随机过程导论 Assignment 03

姓名: 雍崔扬
学号: 21307140051
Due Date: June 20, 2024

Problem 1

Let $\{B(t): t \geq 0\}$ be a standard Brownian motion.
For $s \leq t$, determine the distribution of $B(s)+B(t)$.

Solution:
对于任意 $s \leq t$ 都有联合分布:
$\begin{bmatrix} B(s) \\ B(t)-B(s) \end{bmatrix} \sim N(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s & \\ & t-s \end{bmatrix})$
因此我们有:

$$\begin{aligned} B(s)+B(t) &= 2B(s)+(B(t)-B(s)) \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} B(s) \\ B(t)-B(s) \end{bmatrix} \\ &\stackrel{d}{=} N(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} s & \\ & t-s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}) \\ &= N(0, 3s+t) \end{aligned}$$

表明 $B(s)+B(t) \sim N(0, 3s+t)$

Problem 2

For $t \geq 0$, define $X(t) = Z\sqrt{t}$ where $Z \sim N(0,1)$.

(a) What is the distribution of $X(t)$?

- **Solution:**
  对于任意 $t \geq 0$, $X(t) = Z\sqrt{t} \sim N(0 \cdot \sqrt{t}, 1 \cdot (\sqrt{t})^2) = N(0,t)$

(b) Is $\{X(t): t \geq 0\}$ a Brownian motion? Why?

- **Lemma: (Brown 运动的第二种等价定义, 苏中根 定理 7.1)**
  若 $\mathbf{X} = \{X(t): t \geq 0\}$ 是一个**实数值 Gauss 过程** (即任意有限维联合正态),
  且 $\begin{cases} \mathrm{E}[X(t)] = 0 \\ \mathrm{Cov}[X(s), X(t)] = s \wedge t = \min\{s,t\} \end{cases}$
  则 $\mathbf{X} = \{X(t): t \geq 0\}$ 是**标准 Brown 运动**.
- **Solution:**
  $\{X(t): t \geq 0\}$ 不是一个 Brown 运动.
  我们说明它不满足 Brown 运动的第二个等价定义:
  - **正态过程:**
    其任意有限维联合分布是多元正态的,
    具体来说, 任意给定 n 个时刻 $t_1, t_2, \ldots, t_n$
    我们都有 $\begin{bmatrix} X(t_1) \\ \vdots \\ X(t_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{t_1} \\ \vdots \\ \sqrt{t_n} \end{bmatrix} \odot Z$
    它是正态随机变量 Z 的线性组合, 因而服从多元正态分布.
  - **我们计算 $\mathbf{X} = \{X(t): t \geq 0\}$ 的均值函数和自相关函数:**
    $$\begin{cases} \begin{aligned} \mathrm{E}[X(t)] &= \mathrm{E}[Z\sqrt{t}] \\ &= 0 \cdot \sqrt{t} \\ &= 0 \quad (\forall\, t \geq 0) \end{aligned} \\ \begin{aligned} \mathrm{Cov}(X(s), X(t)) &= \mathrm{E}[(X(s)-0)(X(t)-0)] \\ &= \mathrm{E}[Z\sqrt{s} \cdot Z\sqrt{t}] \\ &= \sqrt{st} \cdot \mathrm{E}[Z^2] \\ &= \sqrt{st} \cdot (\mathrm{Var}(Z) + (\mathrm{E}[Z])^2) \\ &= \sqrt{st} \cdot (1+0^2) \\ &= \sqrt{st} \quad (\forall\, s,t \geq 0) \end{aligned} \end{cases}$$
    我们发现自相关函数 $\mathrm{Cov}(X(s), X(t)) = \sqrt{st} \neq s \wedge t$
    不满足 Brown 运动的第二种等价定义.

  综上所述, $\{X(t): t \geq 0\}$ 不是一个 Brown 运动.

Problem 3

Let $\{W(t) : t \geq 0\}$ and $\{B(t) : t \geq 0\}$ be two independent standard Brownian motions.
Let ρ be a constant such that $-1 < \rho < 1$.
Define the stochastic process $\{X(t) : t \geq 0\}$ as $X(t) = \rho W(t) + \sqrt{1-\rho^2}B(t)$

(a) Show that $\{X(t) : t \geq 0\}$ is a standard Brownian motion.

Solution:
我们通过标准 Brown 运动的第二种等价定义来证明:

- **正态过程:**
  任意给定 n 个时刻 $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 和 $c_1, c_2, \ldots, c_n$
  考虑其**线性组合** $\sum_{i=1}^{n} c_i X(t_i)$:
  $$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} c_i X(t_i) &= \sum_{i=1}^{n} c_i[\rho W(t_i) + \sqrt{1-\rho^2}B(t_i)] \\ &= \rho \sum_{i=1}^{n} c_i W(t_i) + \sqrt{1-\rho^2}\sum_{i=1}^{n} c_i B(t_i)\end{aligned}$$
  它作为正态随机变量 $\{W(t_i)\}_{i=1}^{n}$ 和 $\{B(t_i)\}_{i=1}^{n}$ 的线性组合，也是**正态随机变量**.
  表明 $\mathbf{X} = \{X(t) : t \geq 0\}$ 是 **Gauss 过程** (正态过程).
- **我们计算 $\mathbf{X} = \{X(t) : t \geq 0\}$ 的均值函数和自相关函数:**
  $$\begin{cases}\mathrm{E}[X(t)] = \mathrm{E}[\rho W(t) + \sqrt{1-\rho^2}B(t)] \\ \qquad\qquad = \rho \cdot 0 - \sqrt{1-\rho^2} \cdot 0 \\ \qquad\qquad = 0 \quad (\forall\, t \geq 0) \\ \mathrm{Cov}(X(s), X(t)) = \mathrm{E}[(X(s)-0)(X(t)-0)] \\ \qquad = \mathrm{E}[(\rho W(s) + \sqrt{1-\rho^2}B(s))(\rho W(t) + \sqrt{1-\rho^2}B(t))] \\ \qquad = \rho^2\mathrm{E}[W(s)W(t)] + \rho\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{E}[B(s)]\mathrm{E}[W(t)] + \rho\sqrt{1-\rho^2}\mathrm{E}[W(s)]\mathrm{E}[B(t)] + (1-\rho^2)\mathrm{E}[B(s)B(t)] \\ \qquad = \rho^2 \cdot (s \wedge t) + \rho\sqrt{1-\rho^2} \cdot 0 \cdot 0 + \rho\sqrt{1-\rho^2} \cdot 0 \cdot 0 + (1-\rho^2) \cdot (s \wedge t) \\ \qquad = s \wedge t \quad (\forall\, s, t \geq 0)\end{cases}$$

综上所述，$\{X(t) : t \geq 0\}$ 是标准 Brown 运动.

(b) Determine the covariance and correlation coefficient of $X(t)$ and $W(t)$.

Solution:

- 计算 $\mathrm{Cov}(X(t), W(t))$:
  $$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X(t), W(t)) &= \mathrm{E}[(X(t)-0)(W(t)-0)] \\ &= \mathrm{E}[(\rho W(t) + \sqrt{1-\rho^2}B(t))W(t)] \\ &= \rho \cdot \mathrm{E}[(W(t))^2] + \sqrt{1-\rho^2} \cdot \mathrm{E}[B(t)]\mathrm{E}[W(t)] \\ &= \rho \cdot t + \sqrt{1-\rho^2} \cdot 0 \cdot 0 \\ &= \rho t\end{aligned}$$
- 计算 $\mathrm{Corr}(X(t), W(t))$:
  $$\begin{aligned}\mathrm{Corr}(X(t), W(t)) &= \frac{\mathrm{Cov}(X(t), W(t))}{\sqrt{\mathrm{Var}(X(t))\mathrm{Var}(W(t))}} \\ &= \frac{\rho t}{\sqrt{t \cdot t}} \\ &= \rho\end{aligned}$$

Problem 4

Let $\{B(t) : t \geq 0\}$ be a standard Brownian motion.

(a) Determine $P(B(2.1) > 1.7 | B(1.6) = 0.5)$.

- **Solution:**

  对于任意 $s \leq t$ 都有条件分布 $(B(t)|B(s) = x) \stackrel{d}{=} N(x, t-s)$
  因此 $(B(2.1)|B(1.6) = 0.5) \stackrel{d}{=} N(0.5, 0.5)$
  $$\begin{aligned}\mathrm{P}\{B(2.1) > 1.7 | B(1.6) = 0.5\} &= \mathrm{P}\{N(0.5, 0.5) > 1.7\} \\ &= \mathrm{P}\{N(0, 1) > \frac{1.7-0.5}{\sqrt{0.5}}\} \\ &= 1 - \Phi(1.2\sqrt{2}) \\ &\approx 0.0455\end{aligned}$$

(b) Determine $P(B(1.6) \leq 0.5 | B(2.1) = 1.7)$.

- **Solution:**
对于任意 $s \le t$ 都有条件分布 $(B(s)|B(t)=y) \overset{d}{=} N(\frac{s}{t}y, \frac{s}{t}(t-s))$
因此 $(B(1.6)|B(2.1)=1.7) \overset{d}{=} N(\frac{1.6}{2.1}1.7, \frac{1.6}{2.1}0.5)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\{B(1.6) \le 0.5|B(2.1)=1.7\} &= \mathrm{P}\{N(\frac{1.6}{2.1}1.7, \frac{1.6}{2.1}0.5) \le 0.5\} \\
&= \mathrm{P}\{N(0,1) \le \frac{0.5-\frac{1.6}{2.1}1.7}{\sqrt{\frac{1.6}{2.1}0.5}}\} \\
&= \Phi(-1.288) \\
&\approx 0.0988
\end{aligned}$$

(c) Show that for any $0 < s < t$, $B(t)$ and $B(s) - \frac{s}{t}B(t)$ are independent.

- **Solution:**
对于任意 $s \le t$ 都有联合分布:
$\begin{bmatrix} B(s) \\ B(t) \end{bmatrix} \sim N(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s & s \\ s & t \end{bmatrix})$
因此我们有:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} B(t) \\ B(s)-\frac{s}{t}B(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{s}{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B(s) \\ B(t) \end{bmatrix} \\
&\overset{d}{=} N(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{s}{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{s}{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & s \\ s & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\frac{s}{t} \end{bmatrix}^T) \\
&= N(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t & \\ & s-\frac{s^2}{t} \end{bmatrix})
\end{aligned}$$

我们知道 $B(t)$ 和 $B(s)-\frac{s}{t}B(t)$ 联合正态，且不相关，因而相互独立.

Problem 5

Let $\{B(t) : t \ge 0\}$ be a standard Brownian motion and $0 < s < 1$.

(a) What is the distribution of $B(s) + B(s^2)$?

- **Solution:**
对于任意 $0 < s < 1$ 都有联合分布:
$\begin{bmatrix} B(s^2) \\ B(s) \end{bmatrix} \sim N(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s^2 & s^2 \\ s^2 & s \end{bmatrix})$
因此我们有:

$$\begin{aligned}
B(s)+B(s^2) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} B(s^2) \\ B(s) \end{bmatrix} \\
&= N(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} s^2 & s^2 \\ s^2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}) \\
&= N(0, 3s^2+s)
\end{aligned}$$

(b) What is the distribution of $B(s) + B(s^2) + B(1)$?

- **Solution:**
对于任意 $0 < s < 1$ 都有联合分布:
$\begin{bmatrix} B(s^2) \\ B(s) \\ B(1) \end{bmatrix} \sim N(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s^2 & s^2 & s^2 \\ s^2 & s & s \\ s^2 & s & 1 \end{bmatrix})$
因此我们有:

$$\begin{aligned}
B(s)+B(s^2)+B(1) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} B(s^2) \\ B(s) \\ B(1) \end{bmatrix} \\
&= N(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} s^2 & s^2 & s^2 \\ s^2 & s & s \\ s^2 & s & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}) \\
&= N(0, 5s^2+3s+1)
\end{aligned}$$

(c) What is the distribution of $B(s)$ given that $B(1) = 0$?

- **Solution:**
对于任意 $s \le t$ 都有条件分布 $(B(s)|B(t)=y) \overset{d}{=} N(\frac{s}{t}y, \frac{s}{t}(t-s))$
因此对于任意 $0 < s < 1$ 都有条件分布:

$$(B(s)|B(1)=0) \overset{d}{=} N(\frac{s}{1}0, \frac{s}{1}(1-s)) = N(0, s(1-s))$$

(d) Determine $\mathrm{E}(B(s)B(s^2)|B(1)=0)$.

- **Solution 1:**
  应用全期望公式，我们有：

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[B(s^2)B(s)|B(1)=0] &= \mathrm{E}[\mathrm{E}[B(s^2)B(s)|B(s)]|B(1)=0] \\
&= \mathrm{E}[B(s)\cdot \mathrm{E}[B(s^2)|B(s)]|B(1)=0] \\
&= \mathrm{E}[B(s)\cdot \mathrm{E}[N(\frac{s^2}{s}B(s), \frac{s^2}{s}(s-s^2))]|B(1)=0] \\
&= \mathrm{E}[B(s)\cdot sB(s)|B(1)=0] \\
&= s\cdot \mathrm{E}[(B(s))^2|B(1)=0] \\
&= s\cdot (\mathrm{Var}(B(s)|B(1)=0) + (\mathrm{E}[B(s)|B(1)=0])^2) \\
&= s\cdot (s(1-s)+0^2) \quad (B(s)|B(1)=0 \overset{d}{=} N(0, s(1-s))) \\
&= s^2(1-s)
\end{aligned}$$

- **Solution 2:**
  - **Lemma:**
    $\mathrm{Cov}(X,Y|Z=z) = \mathrm{Cov}(X,Y) - \frac{\mathrm{Cov}(X,Z)\mathrm{Cov}(Y,Z)}{\mathrm{Var}(Z)} \quad (\forall\ z)$

  根据引理我们有：

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(B(s)B(s^2)|B(1)=0) &= \mathrm{Cov}(B(s),B(s^2)|B(1)=0) + \mathrm{E}[B(s)|B(1)=0]\cdot \mathrm{E}[B(s^2)|B(1)=0] \\
&= \mathrm{Cov}(B(s),B(s^2)) - \frac{\mathrm{Cov}(B(s),B(1))\cdot \mathrm{Cov}(B(s^2),B(1))}{\mathrm{Var}(B(1))} + \mathrm{E}[N(\frac{s}{1}0, \frac{s}{1}(1-s))]\cdot \mathrm{E}[N(\frac{s^2}{1}0, \frac{s^2}{1}(1-
\\
&= s\wedge s^2 - \frac{(s\wedge 1)\cdot(s^2\wedge 1)}{1} + 0\cdot 0 \\
&= s^2 - s^3
\end{aligned}$$

Problem 6

Let $\{B(t): t\geq 0\}$ be a standard Brownian motion.

(a) Let $Z(t) = |B(t)|$. Determine the probability density function of $Z(t)$.

- **Solution:**
  给定 $t>0$，$Z(t)$ 的概率密度函数为：

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\{Z(t)=z\} &= \mathrm{P}\{|B(t)|=z\} \\
&= 2\mathrm{P}\{B(t)=z\} \\
&= 2\cdot \mathrm{P}\{N(0,t)=z\} \\
&= 2\cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}
\end{aligned}$$

(b) Let T_a be the first time $B(t)$ hits a, where $a>0$,
and $Y(t)$ be the process absorbed at a, i.e. $Y(t) = \begin{cases} B(t) & \text{if } t<T_a \\ a & \text{if } t\geq T_a \end{cases}$

Determine the cumulative distribution function of $Y(t)$.

- **Lemma: Reflect Principle**
  对于任意 $\begin{cases} a\in\mathbb{R} \\ t>0 \end{cases}$，都有 $\mathrm{P}\{B(t)\geq a\} = \mathrm{P}\{B(t)\leq -a\}$ 成立.
  推论:
  - $\mathrm{P}\{T_a\leq t\} = \mathrm{P}\{\max\limits_{0\leq s\leq t} B(s)\geq a\} = 2\mathrm{P}\{B(t)\geq a\} = 2(1-\Phi(\frac{a}{\sqrt{t}}))$
    总之对于 T_a $(a\neq 0)$ 我们有 $\mathrm{P}\{T_a\leq t\} = 2(1-\Phi(\frac{|a|}{\sqrt{t}}))$ 成立.
  - $\tilde{B}(t) \overset{\Delta}{=} \begin{cases} B(t) & t\leq T_a \\ 2B(T_a)-B(t) & t>T_a \end{cases}$ 是一个标准 Brown 运动

Solution:
考虑 $a>0$ 的情况：

- 当 $y<a$ 时，我们有：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\{Y(t)\le y\} &= \mathrm{P}\{B(t)\le y,\ T_a>t\} \\
&= \mathrm{P}\{B(t)\le y,\ \max_{0\le s\le t} B(s)<a\} \\
&= \mathrm{P}\{B(t)\le y\}-\mathrm{P}\{B(t)\le y,\ \max_{0\le s\le t} B(s)\ge a\} \\
&= \mathrm{P}\{B(t)\le y\}-\mathrm{P}\{\tilde{B}(t)\ge 2a-y\} \quad (\tilde{B}(t)\overset{\Delta}{=}\begin{cases} B(t) & t\le T_a \\ 2B(T_a)-B(t) & t>T_a \end{cases}) \\
&= \Phi(\frac{y}{\sqrt{t}})-(1-\Phi(\frac{2a-y}{\sqrt{t}})) \\
&= \Phi(\frac{y}{\sqrt{t}})-1+\Phi(\frac{2a-y}{\sqrt{t}})
\end{aligned}
$$

- 当 $y\ge a$ 时，我们有:

$$
\mathrm{P}\{Y(t)\le y\}=1
$$

因此对于 $a>0$ 的情况 $\mathrm{P}\{Y(t)\le y\}=\begin{cases} \Phi(\frac{y}{\sqrt{t}})-1+\Phi(\frac{2a-y}{\sqrt{t}}) & \text{if } y<a \\ 1 & \text{if } y\ge a \end{cases}$

对称地，对于 $a<0$ 的情况:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\{Y(t)\ge y\} &= \begin{cases} (1-\Phi(\frac{y}{\sqrt{t}}))-1+(1-\Phi(\frac{2a-y}{\sqrt{t}})) & \text{if } y>a \\ 1 & \text{if } y\le a \end{cases} \\
&= \begin{cases} -\Phi(\frac{y}{\sqrt{t}})+1-\Phi(\frac{2a-y}{\sqrt{t}}) & \text{if } y>a \\ 1 & \text{if } y\le a \end{cases}
\end{aligned}
$$

因此 $\mathrm{P}\{Y(t)<y\}=\begin{cases} 0 & \text{if } y\le a \\ \Phi(\frac{y}{\sqrt{t}})+\Phi(\frac{2a-y}{\sqrt{t}}) & \text{if } y>a \end{cases}$

考虑到 $\mathrm{P}\{Y(t)=a\}=\mathrm{P}\{T_a\le t\}=2(1-\Phi(\frac{|a|}{\sqrt{t}}))=2(1-\Phi(\frac{-a}{\sqrt{t}}))=2\Phi(\frac{a}{\sqrt{t}})$

我们有 $\mathrm{P}\{Y(t)\le y\}=\begin{cases} 0 & \text{if } y<a \\ 2\Phi(\frac{a}{\sqrt{t}}) & \text{if } y=a \\ \Phi(\frac{y}{\sqrt{t}})+\Phi(\frac{2a-y}{\sqrt{t}}) & \text{if } y>a \end{cases}=\begin{cases} 0 & \text{if } y<a \\ \Phi(\frac{y}{\sqrt{t}})+\Phi(\frac{2a-y}{\sqrt{t}}) & \text{if } y\ge a \end{cases}$