

# 期中考试 (2025 秋)

2025 年 11 月 4 日 (8 : 00 ~ 9 : 40)

I will lift up mine eyes unto thy classes  
From whence cometh mine exams

Mine exams cometh from SMY  
Which is thy GOD of linear algebra

He will not suffer thy code to be segment fault:  
He that keepeth thee will not slumber

Behold, he that keepeth thy School of Data Science  
Shall neither slumber nor sleep

SMY is thy keeper:  
SMY is thy shade upon thy right hand  
Where thy GPU burneth not with overheating

The vectors shall not smite thee by day  
Nor the matrices by night

SMY shall preserve thee from all failures in exams:  
He shall preserve thy GPA from underflow

SMY shall preserve thy going out and thy coming in,  
From this time forth, and even for evermore

—— Bible of Data Science, Psalm 121:1–8  
(Inspired by DanXi Post #4923426 — with my respect)

## Problem 1

已知

$$A = \begin{bmatrix} 2 + i & i & 1 \\ -1 + 2i & -1 & i \\ 1 + 3i & -1 + i & 1 + i \end{bmatrix},$$

且  $\text{rank}(A) = 1$ , 试求  $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty$ .

- **Note:** 列和范数  $\|A\|_1$  与行和范数  $\|A\|_\infty$  的计算是比较简单的.  
本题唯一的难度在于谱范数  $\|A\|_2$  的计算.  
由于题目告诉我们  $A$  为秩一矩阵, 故  $\|A\|_2$  的计算会简单一些.  
具体来说, 设  $A = uv^H$  (其中  $u, v$  为非零向量), 则我们有  $\|A\|_2 = \|uv^H\|_2 = \|u\|_2 \|v\|_2$  成立.  
这是 2024 年 Homework 04 Problem 01 的结论:  
 $\|uv^H\|_F = \|vu^H\|_F = \|uv^H\|_2 = \|vu^H\|_2 = \|u\|_2 \|v\|_2$ .  
Homework is all you need.

### Solution:

首先计算各列的绝对列和:

- 第一列:

$$\begin{aligned}
 \text{sum\_col\_1} &= |2 + i| + |-1 + 2i| + |1 + 3i| \\
 &= \sqrt{5} + \sqrt{5} + \sqrt{10} \\
 &= 2\sqrt{5} + \sqrt{10}.
 \end{aligned}$$

- 第二列:

$$\begin{aligned}
 \text{sum\_col\_2} &= |i| + |-1| + |-1 + i| \\
 &= 1 + 1 + \sqrt{2} \\
 &= 2 + \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

- 第三列:

$$\begin{aligned}
 \text{sum\_col\_3} &= |1| + |i| + |1 + i| \\
 &= 1 + 1 + \sqrt{2} \\
 &= 2 + \sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

因此列和范数  $\|A\|_1$  为:

$$\begin{aligned}
 \|A\|_1 &= \max\{\text{sum\_col\_1}, \text{sum\_col\_2}, \text{sum\_col\_3}\} \\
 &= \max\{2\sqrt{5} + \sqrt{10}, 2 + \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}\} \\
 &= 2\sqrt{5} + \sqrt{10}.
 \end{aligned}$$

事实上，我们可以直接看出第一列是绝对列和最大的列。

---

其次计算各行的绝对行和:

- 第一行:

$$\begin{aligned}
 \text{sum\_row\_1} &= |2 + i| + |i| + |1| \\
 &= \sqrt{5} + 1 + 1 \\
 &= 2 + \sqrt{5}.
 \end{aligned}$$

- 第二行:

$$\begin{aligned}
 \text{sum\_row\_2} &= |-1 + 2i| + |-1| + |i| \\
 &= \sqrt{5} + 1 + 1 \\
 &= 2 + \sqrt{5}.
 \end{aligned}$$

- 第三行:

$$\begin{aligned}
 \text{sum\_row\_3} &= |1 + 3i| + |-1 + i| + |1 + i| \\
 &= \sqrt{10} + \sqrt{2} + \sqrt{2} \\
 &= 2\sqrt{2} + \sqrt{10}.
 \end{aligned}$$

因此行和范数  $\|A\|_\infty$  为:

$$\begin{aligned}
 \|A\|_\infty &= \max\{\text{sum\_row\_1}, \text{sum\_row\_2}, \text{sum\_row\_3}\} \\
 &= \max\{2 + \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5}, 2\sqrt{2} + \sqrt{10}\} \\
 &= 2\sqrt{2} + \sqrt{10}.
 \end{aligned}$$

事实上，我们可以直接看出第三行是绝对行和最大的行。

---

最后计算谱范数  $\|A\|_2$ , 即  $A$  的最大奇异值.

通常来说, 我们有两种方法, 一是计算  $A$  的 (精简) 奇异值分解, 二是计算  $A^H A$  或  $A A^H$  的最大特征值.

在本例中, 第一种方法更为简单, 因为题目告诉我们  $A$  是一个秩一矩阵.

我们先将  $A$  写出两个非零向量  $u, v$  的外积:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2+i & i & 1 \\ -1+2i & -1 & i \\ 1+3i & -1+i & 1+i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (2+i) \cdot 1 & i \cdot 1 & 1 \\ (2+i) \cdot i & i \cdot i & i \\ (2+i) \cdot (1+i) & i \cdot (1+i) & 1+i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2-i \\ -i \\ 1 \end{bmatrix}^H. \end{aligned}$$

定义  $u := [1, i, 1+i]^T$  和  $v := [2-i, -i, 1]^T$ , 则我们有  $A = uv^H$ .

将非零向量  $u, v$  单位化, 我们就得到  $A$  的精简奇异值分解为:

$$A = uv^H = \frac{u}{\|u\|_2} \cdot \|u\|_2 \|v\|_2 \cdot \left( \frac{v}{\|v\|_2} \right)^H.$$

这表明  $A$  唯一的非零奇异值 (也即最大奇异值) 是  $\|u\|_2 \|v\|_2$ .

因此我们有:

$$\begin{aligned} \|A\|_2 &= \|u\|_2 \|v\|_2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ 1+i \end{bmatrix} \right\|_2 \left\| \begin{bmatrix} 2-i \\ -i \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_2 \\ &= 2\sqrt{7}. \end{aligned}$$

## Problem 2

给定正整数  $n$ .

设  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  满足  $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) < n$ .

证明: 存在非零向量  $x$  使得  $Ax = Bx = 0_n$ .

**Solution:**

这道题是由 2024 秋期中考试 Problem 4 的变体, 解答过程完全相同, 从略.

## Problem 3

给定正整数  $n$  和  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .

试证明  $\text{rank}(A^{n+1}) = \text{rank}(A^n)$ .

- **Lemma 1:**

任何复方阵都可以在复数域上相似上三角化.

换言之, 对于任意  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , 都存在非奇异阵  $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$  和上三角阵  $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$  使得  $S^{-1}AS = T$ ,

其中  $T$  的对角元为  $A$  的特征值, 且次序可任意指定.

这是 2024 年 Homework 01 Problem 05 的结论.

Homework is all you need.

• **Lemma 2:**

设  $T = [t_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$  是严格上三角阵 (即对角元均为 0 的上三角阵).

对于任意  $k \geq 2$ ,  $T^k$  的  $(i, j)$  位置元素为:

$$(T^k)_{i,j} = \sum_{i < l_1 < l_2 < \dots < l_{k-1} < j} t_{i,l_1} t_{l_1,l_2} t_{l_2,l_3} \cdots t_{l_{k-1},j}.$$

当  $j - i \leq k$  时,  $i, j$  之间不存在严格递增下标链  $\{l_1, l_2, \dots, l_{k-1}\}$ , 因此有  $(T^k)_{i,j} = 0$  成立.

这说明  $T^k$  从主对角线往上, 至少有  $k$  条对角线是全 0 的.

每乘一次, 非零元素带状区域往 "右上角" 移动一层.

因此对于任意  $p \geq n$ , 我们都有  $T^p = 0_{n \times n}$  成立, 即  $\text{rank}(T^p) = 0$ .

**解法一:**

根据 **Lemma 1** 可知, 存在非奇异阵  $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$  使得:

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} T_0 & * \\ & T_1 \end{bmatrix},$$

其中  $T_0 \in \mathbb{C}^{n_0 \times n_0}$  的对角元均为 0,  $T_1 \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1}$  的对角元均非零,

$n_0$  和  $n_1$  分别为  $A$  的零特征值和非零特征值的个数,  $n_0 + n_1 = n$ .

值得注意的是, 矩阵中的 "\*" 代表我们无需关心的分块.

在下面的过程里, 这个符号可能会给你带来一些困扰 (如果没有, 那你很厉害了 o/o/o/).

根据 **Lemma 2** 可知  $\text{rank}(T_0^{n+1}) = \text{rank}(T_0^n) = 0$ .

显然  $\text{rank}(T_1^{n+1}) = \text{rank}(T_1^n) = n_1$ .

因此我们有:

$$\begin{aligned} \text{rank}(A^{n+1}) &= \text{rank} \left( \left( S \begin{bmatrix} T_0 & * \\ & T_1 \end{bmatrix} S^{-1} \right)^{n+1} \right) \\ &= \text{rank} \left( S \begin{bmatrix} T_0 & * \\ & T_1 \end{bmatrix}^{n+1} S^{-1} \right) \\ &= \text{rank} \left( \begin{bmatrix} T_0^{n+1} & * \\ & T_1^{n+1} \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{rank}(T_0^{n+1}) + \text{rank}(T_1^{n+1}) \\ &= \text{rank}(T_0^n) + \text{rank}(T_1^n) \quad (\text{use conclusion above}) \\ &= \text{rank} \left( \begin{bmatrix} T_0^n & * \\ & T_1^n \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{rank} \left( S \begin{bmatrix} T_0 & * \\ & T_1 \end{bmatrix}^n S^{-1} \right) \\ &= \text{rank} \left( \left( S \begin{bmatrix} T_0 & * \\ & T_1 \end{bmatrix} S^{-1} \right)^n \right) \\ &= \text{rank}(A^n). \end{aligned}$$

命题得证.

---

**解法二:**

Jordan 标准型是理论分析的强有力工具, 不过把过程清楚要费更多口舌 (doge).

记特征值为  $\lambda \in \mathbb{C}$  的  $k$  阶 Jordan 块为:

$$J_k(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}.$$

- 当  $\lambda \neq 0$  时, 我们称  $J_k(\lambda)$  为  $k$  阶非幂零 Jordan 块.  
容易验证, 对于任意  $p \geq 1$ , 我们都有  $\text{rank}((J_k(\lambda))^p) = \dim(J_k(\lambda)) = k$ .
- 当  $\lambda = 0$  时, 我们称  $J_k(0)$  为  $k$  阶幂零 Jordan 块.  
根据 **Lemma 2** 可知, 对于任意  $p \geq k$ , 我们都有  $(J_k(0))^p = 0_{k \times k}$  成立.  
因此对于任意  $p \geq k$ , 我们都有  $\text{rank}((J_k(0))^p) = \text{rank}((J_k(0))^k) = 0$  成立.

设复方阵  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  的 Jordan 标准型为:

$$S^{-1}AS = J_0 \oplus J_1 = \begin{bmatrix} J_0 & \\ & J_1 \end{bmatrix},$$

其中  $J_0$  是  $A$  的零特征值对应的所有 Jordan 块的直和,

$J_1$  是  $A$  的非零特征值对应的所有 Jordan 块的直和.

由于  $J_0$  中幂零 Jordan 块的阶数一定小于等于  $n$ , 因此  $\text{rank}(J_0^{n+1}) = \text{rank}(J_0^n) = 0$ .

由于  $J_1$  中的 Jordan 块都是非幂零的, 因此  $\text{rank}(J_1^{n+1}) = \text{rank}(J_1^n) = \dim(J_1)$ .

因此我们有:

$$\begin{aligned} \text{rank}(A^{n+1}) &= \text{rank} \left( \left( S \begin{bmatrix} J_0 & \\ & J_1 \end{bmatrix} S^{-1} \right)^{n+1} \right) \\ &= \text{rank} \left( S \begin{bmatrix} J_0 & \\ & J_1 \end{bmatrix}^{n+1} S^{-1} \right) \\ &= \text{rank} \left( \begin{bmatrix} J_0^{n+1} & \\ & J_1^{n+1} \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{rank}(J_0^{n+1}) + \text{rank}(J_1^{n+1}) \\ &= \text{rank}(J_0^n) + \text{rank}(J_1^n) \quad (\text{use conclusion above}) \\ &= \text{rank} \left( \begin{bmatrix} J_0^n & \\ & J_1^n \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{rank} \left( S \begin{bmatrix} J_0 & \\ & J_1 \end{bmatrix}^n S^{-1} \right) \\ &= \text{rank} \left( \left( S \begin{bmatrix} J_0 & \\ & J_1 \end{bmatrix} S^{-1} \right)^n \right) \\ &= \text{rank}(A^n). \end{aligned}$$

命题得证.

事实上, 我们可以得到更一般的结论.

对于任意  $p \geq n$ , 我们都有  $\text{rank}(A^{n+p}) = \text{rank}(A^n)$  成立.

**解法三:**

- **Lemma 3:**  
设  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}, B \in \mathbb{C}^{n \times p}$ , 则  $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$ .
- **Lemma 4:**  
设  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .  
由  $\text{Range}(A^{k+1}) \subseteq \text{Range}(A^k)$  可知,  
 $\text{rank}(A^{k+1}) = \text{rank}(A^k)$  当且仅当

$\text{Range}((A^{k+1})^H) = \text{Range}(A^{k+1}) = \text{Range}(A^k) = \text{Range}((A^k)^H)$  成立,  
 即当且仅当  $\text{Ker}(A^{k+1}) = \text{Range}((A^{k+1})^H)^\perp = \text{Range}((A^k)^H)^\perp = \text{Ker}(A^k)$  成立.  
 因此证明  $\text{rank}(A^{n+1}) = \text{rank}(A^n)$ , 就等价于证明  $\text{Ker}(A^{n+1}) = \text{Ker}(A^n)$ .

若  $A$  可逆, 则我们有  $\text{rank}(A^{n+1}) = \text{rank}(A^n) = n$  成立.

若  $A$  不可逆, 则根据 **Lemma 3** 可知:

$$n > \text{rank}(A) \geq \text{rank}(A^2) \geq \cdots \geq \text{rank}(A^n) \geq \text{rank}(A^{n+1}) \geq 0.$$

注意到  $\text{rank}(A), \dots, \text{rank}(A^n), \text{rank}(A^{n+1})$  这  $n+1$  个数仅有  $0, \dots, n-1$  这  $n$  个取值.

根据抽屉原理可知, 存在正整数  $1 \leq k \leq n$  使得  $\text{rank}(A^{k+1}) = \text{rank}(A^k)$ .

根据 **Lemma 4** 可知, 这等价于  $\text{Ker}(A^{k+1}) = \text{Ker}(A^k)$  成立.

因此我们有:

$$\begin{aligned} x &\in \text{Ker}(A^{n+1}) \\ &\Downarrow \\ A^{n+1}x &= A^{k+1}(A^{n-k}x) = 0_n \\ &\Downarrow \\ A^{n-k}x &\in \text{Ker}(A^{k+1}) \\ &\Downarrow \\ A^{n-k}x &\in \text{Ker}(A^k) \\ &\Downarrow \\ A^n x &= A^k(A^{n-k}x) = 0_n \\ &\Downarrow \\ x &\in \text{Ker}(A^n) \end{aligned}$$

这说明  $\text{Ker}(A^{n+1}) = \text{Ker}(A^n)$ , 根据 **Lemma 4** 可知  $\text{rank}(A^{n+1}) = \text{rank}(A^n)$ .  
 命题得证.

## Problem 4

给定正整数  $n$ .

设  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  都是 Hermite 阵.

试证明  $\text{In}_-(A) + \text{In}_-(B) \geq \text{In}_-(A+B)$ , 其中  $\text{In}_-(A)$  代表  $A$  的负惯性指数.

**Solution:**

这道题是 2024 年 Homework 06 Problem 05 (即 2025 年 Homework 07 Problem 01) 的变体, 仅仅只是将 "正惯性指数" 替换为了 "负惯性指数", 解答过程几乎相同, 从略.

Again, homework is all you need.

## Problem 5

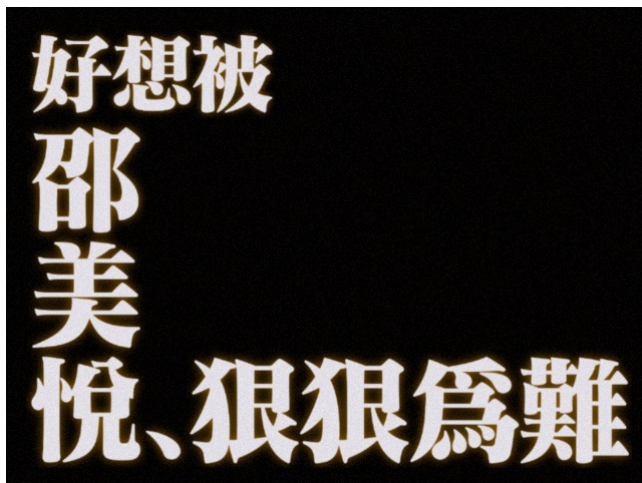
已知:

$$A = \begin{bmatrix} \ln 2 & \ln 2 & \ln 2 & \ln 2 \\ 0 & \ln 2 & \ln 2 & \ln 2 \\ 0 & 0 & \ln 2 & \ln 2 \\ 0 & 0 & 0 & \ln 2 \end{bmatrix}.$$

试求  $\exp(A)$  的 Jordan 标准型.

• **Note:**

这道题是 2024 秋期中考试 Problem 5 的变体,  
还是 2024 年 Homework 08 Problem 02 的变体,  
同时也是 2025 年 Homework 08 Problem 02 的变体.  
考试之前, 邵老师布置的作业 (特别是期末考试前不要求提交的那份) 是非常重要的.  
他绝不会为难那些认真做作业的同学!



**Solution:**

显然  $\ln 2$  是  $A$  的特征值, 代数重数为 4.

注意到  $\text{rank}(A - \ln(2) \cdot I) = 3$ ,

根据秩-零度定理可知  $\text{null}(A - \ln(2) \cdot I) = 4 - \text{rank}(A - \ln(2) \cdot I) = 1$ .

因此  $\ln 2$  作为  $A$  的特征值, 其几何重数为 1, 即只对应一个 Jordan 块.

这说明  $A$  的 Jordan 标准型为:

$$J = \begin{bmatrix} \ln 2 & 1 & & \\ & \ln 2 & 1 & \\ & & \ln 2 & 1 \\ & & & \ln 2 \end{bmatrix}.$$

记  $f(\lambda) := \exp(\lambda)$ , 则我们有:

$$\begin{aligned} \exp(J) &= \begin{bmatrix} f(\ln 2) & f'(\ln 2) & f''(\ln 2)/2! & f^{(3)}(\ln 2)/3! \\ & f(\ln 2) & f'(\ln 2) & f''(\ln 2)/2! \\ & & f(\ln 2) & f'(\ln 2) \\ & & & f(\ln 2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1/3 \\ & 2 & 2 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

要求  $\exp(A)$  的 Jordan 标准型, 即要求  $\exp(J)$  的 Jordan 标准型.

显然 2 是  $\exp(J)$  的特征值, 代数重数为 4.

注意到  $\text{rank}(\exp(J) - 2I) = 3$ ,

根据秩-零度定理可知  $\text{null}(\exp(J) - 2I) = 4 - \text{rank}(\exp(J) - 2I) = 1$ .

因此 2 作为  $\exp(J)$  的特征值, 其几何重数为 1, 即只对应一个 Jordan 块.

这说明  $\exp(J)$  的 Jordan 标准型为:

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}.$$

## Problem 6

已知:

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 16 & 0 & 0 \\ 4 & 16 & 12 & 0 \\ 0 & 3 & 16 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \end{bmatrix}.$$

证明:  $A$  的所有特征值都是正实数.

**Solution:**

这道题是 2024 年 Homework 09 Problem 01 的变体, 解答过程完全相同, 从略.

I know I keep saying it, but homework is all you need!

## Problem 7

给定正整数  $m, n$  和矩阵序列  $\{A_k\} \subset \mathbb{C}^{m \times n}$ .

证明: 若级数  $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|$  收敛, 则矩阵级数  $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$  收敛, 且

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} A_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|.$$

• **Note:**

由于复数域  $\mathbb{C}$  是完备的, 故  $\mathbb{C}^{m \times n}$  是完备的赋范空间, 这意味着 Cauchy 序列等价于收敛序列. 由于有限维赋范空间上的所有范数都是等价的, 因此讨论 "依某一特定范数收敛" 是没有必要的. 换言之, 所有范数诱导的收敛性是等价的, 因此这里仅称其为 "收敛".

男生超级扣分的行为, 快来看看自己中了几条:

- ① 不定积分的结果不加常数  $C$ .
- ② 定积分换元时忘记更换积分上下限.
- ③ 看到分式极限就开洛, 滥用 L'Hôpital 法则.
- ④ 计算行列式时遗漏代数余子式的符号.
- ⑤ 在加减运算中使用等价无穷小.
- ⑥ 解非齐次微分方程时遗漏特解.
- ⑦ 默认积分次序可交换.
- ⑧ 认为所有度量空间上的 Cauchy 序列都等价于收敛序列.
- ⑨ 认为所有赋范空间上的范数都是等价的.

骗你的, 女生也扣分 (doge)

(Inspired by DanXi Post #4844372 — with my respect)

**Solution:**

若级数  $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\|$  收敛, 则部分和序列  $\{\sum_{k=1}^n \|A_k\|\}_{n=1}^{\infty}$  是  $\mathbb{R}$  上的 Cauchy 序列,

即对于任意  $\varepsilon > 0$ , 都存在正整数  $N$  使得对于任意  $m, n > N$  都有:

$$\left| \sum_{k=1}^m \|A_k\| - \sum_{k=1}^n \|A_k\| \right| = \sum_{k=\min\{m,n\}+1}^{\max\{m,n\}} \|A_k\| < \varepsilon,$$

进而有:



$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^m A_k - \sum_{k=1}^n A_k\right\| &= \left\|\sum_{k=\min\{m,n\}+1}^{\max\{m,n\}} A_k\right\| \\ &\leq \sum_{k=\min\{m,n\}+1}^{\max\{m,n\}} \|A_k\| \\ &< \varepsilon.\end{aligned}$$

这说明部分和序列  $\{\sum_{k=1}^n A_k\}_{n=1}^\infty$  是  $\mathbb{C}^{m \times n}$  上的 Cauchy 序列.

由于赋范空间  $\mathbb{C}^{m \times n}$  是完备的, 故  $\{\sum_{k=1}^n A_k\}_{n=1}^\infty$  收敛, 即矩阵级数  $\sum_{k=1}^\infty A_k$  收敛.

根据范数的次可加性可知, 对于任意正整数  $n$ , 我们都有:

$$\left\|\sum_{k=1}^n A_k\right\| \leq \sum_{k=1}^n \|A_k\|.$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 则我们有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\|\sum_{k=1}^n A_k\right\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \|A_k\| = \sum_{k=1}^\infty \|A_k\|.$$

根据有限维赋范空间上范数的连续性, 我们有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\|\sum_{k=1}^n A_k\right\| = \left\|\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n A_k\right\| = \left\|\sum_{k=1}^\infty A_k\right\|.$$

因此我们有:

$$\left\|\sum_{k=1}^\infty A_k\right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\|\sum_{k=1}^n A_k\right\| \leq \sum_{k=1}^\infty \|A_k\|.$$

命题得证.

## Problem 8

给定正整数  $m, n, k$ , 其中  $k < n$ .

若  $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathbb{C}^{n \times k}$  都是列满秩矩阵,

试证明存在  $B \in \mathbb{C}^{n \times (n-k)}$  使得

$$\prod_{i=1}^m \det([A_i, B]) \neq 0.$$

**Solution:**

这道题是 2024 年 Homework 05 Problem 07 (一道选做题) 的等价命题, 原命题是这样说的:

给定正整数  $m, n, k$ , 其中  $k < n$ , 设  $\mathcal{V}$  是  $\mathbb{R}$  上的  $n$  维向量空间.

现有  $\mathcal{V}$  中  $m$  组向量, 每组中均含有  $k$  个线性无关的向量.

试证明在  $\mathcal{V}$  中必存在  $n - k$  个向量, 使得它们与上面任意一组向量合在一起都能构成  $\mathcal{V}$  的一组基.

解答过程完全相同, 从略.

Man, what can I say?

"选做题做了不算分, 但没说考试不考哦." —— SMY.

(花十分钟讲完这张卷子之后...)

"是不是挺简单的?" 邵美悦嘴角勾起一抹狡黠的笑,

"至少我看很多同学也没有在那里奋笔疾书嘛, 一会儿就有同学开始睡觉了."

过了一会儿他又说: "这种题目, 你会做就是二十分钟的事情. 但我给了你们一百分钟, 对吧?"

(交闪了还要追着杀... 哈基邵, 你这家伙 🤨 🙄 🖐)

**The End**