期中考试 (2025 春)

Problem 1

设 X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 为取自 $N(0,1)$ 的简单随机样本，
求 C 使得 $C(X_1+X_2)/\sqrt{X_3^2+X_4^2+X_5^2}$ 服从 t 分布，并说明 C 是否唯一.

- 若 $\begin{cases} Z \sim N(0,1) \\ X \sim \chi^2(k) \\ Z \perp X \end{cases}$，则称 $Y = \frac{Z}{\sqrt{X/k}}$ 的分布为自由度为 k 的 t **分布**，记为 $t(k)$

Solution:
首先证明 $X_1 + X_2 \sim N(0,2)$:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$X_1 + X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = N(0,2)$$

其次我们知道 $X_3^2 + X_4^2 + X_5^2 \sim \chi^2(3)$
注意到 $(X_1+X_2) \perp (X_3^2+X_4^2+X_5^2)$，根据定义可知:

$$\frac{\pm(X_1+X_2)/\sqrt{2}}{\sqrt{(X_3^2+X_4^2+X_5^2)/3}} \sim t(3)$$

于是 $C = \pm\sqrt{3/2} = \pm\sqrt{6}/2$，其取值并不唯一.

Problem 2

考虑取自以下分布族的简单随机样本 $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$:

$$p(x;\theta) = \theta x^{\theta-1} I_{(0,1)}(x) \quad (\theta > 0)$$

(1) 计算 θ 的矩估计量
Solution:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \int_0^1 x \cdot \theta x^{\theta-1} \mathrm{d}x \\ &= \theta \int_0^1 x^\theta \mathrm{d}x \\ &= \theta \cdot \frac{x^{\theta+1}}{\theta+1} \Big|_0^1 \\ &= \frac{\theta}{\theta+1} \end{aligned}$$

因此矩估计量 $\hat{\theta}_{\text{MOM}} := \overline{X}/(1-\overline{X})$，其中 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$

---

(2) 计算 θ 的 MLE
Solution:
对数似然:

$$
\begin{aligned}
l(\theta) &= \sum_{i=1}^{n} \log p(x_i;\theta) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \log\left(\theta x_i^{\theta-1}\right) \\
&= n\log\theta + (\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\log x_i
\end{aligned}
$$

对 θ 求导并求解驻点可得:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial\theta} l(\theta) = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n}\log x_i = 0 \\
\Downarrow \\
\hat{\theta} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\log x_i}
\end{gathered}
$$

注意到二阶导 $\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} l(\theta) = -\frac{n}{\theta^2} < 0$，故该驻点为极大值点.
因此极大似然估计量为:

$$
\hat{\theta}_{\text{MLE}} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\log X_i}
$$

---

(3) 此分布族是否完备?

- **定义: (分布族的完备性)**
  任意给定 X 的函数 ϕ,
  若根据 $\mathbb{E}_{\theta}[\phi(X)] = 0 \ \ (\forall\, \theta\in\Theta)$ (即 $\phi(X)$ 是 0 的**无偏估计量**)
  都能推出 $\mathrm{P}_{\theta}\{\phi(X)=0\} = 1 \ \ (\forall\, \theta\in\Theta)$ 成立 (意味着 $\phi(X)$ 必须**几乎处处**为 0),
  则我们称分布族 $\mathscr{F}_X = \{F_X(\theta) : \theta\in\Theta\}$ 为**完备的**.

Solution:
任意给定 X 的函数 ϕ,
假设有 $\mathrm{E}_{\theta}[\phi(X)] = \int_0^1 \phi(x)\cdot\theta x^{\theta-1}\mathrm{d}x = 0 \ \ (\forall\,\theta>0)$ 成立,
即有 $\int_0^1 \phi(x) x^{\theta-1}\mathrm{d}x = 0 \ (\forall\,\theta>0)$ 成立.
记 $\varphi(u) := \phi(e^{-u})$，则我们有:

$$
\int_0^1 \phi(x)x^{\theta-1}\mathrm{d}x = -\int_0^{\infty}\varphi(u)e^{-\theta u}\mathrm{d}u = -\mathcal{L}\{\varphi\}(\theta) = 0 \quad (\forall\,\theta>0)
$$

其中 $\mathcal{L}$ 为 Laplace 变换.

根据 Laplace 变换的唯一性可知函数 $\varphi(u)$ 在 $(0,\infty)$ 上几乎处处为 0,
因此函数 $\phi(x)$ 在 $(0,\infty)$ 上几乎处处为 0，于是有 $\mathrm{P}\{\phi(X)=0\} = 1$.
根据定义可知题干的分布族是完备的.

Problem 3

设 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为取自分布 $f(x;\theta)$ $(\theta\in\Theta)$ 的简单随机样本.
试证明次序统计量 $T(X) = (X_{(1)}, X_{(2)}, \dots, X_{(n)})$ 是充分的.
特殊地，若 $f(x;\theta)$ 是 $[0,\theta]$ 上的均匀分布，则 $X_{(n)}$ 是充分统计量.

- **定理 $1.3.5$: (因子化定理, 数理统计讲义 命题 $1.5.6$)**
  设样本的可能分布族为 $\mathscr{F}_X = \{f_X(x;\theta) : \theta\in\Theta\}$
  其中 $f_X(x;\theta)$ 为分布密度或离散的概率分布,
  则统计量 $T = T(X)$ 为分布族 $\mathscr{F}_X$ 参数 θ 的**充分统计量**的**充要条件**是:
  对于任意 $\theta\in\Theta$，$f_X(x;\theta)$ 都可分解为 $g(T(x);\theta)\cdot h(x)$,
  其中 $h(x)$ 是与 θ 无关的**非负函数**.
  - 根据下面的必要性证明,
    我们可以知道 $g(T(x);\theta)$ 可以是 $f_T(T(x);\theta)$,

而 $h(x)$ 可以是 $\mathrm{P}\{X=x|T(X)=T(x)\}$
(由于 $T(X)$ 此时是充分统计量，故这个条件概率与 θ 无关)
但实际应用时可能相差一些因式 (例如常数).

Solution:
简单起见，假设此分布为连续型分布，$f(x;\theta)$ 为概率密度函数.
将 X 的联合密度写成因子化的形式:

$$\begin{aligned} f_X(x;\theta) &= \prod_{i=1}^n f(x_i;\theta) \\ &= \prod_{i=1}^n f(x_{(i)};\theta) \end{aligned}$$

考虑统计量 $T(X)=(X_{(1)},\dots,X_{(n)})$
记 $\begin{cases} g(T(x);\theta)=g(T(X);\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_{(i)};\theta) \\ h(x)\equiv 1 \end{cases}$
根据因子化定理我们知道，$T(X)=(X_{(1)},\dots,X_{(n)})$ 是参数 θ 的充分统计量.

特殊地，设 $X=(X_1,\dots,X_n)$ 为取自为**均匀分布族** $\mathscr{P}_\xi=\{\text{Uniform}(0,\theta):\theta\in(0,\infty)\}$ 的简单随机样本.
记 $x=(x_1,\dots,x_n)$，则我们有:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{X=x\} &= \mathrm{P}\{X_1=x_1,\dots,X_n=x_n\} \\ &= \prod_{i=1}^n \mathrm{P}\{\text{Uniform}(0,\theta)=x_i\} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} I(0<x_i<\theta) \\ &= \frac{1}{\theta^n} I(\max_{1\le i\le n} x_i<\theta) I(\min_{1\le i\le n} x_i>0) \end{aligned}$$

考虑统计量 $T(X)=\max\{X_i\}=X_{(n)}$
记 $\begin{cases} g(T(x);\theta)=g(\max\{x_i\};\theta)=\frac{1}{\theta^n}I(\max\{x_i\}<\theta) \\ h(x)=I(\min\{x_i\}>0) \end{cases}$
根据因子化定理我们知道，$T(X)=\max\{X_i\}=X_{(n)}$ 是参数 θ 的充分统计量.

Problem 4

考虑简单随机样本 $X=(X_1,\dots,X_n)$，计算 $\text{Cov}(\hat{F}_n(x),\hat{F}_n(y))$
其中 $\hat{F}_n(\cdot)$ 是经验分布函数:

$$\hat{F}_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n I_{[X_i,\infty)}(x)=\begin{cases} 0, & x<X_{(1)} \\ \frac{k}{n}, & X_{(k)}\le n<X_{(k+1)} \ \ (1\le k\le n-1) \\ 1, & x\ge X_{(n)} \end{cases}$$

Solution:
记 $I_i(x)=\mathbb{1}\{X_i\le x\}$，根据定义我们有:

$$\begin{aligned} \hat{F}_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i\le x\}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n I_i(x) \\ \hat{F}_n(y) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i\le y\}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n I_i(y) \end{aligned}$$

于是我们有:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(\hat{F}_n(x), \hat{F}_n(y)) &= \mathrm{Cov}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n I_i(x), \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n I_j(y)\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \mathrm{Cov}(I_i(x), I_j(y)) \quad (\text{note that } \mathrm{Cov}(I_i(x), I_j(y)) = 0 \text{ when } i \neq j) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{Cov}(I_i(x), I_i(y)) \\
&= \frac{n}{n^2}\mathrm{Cov}(I_1(x), I_1(y)) \\
&= \frac{1}{n}(\mathbb{E}[I_1(x)I_1(y)] - \mathbb{E}[I_1(x)]\mathbb{E}[I_1(y)]) \\
&= \frac{1}{n}(\mathrm{P}\{X_1 \leq x, X_1 \leq y\} - \mathrm{P}\{X_1 \leq x\}\mathrm{P}\{X_1 \leq y\}) \\
&= \frac{1}{n}(F(\min\{x, y\}) - F(x)F(y))
\end{aligned}
$$

特别地，当 $x = y$ 时我们有 $\mathrm{Var}(\hat{F}_n(x)) = F(x)(1 - F(x))/n$.

Problem 5

设简单随机样本 $X = (X_1, \ldots, X_n)$ 取自某个均值为 μ，方差为 σ^2 的分布.
试证明:

$$
\rho(X_i - \overline{X}, X_j - \overline{X}) = \begin{cases} 1, & \text{if } i = j \\ -\frac{1}{n-1}, & \text{if } i \neq j \end{cases}
$$

Solution:
先算协方差 ($i \neq j$ 的情形):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_i - \overline{X}, X_j - \overline{X}) &= \mathrm{Cov}(X_i, X_j) - \mathrm{Cov}(X_i, \overline{X}) - \mathrm{Cov}(\overline{X}, X_j) + \mathrm{Cov}(\overline{X}, \overline{X}) \\
&= 0 - \mathrm{Cov}(X_i, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k) - \mathrm{Cov}(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k, X_j) + \mathrm{Var}(\overline{X}) \\
&= -\frac{1}{n}\mathrm{Var}(X_i) - \frac{1}{n}\mathrm{Var}(X_j) + \frac{\sigma^2}{n} \\
&= -\frac{1}{n}\sigma^2 - \frac{1}{n}\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} \\
&= -\frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}
$$

再算方差:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X_i - \overline{X}) &= \mathrm{Var}(X_i) + \mathrm{Var}(\overline{X}) - 2\mathrm{Cov}(X_i, \overline{X}) \\
&= \sigma^2 + \frac{\sigma^2}{n} - 2 \cdot \frac{\sigma^2}{n} \\
&= \sigma^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{n-1}{n}\sigma^2
\end{aligned}
$$

因此我们有:

$$
\begin{aligned}
\rho(X_i - \overline{X}, X_j - \overline{X}) &= \frac{\mathrm{Cov}(X_i - \overline{X}, X_j - \overline{X})}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_i - \overline{X})\mathrm{Var}(X_j - \overline{X})}} \\
&= \begin{cases} 1, & \text{if } i = j \\ \frac{-\sigma^2/n}{\sqrt{((n-1)\sigma^2/n)\cdot((n-1)\sigma^2/n)}} = -\frac{1}{n-1}, & \text{if } i \neq j \end{cases}
\end{aligned}
$$

Problem 6

设 $X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{\text{i.i.d.}}{\sim} \text{Uniform}(0, \theta)$
记极差 $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ 和两极中心 $V = \frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)})$
分别计算 R, V 的概率密度函数.

- > **定理 $1.3.4$: (次序统计量的联合概率密度函数, 数理统计讲义 命题 $1.4.7$)**
  > 设 $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ 为对应于简单随机样本 $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 的次序统计量,
  > (我们可以看作存在映射关系 $T(X_1, X_2, \ldots, X_n) = (X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)})$)
  > 总体分布具有分布函数 F 和概率密度函数 f.
  > 则对于任意 $\begin{cases} 1 \leq r \leq n \\ 1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n \end{cases}$
  > $(X_{(j_1)}, X_{(j_2)}, \ldots, X_{(j_r)})$ 具有联合概率密度函数:
  >
  > $$\begin{aligned} & f_{X_{(j_1)}, X_{(j_2)}, \ldots, X_{(j_r)}}(y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_r}) \\ & = \frac{n!}{(j_1-1)!(j_2-j_1-1)! \ldots (j_r-j_{r-1}-1)!(n-j_r)!} \\ & \quad \times [F(y_{j_1})]^{j_1-1} [F(y_{j_2}) - F(y_{j_1})]^{j_2-j_1-1} \cdots [F(y_{j_r}) - F(y_{j_{r-1}})]^{j_r-j_{r-1}-1} [1 - F(y_{j_r})]^{n-j_r} \\ & \quad \times f(y_{j_1}) f(y_{j_2}) \cdots f(y_{j_r}) \\ & \quad \times I(y_{j_1} < y_{j_2} < \cdots < y_{j_r}) \end{aligned}$$

Solution:
根据引理可知 $X_{(1)}, X_{(n)}$ 的联合概率密度函数为:

$$\begin{aligned} & f_{X_{(1)}, X_{(n)}}(x_1, x_n) \\ & = \frac{n!}{(1-1)!(n-1-1)!(n-n)!} [F(x_1)]^{1-1} [F(x_n) - F(x_1)]^{n-1-1} [1 - F(x_n)]^{n-n} f(x_1) f(x_n) I(0 < x_1 < x_n < \theta) \\ & = n(n-1)(F(x_n) - F(x_1))^{n-2} f(x_1) f(x_2) I(0 < x_1 < x_n < \theta) \\ & = n(n-1)\left(\frac{x_n}{\theta} - \frac{x_1}{\theta}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{\theta} \cdot \frac{1}{\theta} \cdot I(0 < x_1 < x_n < \theta) \\ & = \frac{n(n-1)}{\theta^n}(x_n - x_1)^{n-2} I(0 < x_1 < x_n < \theta) \end{aligned}$$

记极差 $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ 和两极中心 $V = \frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)})$.
反变换为:

$$X_{(1)} = V - \frac{R}{2}, \quad X_{(n)} = V + \frac{R}{2}$$

Jacobi 行列式为:

$$J(x_1, x_n) = \begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial x_1} & \frac{\partial r}{\partial x_n} \\ \frac{\partial v}{\partial x_1} & \frac{\partial v}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -1$$

于是 R, V 的联合概率密度函数为:

$$\begin{aligned} f_{R,V}(r, v) &= f_{X_{(1)}, X_{(n)}}(x_1, x_2) \cdot |J(x_1, x_n)|^{-1} \\ &= \frac{n(n-1)}{\theta^n}(x_n - x_1)^{n-2} I(0 < x_1 < x_n < \theta) \cdot |-1|^{-1} \\ &= \frac{n(n-1)}{\theta^n} r^{n-2} I(0 < v - \frac{r}{2} < v + \frac{r}{2} < \theta) \end{aligned}$$

因此 R, V 的边际概率密度函数为:

$$
\begin{aligned}
f_R(r) &= \int_{r/2}^{\theta-r/2} f_{R,V}(r,v)\mathrm{d}v \\
&= \int_{r/2}^{\theta-r/2} \frac{n(n-1)}{\theta^n} r^{n-2}\mathrm{d}v \\
&= \frac{n(n-1)}{\theta^n} r^{n-2}(\theta-r)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_V(v) &= \int_0^{\min\{2v,2(\theta-v)\}} f_{R,V}(r,v)\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{\min\{2v,2(\theta-v)\}} \frac{n(n-1)}{\theta^n} r^{n-2}\mathrm{d}r \\
&= \frac{n(n-1)}{\theta^n} \cdot \frac{(\min\{2v, 2(\theta-v)\})^{n-1}}{n-1} \\
&= \frac{n}{\theta^n}(\min\{2v, 2(\theta-v)\})^{n-1} \\
&= \begin{cases} n(2v)^{n-1}/\theta^n, & \text{if } 0 < v < \theta/2 \\ n(2(\theta-v))^{n-1}/\theta^n, & \text{if } \theta/2 \le v < \theta \end{cases}
\end{aligned}
$$

The End