# 统计学基础 I : 数理统计 Assignment 7

**姓名:** 雍崔扬
**学号:** 21307140051
**习题:** E2.25, E2.27(2)(3), E2.30(2)(3), E2.33, 补充题 5

## Problem 1 (习题 2.25)

设 $X = (X_1, \dots, X_n)$ 是取自 Gamma 分布族 $\{\mathrm{Gamma}(\alpha, \lambda) : \lambda > 0\}$ 的简单随机样本，
其中参数 $\alpha > 0$ 已知.
试证明 $\hat{g}(\lambda) = \frac{1}{\alpha}\overline{X}$ 是 $g(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ 的一致最小方差无偏估计量.

**Solution:**
首先我们说明 $\hat{g}(\lambda) = \frac{1}{\alpha}\overline{X}$ 是 $g(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ 的无偏估计量:
考虑总体 $\xi \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \lambda)$
我们知道总体均值 $\mathrm{E}[\xi] = \frac{\alpha}{\lambda}$ 且样本均值 $\overline{X}$ 是总体均值的无偏估计量，
因此 $\hat{g}(\lambda) = \frac{1}{\alpha}\overline{X}$ 是 $g(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ 的无偏估计量.

而证明 $\hat{g}(\lambda) = \frac{1}{\alpha}\overline{X}$ 是 $g(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ 的一致最小方差无偏估计量有两种方法.

- **(法一)** 一种思路是这样的:
  在 $\alpha$ 已知的情况下，我们可以证明 $\overline{X}$ 是参数 $\lambda$ 的**充分完备统计量** (证明从略)，
  而我们又知道 $\hat{g}(\lambda) = \frac{1}{\alpha}\overline{X}$ 是 $g(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ 的无偏估计量，
  那么根据 **Lehmann-Scheffé 定理**可知 $\hat{g}(\lambda) = \frac{1}{\alpha}\overline{X}$ 是 $g(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ 的一致最小方差无偏估计量.
- **(法二)** 另一种思路，我们尝试说明 $\hat{g}(\lambda) = \frac{1}{\alpha}\overline{X}$ 达到 $g(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ 的 **C-R 下界**:
  总体 $\xi$ 的对数似然函数为:

$$\begin{aligned} l(\lambda; x) &= \log\left(\mathrm{P}\{\mathrm{Gamma}(\alpha, \lambda) = x\}\right) \\ &= \log\left(\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}\right) \\ &= \alpha \log(\lambda) - \log(\Gamma(\alpha)) + (\alpha - 1)\log(x) - \lambda x \end{aligned}$$

  我们有 $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial\lambda} l(\lambda; x) = \frac{\alpha}{\lambda} - x \\ \frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} l(\lambda; x) = -\frac{\alpha}{\lambda^2} \end{cases}$
  Fisher 信息量为 (第二步的转化基于 "$\int p(x; \alpha, \lambda)\mathrm{d}x = 1$ 关于 $\lambda$ 可在积分号下微分两次" 的条件):

$$\begin{aligned} I_\xi(\lambda) &= \mathrm{E}_\lambda\left[\left(\frac{\partial}{\partial\lambda} l(\lambda; x)\right)^2\right] \\ &= -\mathrm{E}_\lambda\left[\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} l(\lambda; x)\right] \\ &= -\mathrm{E}_\lambda\left[-\frac{\alpha}{\lambda^2}\right] \\ &= \frac{\alpha}{\lambda^2} \end{aligned}$$

  因此 C-R 下界为 $\frac{(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} g(\lambda))^2}{I_X(\lambda)} = \frac{(-\frac{1}{\lambda^2})^2}{nI_\xi(\lambda)} = \frac{\frac{1}{\lambda^4}}{n \cdot \frac{\alpha}{\lambda^2}} = \frac{1}{n\alpha\lambda^2}$
  而 $\hat{g}(\lambda) = \frac{1}{\alpha}\overline{X}$ 的方差为:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}_\lambda(\hat{g}(\lambda)) &= \operatorname{Var}_\lambda\left(\frac{1}{\alpha}\overline{X}\right) \\
&= \frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\operatorname{Var}_\lambda(\xi) \\
&= \frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{\alpha}{\lambda^2} \\
&= \frac{1}{n\alpha\lambda^2}
\end{aligned}
$$

达到了 C-R 下界，因而 $\hat{g}(\lambda) = \frac{1}{\alpha}\overline{X}$ 是 $g(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$ 的一致最小方差无偏估计量.

## Problem 2 (习题 2.27)

设 $X = (X_1, \ldots, X_n)$ 是取自正态分布族 $\{\mathrm{N}(\mu, \sigma^2) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$ 的简单随机样本.

**Lemma** $1$ **(正态总体的样本均值与样本方差的联合分布, S. Ross 命题** $2.5$**)**
若 $X = (X_1, \ldots, X_n)$ 为取自 $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本，样本量为 $n$，
定义样本均值 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ 和已修偏样本方差 $S_n^{*2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{X})^2$，
则有 $\begin{cases} \overline{X} \perp S_n^{*2} \\ \overline{X} \sim \mathrm{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \\ S_n^{*2} \sim \sigma^2 \frac{\chi^2(n-1)}{n-1} \end{cases}$ 成立.

**Lemma** $2$**: (助教您好，请问这个引理考试时需要证明吗?)**
我们证明 $(\overline{X}, S_n^2)$ 是该正态分布族参数 $(\mu, \sigma^2)$ 的**充分完备统计量**:

- 首先我们利用因子化定理证明统计量 $(\overline{X}, S_n^2)$ 的**充分性**:
  记 $x = (x_1, \ldots, x_n)$，则我们有:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\{X = x\} &= \mathrm{P}\{X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\} \\
&= \prod_{i=1}^n \mathrm{P}\{N(\mu, \sigma^2) = x_i\} \\
&= \prod_{i=1}^n (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i - \mu)^2\right\} \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right\} \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \mu)^2\right]\right\} \\
&= (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}s^2\right\} \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x} - \mu)^2\right\}
\end{aligned}
$$

  其中 $\begin{cases} s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \\ \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i \end{cases}$
  考虑统计量 $T = (\overline{X}, S_n^2)$，
  记 $\begin{cases} g(T(x); \mu, \sigma^2) = g(\bar{x}, s^2; \mu, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\{-\frac{n-1}{2\sigma^2}s^2\} \exp\{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{x} - \mu)^2\} \\ h(x) \equiv 1 \end{cases}$
  根据**因子化定理**我们知道，$T = (\overline{X}, S_n^2)$ 是参数 $(\mu, \sigma^2)$的充分统计量.

- 下面我们证明统计量 $(\overline{X}, S_n^2)$ 的**完备性**:
  根据 **Lemma** $1$ 我们知道 $\begin{cases} \overline{X} \perp S_n^2 \\ \overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \\ S_n^2 \sim \sigma^2 \frac{\chi^2(n-1)}{n} \end{cases}$
  因此 $(\overline{X}, S_n^2)$ 的联合分布 $p_{(\overline{X}, S_n^2)}(\bar{x}, s^2; \mu, \sigma^2) = p_{\overline{X}}(\bar{x}; \mu, \sigma^2) \cdot p_{S_n^2}(s^2; \mu, \sigma^2)$
  任意给定 $(\overline{X}, S_n^2)$ 的函数 $\phi(\overline{X}, S_n^2)$，我们有:
  $$\begin{aligned} \mathrm{E}[\phi(\overline{X}, S_n^2)] &= \mathrm{E}[\mathrm{E}[\phi(\overline{X}, S_n^2)|S_n^2]] \\ &= \int_0^{\infty} \mathrm{E}[\phi(\overline{X}, S_n^2)|S_n^2 = s^2] \cdot p_{S_n^2}(s^2; \mu, \sigma^2)\mathrm{d}s^2 \\ &= \int_0^{\infty} \mathrm{E}[\phi(\overline{X}, s^2)] \cdot p_{S_n^2}(s^2; \mu, \sigma^2)\mathrm{d}s^2 \end{aligned}$$
  **假设**对于任意 $(\mu, \sigma^2)$ 我们都有 $\mathrm{E}[\phi(\overline{X}, S_n^2)] = 0$ 成立，
  则我们知道 $\mathrm{E}[\phi(\overline{X}, s^2)]$ 作为 $s^2$ 的函数，在 $s^2 \in (0, \infty)$ 上几乎处处为 $0$
  这个结论表明，对于任意给定 $s^2 > 0$，
  我们都有 $\mathrm{E}[\phi(\overline{X}, s^2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\bar{x}, s^2) p_{\overline{X}}(\bar{x}; \mu, \sigma^2)\mathrm{d}\bar{x} = 0 \ \ (\forall\, u \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0)$ 成立，
  这说明对于任意 $\begin{cases} \bar{x} \in \mathbb{R} \\ s^2 > 0 \end{cases}$ 我们都有 $\phi(\bar{x}, s^2) = 0$ 成立.
  上述推理表明统计量 $(\overline{X}, S_n^2)$ 是**完备的**.

综上所述，$(\overline{X}, S_n^2)$ 是该正态分布族参数 $(\mu, \sigma^2)$ 的**充分完备统计量**.

---

**(1)** 试证明 $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} S_n$ 是 $\sigma$ 的一致最小方差无偏估计量，
其中 $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$ 为未修偏的样本方差.

**Solution:**
我们知道 $(\overline{X}, S_n^2)$ 是该正态分布族参数 $(\mu, \sigma^2)$ 的**充分完备统计量**，
而 $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} S_n$ 是 $(\overline{X}, S_n^2)$ 的函数.
我们只要证明 $\hat{\sigma}$ 是 $\sigma$ 的无偏估计量，
即可根据 **Lehmann-Scheffé 定理**说明 $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{n}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} S_n$ 是 $\sigma$ 的一致最小方差无偏估计量.

- 下面我们证明 $\hat{\sigma}$ 是 $\sigma$ 的**无偏估计量**:
  我们有 $S_n^2 \sim \frac{\chi_{n-1}^2}{n}\sigma^2 = \frac{\mathrm{Gamma}(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2})}{n}\sigma^2$ 成立.
  因此 $S_n \sim \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\mathrm{Gamma}(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2})}$，我们有:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[S_n] &= \mathrm{E}\left[\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\mathrm{Gamma}\left(\frac{n-1}{2},\frac{1}{2}\right)}\right] \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\int_0^{\infty}\sqrt{t}\cdot \mathrm{P}\left\{\mathrm{Gamma}\left(\frac{n-1}{2},\frac{1}{2}\right)=t\right\}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\int_0^{\infty}\sqrt{t}\frac{(\frac{1}{2})^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}t^{\frac{n-1}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}t}\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{\frac{2}{n}}\frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\sigma\cdot\int_0^{\infty}t^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{1}{2}t}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{\frac{2}{n}}\frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\sigma\cdot\int_0^{\infty}u^{\frac{n}{2}-1}e^{-u}\mathrm{d}u \qquad (u:=\frac{1}{2}t) \\
&= \sqrt{\frac{2}{n}}\frac{1}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\sigma\cdot\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{n}}\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\sigma
\end{aligned}
$$

于是我们有:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}_{\sigma}[\hat{\sigma}] &= \sqrt{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\cdot\mathrm{E}[S_n] \\
&= \sqrt{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}\cdot\sqrt{\frac{2}{n}}\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\sigma \\
&= \sigma
\end{aligned}
$$

因此 $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}S_n$ 是 $\sigma$ 的**无偏估计量**.

根据我们之前的讨论 (**Lehmann-Scheffé 定理**),
进而可知 $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}S_n$ 是 $\sigma$ 的**一致最小方差无偏估计量**.

**(2)** 求 $3\mu+4\sigma$ 的一致最小方差无偏估计量.

- **Solution:**
  我们知道样本均值 $\hat{\mu}=\overline{X}$ 是充分完备统计量 $(\overline{X},S_n^2)$ 的函数,
  而 $\hat{\mu}=\overline{X}$ 又是总体均值 $\mu$ 的无偏估计量,
  因而根据 **Lehmann-Scheffé 定理**可知 $\hat{\mu}=\overline{X}$ 是 $\mu$ 的**一致最小方差无偏估计量**.

  根据 $(1)$ 的结论, $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}S_n$ 是 $\sigma$ 的**一致最小方差无偏估计量**.
  因此 $3\mu+4\sigma$ 的一致最小方差无偏估计量是 $3\hat{\mu}+4\hat{\sigma}$, 其展开形式为:

$$
3\hat{\mu}+4\hat{\sigma}=3\overline{X}+4\sqrt{\frac{n}{2}}\frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}S_n
$$

**(3)** 求 $\mu^2$ 的一致最小方差无偏估计量.

- **Solution:**
  根据 **Lehmann-Scheffé 定理**的指导,
  我们需要使用 $(\overline{X},S_n^2)$ 构造 $\mu^2$ 的无偏估计量.
  根据 **Lemma** $1$ 我们有 $\begin{cases}\overline{X}\perp S_n^2\\ \overline{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})\\ S_n^2\sim\sigma^2\frac{\chi^2(n-1)}{n}\end{cases}$

因此 $\begin{cases} \mathrm{E}[\overline{X}^2] = \mathrm{Var}[\overline{X}] + (\mathrm{E}[\overline{X}])^2 = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \\ \mathrm{E}[S_n^2] = \sigma^2 \cdot \frac{n-1}{n} \end{cases}$

于是我们构造 $\overline{X}^2 - \frac{S_n^2}{n-1}$ 作为 $\mu^2$ 的无偏估计量.

根据 **Lehmann-Scheffé 定理**可知 $\overline{X}^2 - \frac{S_n^2}{n-1}$ 是 $\mu^2$ 的一致最小方差无偏估计量.

## Problem 3 (习题 2.30)

设 $X = (X_1, \ldots, X_n)$ 是取自 Poisson 分布族 $\{\mathrm{Poisson}(\lambda) : \lambda > 0\}$ 的简单随机样本.

- **Lemma:**
  我们证明 $\sum_{i=1}^n X_i$ 是 Poisson 分布族 $\{\mathrm{Poisson}(\lambda) : \lambda > 0\}$ 的**充分完备统计量**.
  - 首先利用**因子化定理**证明 $\sum_{i=1}^n X_i$ 的**充分性**:
    记 $x = (x_1, \ldots, x_n)$，则我们有:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{X = x\} &= \mathrm{P}\{X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\} \\ &= \prod_{i=1}^n \mathrm{P}\{\mathrm{Poisson}(\lambda) = x_i\} \\ &= \prod_{i=1}^n e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \\ &= \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n\lambda} \cdot \frac{1}{x_1! \cdots x_n!} \end{aligned}$$

    考虑统计量 $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$
    记 $\begin{cases} g(T(x); \lambda) = \lambda^{T(x)} e^{-n\lambda} = \lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n\lambda} \\ h(x) = \frac{1}{x_1! \cdots x_n!} \end{cases}$
    则有 $\mathrm{P}\{X = x\} = g(T(x); \lambda) h(x)$
    根据因子化定理我们知道，$T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$ 是参数 $\lambda$ 的充分统计量.
  - 其次证明统计量 $\sum_{i=1}^n X_i$ 的**完备性**:
    根据 Poisson 分布的再生性我们知道 $T = \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathrm{Poisson}(n\lambda)$
    给定 $T = \sum_{i=1}^n X_i$ 的函数 $\phi(T)$
    **假设**对于任意 $\lambda > 0$ 都有 $\mathrm{E}[\phi(T)] = 0$ 成立，这个条件可展开为:

$$\mathrm{E}[\phi(T)] = \sum_{k=0}^{\infty} \phi(k) \cdot e^{-n\lambda} \frac{(n\lambda)^k}{k!} = 0 \;\; (\forall\, \lambda > 0)$$

    即有 $\sum_{k=0}^{\infty} \phi(k) \frac{(n\lambda)^k}{k!} = 0 \;\; (\forall\, \lambda > 0)$
    注意到 $\sum_{k=0}^{\infty} \phi(k) \frac{(n\lambda)^k}{k!}$ 是一个关于 $\lambda$ 的幂级数.
    而对于幂级数，如果对于其收敛半径内所有 $\lambda$ 都为 $0$，则幂级数的系数必须全为零.
    也就是说，对于任意 $k \in \mathbb{N}$ 都有 $\phi(k) = 0$ 成立.
    这表明统计量 $\sum_{i=1}^n X_i$ 是**完备的**.

  综上所述，$\sum_{i=1}^n X_i$ 是 Poisson 分布族 $\{\mathrm{Poisson}(\lambda) : \lambda > 0\}$ 的**充分完备统计量**.

---

**(1)** 试求 $\lambda$ 和 $\lambda^2$ 的一致最小方差无偏估计量.

- **Solution:**
  根据 $\mathrm{E}[\overline{X}] = \mathrm{E}[\xi] = \lambda$ 可知 $\overline{X}$ 是 $\lambda$ 的无偏估计量.
  根据 **Lehmann-Scheffé 定理**可知 $\overline{X}$ 是 $\lambda$ 的一致最小方差无偏估计量.

注意到:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\overline{X}^2] &= \mathrm{Var}[\overline{X}] + (\mathrm{E}[\overline{X}])^2 \\ &= \frac{1}{n}\mathrm{Var}[\xi] + (\mathrm{E}[\xi])^2 \\ &= \frac{1}{n}\lambda + \lambda^2\end{aligned}$$

因此 $\mathrm{E}[\overline{X}^2 - \frac{\overline{X}}{n}] = \lambda^2$

说明 $\overline{X}^2 - \frac{\overline{X}}{n}$ 是 $\lambda^2$ 的无偏估计量.

根据 **Lehmann-Scheffé 定理**可知 $\overline{X}^2 - \frac{\overline{X}}{n}$ 是 $\lambda^2$ 的一致最小方差无偏估计量.

**(2)** 证明 $\varphi(X_1) = \begin{cases}1 & \text{if } X_1 \text{ is even} \\ -1 & \text{if } X_1 \text{ is odd}\end{cases}$ 是 $e^{-2\lambda}$ 的无偏估计量.

- **Solution:**

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[\varphi(X_1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot \mathrm{P}\{\mathrm{Poisson}(\lambda) = 2k\} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)\cdot \mathrm{P}\{\mathrm{Poisson}(\lambda) = 2k+1\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} - \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= e^{-\lambda}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^m}{m!} \\ &= e^{-\lambda}\cdot e^{-\lambda} \\ &= e^{-2\lambda}\end{aligned}$$

命题得证.

**(3)** 对 $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 计算条件期望 $\mathrm{E}_\lambda[\varphi(X_1)|T = t]$，并由此得到 $e^{-2\lambda}$ 的一致最小方差无偏估计量.

- **Solution:**

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_\lambda\{X_1 = k|T = t\} &= \frac{\mathrm{P}_\lambda\{X_1 = k, T = t\}}{\mathrm{P}_\lambda\{T = t\}} \\ &= \frac{\mathrm{P}_\lambda\{X_1 = k\}\mathrm{P}_\lambda\{\sum_{i=2}^{n} X_i = t-k\}}{\mathrm{P}_\lambda\{T = t\}} \\ &= \frac{\mathrm{P}\{\mathrm{Poisson}(\lambda) = k\}\mathrm{P}\{\mathrm{Poisson}((n-1)\lambda) = t-k\}}{\mathrm{P}\{\mathrm{Poisson}(n\lambda) = t\}} \\ &= \frac{e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-(n-1)\lambda}\frac{[(n-1)\lambda]^{t-k}}{(t-k)!}}{e^{-n\lambda}\frac{(n\lambda)^t}{t!}} \\ &= \binom{t}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{t-k} \\ &= \mathrm{P}\left\{B\left(t, \frac{1}{n}\right) = k\right\}\end{aligned}$$

因此条件分布 $(X_1|T = t) \overset{\mathrm{d}}{=} B(t, \frac{1}{n})$ 是二项分布.

条件期望 (实际上与 $\lambda$ 无关，因此下标 $\lambda$ 省略):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\varphi(X_1)|T=t] &= \sum_{k \text{ even}} 1 \cdot \mathrm{P}\{X_1 = k|T=t\} + \sum_{k \text{ odd}} (-1) \cdot \mathrm{P}\{X_1 = k|T=t\} \\
&= \sum_{k \text{ even}} 1 \cdot \mathrm{P}\left\{B\left(t, \frac{1}{n}\right) = k\right\} + \sum_{k \text{ odd}} (-1) \cdot \mathrm{P}\left\{B\left(t, \frac{1}{n}\right) = k\right\} \\
&= \sum_{k \text{ even}} 1 \cdot \mathrm{P}\left\{B\left(t, \frac{1}{n}\right) = k\right\} + \sum_{k \text{ odd}} (-1) \cdot \mathrm{P}\left\{B\left(t, \frac{1}{n}\right) = k\right\} \\
&= \sum_{k \text{ even}} 1 \cdot \binom{t}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{t-k} + \sum_{k \text{ odd}} (-1) \cdot \binom{t}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{t-k} \\
&= \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k}\left(-\frac{1}{n}\right)^k\left(1-\frac{1}{n}\right)^{t-k} \\
&= \left(-\frac{1}{n} + 1 - \frac{1}{n}\right)^t \\
&= \left(1 - \frac{2}{n}\right)^t
\end{aligned}
$$

因此 $\mathrm{E}[\varphi(X_1)|T] = (1-\frac{2}{n})^T$
根据全期望公式可知 $\mathrm{E}[\varphi(X_1)] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[\varphi(X_1)|T]] = \mathrm{E}[(1-\frac{2}{n})^T]$
而根据 $(2)$ 的结论可知 $\mathrm{E}[\varphi(X_1)] = e^{-2\lambda}$
联立两式可知 $\mathrm{E}[(1-\frac{2}{n})^T] = e^{-2\lambda}$
说明 $(1-\frac{2}{n})^T$ 是 $e^{-2\lambda}$ 的无偏估计量.

根据 **Lemma** 可知 $T = \sum_{i=1}^n X_i$ 是 Poisson 分布族 $\{\text{Poisson}(\lambda) : \lambda > 0\}$ 的**充分完备统计量**,
因此 $(1-\frac{2}{n})^T$ 是 $e^{-2\lambda}$ 的**一致最小方差估计量**.

## Problem 4 (习题 2.33)

(零件寿命的抽样调查)
设 $X = (X_1, \ldots, X_n)$ 是取自指数分布族 $\{\exp(\lambda) : \lambda > 0\}$ 的简单随机样本.
给定 $\tau > 0$，试求零件总体可靠度 $\mathrm{P}_\lambda\{\xi \geq \tau\}$ 基于样本 $X$ 的一致最小方差无偏估计量.

**Lemma:**
我们证明 $\sum_{i=1}^n X_i$ 是指数分布族 $\{\exp(\lambda) : \lambda > 0\}$ 的**充分完备统计量**.

- 首先利用**因子化定理**证明 $\sum_{i=1}^n X_i$ 的**充分性**:
  记 $x = (x_1, \ldots, x_n)$，则我们有:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\{X = x\} &= \mathrm{P}\{X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\} \\
&= \prod_{i=1}^n \mathrm{P}\{\exp(\lambda) = x_i\} \\
&= \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} I(x_i > 0) \\
&= \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} I(\min_{i=1,\ldots,n} x_i > 0)
\end{aligned}
$$

  考虑统计量 $T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$
  记 $\begin{cases} g(T(x);\lambda) = \lambda^n e^{-\lambda T(x)} = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \\ h(x) = I(\min_{i=1,\ldots,n} x_i > 0) \end{cases}$
  则有 $\mathrm{P}\{X = x\} = g(T(x);\lambda)h(x)$
  根据因子化定理我们知道，$T(X) = \sum_{i=1}^n X_i$ 是参数 $\lambda$ 的充分统计量.

- 其次证明统计量 $\sum_{i=1}^n X_i$ 的**完备性**:
  根据 Gamma 分布的再生性我们知道 $T = \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathrm{Gamma}(n, \lambda)$
  给定 $T = \sum_{i=1}^n X_i$ 的函数 $\phi(T)$
  **假设**对于任意 $\lambda > 0$ 都有 $\mathrm{E}[\phi(T)] = 0$ 成立，这个条件可展开为:

  $$\mathrm{E}[\phi(T)] = \int_0^\infty \phi(t) \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} t^{n-1} e^{-\lambda t} \mathrm{d}t = 0 \ \ (\forall\ \lambda > 0)$$

  即 $\phi(T)T^{n-1}$ 的 Laplace 变换 $g(\lambda) = \int_0^\infty \phi(t) t^{n-1} e^{-\lambda t} \mathrm{d}t = 0 \quad (\forall\ \lambda > 0)$
  Laplace 变换的唯一性定理表明 $\phi(T)T^{n-1}$ 几乎处处为 $0$，即 $\phi(T)$ 几乎处处为 0.
  这表明统计量 $\sum_{i=1}^n X_i$ 是**完备的**.

综上所述，$T = \sum_{i=1}^n X_i$ 是指数分布族 $\{\exp(\lambda) : \lambda > 0\}$ 的**充分完备统计量**.

---

**Solution:**

- 我们计算 $\mathrm{P}_\lambda\{\xi \geq \tau\}$ 的解析表示:

  $$\begin{aligned} \mathrm{P}_\lambda\{\xi \geq \tau\} &= \int_\tau^\infty \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}x \\ &= \int_{\lambda\tau}^\infty e^{-u} \mathrm{d}u \quad (u = \lambda x) \\ &= -e^{-u}|_{\lambda\tau}^\infty \\ &= e^{-\lambda\tau} \end{aligned}$$

  **Lehmann-Scheffé 定理**表明，
  如果能找到一个关于**充分完备统计量** $T = \sum_{i=1}^n X_i$ 的函数，其期望为 $e^{-\lambda\tau}$，
  那么它就是 $\mathrm{P}_\lambda\{\xi \geq \tau\} = e^{-\lambda\tau}$ 的**一致最小方差无偏估计量**.

- 显然 $\varphi(X_1) = \mathbb{1}(X_1 \geq \tau) = \begin{cases} 1 & \text{if } X_1 \geq \tau \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ 是 $\mathrm{P}_\lambda\{\xi \geq \tau\} = e^{-\lambda\tau}$ 的无偏估计量.

  $\varphi(X_1)$ 对 $T = \sum_{i=1}^n X_i$ 取期望，有:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\varphi(X_1)|T=t] &= \int_0^t \varphi(x)\cdot\frac{\mathrm{P}\{X_1=x,T=t\}}{\mathrm{P}\{T=t\}}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^t \mathbb{1}(x\geq\tau)\cdot\frac{\mathrm{P}\{X_1=x\}\cdot\mathrm{P}\{T-X_1=t-x\}}{\mathrm{P}\{T=t\}}\mathrm{d}x \\
&= \int_\tau^t 1\cdot\frac{\mathrm{P}\{\exp(\lambda)=x\}\cdot\mathrm{P}\{\mathrm{Gamma}(n-1,\lambda)=t-x\}}{\mathrm{P}\{\mathrm{Gamma}(n,\lambda)=t\}}\mathrm{d}x \\
&= \int_\tau^t \frac{\lambda e^{-\lambda x}\cdot\frac{\lambda^{n-1}}{\Gamma(n-1)}(t-x)^{n-2}e^{-\lambda(t-x)}}{\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}t^{n-1}e^{-\lambda t}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(n-1)t^{n-1}}\int_\tau^t (t-x)^{n-2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{(n-1)t^{n-1}}\cdot\left(-\int_{t-\tau}^0 u^{n-2}\mathrm{d}u\right) \qquad (u:=t-x) \\
&= \frac{1}{t^{n-1}}\int_0^{t-\tau}\frac{1}{n-1}u^{n-2}\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{t^{n-1}}\cdot u^{n-1}\mathrm{d}u\Big|_0^{t-\tau} \\
&= \left(\frac{t-\tau}{t}\right)^{n-1} \\
&= \left(1-\frac{\tau}{t}\right)^{n-1}
\end{aligned}
$$

因此 $\mathrm{E}[\varphi(X_1)|T]=(1-\frac{\tau}{T})^{n-1}$

根据全期望公式可知 $\mathrm{E}[\varphi(X_1)]=\mathrm{E}[\mathrm{E}[\varphi(X_1)|T]]=\mathrm{E}[(1-\frac{\tau}{T})^{n-1}]$
而我们知道 $\mathrm{E}[\varphi(X_1)]=e^{-\lambda\tau}$
联立两式可知 $\mathrm{E}[(1-\frac{\tau}{T})^{n-1}]=e^{-\lambda\tau}$
说明 $(1-\frac{\tau}{T})^{n-1}$ 是 $e^{-\lambda\tau}$ 的无偏估计量.

---

> **助教评语:**
> 2.33 可以通过类似 2.30 的方法找到一个 $e^{-\lambda\tau}$ 的无偏估计量,
> 然后对充分完备统计量 $T$ 取条件期望得到 UVMUE,
> 你的解有些奇怪，照道理应该不会有 exp.
>
> **Faulty Solution:**
>
> - 我们计算 $\mathrm{P}_\lambda\{\xi\geq\tau\}$ 的解析表示:
>
> $$
> \begin{aligned}
> \mathrm{P}_\lambda\{\xi\geq\tau\} &= \int_\tau^\infty \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x \\
> &= \int_{\lambda\tau}^\infty e^{-u}\mathrm{d}u \quad (u=\lambda x) \\
> &= -e^{-u}|_{\lambda\tau}^\infty \\
> &= e^{-\lambda\tau}
> \end{aligned}
> $$
>
> **Lehmann-Scheffé 定理**表明,
> 如果能找到一个关于**充分完备统计量** $T=\sum_{i=1}^n X_i$ 的函数，其期望为 $e^{-\lambda\tau}$,
> 那么它就是 $\mathrm{P}_\lambda\{\xi\geq\tau\}=e^{-\lambda\tau}$ 的**一致最小方差无偏估计量**.
>
> - 我们计算 $T$ 的 Laplace 变换:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[e^{-zT}] &= \int_0^\infty e^{-zt}\cdot\frac{\lambda^n t^{n-1}e^{-\lambda t}}{\Gamma(n)}\mathrm{d}t\\
&= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)}\int_0^\infty e^{-(z+\lambda)t}t^{n-1}\mathrm{d}x\\
&= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)(\lambda+z)^n}\int_0^\infty e^{-(\lambda+z)t}((\lambda+z)t)^{n-1}d(\lambda+z)t\\
&= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)(\lambda+z)^n}\cdot\Gamma(n)\\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda+z}\right)^n
\end{aligned}
$$

解方程 $(\frac{\lambda}{\lambda+z})^n = e^{-\lambda\tau}$ 可得 $z=\frac{1-e^{-\frac{\lambda\tau}{n}}}{e^{-\frac{\lambda\tau}{n}}}\lambda = \lambda(e^{\frac{\lambda\tau}{n}}-1)$

因此 $\exp\{-\lambda(e^{\frac{\lambda\tau}{n}}-1)T\}$ 是 $e^{-\lambda\tau}$ 的**无偏估计量**.

综上所述，$\exp\{-\lambda(e^{\frac{\lambda\tau}{n}}-1)T\}$ 是 $\mathrm{P}_\lambda\{\xi\geq\tau\}=e^{-\lambda\tau}$ 的**一致最小方差无偏估计量**.

---

这个解答错误的原因很简单:
$\lambda$ 是未知参数，因此 $\exp\{-\lambda(e^{\frac{\lambda\tau}{n}}-1)T\}$ 并不是一个统计量!

## Problem 5 (补充题 5)

设 $X=(X_1,\dots,X_n)$ 是取自分布族 $\{p(x;\theta)=\frac{1+\theta x}{2}I_{[-1,1]}(x):|\theta|<1\}$ 的简单随机样本.
求 $\theta$ 的一个相合估计量.

**Lemma: (Khinchin 弱大数定律)**
设 $X_1,X_2,\dots$ 是一列独立同分布的随机变量，
记部分和为 $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$，记样本均值 $\overline{X}_n=\frac{S_n}{n}$，
则当且仅当对于任意 $i=1,2,\dots$ 都有 $\mathrm{E}[X_i]=\mu<\infty$ 时，
有 $\overline{X}_n=\frac{S_n}{n}\xrightarrow{\mathrm{p}}\mu=\mathrm{E}[\frac{S_n}{n}]$ 成立.

- **证明:**
  要证明 $\frac{S_n}{n}\xrightarrow{\mathrm{p}}\mu$，等价于证明 $\frac{S_n}{n}\xrightarrow{\mathrm{d}}\mu$ 成立，
  即等价于证明当 $n\to\infty$ 时，
  $\frac{S_n}{n}$ 的**特征函数** $\varphi_n(t)=\mathrm{E}[e^{\mathrm{i}t\frac{S_n}{n}}]$ **弱收敛**于单点分布 $\mu$ 的**特征函数** $\mathrm{E}[e^{\mathrm{i}t\mu}]=e^{\mathrm{i}t\mu}$
  即要说明对于任意 $t\in\mathbb{R}$ (特征函数在整个 $\mathbb{R}$ 上连续) 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t)=e^{i\mu t}$ 成立.

$$
\begin{aligned}
\varphi_n(t) &= \mathrm{E}[e^{\mathrm{i}t\frac{S_n}{n}}]\\
&= \mathrm{E}\left[\exp\left\{\mathrm{i}\frac{t}{n}\sum_{j=1}^n X_j\right\}\right] \quad (X_i\perp X_j \text{ for all } i\neq j=1,2,\dots)\\
&= \prod_{j=1}^n \mathrm{E}\left[\exp\left\{\mathrm{i}\frac{t}{n}X_j\right\}\right]
\end{aligned}
$$

  由于 $\{X_n\}$ 独立同分布，故它们拥有相同的特征函数，记为 $\varphi(t)$，于是有 $\varphi_n(t)=[\varphi(\frac{t}{n})]^n$
  下面计算 $\varphi(t)=\mathrm{E}[e^{\mathrm{i}tX}]$ 在 $t=0$ 处的**一阶 Taylor 展开式**:
  根据 $\begin{cases}\varphi(0)=\mathrm{E}[e^{\mathrm{i}tX}]|_{t=0}=\mathrm{E}[0]=0\\ \varphi'(0)=\mathrm{E}[e^{\mathrm{i}tX}iX]|_{t=0}=\mathrm{i}\mathrm{E}[X]=i\mu\end{cases}$ 可知 $\varphi(t)=1+\mathrm{i}\mu t+o(t)$
  因此对于任意 $t\in\mathbb{R}$ 都有:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t) &= \lim_{n\to\infty}\left[\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[1+\mathrm{i}\mu\frac{t}{n}+o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\mathrm{i}\mu t}{n}\right)^n \\
&= e^{\mathrm{i}\mu t}
\end{aligned}
$$

命题得证.

**Solution:**
计算总体均值:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\xi] &= \int_{-1}^{1} x\cdot\frac{1+\theta x}{2}\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{6}\theta x^3+\frac{1}{4}x^2\right)|_{-1}^{1} \\
&= \frac{\theta}{3}
\end{aligned}
$$

计算总体二阶矩:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\xi^2] &= \int_{-1}^{1} x^2\cdot\frac{1+\theta x}{2}\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{8}\theta x^4+\frac{1}{6}x^3\right)|_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

(总体二阶矩有限，因而符合 **Khinchin 弱大数定律**的条件)

根据 **Khinchin 弱大数定律**，$\overline{X}$ 是 $\mathrm{E}[\xi]=\frac{\theta}{3}$ 的**相合估计量** (即 $\overline{X}\xrightarrow{\mathrm{p}}\frac{\theta}{3}$)
因此 $\hat{\theta}=3\overline{X}$ 是 $\theta$ 的**相合估计量**.

---

> **助教评语:**
> 最后一题可以考虑用 Chebyshev 不等式证明，会更简单一点.
> 你这里用了更强的结论在证明更简单的东西.

- **(Chebyshev 不等式)**
  若 $X$ 是具有均值 $\mu$ 和 $k\geq 2$ 阶中心距 $\mathrm{E}[|X-\mu|^k]<\infty$ 的随机变量，
  则对于任意 $a>0$ 都有 $\mathrm{P}\{|X-\mu|\geq a\}\leq\frac{\mathrm{E}[|X-\mu|^k]}{a^k}$ 成立.

  **证明:**
  由于 $|X-\mu|^k$ 是非负随机变量，因此对其应用 Markov 不等式可得:

  $$
  \begin{aligned}
  \mathrm{P}\{|X-\mu|\geq a\} &= \mathrm{P}\{|X-\mu|^k\geq a^k\} \\
  &\leq \frac{\mathrm{E}[|X-\mu|^k]}{a^k} \qquad (\text{Markov Inequality})
  \end{aligned}
  $$

**使用 Chebyshev 不等式的证明:**
我们首先计算这个分布的期望和方差:

- 计算总体均值:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\xi] &= \int_{-1}^{1} x \cdot \frac{1+\theta x}{2} \mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{6}\theta x^3 + \frac{1}{4}x^2\right)|_{-1}^{1} \\
&= \frac{\theta}{3}
\end{aligned}
$$

- 计算总体二阶矩:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\xi^2] &= \int_{-1}^{1} x^2 \cdot \frac{1+\theta x}{2} \mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{8}\theta x^4 + \frac{1}{6}x^3\right)|_{-1}^{1} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

- 计算总体方差:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}[\xi^2] &= \mathrm{E}[\xi^2] - (\mathrm{E}[\xi])^2 \\
&= \frac{1}{3} - \left(\frac{\theta}{3}\right)^2 \\
&= \frac{3-\theta^2}{9}
\end{aligned}
$$

(总体方差有限，因而满足使用 **Chebyshev 不等式**的条件)

因此根据 **Chebyshev 不等式**，对于任意 $\begin{cases} \theta \in [-1,1] \\ \varepsilon > 0 \end{cases}$ 我们都有:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}\{|\overline{X} - \mathrm{E}[\overline{X}]| > \varepsilon\} &\leq \frac{\mathrm{E}[|\overline{X} - \mathrm{E}[\overline{X}]|^2]}{\varepsilon^2} \quad (\text{Chebyshev inequality}) \\
&= \frac{\mathrm{Var}[\overline{X}]}{\varepsilon^2} \\
&= \frac{\frac{1}{n}\mathrm{Var}[\xi]}{\varepsilon^2} \\
&= \frac{3-\theta^2}{9n\varepsilon^2} \to 0 \ (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

因此 $\mathrm{P}\{|\overline{X} - \mathrm{E}[\overline{X}]| > \varepsilon\} = \mathrm{P}\{|\overline{X} - \frac{\theta}{3}| > \varepsilon\} \to 0 \ (n \to \infty)$
表明 $\overline{X}$ 是 $\frac{\theta}{3}$ 的相合估计量,
因此 $\hat{\theta} = 3\overline{X}$ 是 $\theta$ 的相合估计量.

**The End**