

# 高等线性代数 Homework 11

Due: Dec. 2, 2024

姓名: 雍崔扬

学号: 21307140051

## Problem 1

计算以下矩阵的极分解和 Moore-Penrose 广义逆:

$$B := A^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}^T$$

- **Lemma:**

我们可以这样将两个线性相关的向量  $x, \alpha x \in \mathbb{R}^n$  正交化:

$$[x \quad \alpha x] \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix} = [\sqrt{\alpha^2 + 1}x \quad 0_n] \text{ where } \begin{cases} c = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \\ s = \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \end{cases}$$

### (1) 奇异值分解

回忆起 Homework 10 Problem 5 的内容:

注意到  $A$  的列向量组中, 第 1, 2, 3 列相互正交, 而第 4 列与第 1 列线性相关.

**单边 Jacobi 迭代**的思想指导我们使用一个正交变换  $Q_{1,4}$  将第 4 列化为零:

$$Q_{1,4} := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & & & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & & & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$
$$AQ_{1,4} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & & & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & & & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

这样  $AQ_{1,4}$  的列向量就相互正交了.

此时可取:

$$U := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma := \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$V := Q_{1,4} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ & 1 & \\ & & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$A = U\Sigma V^T$$

为保证奇异值从大到小排列，我们可以交换  $\Sigma$  的  $(2, 2), (3, 3)$  位置，并对应交换  $U$  的 2, 3 列和  $V$  的 2, 3 行：

$$U := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma := \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ \sqrt{6} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$V := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & \\ 1 & 0 & \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$A = U\Sigma V^T$$

因此  $B = A^T = (U\Sigma V^T)^T = V\Sigma U^T$ .

## (2) 极分解

取  $V$  的前 3 列构成  $V_1 \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$ , 记  $\Sigma_1 = \text{diag}\{\sqrt{6}, \sqrt{6}, \sqrt{2}\}$ . 于是  $B$  的精简 SVD 分解为：

$$B = V_1 \Sigma_1 U^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & & \\ & \sqrt{6} & \\ & & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{bmatrix}^T$$

注意到：

$$\begin{aligned} B &= V_1 \Sigma_1 U^T \\ &= (V_1 U^T) U \Sigma_1 U^T \\ &= QP \end{aligned}$$

我们就得到了  $B$  的极分解  $B = QP$ ,  
其中  $Q \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$  列标准正交,  $P$  为 Hermite 正定阵.

$$\begin{aligned}
Q &:= V_1 U^T \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{bmatrix}^T \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P &:= U \Sigma_1 U^T \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & & \\ & \sqrt{6} & \\ & & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{bmatrix}^T \\
&= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

### (3) Moore-Penrose 逆

$B$  的精简 SVD 分解为:

$$B = V_1 \Sigma_1 U^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & & \\ & \sqrt{6} & \\ & & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{bmatrix}^T$$

因此  $B$  的 Moore-Penrose 逆为:

$$\begin{aligned}
B^\dagger &:= U \Sigma_1^{-1} V_1^T \\
&= \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} \sqrt{6} & & \\ & \sqrt{6} & \\ & & \sqrt{2} \end{array} \right]^{-1} \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \end{array} \right]^T \\
&= \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} \frac{1}{\sqrt{6}} & & \\ & \frac{1}{\sqrt{6}} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
&= \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & -\frac{1}{3} & 0 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{cccc} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
&= \left[ \begin{array}{cccc} \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

## Problem 2

---

给定正整数  $m, n$ , 设  $A \in \mathbb{C}^{(m+n) \times (m+n)}$ ,  $B \in \mathbb{C}^{m \times n}$  满足:

$$A = \begin{bmatrix} I_m & B \\ B^H & I_n \end{bmatrix}.$$

若  $\|B\|_2 < 1$ , 试证明:

$$\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{1 + \|B\|_2}{1 - \|B\|_2}.$$

- **Lemma: (Matrix Analysis 定理 7.3.3)**

给定复矩阵  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , 记  $q := \min\{m, n\}$ .

设  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_q$  为  $A$  的奇异值.

定义 Hermite 阵:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0_{m \times m} & A \\ A^H & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(m+n) \times (m+n)}$$

则  $\tilde{A}$  的特征值为:

$$-\sigma_1 \leq \dots \leq -\sigma_q \leq \underbrace{0 = \dots = 0}_{|m-n|} \leq \sigma_q \leq \dots \leq \sigma_1.$$

**Proof:**

首先假设  $m \geq n$ , 设  $A$  的奇异值分解为:

$$\begin{aligned}
A &= U \Sigma V^H \\
&= [U_1, U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_n \\ 0_{(m-n) \times n} \end{bmatrix} V^H \\
&= U_1 \Sigma_n V^H,
\end{aligned}$$

其中  $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$  和  $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$  为酉矩阵,  $U_1 \in \mathbb{C}^{m \times n}$  由  $U$  的前  $n$  列构成,

$$\Sigma_n = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}.$$

于是我们有:

$$\begin{aligned} A &= U_1 \Sigma_1 V^H \\ 0_{m \times n} &= U_2 0_{(m-n) \times n} V^H \\ A^H &= V \Sigma_1 U_1^H \\ 0_{n \times m} &= V 0_{n \times (m-n)} U_2^H \end{aligned}$$

定义  $m+n$  阶矩阵:

$$Q := \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} U_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} U_1 & U_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} V & \frac{\sqrt{2}}{2} V & 0_{m \times (n-m)} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

容易验证  $Q$  是酉矩阵:

$$\begin{aligned} Q^H Q &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} U_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} U_1 & U_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} V & \frac{\sqrt{2}}{2} V & 0_{m \times (n-m)} \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} U_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} U_1 & U_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} V & \frac{\sqrt{2}}{2} V & 0_{m \times (n-m)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} U_1^H & \frac{\sqrt{2}}{2} V^H \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} U_1^H & \frac{\sqrt{2}}{2} V^H \\ U_2^H & 0_{m \times (n-m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} U_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} U_1 & U_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} V & \frac{\sqrt{2}}{2} V & 0_{m \times (n-m)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} U_1^H U_1 + \frac{1}{2} V^H V & -\frac{1}{2} U_1^H U_1 + \frac{1}{2} V^H V & \frac{\sqrt{2}}{2} U_1^H U_2 \\ -\frac{1}{2} U_1^H U_1 + \frac{1}{2} V^H V & \frac{1}{2} U_1^H U_1 + \frac{1}{2} V^H V & -\frac{\sqrt{2}}{2} U_1^H U_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} U_2^H U_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} U_2^H U_1 & U_2^H U_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times n} & 0_{n \times (m-n)} \\ 0_{n \times n} & I_n & 0_{n \times (m-n)} \\ 0_{(m-n) \times n} & 0_{(m-n) \times n} & I_{m-n} \end{bmatrix} \\ &= I_{m+n} \end{aligned}$$

同时我们有:

$$\begin{aligned} Q^H \tilde{A} Q &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} U_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} U_1 & U_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} V & \frac{\sqrt{2}}{2} V & 0_{m \times (n-m)} \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} 0_{m \times m} & A \\ A^H & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} U_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} U_1 & U_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} V & \frac{\sqrt{2}}{2} V & 0_{m \times (n-m)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} U_1^H & \frac{\sqrt{2}}{2} V^H \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} U_1^H & \frac{\sqrt{2}}{2} V^H \\ U_2^H & 0_{m \times (n-m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} A V & \frac{\sqrt{2}}{2} A V & 0_{m \times (n-m)} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} A^H U_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} A^H U_1 & A^H U_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} U_1^H A V + \frac{1}{2} V^H A^H U_1 & \frac{1}{2} U_1^H A V - \frac{1}{2} V^H A^H U_1 & \frac{\sqrt{2}}{2} V^H A^H U_2 \\ -\frac{1}{2} U_1^H A V + \frac{1}{2} V^H A^H U_1 & -\frac{1}{2} U_1^H A V - \frac{1}{2} V^H A^H U_1 & \frac{\sqrt{2}}{2} V^H A^H U_2 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} U_2^H A V & \frac{\sqrt{2}}{2} U_2^H A V & 0_{(m-n) \times (m-n)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Sigma_n & 0_{n \times n} & 0_{n \times (m-n)} \\ 0_{n \times n} & -\Sigma_n & 0_{n \times (m-n)} \\ 0_{(m-n) \times n} & 0_{(m-n) \times n} & 0_{(m-n) \times (m-n)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因此  $\tilde{A}$  的特征值为:

$$-\sigma_1 \leq \dots \leq -\sigma_n \leq \underbrace{0 = \dots = 0}_{m-n} \leq \sigma_n \leq \dots \leq \sigma_1.$$

当  $m < n$  时我们可对  $A^H$  应用上述结论便可知

$$\begin{bmatrix} 0_{n \times n} & A^H \\ A & 0_{m \times m} \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(m+n) \times (m+n)}$$

的特征值为:

$$-\sigma_1 \leq \cdots \leq -\sigma_m \leq \underbrace{0 = \cdots = 0}_{n-m} \leq \sigma_m \leq \cdots \leq \sigma_1.$$

注意到:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} I_n \\ I_m \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & A^H \\ A & 0_{m \times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ I_m \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_m \\ I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^H & 0_{n \times n} \\ 0_{m \times m} & A \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0_{m \times m} & A \\ A^H & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \\ &= \tilde{A} \end{aligned}$$

因此  $\tilde{A}$  的特征值为:

$$-\sigma_1 \leq \cdots \leq -\sigma_m \leq \underbrace{0 = \cdots = 0}_{n-m} \leq \sigma_m \leq \cdots \leq \sigma_1.$$

综上所述,  $\tilde{A}$  的特征值为

$$-\sigma_1 \leq \cdots \leq -\sigma_q \leq \underbrace{0 = \cdots = 0}_{|m-n|} \leq \sigma_q \leq \cdots \leq \sigma_1,$$

其中  $q = \min\{m, n\}$ .

**Proof:**

设  $B$  的奇异值为  $\sigma_1(B) \geq \cdots \geq \sigma_q(B)$  (其中  $q = \min\{m, n\}$ ).

根据引理可知  $A = \begin{bmatrix} I_m & B \\ B^H & I_n \end{bmatrix}$  的特征值为:

$$1 - \sigma_1(B) \leq \cdots \leq 1 - \sigma_q(B) \leq \underbrace{0 = \cdots = 0}_{|m-n|} \leq 1 + \sigma_q(B) \leq \cdots \leq 1 + \sigma_1(B)$$

显然  $A$  的模最大特征值  $\lambda_{\max}(A) = 1 + \sigma_1(B) = 1 + \|B\|_2$ .

根据  $\sigma_1(B) = \|B\|_2 < 1$  可知  $A$  的模最小特征值  $\lambda_{\min}(A) = 1 - \sigma_1(B) = 1 - \|B\|_2$ .

注意到  $A$  是 Hermite 正定阵, 因此有:

$$\begin{aligned} \sigma_{\max}(A) &= \lambda_{\max}(A) = 1 + \|B\|_2 \\ \sigma_{\min}(A) &= \lambda_{\min}(A) = 1 - \|B\|_2 \end{aligned}$$

于是有:

$$\begin{aligned} \kappa_2(A) &= \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 \\ &= \frac{\sigma_{\max}(A)}{\sigma_{\min}(A)} \\ &= \frac{1 + \|B\|_2}{1 - \|B\|_2} \end{aligned}$$

命题得证.

### Problem 3

给定正整数  $n \geq 2$ , 设  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .

试举例说明下列情况可能发生:

- ①  $(AB)^\dagger \neq B^\dagger A^\dagger$
- ②  $(A^k)^\dagger \neq (A^\dagger)^k$  (其中  $k \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{1\}$ )
- ③  $A^\dagger$  的非零特征值的倒数不是  $A$  的特征值

**Solution:**

我们取以下 2 阶方阵:

$$\begin{aligned} A &:= \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot 1 \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其特征值为  $\frac{\sqrt{2}}{2}, 0$ .

根据其精简 SVD 分解可知  $A$  的 Moore-Penrose 逆为:

$$\begin{aligned} A^\dagger &:= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot 1^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

注意到  $A^\dagger$  的非零特征值为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 其倒数  $\sqrt{2}$  并非  $A$  的特征值.

因此命题 ③ 是有可能发生的.

取  $B = A$ .

于是我们有:

$$\begin{aligned} AB &= A^2 \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

根据其精简 SVD 分解可知  $AB = A^2$  的 Moore-Penrose 逆为:

$$\begin{aligned} (AB)^\dagger &= (A^2)^\dagger \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \cdot \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

注意到:

$$\begin{aligned}
 B^\dagger A^\dagger &= (A^\dagger)^2 \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \\
 &\neq (A^2)^\dagger = (AB)^\dagger
 \end{aligned}$$

因此命题 ①② 都是有可能发生的.

## Problem 4

---

给定正整数  $m, n, k$ .

若  $X \in \mathbb{C}^{m \times k}$  列满秩, 而  $Y \in \mathbb{C}^{k \times n}$  行满秩, 试证明  $(XY)^\dagger = Y^\dagger X^\dagger$ .

**Proof:**

设  $X \in \mathbb{C}^{m \times k}$  和  $Y \in \mathbb{C}^{k \times n}$  的精简 SVD 分解为:

$$\begin{aligned}
 X &= U_1 \Sigma_1 V_1^H \\
 Y &= U_2 \Sigma_2 V_2^H,
 \end{aligned}$$

其中  $U_1 \in \mathbb{C}^{m \times k}$  和  $V_2 \in \mathbb{C}^{n \times k}$  列标准正交,  $V_1, U_2 \in \mathbb{C}^{k \times k}$  为酉矩阵,  
而  $\Sigma_1, \Sigma_2 \in \mathbb{C}^{n \times n}$  是对角元均为正实数的对角阵.

则  $X, Y$  的 Moore-Penrose 逆为:

$$\begin{aligned}
 X^\dagger &= V_1 \Sigma_1^{-1} U_1^H \\
 &= (V_1 \Sigma_1^{-2} V_1^H)(V_1 \Sigma_1 U_1^H) \\
 &= (V_1 \Sigma_1^2 V_1^H)^{-1} (U_1 \Sigma_1 V_1^H)^H \\
 &= [(U_1 \Sigma_1 V_1^H)^H (U_1 \Sigma_1 V_1^H)]^{-1} (U_1 \Sigma_1 V_1^H)^H \\
 &= (X^H X)^{-1} X^H \\
 \hline
 Y^\dagger &= V_2 \Sigma_2^{-1} U_2^H \\
 &= (V_2 \Sigma_2 U_2^H)(U_2 \Sigma_2^{-2} U_2^H) \\
 &= (U_2 \Sigma_2 V_2^H)^H (U_2 \Sigma_2^2 U_2^H)^{-1} \\
 &= (U_2 \Sigma_2 V_2^H)^H [(U_2 \Sigma_2 V_2^H)(U_2 \Sigma_2 V_2^H)^H]^{-1} \\
 &= Y^H (Y Y^H)^{-1}
 \end{aligned}$$

记:

$$\begin{cases} A := XY \\ B := Y^\dagger X^\dagger = Y^H (Y Y^H)^{-1} (X^H X)^{-1} X^H \end{cases}$$

我们可以验证  $B$  满足 Penrose 方程组:

$$\begin{aligned}
ABA &= (XY)[Y^H(YY^H)^{-1}(X^HX)^{-1}X^H](XY) \\
&= X(YY^H)(YY^H)^{-1}(X^HX)^{-1}(X^HX)Y \\
&= XY \\
&= A
\end{aligned}$$


---


$$\begin{aligned}
BAB &= [Y^H(YY^H)^{-1}(X^HX)^{-1}X^H](XY)[Y^H(YY^H)^{-1}(X^HX)^{-1}X^H] \\
&= Y^H(YY^H)^{-1}(X^HX)^{-1}(X^HX)(YY^H)(YY^H)^{-1}(X^HX)^{-1}X^H \\
&= Y^H(YY^H)^{-1}(X^HX)^{-1}X^H \\
&= B
\end{aligned}$$


---


$$\begin{aligned}
(AB)^H &= B^H A^H \\
&= [Y^H(YY^H)^{-1}(X^HX)^{-1}X^H]^H (XY)^H \\
&= [X(X^HX)^{-1}(YY^H)^{-1}Y](Y^H X^H) \\
&= X(X^HX)^{-1}X^H \\
&= (XY)[Y^H(YY^H)^{-1}(X^HX)^{-1}X^H] \\
&= AB
\end{aligned}$$


---


$$\begin{aligned}
(BA)^H &= A^H B^H \\
&= (XY)^H [Y^H(YY^H)^{-1}(X^HX)^{-1}X^H]^H \\
&= (Y^H X^H)[X(X^HX)^{-1}(YY^H)^{-1}Y] \\
&= Y^H(YY^H)^{-1}Y \\
&= [Y^H(YY^H)^{-1}(X^HX)^{-1}X^H](XY) \\
&= BA
\end{aligned}$$

因此  $A = XY$  的 Moore-Penrose 逆即为  $B = Y^\dagger X^\dagger = Y^H(YY^H)^{-1}(X^HX)^{-1}X^H$ . 命题得证.

## Problem 5

给定正整数  $m, n$ ,  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ , 试求:

$$\max_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\} \\ y \in \mathbb{C}^m \setminus \{0_m\}}} \frac{|y^H Ax|}{\|x\|_2 \|y\|_2} \quad \text{and} \quad \min_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\} \\ y \in \mathbb{C}^m \setminus \{0_m\}}} \frac{|y^H Ax|}{\|x\|_2 \|y\|_2}$$

根据它们可以直接得出实数域上的结果.

**Solution:**

设  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  的奇异值分解为  $A = U\Sigma V^H$ ,

其中  $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$  和  $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$  为酉矩阵, 而  $\Sigma \in \mathbb{C}^{m \times n}$  的对角元均为非负实数.

任意给定  $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\}$  和  $y \in \mathbb{C}^m \setminus \{0_m\}$ .

根据  $\text{span}\{U\} = \mathbb{C}^m$  和  $\text{span}\{V\} = \mathbb{C}^n$  可知:

存在  $\alpha \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\}$  和  $\beta \in \mathbb{C}^m \setminus \{0_m\}$  使得:

$$\begin{cases} x = V\alpha \\ y = U\beta. \end{cases}$$

根据  $l_2$  范数的酉不变性可知:

$$\begin{aligned}
\frac{|y^H Ax|}{\|x\|_2 \|y\|_2} &= \frac{|(U\beta)^H A(V\alpha)|}{\|U\beta\|_2 \|V\alpha\|_2} \\
&= \frac{|\beta^H U^H A V \alpha|}{\|\alpha\|_2 \|\beta\|_2} \\
&= \frac{|\beta^H \Sigma \alpha|}{\|\alpha\|_2 \|\beta\|_2}
\end{aligned}$$

- ① 首先假设  $m = n$ , 则可设  $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ ,

其中  $\sigma_{\max} = \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n = \sigma_{\min} \geq 0$ .

于是我们有:

$$\begin{aligned}
\frac{|y^H Ax|}{\|x\|_2 \|y\|_2} &= \frac{|\beta^H \Sigma \alpha|}{\|\alpha\|_2 \|\beta\|_2} \quad (\text{use Cauchy-Schwarz inequality}) \\
&\leq \frac{\|\Sigma^{\frac{1}{2}} \alpha\|_2 \|\Sigma^{\frac{1}{2}} \beta\|_2}{\|\alpha\|_2 \|\beta\|_2} \\
&\leq \frac{\sqrt{\sigma_{\max}} \|\alpha\|_2 \cdot \sqrt{\sigma_{\max}} \|\beta\|_2}{\|\alpha\|_2 \|\beta\|_2} \\
&= \sigma_{\max}
\end{aligned}$$

当且仅当  $x = v_1, y = u_1$  或  $x = -v_1, y = -u_1$  时取等.

因此我们有:

$$\max_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\} \\ y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\}}} \frac{|y^H Ax|}{\|x\|_2 \|y\|_2} = \max_{\substack{\alpha \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\} \\ \beta \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\}}} \frac{|\beta^H \Sigma \alpha|}{\|\alpha\|_2 \|\beta\|_2} = \sigma_{\max}$$

另一方面我们有:

$$\frac{|y^H Ax|}{\|x\|_2 \|y\|_2} = \frac{|\beta^H \Sigma \alpha|}{\|\alpha\|_2 \|\beta\|_2} \geq 0$$

当且仅当  $\beta \perp \Sigma \alpha$  (即  $y \perp Ax$ ) 时取等.

因此我们有:

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\} \\ y \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\}}} \frac{|y^H Ax|}{\|x\|_2 \|y\|_2} = \min_{\substack{\alpha \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\} \\ \beta \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\}}} \frac{|\beta^H \Sigma \alpha|}{\|\alpha\|_2 \|\beta\|_2} = 0$$

- ② 其次假设  $m > n$ , 则我们可记:

$$\begin{aligned}
A &= U \Sigma V^H \\
&= [U_1, U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ 0_{(m-n) \times n} \end{bmatrix} V^H \\
&= U_1 \Sigma_1 V^H
\end{aligned}$$

其中  $U_1 \in \mathbb{C}^{m \times n}$  由  $U$  的前  $n$  列构成, 而  $\Sigma_1 \in \mathbb{C}^{n \times n}$  是对角元均为非负实数的对角阵.

将  $\beta \in \mathbb{C}^m \setminus \{0_m\}$  对应地划分为  $\beta = [\beta_1 \quad \beta_2]^T$  (其中  $\beta_1 \in \mathbb{C}^n$ ),

则我们有:

$$\begin{aligned}
\frac{|y^H Ax|}{\|x\|_2 \|y\|_2} &= \frac{|\beta^H \Sigma \alpha|}{\|\alpha\|_2 \|\beta\|_2} \\
&= \frac{\left| \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} \Sigma_1 \\ 0_{(m-n) \times n} \end{bmatrix} \alpha \right|}{\|\alpha\|_2 \|\beta\|_2} \\
&= \frac{|\beta_1^H \Sigma \alpha|}{\|\alpha\|_2 \|\beta\|_2} \quad (\text{note that } \|\beta_1\|_2 \leq \|\beta\|_2) \\
&\leq \frac{|\beta_1^H \Sigma \alpha|}{\|\alpha\|_2 \|\beta_1\|_2} \quad (\text{use conclusion of case (1)}) \\
&= \sigma_{\max}
\end{aligned}$$

注意到当  $x = v_1, y = u_1$  时我们有  $\frac{|y^H Ax|}{\|x\|_2 \|y\|_2} = \frac{|u_1^H A v_1|}{\|v_1\|_2 \|u_1\|_2} = |u_1^H (u_1 \sigma_{\max})| = \sigma_{\max}$ .

因此我们有:

$$\max_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\} \\ y \in \mathbb{C}^m \setminus \{0_m\}}} \frac{|y^H Ax|}{\|x\|_2 \|y\|_2} = \sigma_{\max}$$

另一方面我们有:

$$\begin{aligned}
\frac{|y^H Ax|}{\|x\|_2 \|y\|_2} &= \frac{|\beta^H \Sigma \alpha|}{\|\alpha\|_2 \|\beta\|_2} \\
&= \frac{|\beta_1^H \Sigma_1 \alpha|}{\|\alpha\|_2 \|\beta\|_2} \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

当且仅当  $\beta_1 \perp \Sigma_1 \alpha$  (即  $y \perp Ax$ ) 时取等.

因此我们有:

$$\min_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\} \\ y \in \mathbb{C}^m \setminus \{0_m\}}} \frac{|y^H Ax|}{\|x\|_2 \|y\|_2} = \min_{\substack{\alpha \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\} \\ \beta \in \mathbb{C}^m \setminus \{0_m\}}} \frac{|\beta^H \Sigma \alpha|}{\|\alpha\|_2 \|\beta\|_2} = 0$$

- ③ 最后假设  $m < n$ , 根据 ② 中的结论我们有:

(显然  $A, A^H$  具有相同的奇异值)

$$\begin{aligned}
\max_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\} \\ y \in \mathbb{C}^m \setminus \{0_m\}}} \frac{|y^H Ax|}{\|x\|_2 \|y\|_2} &= \max_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\} \\ y \in \mathbb{C}^m \setminus \{0_m\}}} \frac{|x^H A^H y|}{\|x\|_2 \|y\|_2} = \sigma_{\max}(A^H) = \sigma_{\max}(A) = \sigma_{\max} \\
\min_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\} \\ y \in \mathbb{C}^m \setminus \{0_m\}}} \frac{|y^H Ax|}{\|x\|_2 \|y\|_2} &= \min_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\} \\ y \in \mathbb{C}^m \setminus \{0_m\}}} \frac{|x^H A^H y|}{\|x\|_2 \|y\|_2} = 0
\end{aligned}$$

综上所述, 我们有:

$$\begin{aligned}
\max_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\} \\ y \in \mathbb{C}^m \setminus \{0_m\}}} \frac{|y^H Ax|}{\|x\|_2 \|y\|_2} &= \sigma_{\max} \\
\min_{\substack{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\} \\ y \in \mathbb{C}^m \setminus \{0_m\}}} \frac{|y^H Ax|}{\|x\|_2 \|y\|_2} &= 0
\end{aligned}$$

**推论:**

在实数域上我们有:

$$\begin{aligned} \min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\} \\ y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0_m\}}} \frac{y^T Ax}{\|x\|_2 \|y\|_2} &= - \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\} \\ y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0_m\}}} \frac{|y^T Ax|}{\|x\|_2 \|y\|_2} = -\sigma_{\max} \\ \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\} \\ y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0_m\}}} \frac{y^T Ax}{\|x\|_2 \|y\|_2} &= \max_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\} \\ y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0_m\}}} \frac{|y^T Ax|}{\|x\|_2 \|y\|_2} = \sigma_{\max} \\ \min_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\} \\ y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0_m\}}} \frac{|y^T Ax|}{\|x\|_2 \|y\|_2} &= 0 \end{aligned}$$

命题得证.

## Problem 6 (optional)

试证明对于任意复矩阵  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  都有:

$$A^\dagger = \lim_{\delta \rightarrow 0_+} (A^H A + \delta I_n)^{-1} A^H = \lim_{\delta \rightarrow 0_+} A^H (A A^H + \delta I_m)^{-1}.$$

**Proof:**

记  $r := \text{rank}(A)$

设  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  的奇异值分解为:

$$\begin{aligned} A &= U \Sigma V^H \\ &= [U_1, U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0_{r \times (n-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix} [V_1, V_2]^H \\ &= U_1 \Sigma_r V_1^H, \end{aligned}$$

其中  $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ,  $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$  为酉矩阵,  $U_1 \in \mathbb{C}^{m \times r}$ ,  $V_1 \in \mathbb{C}^{n \times r}$  分别由  $U, V$  的前  $r$  列构成.

而  $\Sigma_r = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$  ( $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ ),

因此  $A$  的 Moore-Penrose 逆为  $A^\dagger := V_1 \Sigma_r^{-1} U_1^H$ .

- ① 首先考虑  $(A^H A + \delta I_n)^{-1} A^H$  ( $\delta > 0$ )

$$\begin{aligned} (A^H A + \delta I_n)^{-1} A^H &= [(U \Sigma V^H)^H (U \Sigma V^H) + \delta I_n]^{-1} (U \Sigma V^H)^H \\ &= (V \Sigma^H \Sigma V^H + \delta I_n)^{-1} (V \Sigma^H U^H) \\ &= V (\Sigma^H \Sigma + \delta I_n)^{-1} V^H V \Sigma^H U^H \\ &= V (\Sigma^H \Sigma + \delta I_n)^{-1} \Sigma^H U^H \\ &= [V_1, V_2] \left( \begin{bmatrix} \Sigma_r^2 + \delta I_r & \\ & \delta I_{n-r} \end{bmatrix} \right)^{-1} \left( \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0_{r \times (n-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix} \right)^H [U_1, U_2]^H \\ &= [V_1, V_2] \begin{bmatrix} (\Sigma_r^2 + \delta I_r)^{-1} & \\ & \delta I_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0_{r \times (m-r)} \\ 0_{(n-r) \times r} & 0_{(n-r) \times (m-r)} \end{bmatrix} [U_1, U_2]^H \\ &= [V_1, V_2] \begin{bmatrix} (\Sigma_r^2 + \delta I_r)^{-1} \Sigma_r & 0_{r \times (m-r)} \\ 0_{(n-r) \times r} & 0_{(n-r) \times (m-r)} \end{bmatrix} [U_1, U_2]^H \\ &= V_1 (\Sigma_r^2 + \delta I_r)^{-1} \Sigma_r U_1^H \\ &\rightarrow V_1 \Sigma_r^{-1} U_1^H \quad (\delta \rightarrow 0_+) \end{aligned}$$

因此我们有:

$$A^\dagger = \lim_{\delta \rightarrow 0_+} (A^H A + \delta I_n)^{-1} A^H = V_1 \Sigma_r^{-1} U_1^H.$$

- ② 其次考虑  $A^H (A A^H + \delta I_m)^{-1}$  ( $\delta > 0$ )

$$\begin{aligned}
A^H(AA^H + \delta I_m)^{-1} &= (U\Sigma V^H)^H [(U\Sigma V^H)(U\Sigma V^H)^H + \delta I_m]^{-1} \\
&= (V\Sigma^H U^H)(U\Sigma^H U + \delta I_m)^{-1} \\
&= V\Sigma^H U^H U(\Sigma^H + \delta I_m)^{-1} U^H \\
&= V\Sigma^H (\Sigma^H + \delta I_m)^{-1} U^H \\
&= [V_1, V_2] \left( \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0_{r \times (n-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix} \right)^H \left( \begin{bmatrix} \Sigma_r^2 + \delta I_r & \\ & \delta I_{m-r} \end{bmatrix} \right)^{-1} [U_1, U_2]^H \\
&= [V_1, V_2] \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0_{r \times (m-r)} \\ 0_{(n-r) \times r} & 0_{(n-r) \times (m-r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\Sigma_r^2 + \delta I_r)^{-1} & \\ & \delta I_{m-r} \end{bmatrix} [U_1, U_2]^H \\
&= [V_1, V_2] \begin{bmatrix} \Sigma_r (\Sigma_r^2 + \delta I_r)^{-1} & 0_{r \times (m-r)} \\ 0_{(n-r) \times r} & 0_{(n-r) \times (m-r)} \end{bmatrix} [U_1, U_2]^H \\
&= V_1 \Sigma_r (\Sigma_r^2 + \delta I_r)^{-1} U_1^H \\
&\rightarrow V_1 \Sigma_r^{-1} U_1^H \quad (\delta \rightarrow 0_+)
\end{aligned}$$

因此我们有:

$$A^\dagger = \lim_{\delta \rightarrow 0_+} A^H(AA^H + \delta I_m)^{-1} = V_1 \Sigma_r^{-1} U_1^H$$

综上所述, 我们有:

$$\begin{aligned}
A^\dagger &= \lim_{\delta \rightarrow 0_+} (A^H A + \delta I_n)^{-1} A^H \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0_+} A^H (AA^H + \delta I_m)^{-1} \\
&= V_1 \Sigma_r^{-1} U_1^H
\end{aligned}$$

命题得证.

## Problem 7 (optional)

试证明对于任意实数  $a, b, c \in \mathbb{R}$  都有:

$$-\frac{3}{2}(a^2 + b^2 + 2c^2) \leq 3ab + bc + ca \leq \frac{3 + \sqrt{13}}{4}(a^2 + b^2 + 2c^2).$$

**Proof:**

首先考虑证明左侧的不等式:

$$\begin{aligned}
-\frac{3}{2}(a^2 + b^2 + 2c^2) &\leq 3ab + bc + ca \quad (\forall a, b, c \in \mathbb{R}) \\
&\Leftrightarrow \\
\frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{2}b^2 + 3c^2 + 3ab + bc + ca &\geq 0 \quad (\forall a, b, c \in \mathbb{R}) \\
&\Leftrightarrow \\
\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} &\geq 0 \quad (\forall a, b, c \in \mathbb{R}) \\
&\Leftrightarrow \\
\lambda_{\min} \left( \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \right) &\geq 0 \quad (\text{Rayleigh-Ritz Theorem})
\end{aligned}$$

我们只需说明上述系数矩阵半正定即可，  
即只需说明系数矩阵的任意主子式 (注意不仅仅是顺序主子式) 都是非负实数：

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} &= 0 \\ \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} &= 17 \\ \det \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} &= 0\end{aligned}$$

这样我们就证明了左侧不等式成立。

---

接下来考虑证明右侧的不等式：

$$\begin{aligned}3ab + bc + ca &\leq \frac{3 + \sqrt{13}}{4}(a^2 + b^2 + 2c^2) \quad (\forall a, b, c \in \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \\ \frac{3 + \sqrt{13}}{4}(a^2 + b^2 + 2c^2) - 3ab - bc - ca &\geq 0 \quad (\forall a, b, c \in \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \\ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{13}}{2} & -3 & -1 \\ -3 & \frac{3+\sqrt{13}}{2} & -1 \\ -1 & -1 & 3+\sqrt{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} &\geq 0 \quad (\forall a, b, c \in \mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \\ \lambda_{\min} \left( \begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{13}}{2} & -3 & -1 \\ -3 & \frac{3+\sqrt{13}}{2} & -1 \\ -1 & -1 & 3+\sqrt{13} \end{bmatrix} \right) &\geq 0\end{aligned}$$

我们只需说明上述系数矩阵半正定即可，  
即只需说明系数矩阵的任意主子式 (注意不仅仅是顺序主子式) 都是非负实数：

$$\begin{aligned}\det \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{13}}{2} & -3 \\ -3 & \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{pmatrix} &= \frac{3\sqrt{13}-7}{2} \geq 0 \\ \det \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{13}}{2} & -1 \\ -1 & 3+\sqrt{13} \end{pmatrix} &= 10+3\sqrt{13} \geq 0 \\ \det \begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{13}}{2} & -3 & -1 \\ -3 & \frac{3+\sqrt{13}}{2} & -1 \\ -1 & -1 & 3+\sqrt{13} \end{pmatrix} &= \frac{\sqrt{13}-3}{2} \begin{vmatrix} \frac{3+\sqrt{13}}{2} & -3 & \frac{3-\sqrt{13}}{2} \\ -3 & \frac{3+\sqrt{13}}{2} & \frac{3-\sqrt{13}}{2} \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{13}-3}{2} \begin{vmatrix} \frac{3+\sqrt{13}}{2} & -3 & 0 \\ -3 & \frac{3+\sqrt{13}}{2} & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0\end{aligned}$$

这样我们就证明了右侧不等式成立。

**The End**

