高等线性代数 Homework 05

Due: Oct. 12, 2024
姓名: 雍崔扬
学号: 21307140051

Problem 1

给定正整数 n.
试证明: 若 $\mathbb{F}$ 是一个域，则 $\mathbb{F}^n$ 不能表示为它的两个真子空间的并.
当 $\text{char}(\mathbb{F})=0$ 时，$\mathbb{F}^n$ 不能表示为其有限个真子空间的并.

Proof:
(反证法) 假设存在 $\mathbb{F}^n$ 的两个真子空间 S_1,S_2 使得 $\mathbb{F}^n=S_1\cup S_2$.
由于 S_1,S_2 是真子空间，故存在 s_1,s_2 满足:

$$\begin{cases} s_1\in S_1,\ s_1\notin S_2 \\ s_2\notin S_1,\ s_2\in S_2. \end{cases}$$

根据线性空间对向量加法的封闭性，有 $s_1+s_2\in\mathbb{F}^n$，则 s_1+s_2 势必属于 S_1,S_2 中的一个.

- 若 $s_1+s_2\in S_1$，则 $s_2=(s_1+s_2)+(-s_1)\in S_1$
  (注意到 S_1 是子空间，故 $(-s_1)\in S_1$)，与假设矛盾.
- 若 $s_1+s_2\in S_2$，则 $s_1=(s_1+s_2)+(-s_2)\in S_2$
  (注意到 S_2 是子空间，故 $(-s_2)\in S_2$)，与假设矛盾.

因此 $\mathbb{F}^n$ 不能表示为它的两个真子空间的并.

当 $\text{char}(\mathbb{F})=0$ 时，我们使用数学归纳法证明 $\mathbb{F}^n$ 不能表示为其有限个真子空间的并.
对真子空间数量 m 进行数学归纳:
① 当 $m=1,2$ 时，命题显然成立.
② 现假设命题对正整数 m 成立
则对于 $\mathbb{F}^n$ 的任意给定的 m 个真子空间 $S_1,\ldots,S_m$ 都有 $\left(\bigcup_{i=1}^m S_i\right)\subset\mathbb{F}^n$ 成立.
根据归纳假设可知 $\left(\bigcup_{i=1}^m S_i\right)$ 不是 $\mathbb{F}^n$ 的真子空间，仅仅是真子集.

下面证明在归纳假设下，命题对正整数 $m+1$ 也成立.
(反证法) 假设存在 $\mathbb{F}^n$ 的一个真子空间 S_{m+1} 使得 $\left(\bigcup_{i=1}^m S_i\right)\cup S_{m+1}=\mathbb{F}^n$.
由于 $\left(\bigcup_{i=1}^m S_i\right)\subset\mathbb{F}^n$ 和 $S_{m+1}\subset\mathbb{F}^n$，故存在 s_1,s_2 满足:

$$\begin{cases} s_1\in S_{m+1},\ s_1\notin\left(\bigcup_{i=1}^m S_i\right) \\ s_2\notin S_{m+1},\ s_2\in\left(\bigcup_{i=1}^m S_i\right). \end{cases}$$

根据线性空间对向量加法的封闭性，对于任意 k 都有 $ks_1+s_2\in\mathbb{F}^n$ 成立.
因此对于任意给定的标量 $\alpha\in\mathbb{F}$，αs_1+s_2 势必属于 S_{m+1} 和 $\left(\bigcup_{i=1}^m S_i\right)$ 中的一个.
若 $\alpha s_1+s_2\in S_{m+1}$，则 $s_2=(\alpha s_1+s_2)+\alpha(-s_1)\in S_{m+1}$
(注意到 S_{m+1} 是子空间，故 $\alpha(-s_1)\in S_{m+1}$)，与假设矛盾.
因此我们有 $\alpha s_1+s_2\in\left(\bigcup_{i=1}^m S_i\right)$ $(\forall\,\alpha\in\mathbb{F})$ 成立.

设 $0_{\mathbb{F}},1_{\mathbb{F}}$ 分别是域 $\mathbb{F}$ 的加法单位元和数乘单位元.
考虑 $\alpha=k1_{\mathbb{F}}$ $(k\in\mathbb{Z})$ 的情况:
显然我们有无限个形如 $(k1_{\mathbb{F}})s_1+s_2$ $(\forall\,k\in\mathbb{Z})$ 的向量在 $\left(\bigcup_{i=1}^m S_i\right)$
(它是有限个真子空间 $S_1,\ldots,S_m$ 的并集).

根据**抽屉原理**可知，对于真子空间 S_1，
至少存在两个不同的整数 $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ (不妨设 $k_2 > k_1$) 使得:

$$\begin{cases} (k_1 1_{\mathbb{F}})s_1 + s_2 \in S_1 \\ (k_2 1_{\mathbb{F}})s_1 + s_2 \in S_1, \end{cases}$$

故我们有 $((k_2 - k_1)1_{\mathbb{F}}) \cdot s_1 \in S_1$.

注意到域 $\mathbb{F}$ 的特征 $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$，故 $(k_2 - k_1)1_{\mathbb{F}} \neq 0_{\mathbb{F}}$，从而有 $s_1 \in S_1$.
这与 $s_1 \notin \left(\bigcup_{i=1}^m S_i\right)$ 的假设相矛盾.
因此在归纳假设下，命题对正整数 $m+1$ 也成立.

根据数学归纳法可知，命题对任意正整数 $m \in \mathbb{Z}_+$ 都成立，
即当 $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$ 时，$\mathbb{F}^n$ 不能表示为其有限个真子空间的并.

Problem 2

(Cauchy 函数方程)
设 $f : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{R}$ 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ $(\forall\, x, y \in \mathbb{Q})$.
试证明 f 是线性映射.

- **Note:** 对于连续函数 $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ (由有理点完全决定)，
  我们也有线性可加性 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ $(\forall\, x, y \in \mathbb{R})$.
  可以证明 f 不可能为线性映射，它只对有理数数乘有线性性:

$$\begin{aligned} f(\alpha x) &= \alpha f(x)\ (\alpha \in \mathbb{Q})\ (\surd) \\ f(\alpha x) &= \alpha f(x)\ (\alpha \in \mathbb{R})\ (\times) \end{aligned}$$

Proof:
根据 $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$ 可知 $f(0) = 0$.
根据 $f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(0) = 0$ 可知，
对于任意 $x \in \mathbb{Q}$ 都有 $f(-x) = -f(x)$ 成立.

对于任意整数 $k \in \mathbb{Z}$ 和有理数 $x \in \mathbb{Q}$，我们有:

$$\begin{array}{c} f(kx) = \begin{cases} f(\underbrace{x + \cdots + x}_{k}) = kf(x) & \text{if } k > 0 \\ f(0) = 0 = 0f(x) & \text{if } k = 0 \\ f(\underbrace{(-x) + \cdots + (-x)}_{-k}) = (-k)f(-x) = kf(x) & \text{if } k < 0 \end{cases} \\ \hline \Rightarrow\ \ f(kx) = kf(x) \text{ for all } k \in \mathbb{Z} \text{ and } x \in \mathbb{Q} \end{array}$$

对于任意 $\alpha, x \in \mathbb{Q}$ (记 $\alpha = \frac{p}{q}$, 其中 $p, q \in \mathbb{Z}$ 而 $q \neq 0$) 我们都有:

$$
\begin{aligned}
f(\alpha x) &= f(\frac{p}{q}x) \\
&= f(p\frac{x}{q}) \\
&= p\cdot f(\frac{x}{q}) \\
&= \frac{p}{q}\cdot qf(\frac{x}{q}) \\
&= \frac{p}{q}f(q\frac{x}{q}) \\
&= \frac{p}{q}f(x) \\
&= \alpha f(x)
\end{aligned}
$$

再结合 $f(x+y)=f(x)+f(y)\ (\forall\ x,y\in\mathbb{Q})$ 便可知 f 是一个线性映射.

有点小错误的解法:
(其错误原因是 p,q 有可能是负整数，这让我们的论述有点逻辑不严谨)
对于任意 $\alpha,x\in\mathbb{Q}$ (记 $\alpha=\frac{p}{q}$, 其中 $p,q\in\mathbb{Z}$ 而 $q\neq 0$) 我们都有:

$$
\begin{aligned}
f(\alpha x) &= f(\frac{p}{q}x) \\
&= f(p\frac{x}{q}) \\
&= f(\underbrace{\frac{x}{q}+\cdots+\frac{x}{q}}_{p}) && (\text{use } f(x+y)=f(x)+f(y)\ (\forall\ x,y\in\mathbb{Q})) \\
&= p\cdot f(\frac{x}{q}) \\
&= \frac{p}{q}\cdot qf(\frac{x}{q}) && (\text{use } f(x+y)=f(x)+f(y)\ (\forall\ x,y\in\mathbb{Q})) \\
&= \frac{p}{q}\cdot f(\underbrace{\frac{x}{q}+\cdots+\frac{x}{q}}_{q}) \\
&= \frac{p}{q}f(x) \\
&= \alpha f(x)
\end{aligned}
$$

再结合 $f(x+y)=f(x)+f(y)\ (\forall\ x,y\in\mathbb{Q})$ 便可知 f 是一个线性映射.

Problem 3

设 V 是 $\mathbb{R}$ 上不超过 5 次的多项式全体构成的向量空间，D 是 V 上的求导算子.
试选取 V 的一组基，在这组基下写出 D 的表示矩阵，并求出其所有特征值.
利用上述结论求解常微分方程 $y''-2y'+y=x^5$ 的通解.

Solution:
显然 $B_{\text{polynomial}}=[1,x,x^2,x^3,x^4,x^5]^{\mathrm{T}}$ 是 V 的一组基.
根据

$$\begin{cases} D(1) = 0 \\ D(x) = 1 \\ D(x^2) = 2x \\ D(x^3) = 3x^2 \\ D(x^4) = 4x^3 \\ D(x^5) = 5x^4 \end{cases}$$

可知求导算子 D 在基 $[1, x, x^2, x^3, x^4, x^5]$ 下的表示矩阵为:

$$[D]_{B_{\text{polynomial}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 2 & & & \\ & & 0 & 3 & & \\ & & & 0 & 4 & \\ & & & & 0 & 5 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

显然求导算子 D 的所有特征值均为 0.

设 $y = a^{\mathrm{T}} B_{\text{polynomial}}$ (其中 $a \in \mathbb{R}^6$),
则求解常微分方程 $y'' - 2y' + y = x^5$ 的问题就等价于求解以下线性方程组:

$$([D]_{B_{\text{polynomial}}})^2 a - 2[D]_{B_{\text{polynomial}}} a + a = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & & & \\ & 1 & -4 & 6 & & \\ & & 1 & -6 & 12 & \\ & & & 1 & -8 & 20 \\ & & & & 1 & -10 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

使用前代法解得:

$$\begin{cases} a_5 = 1 \\ a_4 = 10a_5 = 10 \\ a_3 = 8a_4 - 20a_5 = 8 \times 10 - 20 \times 1 = 60 \\ a_2 = 6a_3 - 12a_4 = 6 \times 60 - 12 \times 10 = 240 \\ a_1 = 4a_2 - 6a_3 = 4 \times 240 - 6 \times 60 = 600 \\ a_0 = 2a_1 - 2a_2 = 2 \times 600 - 2 \times 240 = 720. \end{cases}$$

因此我们有如下特解:

$$\begin{aligned} y(x) &= a^{\mathrm{T}} B_{\text{polynomial}} \\ &= a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ &= x^5 + 10x^4 + 60x^3 + 240x^2 + 600x + 720. \end{aligned}$$

于是通解形式为:

$$y(x) = x^5 + 10x^4 + 60x^3 + 240x^2 + 600x + 720 + C,$$

其中 C 是一个常数.

Problem 4

设 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{C}$ 的子域，n_1, n_2, n_3, n_4 是正整数，$A \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}, B \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_3}, C \in \mathbb{F}^{n_3 \times n_4}$.
试证明 Frobenius 不等式:

$$\operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC) \leq \operatorname{rank}(ABC) + \operatorname{rank}(B),$$

当且仅当存在矩阵 $X \in \mathbb{F}^{n_2\times n_1}$ 和 $Y \in \mathbb{F}^{n_4\times n_3}$ 使得 $B = XAB + BCY$ 时取等.

- **Lemma** 1**: (秩-零度定理)**
  对于线性空间 V, W 上任意一个线性映射 $T: V \mapsto W$,
  我们都有 $\text{rank}(T) + \text{null}(T) = \dim(V)$ 成立,
  其中 $\text{null}(T) := \dim(\text{Ker}(T))$ 为线性映射 T 的零度.
- **Lemma** 2**:**
  对于任意 $A \in \mathbb{F}^{n_1\times n_2}, B \in \mathbb{F}^{n_2\times n_3}$ 都有
  $\text{rank}(AB) = \text{rank}(B) - \dim(\text{Ker}(A) \cap \text{Range}(B))$ 成立.

  Proof of lemma 2**:**
  考虑定义为 $T(x) := Ax\ (\forall\ x \in \text{Range}(B))$ 的映射 $T: \text{Range}(B) \mapsto \text{Range}(AB)$.
  对于任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ 和 $y_1, y_2 \in \text{Range}(B)$ (设 $y_1 = Bx_1, y_2 = Bx_2$) 我们都有:

$$\begin{aligned}T(\alpha y_1 + \beta y_2) &= T(B(\alpha x_1 + \beta x_2)) \\ &= AB(\alpha x_1 + \beta x_2) \\ &= \alpha ABx_1 + \beta ABx_2 \\ &= \alpha T(Bx_1) + \beta T(Bx_2) \\ &= \alpha T(y_1) + \beta T(y_2)\end{aligned}$$

  因此 T 是线性映射.

  显然我们有:

$$\begin{cases}\text{Ker}(T) = \text{Ker}(A) \cap \text{Range}(B) \\ \text{Range}(T) = \text{Range}(AB) \cap \text{Range}(A) = \text{Range}(AB)\end{cases}$$

  故根据**秩-零度定理**我们有:

$$\begin{aligned}\text{rank(AB)} &= \dim(\text{Range}(T)) \quad (\text{utilize rank-nullity theorem}) \\ &= \dim(\text{Range}(B)) - \dim(\text{Ker}(T)) \\ &= \text{rank}(B) - \dim(\text{Ker}(A) \cap \text{Range}(B))\end{aligned}$$

  引理得证.

Proof:
根据 $\text{Range}(BC) \subseteq \text{Range}(B)$ 我们有:

$$\text{Range}(BC) \cap \text{Ker}(A) \subseteq \text{Range}(B) \cap \text{Ker}(A)$$
$$\dim(\text{Range}(BC) \cap \text{Ker}(A)) \le \dim(\text{Range}(B) \cap \text{Ker}(A))$$

根据 **Lemma** 2 可知:

$$\begin{aligned}\text{rank}(ABC) &= \text{rank}(BC) - \dim(\text{Range}(BC) \cap \text{Ker}(A)) \quad (\text{utilize lemma 2}) \\ &\ge \text{rank}(BC) - \dim(\text{Range}(B) \cap \text{Ker}(A)) \\ &= \text{rank}(BC) - [\text{rank}(B) - \text{rank}(AB)] \qquad (\text{utilize lemma 2})\end{aligned}$$

即有 $\text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) \le \text{rank}(ABC) + \text{rank}(B)$ 成立.
显然上述不等式当且仅当 $\text{Range}(BC) = \text{Range}(B)$ 时取等，但这样似乎证不出取等条件.

另一种证明:

- **Lemma** 3**: (Schur 补不等式)**
  对于任意 $A \in \mathbb{F}^{n_1\times n_2}, B \in \mathbb{F}^{n_3\times n_2}, C \in \mathbb{F}^{n_3\times n_4}$ 我们都有:

$$\text{rank}(\begin{bmatrix} A & \\ B & C\end{bmatrix}) \ge \text{rank}(A) + \text{rank}(C)$$

当且仅当存在 $X \in \mathbb{F}^{n_3 \times n_1}$ 和 $Y \in \mathbb{F}^{n_4 \times n_2}$ 使得 $XA + CY = B$ 时取等.

Proof: (存疑: 有更简单的证明吗?)
设非奇异阵 $P_1 \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_1}, P_2 \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_2}, P_3 \in \mathbb{F}^{n_3 \times n_3}, P_4 \in \mathbb{F}^{n_4 \times n_4}$ 使得:

$$\begin{aligned} P_1 A P_2 &= \begin{bmatrix} I_{r_A} & 0_{r_A \times (n_2 - r_A)} \\ 0_{(n_1 - r_A) \times r_A} & 0_{(n_1 - r_A) \times (n_2 - r_A)} \end{bmatrix} \\ P_3 C P_4 &= \begin{bmatrix} I_{r_C} & 0_{r_C \times (n_4 - r_C)} \\ 0_{(n_3 - r_C) \times r_C} & 0_{(n_3 - r_C) \times (n_4 - r_C)} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中 $r_A = \operatorname{rank}(A), r_C = \operatorname{rank}(C)$.
我们将 $P_3 B P_2$ 划分为:

$$P_3 B P_2 = \begin{bmatrix} \widetilde{B}_{11} & \widetilde{B}_{12} \\ \widetilde{B}_{21} & \widetilde{B}_{22} \end{bmatrix} \text{ where } \begin{cases} \widetilde{B}_{11} \in \mathbb{F}^{r_A \times r_C} \\ \widetilde{B}_{12} \in \mathbb{F}^{r_A \times (n_2 - r_C)} \\ \widetilde{B}_{21} \in \mathbb{F}^{(n_3 - r_A) \times r_C} \\ \widetilde{B}_{22} \in \mathbb{F}^{(n_3 - r_A) \times (n_2 - r_C)} \end{cases}$$

则我们有:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P_1 & \\ & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 & \\ & P_4 \end{bmatrix} &\geq \begin{bmatrix} P_1 A P_2 & \\ P_3 B P_2 & P_3 C P_4 \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{cc|cc} I_{r_A} & 0_{r_A \times (n_2 - r_A)} & & \\ 0_{(n_1 - r_A) \times r_A} & 0_{(n_1 - r_A) \times (n_2 - r_A)} & & \\ \hline \widetilde{B}_{11} & \widetilde{B}_{12} & I_{r_C} & 0_{r_C \times (n_4 - r_C)} \\ \widetilde{B}_{21} & \widetilde{B}_{22} & 0_{(n_3 - r_C) \times r_C} & 0_{(n_3 - r_C) \times (n_4 - r_C)} \end{array}\right] \\ &= P^{(1)} \begin{bmatrix} I_{r_A} & & & \\ & I_{r_C} & & \\ & & \widetilde{B}_{22} & \\ & & & 0_{(n_1 - r_C) \times (n_4 - r_A)} \end{bmatrix} P^{(2)} \end{aligned}$$

其中 $P^{(1)} \in \mathbb{F}^{(n_1 + n_3) \times (n_1 + n_3)}$ 和 $P^{(2)} \in \mathbb{F}^{(n_2 + n_4) \times (n_2 + n_4)}$
因此我们有:

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} A & \\ B & C \end{bmatrix}\right) &= \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} I_{r_A} & & & \\ & I_{r_C} & & \\ & & \widetilde{B}_{22} & \\ & & & 0_{(n_1 - r_C) \times (n_4 - r_A)} \end{bmatrix}\right) \\ &= \operatorname{rank}(I_{r_A}) + \operatorname{rank}(I_{r_C}) + \operatorname{rank}(\widetilde{B}_{22}) \\ &= \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(C) + \operatorname{rank}(\widetilde{B}_{22}) \\ &\geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \end{aligned}$$

其取等条件为:

$$\operatorname{rank}(\widetilde{B}_{22}) = 0$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\widetilde{B}_{22} = 0_{(n_3-r_C)\times(n_2-r_A)}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\begin{aligned}
P_3BP_2 = \widetilde{B} &= \begin{bmatrix} \widetilde{B}_{11} & \widetilde{B}_{12} \\ \widetilde{B}_{21} & 0_{(n_3-r_C)\times(n_2-r_A)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0_{r_C\times r_A} & 0_{r_C\times(n_2-r_A)} \\ \widetilde{B}_{21} & 0_{(n_3-r_C)\times(n_2-r_A)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{r_A} & 0_{r_A\times(n_2-r_A)} \\ 0_{(n_1-r_A)\times r_A} & 0_{(n_1-r_A)\times(n_2-r_A)} \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} I_{r_C} & 0_{r_C\times(n_4-r_C)} \\ 0_{(n_3-r_C)\times r_C} & 0_{(n_3-r_C)\times(n_4-r_C)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{B}_{11} & \widetilde{B}_{12} \\ 0_{(n_3-r_C)\times r_A} & 0_{(n_3-r_C)\times(n_2-r_A)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0_{r_C\times r_A} & 0_{r_C\times(n_2-r_A)} \\ \widetilde{B}_{21} & 0_{(n_3-r_C)\times(n_2-r_A)} \end{bmatrix} P_1AP_2 + P_3CP_4 \begin{bmatrix} \widetilde{B}_{11} & \widetilde{B}_{12} \\ 0_{(n_3-r_C)\times r_A} & 0_{(n_3-r_C)\times(n_2-r_A)} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$B = XA + CY \text{ where } \begin{cases} X = P_3^{-1} \begin{bmatrix} 0_{r_C\times r_A} & 0_{r_C\times(n_2-r_A)} \\ \widetilde{B}_{21} & 0_{(n_3-r_C)\times(n_2-r_A)} \end{bmatrix} P_1 \\ Y = P_4 \begin{bmatrix} \widetilde{B}_{11} & \widetilde{B}_{12} \\ 0_{(n_3-r_C)\times r_A} & 0_{(n_3-r_C)\times(n_2-r_A)} \end{bmatrix} P_2^{-1} \end{cases}$$

因此取等条件为存在 $X \in \mathbb{F}^{n_3\times n_1}$ 和 $Y \in \mathbb{F}^{n_4\times n_2}$ 使得 $XA + CY = B$
引理得证.

(Problem 4 题干)
设 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{C}$ 的子域，n_1, n_2, n_3, n_4 是正整数，$A \in \mathbb{F}^{n_1\times n_2}, B \in \mathbb{F}^{n_2\times n_3}, C \in \mathbb{F}^{n_3\times n_4}$.
试证明 Frobenius 不等式:

$$\operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC) \le \operatorname{rank}(ABC) + \operatorname{rank}(B)$$

当且仅当存在矩阵 $X \in \mathbb{F}^{n_2\times n_1}$ 和 $Y \in \mathbb{F}^{n_4\times n_3}$ 使得 $B = XAB + BCY$ 时取等.

Proof:
首先注意到:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} I_{n_1} & -A \\ & I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ABC & \\ & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_4} & \\ C & I_{n_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & I_{n_4} \\ -I_{n_3} & \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_{n_1} & -A \\ & I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ABC & \\ BC & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & I_{n_4} \\ -I_{n_3} & \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0_{n_1\times n_4} & -AB \\ BC & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & I_{n_4} \\ -I_{n_3} & \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} AB & 0_{n_1\times n_4} \\ -B & BC \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

根据 **Lemma 3 (Schur 补不等式)** 可知:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rank}(ABC) + \operatorname{rank}(B) &= \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} ABC & \\ & B \end{bmatrix} \right) \\
&= \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} AB & 0_{n_1\times n_4} \\ -B & BC \end{bmatrix} \right) \quad (\text{utilize lemme 3}) \\
&\ge \operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC)
\end{aligned}$$

当且仅当存在矩阵 $X \in \mathbb{F}^{n_2\times n_1}$ 和 $Y \in \mathbb{F}^{n_4\times n_3}$ 使得 $B = XAB + BCY$ 时取等.

Problem 5

已知 $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ 是有限维向量空间 $\mathcal{V}$ 上的子空间，满足 $\dim(\mathcal{V}_1)+\dim(\mathcal{V}_2)=\dim(\mathcal{V})$.
试证明存在 $\mathcal{V}$ 上的线性变换 T 使得 $\text{Range}(T)=\mathcal{V}_1$ 且 $\text{Ker}(T)=\mathcal{V}_2$.

- **Lemma: (线性映射由其对基的作用所唯一确定)**
  考虑定义在域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$.
  设 $\{v_1,\dots,v_n\}$ 是线性空间 $\mathcal{V}$ 的一组基，而 $\{w_1,\dots,w_n\}$ 是线性空间 $\mathcal{W}$ 中的任意向量组，
  则存在唯一的线性映射 $T:\mathcal{V}\mapsto\mathcal{W}$ 使得 $T(v_i)=w_i\ (i=1,\dots,n)$.

  Proof:
  我们定义映射 $T:\mathcal{V}\mapsto\mathcal{W}$ 为:

  $$\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n\mapsto\alpha_1w_n+\cdots+\alpha_nw_n\ \ (\text{for all }\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F})$$

  这个映射是定义良好的，因为任意 $v\in\mathcal{V}$ 都可以表示为 $v_1,\dots,v_n$ 的线性组合.
  而且显然它满足 $Tv_i=w_i\ (i=1,\dots,n)$.
  下面我们证明它是线性映射.

  对于任意 $x=\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n\in\mathcal{V}$ 和 $y=\beta_1v_1+\cdots+\beta_nv_n\in\mathcal{V}$ 我们都有:

  $$\begin{aligned}T(x+y)&=T(\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n+\beta_1v_1+\cdots+\beta_nv_n)\\&=T((\alpha_1+\beta_1)v_1+\cdots+(\alpha_n+\beta_n)v_n)\\&=(\alpha_1+\beta_1)w_1+\cdots+(\alpha_n+\beta_n)w_n\\&=(\alpha_1w_1+\cdots+\alpha_nw_n)+(\beta_1w_1+\cdots+\beta_nw_n)\\&=T(\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n)+T(\beta_1v_1+\cdots+\beta_nv_n)\\&=T(x)+T(y)\end{aligned}$$

  对于任意 $x=\alpha_1v_1+\cdots\alpha_nv_n\in\mathcal{V}$ 和 $\gamma\in\mathbb{F}$ 我们都有:

  $$\begin{aligned}T(\gamma x)&=T(\gamma(\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n))\\&=T(\gamma\alpha_1v_1+\cdots+\gamma\alpha_nv_n)\\&=\gamma\alpha_1w_1+\cdots+\gamma\alpha_nw_n\\&=\gamma(\alpha_1w_1+\cdots+\alpha_nw_n)\\&=\gamma T(\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n)\\&=\gamma T(x)\end{aligned}$$

  因此映射 $T:\mathcal{V}\mapsto\mathcal{W}$ 是一个线性映射.

  为证明线性映射 $T:\mathcal{V}\mapsto\mathcal{W}$ 是唯一的，假设 $\widetilde{T}$ 是一个满足 $\widetilde{T}v_i=w_i\ (i=1,\dots,n)$ 的线性映射.
  由于任意 $v\in\mathcal{V}$ 都可以唯一表示为 $v=\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n$，故我们有:

  $$\begin{aligned}\widetilde{T}(v)&=\widetilde{T}(\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n)\\&=\alpha_1\widetilde{T}(v_1)+\cdots+\alpha_n\widetilde{T}(v_n)\quad(\text{note that }\widetilde{T}\text{ is a linear map})\\&=\alpha_1w_1+\cdots+\alpha_nw_n\\&=T(\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n)\\&=T(v)\end{aligned}$$

  因此 $\widetilde{T}\equiv T$，表明线性映射 $T:\mathcal{V}\mapsto\mathcal{W}$ 是唯一的.
  引理得证.

Proof:
记 $\begin{cases}n:=\dim(\mathcal{V})\\r:=\dim(\mathcal{V}_1)\end{cases}$ 并记 $0_{\mathcal{V}}$ 为向量空间 $\mathcal{V}$ 的加法单位元.

- ① 若 $r=0$，则 $\begin{cases}\mathcal{V}_1=\{0_{\mathcal{V}}\}\\\mathcal{V}_2=\mathcal{V}\end{cases}$，从而 $\mathcal{V}$ 上的零变换 $Z_{\mathcal{V}}$ 满足 $\begin{cases}\text{Range}(Z_{\mathcal{V}})=\{0_{\mathcal{V}}\}=\mathcal{V}_1\\\text{Ker}(Z_{\mathcal{V}})=\mathcal{V}=\mathcal{V}_2\end{cases}$

- ② 若 $r=n$，则 $\begin{cases}\mathcal{V}_1=\mathcal{V}\\ \mathcal{V}_2=\{0_{\mathcal{V}}\}\end{cases}$，从而 $\mathcal{V}$ 上的恒等变换 $I_{\mathcal{V}}$ 满足 $\begin{cases}\text{Range}(I_{\mathcal{V}})=\mathcal{V}=\mathcal{V}_1\\ \text{Ker}(I_{\mathcal{V}})=\{0_{\mathcal{V}}\}=\mathcal{V}_2\end{cases}$
- ③ 若 $n\geq 2$ 且 $1\leq r\leq n-1$，则可设 $\mathcal{V}_2$ 的一组基为 $\{e_1,\dots,e_{n-r}\}$ 而 $\mathcal{V}_1$ 的一组基为 $\{f_1,\dots,f_r\}$.
  由**基扩张定理**可知，存在 $e_{n-r+1},\dots,e_n\in\mathcal{V}$ 使得 $\{e_1,\dots,e_{n-r},e_{n-r+1},\dots,e_n\}$ 构成 $\mathcal{V}$ 的一组基.
  将 $f_1,\dots,f_r$ 扩充为 $\mathcal{V}$ 的一个 n 元向量组 $\{\underbrace{0_{\mathcal{V}},\dots,0_{\mathcal{V}}}_{n-r},f_1,\dots,f_r\}$.

根据 **Lemma** 可知，存在唯一的线性映射 $T:\mathcal{V}\mapsto\mathcal{V}_1$ 使得:

$$T(e_i):=\begin{cases}0_{\mathcal{V}}, & i=1,\dots,n-r\\ f_{i-r}, & i=n-r+1,\dots,n.\end{cases}$$

换言之，它将 $\mathcal{V}_2$ 映射到 $\{0_n\}$，而把 $\mathcal{V}_2^{\perp}$ 映射到 $\mathcal{V}_1$.
因此我们有:

$$\begin{aligned}\text{Range}(T)&=T(\text{span}\{e_1,\dots,e_{n-r},e_{n-r+1},\dots,e_n\})\\&=\text{span}\{T(e_1),\dots,T(e_{n-r}),T(e_{n-r+1}),\dots,T(e_n)\}\\&=\text{span}\{\underbrace{0_{\mathcal{V}},\dots,0_{\mathcal{V}}}_{n-r},f_1,\dots,f_r\}\\&=\text{span}\{f_1,\dots,f_r\}\\&=\mathcal{V}_1\\ \hline \text{Ker}(T)&=T^{-1}(\{0_{\mathcal{V}}\})\\&=T^{-1}(\text{span}\{T(e_1),\dots,T(e_{n-r)}\})\\&=\text{span}\{e_1,\dots,e_{n-r}\}\\&=\mathcal{V}_2\end{aligned}$$

命题得证.

Problem 6 (optional)

已知 n 为正整数，$A,B\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $AB=BA$.
试证明:

$$\text{rank}(A+B)+\text{rank}(AB)\leq\text{rank}(A)+\text{rank}(B)$$

当且仅当存在 $X\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 和 $Y\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $X(A+B)+(AB)Y=B$ 时取等.

Proof:
注意到 A,B 均为 n 阶方阵，因此我们有 $\text{Range}(A+B)\subseteq\text{Range}(A)+\text{Range}(B)$.
于是我们有:

$$\begin{aligned}\text{rank}(A+B)&=\dim(\text{Range}(A+B))\\&\leq\dim(\text{Range}(A)+\text{Range}(B))\\&=\dim(\text{Range}(A))+\dim(\text{Range}(B))-\dim(\text{Range}(A)\cap\text{Range}(B))\\&=\text{rank}(A)+\text{rank}(B)-\dim(\text{Range}(A)\cap\text{Range}(B))\end{aligned}\tag{6-1}$$

注意到:

$$\begin{cases}\text{Range}(AB)\subseteq\text{Range}(A)\\ \text{Range}(BA)\subseteq\text{Range}(B)\end{cases}$$

根据 $AB=BA$ 可知:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Range}(AB) &= \mathrm{Range}(AB)\cap\mathrm{Range}(AB) \quad (\text{use } AB=BA) \\
&= \mathrm{Range}(AB)\cap\mathrm{Range}(BA) \\
&\subseteq \mathrm{Range}(A)\cap\mathrm{Range}(B)
\end{aligned}$$

因此有 $\mathrm{rank}(AB)=\dim(\mathrm{Range}(AB))\leq\dim(\mathrm{Range}(A)\cap\mathrm{Range}(B))$.
代入 (6-1) 式即有:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rank}(A+B) &= \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)-\dim(\mathrm{Range}(A)\cap\mathrm{Range}(B)) \\
&\leq \mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B)-\mathrm{rank}(AB)
\end{aligned}$$

命题得证.

- **Lemma: (Schur 补不等式)**
  对于任意 $A\in\mathbb{F}^{n_1\times n_2}, B\in\mathbb{F}^{n_3\times n_2}, C\in\mathbb{F}^{n_3\times n_4}$ 我们都有:

  $$\mathrm{rank}(\begin{bmatrix} A & \\ B & C\end{bmatrix})\geq\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(C)$$

  当且仅当存在 $X\in\mathbb{F}^{n_3\times n_1}$ 和 $Y\in\mathbb{F}^{n_4\times n_2}$ 使得 $XA+CY=B$ 时取等.
  (证明参见 Problem 4)

现在给出证明:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ & I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \\ & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & -B \\ I_n & A\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B \\ & B\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & -B \\ I_n & A\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A+B & -AB+AB \\ B & BA\end{bmatrix} \quad (\text{note that } AB=BA) \\
&= \begin{bmatrix} A+B & \\ B & AB\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{rank}(A)+\mathrm{rank}(B) &= \mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} A & \\ & B\end{bmatrix}\right) \\
&= \mathrm{rank}\left(\begin{bmatrix} A+B & \\ B & AB\end{bmatrix}\right) \\
&\geq \mathrm{rank}(A+B)+\mathrm{rank}(AB)
\end{aligned}$$

当且仅当存在 $X\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 和 $Y\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $X(A+B)+(AB)Y=B$ 时取等.

Problem 7 (optional)

已知 n,m,k 为正整数，V 是 $\mathbb{R}$ 上的 n 维向量空间.
现有 V 中 m 组向量，每组中均含有 k 个线性无关的向量.
试证明在 V 中必存在 $n-k$ 个向量，使得它们与上面任意一组向量合在一起都能构成 V 的一组基.

- 这是符合直觉的，任意给定 k 个线性无关的向量，再随机生成 $n-k$ 个向量构成一个 n 阶方阵.
  通常来说这个 n 阶方阵是有 (很大) 可能是非奇异的.
- 考虑题干中的 m 组向量，每组中均含有 k 个线性无关的向量.
  即使它们分别张成不同真子空间，它们的并集也无法覆盖全空间 V.
  因此 $\mathbb{R}$ 是特征为 0 的域，V 作为 $\mathbb{R}$ 上的向量空间不能表示为有限个真子空间的并，
  这是 Problem 1 的结论.

Proof:
设这 m 组向量张成的 k 维子空间为 $S_1,\dots,S_m$.
由于 V 作为 $\mathbb{R}$ 上的向量空间不能表示为有限个真子空间的并，故我们有:

$$V \backslash (\bigcup_{i=1}^{m} S_i) \neq \emptyset$$

因此存在 $x_1 \in V \backslash (\bigcup_{i=1}^{m} S_i)$.
它使得 $S_1 \oplus \text{span}\{x_1\}, \dots, S_m \oplus \text{span}\{x_1\}$ 成为 $k+1$ 维子空间.

依此类推可知存在 $n-k$ 个线性无关的向量 $x_1, \dots, x_{n-k} \in V \backslash (\bigcup_{i=1}^{m} S_i)$ 使得:

$$\begin{gathered} S_1 \oplus \text{span}\{x_1, \dots, x_{n-k}\} = V \\ \vdots \\ S_m \oplus \text{span}\{x_1, \dots, x_{n-k}\} = V \end{gathered}$$

即它们与给定的 m 组向量中的任意一组合在一起都能构成 V 的一组基.
命题得证.

Problem 8 (optional)

设正整数 $n > 1$，试证明不存在 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\text{tr}\,(A) = y^{\text{T}} A x$ 对一切 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 恒成立.

Proof:
记 E_{ij} 为 (i, j) 位置上为 1，其余位置为 0 的 n 阶实方阵.
(反证法) 假设存在 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\text{tr}\,(A) = y^{\text{T}} A x$ 对一切 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 恒成立，则我们有:

$$y_i x_j = y^{\text{T}} E_{ij} x = \text{tr}\,(E_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

显然上述结论是自相矛盾的:
根据 $y_i x_i = 1\ (\forall\, i = 1, \dots, n)$ 可知 $x_i, y_i \neq 0\ (\forall\, i = 1, \dots, n)$,
这与 $y_i x_j = 0\ (\forall\, i, j = 1, \dots, n \text{ such that } i \neq j)$ 相矛盾.

因此不存在 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\text{tr}\,(A) = y^{\text{T}} A x$ 对一切 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 恒成立.
命题得证.

- **一点观察:**
  显然 $E_{ij}\ (i, j = 1, \dots, n)$ 是 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 的一组基.
  由任意给定的 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 定义的 $\mathbb{R}^{n \times n} \mapsto \mathbb{R}$ 的线性映射 $A \mapsto y^{\text{T}} A x$ (如果存在的话),
  必然由它对基 $E_{ij}\ (i, j = 1, \dots, n)$ 的作用唯一确定.
  我们便是通过它对基 $E_{ij}\ (i, j = 1, \dots, n)$ 的作用导出的矛盾.

Problem 9

若 $\mathcal{V}$ 是有限维线性空间，$L : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}$ 是 $\mathcal{V}$ 上的线性变换.
试证明 L 是单射等价于 L 是满射.

- **Lemma (秩-零度定理)**
  对于线性空间 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ 上任意一个线性映射 $T : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{W}$ (记其表示矩阵为 A)
  我们都有 $\text{rank}(A) + \text{null}(A) = \text{rank}(T) + \text{null}(T) = \dim(\mathcal{V})$ 成立.
  其中 $\text{null}(T) := \dim(\text{Ker}(T))$ 为线性映射 T 的零度.

Solution:
L 是单射，即 $\text{Ker}(L) = \{0_{\mathcal{V}}\}$,
等价于 $\text{null}(L) = \dim(\text{Ker}(L)) = 0$.
根据 Lemma 可知等价于 $\text{rank}(L) = \dim(\mathcal{V})$,

等价于 $\mathrm{Range}(L)=\mathcal{V}$ 即 L 是满射.

Problem 10

给定正整数 m,n，$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$B\in\mathbb{C}^{n\times m}$.
试证明 Sylvester 恒等式 $\det(I_m+AB)=\det(I_n+BA)$.

Solution:
注意到:

$$\begin{bmatrix} I_n & -B \\ & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n+BA & 0_{n\times m} \\ A & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & B \\ & I_m \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times m} \\ A & I_m+AB \end{bmatrix}.$$

又注意到:

$$\left(\begin{bmatrix} I_n & B \\ & I_m \end{bmatrix}\right)^{-1}=\begin{bmatrix} I_n & -B \\ & I_m \end{bmatrix}$$

因此我们有:

$$\begin{aligned}
\det(I_m+AB)&=\det\left(\begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times m} \\ A & I_m+AB \end{bmatrix}\right)\\
&=\det\left(\begin{bmatrix} I_n & -B \\ & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n+BA & 0_{n\times m} \\ A & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & B \\ & I_m \end{bmatrix}\right)\\
&=\det\left(\begin{bmatrix} I_n & -B \\ & I_m \end{bmatrix}\right)\det\left(\begin{bmatrix} I_n+BA & 0_{n\times m} \\ A & I_m \end{bmatrix}\right)\det\left(\begin{bmatrix} I_n & B \\ & I_m \end{bmatrix}\right)\\
&=\left(\det\left(\begin{bmatrix} I_n & B \\ & I_m \end{bmatrix}\right)\right)^{-1}\det\left(\begin{bmatrix} I_n+BA & 0_{n\times m} \\ A & I_m \end{bmatrix}\right)\det\left(\begin{bmatrix} I_n & B \\ & I_m \end{bmatrix}\right)\\
&=\det\left(\begin{bmatrix} I_n+BA & 0_{n\times m} \\ A & I_m \end{bmatrix}\right)\\
&=\det(I_n+BA).
\end{aligned}$$

Problem 11 (optional)

给定正整数 m,n，设 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 上的矩阵序列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ (逐元素) 收敛.
试证明:

$$\mathrm{rank}\left(\lim_{k\to\infty}A_k\right)\le\liminf_{k\to\infty}\ \mathrm{rank}(A_k).$$

Solution:
由于矩阵序列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ (逐元素) 收敛，故极限 $\lim_{k\to\infty}A_k$ 存在，记 $A:=\lim_{k\to\infty}A_k$.
记 $r:=\mathrm{rank}(A)$.
根据秩的定义可知，A 的某 r 行 r 列向量线性无关，
即 A 存在某个 $r\times r$ 的子阵 $A[\mathcal{I},\mathcal{J}]$ 满足 $\det(A[\mathcal{I},\mathcal{J}])\neq 0$，
其中 $\mathcal{I},\mathcal{J}$ 分别为 r 行与 r 列的索引集合，满足:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}\subseteq\{1,\dots,m\}, \quad |\mathcal{I}|=r\\
&\mathcal{J}\subseteq\{1,\dots,n\}, \quad |\mathcal{J}|=r
\end{aligned}$$

根据行列式的定义可知，行列式是关于矩阵元素的连续函数.
因此对于任意 $\varepsilon\in(0,|\det(A[\mathcal{I},\mathcal{J}])|)$，都存在正整数 K 使得:

$$|\det(A_k[\mathcal{I},\mathcal{J}])-\det(A[\mathcal{I},\mathcal{J}])|<\varepsilon \quad (\forall\, k\geq K),$$

进而有:

$$\begin{aligned}|\det(A_k[\mathcal{I},\mathcal{J}])| &= |\det(A[\mathcal{I},\mathcal{J}])+\det(A_k[\mathcal{I},\mathcal{J}])-\det(A[\mathcal{I},\mathcal{J}])| \\ &\geq |\det(A[\mathcal{I},\mathcal{J}])|-|\det(A_k[\mathcal{I},\mathcal{J}])-\det(A[\mathcal{I},\mathcal{J}])| \\ &> |\det(A[\mathcal{I},\mathcal{J}])|-\varepsilon \\ &> 0,\end{aligned} \qquad (\forall\, k\geq K)$$

因而有 $\det(A_k[\mathcal{I},\mathcal{J}])\neq 0$ $(\forall\, k\geq K)$.
这说明 $\operatorname{rank}(A_k)\geq r$ $(\forall\, k\geq K)$.
于是我们有:

$$\begin{aligned}\liminf_{k\to\infty}\ \operatorname{rank}(A_k) &\geq r \\ &= \operatorname{rank}(A) \\ &= \operatorname{rank}\left(\lim_{k\to\infty} A_k\right).\end{aligned}$$

The End