
  则我们称 $S=\sum_{i=1}^N X_i$ 为**复合 Poisson 随机变量**
  根据 $\begin{cases}\mathrm{E}[S]=\mu\mathrm{E}[N]\\ \mathrm{Var}(S)=\sigma^2\mathrm{E}[N]+\mu^2\mathrm{Var}(N)\\ \mathrm{E}[N]=\mathrm{Var}[N]=\lambda\\ \mathrm{E}[X^2]=\mathrm{Var}(X)+(\mathrm{E}[X])^2=\sigma^2+\mu^2\end{cases}$
  可知 $\begin{cases}\mathrm{E}[S]=\mu\lambda=\lambda\mathrm{E}[X]\\ \mathrm{Var}(S)=(\sigma^2+\mu^2)\lambda=\lambda\mathrm{E}[X^2]\end{cases}$

证明:

- ① 计算 $S=\sum_{i=1}^N X_i$ 的**期望**:
  注意到:
  $$\begin{aligned}\mathrm{E}[S|N=n]&=\mathrm{E}[\sum_{i=1}^N X_i|N=n]\\&=\mathrm{E}[\sum_{i=1}^n X_i|N=n]\\&=\mathrm{E}[\sum_{i=1}^n X_i]\quad (N\perp X_i,\forall\, i=1,2,\dots)\\&=\sum_{i=1}^n\mathrm{E}[X_i]\\&=n\mu\end{aligned}$$
  因此有:
  $$\begin{aligned}\mathrm{E}[S]&=\mathrm{E}[\sum_{i=1}^N X_i]\\&=\mathrm{E}[\mathrm{E}[\sum_{i=1}^N X_i|N]]\\&=\mathrm{E}[N\mu]\\&=\mu\mathrm{E}[N]\end{aligned}$$
- ② 计算 $S=\sum_{i=1}^N X_i$ 的**方差**:
  注意到:
  $$\begin{aligned}\mathrm{Var}(S|N=n)&=\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^N X_i|N=n)\\&=\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n X_i|N=n)\\&=\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^n X_i)\quad (N\perp X_i,\forall\, i=1,2,\dots)\\&=\sum_{i=1}^n\mathrm{Var}(X_i)\\&=n\sigma^2\end{aligned}$$
  因此有:
  $$\begin{aligned}\mathrm{Var}(S)&=\mathrm{E}(\mathrm{Var}(S|N))+\mathrm{Var}(\mathrm{E}(S|N))\\&=\mathrm{E}[N\sigma^2]+\mathrm{Var}(N\mu)\\&=\sigma^2\mathrm{E}[N]+\mu^2\mathrm{Var}(N)\end{aligned}$$

定理 3.13: (复合 Poisson 过程的性质)
假设 $\mathbf{N}=\{N(t):t\geq 0\}$ 是参数为 $\lambda>0$ 的 Poisson 过程,
$\xi_1,\xi_2,...$ 是一列独立同分布的随机变量，均值为 μ，方差为 σ^2，且独立于 $\mathbf{N}$.
定义复合 Poisson 过程 $\mathbf{Z}=\{Z(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}\xi_i:t\geq 0\}$，则有:

- ① **均值函数**和**方差函数**: $\begin{cases}\mathrm{E}[Z(t)]=\mu\lambda t\\ \mathrm{Var}[Z(t)]=(\mu^2+\sigma^2)\lambda t\end{cases}$
- ② $\mathbf{Z}=\{Z(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}\xi_i:t\geq 0\}$ 具有**独立平稳增量性**
(我们将其与 Poisson 过程的性质比较发现，复合 Poisson 过程失去了**稀有性**)
    - **独立增量:**
    对于任意 $0<s<t$ 都有 $Z(t)-Z(s)\perp Z(s)$ 相互独立.
    - **平稳增量:**
    对于任意 $0<s<t$ 都有 $Z(t)-Z(s)\stackrel{\mathrm{d}}{=}Z(t-s)$ 成立.

证明:

- **① 可由引理 3.12 直接得到:**
$$\begin{cases}\mathrm{E}[Z(t)]=\mathrm{E}[N(t)]\mathrm{E}[\xi]\\ \qquad\qquad=\lambda t\cdot\mu\\ \qquad\qquad=\mu\lambda t\\ \mathrm{Var}[Z(t)]=\sigma^2\mathrm{E}[N]+\mu^2\mathrm{Var}(N)\\ \qquad\qquad\quad=\sigma^2\cdot\lambda t+\mu^2\cdot\lambda t\\ \qquad\qquad\quad=(\mu^2+\sigma^2)\lambda t\end{cases}$$
- **② 增量独立性:**
记 ξ 的特征函数为 $\varphi(u)=\mathrm{E}[e^{iu\xi}]\ (u\in\mathbb{R})$
对于任意 $0<s<t$ 和 $u,v\in\mathbb{R}$,
利用 $\mathbf{N}=\{N(t):t\geq 0\}$ 和 $\{\xi_n\}$ 的独立性，我们有:
$$\begin{aligned}\mathrm{E}[e^{iu[Z(t)-Z(s)]+iv\mathrm{Z}(s)}]&=\mathrm{E}[e^{iu\sum\limits_{i=N(s)+1}^{N(t)}\xi_i+iv\sum\limits_{i=1}^{N(s)}\xi_i}]\\&=\mathrm{E}\{\mathrm{E}[e^{iu\sum\limits_{i=N(s)+1}^{N(t)}\xi_i+iv\sum\limits_{i=1}^{N(s)}\xi_i}|\mathbf{N}]\}\\&=\mathrm{E}[\varphi(u)^{N(t)-N(s)}\cdot\varphi(v)^{N(s)}]\qquad(N(t)-N(s)\perp N(s))\\&=\mathrm{E}[\varphi(u)^{N(t)-N(s)}]\cdot\mathrm{E}[\varphi(v)^{N(s)}]\\&=\mathrm{E}[e^{iu[Z(t)-Z(s)]}]\cdot\mathrm{E}[e^{ivZ(s)}]\end{aligned}$$
因此 $Z(t)-Z(s)\perp Z(s)$
- **③ 增量平稳性:**
和 ② 类似地，记 ξ 的特征函数为 $\varphi(u)=\mathrm{E}[e^{iu\xi}]\ (u\in\mathbb{R})$
对于任意 $0<s<t$ 和 $u\in\mathbb{R}$，我们有:
$$\begin{aligned}\mathrm{E}[e^{iu[Z(t)-Z(s)]}]&=\mathrm{E}[e^{iu\sum\limits_{i=N(s)+1}^{N(t)}\xi_i}]\\&=\mathrm{E}\{\mathrm{E}[e^{iu\sum\limits_{i=N(s)+1}^{N(t)}\xi_i}|\mathbf{N}]\}\\&=\mathrm{E}[\varphi(u)^{N(t)-N(s)}]\qquad(N(t)-N(s)\stackrel{\mathrm{d}}{=}N(t-s))\\&=\mathrm{E}[\varphi(u)^{N(t-s)}]\\&=\mathrm{E}[e^{iuZ(t-s)}]\end{aligned}$$

计算 $Z(t)$ 的分布:

- **① 累积分布函数:**
$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{Z(t)>x\}&=\mathrm{P}\{\sum_{i=1}^{N(t)}\xi_i>x\}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{P}\{\sum_{i=1}^{N(t)}\xi_i>x|N(t)=n\}\mathrm{P}\{N(t)=n\}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{P}\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i>x\}\mathrm{P}\{N(t)=n\}\end{aligned}$$
我们知道 $\mathrm{P}\{N(t)=n\}=\mathrm{P}\{\mathrm{Poisson}(\lambda t)=n\}=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$
如果我们还知道 $\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ 的分布，就能确定 $Z(t)$ 的累计分布函数.
例如 $\{\xi_i\}\stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim}B(1,p)$ 时 $\sum_{i=1}^{n}\xi_i\sim B(n,p)$
例如 $\{\xi_i\}\stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim}\exp(\beta)$ 时 $\sum_{i=1}^{n}\xi_i\sim\mathrm{Gamma}(n,\beta)$

- **② 特征函数 (或矩母函数):**
  $$\begin{aligned}\varphi_{Z(t)}(a) &= \mathrm{E}[e^{iaZ(t)}] \\ &= \mathrm{E}[e^{ia\sum_{i=1}^{N(t)}\xi_i}] \\ &= \mathrm{E}[\mathrm{E}[e^{ia\sum_{i=1}^{N(t)}\xi_i}]|\mathbf{N}] \\ &= \mathrm{E}[\varphi_\xi(a)^{N(t)}] \\ &= \mathrm{E}[e^{\log(\varphi_\xi(a))N(t)}] \\ &= M_{N(t)}(\log(\varphi_\xi(a))) \qquad (M_{\text{Poisson}(\lambda)}(a) = e^{\lambda(e^a-1)}) \\ &= e^{\lambda t(e^{\log(\varphi_\xi(a))}-1)} \\ &= e^{\lambda t(\varphi_\xi(a)-1)}\end{aligned}$$
  类似地，对于矩母函数，我们有:
  $M_{Z(t)}(a) = e^{\lambda t(M_\xi(a)-1)}$
  如果我们确定了 ξ 的分布，就能确定 $Z(t)$ 的特征函数，等价于确定了 $Z(t)$ 的分布.

一个具体的例子:
某零件在运行过程中受到撞击，用 $N(t)$ 表示 $[0,t]$ 时间段内该零件受到的撞击次数.
设 $\mathbf{N} = \{N(t) : t \geq 0\}$ 是参数为 $\lambda > 0$ 的 Poisson 过程.
每次撞击会给零件带来一定的磨损，磨损量是参数为 $\beta > 0$ 的指数随机变量.
设各次磨损量与撞击次数相互独立.
假设当磨损总量 $\geq \alpha > 0$ 时需要更换零件，求该零件的平均寿命?

- 在求解这个问题之前，我们先给出两个引理:
  - **引理 3.14: (Tonelli 定理, Fubini 定理的一个特殊情况)**
    设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 和 $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ 是两个测度空间,
    $f : X \times Y \to [0,\infty]$ 是一个**非负** $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$-可测函数.
    则有:
    - 对于任意给定的 $x \in X$，函数 $y \mapsto f(x,y)$ 都是 $\mathcal{B}$-可测的.
    - 对于任意给定的 $y \in Y$，函数 $x \mapsto f(x,y)$ 都是 $\mathcal{A}$-可测的.
    - 函数 $x \mapsto \int_Y f(x,y)d\nu(y)$ 是 $\mathcal{A}$-可测的，函数 $y \mapsto \int_X f(x,y)d\mu(x)$ 是 $\mathcal{B}$-可测的.
    - 两个迭代积分是相等的 (即积分可交换顺序):
      $\int_X(\int_Y f(x,y)d\nu(y))d\mu(x) = \int_Y(\int_X f(x,y)d\mu(x))d\nu(y)$
  - **引理 3.15:**
    对于任意**非负**随机向量 X (无论是离散的、连续的，还是这两者的混合形式)
    我们都有 $X = \int_0^X 1\mathrm{d}t = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{X>t\}}(t)\mathrm{d}t$
    应用**引理 3.14 (Tonelli 定理)** 得到:
    $$\begin{aligned}\mathrm{E}[X] &= \mathrm{E}[\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{X>t\}}(t)\mathrm{d}t] \\ &= \int_0^\infty \mathrm{E}[\mathbf{1}_{\{X>t\}}(t)]\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \mathrm{P}\{X>t\}\mathrm{d}t\end{aligned}$$
    (由于指示函数 $\mathbf{1}_{\{X>t\}}(t)$ 是非负的，Tonelli 定理允许我们交换期望和积分的顺序)

Solution:
记零件寿命为 T.
对于任意 $t > 0$，我们有 $T > t \;\Leftrightarrow\; Z(t) < \alpha$
因此有 $\mathrm{P}\{T > t\} = \mathrm{P}\{Z(t) < \alpha\}$
根据**引理 3.15** 有:
$$\begin{aligned}\mathrm{E}[T] &= \int_0^\infty \mathrm{P}\{T>t\}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \mathrm{P}\{Z(t)<\alpha\}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \mathrm{P}\{\sum_{i=1}^{N(t)}\xi_i < \alpha\}\mathrm{d}t\end{aligned}$$
根据 $\mathbf{N} = \{N(t) : t \geq 0\}$ 和 $\{\xi_n\}$ 相互独立，我们有: (全概率公式)
$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{\sum_{i=1}^{N(t)}\xi_i < \alpha\} &= \sum_{n=0}^\infty \mathrm{P}\{\sum_{i=1}^{N(t)}\xi_i < \alpha | N(t)=n\}\mathrm{P}\{N(t)=n\} \\ &= \sum_{n=0}^\infty \mathrm{P}\{\sum_{i=1}^{n}\xi_i < \alpha\}\mathrm{P}\{N(t)=n\}\end{aligned}$$

记 $\tilde{N}(t) = \max\{n \geq 0 : \sum_{i=1}^n \xi_i \leq t\}$ (注意到 $\{\xi_n\} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \exp(\beta)$)
根据 **Poisson 过程的第 3 个等价定义** (定义 3.6)
可知 $\tilde{\mathbf{N}} = \{\tilde{N}(t) : t \geq 0\}$ 是参数为 $\beta > 0$ 的 Poisson 过程.
于是有:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\{\sum_{i=1}^n \xi_i < \alpha\} = \mathrm{P}\{\tilde{N}(\alpha) \geq n\}
&= \sum_{k=n}^\infty \mathrm{P}\{\text{Poisson}(\beta\alpha) = k\} \\
&= \sum_{k=n}^\infty e^{-\alpha\beta} \frac{(\alpha\beta)^k}{k!}
\end{aligned}$$

因此我们有:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[T] &= \int_0^\infty \mathrm{P}\{\sum_{i=1}^{N(t)} \xi_i < \alpha\}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \mathrm{P}\{\sum_{i=1}^n \xi_i < \alpha\}\mathrm{P}\{N(t) = n\}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty \{\sum_{k=n}^\infty \{e^{-\alpha\beta} \frac{(\alpha\beta)^k}{k!}\} \cdot e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}\}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=n}^\infty \frac{\alpha^k\beta^k}{k!} e^{-\alpha\beta} \int_0^\infty \frac{\lambda^{n+1}}{n!} t^n e^{-\lambda t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=n}^\infty \frac{\alpha^k\beta^k}{k!} e^{-\alpha\beta} \int_0^\infty \mathrm{P}\{\text{Gamma}(n+1,\lambda) = t\}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=n}^\infty \frac{\alpha^k\beta^k}{k!} e^{-\alpha\beta} \\
&= \frac{1}{\lambda} [\sum_{n=0}^\infty \frac{\alpha^n\beta^n}{n!} e^{-\alpha\beta} + \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=n+1}^\infty \frac{\alpha^k\beta^k}{k!} e^{-\alpha\beta}] \\
&= \frac{1}{\lambda} [\sum_{n=0}^\infty \mathrm{P}\{\text{Poisson}(\alpha\beta) = n\} + \sum_{n=0}^\infty \mathrm{P}\{\text{Poisson}(\alpha\beta) \geq n+1\}] \qquad (\text{引理}3.15) \\
&= \frac{1}{\lambda} [1 + \mathrm{E}[\text{Poisson}(\alpha\beta)]] \\
&= \frac{1}{\lambda} (1 + \alpha\beta)
\end{aligned}$$

3.3.2 非齐次 Poisson 过程

(非齐次 Poisson 过程, Nonhomogeneous Poisson Process)
计数过程 $\mathbf{N} = \{N(t) : t \geq 0\}$ 称为具有**强度函数** $\lambda(t)$ $(t \geq 0)$ 的非齐次 Poisson 过程，
如果 $\mathbf{N} = \{N(t) : t \geq 0\}$ 满足:

- **初始条件:** $N(0) = 0$
- **增量独立性:** 对于任意 $0 < s < t$ 都有 $N(t) - N(s) \perp N(s)$
- **稀有性:**
  对于任意 $t > 0$ 都有 $\begin{cases} \mathrm{P}\{N(t,t+\mathrm{d}t) = 0\} = (1 - \lambda(t))\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) \\ \mathrm{P}\{N(t,t+\mathrm{d}t) = 1\} = \lambda(t)\mathrm{d}t + o(\mathrm{d}t) \\ \mathrm{P}\{N(t,t+\mathrm{d}t) \geq 2\} = o(\mathrm{d}t) \end{cases}$
  其中 $\mathrm{d}t$ 是一个相对小的时间增量，
  而 $o(\mathrm{d}t)$ 代表比 $\mathrm{d}t$ 高阶的无穷小，即有 $\lim_{\mathrm{d}t \to 0} \frac{o(\mathrm{d}t)}{\mathrm{d}t} = 0$

我们定义非齐次 Poisson 过程的**均值函数**为 $m(t) = \int_0^t \lambda(v)dv$
给出这样一个定义的理由表述在以下的重要定理中.

定理 3.16 (非齐次 Poisson 过程增量的分布, Introduction to Probability Models 定理 5.3)
若 $\{N(t) : t \geq 0\}$ 是强度函数为 $\lambda(t)$ $(t \geq 0)$ 的非齐次 Poisson 过程，
则对于任意 $s, t \geq 0$，$N(t+s) - N(s)$ 都是均值为 $m(t+s) - m(s) = \int_s^{t+s} \lambda(u)du$ 的 Poisson 随机变量.

- **证明:**
  定义 $\{N(t): t \geq 0\}$ 的 Laplace 变换为 $\mathrm{E}[e^{-uN(t)}]$
  任意给定 $u > 0$，记 $g(t) = \mathrm{E}[e^{-uN(t)}]$，我们有:
  $$\begin{aligned} g(t+h) &= \mathrm{E}[e^{-uN(t+h)}] \\ &= \mathrm{E}[e^{-uN(t)} e^{-u(N(t+h)-N(t))}] \quad (\text{增量独立性}) \\ &= \mathrm{E}[e^{-uN(t)}] \cdot \mathrm{E}[e^{-u(N(t+h)-N(t))}] \\ &= g(t)\mathrm{E}[e^{-uN_t(h)}] \end{aligned}$$
  其中 $N_t(h) = N(t+h) - N(t) = N(t, t+h)$
  由**稀有性**可知 $\begin{cases} \mathrm{P}\{N_t(h) = 0\} = \mathrm{P}\{N(t,t+h) = 0\} = (1-\lambda(t))h + o(h) \\ \mathrm{P}\{N_t(h) = 1\} = \mathrm{P}\{N(t,t+h) = 1\} = \lambda(t)h + o(h) \\ \mathrm{P}\{N_t(h) \geq 2\} = \mathrm{P}\{N(t,t+h) \geq 2\} = o(h) \end{cases}$
  因此对 $N_t(h) = 0,\ N_t(h) = 1,\ N_t(h) \geq 2$ 取条件，根据**全期望公式**可得:
  $$\begin{aligned} \mathrm{E}[e^{-uN_t(h)}] &= e^{-u\cdot 0}(1-\lambda(t))h + e^{-u\cdot 1}\lambda(t)h + o(h) \\ &= 1 - \lambda(t)h + e^{-u}(\lambda(t)h) + o(h) \\ &= 1 + \lambda(t)h(e^{-u} - 1) \end{aligned}$$
  于是我们有 $g(t+h) = g(t)\mathrm{E}[e^{-uN_t(h)}] = g(t)[1 + \lambda(t)h(e^{-u}-1)] + o(h)$
  由此推出:
  $$\begin{aligned} g'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}[g(t)\lambda(t)(e^{-u}-1) + \frac{o(h)}{h}] \\ &= g(t)\lambda(t)(e^{-u}-1) \end{aligned}$$
  于是有 $\frac{d}{\mathrm{d}t}\log(g(t)) = \frac{g'(t)}{g(t)} = \lambda(t)(e^{-u}-1)$
  两边从 0 到 t 求积分后得到 $\log(g(t)) - \log(g(0)) = (e^{-u}-1)\int_0^t \lambda(v)dv$
  根据 $g(0) = \mathrm{E}[e^{-uN_t(0)}] = \mathrm{E}[e^{-u\cdot 0}] = 1$ 和 $m(t) = \int_0^t \lambda(v)dv$，
  由上式得出: $g(t) = e^{m(t)(e^{-u}-1)}$
  因此对于任意 $\begin{cases} u > 0 \\ t \geq 0 \end{cases}$ 都有 $\mathrm{E}[e^{-uN(t)}] = g_u(t) = e^{m(t)(e^{-u}-1)}$ (其中 g_u 即固定 u 时的函数 g)

  考虑 $X \sim \mathrm{Poisson}(m(t))$ 的 Laplace 变换:
  $$\begin{aligned} \mathrm{E}[e^{-uX}] &= \sum_{i=0}^{\infty} e^{-ui} \cdot e^{-m(t)} \frac{(m(t))^i}{i!} \\ &= e^{-m(t)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(m(t)e^{-u})^i}{i!} \\ &= e^{-m(t)} e^{m(t)e^{-u}} \\ &= e^{m(t)(e^{-u}-1)} \end{aligned}$$
  由于 Laplace 变换唯一地确定了分布，因此我们得出结论: $N(t) \sim \mathrm{Poisson}(m(t))$
  (老师通过生成函数 $\mathrm{E}[z^{N(t)}] = e^{m(t)(z-1)}$ 证明 $N(t) \sim \mathrm{Poisson}(m(t))$，殊途同归)

  进一步，对于任意 $0 < s < t$，
  记 $N_s(t) = N(s+t) - N(s)$，
  注意到计数过程 $\{N_s(t), t \geq 0\}$ 是强度函数为 $\lambda_s(t) = \lambda(s+t)$ $(t > 0)$ 的非齐次 Poisson 过程.
  因此 $N_s(t)$ 是具有均值 $\int_0^t \lambda_s(v)dv = \int_0^t \lambda(s+v)dv = \int_s^{s+t} \lambda(v)dv = m(s+t) - m(s)$
  的 Poission 随机变量.
  这就证明了结论 $N(s+t) - N(s) \sim \mathrm{Poisson}(m(s+t) - m(s))$.
  (老师通过生成函数 $\mathrm{E}[z^{N(s+t)}] = \mathrm{E}[z^{(N(s)+N(s+t)-N(s))}] = \mathrm{E}[z^{N(s)}]\mathrm{E}[z^{(N(s+t)-N(s))}]$
  得到 $\mathrm{E}[z^{N(s+t)-N(s)}] = e^{[m(s+t)-m(s)](z-1)}$
  证明 $N(s+t) - N(s) \sim \mathrm{Poisson}(m(s+t) - m(s))$，殊途同归)

注 $N(s+t)-N(s)$ 具有均值 $\int_s^{s+t}\lambda(y)\mathrm{d}y$ 的泊松分布，这是伯努利随机变量 (参见例 2.47) 独立和的泊松极限的一个推论. 为了理解这点，我们将区间 $[s,s+t]$ 划分为长度 $\frac{t}{n}$ 的 n 个子区间，其中子区间 i 从 $s+(i-1)\frac{t}{n}$ 到 $s+i\frac{t}{n}$, $i=1,\cdots,n$. 令 $N_i=N\left(s+i\frac{t}{n}\right)-N\left(s+(i-1)\frac{t}{n}\right)$ 记在子区间 i 中发生的事件数，并且注意到

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\{\text{存在某个子区间中的事件数}\geqslant 2\}=\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}\{N_i\geqslant 2\}\right)\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}\{N_i\geqslant 2\}=no\left(\frac{t}{n}\right) \quad \text{由公理(iii)}
\end{aligned}
$$

因为

$$\lim_{n\to\infty} no(t/n)=\lim_{n\to\infty} t\frac{o(t/n)}{t/n}=0$$

由此推出，当 n 趋于 ∞ 时，在 n 个子区间的任意一个中有两个或以上的概率趋于 0. 随之，以概率趋于 1 地有，$N(t)$ 等于其中有一个事件发生的子区间的个数. 因为一个事件在子区间 i 中的概率是 $\lambda\left(s+i\frac{t}{n}\right)\frac{t}{n}+o\left(\frac{t}{n}\right)$，而且在不同子区间的事件个数是独立的，由此推出，当 n 大时含有一个事件的子区间的个数近似地是一个以

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda\left(s+i\frac{t}{n}\right)\frac{t}{n}+no(t/n)$$

为均值的泊松随机变量. 但是

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\lambda\left(s+i\frac{t}{n}\right)\frac{t}{n}+no(t/n)=\int_s^{s+t}\lambda(y)\mathrm{d}y$$

从而得到结果. ∎

我们可以从一个通常意义的 (齐次) Poisson 过程 (通过时间抽样) 生成一个非齐次的 Poisson 过程.
设 $\{N(t):t\geq 0\}$ 是一个速率为 λ 的齐次 Poisson 过程，
并且假设在时刻 t 发生的一个事件，以独立于先前事件的概率 $p(t)$ 计数，
记这个计数过程为 $\{N_c(t):t\geq 0\}$
则它是一个强度函数为 $\lambda(t)=\lambda p(t)$ 的非齐次 Poisson 过程.
我们来验证 $\{N_c(t):t\geq 0\}$ 满足非齐次 Poisson 过程的定义:

- ① 初始条件: $N_c(0)=0$
- ② 增量独立性:
  在 $(s,s+t)$ 时间中被计数的事件数 $N_c(t+s)-N_c(s)$
  只依赖于 $(s,s+t)$ 时间中的事件发生数 $N(t+s)-N(s)$
  因此独立于早于 s 发生的事件 (数量为 $N(s)$),
  于是也独立于早于 s 发生且被计数的事件 (数量为 $N_c(s)$),
  从而建立了增量的独立性.
- ③ 稀有性:
  - 定义 $N_c(t,t+h)=N_c(t+h)-N(t)$
    $\mathrm{P}\{N_c(t,t+h)\geq 2\}\leq\mathrm{P}\{N(t,t+h)\geq 2\}=o(h)$
  - 为计算 $\mathrm{P}\{N_c(t,t+h)=1\}$，我们取条件于 $N(t,t+h)$:
    $$
    \begin{aligned}
    &\mathrm{P}\{N_c(t,t+h)=1\}\\
    &=\mathrm{P}\{N_c(t,t+h)=1|N(t,t+h)=1\}\mathrm{P}\{N(t,t+h)=1\}\\
    &\quad+\mathrm{P}\{N_c(t,t+h)=1|N(t,t+h)\geq 2\}\mathrm{P}\{N(t,t+h)\geq 2\}\\
    &=\mathrm{P}\{N_c(t,t+h)=1|N(t,t+h)=1\}\lambda h+o(h)\\
    &=p(t)\lambda h+o(h)
    \end{aligned}
    $$

  因此稀有性也是满足的.

非齐次 Poisson 过程的重要性在于:
我们不再需要增量平稳性这个条件
现在我们可以认为事件在某些时间比在其他时间更可能发生.

一个具体的例子: (Introduction to Probability Models 例 5.24)
一家热狗店从上午 8 点开始营业，
从每小时 5 个顾客的速率稳定增长到上午 11 点的每小时 20 个顾客的速率，
并维持该速率到下午 1 点，之后稳定下降到下午 5 点的每小时 12 个顾客的速率.
假设不相交的时间段的顾客数是独立的，

请你建立合适的模型，
并计算上午 $8:30$ 至上午 $9:30$ **没有顾客的概率**和**平均顾客数**.

- **解答:**
  我们构建一个非齐次的 Poisson 过程 $\{N(t):t\geq 0\}$，
  假定这个过程开始于午夜零时，则其强度函数为:

$$\lambda(t)=\begin{cases}0, & 0\leq t<8\\ 5+5(t-8), & 8\leq t\leq 11\\ 20, & 11\leq t\leq 13\\ 20-2(t-13), & 13\leq t\leq 17\\ 0, & 17<t<24\\ \lambda(t-24), & t\geq 24\end{cases}$$

  上午 $8:30$ 至上午 $9:30$ 之间到达的顾客数 $N(9.5)-N(8.5)$ 是 Poisson 随机变量，
  其参数为 $m(9.5)-m(8.5)=\int_{8.5}^{9.5}\lambda(t)\mathrm{d}t=\int_{8.5}^{9.5}[5+5(t-8)]\mathrm{d}t=10$
  因此我们有:
  - 没有顾客的概率 $\mathrm{P}\{N(9.5)-N(8.5)=0\}=e^{-10}\frac{(10)^0}{0!}\approx 0.000045$
  - 平均顾客数 $\mathrm{E}[N(9.5)-N(8.5)]=10$

现在我们从另一个角度了解齐次 Poisson 过程如何 (通过时间抽样) 生成非齐次 Poisson 过程:
设 $\{N(t):t\geq 0\}$ 是一个速率为 λ 的齐次 Poisson 过程，
并且假设在时刻 t 发生的一个事件，
分别以概率 $p_1(t),p_2(t),\ldots,p_m(t)$ 分类为类型 $1,2,\ldots,m$ (满足 $\sum_{i=1}^m p_i(t)=1\ (\forall\, t>0)$)
我们记 $\{N_i(t):t\geq 0\}$ 为类型 i 事件的计数过程，
则容易验证 $\{N_i(t):t\geq 0\}\ (i=1,\ldots,m)$ 分别是具有强度函数 $\lambda_i(t)=\lambda p_i(t)\ (i=1,\ldots,m)$
的相互独立的非齐次 Poisson 过程.

(Introduction to Probability Models 例 5.25)
我们记一个具有无穷条服务线、Poisson 到达、服务时间分布 G 的排队系统为 $M/G/\infty$ 系统.
我们想要证明其**顾客离开的计数过程** $\{N(t):t\geq 0\}$为具有强度函数 $\lambda(t)=\lambda G(t)$ 的非齐次 Poisson 过程.

- **证明:**
  - **首先论证离开过程具有增量独立性:**
    考虑不相交的区间 $O_1,\ldots,O_k$，
    我们称一个到达是类型 i 的，如果这个到达在区间 O_i 离开.
    根据**定理 3.10** 可知在这些区间中离开的个数是相互独立的，这就建立了增量独立性.

    > **定理 3.10: (Poisson 过程的拆分)**
    > 考虑一个参数为 $\lambda>0$ 的 Poisson 过程 $\mathbf{N}=\{N(t):t\geq 0\}$:
    > 假设有 k 种可能类型的事件，
    > 而一个事件被分类为类型 $i\ (i=1,\ldots,k)$ 事件的概率依赖于事件发生的时间.
    > 特别地，我们假设若一个事件在时刻 t 发生，
    > 则它将以概率 $p_i(t)$ 被分类到类型 $i\ (i=1,\ldots,k)$ (独立于以前发生的任何事件)，
    > 其中 $\{p_i(t)\}_{i=1}^k$ 满足 $\sum_{i=1}^k p_i(t)=1\ (\forall\, t>0)$
    > 记 $N_i(t)\ (i=1,\ldots,k)$ 为到时刻 t 为止类型 i 事件发生的个数，
    > 则 $N_i(t)\ (i=1,\ldots,k)$ 是具有均值 $\mathrm{E}[N_i(t)]=\lambda\int_0^t p_i(t)\mathrm{d}s$ 的**独立 Poisson 随机变量**，
    > 即 $N_i(t)\sim\mathrm{Poisson}(\lambda\int_0^t p_i(t)\mathrm{d}s)$ 且它们相互独立，
    > 即 $\{N_i(t):t\geq 0\}$ 是参数为 $\lambda\int_0^t p_i(t)\mathrm{d}s$ 的**独立 Poisson 过程**.

  - **现在论证离开过程的计数是 Poisson 随机变量，且过程具有稀有性:**
    考虑区间 $(t,t+h)$ 和在时间 $s<t+h$ 的一个到达.
    这个到达被计数的概率是 $p(s)=\begin{cases}G(t+h-s), & \text{if }\ t<s<t+h\\ G(t+h-s)-G(t-s), & \text{if }\ s\leq t\end{cases}$
    因此由**定理 3.10** 可知:
    在 $(t,t+h)$ 中离开的个数 $N(t+h)-N(t)$ 是 Poisson 随机变量，且具有均值:

$$\begin{aligned}\lambda\int_0^{t+h}p(s)\mathrm{d}s &= \lambda\int_0^{t+h}G(t+h-s)\mathrm{d}s-\lambda\int_0^t G(t-s)\mathrm{d}s\\ &= \lambda\int_0^{t+h}G(u)du-\lambda\int_0^t G(u)du\\ &= \lambda\int_t^{t+h}G(u)du\\ &= \lambda G(t)h+o(h)\end{aligned}$$

因此我们有:

- 计算 $\mathrm{P}\{N(t+h)-N(t)=1\}$:
$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{N(t+h)-N(t)=1\} &= e^{-\lambda G(t)h+o(h)}\frac{(\lambda G(t)h+o(h))^1}{1!}\\ &= \lambda G(t)h\cdot e^{-\lambda G(t)h}+o(h)\\ &= \lambda G(t)h+o(h)\end{aligned}$$
- 计算 $\mathrm{P}\{N(t+h)-N(t)=0\}$:
$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{N(t+h)-N(t)\geq 2\} &= e^{-\lambda G(t)h+o(h)}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(\lambda G(t)h+o(h))^k}{k!}\\ &= o(h)\end{aligned}$$

综上所述，**顾客离开的计数过程** $\{N(t):t\geq 0\}$为具有强度函数 $\lambda(t)=\lambda G(t)$ 的非齐次 Poisson 过程.

非齐次 Poisson 过程的到达时刻:
考虑一个均值函数为 $m(t)=\int_0^t\lambda(u)du$ 的非齐次 Poisson 过程 $\{N(t):t\geq 0\}$
记第 n 个事件的到达时刻记为 T_n,
我们可以得到它的概率密度函数如下:
$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{t<T_n<t+h\} &= \mathrm{P}\{N(t)=n-1,N(t+h)-N(t)=1\}+o(h) \qquad \text{(增量独立性)}\\ &= \mathrm{P}\{N(t)=n-1\}\mathrm{P}\{N(t+h)-N(t)=1\}+o(h)\\ &= e^{-m(t)}\frac{[m(t)]^{n-1}}{(n-1)!}[\lambda(t)h+o(h)]+o(h)\\ &= \lambda(t)e^{-m(t)}\frac{[m(t)]^{n-1}}{(n-1)!}h+o(h)\end{aligned}$$
于是有 $f_{T_n}(t)=\lim_{h\to 0}\mathrm{P}\{t<T_n<t+h\}=\lambda(t)e^{-m(t)}\frac{[m(t)]^{n-1}}{(n-1)!}$

- 特殊地，如果 $\begin{cases}\lambda(t)\equiv\lambda\\ \mathrm{E}[N(t)]=m(t)=\int_0^t\lambda du=\lambda t\end{cases}(\forall\, t>0)$
  则 $f_{T_n}(t)=\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}=\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda t}=\mathrm{P}\{\mathrm{Gamma}(n,\lambda)=t\}$
  此时 $T_n\sim\mathrm{Gamma}(n,\lambda)$

非齐次 Poisson 过程的等待时间:
记第 n 个等待时间为 X_n,
我们可以得到它的概率密度函数如下:
$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{X_n>t\} &= \mathrm{P}\{T_n-T_{n-1}>t\}\\ &= \int_0^{\infty}\mathrm{P}\{T_n-T_{n-1}>t|T_{n-1}=s\}\mathrm{P}\{T_{n-1}=s\}\mathrm{d}s\\ &= \int_0^{\infty}\mathrm{P}\{N(s,s+t)=0\}\mathrm{P}\{T_{n-1}=s\}\mathrm{d}s\\ &= \int_0^{\infty}\mathrm{P}\{\mathrm{Poisson}(m(s,s+t))=0\}f_{T_{n-1}}(s)\mathrm{d}s\\ &= \int_0^{\infty}e^{-m(s,s+t)}\cdot\lambda(s)e^{-m(s)}\frac{[m(s)]^{n-2}}{(n-2)!}\mathrm{d}s\\ &= \int_0^{\infty}e^{-m(s+t)}\cdot\lambda(s)\frac{[m(s)]^{n-2}}{(n-2)!}\mathrm{d}s\end{aligned}$$

(待补充)

定理3.17: (非齐次 Poisson 过程的到达时刻的条件分布，定理3.7的推广，[苏中根] 定理3.9)
假设 $\mathbf{N}=\{N(t):t\geq 0\}$ 是均值函数为 $m(t)=\int_0^t\lambda(u)du$ 的非齐次 Poisson 过程,
记 $T_1,T_2,\ldots$ 为到达时刻.
定义独立同分布的随机变量 $V_1,V_2,\ldots,V_n$，其密度函数为 $f_V(v)=\frac{\lambda(v)}{m(t)}\;\;(0\leq v\leq t)$
给定 $t>0$，则有 $(T_1,T_2,\ldots,T_n|N(t)=n)\overset{\mathrm{d}}{=}(V_{(1)},V_{(2)},\ldots,V_{(n)})$

其中 $V_{(1)}, V_{(2)}, \ldots, V_{(n)}$ 为对应于 $V_1, V_2, \ldots, V_n$ 的次序统计量.
(证明与定理 3.7 类似，只需要证明二者密度函数相等即可证明同分布)

- 特殊地，如果 $\begin{cases} \lambda(t) \equiv \lambda \\ \mathrm{E}[N(t)] = m(t) = \int_0^t \lambda du = \lambda t \end{cases} (\forall\, t > 0)$，
  则 $V_1, V_2, \ldots, V_n$ 的密度函数退化为 $f_V(v) \equiv \frac{\lambda}{\lambda t} = \frac{1}{t} \ \ (0 \le v \le t)$，
  也就是说，$V_1, V_2, \ldots, V_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Uniform}(0, t)$
  此时定理 3.17 退化为定理 3.7:

  > **定理 3.7: (到达时刻的联合条件分布, Introduction to Probability Models 定理5.2)**
  > 假设 $\mathbf{N} = \{N(t) : t \ge 0\}$ 是参数为 λ 的 Poisson 过程，记 $T_1, T_2, \ldots$ 为到达时刻.
  > 给定 $t > 0$，则有 $(T_1, T_2, \ldots, T_n | N(t) = n) \overset{\text{d}}{=} (U_{(1)}, U_{(2)}, \ldots, U_{(n)})$
  > 其中 $U_{(1)}, U_{(2)}, \ldots, U_{(n)}$ 为对应于 $U_1, U_2, \ldots, U_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Uniform}(0, t)$ 的次序统计量.
  > **上面的结论通常可表述为:**
  > 在 $(0, t)$ 中已经发生了 n 个事件的条件下，
  > 事件发生的时间 $T_1, T_2, \ldots, T_n$ (考虑为无次序的随机变量时) 是在 $(0, t)$ 上独立均匀地分布的.

一些具体的例子:

- **([苏中根] 例3.7):**
  考虑强度函数为 $\lambda(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t < 1 \\ 2, & 1 \le t < 2 \\ 4 - t, & 2 \le t \le 4 \end{cases}$ 的非齐次 Poisson 过程 $\mathbf{N} = \{N(t) : t \ge 0\}$
  计算 $\mathrm{P}\{N(2) = 2, N(2, 4] = 2\}$:
  根据 $\begin{cases} m(2) = \int_0^2 \lambda(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 2t\mathrm{d}t + \int_1^2 2\mathrm{d}t = 3 \\ m(4) - m(2) = \int_2^4 \lambda(t)\mathrm{d}t = \int_2^4 (4 - t)\mathrm{d}t = 2 \end{cases}$
  可知 $\begin{cases} N(2) \sim \text{Poisson}(3) \\ N(2, 4] = N(4) - N(2) \sim \text{Poisson}(2) \end{cases}$
  根据**增量独立性**可知:
  $$\begin{aligned} \mathrm{P}\{N(2) = 2, N(2, 4] = 2\} &= \mathrm{P}\{N(2) = 2\}\mathrm{P}\{N(2, 4] = 2\} \\ &= e^{-3}\frac{3^2}{2!} \cdot e^{-2}\frac{2^2}{2!} \\ &= 9e^{-5} \end{aligned}$$

- **([苏中根] 例3.8):**

- **([苏中根] 例3.9):**
  去年期中考试 Problem 3 (Introduction to Probability Models 例 5.18)

通过非齐次 Poisson 过程构造齐次 Poisson 过程:
假设 $\tilde{\mathbf{N}} = \{\tilde{N}(t) : t \ge 0\}$ 是均值函数为 $m(t) = \int_0^t \lambda(u)du$ 的非齐次 Poisson 过程，
由于强度函数 $\lambda(t)$ 是恒正的，故均值函数 $m(t)$ 是严格单调递增的.
因此 $m(t)$ 存在反函数 m^{-1}，
我们定义 $\begin{cases} m(0) = 0 \\ m^{-1}(0) = 0 \\ t_0 = m^{-1}(t) \\ s_0 = m^{-1}(s) \end{cases}$ (若有 $0 < s < t$，则有 $0 < s_0 < t_0$)
定义随机过程 $\mathbf{N} = \{N(t) = N(m^{-1}(t)) : t \ge 0\}$
我们可以证明 $\mathbf{N}$ 是一个速率 $\lambda = 1$ 的齐次 Poisson 过程.

- **① 初始条件:**
  $N(0) = \tilde{N}(m^{-1}(0)) = \tilde{N}(0) = 0$

- **② 证明 $N(t) \overset{\text{d}}{=} \text{Poisson}(t)$:**
  对于任意 $k = 0, 1, \ldots$，我们都有:
  $$\begin{aligned} \mathrm{P}\{N(t) = k\} &= \mathrm{P}\{\tilde{N}(m^{-1}(t)) = k\} \\ &= \mathrm{P}\{\tilde{N}(t_0) = k\} \\ &= \mathrm{P}\{\text{Poisson}(m(t_0)) = k\} \\ &= \mathrm{P}\{\text{Poisson}(t) = k\} \end{aligned}$$
  因此 $N(t) \overset{\text{d}}{=} \text{Poisson}(t)$ 成立.

- ③ **证明** $N(t)-N(s) \perp N(t-s)$:
$$\begin{aligned}\mathrm{E}[e^{a[N(t)-N(s)]+bN(s)}] &= \mathrm{E}[e^{a[\tilde{N}(m^{-1}(t))-\tilde{N}(m^{-1}(s))]+b\tilde{N}(m^{-1}(s))}] \\ &= \mathrm{E}[e^{a[\tilde{N}(t_0)-\tilde{N}(s_0)]+b\tilde{N}(s_0)}] \quad (\tilde{N}(t_0)-\tilde{N}(s_0) \perp \tilde{N}(s_0)) \\ &= \mathrm{E}[e^{a[\tilde{N}(t_0)-\tilde{N}(s_0)]}]\mathrm{E}[e^{b\tilde{N}(s_0)}] \\ &= \mathrm{E}[e^{a[N(t)-N(s)]}]\mathrm{E}[e^{bN(s)}]\end{aligned}$$
- ④ **证明** $N(t)-N(s) \overset{\mathrm{d}}{=} N(t-s) \overset{\mathrm{d}}{=} \mathrm{Poisson}(t-s)$:
对于任意 $k=0,1,\dots$，我们都有:
$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{N(t)-N(s)=k\} &= \mathrm{P}\{\tilde{N}(m^{-1}(t))-\tilde{N}(m^{-1}(s))=k\} \\ &= \mathrm{P}\{\tilde{N}(t_0)-\tilde{N}(s_0)=k\} \quad (\tilde{N}(t_0)-\tilde{N}(s_0) \overset{\mathrm{d}}{=} \tilde{N}(t_0-s_0) \overset{\mathrm{d}}{=} \mathrm{Poisson}(m(s_0,t_0))) \\ &= \mathrm{P}\{\mathrm{Poisson}(m(s_0,t_0))=k\} \\ &= \mathrm{P}\{\mathrm{Poisson}(m(t_0)-m(s_0))=k\} \\ &= \mathrm{P}\{\mathrm{Poisson}(t-s)=k\}\end{aligned}$$

3.3.3 高维 Poisson 过程

苏中根 3.6 节

3.3.4 条件 Poisson 过程

Introduction to Probability Models $5.4.3$ 节