统计学基础 I : 数理统计 Assignment 2

姓名: 雍崔扬
学号: 21307140051
习题: E1.2, E1.3, E1.4(1)(2)(3), E1.14, E1.18, E1.23

Problem 1 习题 1.2

试确定下列问题的总体及分布族:

(1) 研究某种型号玻璃瓶的品质，假设瓶上的气泡数是衡量品质的指标，它服从 Poisson 分布.

- **Solution:**
  记瓶子上的气泡数为 X，总体是气泡数 X 所有可能取值的全体，即自然数集 $\mathbb{N}$.
  概率密度函数 $p(x;\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}\ (x \in \mathbb{N}, \lambda > 0)$
  参数分布族为 $\mathscr{P}_X = \{p(\cdot, \lambda) : \lambda \in (0, \infty)\}$

(2) 研究某工厂生成的标值为 2.5Ω 的电阻的阻值.

- **Solution:**
  记电阻阻值为 X，总体是阻值 X 所有可能取值的全体，即正实数集 $\mathbb{R}_{++}$.
  总体分布族为 $\mathscr{F}_X = \{F_X : \text{CDF on } \mathbb{R}_{++} \text{ such that } F_X(0) = 0 \text{ and } \int_0^\infty x\mathrm{d}F(x) = 2.5\}$
  (无法写为单一有限维参数族)

(3) 同 (2)，但假设阻值服从正态分布.

- **Solution:**
  与 (2) 同理，总体为 $\mathbb{R}_{++}$
  总体分布 F_X 的参数分布族为 $\mathscr{F}_X = \{N(2.5, \sigma^2) : \sigma^2 > 0\}$
  值得注意的是，正态在负轴上有正概率，可能与电阻必须为正的物理事实冲突.
  如需保证非负性，应改用对数正态、Gamma 或截断正态等正支持族.

Problem 2 习题 1.3

一物体的重量 μ 未知.
用两架天平称量，其测量误差分别服从 $N(0, \sigma_1^2)$ 和 $N(0, \sigma_2^2)$，其中 σ_1, σ_2 未知.
为使得测量尽可能精确，先将该物体在第一架天平上称两次，得到 X_1, X_2.
再在第二架天平上乘两次，得到 X_3, X_4.
然后看哪架天平乘得的数据偏差的绝对值小，再用该天平称 $n-4$ 次得到 $X_5, X_6, \dots, X_n$
写出样本 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的分布族.

Solution:
样本空间: $\mathbb{R}^n$ (不考虑与质量必须为正的物理事实的冲突)
参数: $\mu \in \mathbb{R}, \sigma_1^2 > 0, \sigma_2^2 > 0$
对于 $x = (x_1, \dots, x_n)$，联合密度为:

$$p(x) = \begin{cases} \prod_{i=1}^2 \varphi(x_i; \mu, \sigma_1^2) \prod_{i=3}^4 \varphi(x_i; \mu, \sigma_2^2) \prod_{i=5}^n \varphi(x_i; \mu, \sigma_1^2), & \text{if } |x_1 - x_2| \le |x_3 - x_4| \\ \prod_{i=1}^2 \varphi(x_i; \mu, \sigma_1^2) \prod_{i=3}^4 \varphi(x_i; \mu, \sigma_2^2) \prod_{i=5}^n \varphi(x_i; \mu, \sigma_2^2), & \text{if } |x_1 - x_2| > |x_3 - x_4| \end{cases}$$

值得注意的是，在条件于判定事件 (基于前四次观测) 下观测相互独立;
但未条件时后 $n-4$ 次观测与前四次观测存在依赖.

Problem 3 习题 1.4

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 为取自 Bernoulli 分布 $B(1,p)$ 的一个样本，其中 $0<p<1$
(1) 写出样本的联合分布列.

- **Solution:**
  对于任意 $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0,1\}$，我们有:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\{X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n\} &= \prod_{i=1}^{n}\mathrm{P}\{X_i=x_i\} \\ &= \prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} \\ &= p^{\sum_{i=1}^n x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}\end{aligned}$$

(2) 指出下列样本的函数中哪些是统计量，哪些不是统计量，为什么?

- **Solution:**
  - $T_1 = \frac{1}{5}(X_1+X_2+\cdots+X_5)$ 是统计量，它由样本唯一确定.
  - $T_2 = X_5 - \mathrm{E}[X_1] = X_5 - p$ 不是统计量,
    因为它拥有参数 p，而 p 不能由样本唯一确定.
  - $T_3 = X_5 - p$ 与 T_2 相同，不是统计量.
  - $T_4 = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_5\}$ 是统计量，它由样本唯一确定.

(3) 如果一个样本观测值为 $(0,1,0,1,1)$, 写出其样本均值、样本方差和经验分布函数.

- **Solution:**
  样本均值 $\overline{X} = \frac{1}{5}(0+1+0+1+1) = 0.6$
  样本方差 $s^2 = \frac{1}{5-1}[2\times(0-0.6)^2 + 3\times(1-0.6)^2] = 0.3$
  经验分布函数 $\hat{F}(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 0.4, & 0\le x<1 \\ 1, & x\ge 1\end{cases}$

Problem 4 习题 1.14

(Poisson 分布的再生性)
设 $X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 为取自 Poisson 分布 $\{\mathrm{Poisson}(\lambda):\lambda>0\}$ 的简单随机样本，
试求出 $\overline{X}$ 的抽样分布，并计算 $\mathrm{E}[\overline{X}]$ 和 $\mathrm{E}[S_n^2]$.
(其中 S_n^2 代表未修偏的样本方差)

- **一个有趣的事实: 指数分布和几何分布具有无记忆性**

Solution:

- **计算 $\overline{X}$ 的抽样分布:**
  首先我们计算 $X \sim \mathrm{Possion}(\lambda)$ 的矩母函数 $M_X(t)$:

$$\begin{aligned}M_X(t) &= \mathrm{E}[e^{tX}] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} e^{t\cdot i} e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \\ &= e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^i}{i!} \\ &= e^{-\lambda}e^{\lambda e^t} \\ &= e^{\lambda(e^t-1)}\end{aligned}$$

  于是 $n\overline{X}$ 的矩母函数为:

$$
\begin{aligned}
M_{n\overline{X}}(t) &= \mathrm{E}[e^{t\cdot n\overline{X}}] \\
&= \mathrm{E}[e^{t\cdot\sum_{i=1}^{n} X_i}] \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}[e^{tX_i}] \\
&= \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t) \\
&= \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda(e^t-1)} \\
&= e^{n\lambda(e^t-1)}
\end{aligned}
$$

因此 $n\overline{X} \sim \mathrm{Poisson}(n\lambda)$
也就是说 $\overline{X} \sim \frac{1}{n}\mathrm{Poisson}(n\lambda)$
根据中心极限定理可知，当 $n \to \infty$ 时，$\sqrt{n}(\overline{X} - \lambda) \xrightarrow{\mathrm{d}} N(0, \lambda)$

- **计算 $\mathrm{E}[\overline{X}]$:**

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\overline{X}] &= \mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[X_i] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \lambda \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

(实际上可由 $\overline{X} \sim \frac{1}{n}\mathrm{Poisson}(n\lambda)$ 直接得到 $\mathrm{E}[\overline{X}] = \frac{1}{n} \cdot n\lambda = \lambda$)

- **计算 $\mathrm{Var}[\overline{X}]$：**

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\overline{X}) &= \left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot n\lambda \\
&= \frac{\lambda}{n}
\end{aligned}
$$

(实际上可由 $\overline{X} \sim \frac{1}{n}\mathrm{Poisson}(n\lambda)$ 直接得到 $\mathrm{Var}[\overline{X}] = \frac{1}{n^2} \cdot n\lambda = \frac{\lambda}{n}$)

- **计算 $\mathrm{E}[S_n^2]$:**

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[S_n^2] &= \mathrm{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2\right] \\
&= \frac{1}{n}\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i - \lambda)^2 - n(\lambda - \overline{X})^2\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[(X_i - \lambda)^2] - \mathrm{E}[(\overline{X} - \lambda)^2] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) - \mathrm{Var}(\overline{X}) \\
&= \lambda - \frac{\lambda}{n} \\
&= \frac{n-1}{n}\lambda
\end{aligned}
$$

Problem 5 习题 1.18

设 X_1, X_2 为取自正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 的一个样本.
试证明统计量 X_1/X_2 和 $\sqrt{X_1^2 + X_2^2}$ 是相互独立的.

- **Solution:**
显然 X_1, X_2 联合地连续，且具有联合概率密度函数 $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}\}$
记 $\begin{cases} Y_1 = g_1(X_1, X_2) = X_1/X_2 \\ Y_2 = g_2(X_1, X_2) = \sqrt{X_1^2 + X_2^2} \end{cases}$
(按老师的说法，把 Y_1, Y_2 命名为 Θ 和 R 会更好)
于是有 $\begin{cases} X_1 = \frac{Y_1 Y_2}{\sqrt{Y_1^2+1}} \overset{\Delta}{=} h_1(Y_1, Y_2) \\ X_2 = \frac{Y_2}{\sqrt{Y_1^2+1}} \overset{\Delta}{=} h_2(Y_1, Y_2) \end{cases}$
由于函数 g_1, g_2 在所有的点 (x_1, x_2) 上有连续的偏导数，
且使得对于任意满足 $x_2 \neq 0$ 的 (x_1, x_2) 都有

$$\begin{aligned} J(x_1, x_2) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial g_1}{\partial x_1}\frac{\partial g_2}{\partial x_2} - \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial x_1} \\ &= \frac{1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - \left(-\frac{x_1}{x_2^2}\right) \cdot \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\left(1 + \frac{x_1^2}{x_2^2}\right) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

故可以证明 Y_1, Y_2 联合地连续，且联合密度函数为:

$$\begin{aligned} f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) &= f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)|J(x_1, x_2)|^{-1} \\ &= f_{X_1,X_2}(h_1(y_1, y_2), h_2(y_1, y_2))|J(h_1(y_1, y_2), h_2(y_1, y_2))|^{-1} \\ &= f_{X_1,X_2}\left(\frac{y_1 y_2}{\sqrt{y_1^2+1}}, \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2+1}}\right)\left|J\left(\frac{y_1 y_2}{\sqrt{y_1^2+1}}, \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2+1}}\right)\right|^{-1} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{y_2^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot \left[\frac{1}{y_2}(1 + y_1^2)\right]^{-1} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{y_2^2}{2\sigma^2}\right\} y_2 \cdot \frac{1}{y_1^2+1} \qquad (y_2 \geq 0) \end{aligned}$$

我们发现联合密度函数 $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$ 可以分离为关于 y_1 的函数和关于 y_2 的函数的乘积.
这说明 $Y_1 \perp Y_2$ 相互独立，命题得证.

值得注意的是，通过定义 $\begin{cases} X_1 = \frac{Y_1 Y_2}{\sqrt{Y_1^2+1}} \overset{\Delta}{=} h_1(Y_1, Y_2) \\ X_2 = \frac{Y_2}{\sqrt{Y_1^2+1}} \overset{\Delta}{=} h_2(Y_1, Y_2) \end{cases}$ 我们限制了 $X_2 \geq 0$

然而 X_1, X_2 的联合概率密度函数 $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}\}$ 基于 $X_1, X_2 \in \mathbb{R}$ 的假设，直接应用到 $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$ 的算式中会造成**不归一**的问题.

实际上，我们应该使用 $X_1, |X_2|$ 的联合概率密度函数 $f_{X_1,|X_2|}(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi\sigma^2}\exp\{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}\}$

因此 Y_1, Y_2 联合密度函数的最终形式应为:

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \frac{y_2}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{y_2^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot \frac{1}{\pi(y_1^2+1)} \qquad (y_2 \geq 0)$$

这也是我们在 Problem 6 习题 1.23 (2) 中使用的形式.

我们可以知道 $\begin{cases} Y_1 \sim \mathrm{Cauchy}(0, 1) \\ Y_2 \sim \mathrm{Rayleigh}(\sigma^2) \quad (\text{i.e. } Y_2^2 \sim \sigma\chi^2(2)) \\ Y_1 \perp Y_2 \end{cases}$

TA: 李贤平《概率论基础》P175:

［例 9］ 若 ξ 与 η 是相互独立的随机变量，均服从 $N(0,1)$，试证化为极坐标后，$\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$ 与 $\varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{\eta}{\xi}\right)$（$\varphi$ 取值于 $[0,2\pi]$），是相互独立的.

［解］ 采用极坐标，$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，因此 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$，因为 (ξ,η) 的密度函数为

$$p(x,y)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}$$

而

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r$$

故 (ρ,φ) 的密度函数为

$$\begin{aligned}q(r,\theta)&=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\cdot r\\&=\frac{1}{2\pi}\cdot r\mathrm{e}^{-r^2/2},\quad r\geqslant 0,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\end{aligned}$$

即 $\rho=\sqrt{\xi^2+\eta^2}$ 的密度函数为

$$R(r)=\begin{cases}r\mathrm{e}^{-r^2/2}, & r\geqslant 0\\ 0, & r<0\end{cases}\tag{3.3.41}$$

这个分布称为**瑞利**(Rayleigh)**分布**.

而 $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi}$ 服从 $[0,2\pi]$ 中的均匀分布，并且 ρ 与 φ 是独立的.

这个结果常被用来产生服从正态分布的随机数. 做法如下：产生相互独立的 $[0,1]$ 均匀分布的随机数 U_1, U_2，令

$$\begin{aligned}\xi&=(-2\ln U_1)^{\frac{1}{2}}\cos 2\pi U_2\\ \eta&=(-2\ln U_1)^{\frac{1}{2}}\sin 2\pi U_2\end{aligned}\tag{3.3.42}$$

则 ξ 与 η 是相互独立的 $N(0,1)$ 随机数.

这样做法的理由让读者自行论证.

Problem 6 习题 1.23

试证:

(1) $t^2(k)\overset{\mathrm{d}}{=}F(1,k)$

- **Solution:**
  形式上，等式 $t^2(k)=[\frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2(k)/k}}]^2=\frac{\chi^2(1)/1}{\chi^2(k)/k}=F(1,k)$ 就说明了命题成立.
  其中我们要求分子、分母的分布相互独立.
  严格化的证明比较复杂，与 (2) 中严格化的证明的基本思想是相同的，这里就不写了.

(2) $t(1)\overset{\mathrm{d}}{=}\mathrm{Cauchy}(0,1)$

- **Solution:**
形式上，等式 $t(1)=\frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2(1)/1}}=\frac{N(0,1)}{|N(0,1)|}=\frac{N(0,1)}{N(0,1)}=\text{Cauchy}(0,1)$ 就说明了命题成立.
其中我们要求分子、分母的分布相互独立.
  - **关于 $\frac{N(0,1)}{|N(0,1)|}=\frac{N(0,1)}{N(0,1)}$ 的直觉:**
  记 $\begin{cases} X_1,X_2\sim N(0,1) \\ X_1\perp X_2 \end{cases}$
  根据独立性、$N(0,1)$ 的对称性和 $\mathrm{P}\{X_2=0\}=0$ 可知:
  $$\begin{aligned} \mathrm{P}\left\{\frac{X_1}{X_2}\le t\right\} &= \mathrm{P}\left\{\frac{X_1}{X_2}\le t, X_2>0\right\}+\mathrm{P}\left\{\frac{X_1}{X_2}\le t, X_2<0\right\} \\ &= \mathrm{P}\left\{\frac{X_1}{|X_2|}\le t, X_2>0\right\}+\mathrm{P}\left\{-\frac{X_1}{|X_2|}\le t, X_2<0\right\} \quad (\text{by symmetry of } N(0,1)) \\ &= \mathrm{P}\left\{\frac{X_1}{|X_2|}\le t, X_2>0\right\}+\mathrm{P}\left\{\frac{X_1}{|X_2|}\le t, X_2<0\right\} \\ &= \mathrm{P}\left\{\frac{X_1}{|X_2|}\le t\right\} \end{aligned}$$
  因此我们知道 $Y_1:=\frac{X_1}{X_2}\overset{\mathrm{d}}{=}\frac{X_1}{|X_2|}\sim t(1)$
  - **法一:**
  记 $\begin{cases} X_1,X_2\sim N(0,1) \\ X_1\perp X_2 \end{cases}$
  显然 X_1,X_2 联合地连续，且具有联合概率密度函数 $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}\}$
  定义 $\begin{cases} Y_1=g_1(X_1,X_2)=\frac{X_1}{X_2} \\ Y_2=g_2(X_1,X_2)=\sqrt{X_1^2+X_2^2} \end{cases}$
  根据本次作业 Problem 5 (教材习题 1.18) 的结论，我们知道:
  Y_1,Y_2 联合地连续，且联合密度函数为:
  $$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)=\frac{1}{\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{y_2^2}{2\sigma^2}\right\}y_2\cdot\frac{1}{y_1^2+1} \qquad (y_2\ge 0)$$
  于是 Y_1 的概率密度函数为:
  $$\begin{aligned} f_{Y_1}(y_1) &= \int_0^\infty f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2)\mathrm{d}y_2 \\ &= \int_0^\infty \frac{y_2}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{y_2^2}{2\sigma^2}\right\}\cdot\frac{1}{\pi(y_1^2+1)}\mathrm{d}y_2 \\ &= \frac{1}{\pi(y_1^2+1)}\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{y_2^2}{2\sigma^2}\right\}\frac{y_2}{\sigma^2}\mathrm{d}y_2 \\ &= \frac{1}{\pi(y_1^2+1)}\int_0^\infty e^{-t}\mathrm{d}t \quad (t:=\frac{y_2^2}{2\sigma^2}) \\ &= \frac{1}{\pi(y_1^2+1)} \\ &= \mathrm{P}\{\text{Cauchy}(0,1)=y_1\} \end{aligned}$$
  这就说明了 $Y_1=\frac{X_1}{X_2}\sim\text{Cauchy}(0,1)$
  再结合 $Y_1=\frac{X_1}{X_2}\overset{\mathrm{d}}{=}\frac{X_1}{|X_2|}\sim t(1)$ 就得到 $t(1)\overset{\mathrm{d}}{=}\text{Cauchy}(0,1)$
  - **法二:**
  记 $\begin{cases} X_1,X_2\sim N(0,1) \\ X_1\perp X_2 \end{cases}$
  使用极坐标变换:
  $$(R,\Theta)\text{ with } X_1=R\cos\Theta,\ X_2=R\sin\Theta,\ R\ge 0,\ \Theta\in[0,\pi)$$

Jacobi 行列式为:

$$J(r,\theta)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta}\\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r$$

联合密度为:

$$\begin{aligned}f_{R,\Theta}(r,\theta)&=f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)|J(r,\theta)|\\&=\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right\}\cdot r\\&=\frac{1}{2\pi}e^{-r^2/2}r\end{aligned}$$

定义 $U:=\cot\Theta=X_1/X_2\ \Theta\in[0,\pi)$.
对于给定 u，有 $\theta=\operatorname{arccot}u$ 且 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}u=-1/(1+u^2)$.
对 r 积分可得 U 的边缘密度:

$$\begin{aligned}f_U(u)&=\int_0^\infty f_{R,\Theta}(r,\theta)\cdot\left|\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u}\right|\mathrm{d}r\\&=\int_0^\infty\frac{1}{2\pi}e^{-r^2/2}r\cdot\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}r\\&=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1+u^2}\int_0^\infty e^{-r^2/2}r\mathrm{d}r\\&=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{1+u^2}\int_0^\infty e^{-t}\mathrm{d}t\quad(t:=r^2/2)\\&=\frac{1}{2\pi(1+u^2)}\end{aligned}$$

注意我们把 Θ 的区间缩为 $[0,\pi)$，而原始 X_1,X_2 的 Θ 的自然取值区间长度为 2π.
因此要恢复原始分布，需要把贡献乘以 2，最终得到:

$$f_U(u)=\frac{1}{\pi(1+u^2)}$$

The End