FDU 复杂系统 0. An Introduction

本文参考以下教材:

- Nonlinear Dynamics and Chaos (S. Strogatz) Chapter 1
- 非线性动力学与混沌 (S. Strogatz) 第 1 章

欢迎批评指正!

0.1 动力学简史

17 世纪初，Kepler 根据 Tycho 观测到的火星位置数据提出了 Kepler 行星运动定律.
17 世纪中期，Newton 提出了万有引力定律和 Newton 三大定律，同时使用微分方程解决了两体问题.
后来的学者尝试把 Newton 的解析方法推广到三体问题，
结果发现求解三个天体运动的显式解析解问题根本不可能解决，

18 世纪，Euler 和 Lagrange 发现了受限三体问题的 Lagrange 点.
19 世纪，Poincaré 引入了定性而非定量研究问题的观点，提出对三体系统的稳定性进行定性分析.
他还发现了混沌 (chaos)，即确定性系统展示出敏感依赖于初始条件的非周期行为，从而导致不可能进行长期的预测.

20 世纪上半叶，非线性振子在无线电、 雷达、激光等技术的发展中有重要应用，同时也刺激了新理论的出现:

- Van der Pol 振子方程: 典型的非线性自激振子.
- Smale: 拓扑动力学萌芽、马蹄映射、混沌严格定义.
- Kolmogorov–Arnold–Moser 理论: Hamilton 系统 (例如太阳系) 的长期稳定性.

20 世纪中叶，计算机模拟技术使得人们能对非线性系统进行直观的研究.
1963 年，Lorenz 研究了一个简化的大气对流模型，发现了奇怪吸引子上的混沌运动.
他发现该方程的解无法稳定到平衡点或者周期状态，而是以不规则的非周期的方式持续振动;
而且，只要初始条件稍微变动，则方程的解的振动模式将变得完全不同.
这意味着大气状态 (或其他混沌系统) 对测量误差非常敏感，具有不可预测性.
但是 Lorenz 也发现了混沌的特定结构——当画出三维图形时，方程的解落在一个形如蝴蝶的点集上.

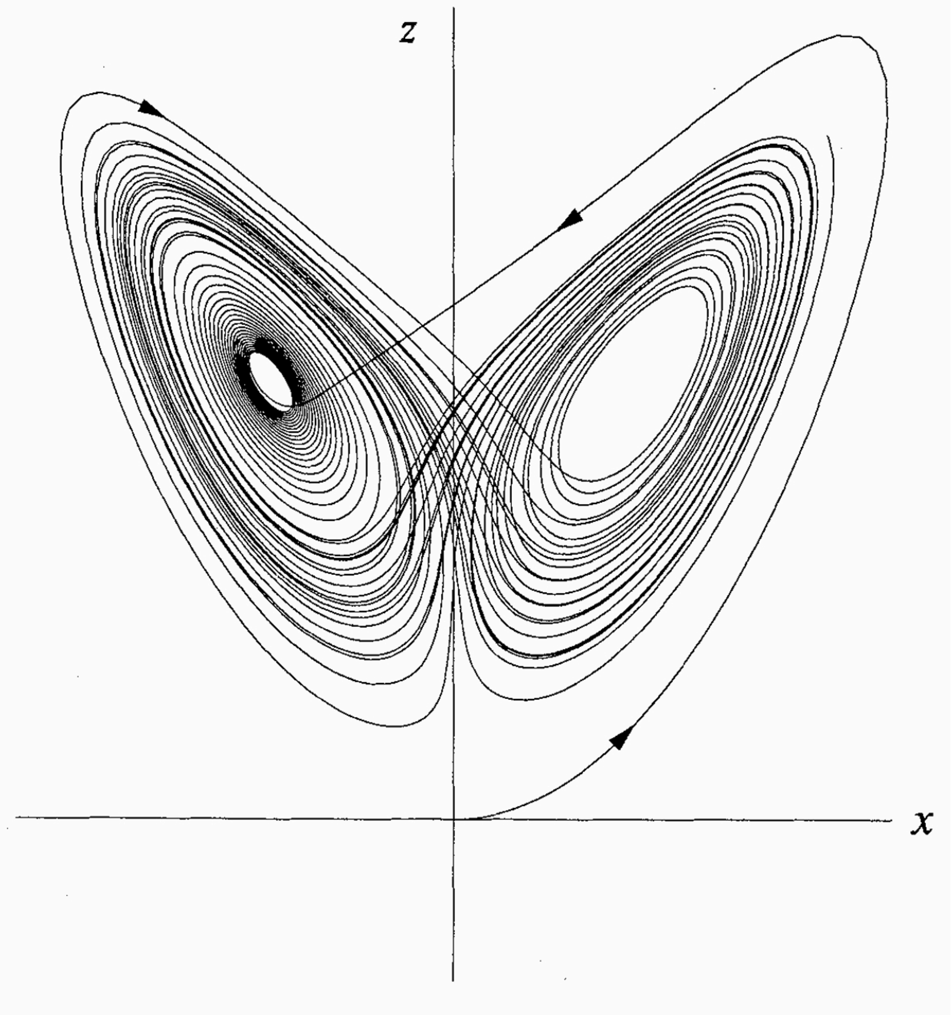


Figure 1.1.1

20 世纪 70 年代，混沌理论进入快速发展时期.

- 1971 年，Ruelle 与 Takens 在抽象考虑奇怪吸引子的基础上，提出了流体中出现湍流的理论.
- 1974 年，Winfree 将动力学的几何方法引入生物振荡 (例如心脏节律) 的研究中.
- 1975 年，Mandelbrot 明确并普及了分形，利用计算机生成了大量分形图形.
- 1976 年，May 通过对简单的种群模型进行迭代研究，发现了混沌行为.
- 1978 年，Feigenbaum 发现从规则转变到混沌的一般规律; 粗略地讲，完全不同的系统能以相同的方式进入混沌.
  他的研究建立了由炖和相变的联系，吸引众多物理学家研究动力学.

21 世纪初至今:

- 复杂网络/网络科学 (例如无标度网络、小世界网络、ER 网络)
- 复杂系统: 维度高、有交互关系、有复杂的动力学机制、非线性、多尺度、随机性.

Dynamics - A Capsule History

1666	Newton	Invention of calculus, explanation of planetary motion
1700s		Flowering of calculus and classical mechanics
1800s		Analytical studies of planetary motion
1890s	Poincaré	Geometric approach, nightmares of chaos
1920–1950		Nonlinear oscillators in physics and engineering, invention of radio, radar, laser
1920–1960	Birkhoff Kolmogorov Arnol'd Moser	Complex behavior in Hamiltonian mechanics
1963	Lorenz	Strange attractor in simple model of convection
1970s	Ruelle & Takens	Turbulence and chaos
	May	Chaos in logistic map
	Feigenbaum	Universality and renormalization, connection between chaos and phase transitions
		Experimental studies of chaos
	Winfree	Nonlinear oscillators in biology
	Mandelbrot	Fractals
1980s		Widespread interest in chaos, fractals, oscillators, and their applications

0.2 基本术语

动力学系统主要分为两类: 微分方程和差分方程，分别用于描述系统在连续时间与离散时间下的演化过程.
本课程将重点探讨微分方程 (特别是常微分方程)，因为其在科学与工程领域中的应用更为广泛.

与形如 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = f(x)$ 的方程等价的系统称为**自治系统** (autonomous system)，因为它不含显式的时间项.
与形如 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = f(x,t)$ 的方程等价的系统称为**非自治系统** (nonautonomous system)，因为它显式依赖于时间 t.
通过引入新变量 $\tilde{x} = [x^{\mathrm{T}}, t]^{\mathrm{T}}$，我们可将 n 维非自治系统等价表示为 $n+1$ 维自治系统.
例如受迫阻尼简谐振子 (forced damped harmonic oscillator) 的方程:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = F\cos(t),$$

其中 m 代表振子质量，b 代表阻尼系数，k 代表劲度系数，F 是周期外力的振幅.
引入新变量 $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ 和 $x_3 = t$，便可将上述方程表示为如下等价系统:

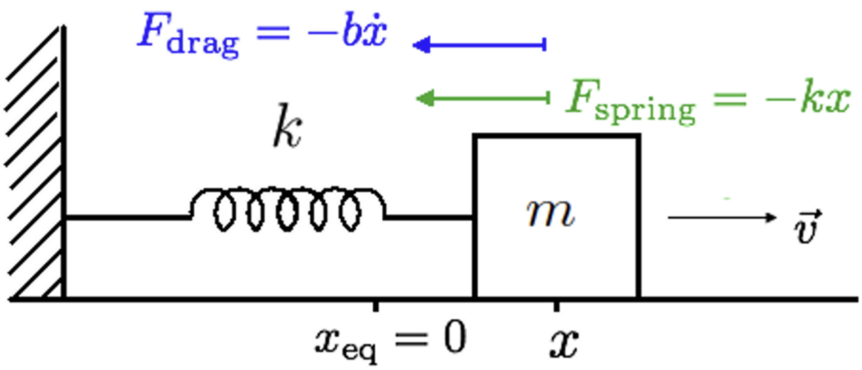
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}x_2/\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}x_3/\mathrm{d}t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2\\ (-kx_1 - bx_2 + F\cos(x_3))/m\\ 1\end{bmatrix}.$$

这样我们就将 2 维非自治系统等价表示为 3 维自治系统.
本课程默认讨论自治系统，因为它可以更简洁地揭示非线性动力学的核心思想.

与形如 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = Ax + b$ 的方程等价的系统称为**线性系统** (linear system).
例如阻尼简谐振子 (damped harmonic oscillator) 的方程:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0,$$

其中 m 代表振子质量，b 代表阻尼系数，k 代表劲度系数.



引入新变量 $x_1 = x$ 和 $x_2 = \dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$，便可将上述方程表示为如下等价系统:

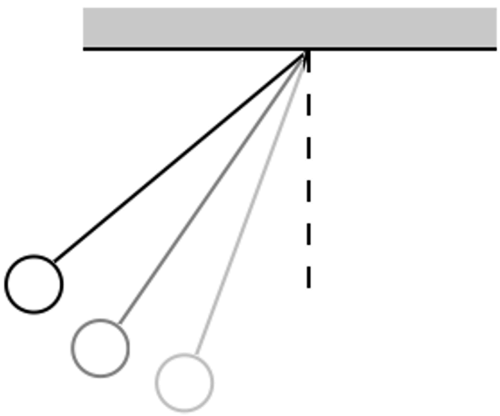
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x_2/\mathrm{d}t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2 \\ -(kx_1 + bx_2)/m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -k/m & -b/m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix}.$$

方程的右端项可以写成 $[x_1, x_2]^{\mathrm{T}}$ 的仿射变换，因此它是线性系统.

不能等价表示为形如 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = Ax + b$ 的方程的系统称为**非线性系统** (nonlinear system).
例如单摆运动 (simple pendulum motion) 的方程:

$$\ddot{x} + \frac{g}{L}\sin(x) = 0,$$

其中 g 为重力加速度，L 为摆线长度.



引入新变量 $x_1 = x$ 和 $x_2 = \dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$，便可将上述方程表示为如下等价系统:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}x_2/\mathrm{d}t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_2 \\ -g\sin(x_1)/L\end{bmatrix}.$$

方程的右端项无法写成 $[x_1, x_2]^{\mathrm{T}}$ 的仿射变换，因此它是非线性系统.

The End