高等线性代数 Homework 04

Due: Sept. 30, 2024
姓名: 雍崔扬
学号: 21307140051

Problem 1

给定正整数 m, n 和向量 $u \in \mathbb{C}^m, v \in \mathbb{C}^n$.
试证明 $\|uv^{\mathrm{H}}\|_{\mathrm{F}} = \|vu^{\mathrm{H}}\|_{\mathrm{F}} = \|u\|_2\|v\|_2$.

Proof:

$$
\begin{aligned}
\|uv^{\mathrm{H}}\|_{\mathrm{F}} &= \sqrt{\operatorname{tr}\{(uv^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}(uv^{\mathrm{H}})\}} \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}\{vu^{\mathrm{H}}uv^{\mathrm{H}}\}} \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}\{vu^{\mathrm{H}}(vu^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}\}} \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}\{(vu^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}vu^{\mathrm{H}}\}} \\
&= \|vu^{\mathrm{H}}\|_{\mathrm{F}} \\
\hline
\|uv^{\mathrm{H}}\|_{\mathrm{F}} &= \sqrt{\operatorname{tr}\{(uv^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}(uv^{\mathrm{H}})\}} \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}\{vu^{\mathrm{H}}uv^{\mathrm{H}}\}} \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}\{u^{\mathrm{H}}uv^{\mathrm{H}}v\}} \\
&= \sqrt{u^{\mathrm{H}}uv^{\mathrm{H}}v} \\
&= \|u\|_2\|v\|_2
\end{aligned}
$$

Problem 2

给定正整数 n，设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是非奇异矩阵，$E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $\|A^{-1}E\|_p < 1$.
试证明 $A+E$ 非奇异，且当 $1 \le p \le \infty$ 时有:

$$
\|(A+E)^{-1} - A^{-1}\|_p \le \frac{\|A^{-1}\|_p^2\|E\|_p}{1-\|A^{-1}E\|_p}.
$$

Proof:
首先需要说明的是，对于任意 $1 \le p \le \infty$，$\|\cdot\|_p$ 作为 l_p 范数的诱导范数，一定是相容范数.

因此 $\|A^{-1}E\|_p < 1$ 确保了 $A+E$ 是非奇异的.
这是因为它保证了 $\rho(A^{-1}E) \le \|A^{-1}E\|_p < 1$ (根据**谱半径定理**)，因而 $I - A^{-1}E$ 不可能有零特征值，
从而确保了 $A+E = A(I - A^{-1}E)$ 非奇异.

注意到 $A^{-1} - (A+E)^{-1} = A^{-1}[(A+E) - A](A+E)^{-1} = A^{-1}E(A+E)^{-1}$，因此我们有:

$$
\|A^{-1} - (A+E)^{-1}\|_p = \|A^{-1}E(A+E)^{-1}\|_p \le \|A^{-1}\|_p\|E\|_p\|(A+E)^{-1}\|_p \tag{2.1}
$$

又注意到 $(A+E)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}E(A+E)^{-1}$，因此我们有:

$$
\begin{gathered}
\|(A+E)^{-1}\|_p = \|A^{-1} - A^{-1}E(A+E)^{-1}\|_p \le \|A^{-1}\|_p + \|A^{-1}E\|_p\|(A+E)^{-1}\|_p \\
\Updownarrow \\
\|(A+E)^{-1}\|_p \le \frac{\|A^{-1}\|_p}{1-\|A^{-1}E\|_p}
\end{gathered} \tag{2.2}
$$

将 (2.2) 代入 (2.1) 中便得到:

$$
\begin{aligned}
\|A^{-1}-(A+E)^{-1}\|_p &\le \|A^{-1}\|_p\|E\|_p\|(A+E)^{-1}\|_p \\
&\le \|A^{-1}\|_p\|E\|_p\frac{\|A^{-1}\|_p}{1-\|A^{-1}E\|_p} \\
&= \frac{\|A^{-1}\|_p^2\|E\|_p}{1-\|A^{-1}E\|_p}
\end{aligned}
$$

Problem 3

(不存在介于实数域和复数域之间的域)
若 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{C}$ 的子域，且 $\mathbb{R}$ 是 $\mathbb{F}$ 的子域，试证明: $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$.

Proof:
默认 $\mathbb{F}$ 上的加法和乘法分别是复数加法和复数乘法.

- **Case 1:** 若任意 $z\in\mathbb{F}$ 都满足虚部 $\text{Im}(z)=0$，则显然 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$.
- **Case 2:** 若存在 $z_0\in\mathbb{F}$ 满足虚部 $\text{Im}(z_0)\neq 0$.
  则根据
  $$\begin{cases}\text{Re}(z_0)\in\mathbb{R}\subset\mathbb{F}\\ \text{Im}(z_0)\neq 0\in\mathbb{R}\subset\mathbb{F}\end{cases}$$
  可知虚数单位 $\text{i}=(z_0-\text{Re}(z_0))/\text{Im}(z_0)=(z_0-\text{Re}(z_0))\times(\text{Im}(z_0))^{-1}\in\mathbb{F}$.
  根据域对加法的封闭性可知，对于任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，我们都有 $\alpha+\beta\text{i}\in\mathbb{F}$ 成立，表明 $\mathbb{C}\subseteq\mathbb{F}$.
  又根据 "$\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{C}$ 的子域" 可知 $\mathbb{F}\subseteq\mathbb{C}$，因此我们有 $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ 成立.

综上所述，$\mathbb{F}=\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$.

Problem 4

假定四则运算均为实数域上的运算，求出包含 $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 的最小的域.
即求域 $\mathbb{F}_0$ 使得:

- ① $\alpha\in\mathbb{F}_0$
- ② 对于任意满足 $\alpha\in\mathbb{F}$ 的域 $\mathbb{F}$ 都有 $\mathbb{F}_0\subset\mathbb{F}$

Solution:
首先我们证明有理数域 $\mathbb{Q}$ 加上 $\sqrt{2},\sqrt{3}$ 的扩张

$$\mathbb{F}_0:=\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}]=\{q_1+q_2\sqrt{2}+q_3\sqrt{3}+q_4\sqrt{6}:q_1,q_2,q_3,q_4\in\mathbb{Q}\}$$

是一个包含 $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 的数域.
对于任意

$$\begin{cases}a=a_1+a_2\sqrt{2}+a_3\sqrt{3}+a_4\sqrt{6}\\ b=b_1+b_2\sqrt{2}+b_3\sqrt{3}+b_4\sqrt{6}\\ c=c_1+c_2\sqrt{2}+c_3\sqrt{3}+c_4\sqrt{6}\end{cases}\in\mathbb{F}_0$$

(其中 $a_1,a_2,a_3,a_4,b_1,b_2,b_3,b_4,c_1,c_2,c_3,c_4\in\mathbb{Q}$)
我们都有:

- **封闭:**
$$
\begin{aligned}
a+b &= (a_1+a_2\sqrt{2}+a_3\sqrt{3}+a_4\sqrt{6})+(b_1+b_2\sqrt{2}+b_3\sqrt{3}+b_4\sqrt{6}) \\
&= (a_1+b_1)+(a_2+b_2)\sqrt{2}+(a_3+b_3)\sqrt{3}+(a_4+b_4)\sqrt{6} \\
&\in \mathbb{F}_0 \\
a\times b &= (a_1+a_2\sqrt{2}+a_3\sqrt{3}+a_4\sqrt{6})\times(b_1+b_2\sqrt{2}+b_3\sqrt{3}+b_4\sqrt{6}) \\
&= (a_1b_1+2a_2b_2+3a_3b_3+6a_4b_4)+(a_2b_1+a_1b_2+3a_3b_4+3a_4b_3)\sqrt{2} \\
&\quad +(a_3b_1+a_1b_3+2a_2b_4+2a_4b_2)\sqrt{3}+(a_4b_1+a_1b_4+a_2b_3+a_3b_2)\sqrt{6} \\
&\in \mathbb{F}_0
\end{aligned}
$$

- **可交换:** $\begin{cases}b+a=a+b\\ b\times a=a\times b\end{cases}$(显然成立)

- **可结合:** $\begin{cases}(a+b)+c=a+(b+c)\\(a\times b)\times c=a\times(b\times c)\end{cases}$ (显然成立)
- **可分配:** $\begin{cases}(a+b)\times c=(a\times c)+(b\times c)\\c\times(a+b)=(c\times a)+(c\times a)\end{cases}$ (显然成立)
- **单位元 (不动点):** $\exists\, 0,1\in\mathbb{F}_0$ such that $\begin{cases}0\neq 1\\a+0=a\\a\times 1=a\end{cases}$
- **逆元:**
  对于 $a\in\mathbb{F}_0$，我们可取 $(-a)=(-a_1)+(-a_2)\sqrt{2}+(-a_3)\sqrt{3}+(-a_4)\sqrt{6}\in\mathbb{F}_0$，
  它可使得 $(-a)+a=0$.

  对于 $a\neq 0\in\mathbb{F}_0$ (即有理数 a_1,a_2,a_3,a_4 不同时为零)，
  要找到一个逆元 $x=x_1+x_2\sqrt{2}+x_3\sqrt{3}+x_4\sqrt{6}\in\mathbb{F}_0$ 使得 $a\times x=1$，我们只需求解以下线性方程组:

$$\begin{cases}a_1x_1+2a_2x_2+3a_3x_3+6a_4x_4=1\\a_2x_1+a_1x_2+3a_3x_4+3a_4x_3=0\\a_3x_1+a_1x_3+2a_2x_4+2a_4x_2=0\\a_4x_1+a_1x_4+a_2x_3+a_3x_2=0\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad Ax=\begin{bmatrix}a_1&2a_2&3a_3&6a_4\\a_2&a_1&3a_4&3a_3\\a_3&2a_4&a_1&2a_2\\a_4&a_3&a_2&a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}=e_1$$

  计算系数矩阵 $A\in\mathbb{Q}^{4\times 4}$ 的行列式 $\det(A)$ 如下:

$$\begin{aligned}\det(A)&=a_1\begin{vmatrix}a_1&3a_4&3a_3\\2a_4&a_1&2a_2\\a_3&a_2&a_1\end{vmatrix}-2a_2\begin{vmatrix}a_2&3a_4&3a_3\\a_3&a_1&2a_2\\a_4&a_2&a_1\end{vmatrix}+3a_3\begin{vmatrix}a_2&a_1&3a_3\\a_3&2a_4&2a_2\\a_4&a_3&a_1\end{vmatrix}-6a_4\begin{vmatrix}a_2&a_1&3a_4\\a_3&2a_4&a_1\\a_4&a_3&a_2\end{vmatrix}\\&=a_1(a_1^3-2a_1a_2^2-3a_1a_3^2-6a_1a_4^2+12a_2a_3a_4)\\&\quad-2a_2(a_1^2a_2-2a_2^3+3a_2a_3^2+6a_2a_4^2-6a_1a_3a_4)\\&\quad+3a_3(-a_1^2a_3-2a_2^2a_3+3a_3^3-6a_3a_4^2+4a_1a_2a_4)\\&\quad-6a_4(a_1^2a_4+2a_2^2a_4+3a_3^2a_4-6a_4^3-2a_1a_2a_3)\\&=48a_1a_2a_3a_4+(a_1^4+4a_2^4+9a_3^4+36a_4^4)-(4a_1^2a_2^2+6a_1^2a_3^2+12a_1^2a_4^2+12a_2^2a_3^2+24a_2^2a_4^2+36a_3^2a_4^2)\\&=(a_1^2+2a_2^2-3a_3^2-6a_4^2)^2-8(a_1a_2-3a_3a_4)^2\end{aligned}$$

  下面我们证明当有理数 a_1,a_2,a_3,a_4 不同时为零时，我们有 $\det(A)\neq 0$ 成立:

$$\begin{gathered}\det(A)=(a_1^2+2a_2^2-3a_3^2-6a_4^2)^2-8(a_1a_2-3a_3a_4)^2=0\\\Updownarrow\\a_1^2+2a_2^2-3a_3^2-6a_4^2=\pm 2\sqrt{2}(a_1a_2-3a_3a_4)\\\Updownarrow\\(a_1\pm\sqrt{2}a_2)^2=3(a_3\pm\sqrt{2}a_4)^2\\\Updownarrow\\a_1\pm_{(1)}\sqrt{2}a_2=\pm_{(2)}\sqrt{3}(a_3\pm_{(1)}\sqrt{2}a_4)\quad(\text{where }\pm_{(1)},\pm_{(2)}\text{ are independent})\\\Updownarrow\\\text{rational numbers }a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbb{Q}\text{ satisfy }a_1=a_2=a_3=a_4=0\end{gathered}$$

  因此当有理数 a_1,a_2,a_3,a_4 不同时为零时，系数矩阵的行列式 $\det(A)\neq 0$，即 A 非奇异.
  这样就可以根据 **Cramer 法则**计算线性方程组 $Ax=e_1$ 的解.
  而且因为 Cramer 法则中的运算只有加减乘除 (除数不为零)，因此 Cramer 法则给出的解一定是有理数解.
  (这是因为有理数域 $\mathbb{Q}$ 对加减乘除 (除数不为零) 是封闭的)

  或者使用经典的做法——**分母有理化**来得到线性方程组 $Ax=e_1$ 的解:

$$
\begin{aligned}
(a^{-1}) &= \frac{1}{a_1+a_2\sqrt{2}+a_3\sqrt{3}+a_4\sqrt{6}} \\
&= \frac{(a_1+a_2\sqrt{2})-(a_3\sqrt{3}+a_4\sqrt{6})}{(a_1+a_2\sqrt{2})^2-(a_3\sqrt{3}+a_4\sqrt{6})^2} \\
&= \frac{(a_1+a_2\sqrt{2}-a_3\sqrt{3}-a_4\sqrt{6})}{a_1^2+2a_1a_2\sqrt{2}+2a_2^2-3a_3^2-6a_3a_4\sqrt{2}-6a_4^2} \\
&= \frac{(a_1+a_2\sqrt{2}-a_3\sqrt{3}-a_4\sqrt{6})[(a_1^2+2a_2^2-3a_3^2-6a_4^2)-(2a_1a_2-6a_3a_4)\sqrt{2}]}{(a_1^2+2a_2^2-3a_3^2-6a_4^2)^2-[(2a_1a_2-6a_3a_4)\sqrt{2}]^2} \\
&= \frac{1}{(a_1^2+2a_2^2-3a_3^2-6a_4^2)^2-8(a_1a_2-3a_3a_4)^2} \\
&\quad \times\{[a_1(a_1^2-2a_2^2-3a_3^2-6a_4^2)+12a_2a_3a_4] \\
&\quad\quad +[a_2(-a_1^2+2a_2^2-3a_3^2-6a_4^2)+6a_1a_3a_4]\sqrt{2} \\
&\quad\quad +[a_3(-a_1^2-2a_2^2+3a_3^2-6a_4^2)+4a_1a_2a_4]\sqrt{3} \\
&\quad\quad +[a_4(-a_1^2-2a_2^2-3a_3^2+6a_4^2)+2a_1a_2a_3]\sqrt{6}\}
\end{aligned}
$$

因此线性方程组 $Ax=e_1$ 的有理数解为:

$$
x=\frac{1}{(a_1^2+2a_2^2-3a_3^2-6a_4^2)^2-8(a_1a_2-3a_3a_4)^2}\begin{bmatrix} a_1(a_1^2-2a_2^2-3a_3^2-6a_4^2)+12a_2a_3a_4 \\ a_2(-a_1^2+2a_2^2-3a_3^2-6a_4^2)+6a_1a_3a_4 \\ a_3(-a_1^2-2a_2^2+3a_3^2-6a_4^2)+4a_1a_2a_4 \\ a_4(-a_1^2-2a_2^2-3a_3^2+6a_4^2)+2a_1a_2a_3 \end{bmatrix}
$$

这表明对于 $a\neq 0\in\mathbb{F}_0$，$\mathbb{F}_0$ 中都存在一个逆元 (a^{-1}) 使得 $a\times(a^{-1})=(a^{-1})\times a=1$.

综上所述，$\mathbb{F}_0:=\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}]=\{q_1+q_2\sqrt{2}+q_3\sqrt{3}+q_4\sqrt{6}:q_1,q_2,q_3,q_4\in\mathbb{Q}\}$ 是一个域.

要证明 $\mathbb{F}_0=\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}]$ 是包含 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 的最小的域，
只要证明任何一个包含 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 的域 $\mathbb{F}$ 都包含 $\mathbb{Q}$ 和 $\sqrt{2},\sqrt{3}$ 即可.

$$
\begin{array}{rcl}
0,1\in\mathbb{F} & \Rightarrow & \mathbb{Z}\in\mathbb{F} \\
& \Rightarrow & \mathbb{Q}\in\mathbb{F} \\
\hline
\sqrt{2}+\sqrt{3}\in\mathbb{F} & \Rightarrow & (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{6}\in\mathbb{F} \\
& \Rightarrow & \sqrt{6}\in\mathbb{F} \\
& \Rightarrow & (\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{6}=2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\in\mathbb{F} \\
& \Rightarrow & \sqrt{2}=(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})-2(\sqrt{2}+\sqrt{3})\in\mathbb{F} \\
& \Rightarrow & \sqrt{3}=(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{2}\in\mathbb{F}
\end{array}
$$

因此包含 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 的最小的域为 $\mathbb{F}_0:=\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}]=\{q_1+q_2\sqrt{2}+q_3\sqrt{3}+q_4\sqrt{6}:q_1,q_2,q_3,q_4\in\mathbb{Q}\}$.

Problem 5

若 $\mathbb{F}$ 是 $\mathbb{C}$ 的子域，定义运算 $\oplus:\mathbb{F}^2\times\mathbb{F}^2\mapsto\mathbb{F}^2$ 和 $\otimes:\mathbb{F}\times\mathbb{F}^2\mapsto\mathbb{F}^2$ 如下:

$$
\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2+a_1a_2 \end{bmatrix}
$$
$$
k\otimes\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ka \\ kb+k(k-1)a^2/2 \end{bmatrix}
$$

试证明 $\mathbb{F}^2$ 在加法 $\oplus$ 和数乘 $\otimes$ 下构成 $\mathbb{F}$ 上的向量空间.

Proof:
记 $+,\times$ 为复数加法和复数乘法.
对于任意 $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix}\in\mathbb{F}^2$ 和标量 $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ 我们都有:

- **加法可交换:**

$$
\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1+a_2 \\ b_1+b_2+a_1a_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_2+a_1 \\ b_2+b_1+a_2a_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}
$$

- **可结合:**

$$\left(\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}a_2\\b_2\end{bmatrix}\right)\oplus\begin{bmatrix}a_3\\b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1+a_2\\b_1+b_2+a_1a_2\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}a_3\\b_3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}a_1+a_2+a_3\\b_1+b_2+b_3+a_1a_2+(a_1+a_2)a_3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}a_2+a_3\\b_2+b_3+a_2a_3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}\oplus\left(\begin{bmatrix}a_2\\b_2\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}a_3\\b_3\end{bmatrix}\right)$$

$$\alpha\otimes(\beta\otimes\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix})=\alpha\otimes\begin{bmatrix}\beta a_1\\\beta b_1+\frac{\beta(\beta-1)}{2}a_1^2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\alpha\beta a_1\\\alpha(\beta b_1+\frac{\beta(\beta-1)}{2}a_1^2)+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(\beta a_1)^2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\alpha\beta a_1\\\alpha\beta b_1+\frac{\alpha\beta(\alpha\beta-1)}{2}a_1^2\end{bmatrix}$$
$$=\alpha\beta\otimes\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}$$

- **可分配:**

$$\alpha\otimes\left(\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}a_2\\b_2\end{bmatrix}\right)=\alpha\otimes\begin{bmatrix}a_1+a_2\\b_1+b_2+a_1a_2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\alpha(a_1+a_2)\\\alpha(b_1+b_2+a_1a_2)+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(a_1+a_2)^2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\alpha\alpha_1\\\alpha b_1+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}a_1^2\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}\alpha\alpha_2\\\alpha b_2+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}a_2^2\end{bmatrix}$$
$$=\alpha\otimes\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}\oplus\alpha\otimes\begin{bmatrix}a_2\\b_2\end{bmatrix}$$

- **单位元:**

$$\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1+0\\b_1+0+a_1\times 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}$$

$$1\otimes\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot a_1\\1\cdot b_1+\frac{1(1-1)}{2}a_1^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}$$

- **加法逆元:**

$$\begin{bmatrix}a_1\\b_1\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}-a_1\\-b_1+a_1^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1+(-a_1)\\b_1+(-b_1+a_1^2)+a_1(-a_1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

因此 $\mathbb{F}^2$ 在加法 $\oplus$ 和数乘 $\otimes$ 下构成 $\mathbb{F}$ 上的向量空间.

Problem 6 (optional)

Is the Frobenius Matrix Norm Induced?
若 m,n 是大于 1 的正整数，试证明 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 上的 Frobenius 范数不能由任何向量范数诱导.

- 诱导范数都满足 $\|I\|=1$，根据这点说明 Frobenius 不太可能是诱导范数.
  Frobenius 范数有 $\|I_n\|_{\text{F}}=\sqrt{n}\neq 1\ (\forall\, n\geq 2)$

证明前的准备工作:

- **(对偶范数的定义)**
  给定 $\mathbb{C}^n$ 上的一个范数 $\|\cdot\|$，我们定义 $\mathbb{C}^n$ 上的函数 $\|\cdot\|^D$ 如下:

$$\|y\|^D:=\max_{\|x\|=1}|y^{\text{H}}x|=\max_{x\neq 0_n}\frac{|y^{\text{H}}x|}{\|x\|}$$

  首先证明 $\|\cdot\|^D$ 是一个范数:

  - $\|\cdot\|^D$ 的非负性、正定性和齐次性都是显然的.
  - 下面证明 $\|\cdot\|^D$ 满足三角不等式:

$$\begin{aligned}\|y+z\|^D &= \max_{\|x\|=1}|(y+z)^{\mathrm{H}}x| \\ &\leq \max_{\|x\|=1}(|y^{\mathrm{H}}x|+|z^{\mathrm{H}}x|) \\ &\leq \max_{\|x\|=1}|y^{\mathrm{H}}x| + \max_{\|x\|=1}|z^{\mathrm{H}}x| \\ &= \|y\|^D + \|z\|^D\end{aligned} \quad (y,z\in\mathbb{C}^n)$$

因此 $\|\cdot\|^D$ 是一个范数，我们称其为 $\|\cdot\|$ 的**对偶范数** (dual norm).

- **Lemma** 1**:**
  给定正整数 m,n，设 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 分别为 $\mathbb{C}^n$ 和 $\mathbb{C}^m$ 上的范数.
  若 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 上的矩阵范数 $\|\cdot\|$ 是由 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 诱导的范数，
  则我们有 $\|xy^{\mathrm{H}}\| = \|x\|_\beta\|y\|_\alpha^D \ \ (\forall\, x\in\mathbb{C}^m, y\in\mathbb{C}^n)$ 成立.

  Proof:

  $$\begin{aligned}\|xy^{\mathrm{H}}\| &= \max_{\|z\|_\alpha=1}\|xy^{\mathrm{H}}z\|_\beta \\ &= \max_{\|z\|_\alpha=1}\{|y^{\mathrm{H}}z|\|x\|_\beta\} \\ &= \|x\|_\beta\max_{\|z\|_\alpha=1}|y^{\mathrm{H}}z| \\ &= \|x\|_\beta\|y\|_\alpha^D\end{aligned} \quad (\forall\, x\in\mathbb{C}^m, y\in\mathbb{C}^n)$$

- **Lemma 2:**
  给定正整数 m,n，设 $\|\cdot\|$ 为 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 上的酉不变范数，
  则对于任意秩一矩阵 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 都有 $\|A\| = \sigma_{\max}(A)\|E_{11}\|$，
  其中 $E_{11}\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 为 $(1,1)$ 位置上元素为 1，其余元素为零的矩阵.

  Proof:
  对于任意秩一矩阵 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，我们都可写出其奇异值分解 $A = U(\sigma_{\max}(A)E_{11})V^{\mathrm{H}}$.
  其中 $U\in\mathbb{C}^{m\times m}$ 和 $V\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 为酉矩阵.
  于是根据 $\|\cdot\|$ 的酉不变性，我们有 $\|A\| = \|U(\sigma_{\max}(A)E_{11})V^{\mathrm{H}}\| = \sigma_{\max}(A)\|E_{11}\|$ 成立.

- **Lemma 3:**
  给定正整数 m,n，设 $\|\cdot\|$ 为 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 上的酉不变范数.
  记 $E_{11}\in\mathbb{C}^{m\times n}$ 为 $(1,1)$ 位置上元素为 1，其余元素为零的矩阵.
  则当且仅当 $\|A\| = \sigma_{\max}(A)\|E_{11}\|\ (\forall\, A\in\mathbb{C}^{m\times n})$ 时 $\|\cdot\|$ 为诱导范数，
  即存在 $\mathbb{C}^n$ 和 $\mathbb{C}^m$ 上的范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 使得 $\|A\| = \max_{\|x\|_\alpha=1}\|Ax\|_\beta\ (\forall\, A\in\mathbb{C}^{m\times n})$ 成立.

  Proof:

  - **充分性:**
    若 $\|A\| = \sigma_{\max}(A)\|E_{11}\|\ (\forall\, A\in\mathbb{C}^{m\times n})$，
    则我们可取 $\mathbb{C}^n$ 上的范数 $\|\cdot\|_\alpha = \|\cdot\|_2$ 和 $\mathbb{C}^m$ 上的范数 $\|\cdot\|_\beta = \|E_{11}\|\|\cdot\|_2$，即有:

    $$\begin{aligned}\max_{\|x\|_\alpha=1}\|Ax\|_\beta &= \max_{\|x\|_2=1}\{\|E_{11}\|\|Ax\|_2\} \\ &= \|E_{11}\|\max_{\|x\|_2=1}\|Ax\|_2 \\ &= \|E_{11}\|\|A\|_2 \\ &= \|E_{11}\|\sigma_{\max}(A) \\ &= \|A\|\end{aligned} \quad (\forall\, A\in\mathbb{C}^{m\times n})$$

    表明酉不变范数 $\|\cdot\|$ 可由 $\mathbb{C}^n$ 和 $\mathbb{C}^m$ 上的范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 诱导.

  - **必要性:**
    若酉不变范数 $\|\cdot\|$ 可由 $\mathbb{C}^n$ 和 $\mathbb{C}^m$ 上的范数 $\|\cdot\|_\alpha$ 和 $\|\cdot\|_\beta$ 诱导，
    则对于任意 $x\in\mathbb{C}^m, y\in\mathbb{C}^n$ 我们都有:

    $$\begin{aligned}\|xy^{\mathrm{H}}\| &= \sigma_{\max}(xy^{\mathrm{H}})\|E_{11}\| \quad \text{(utilize Lemma 2)} \\ &= \|x\|_2\|y\|_2\|E_{11}\| \\ &(\sigma_{\max}(xy^{\mathrm{H}}) = \sqrt{\lambda_{\max}\{(xy^{\mathrm{H}})^{\mathrm{H}}(xy^{\mathrm{H}})\}} = \sqrt{\lambda_{\max}(yx^{\mathrm{H}}xy^{\mathrm{H}})} = \sqrt{x^{\mathrm{H}}x\lambda_{\max}(yy^{\mathrm{H}})} = \sqrt{x^{\mathrm{H}}xy^{\mathrm{H}}y} = \|x\|_2\|y\|_2) \\ &= \|x\|_\beta\|y\|_\alpha^D \quad \text{(utilize Lemma 1)}\end{aligned}$$

    因此我们有 $\|E_{11}\|\|x\|_2\|y\|_2 = \|x\|_\beta\|y\|_\alpha^D\ (\forall\, x\in\mathbb{C}^m, y\in\mathbb{C}^n)$.
    固定 y，我们知道存在 $c_1>0$ 使得 $\|x\|_\beta = c_1\|x\|_2\ (\forall\, x\in\mathbb{C}^m)$.
    固定 x，我们知道存在 $c_2>0$ 使得 $\|y\|_\alpha^D = c_2\|y\|_2\ (\forall\, y\in\mathbb{C}^n)$，则我们有:

$$\left.\begin{aligned}\|y\|_\alpha &= \|y\|_\alpha^{DD} && (\text{note that } \|\cdot\|_\alpha^{DD} = \|\cdot\|_\alpha) \\ &= \|c_2 y\|_2^D && (\text{use the conclusion above}) \\ &= \|c_2 y\|_2 && (\text{note that } \|\cdot\|_2^D = \|\cdot\|_2, \text{i.e. Euclidean norm is self-dual}) \\ &= c_2\|y\|_2\end{aligned}\right. (\forall\, y \in \mathbb{C}^n)$$

于是我们有:

$$\begin{aligned}\|A\| &= \max_{\|x\|_\alpha = c_1} \frac{\|Ax\|_\beta}{c_1} && (\text{use the conclusion above}) \\ &= \frac{1}{c_1} \max_{c_1\|x\|_2 = c_1} \{c_2\|Ax\|_2\} \\ &= \frac{c_2}{c_1} \max_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2 \\ &= \frac{c_2}{c_1}\|A\|_2 \\ &= \frac{c_2}{c_1}\sigma_{\max}(A) && (\text{consider the cases where } A \text{ is rank-one matrix and utilize Lemma 2}) \\ &= \|E\|_{11}\sigma_{\max}(A)\end{aligned} \quad (\forall\, A \in \mathbb{C}^{m\times n})$$

因此我们有 $\|A\| = \sigma_{\max}(A)\|E_{11}\|$ $(\forall\, A \in \mathbb{C}^{m\times n})$ 成立.

最终的证明:
我们称 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 上的一个酉不变范数 $\|\cdot\|$ 是归一化的,
如果对于任意秩一矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 都有 $\|A\| = \sigma_{\max}(A)$ 成立.
可以证明:
一个归一化的酉不变范数是诱导范数，当且仅当它是谱范数 $\|\cdot\|_2$ (即 $\|A\| = \sigma_{\max}(A)$ $(\forall\, A \in \mathbb{C}^{m\times n})$)

- **必要性显然成立.**
- **下证充分性:**
  若 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 上归一化的酉不变范数 $\|\cdot\|$ 是诱导范数，则:
  - ① 根据酉不变范数 $\|\cdot\|$ 是诱导范数，结合 **Lemma 3** 可知 $\|A\| = \sigma_{\max}(A)\|E_{11}\|$ $(\forall\, A \in \mathbb{C}^{m\times n})$.
  - ② 根据归一化可知: 对于任意秩一矩阵 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 都有 $\|A\| = \sigma_{\max}(A)$ 成立.

  结合 ①② 可知 $\|E_{11}\| = 1$，因此有 $\|A\| = \sigma_{\max}(A)$ $(\forall\, A \in \mathbb{C}^{m\times n})$ 成立，即 $\|\cdot\|$ 为谱范数 $\|\cdot\|_2$

任意给定 $p \geq 1$，我们定义 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 上的 σp-范数 $\|\cdot\|_{\sigma p}$ 为:

$$\|A\|_{\sigma p} := \left\| \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_{\min\{m,n\}} \end{bmatrix} \right\|_p \text{ for all } A \in \mathbb{C}^{m\times n}, \text{whose singular values are denoted by } \sigma_1, \ldots, \sigma_{\min\{m,n\}}$$

其中 σ_1 即为 $\sigma_{\max}(A)$
显而易见，σp-范数 $\|\cdot\|_{\sigma p}$ 满足 $\|A\|_{\sigma p} = \sigma_{\max}(A)$ $(\forall\, A \in \mathbb{C}^{m\times n})$ 当且仅当以下命题至少有一个成立:

- ① $m = 1$
- ② $n = 1$
- ③ $p = \infty$ (此时 σp-范数 $\|\cdot\|_{\sigma p}$ 即为谱范数 $\|\cdot\|_2$)

注意到 $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ 即为 $\|\cdot\|_{\sigma 2}$: (不妨假设 $m \geq n$)

$$
\begin{aligned}
\|A\|_{\mathrm{F}} &= \sqrt{\operatorname{tr}(A^{\mathrm{H}}A)} \\
&\quad \text{(Note that } A^{\mathrm{H}}A \text{ is positive semi-definite, so its spectral decomposition } A^{\mathrm{H}}A = U^{\mathrm{H}}\Lambda U \text{ does exists)} \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}(U^{\mathrm{H}}\Lambda U)} \quad \text{(where } U \in \mathbb{C}^{n\times n} \text{ is unitary and } \Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1(A^{\mathrm{H}}A),\dots,\lambda_n(A^{\mathrm{H}}A)\}) \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}(\Lambda U U^{\mathrm{H}})} \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}(\Lambda)} \\
&= \sqrt{\lambda_1(A^{\mathrm{H}}A)+\cdots+\lambda_n(A^{\mathrm{H}}A)} \\
&= \sqrt{\sigma_1^2(A)+\cdots+\sigma_n^2(A^{\mathrm{H}}A)} \\
&= \left\| \begin{bmatrix} \sigma_1(A) \\ \vdots \\ \sigma_n(A) \end{bmatrix} \right\|_2 \\
&= \|A\|_{\sigma 2}
\end{aligned}
\quad (\forall\, A \in \mathbb{C}^{m\times n})
$$

因此 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 上的 Frobenius 范数 $\|\cdot\|_{\mathrm{F}}$ 是诱导范数，当且仅当 $m=1$ 或 $n=1$.
命题得证.

Problem 7 (optional)

(不存在三元数域)
试证明: 不存在一个包含 $\mathbb{R}$ 的域 $\mathbb{F}$ 可以视为 $\mathbb{R}$ 上的 3 维向量空间.

Proof: (伪证, 额外增加条件时的证明)
设 $\mathbb{F}$ 为包含 $\mathbb{R}$ 的域，且 $\mathbb{F}$ 可视为 $\mathbb{R}$ 上的 $n \geq 2$ 维向量空间.
额外假设 $\mathbb{F}$ 上的乘法是 $\mathbb{C}$ 上的乘法的扩张，则 $\mathbb{F}$ 中存在一个子代数同构于 $\mathbb{C}$.
因此 $\mathbb{F}$ 可视作 $\mathbb{C}$ 上的向量空间.
由于 $\mathbb{F}$ 具有有限维度 n，因此 n 一定是一个偶数，故而不可能为 3.

Lemma: [(division algebra.pdf)](division algebra.pdf)
若 D 是中心为域 $\mathbb{K}$ 的有限维除环 (division algebra),
则其维数 $[D:\mathbb{K}]$ (即 D 作为域 $\mathbb{K}$ 上向量空间的维数) 一定是一个平方数.

Frobenius Theorem:
若 D 是中心为域 $\mathbb{R}$ 的有限维除环，则 $D = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$ or $\mathbb{H}$ (其中 $\mathbb{H}$ 代表四元数域).

抽象代数的证明:
设 $\mathbb{F}$ 为包含 $\mathbb{R}$ 的域，且 $\mathbb{F}$ 可视为 $\mathbb{R}$ 上的 n 维向量空间，则它是中心为域 $\mathbb{R}$ 的 n 维除环.
根据 Frobenius 定理可知 $n = 1$ or 2 or 4，命题得证.

邵老师提供的初等证明:
设 $\mathbb{F}$ 为包含 $\mathbb{R}$ 的域，且 $\mathbb{F}$ 可视为 $\mathbb{R}$ 上的 3 维向量空间.
设 $\mathbb{F}$ 的一组基为 $\{1,\mathrm{i},\mathrm{j}\}$ (其中我们暂时认为 i,j 不是虚数单位).

- 注意到 $1,\mathrm{i},\mathrm{j}$ 一定是线性无关的，因此 i,j 一定不是实数.
- 注意到 $1,\mathrm{i},\mathrm{i}^2,\mathrm{i}^3$ 一定是线性相关的，
  故存在不全为零的 $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ 使得 $a\mathrm{i}^3+b\mathrm{i}^2+c\mathrm{i}+d=0$.
  (其中 $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ 是因为 $\mathbb{F}$ 可视为 $\mathbb{R}$ 上的 3 维向量空间)
  若 $a=b=c=0$，则 $d=0$，与假设矛盾.
  若 $a=b=0, c\neq 0$，则 i 是一次方程 $c\mathrm{i}+d=0$ 的根，这与 "i 不为实数" 的结论矛盾.
  若 $a=0, b\neq 0$，则 i 是二次方程 $b\mathrm{i}^2+c\mathrm{i}+d=0$ 的根，由于 i 不为实数，故 i 一定为复数 (且虚部非零).
  若 $a\neq 0$，则 i 是三次方程 $a\mathrm{i}^3+b\mathrm{i}^2+c\mathrm{i}+d=0$ 的根 (根据代数基本定理可知此方程有一个实根和一对共轭复根).
  由于 i 不为实数，故 i 一定为复数 (且虚部非零).

  综上所述 i 一定为复数 (且虚部非零).
  现在我们就可以等价地将 i 视为虚数单位了，满足 $\mathrm{i}^2=-1$.
  类似地，我们可以等价地将 j 视为虚数单位 (不过是与 i 不同方向的虚数单位)，满足:

$$
\begin{cases} \mathrm{j}^2 = -1 \\ \mathrm{j} \neq \mathrm{i}. \end{cases}
$$

设 ij 在基 $\{1,\mathrm{i},\mathrm{j}\}$ 下的表示为 $\mathrm{ij}=a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j}$ (其中 $a,b,c\in\mathbb{R}$),
则我们有:

$$\begin{aligned}-\mathrm{j}&=\mathrm{i}^2\mathrm{j}\\&=\mathrm{i}(\mathrm{ij})\\&=\mathrm{i}(a+b\mathrm{i}+cj)\\&=a\mathrm{i}-b+c\mathrm{ij}\\&=a\mathrm{i}-b+c(a+b\mathrm{i}+c\mathrm{j})\\&=(ac-b)+(bc+a)\mathrm{i}+c^2\mathrm{j}\end{aligned}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}ac-b=0\\bc+a=0\\c^2=-1\end{cases}$$

显然 $c^2=-1$ 与 $c\in\mathbb{R}$ 的假设矛盾.
因此向量 $1,\mathrm{i},\mathrm{j},\mathrm{ij}$ 是线性无关的，与 "$\mathbb{F}$ 可视为 $\mathbb{R}$ 上的 3 维向量空间" 的假设相矛盾.
这表明不存在一个包含 $\mathbb{R}$ 的域 $\mathbb{F}$，能够被视为 $\mathbb{R}$ 上的 3 维向量空间.
命题得证.

Problem 8 (optional)

> 域 $\mathbb{F}$ 上的**线性空间** (linear space) $(V,+,\cdot)$ (又称为**向量空间** vector space)
> 由一组对象 (通常称为**向量** vector) 的集合 V、向量加法 $+:V\times V\mapsto V$ 和标量乘法 $\cdot:\mathbb{F}\times V\mapsto V$ 构成.
> 对于任意向量 $u,v,w\in V$ 和标量 $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$，它满足以下性质:
>
> - **加法可交换:** $u+v=v+u$
> - **可结合:** $\begin{cases}(u+v)+w=u+(v+w)\\\alpha\cdot(\beta\cdot v)=(\alpha\cdot\beta)\cdot v\end{cases}$
> - **可分配:** $\begin{cases}\alpha\cdot(u+v)=\alpha\cdot u+\alpha\cdot v\\(\alpha+\beta)\cdot v=\alpha\cdot v+\beta\cdot v\end{cases}$
> - **单位元:** $\begin{cases}\exists\ 0_V\in V\quad\text{such that}\ \ v+0_V=v\\\exists\ 1_V\in\mathbb{F}\quad\text{such that}\ 1_V\cdot v=v\end{cases}$
> - **加法逆元:** $\exists\,(-v)\in V$ such that $v+(-v)=0_V$
>
> 可以证明: 加法单位元 0_V、数乘单位元 1_V 和任意给定向量 $v\in V$ 的加法逆元 $-v$ 都是唯一的.
>
> 给定域 $\mathbb{F}$ 和正整数 n，由 $\mathbb{F}$ 中的元素形成的 n 元组的集合 $\mathbb{F}^n$ 在逐元素加法和数乘之下构成线性空间.
> 我们约定 $\mathbb{F}^n$ 中的元素总是列向量.
> 其中 $\mathbb{C}^n$ 和 $\mathbb{R}^n$ 是本课程中最基本的线性空间.

试证明: 加法交换律可由余下的几条公理推出.

Proof: (存疑，似乎是伪证)
记 $0_{\mathbb{F}}$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的加法单位元，$\times:\mathbb{F}\times\mathbb{F}\mapsto\mathbb{F}$ 为域 $\mathbb{F}$ 上的乘法.
(反证法) 假设存在 $u,v\in V$ 使得 $u+v\neq v+u$，则我们有:

$$\begin{aligned}u+v&\neq v+u\\&\Updownarrow\\0_V=(-u)+u+v+(-v)&\neq(-u)+v+u+(-v)\\&=(-1_V)\cdot(u+(-v))+1_V\cdot(u+(-v))\\&=((-1_V)+1_V)\cdot(u+(-v))\\&=0_{\mathbb{F}}\cdot(u+(-v))\\&=0_V\end{aligned}$$

从而导出矛盾.
因此对于任意 $u,v\in V$ 都有 $u+v=v+u$ 成立.

Problem 9

证明 $\mathbb{C}$ 上 n 阶 Hermite 矩阵的全体以及 n 阶反 Hermite 矩阵的全体都不是 $\mathbb{C}$ 上的线性空间,
但都是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，并求出它们的维数.

- **Note:** 根据复矩阵的 Toeplitz 分解我们知道 $\mathbb{C}^{n\times n}=\mathcal{H}_n\oplus\mathrm{i}\mathcal{H}_n=\mathcal{H}_n\oplus\mathcal{K}_n$.
  注意到 $\mathcal{H}_n$ 和 $\mathcal{K}_n$ 之间存在同构关系 $\Phi:\mathcal{H}_n\mapsto\mathcal{K}_n$ (由 $\Phi(A):=\mathrm{i}A\ (\forall\ A\in\mathcal{H}_n)$ 定义),
  又注意到 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 $2n^2$ 维线性空间,
  因此我们可以猜出 $\mathcal{H}_n$ 和 $\mathcal{K}_n$ 的维数为 n^2.

Solution:
记 $\mathbb{C}$ 上 n 阶 Hermite 矩阵的全体所构成的集合为 $\mathcal{H}_n := \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : A^{\mathrm{H}} = A\}$.
记 $\mathbb{C}$ 上 n 阶反 Hermite 矩阵的全体所构成的集合为 $\mathcal{K}_n := \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : A^{\mathrm{H}} = -A\}$.

注意到单位阵 $I_n \in \mathcal{H}_n$，而 $\mathrm{i}I_n \notin \mathcal{H}_n$，
这说明 $\mathcal{H}_n$ 对复数标量乘法不封闭，因此 $\mathcal{H}_n$ 不是 $\mathbb{C}$ 上的线性空间.
注意到 $\mathrm{i}I_n \in \mathcal{K}_n$，而 $\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}I_n = -I_n \notin \mathcal{K}_n$，
这说明 $\mathcal{K}_n$ 对复数标量乘法不封闭，因此 $\mathcal{K}_n$ 不是 $\mathbb{C}$ 上的线性空间.

下面我们说明 $\mathcal{H}_n$ 和 $\mathcal{K}_n$ 均是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

- 首先，$\mathcal{H}_n$ 和 $\mathcal{K}_n$ 均是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 的子集，且包含 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 的零元 $0_{n\times n}$ (即矩阵加法的单位元).
- 其次，$\mathcal{H}_n$ 和 $\mathcal{K}_n$ 对矩阵加法封闭.
  对于任意 $A, B \in \mathcal{H}_n$，我们都有
  $$(A+B)^{\mathrm{H}} = A^{\mathrm{H}} + B^{\mathrm{H}} = A + B,$$
  即有 $A + B \in \mathcal{H}_n$ 成立.
  对于任意 $A, B \in \mathcal{K}_n$，我们都有
  $$(A+B)^{\mathrm{H}} = A^{\mathrm{H}} + B^{\mathrm{H}} = -A - B = -(A+B),$$
  即有 $A + B \in \mathcal{K}_n$ 成立.
- 最后，$\mathcal{H}_n$ 和 $\mathcal{K}_n$ 对实数标量乘法封闭.
  对于任意 $A \in \mathcal{H}_n$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$，我们都有
  $$(\alpha A)^{\mathrm{H}} = \alpha A^{\mathrm{H}} = \alpha A,$$
  即有 $\alpha A \in \mathcal{H}_n$ 成立.
  对于任意 $A \in \mathcal{K}_n$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$，我们都有
  $$(\alpha A)^{\mathrm{H}} = \alpha A^{\mathrm{H}} = \alpha \cdot (-A) = -\alpha A,$$
  即有 $\alpha A \in \mathcal{K}_n$ 成立.

综上所述，若将 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 视为 $\mathbb{R}$ 上的 $2n^2$ 维线性空间，
则 $\mathcal{H}_n$ 和 $\mathcal{K}_n$ 均是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 的线性子空间，因而也是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

最后我们说明 $\mathcal{H}_n$ 和 $\mathcal{K}_n$ 的维数均为 n^2.

- 定义 $E_{i,j}$ 为 (i,j) 位置元素为 1，其余元素为 0 的 n 阶方阵.
- 对于 $\mathcal{H}_n$ 来说，条件 $A^{\mathrm{H}} = A$ 等价于 $a_{i,i} \in \mathbb{R}$ 且 $\overline{a_{j,i}} = a_{i,j}$ $(\forall\, i < j)$.
  因此 $\mathcal{H}_n$ 的每个对角元有 1 个自由度，每个严格上三角元有 2 个自由度，
  对应的基为 $\{E_{i,i} : i = 1, \dots, n\} \cup \{E_{i,j} + E_{j,i} : i < j\} \cup \{\mathrm{i}(E_{i,j} - E_{j,i}) : i < j\}$，
  因此 $\mathcal{H}_n$ 的维数为 $n + 2\cdot n(n-1)/2 = n^2$.
- 对于 $\mathcal{K}_n$ 来说，条件 $A^{\mathrm{H}} = -A$ 等价于 $\mathrm{i}\cdot a_{i,i} \in \mathbb{R}$ 且 $\overline{a_{j,i}} = -a_{i,j}$ $(\forall\, i < j)$.
  因此 $\mathcal{K}_n$ 的每个对角元有 1 个自由度，每个严格上三角元有 2 个自由度，
  对应的基为 $\{\mathrm{i}E_{i,i} : i = 1, \dots, n\} \cup \{E_{i,j} - E_{j,i} : i < j\} \cup \{\mathrm{i}(E_{i,j} + E_{j,i}) : i < j\}$，
  因此 $\mathcal{K}_n$ 的维数为 $n + 2\cdot n(n-1)/2 = n^2$.

Problem 10

证明 $\{f(x) \in \mathbb{Q}[x] : (x-1)f(x+1) - (x+2)f(x) \equiv 0\}$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间，
并求它的维数和一组基.

- **Note:** 本例我们默认 $\mathbb{Q}[x]$ 中任意形式多项式 $f(\cdot)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$.

Solution:
首先我们说明 $\mathcal{P} = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] : (x-1)f(x+1) - (x+2)f(x) \equiv 0\}$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间.

- ① $\mathcal{P}$ 对多项式加法封闭.
  对于任意 $f, g \in \mathcal{P}$，我们都有:

$$
\begin{aligned}
&(x-1)(f(x+1)+g(x+1))-(x+2)(f(x)+g(x)) \\
&=((x-1)f(x+1)-(x+2)f(x))+((x-1)g(x+1)-(x+2)g(x)) \\
&=0+0 \\
&=0,
\end{aligned}
\quad (\forall\, x\in\mathbb{R})
$$

即有 $f+g\in\mathcal{P}$ 成立.

- ② $\mathcal{P}$ 对有理数标量数乘封闭.
  对于任意 $f\in\mathcal{P}$ 和 $\alpha\in\mathbb{Q}$，我们都有:

$$
\begin{aligned}
&(x-1)(\alpha f(x+1))-(x+2)(\alpha f(x)) \\
&=\alpha((x-1)f(x+1)-(x+2)f(x)) \\
&=\alpha\cdot 0 \\
&=0,
\end{aligned}
\quad (\forall\, x\in\mathbb{R})
$$

  即有 $\alpha f\in\mathcal{P}$ 成立.

综上所述，若将 $\mathbb{Q}[x]$ 视为 $\mathbb{Q}$ 上的无限维线性空间，
则 $\mathcal{P}$ 是 $\mathbb{Q}[x]$ 的线性子空间，因而也是 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间.

下面我们来确定 $\mathcal{P}$ 的维数和基.
设 n 次非零多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ $(a_n\neq 0,\ n\geq 1)$ 属于 $\mathcal{P}$，
则对于任意 $x\in\mathbb{R}$，我们都有:

$$
\begin{aligned}
0&=(x-1)f(x+1)-(x+2)f(x) \\
&=(x-1)(a_n(x+1)^n+a_{n-1}(x+1)^{n-1}+\cdots+a_1(x+1)+a_0)-(x+2)(a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0) \\
&=0\cdot x^{n+1}+(n-3)a_n\cdot x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x+b_0.
\end{aligned}
$$

因此 n 次项系数 $(n-3)a_n=0$，由 $a_n\neq 0$ 可知 $n=3$.
这说明，除零多项式外，$\mathcal{P}$ 的所有元素的度数都必须是 3.

设 3 次非零多项式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ 属于 $\mathcal{P}$，
则对于任意 $x\in\mathbb{R}$，我们都有:

$$
\begin{aligned}
0&=(x-1)f(x+1)-(x+2)f(x) \\
&=(x-1)(a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d)-(x+2)(ax^3+bx^2+cx+d) \\
&=0\cdot x^4+0\cdot x^3+(-b)\cdot x^2+(-2a-b-2c)\cdot x+(-a-b-c-3d).
\end{aligned}
$$

因此我们有:

$$
\begin{cases}
-b=0 \\
-2a-b-2c=0 \\
-a-b-c-3d=0,
\end{cases}
$$

解得:

$$
\begin{cases}
b=0 \\
c=-a \quad (a\neq 0) \\
d=0.
\end{cases}
$$

这说明除零多项式外，$\mathcal{P}$ 的所有元素都形如 $a(x^3-x)$ $(a\neq 0)$.
因此 $\mathcal{P}$ 的维数为 1，基为 $\{x^3-x\}$.

Problem 11

给定正整数 n 和实矩阵 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$.
试证明当且仅当 A 是对称阵或反对称阵时，对于任意 $x,y\in\mathbb{R}^n$ 都有 $(y^{\mathrm{T}}Ax)^2=(x^{\mathrm{T}}Ay)^2$ 成立.

- **Lemma:**
  给定正整数 n.
  若 $\mathbb{F}$ 是一个域，则 $\mathbb{F}^n$ 不能表示为它的两个真子空间的并.
  (证明过程参见 $\text{Homework 05 Problem 01}$)

Solution:
首先证明充分性.

- 若 A 是对称阵，则对于任意 $x,y\in\mathbb{R}^n$ 我们都有:

$$\begin{aligned}(y^{\mathrm{T}}Ax)^2 &= (x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}y)^2 \quad (\text{note that } A^{\mathrm{T}} = A) \\ &= (x^{\mathrm{T}}Ay)^2.\end{aligned}$$

- 若 A 是反对称阵，则对于任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 我们都有:

$$\begin{aligned}(y^{\mathrm{T}}Ax)^2 &= (x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}y)^2 \quad (\text{note that } A^{\mathrm{T}} = -A) \\ &= (-x^{\mathrm{T}}Ay)^2 \\ &= (x^{\mathrm{T}}Ay)^2.\end{aligned}$$

因此若 A 是对称阵或反对称阵，则对于任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 我们都有 $(y^{\mathrm{T}}Ax)^2 = (x^{\mathrm{T}}Ay)^2$ 成立.

下面证明必要性.
记 A 的 Toeplitz 分解为 $A = S + K$，其中:

$$S := \frac{A + A^{\mathrm{T}}}{2}, \quad K := \frac{A - A^{\mathrm{T}}}{2}.$$

定义:

$$\begin{aligned}s(x,y) &:= y^{\mathrm{T}}Sx \\ k(x,y) &:= y^{\mathrm{T}}Kx\end{aligned} \quad (\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n)$$

设对于任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 都有 $(y^{\mathrm{T}}Ax)^2 = (x^{\mathrm{T}}Ay)^2$ 成立，则我们有:

$$\begin{aligned}(s(x,y) + k(x,y))^2 &= (y^{\mathrm{T}}Sx + y^{\mathrm{T}}Kx)^2 \\ &= (y^{\mathrm{T}}Ax)^2 \\ &= (x^{\mathrm{T}}Ay)^2 \\ &= (y^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}x)^2 \\ &= (y^{\mathrm{T}}S^{\mathrm{T}}x + y^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}x)^2 \quad (\text{note that } S^{\mathrm{T}} = S,\ K^{\mathrm{T}} = -K) \\ &= (y^{\mathrm{T}}Sx - y^{\mathrm{T}}Kx)^2 \\ &= (s(x,y) - k(x,y))^2.\end{aligned}$$

于是对于任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$，我们都有:

$$s(x,y)k(x,y) = \frac{(s(x,y) + k(x,y))^2 - (s(x,y) - k(x,y))^2}{4} = 0.$$

因此对于任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$，$s(x,y) = y^{\mathrm{T}}Sx = 0$ 和 $k(x,y) = y^{\mathrm{T}}Kx = 0$ 都至少有一个成立，
进而可知对于任意 $x \in \mathbb{R}^n$，$Sx = 0_n$ 和 $Kx = 0_n$ 都至少有一个成立，
这说明 $\mathrm{Ker}(S) \cup \mathrm{Ker}(K) = \mathbb{R}^n$.

(反证法) 假设 S, K 均不为零矩阵，则 $\mathrm{Ker}(S)$ 和 $\mathrm{Ker}(K)$ 都是 $\mathbb{R}^n$ 的真子空间.
根据 Lemma 可知这与 "$\mathrm{Ker}(S) \cup \mathrm{Ker}(K) = \mathbb{R}^n$" 的结论相矛盾.
因此 S, K 至少有一个为零矩阵.
故 $A = S + K$ 一定是对称阵或反对称阵.

The End