高等线性代数 Homework 13

Due: Dec. 16, 2024
姓名: 雍崔扬
学号: 21307140051

Problem 1

给定正整数 m, n，设 $F(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ 上的仿射映射.
试证明由 $G(x) := F(x) - F(0_n)$ 定义的映射 $G(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ 的线性映射.

- **Definition:** 保持仿射性的映射 $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ 称为**仿射映射**.

  $$F(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha F(x) + (1-\alpha)F(y) \quad (\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R})$$

  事实上，每个仿射映射都可唯一地表示为 $F(x) = Ax + b$ (其中 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$).
  于是 $G(x) = F(x) - F(0_n) = (Ax+b) - b = Ax$ 显然是线性映射.
  因此本题的结论直观上是成立的.

Proof:
取 $y = 0_n$ 可得:

$$F(\alpha x) = \alpha F(x) + (1-\alpha)F(0_n) \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

于是我们有:

$$\begin{array}{rl} G(\alpha x) &= F(\alpha x) - F(0_n) \quad (\text{utilize } (1)) \\ &= \alpha F(x) + (1-\alpha)F(0_n) - F(0_n) \\ &= \alpha F(x) - \alpha F(0_n) \\ &= \alpha G(x) \end{array} \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R})$$

取 $\alpha = \frac{1}{2}$ 可得:

$$F\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) = \frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2}F(y) \quad (\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}) \tag{2}$$

结合 $(1)(2)$ 可知，对于任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 都有:

$$\begin{aligned} F(x+y) &= F\left(2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)\right) \quad (\text{utilize } (1)) \\ &= 2F\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) - F(0_n) \quad (\text{utilize } (2)) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2}F(y)\right) - F(0_n) \\ &= F(x) + F(y) - F(0_n) \\ &= (F(x) - F(0_n)) + (F(y) - F(0_n)) + F(0_n) \\ &= G(x) + G(y) + F(0_n) \end{aligned}$$

因此我们有:

$$\begin{array}{rl} G(x+y) &= F(x+y) - F(0_n) \\ &= G(x) + G(y) + F(0_n) - F(0_n) \\ &= G(x) + G(y) \end{array} \quad (\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n)$$

综上所述，$G(\cdot)$ 是 $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ 的线性映射.

Problem 2

(仿射映射的保凸性)
试证明凸集在仿射变换下的像和原像都是凸集.

Proof:

- 一方面，给定凸集 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 和仿射映射 $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$.
  考虑凸集 C 在 f 下的像 $f(C) = \{f(x) : x \in C\}$.

  对于任意

  $$\begin{cases} x_1, x_2 \in C \\ f(x_1), f(x_2) \in f(C) \\ \alpha \in [0,1] \end{cases}$$

  根据仿射映射的仿射性，我们有 $\alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) = f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2)$ 成立.
  由于 C 是凸集，故有 $\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \in C$ 成立，
  进而有 $f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \in f(C)$，
  于是有 $\alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \in f(C)$，
  说明 $f(C)$ 也是一个凸集.
- 另一方面，给定凸集 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 和仿射映射 $f: \mathbb{R}^k \mapsto \mathbb{R}^n$，
  考虑凸集 C 在 f 下的原像 $f^{-1}(C) = \{x : f(x) \in C\}$:
  (尽管逆映射 f^{-1} 不一定存在，但我们总能定义原像 $f^{-1}(C)$)

  对于任意

  $$\begin{cases} x_1, x_2 \in f^{-1}(C) \\ f(x_1), f(x_2) \in C \\ \alpha \in [0,1] \end{cases}$$

  根据仿射映射的仿射性，我们有 $f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) = \alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2)$ 成立.
  由于 C 是凸集，故有 $\alpha f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \in C$，
  进而有 $f(\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2) \in C$，
  于是有 $\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \in f^{-1}(C)$，
  说明 $f^{-1}(C)$ 也是一个凸集.

Problem 3

给定正整数 n，设 $\|\cdot\|$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的范数.
试证明对于给定的 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 和 $r \in (0, \infty)$，
开范数球 $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\}$ 和闭范数球 $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\}$ 都是凸集.

Proof:
记开范数球和闭范数球为:

$$\begin{aligned} B(x_0, r, \|\cdot\|) &:= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < r\} = \{x_0 + ru : \|u\| < 1\} \\ \bar{B}(x_0, r, \|\cdot\|) &:= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \leq r\} = \{x_0 + ru : \|u\| \leq 1\} \end{aligned}$$

- 首先考虑闭范数球:

$$
\begin{aligned}
\|\alpha x+(1-\alpha)y\| &\le \|\alpha x\|+\|(1-\alpha)y\| \\
&= \alpha\|x\|+(1-\alpha)\|y\| \\
&\le \alpha r+(1-\alpha)r \\
&= r
\end{aligned}
\quad (\forall\, x,y\in \bar{B}(x_0,r,\|\cdot\|),\alpha\in[0,1])
$$

因此 $\alpha x+(1-\alpha)y\in \bar{B}(x_0,r,\|\cdot\|)$.
这说明闭范数球 $\bar{B}(x_0,r,\|\cdot\|)$ 是凸集.

- 其次考虑开范数球:

$$
\begin{aligned}
\|\alpha x+(1-\alpha)y\| &\le \|\alpha x\|+\|(1-\alpha)y\| \\
&= \alpha\|x\|+(1-\alpha)\|y\| \\
&< \alpha r+(1-\alpha)r \\
&= r
\end{aligned}
\quad (\forall\, x,y\in B(x_0,r,\|\cdot\|),\alpha\in[0,1])
$$

因此 $\alpha x+(1-\alpha)y\in B(x_0,r,\|\cdot\|)$.
这说明开范数球 $B(x_0,r,\|\cdot\|)$ 是凸集.

Problem 4

给定正整数 n，设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 为正规矩阵.
试证明 A 的数值域 $w(A):=\{x^{\mathrm{H}}Ax:\|x\|_2=1\}$ 是 A 的特征值的凸包.

- **Definition:**
  给定集合 $S\subseteq\mathbb{R}^n$.
  我们称 S 中的点的**所有凸组合**构成的集合为 S 的**凸包** (convex hull)，记为 $\operatorname{conv}(S)$.
  易知 $\operatorname{conv}(S)$ 是包含 S 的最小的凸集，
  且 S 为凸集当且仅当 $\operatorname{conv}(S)=S$.

Proof:
注意到正规矩阵一定可以酉对角化.
因此 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 存在谱分解 $A=U\Lambda U^{\mathrm{H}}$，
其中 $U\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 为酉矩阵，而 $\Lambda=\operatorname{diag}\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\}$ 的对角元为 A 的特征值.
于是我们有:

$$
\begin{aligned}
w(A) &:= \left\{\frac{x^{\mathrm{H}}Ax}{x^{\mathrm{H}}x}:x\in\mathbb{C}^n\backslash\{0_n\}\right\} \\
&= \{x^{\mathrm{H}}Ax:\|x\|_2=1\} \\
&= \{x^{\mathrm{H}}U\Lambda U^{\mathrm{H}}x:\|x\|_2=1\} \quad (\text{denote } y:=U^{\mathrm{H}}x \text{ and note that } \|y\|_2=\|U^{\mathrm{H}}x\|_2=\|x\|_2) \\
&= \{y^{\mathrm{H}}\Lambda y:\|y\|_2=1\} \\
&= \left\{\sum_{i=1}^n y_i^2\lambda_i:\sum_{i=1}^n y_i^2=1\right\} \\
&= \operatorname{conv}(\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\})
\end{aligned}
$$

Problem 5

给定正整数 n，设 $w\neq 0_n\in\mathbb{R}^n,\alpha\in\mathbb{R}$.
试求 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 到超平面 $\{x\in\mathbb{R}^n:w^{\mathrm{T}}x+\alpha=0\}$ 的距离.

Solution:
设 $x_0\in\mathbb{R}^n$ 关于超平面 $\{x\in\mathbb{R}^n:w^{\mathrm{T}}x+\alpha=0\}$ 的正交分解为:

$$x_0 = p + \lambda w,$$

其中 p 是 x_0 在超平面 $\{x \in \mathbb{R}^n : w^{\mathrm{T}}x + \alpha = 0\}$ 上的正交投影.
于是我们有:

$$\begin{cases} w^{\mathrm{T}}p + \alpha = 0 \\ x_0 = p + \lambda w \end{cases}$$

解得:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{|w^{\mathrm{T}}x_0 + \alpha|}{\|w\|_2^2} \\ p = x_0 - \frac{|w^{\mathrm{T}}x_0 + \alpha|}{\|w\|_2^2} w \end{cases}$$

x_0 到超平面 $\{x \in \mathbb{R}^n : w^{\mathrm{T}}x + \alpha = 0\}$ 的距离即为 $x_0 - p$ 的长度:
(正交投影点是最近点，这个性质通过反证法容易证明)

$$\begin{aligned} d &:= \min_{w^{\mathrm{T}}x + \alpha = 0} \|x_0 - x\|_2 \\ &= \|x_0 - p\|_2 \\ &= \left\| \frac{|w^{\mathrm{T}}x_0 + \alpha|}{\|w\|_2^2} w \right\| \\ &= \frac{|w^{\mathrm{T}}x_0 + \alpha|}{\|w\|_2^2} \|w\| \\ &= \frac{|w^{\mathrm{T}}x_0 + \alpha|}{\|w\|_2} \end{aligned}$$

Alternative Solution:

- **① 首先考虑 $\alpha = 0$ 的特殊情况.**
  此时超平面 $\{x \in \mathbb{R}^n : w^{\mathrm{T}}x = 0\} = \mathrm{Range}(w)^{\perp}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间.
  因此根据正交分解定理可知 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 与它之间的距离就是 x_0 在 $\mathrm{Range}(w)$ 上的投影的长度:

$$\begin{aligned} d &:= \min_{w^{\mathrm{T}}x = 0} \|x - y\|_2 \\ &= \left\| \frac{ww^{\mathrm{T}}}{w^{\mathrm{T}}w} x_0 \right\|_2 \\ &= \frac{|w^{\mathrm{T}}x_0|}{\|w\|_2} \end{aligned}$$

- **② 其次考虑 $\alpha \in \mathbb{R}$ 的一般情况.**
  在超平面 $\{x \in \mathbb{R}^n : w^{\mathrm{T}}x + \alpha = 0\}$ 中任取一点 b (满足 $w^{\mathrm{T}}b + \alpha = 0$),
  则对于任意 $x \in \{x \in \mathbb{R}^n : w^{\mathrm{T}}x + \alpha = 0\}$ 我们都有:

$$\begin{aligned} w^{\mathrm{T}}(x - b) &= w^{\mathrm{T}}x - w^{\mathrm{T}}b \\ &= (w^{\mathrm{T}}x + \alpha) - (w^{\mathrm{T}}b + \alpha) \\ &= 0 - 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

  因此 $\{x - b : w^{\mathrm{T}}x + \alpha = 0\} = \{y \in \mathbb{R}^n : w^{\mathrm{T}}y = 0\} = \mathrm{Range}(w)^{\perp}$.
  利用 ① 的结论可知 $x_0 - b$ 与 $\{x - b : w^{\mathrm{T}}x + \alpha = 0\}$ 之间的距离为:

$$\begin{aligned} d &= \frac{|w^{\mathrm{T}}(x_0 - b)|}{\|w\|_2} \\ &= \frac{|w^{\mathrm{T}}x_0 - w^{\mathrm{T}}b|}{\|w\|_2} \quad (\text{note that } w^{\mathrm{T}}b + \alpha = 0) \\ &= \frac{|w^{\mathrm{T}}x_0 + \alpha|}{\|w\|_2} \end{aligned}$$

于是 x_0 与超平面 $\{x \in \mathbb{R}^n : w^{\mathrm{T}}x + \alpha = 0\}$ 之间的距离就是 $d = \frac{|w^{\mathrm{T}}x_0+\alpha|}{\|w\|_2}$.

综上所述，$x_0 \in \mathbb{R}^n$ 到超平面 $\{x \in \mathbb{R}^n : w^{\mathrm{T}}x + \alpha = 0\}$ 的距离为 $d = \frac{|w^{\mathrm{T}}x_0+\alpha|}{\|w\|_2}$.

Problem 6 (optional)

给定正整数 n.
记 $\mathbb{S}^n$ 是所有 n 阶 Hermite 阵构成的集合，而 $\mathbb{S}_{++}^n$ 是所有 n 阶 Hermite 正定阵构成的集合.
试证明 $f(X) := \log(\det(X))$ 是 $\mathbb{S}_{++}^n$ 上的凹函数.

Proof:

对数-行列式函数 (Log-determinant) $\begin{cases} f(X) = \log(\det(X)) \\ \mathrm{dom}(f) = \mathbb{S}_{++}^n \end{cases}$ 是**凹函数**.
我们证明其凹性的方法是将其转化为任意 "直线"上的单变量函数:
对于任意给定的

$$\begin{cases} X \in \mathbb{S}_{++}^n \\ V \in \mathbb{S}^n \end{cases}$$

考虑关于 t 的函数

$$\begin{cases} g(t) = f(X + tV) \\ \mathrm{dom}(g) = \{t \in \mathbb{R} : X + tV \in \mathrm{dom}(f) = \mathbb{S}_{++}^n\} \end{cases}$$

记 $X^{-\frac{1}{2}}VX^{-\frac{1}{2}}$ 的特征值为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$，
则对于任意 $t \in \mathrm{dom(g)}$ 都有:

$$\begin{aligned} g(t) &= f(X + tV) \\ &= \log(\det(X + tV)) \\ &= \log\{\det(X^{\frac{1}{2}}(I_n + tX^{-\frac{1}{2}}VX^{-\frac{1}{2}})X^{\frac{1}{2}})\} \\ &= \log\{\det((I_n + tX^{-\frac{1}{2}}VX^{-\frac{1}{2}})X)\} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \log(1 + t\lambda_i) + \log(\det(X)) \end{aligned}$$

故有:

$$\begin{cases} g'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{1+t\lambda_i} \\ g''(t) = -\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i^2}{(1+t\lambda_i)^2} \leq 0 \end{cases}$$

说明任意 "直线"上的单变量函数 $g(t)$ 都是凹函数，因此 $f(X)$ 为凹函数.

Problem 7 (optional)

给定 $\mathbb{R}^3$ 中的四面体 $ABCD$.
设 $P,Q,R,S\in\mathbb{R}^3$ 关于四面体 $ABCD$ 的重心坐标分别为:

$$(p_1:p_2:p_3:p_4),(q_1:q_2:q_3:q_4),(r_1:r_2:r_3:r_4),(s_1:s_2:s_3:s_4)$$

试证明 P,Q,R,S 共面的充要条件是:

$$\det\begin{bmatrix}p_1&q_1&r_1&s_1\\p_2&q_2&r_2&s_2\\p_3&q_3&r_3&s_3\\p_4&q_4&r_4&s_4\end{bmatrix}=0$$

- **Definition:** [(Barycentric coordinate system - Wikipedia)]
  若 $x_0,x_1,\dots,x_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中某个单纯形的顶点,
  则对于任意 $x\in\mathbb{R}^n$ 都存在唯一的一组常数 $\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n$ 使得:

  $$x=\alpha_0x_0+\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n$$

  我们称 $[\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n]$ 为 x 关于 $x_0,x_1,\dots,x_n$ 的**重心坐标** (barycentric coordinate).
  (与 $[\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n]$ 有着相同比例的坐标也可称为重心坐标, 即用比例关系代表一个点)

Solution: (可能是伪证)
注意到:

$$\begin{bmatrix}p_x&q_x&r_x&s_x\\p_y&q_y&r_y&s_y\\p_z&q_z&r_z&s_z\\1&1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_x&b_x&c_x&d_x\\a_y&b_y&c_y&d_y\\a_z&b_z&c_z&d_z\\1&1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_1&q_1&r_1&s_1\\p_2&q_2&r_2&s_2\\p_3&q_3&r_3&s_3\\p_4&q_4&r_4&s_4\end{bmatrix}$$

重心坐标的定义默认 A,B,C,D 仿射无关，因此 A,B,C,D 的齐次坐标构成的系数矩阵一定非奇异.
根据行列式的几何意义，P,Q,R,S 共面的充要条件是:

$$\det\begin{bmatrix}p_x&q_x&r_x&s_x\\p_y&q_y&r_y&s_y\\p_z&q_z&r_z&s_z\\1&1&1&1\end{bmatrix}=0$$

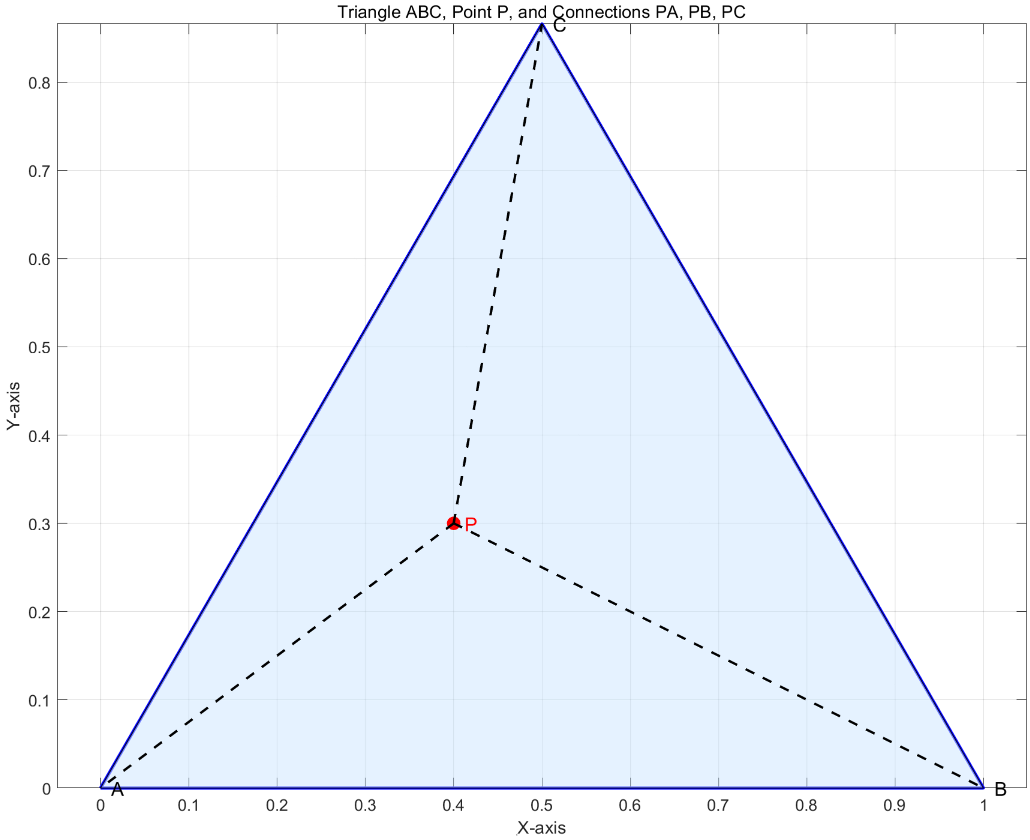
$$\Leftrightarrow$$

$$\det\begin{bmatrix}p_1&q_1&r_1&s_1\\p_2&q_2&r_2&s_2\\p_3&q_3&r_3&s_3\\p_4&q_4&r_4&s_4\end{bmatrix}=0$$

Problem 8 (optional)

给定 $\mathbb{R}^2$ 上的三角形 $\triangle ABC$.
设 BC,CA,AB 的中点分别为 D,E,F.
试求 $\triangle ABC$ 的内心关于 $\triangle DEF$ 的重心坐标.

- **Lemma:**
  以 $\mathbb{R}^2$ 为例，考虑三角形 $\triangle ABC$ 和 $\mathbb{R}^2$ 中的一点 P:



$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C$$
$$\text{where } \alpha + \beta + \gamma = 1$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

我们有如下关系:

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2}\det \begin{bmatrix} p_x & b_x & c_x \\ p_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{\frac{1}{2}\det \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}}$$

$$\beta = \frac{\frac{1}{2}\det \begin{bmatrix} a_x & p_x & c_x \\ a_y & p_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{\frac{1}{2}\det \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{S_{\triangle APC}}{S_{\triangle ABC}}$$

$$\gamma = \frac{\frac{1}{2}\det \begin{bmatrix} a_x & b_x & p_x \\ a_y & b_y & p_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}{\frac{1}{2}\det \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}} = \frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ABC}}$$

Solution:
记 $\triangle ABC$ 的内心为 I，它是 $\triangle ABC$ 的内切圆的圆心，因此到各边的距离相同.
我们使用 a, b, c 简记三角形的边 BC, AC, AB，
则我们有 $S_{\triangle IBC} : S_{\triangle IAC} : S_{\triangle IAB} = a : b : c$.
即内心为 I 的重心坐标为 $[a : b : c]$

$$\begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{a+b+c} \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

注意到 D, E, F 的重心坐标为:

$$\begin{bmatrix} d_x & e_x & f_x \\ d_y & e_y & f_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

因此我们有:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ 1 \end{bmatrix} &= \frac{1}{a+b+c} \begin{bmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a+b+c} \cdot 2 \begin{bmatrix} d_x & e_x & f_x \\ d_y & e_y & f_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\ &= \frac{2}{a+b+c} \begin{bmatrix} d_x & e_x & f_x \\ d_y & e_y & f_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{a+b+c} \begin{bmatrix} d_x & e_x & f_x \\ d_y & e_y & f_y \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a+b+c \\ a-b+c \\ a+b-c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

所以 $\triangle ABC$ 的内心 I 关于 $\triangle DEF$ 的重心坐标为 $[-a+b+c : a-b+c : a+b-c]$.

The End