

高等线性代数 Homework 04

Due: Sept. 30, 2024

姓名: 雍崔扬

学号: 21307140051

Problem 1

给定正整数 m, n 和向量 $u \in \mathbb{C}^m, v \in \mathbb{C}^n$.

试证明 $\|uv^H\|_F = \|vu^H\|_F = \|u\|_2\|v\|_2$.

Proof:

$$\begin{aligned}\|uv^H\|_F &= \sqrt{\text{tr}\{(uv^H)^H(uv^H)\}} \\ &= \sqrt{\text{tr}\{vu^Huv^H\}} \\ &= \sqrt{\text{tr}\{vu^H(vu^H)^H\}} \\ &= \sqrt{\text{tr}\{(vu^H)^Hvu^H\}} \\ &= \|vu^H\|_F \\ \hline\|uv^H\|_F &= \sqrt{\text{tr}\{(uv^H)^H(uv^H)\}} \\ &= \sqrt{\text{tr}\{vu^Huv^H\}} \\ &= \sqrt{\text{tr}\{u^Huv^Hv\}} \\ &= \sqrt{u^Huv^Hv} \\ &= \|u\|_2\|v\|_2\end{aligned}$$

Problem 2

给定正整数 n , 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是非奇异矩阵, $E \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 满足 $\|A^{-1}E\|_p < 1$.

试证明 $A + E$ 非奇异, 且当 $1 \leq p \leq \infty$ 时有:

$$\|(A + E)^{-1} - A^{-1}\|_p \leq \frac{\|A^{-1}\|_p^2 \|E\|_p}{1 - \|A^{-1}E\|_p}$$

Proof:

首先需要说明的是, 对于任意 $1 \leq p \leq \infty$, $\|\cdot\|_p$ 作为 l_p 范数的诱导范数, 一定是相容范数.

因此 $\|A^{-1}E\|_p < 1$ 确保了 $A + E$ 是非奇异的.

这是因为它保证了 $\rho(A^{-1}E) \leq \|A^{-1}E\|_p < 1$ (根据谱半径定理), 因而 $I - A^{-1}E$ 不可能有零特征值,

从而确保了 $A + E = A(I - A^{-1}E)$ 非奇异.

注意到 $A^{-1} - (A + E)^{-1} = A^{-1}[(A + E) - A](A + E)^{-1} = A^{-1}E(A + E)^{-1}$, 因此我们有:

$$\|A^{-1} - (A + E)^{-1}\|_p = \|A^{-1}E(A + E)^{-1}\|_p \leq \|A^{-1}\|_p \|E\|_p \|(A + E)^{-1}\|_p \quad (2.1)$$

又注意到 $(A + E)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}E(A + E)^{-1}$, 因此我们有:

$$\begin{aligned}\|(A + E)^{-1}\|_p &= \|A^{-1} - A^{-1}E(A + E)^{-1}\|_p \leq \|A^{-1}\|_p + \|A^{-1}E\|_p \|(A + E)^{-1}\|_p \\ &\quad \Updownarrow \\ \|(A + E)^{-1}\|_p &\leq \frac{\|A^{-1}\|_p}{1 - \|A^{-1}E\|_p}\end{aligned} \quad (2.2)$$

将 (2.2) 代入 (2.1) 中便得到:

$$\begin{aligned}
\|A^{-1} - (A + E)^{-1}\|_p &\leq \|A^{-1}\|_p \|E\|_p \|(A + E)^{-1}\|_p \\
&\leq \|A^{-1}\|_p \|E\|_p \frac{\|A^{-1}\|_p}{1 - \|A^{-1}E\|_p} \\
&= \frac{\|A^{-1}\|_p^2 \|E\|_p}{1 - \|A^{-1}E\|_p}
\end{aligned}$$

Problem 3

(不存在介于实数域和复数域之间的域)

若 \mathbb{F} 是 \mathbb{C} 的子域, 且 \mathbb{R} 是 \mathbb{F} 的子域, 试证明: $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ or \mathbb{C} .

Proof:

默认 \mathbb{F} 上的加法和乘法分别是复数加法和复数乘法.

- **Case 1:** 若任意 $z \in \mathbb{F}$ 都满足虚部 $\text{Im}(z) = 0$, 则显然 $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

- **Case 2:** 若存在 $z_0 \in \mathbb{F}$ 满足虚部 $\text{Im}(z_0) \neq 0$.

则根据

$$\begin{cases} \text{Re}(z_0) \in \mathbb{R} \subset \mathbb{F} \\ \text{Im}(z_0) \neq 0 \in \mathbb{R} \subset \mathbb{F} \end{cases}$$

可知虚数单位 $i = (z_0 - \text{Re}(z_0))/\text{Im}(z_0) = (z_0 - \text{Re}(z_0)) \times [\text{Im}(z_0)]^{-1} \in \mathbb{F}$.

根据域对加法的封闭性可知, 对于任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, 我们都有 $\alpha + \beta i \in \mathbb{F}$ 成立, 表明 $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{F}$.

又根据 " \mathbb{F} 是 \mathbb{C} 的子域" 可知 $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{C}$, 因此我们有 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 成立.

综上所述, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ or \mathbb{C} .

Problem 4

假定四则运算均为实数域上的运算, 求出包含 $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ 的最小的域.

即求域 \mathbb{F}_0 使得:

- ① $\alpha \in \mathbb{F}_0$
- ② 对于任意满足 $\alpha \in \mathbb{F}$ 的域 \mathbb{F} 都有 $\mathbb{F}_0 \subset \mathbb{F}$

Solution:

首先我们证明有理数域 \mathbb{Q} 加上 $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ 的扩张

$$\mathbb{F}_0 := \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \{q_1 + q_2\sqrt{2} + q_3\sqrt{3} + q_4\sqrt{6} : q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{Q}\}$$

是一个包含 $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ 的数域.

对于任意

$$\begin{cases} a = a_1 + a_2\sqrt{2} + a_3\sqrt{3} + a_4\sqrt{6} \\ b = b_1 + b_2\sqrt{2} + b_3\sqrt{3} + b_4\sqrt{6} \\ c = c_1 + c_2\sqrt{2} + c_3\sqrt{3} + c_4\sqrt{6} \end{cases} \in \mathbb{F}_0$$

(其中 $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{Q}$)

我们都有:

- **封闭:**

$$\begin{aligned}
a + b &= (a_1 + a_2\sqrt{2} + a_3\sqrt{3} + a_4\sqrt{6}) + (b_1 + b_2\sqrt{2} + b_3\sqrt{3} + b_4\sqrt{6}) \\
&= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)\sqrt{2} + (a_3 + b_3)\sqrt{3} + (a_4 + b_4)\sqrt{6} \\
&\in \mathbb{F}_0 \\
a \times b &= (a_1 + a_2\sqrt{2} + a_3\sqrt{3} + a_4\sqrt{6}) \times (b_1 + b_2\sqrt{2} + b_3\sqrt{3} + b_4\sqrt{6}) \\
&= (a_1b_1 + 2a_2b_2 + 3a_3b_3 + 6a_4b_4) + (a_2b_1 + a_1b_2 + 3a_3b_4 + 3a_4b_3)\sqrt{2} \\
&\quad + (a_3b_1 + a_1b_3 + 2a_2b_4 + 2a_4b_2)\sqrt{3} + (a_4b_1 + a_1b_4 + a_2b_3 + a_3b_2)\sqrt{6} \\
&\in \mathbb{F}_0
\end{aligned}$$

- **可交换:** $\begin{cases} b + a = a + b \\ b \times a = a \times b \end{cases}$ (显然成立)

- **可结合:** $\begin{cases} (a+b)+c=a+(b+c) \\ (a \times b) \times c = a \times (b \times c) \end{cases}$ (显然成立)
- **可分配:** $\begin{cases} (a+b) \times c = (a \times c) + (b \times c) \\ c \times (a+b) = (c \times a) + (c \times b) \end{cases}$ (显然成立)
- **单位元 (不动点):** $\exists 0, 1 \in \mathbb{F}_0$ such that $\begin{cases} 0 \neq 1 \\ a+0=a \\ a \times 1=a \end{cases}$

• **逆元:**

对于 $a \in \mathbb{F}_0$, 我们可取 $(-a) = (-a_1) + (-a_2)\sqrt{2} + (-a_3)\sqrt{3} + (-a_4)\sqrt{6} \in \mathbb{F}_0$,
它可使得 $(-a) + a = 0$.

对于 $a \neq 0 \in \mathbb{F}_0$ (即有理数 a_1, a_2, a_3, a_4 不同时为零),

要找到一个逆元 $x = x_1 + x_2\sqrt{2} + x_3\sqrt{3} + x_4\sqrt{6} \in \mathbb{F}_0$ 使得 $a \times x = 1$, 我们只需求解以下线性方程组:

$$\begin{cases} a_1x_1 + 2a_2x_2 + 3a_3x_3 + 6a_4x_4 = 1 \\ a_2x_1 + a_1x_2 + 3a_3x_4 + 3a_4x_3 = 0 \\ a_3x_1 + a_1x_3 + 2a_2x_4 + 2a_4x_2 = 0 \\ a_4x_1 + a_1x_4 + a_2x_3 + a_3x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow Ax = \begin{bmatrix} a_1 & 2a_2 & 3a_3 & 6a_4 \\ a_2 & a_1 & 3a_4 & 3a_3 \\ a_3 & 2a_4 & a_1 & 2a_2 \\ a_4 & a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = e_1$$

计算系数矩阵 $A \in \mathbb{Q}^{4 \times 4}$ 的行列式 $\det(A)$ 如下:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_1 \begin{vmatrix} a_1 & 3a_4 & 3a_3 \\ 2a_4 & a_1 & 2a_2 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} - 2a_2 \begin{vmatrix} a_2 & 3a_4 & 3a_3 \\ a_3 & a_1 & 2a_2 \\ a_4 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} + 3a_3 \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & 3a_3 \\ a_3 & 2a_4 & 2a_2 \\ a_4 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} - 6a_4 \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & 3a_4 \\ a_3 & 2a_4 & a_1 \\ a_4 & a_3 & a_2 \end{vmatrix} \\ &= a_1(a_1^3 - 2a_1a_2^2 - 3a_1a_3^2 - 6a_1a_4^2 + 12a_2a_3a_4) \\ &\quad - 2a_2(a_1^2a_2 - 2a_2^3 + 3a_2a_3^2 + 6a_2a_4^2 - 6a_1a_3a_4) \\ &\quad + 3a_3(-a_1^2a_3 - 2a_2^2a_3 + 3a_3^3 - 6a_3a_4^2 + 4a_1a_2a_4) \\ &\quad - 6a_4(a_1^2a_4 + 2a_2^2a_4 + 3a_3^2a_4 - 6a_4^3 - 2a_1a_2a_3) \\ &= 48a_1a_2a_3a_4 + (a_1^4 + 4a_2^4 + 9a_3^4 + 36a_4^4) - (4a_1^2a_2^2 + 6a_1^2a_3^2 + 12a_1^2a_4^2 + 12a_2^2a_3^2 + 24a_2^2a_4^2 + 36a_3^2a_4^2) \\ &= (a_1^2 + 2a_2^2 - 3a_3^2 - 6a_4^2)^2 - 8(a_1a_2 - 3a_3a_4)^2 \end{aligned}$$

下面我们证明当有理数 a_1, a_2, a_3, a_4 不同时为零时, 我们有 $\det(A) \neq 0$ 成立:

$$\begin{aligned} \det(A) &= (a_1^2 + 2a_2^2 - 3a_3^2 - 6a_4^2)^2 - 8(a_1a_2 - 3a_3a_4)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \\ a_1^2 + 2a_2^2 - 3a_3^2 - 6a_4^2 &= \pm 2\sqrt{2}(a_1a_2 - 3a_3a_4) \\ &\Leftrightarrow \\ (a_1 \pm \sqrt{2}a_2)^2 &= 3(a_3 \pm \sqrt{2}a_4)^2 \\ &\Leftrightarrow \\ a_1 \pm_{(1)} \sqrt{2}a_2 &= \pm_{(2)} \sqrt{3}(a_3 \pm_{(1)} \sqrt{2}a_4) \quad (\text{where } \pm_{(1)}, \pm_{(2)} \text{ are independent}) \\ &\Leftrightarrow \\ \text{rational numbers } a_1, a_2, a_3, a_4 &\in \mathbb{Q} \text{ satisfy } a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0 \end{aligned}$$

因此当有理数 a_1, a_2, a_3, a_4 不同时为零时, 系数矩阵的行列式 $\det(A) \neq 0$, 即 A 非奇异.

这样就可以根据 **Cramer 法则** 计算线性方程组 $Ax = e_1$ 的解.

而且因为 Cramer 法则中的运算只有加减乘除 (除数不为零), 因此 Cramer 法则给出的解一定是有理数解.

(这是因为有理数域 \mathbb{Q} 对加减乘除 (除数不为零) 是封闭的)

或者使用经典的做法——**分母有理化**来得到线性方程组 $Ax = e_1$ 的解:

$$\begin{aligned}
(a^{-1}) &= \frac{1}{a_1 + a_2\sqrt{2} + a_3\sqrt{3} + a_4\sqrt{6}} \\
&= \frac{(a_1 + a_2\sqrt{2}) - (a_3\sqrt{3} + a_4\sqrt{6})}{(a_1 + a_2\sqrt{2})^2 - (a_3\sqrt{3} + a_4\sqrt{6})^2} \\
&= \frac{(a_1 + a_2\sqrt{2} - a_3\sqrt{3} - a_4\sqrt{6})}{a_1^2 + 2a_1a_2\sqrt{2} + 2a_2^2 - 3a_3^2 - 6a_3a_4\sqrt{2} - 6a_4^2} \\
&= \frac{(a_1 + a_2\sqrt{2} - a_3\sqrt{3} - a_4\sqrt{6})[(a_1^2 + 2a_2^2 - 3a_3^2 - 6a_4^2) - (2a_1a_2 - 6a_3a_4)\sqrt{2}]}{(a_1^2 + 2a_2^2 - 3a_3^2 - 6a_4^2)^2 - [(2a_1a_2 - 6a_3a_4)\sqrt{2}]^2} \\
&= \frac{1}{(a_1^2 + 2a_2^2 - 3a_3^2 - 6a_4^2)^2 - 8(a_1a_2 - 3a_3a_4)^2} \\
&\quad \times \{[a_1(a_1^2 - 2a_2^2 - 3a_3^2 - 6a_4^2) + 12a_2a_3a_4] \\
&\quad + [a_2(-a_1^2 + 2a_2^2 - 3a_3^2 - 6a_4^2) + 6a_1a_3a_4]\sqrt{2} \\
&\quad + [a_3(-a_1^2 - 2a_2^2 + 3a_3^2 - 6a_4^2) + 4a_1a_2a_4]\sqrt{3} \\
&\quad + [a_4(-a_1^2 - 2a_2^2 - 3a_3^2 + 6a_4^2) + 2a_1a_2a_3]\sqrt{6}\}
\end{aligned}$$

因此线性方程组 $Ax = e_1$ 的有理数解为:

$$x = \frac{1}{(a_1^2 + 2a_2^2 - 3a_3^2 - 6a_4^2)^2 - 8(a_1a_2 - 3a_3a_4)^2} \begin{bmatrix} a_1(a_1^2 - 2a_2^2 - 3a_3^2 - 6a_4^2) + 12a_2a_3a_4 \\ a_2(-a_1^2 + 2a_2^2 - 3a_3^2 - 6a_4^2) + 6a_1a_3a_4 \\ a_3(-a_1^2 - 2a_2^2 + 3a_3^2 - 6a_4^2) + 4a_1a_2a_4 \\ a_4(-a_1^2 - 2a_2^2 - 3a_3^2 + 6a_4^2) + 2a_1a_2a_3 \end{bmatrix}$$

这表明对于 $a \neq 0 \in \mathbb{F}_0$, \mathbb{F}_0 中都存在一个逆元 (a^{-1}) 使得 $a \times (a^{-1}) = (a^{-1}) \times a = 1$.

综上所述, $\mathbb{F}_0 := \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \{q_1 + q_2\sqrt{2} + q_3\sqrt{3} + q_4\sqrt{6} : q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{Q}\}$ 是一个域.

要证明 $\mathbb{F}_0 = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$ 是包含 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 的最小的域,

只要证明任何一个包含 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 的域 \mathbb{F} 都包含 \mathbb{Q} 和 $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ 即可.

$$\begin{aligned}
0, 1 \in \mathbb{F} &\Rightarrow \mathbb{Z} \in \mathbb{F} \\
&\Rightarrow \mathbb{Q} \in \mathbb{F} \\
\hline
\sqrt{2} + \sqrt{3} \in \mathbb{F} &\Rightarrow (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6} \in \mathbb{F} \\
&\Rightarrow \sqrt{6} \in \mathbb{F} \\
&\Rightarrow (\sqrt{2} + \sqrt{3})\sqrt{6} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} \in \mathbb{F} \\
&\Rightarrow \sqrt{2} = (2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}) - 2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \in \mathbb{F} \\
&\Rightarrow \sqrt{3} = (\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{2} \in \mathbb{F}
\end{aligned}$$

因此包含 $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ 的最小的域为 $\mathbb{F}_0 := \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] = \{q_1 + q_2\sqrt{2} + q_3\sqrt{3} + q_4\sqrt{6} : q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{Q}\}$.

Problem 5

若 \mathbb{F} 是 \mathbb{C} 的子域, 定义运算 $\oplus : \mathbb{F}^2 \times \mathbb{F}^2 \mapsto \mathbb{F}^2$ 和 $\otimes : \mathbb{F} \times \mathbb{F}^2 \mapsto \mathbb{F}^2$ 如下:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 + a_1a_2 \end{bmatrix} \\
k \otimes \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} ka \\ kb + \frac{k(k-1)}{2}a^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

试证明 \mathbb{F}^2 在加法 \oplus 和数乘 \otimes 下构成 \mathbb{F} 上的向量空间.

Proof:

记 $+, \times$ 为复数加法和复数乘法.

对于任意 $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^2$ 和标量 $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ 我们都有:

- 加法可交换:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 + a_1a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 + a_1 \\ b_2 + b_1 + a_2a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

- 可结合:

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \right) \oplus \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 + a_1 a_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 + a_3 \\ b_1 + b_2 + b_3 + a_1 a_2 + (a_1 + a_2) a_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_2 + a_3 \\ b_2 + b_3 + a_2 a_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \oplus \left(\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix} \right) \\
 \hline
 \alpha \otimes (\beta \otimes \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}) &= \alpha \otimes \begin{bmatrix} \beta a_1 \\ \beta b_1 + \frac{\beta(\beta-1)}{2} a_1^2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \alpha \beta a_1 \\ \alpha [\beta b_1 + \frac{\beta(\beta-1)}{2} a_1^2] + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} (\beta a_1)^2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \alpha \beta a_1 \\ \alpha \beta b_1 + \frac{\alpha \beta (\alpha \beta - 1)}{2} a_1^2 \end{bmatrix} \\
 &= \alpha \beta \otimes \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

- 可分配:

$$\begin{aligned}
 \alpha \otimes \left(\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} \right) &= \alpha \otimes \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 + a_1 a_2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \alpha(a_1 + a_2) \\ \alpha(b_1 + b_2 + a_1 a_2) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} (a_1 + a_2)^2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha b_1 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} a_1^2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \alpha a_2 \\ \alpha b_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} a_2^2 \end{bmatrix} \\
 &= \alpha \otimes \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \oplus \alpha \otimes \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

- 单位元:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1 + 0 \\ b_1 + 0 + a_1 \times 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \\
 1 \otimes \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \cdot a_1 \\ 1 \cdot b_1 + \frac{1(1-1)}{2} a_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

- 加法逆元:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -a_1 \\ -b_1 + a_1^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + (-a_1) \\ b_1 + (-b_1 + a_1^2) + a_1(-a_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

因此 \mathbb{F}^2 在加法 \oplus 和数乘 \otimes 下构成 \mathbb{F} 上的向量空间.

Problem 6 (optional)

[Is the Frobenius Matrix Norm Induced?](#)

若 m, n 是大于 1 的正整数, 试证明 $\mathbb{C}^{m \times n}$ 上的 Frobenius 范数不能由任何向量范数诱导.

- 诱导范数都满足 $\|I\| = 1$, 根据这点说明 Frobenius 不太可能是诱导范数.
Frobenius 范数有 $\|I_n\|_F = \sqrt{n} \neq 1$ ($\forall n \geq 2$)

证明前的准备工作:

- (对偶范数的定义)

给定 \mathbb{C}^n 上的一个范数 $\|\cdot\|$, 我们定义 \mathbb{C}^n 上的函数 $\|\cdot\|^D$ 如下:

$$\|y\|^D := \max_{\|x\|=1} |y^H x| = \max_{x \neq 0} \frac{|y^H x|}{\|x\|}$$

首先证明 $\|\cdot\|^D$ 是一个范数:

- $\|\cdot\|^D$ 的非负性、正定性和齐次性都是显然的.
- 下面证明 $\|\cdot\|^D$ 满足三角不等式:

$$\begin{aligned}
\|y+z\|^D &= \max_{\|x\|=1} |(y+z)^H x| \\
&\leq \max_{\|x\|=1} (|y^H x| + |z^H x|) \\
&\leq \max_{\|x\|=1} |y^H x| + \max_{\|x\|=1} |z^H x| \quad (y, z \in \mathbb{C}^n) \\
&= \|y\|^D + \|z\|^D
\end{aligned}$$

因此 $\|\cdot\|^D$ 是一个范数, 我们称其为 $\|\cdot\|$ 的**对偶范数** (dual norm).

• **Lemma 1:**

给定正整数 m, n , 设 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 分别为 \mathbb{C}^n 和 \mathbb{C}^m 上的范数.

若 $\mathbb{C}^{m \times n}$ 上的矩阵范数 $\|\cdot\|$ 是由 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 诱导的范数,

则我们有 $\|xy^H\| = \|x\|_\beta \|y\|_\alpha^D$ ($\forall x \in \mathbb{C}^m, y \in \mathbb{C}^n$) 成立.

Proof:

$$\begin{aligned}
\|xy^H\| &= \max_{\|z\|_\alpha=1} \|xy^H z\|_\beta \\
&= \max_{\|z\|_\alpha=1} \{ |y^H z| \|x\|_\beta \} \quad (\forall x \in \mathbb{C}^m, y \in \mathbb{C}^n) \\
&= \|x\|_\beta \max_{\|z\|_\alpha=1} |y^H z| \\
&= \|x\|_\beta \|y\|_\alpha^D
\end{aligned}$$

• **Lemma 2:**

给定正整数 m, n , 设 $\|\cdot\|$ 为 $\mathbb{C}^{m \times n}$ 上的酉不变范数,

则对于任意秩一矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 都有 $\|A\| = \sigma_{\max}(A) \|E_{11}\|$,

其中 $E_{11} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 为 $(1, 1)$ 位置上元素为 1, 其余元素为零的矩阵.

Proof:

对于任意秩一矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, 我们都可写出其奇异值分解 $A = U(\sigma_{\max}(A)E_{11})V^H$.

其中 $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$ 和 $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 为酉矩阵.

于是根据 $\|\cdot\|$ 的酉不变性, 我们有 $\|A\| = \|U(\sigma_{\max}(A)E_{11})V^H\| = \sigma_{\max}(A) \|E_{11}\|$ 成立.

• **Lemma 3:**

给定正整数 m, n , 设 $\|\cdot\|$ 为 $\mathbb{C}^{m \times n}$ 上的酉不变范数.

记 $E_{11} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 为 $(1, 1)$ 位置上元素为 1, 其余元素为零的矩阵.

则当且仅当 $\|A\| = \sigma_{\max}(A) \|E_{11}\|$ ($\forall A \in \mathbb{C}^{m \times n}$) 时 $\|\cdot\|$ 为诱导范数,

即存在 \mathbb{C}^n 和 \mathbb{C}^m 上的范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 使得 $\|A\| = \max_{\|x\|_\alpha=1} \|Ax\|_\beta$ ($\forall A \in \mathbb{C}^{m \times n}$) 成立.

Proof:

◦ **充分性:**

若 $\|A\| = \sigma_{\max}(A) \|E_{11}\|$ ($\forall A \in \mathbb{C}^{m \times n}$),

则我们可取 \mathbb{C}^n 上的范数 $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_2$ 和 \mathbb{C}^m 上的范数 $\|\cdot\|_\beta = \|E_{11}\| \|\cdot\|_2$, 即有:

$$\begin{aligned}
\max_{\|x\|_\alpha=1} \|Ax\|_\beta &= \max_{\|x\|_2=1} \{ \|E_{11}\| \|Ax\|_2 \} \\
&= \|E_{11}\| \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 \\
&= \|E_{11}\| \|A\|_2 \quad (\forall A \in \mathbb{C}^{m \times n}) \\
&= \|E_{11}\| \sigma_{\max}(A) \\
&= \|A\|
\end{aligned}$$

表明酉不变范数 $\|\cdot\|$ 可由 \mathbb{C}^n 和 \mathbb{C}^m 上的范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 诱导.

◦ **必要性:**

若酉不变范数 $\|\cdot\|$ 可由 \mathbb{C}^n 和 \mathbb{C}^m 上的范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 诱导,

则对于任意 $x \in \mathbb{C}^m, y \in \mathbb{C}^n$ 我们都有:

$$\begin{aligned}
\|xy^H\| &= \sigma_{\max}(xy^H) \|E_{11}\| \quad (\text{utilize Lemma 2}) \\
&= \|x\|_2 \|y\|_2 \|E_{11}\| \\
(\sigma_{\max}(xy^H)) &= \sqrt{\lambda_{\max}\{(xy^H)^H(xy^H)\}} = \sqrt{\lambda_{\max}(yx^Hxy^H)} = \sqrt{x^Hx\lambda_{\max}(yy^H)} = \sqrt{x^Hxy^Hy} = \|x\|_2 \|y\|_2 \\
&= \|x\|_\beta \|y\|_\alpha^D \quad (\text{utilize Lemma 1})
\end{aligned}$$

因此我们有 $\|E_{11}\| \|x\|_2 \|y\|_2 = \|x\|_\beta \|y\|_\alpha^D$ ($\forall x \in \mathbb{C}^m, y \in \mathbb{C}^n$).

固定 y , 我们知道存在 $c_1 > 0$ 使得 $\|x\|_\beta = c_1 \|x\|_2$ ($\forall x \in \mathbb{C}^m$).

固定 x , 我们知道存在 $c_2 > 0$ 使得 $\|y\|_\alpha^D = c_2 \|y\|_2$ ($\forall y \in \mathbb{C}^n$), 则我们有:

$$\begin{aligned}\|y\|_\alpha &= \|y\|_\alpha^{DD} \quad (\text{note that } \|\cdot\|_\alpha^{DD} = \|\cdot\|_\alpha) \\ &= \|c_2 y\|_2^D \quad (\text{use the conclusion above}) \\ &= \|c_2 y\|_2 \quad (\text{note that } \|\cdot\|_2^D = \|\cdot\|_2, \text{ i.e. Euclidean norm is self-dual}) \\ &= c_2 \|y\|_2\end{aligned} \quad (\forall y \in \mathbb{C}^n)$$

于是我们有:

$$\begin{aligned}\|A\| &= \max_{\|x\|_\alpha=c_1} \frac{\|Ax\|_\beta}{c_1} \quad (\text{use the conclusion above}) \\ &= \frac{1}{c_1} \max_{\|x\|_2=c_1} \{c_2 \|Ax\|_2\} \\ &= \frac{c_2}{c_1} \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 \\ &= \frac{c_2}{c_1} \|A\|_2 \\ &= \frac{c_2}{c_1} \sigma_{\max}(A) \quad (\text{consider the cases where } A \text{ is rank-one matrix and utilize Lemma 2}) \\ &= \|E\|_{11} \sigma_{\max}(A)\end{aligned} \quad (\forall A \in \mathbb{C}^{m \times n})$$

因此我们有 $\|A\| = \sigma_{\max}(A) \|E_{11}\|$ ($\forall A \in \mathbb{C}^{m \times n}$) 成立.

最终的证明:

我们称 $\mathbb{C}^{m \times n}$ 上的一个酉不变范数 $\|\cdot\|$ 是归一化的,

如果对于任意秩一矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 都有 $\|A\| = \sigma_{\max}(A)$ 成立.

可以证明:

一个归一化的酉不变范数是诱导范数, 当且仅当它是谱范数 $\|\cdot\|_2$ (即 $\|A\| = \sigma_{\max}(A)$ ($\forall A \in \mathbb{C}^{m \times n}$))

• 必要性显然成立.

• 下证充分性:

若 $\mathbb{C}^{m \times n}$ 上归一化的酉不变范数 $\|\cdot\|$ 是诱导范数, 则:

- ① 根据酉不变范数 $\|\cdot\|$ 是诱导范数, 结合 **Lemma 3** 可知 $\|A\| = \sigma_{\max}(A) \|E_{11}\|$ ($\forall A \in \mathbb{C}^{m \times n}$).
- ② 根据归一化可知: 对于任意秩一矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 都有 $\|A\| = \sigma_{\max}(A)$ 成立.

结合 ①② 可知 $\|E_{11}\| = 1$, 因此有 $\|A\| = \sigma_{\max}(A)$ ($\forall A \in \mathbb{C}^{m \times n}$) 成立, 即 $\|\cdot\|$ 为谱范数 $\|\cdot\|_2$

任意给定 $p \geq 1$, 我们定义 $\mathbb{C}^{m \times n}$ 上的 σp -范数 $\|\cdot\|_{\sigma p}$ 为:

$$\|A\|_{\sigma p} := \left\| \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_{\min\{m,n\}} \end{bmatrix} \right\|_p \quad \text{for all } A \in \mathbb{C}^{m \times n}, \text{ whose singular values are denoted by } \sigma_1, \dots, \sigma_{\min\{m,n\}}$$

其中 σ_1 即为 $\sigma_{\max}(A)$

显而易见, σp -范数 $\|\cdot\|_{\sigma p}$ 满足 $\|A\|_{\sigma p} = \sigma_{\max}(A)$ ($\forall A \in \mathbb{C}^{m \times n}$) 当且仅当以下命题至少有一个成立:

- ① $m = 1$
- ② $n = 1$
- ③ $p = \infty$ (此时 σp -范数 $\|\cdot\|_{\sigma p}$ 即为谱范数 $\|\cdot\|_2$)

注意到 $\|\cdot\|_F$ 即为 $\|\cdot\|_{\sigma 2}$: (不妨假设 $m \geq n$)

$$\begin{aligned}
\|A\|_F &= \sqrt{\operatorname{tr}(A^H A)} \\
&\quad (\text{Note that } A^H A \text{ is positive semi-definite, so its spectral decomposition } A^H A = U^H \Lambda U \text{ does exist}) \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}(U^H \Lambda U)} \quad (\text{where } U \in \mathbb{C}^{n \times n} \text{ is unitary and } \Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1(A^H A), \dots, \lambda_n(A^H A)\}) \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}(\Lambda U U^H)} \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}(\Lambda)} \\
&= \sqrt{\lambda_1(A^H A) + \dots + \lambda_n(A^H A)} \\
&= \sqrt{\sigma_1^2(A) + \dots + \sigma_n^2(A)} \\
&= \left\| \begin{bmatrix} \sigma_1(A) \\ \vdots \\ \sigma_n(A) \end{bmatrix} \right\|_2 \\
&= \|A\|_{\sigma_2}
\end{aligned}
\tag{$\forall A \in \mathbb{C}^{m \times n}$}$$

因此 $\mathbb{C}^{m \times n}$ 上的 Frobenius 范数 $\|\cdot\|_F$ 是诱导范数, 当且仅当 $m = 1$ 或 $n = 1$.
命题得证.

Problem 7 (optional)

(不存在三元数域)

试证明: 不存在一个包含 \mathbb{R} 的域 \mathbb{F} 可以视为 \mathbb{R} 上的 3 维向量空间.

Proof: (伪证, 额外增加条件时的证明)

设 \mathbb{F} 为包含 \mathbb{R} 的域, 且 \mathbb{F} 可视为 \mathbb{R} 上的 $n \geq 2$ 维向量空间.

额外假设 \mathbb{F} 上的乘法是 \mathbb{C} 上的乘法的扩张, 则 \mathbb{F} 中存在一个子代数同构于 \mathbb{C} .

因此 \mathbb{F} 可视为 \mathbb{C} 上的向量空间.

由于 \mathbb{F} 具有有限维度 n , 因此 n 一定是一个偶数, 故而不可能为 3.

Lemma: ([division algebra.pdf](#))

若 D 是中心为域 \mathbb{K} 的有限维除环 (division algebra),

则其维数 $[D : \mathbb{K}]$ (即 D 作为域 \mathbb{K} 上向量空间的维数) 一定是一个平方数.

Frobenius Theorem:

若 D 是中心为域 \mathbb{R} 的有限维除环, 则 $D = \mathbb{R}$ or \mathbb{C} or \mathbb{H} (其中 \mathbb{H} 代表四元数域).

抽象代数的证明:

设 \mathbb{F} 为包含 \mathbb{R} 的域, 且 \mathbb{F} 可视为 \mathbb{R} 上的 n 维向量空间, 则它是中心为域 \mathbb{R} 的 n 维除环.

根据 Frobenius 定理可知 $n = 1$ or 2 or 4 , 命题得证.

邵老师提供的初等证明:

设 \mathbb{F} 为包含 \mathbb{R} 的域, 且 \mathbb{F} 可视为 \mathbb{R} 上的 3 维向量空间.

设 \mathbb{F} 的一组基为 $\{1, i, j\}$ (其中我们暂时认为 i, j 不是虚数单位).

- 注意到 $1, i, j$ 一定是线性无关的, 因此 i, j 一定不是实数.
- 注意到 $1, i, i^2, i^3$ 一定是线性相关的,
故存在不全为零的 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ 使得 $ai^3 + bi^2 + ci + d = 0$.
(其中 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ 是因为 \mathbb{F} 可视为 \mathbb{R} 上的 3 维向量空间)
若 $a = b = c = 0$, 则 $d = 0$, 与假设矛盾.
若 $a = b = 0, c \neq 0$, 则 i 是一次方程 $ci + d = 0$ 的根, 这与 " i 不为实数" 的结论矛盾.
若 $a = 0, b \neq 0$, 则 i 是二次方程 $bi^2 + ci + d = 0$ 的根, 由于 i 不为实数, 故 i 一定为复数 (且虚部非零).
若 $a \neq 0$, 则 i 是三次方程 $ai^3 + bi^2 + ci + d = 0$ 的根 (根据代数基本定理可知此方程有一个实根和一对共轭复根).
由于 i 不为实数, 故 i 一定为复数 (且虚部非零).

综上所述 i 一定为复数 (且虚部非零).

现在我们可以等价地将 i 视为虚数单位了, 满足 $i^2 = -1$.

类似地, 我们可以等价地将 j 视为虚数单位 (不过是与 i 不同方向的虚数单位), 满足:

$$\begin{cases} j^2 = -1 \\ j \neq i. \end{cases}$$

设 ij 在基 $\{1, i, j\}$ 下的表示为 $ij = a + bi + cj$ (其中 $a, b, c \in \mathbb{R}$), 则我们有:

$$\begin{aligned} -j &= i^2 j \\ &= i(ij) \\ &= i(a + bi + cj) \\ &= ai - b + cij \\ &= ai - b + c(a + bi + cj) \\ &= (ac - b) + (bc + a)i + c^2 j \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} ac - b = 0 \\ bc + a = 0 \\ c^2 = -1 \end{cases}$$

显然 $c^2 = -1$ 与 $c \in \mathbb{R}$ 的假设矛盾.

因此向量 $1, i, j, ij$ 是线性无关的, 与 " \mathbb{F} 可视为 \mathbb{R} 上的 3 维向量空间" 的假设相矛盾.

这表明不存在一个包含 \mathbb{R} 的域 \mathbb{F} , 能够被视为 \mathbb{R} 上的 3 维向量空间.

命题得证.

Problem 8 (optional)

域 \mathbb{F} 上的**线性空间** (linear space) $(V, +, \cdot)$ (又称为**向量空间** vector space)

由一组对象 (通常称为**向量** vector) 的集合 V 、向量加法 $+: V \times V \mapsto V$ 和标量乘法 $\cdot: \mathbb{F} \times V \mapsto V$ 构成.

对于任意向量 $u, v, w \in V$ 和标量 $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, 它满足以下性质:

- **加法可交换:** $u + v = v + u$
- **可结合:** $\begin{cases} (u + v) + w = u + (v + w) \\ \alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta) \cdot v \end{cases}$
- **可分配:** $\begin{cases} \alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v \\ (\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v \end{cases}$
- **单位元:** $\begin{cases} \exists 0_V \in V \text{ such that } v + 0_V = v \\ \exists 1_V \in \mathbb{F} \text{ such that } 1_V \cdot v = v \end{cases}$
- **加法逆元:** $\exists (-v) \in V \text{ such that } v + (-v) = 0_V$

可以证明: 加法单位元 0_V 、数乘单位元 1_V 和任意给定向量 $v \in V$ 的加法逆元 $-v$ 都是唯一的.

给定域 \mathbb{F} 和正整数 n , 由 \mathbb{F} 中的元素形成的 n 元组的集合 \mathbb{F}^n 在逐元素加法和数乘之下构成线性空间.

我们约定 \mathbb{F}^n 中的元素总是列向量.

其中 \mathbb{C}^n 和 \mathbb{R}^n 是本课程中最基本的线性空间.

试证明: 加法交换律可由余下的几条公理推出.

Proof: (似乎是伪证)

记 $0_{\mathbb{F}}$ 是域 \mathbb{F} 上的加法单位元, $\times: \mathbb{F} \times \mathbb{F} \mapsto \mathbb{F}$ 为域 \mathbb{F} 上的乘法.

(反证法) 假设存在 $u, v \in V$ 使得 $u + v \neq v + u$, 则我们有:

$$\begin{aligned} u + v &\neq v + u \\ &\Downarrow \\ 0_V &= (-u) + u + v + (-v) \neq (-u) + v + u + (-v) \\ &= (-1_V) \cdot (u + (-v)) + 1_V \cdot (u + (-v)) \\ &= ((-1_V) + 1_V) \cdot (u + (-v)) \\ &= 0_{\mathbb{F}} \cdot (u + (-v)) \\ &= 0_V \end{aligned}$$

从而导出矛盾.

因此对于任意 $u, v \in V$ 都有 $u + v = v + u$ 成立.

The End