FDU 高等线性代数 0. 基础知识

本文根据邵美悦老师授课内容整理而成，并参考了以下资料:

- Matrix Analysis (R. Horn & C. Johnson) Chapter 0
- 矩阵分析 (R. Horn & C. Johnson) 第 0 章
- 高等代数学 (第 4 版, 谢启鸿, 姚慕生, 吴泉水) 第 $3, 4$ 章
- Vector spaces and linear maps (stanford.edu)
- Matrix Cookbook (uwaterloo.ca)
- Hadamard product (Wiki)
- Kronecker Products and Matrix Calculus with Applications (Graham, A. 1981)
- Convex Optimization: Appendix D Matrix Calculus (stanford.edu)

欢迎批评指正!

0.1 域

0.1.1 域

> Underlying a vector space is its field, or set of scalars, typically $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$
> we denote it by the symbol $\mathbb{F}$ if unspecdified.

构建线性空间的基础是**域** (field)，即满足某些良好性质的标量集合.
典型的域例如实数域 $\mathbb{R}$ 和复数域 $\mathbb{C}$
我们通常将一般的域记为 $\mathbb{F}$

一个标量集合 S 要成为一个域，需要对定义在其上的两种二元运算: 加法 $(+)$ 和乘法 $(\times)$ 满足:
对于任意 $a, b, c \in \mathbb{F}$

- **封闭:** $\begin{cases} a+b \in \mathbb{F} \\ a \times b \in \mathbb{F} \end{cases}$
- **可交换:** $\begin{cases} b+a = a+b \\ b \times a = a \times b \end{cases}$
- **可结合:** $\begin{cases} (a+b)+c = a+(b+c) \\ (a \times b) \times c = a \times (b \times c) \end{cases}$
- **可分配:** $\begin{cases} (a+b) \times c = (a \times c)+(b \times c) \\ c \times (a+b) = (c \times a)+(c \times a) \end{cases}$
- **单位元 (不动点):** $\exists\, 0_{\mathbb{F}}, 1_{\mathbb{F}} \in \mathbb{F} \text{ such that } \begin{cases} 0_{\mathbb{F}} \neq 1_{\mathbb{F}} \\ a+0_{\mathbb{F}} = a \\ a \times 1_{\mathbb{F}} = a \end{cases}$
- **逆元:** $\begin{cases} \exists\, (-a) \in \mathbb{F} \text{ such that } a+(-a) = 0_{\mathbb{F}} \\ \text{if } a \neq 0_{\mathbb{F}}, \text{ then } \exists\, (a^{-1}) \in \mathbb{F} \text{ such that } a \times (a^{-1}) = 1_{\mathbb{F}} \end{cases}$

我们可以定义域 $\mathbb{F}$ 上的减法 $(-)$ 为 $a-b := a+(-b)$
还可以定义域 $\mathbb{F}$ 上的除法 $(\backslash)$ 为 $a \backslash b := a \times (b^{-1})$ (其中 $b \neq 0_{\mathbb{F}}$)
这样在域上我们可以使用一切规范的代数法则.

最简单的域是 $\{0,1\}$，可视 0 为偶数而 1 为奇数，并定义其加法和乘法运算为:

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} \times & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

代数数构成域,
例如有理数域 $\mathbb{Q}$ 加上无理数 $\sqrt{2}$ 的扩张 $\mathrm{Q}[\sqrt{2}] = \{\alpha+\beta\sqrt{2} : \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$ 就是一个域.

超越数的有理函数构成域,
例如自然常数 e 的有理函数集合 $\{\frac{\alpha_0+\alpha_1 e+\cdots+\alpha_m e^m}{\beta_0+\beta_1 e+\cdots+\beta_m e^m} : m \in \mathbb{N}, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{Q}, \beta_m \neq 0\}$ 就是一个域.

0.1.2 复数域

在全体复数构成的集合 $\mathbb{C}=\{\alpha+i\beta:\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$ 上，我们可以定义两种最基本的运算:

- 加法 $(\alpha_1+i\beta_1)+(\alpha_2+i\beta_2):=(\alpha_1+\alpha_2)+i(\beta_1+\beta_2)$
- 乘法 $(\alpha_1+i\beta_1)\times(\alpha_2+i\beta_2):=(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)+i(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)$
  (根据这个定义我们自然有 $i^2=-1$)

我们有以下结论:

- **(加法, addition)**
  对于任意 $x,y,z\in\mathbb{C}$ 我们有:
  - 封闭 (closed): $x+y\in\mathbb{C}$
  - 可结合 (associative): $(x+y)+z=x+(y+z)$
  - 可交换 (commutative): $y+x=x+y$
  - 单位元 (indentity): $0\in\mathbb{C}$ such that $x+0=x$
  - 逆元 (inverse): $\exists\,(-x)\in\mathbb{C}$ such that $x+(-x)=0$

  这表明 $(\mathbb{C},+)$ 是一个**无限 Abel 群** (Infinite Abelian Group).
  我们可以定义**减法**为 $x-y:=x+(-y)$
- **(乘法, multiplication)**
  对于任意 $x,y,z\in\mathbb{C}$ 我们有:
  - 封闭: $x\times y\in\mathbb{C}$
  - 可结合: $(x\times y)\times z=x\times(y\times z)$
  - 可交换: $y\times x=x\times y$
  - 单位元: $1\in\mathbb{C}$ such that $x\times 1=x$
  - 逆元: 若 $x\neq 0$，则 $\exists\,(x^{-1})=\frac{\bar{x}}{x\bar{x}}\in\mathbb{C}$ such that $x\times(x^{-1})=1$

  这表明 $(\mathbb{C}\backslash\{0\},\times)$ 是一个**无限 Abel 群**.
  我们可以定义**除法**为 $x/y:=x\times(y^{-1})$ (其中 $y\neq 0$)
- **(复数乘法对复数加法满足分配律, Complex Multiplication Distributes over Addition)**
  对于任意 $x,y,z\in\mathbb{C}$ 我们有:

  $$\begin{cases}x\times(y+z)=(x\times y)+(x\times z)\\(y+z)\times x=(y\times x)+(z\times x)\end{cases}$$

  综上所述，设 x,y,z 是复数，则我们有:

  $$\begin{cases}x+y=y+x\\(x+y)+z=x+(y+z)\\x+0=0+x=x\\x\times y=y\times x\\(x\times y)\times z=x\times(y\times z)\\x\times 1=1\times x=x\\x\times(y+z)=x\times y+x\times z\\(y+z)\times x=y\times x+z\times x\end{cases}$$

  上述九个等式表明 $(\mathbb{C},+,\times)$ 构成一个**交换环** (commutative ring)
  注意: 如果我们删去等式 $x\times y=y\times x$，则只能断定复数集 $\mathbb{C}$ 构成一个**环** (ring)
- **(复数集构成一个域)**
  设 x,y,z 是复数，则我们有:

$$
\begin{cases}
x+y=y+x \\
(x+y)+z=x+(y+z) \\
x+0=0+x=x \\
x\times y=y\times x \\
(x\times y)\times z=x\times(y\times z) \\
x\times 1=1\times x=x \\
x\times(y+z)=x\times y+x\times z \\
(y+z)\times x=y\times x+z\times x \\
\text{if } x\neq 0,\ \text{then } x\times x^{-1}=x^{-1}\times x=1
\end{cases}
$$

上述十个等式表明 $(\mathbb{C},+,\times)$ 构成一个**域** (field)
这保证了我们可以在复数域上使用一切规范的代数法则.

0.1.3 数域

数域是域的特例.
(数域, 高等代数学 定义 $3.1.1$)
设 $\mathbb{K}$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 的子集，且至少有两个不同的元素.
若 $\mathbb{K}$ 对定义在复数域 $\mathbb{C}$ 上的加法、减法、乘法以及除法 (除数不为零) 封闭，
则称 $\mathbb{K}$ 是一个数域.

- 我们立即知道复数集 $\mathbb{C}$、实数集 $\mathbb{R}$ 和有理数集 $\mathbb{Q}$ 都是数域.
- 显然任一数域都包含 0 和 1 两个数

(高等代数学 定理 $3.1.1$)
任一数域 $\mathbb{K}$ 必定包含有理数域 $\mathbb{Q}$.

- 这表明有理数域 $\mathbb{Q}$ 是最基本的数域.
- **证明:**
  注意到 $1\in\mathbb{K}$，根据 $\mathbb{K}$ 对加法和减法的封闭性可知 $\mathbb{K}$ 包含全体整数.
  又根据 $\mathbb{K}$ 对除法 (除数不为零) 的封闭性可知 $\mathbb{K}$ 包含全体有理数.

我们称数域 $\mathbb{K}$ 是**完备的**，如果 $\mathbb{K}$ 上的任意 Cauchy 数列都收敛，且极限都落在 $\mathbb{K}$ 中.
可以证明有理数域 $\mathbb{Q}$ 是不完备的:
定义在 $\mathbb{Q}$ 上的某些 Cauchy 数列可能是发散的 (直观来说，这是因为其极限是无理数)
幸运的是，我们可以证明实数域 $\mathbb{R}$ 和复数域 $\mathbb{C}$ 都是完备的.

0.1.4 域的特征

域 $\mathbb{F}$ 的特征 $\text{char}(\mathbb{F})$ 是最小的正整数 p，使得 p 个乘法单位元 $1_{\mathbb{F}}$ 相加等于加法单位元 $0_{\mathbb{F}}$.
如果这样的正整数 p 不存在，则称该域的特征为零.

- 我们使用的通常是特征为零的域.
  显然数域的特征一定为零.

定理: 域的特征只能是 0 或素数.

- **证明:**
  只需要说明，对于非零特征的域 $\mathbb{F}$ ，其特征一定是素数.
  (反证法) 假设 $\text{char}(\mathbb{F})=n\neq 0$ 是一个合数，
  则存在 $1<a,b<n$ 使得 $n=ab$
  记 $\begin{cases} a\cdot 1_{\mathbb{F}}:=\underbrace{1_{\mathbb{F}}+\cdots+1_{\mathbb{F}}}_{a} \\ b\cdot 1_{\mathbb{F}}:=\underbrace{1_{\mathbb{F}}+\cdots+1_{\mathbb{F}}}_{b} \end{cases}$
  根据 $\text{char}(\mathbb{F})=n>a$ 可知 $\begin{cases} a\cdot 1_{\mathbb{F}}\neq 0_{\mathbb{F}} \\ b\cdot 1_{\mathbb{F}}\neq 0_{\mathbb{F}} \end{cases}$
  但注意到:

$$(a\cdot 1_{\mathbb{F}})\times(b\cdot 1_{\mathbb{F}})=\underbrace{1_{\mathbb{F}}+\cdots+1_{\mathbb{F}}}_{ab}=(ab)\cdot 1_{\mathbb{F}}=n\cdot 1_{\mathbb{F}}=0_{\mathbb{F}}$$

这显然与 $\begin{cases}a\cdot 1_{\mathbb{F}}\neq 0_{\mathbb{F}}\\ b\cdot 1_{\mathbb{F}}\neq 0_{\mathbb{F}}\end{cases}$ 相矛盾.
命题得证.

于是域的特征的定义可以更新为:
域 $\mathbb{F}$ 的特征 $\mathrm{char}(\mathbb{F})$ 是最小的素数 p，使得 p 个乘法单位元 $1_{\mathbb{F}}$ 相加等于加法单位元 $0_{\mathbb{F}}$.
如果这样的素数 p 不存在，则称该域的特征为零.

0.1.5 域的同态与同构

两个域之间保持运算和单位元的映射称为**同态** (Homomorphism).
设 $\mathbb{F}_1$ 和 $\mathbb{F}_2$ 是两个域，一个映射 $f:\mathbb{F}_1\mapsto\mathbb{F}_2$ 称为同态，如果它满足以下条件:

- **保持运算:** 对于任意 $a,b\in\mathbb{F}_1$ 都有 $\begin{cases}f(a+b)=f(a)+f(b)\\ f(a\times b)=f(a)\times f(b)\end{cases}$ 成立
- **保持单位元:** $\begin{cases}f(0_{\mathbb{F}_1})=0_{\mathbb{F}_2}\\ f(1_{\mathbb{F}_1})=1_{\mathbb{F}_2}\end{cases}$

两个域之间保持运算和单位元的双射称为**同构** (Isomorphism).
也就是说，当域的同态是一个双射时，这个同态称为同构.
即保持运算和单位元的同时，它还满足双射的性质:

- **单射 (Injective):** 对于任意 $a,b\in\mathbb{F}_1$，若 $f(a)=f(b)$，则有 $a=b$ 成立
- **满射 (Surjective):** 对于任意 $b\in\mathbb{F}_2$，存在一个 $a\in\mathbb{F}_1$ 使得 $f(a)=b$

即满足 **1-1 对应:** 对于任意 $a\in\mathbb{F}_1$ 都存在唯一的 $b\in\mathbb{F}_2$ 与之对应 $(f(a)=b)$，反之亦然 $(a=f^{-1}(b))$.

如果存在一个从域 $\mathbb{F}_1$ 到域 $\mathbb{F}_2$ 的同构，那么我们称这两个域是同构的，记作 $\mathbb{F}_1\cong\mathbb{F}_2$.
这意味着这两个域在代数结构上是完全相同的，尽管它们的元素可能看起来不一样.

在实际应用中，域的同构可以帮助我们理解不同的数学系统之间的本质联系.
例如有理数域 $\mathbb{Q}$ 与有理函数域，或不同的有限域之间的关系.
通过域的同构，我们可以将一个问题从一个域转换到另一个域，
这为理论研究和问题求解提供了一个非常有力的工具.

下面我们来看一些同构的例子:

- 复数域 $\mathbb{C}=\{\alpha+\beta i:\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$ 与集合 $\left\{\begin{bmatrix}\alpha & -\beta\\ \beta & \alpha\end{bmatrix}:\alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$ 和 $\left\{\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix}:\alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$ 同构.
- 有理数域的扩张与有理系数多项式的商域同构.
  例如有理数域 $\mathbb{Q}$ 加上代数数 $\sqrt{2}$ 的扩张 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{\alpha+\beta\sqrt{2}:\alpha,\beta\in\mathbb{Q}\}$
  与有理系数多项式的商域 $\mathbb{Q}[x]/(x^2-2)$ 是同构的.
  我们可以构造 $\varphi:\mathbb{Q}[x]/(x^2-2)\mapsto\mathbb{Q}(\sqrt{2})$
  使得对于任意等价类 $[p(x)]\in\mathbb{Q}[x]/(x^2-2)$，都有 $\varphi([p(x)])=p(\sqrt{2})$ 成立.
  可以证明这个映射保持运算且是一个双射.

  > 商域 $\mathbb{Q}[x]/(x^2-2)$ 的元素是形如 $[p(x)]$ 的等价类，
  > 两个多项式 $p(x)$ 和 $q(x)$ 属于同一个等价类，当且仅当 $p(x)-q(x)$ 可被 x^2-2 整除.
  > 注意到 $\mathbb{Q}[x]$ 中的每个有理系数多项式 $p(x)$ 都可表示为 $p(x)=m(x)(x^2-2)+\alpha+\beta x$，
  > 因此商域 $\mathbb{Q}[x]/(x^2-2)$ 中每个等价类都形如 $\alpha+\beta x$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{Q})$ (这可作为等价类的代表元)，
  > 很容易与 $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{\alpha+\beta\sqrt{2}:\alpha,\beta\in\mathbb{Q}\}$ 之间建立双射.

一个容易造成混淆的概念是 **"拓扑同构"** (又称为同胚 Homeomorphism):

- 任意开区间 (例如 $(0,1)$) 与实数域 $\mathbb{R}$ 在拓扑上是同构的 (同胚).
  这可以通过一个双射函数 $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ 来实现，
  例如 $f(x)=\tan\left(\pi(x-\frac{1}{2})\right)$ 或 $f(x)=\log\frac{x}{1-x}$.

拓扑同构仅保持点集的连续性和连通性，而不涉及代数运算和单位元的保持.
这意味着它们在拓扑上是相同的，尽管其具体结构可能不同.

0.2 线性空间

0.2.1 线性空间

域 $\mathbb{F}$ 上的**线性空间** (linear space) $(V,+,\cdot)$ (又称为**向量空间** vector space)
由一组对象 (通常称为**向量** vector) 的集合 V、向量加法 $+: V \times V \mapsto V$ 和标量乘法 $\cdot : \mathbb{F} \times V \mapsto V$ 构成.
对于任意向量 $u,v,w \in V$ 和标量 $\alpha,\beta \in \mathbb{F}$，它满足以下性质:

- **加法可交换:** $u+v=v+u$
- **可结合:** $\begin{cases} (u+v)+w=u+(v+w) \\ \alpha\cdot(\beta\cdot v)=(\alpha\cdot\beta)\cdot v \end{cases}$
- **可分配:** $\begin{cases} \alpha\cdot(u+v)=\alpha\cdot u+\alpha\cdot v \\ (\alpha+\beta)\cdot v=\alpha\cdot v+\beta\cdot v \end{cases}$
- **单位元:** $\begin{cases} \exists\, 0_V \in V \quad \text{such that } \ v+0_V=v \\ \exists\, 1_V \in \mathbb{F} \quad \text{such that } 1_V\cdot v=v \end{cases}$
- **加法逆元:** $\exists\,(-v)\in V$ such that $v+(-v)=0_V$

可以证明: 加法单位元 0_V、数乘单位元 1_V 和任意给定向量 $v\in V$ 的加法逆元 $-v$ 都是唯一的.

给定域 $\mathbb{F}$ 和正整数 n，由 $\mathbb{F}$ 中的元素形成的 n 元组的集合 $\mathbb{F}^n$ 在逐元素加法和数乘之下构成线性空间.
我们约定 $\mathbb{F}^n$ 中的元素总是列向量.
其中 $\mathbb{C}^n$ 和 $\mathbb{R}^n$ 是本课程中最基本的线性空间.

0.2.2 子空间

若 S 是域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V 的子集，且本身也是 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，
则我们称 S 为 V 的一个**线性子空间** (linear subspace).
它有着与 V 相同的向量加法和数乘运算，并满足:

- **包含零向量 (加法单位元):** $0_V\in S$
- **对向量加法和数乘元素封闭:** $\begin{cases} u+v\in S & (\forall\, u,v\in S) \\ \alpha v\in S & (\forall\, \alpha\in\mathbb{F}, v\in S) \end{cases}$

换句话说，若子集 S 继承了全空间 V 的代数性质，则称为线性子空间 (简称子空间).

零线性空间 $\{0_V\}$ 和全空间 V 总是 V 的子空间，因而称为**平凡子空间** (trivial subspace).
若子空间 S 异于全空间 V，则称为**真子空间** (proper subspace).
若子空间 S 异于零线性空间 $\{0_V\}$ 和全空间 V，则称为**非平凡子空间** (nontrivial subspace).

线性组合即线性空间 V 中有限个元素的加权和，形如 $\alpha_1v_1+\cdots+a_kv_k$，其中 $\begin{cases} k\in\mathbb{N}_+ \\ \alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{F} \\ v_1,\dots,v_k\in V \end{cases}$
若 $\alpha_1=\cdots=\alpha_k=0$，则称此线性组合是平凡的; 反之，它就是非平凡的.

若 S 是域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V 的子集，则 S 的**生成子空间** $\text{span}(S)$ 是 V 中所有包含 S 的子空间的交.
(因此即使 S 并不是子空间，生成子空间 $\text{span}(S)$ 也一定是子空间)

- 若 $S=\emptyset$，则 $\text{span}(S)=\{0_V\}$
- 若 $S\neq\emptyset$，则 $\text{span}(S)=\left\{\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_kv_k : \begin{cases} k\in\mathbb{N}_+ \\ \alpha_1,\dots,\alpha_k\in\mathbb{F} \\ v_1,\dots,v_k\in S \end{cases}\right\}$

任意给定线性空间 V 的两个子空间 S_1,S_2

- 它们的交 $S_1\cap S_2=\{s : s\in S_1, s\in S_2\}$ 仍然是子空间

- 它们的并 $S_1 \cup S_2 = \{s : s \in S_1 \text{ or } s \in S_2\}$ 不一定是一个子空间
- 它们的和 $S_1 + S_2 = \text{span}(S_1 \cup S_2) = \{s_1 + s_2 : s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\}$ 仍然是子空间.
  若 $S_1 \cap S_2 = \{0_V\}$，则我们称 $S_1 + S_2$ 为**直和** (direct sum)，记为 $S_1 \oplus S_2$
  此时任意 $s \in S_1 \oplus S_2$ 都可以唯一地表示为 $s = s_1 + s_2$，其中 $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$

任意给定一个子集 $S \subseteq \mathbb{C}^n$
我们定义 S 的**正交补** (orthogonal complement) $S^\perp := \{x \in \mathbb{C}^n : x^{\text{H}} y = 0 \text{ for all } y \in S\}$

- 即使 S 不是 $\mathbb{C}^n$ 的子空间，其正交补 $S^\perp$ 也总是一个子空间.
- 我们有 $(S^\perp)^\perp = \text{span}(S)$
  当且仅当 S 是一个子空间时 $(S^\perp)^\perp = \text{span}(S) = S$
  我们恒有 $\dim(S^\perp) + \dim((S^\perp)^\perp) = \dim(S^\perp) + \dim(\text{span}(S)) = n$
- 若 S_1, S_2 都是 $\mathbb{C}^n$ 的子空间，则我们有 $(S_1 + S_2)^\perp = S_1^\perp \cap S_2^\perp$
- 对于任意 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$，我们都有 $\begin{cases} \text{Range}(A)^\perp = \text{Ker}(A^{\text{H}}) \\ \text{Ker}(A)^\perp = \text{Range}(A^{\text{H}}) \end{cases}$
- 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}, B \in \mathbb{C}^{m\times q}, X \in \mathbb{C}^{m\times r}, Y \in \mathbb{C}^{m\times s}$
  若 $\begin{cases} \text{Range}(X) = \text{Ker}(A^{\text{H}}) \\ \text{Range}(Y) = \text{Ker}(B^{\text{H}}) \end{cases}$，则我们有 $\text{Range}(A) \cap \text{Range}(B) = \text{Ker}(\begin{bmatrix} X^{\text{H}} \\ Y^{\text{H}} \end{bmatrix})$
  (**存疑**: A, B 和 X, Y 弄反了?)

0.2.3 基

我们称域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V 中有限多个向量 $v_1, \dots, v_k$ 是**线性相关的** (linearly dependent)，
当且仅当存在不全为零的标量 $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ 使得 $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0_V$
即当且仅当 $v_1, \dots, v_k$ 存在某个非平凡的线性组合是零向量.

若 $v_1, \dots, v_k$ 不是线性相关的，则我们称它们是**线性无关的** (linearly independent)
特别地，空向量组不是线性相关的，因此它是线性无关的.

从一个向量组 (可以是无限的) 中去掉某些向量得到的向量组称为**子向量组** (sublist)
一个无穷向量组称为是线性相关的，如果它的某个有限子向量组是线性相关的.
一个无穷向量组称为是线性无关的，如果它的任意有限子向量组都是线性无关的.

一个有限向量组的**基数**是其**极大线性无关组** (即个数最多的线性无关的子向量组) 中的向量个数.

若一组线性无关的向量 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 能张成 V (即 $\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\} = V$)，
则称其为 V 的一组**基** (basis).
给定 V 的一组基 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$，
则 V 中的每个向量都能唯一地表示为基向量 $v_1, \dots, v_n$ 的线性组合.

- 一组能张成 V 的向量 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 是 V 的一组基，
  当且仅当其任意真子集都不能张成 V.
- 空向量组 (可以认为它是线性无关的) 是零线性空间 $\{0_V\}$ 的基.
- 线性空间可以有无限基数的基，例如 $\{1, t, t^2, \dots\}$ 就是所有实系数多项式组成的线性空间的一组基.
  每一个实系数多项式都能唯一地表示为这组基中 (有限多个) 元素的线性组合.
- 域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V 中的任意一组线性无关的向量都可以扩充为 V 的一组基 (且扩充方式不唯一).

若存在一个正整数 n 使得线性空间 V 的一组基恰好包含 n 个向量，
则 V 的每组基都恰好由 n 个向量构成.
此时我们称 V 是**有限维的** (finite-dimensional)，记为 $\dim(V) = n$

反之，我们称 V 是**无限维的** (infinite-dimensional)
此时任意两组基的元素之间都存在 1-1 对应关系 (因而有相同的基数).

子空间交引理 (subspace intersection lemma)
设 V 是一个有限维线性空间，且 S_1 和 S_2 是 V 的两个给定的子空间.
则我们有维数公式 $\dim(S_1\cap S_2)+\dim(S_1+S_2)=\dim(S_1)+\dim(S_2)$
(特殊地，当 $S_1\cap S_2=\{0_V\}$ 时，则形式为 $\dim(S_1\oplus S_2)=\dim(S_1)+\dim(S_2)$)
进而有 $\dim(S_1\cap S_2)=\dim(S_1)+\dim(S_2)-\dim(S_1+S_2)\geq\dim(S_1)+\dim(S_2)-\dim(V)$

- 归纳法指出:
  若 $S_1,\ldots,S_k$ 是有限维线性空间 V 的子空间，则我们有:
  $$\dim(S_1\cap\cdots\cap S_k)\geq\dim(S_1)+\cdots+\dim(S_k)-(k-1)\dim(V)$$

(高等线性代数纲要 4.2 节)
给定正整数 n
若 $\mathbb{F}$ 是一个域，则 $\mathbb{F}^n$ 不能表示为它的两个真子空间的并.
当 $\mathrm{char}(\mathbb{F})=0$ 时，$\mathbb{F}^n$ 不能表示为其有限个真子空间的并.

- 换句话说，真子空间的并集所包含的向量比全空间少.
  这说明了我们应当通过基向量的线性组合来构造线性空间，而不是依靠真子空间的并.
- 更深刻地，域不能表示成两个真子域的并.
  当域的特征为零时，该域不能表示为有限个真子域的并.
  即在域的结构中，某些性质不能通过更简单的子结构进行分解.
- **证明:**
  (反证法) 假设存在 $\mathbb{F}^n$ 的两个真子空间 S_1,S_2 使得 $\mathbb{F}^n=S_1\cup S_2$.
  由于 S_1,S_2 是真子空间，故存在 s_1,s_2 满足 $\begin{cases}s_1\in S_1,\ s_1\notin S_2\\ s_2\notin S_1,\ s_2\in S_2\end{cases}$
  根据线性空间对向量加法的封闭性，有 $s_1+s_2\in\mathbb{F}^n$，则 s_1+s_2 势必属于 S_1,S_2 中的一个.
  - 若 $s_1+s_2\in S_1$
    则 $s_2=(s_1+s_2)+(-s_1)\in S_1$ (注意到 S_1 是子空间，故 $(-s_1)\in S_1$)，与假设矛盾;
  - 若 $s_1+s_2\in S_2$
    则 $s_1=(s_1+s_2)+(-s_2)\in S_2$ (注意到 S_2 是子空间，故 $(-s_2)\in S_2$)，与假设矛盾;

  因此 $\mathbb{F}^n$ 不能表示为它的两个真子空间的并.

  当 $\mathrm{char}(\mathbb{F})=0$ 时，我们使用数学归纳法证明 $\mathbb{F}^n$ 不能表示为其有限个真子空间的并.
  对真子空间数量 m 进行数学归纳:
  ① 当 $m=1,2$ 时，命题显然成立.
  ② 现假设命题对正整数 m 成立
  则对于 $\mathbb{F}^n$ 的任意给定的 m 个真子空间 $S_1,\ldots,S_m$ 都有 $\left(\bigcup_{i=1}^m S_i\right)\subset\mathbb{F}^n$ 成立.
  根据归纳假设可知 $\left(\bigcup_{i=1}^m S_i\right)$ 不是 $\mathbb{F}^n$ 的真子空间，仅仅是真子集.

  下面证明在归纳假设下，命题对正整数 $m+1$ 也成立.
  (反证法) 假设存在 $\mathbb{F}^n$ 的一个真子空间 S_{m+1} 使得 $\left(\bigcup_{i=1}^m S_i\right)\cup S_{m+1}=\mathbb{F}^n$
  由于 $\left(\bigcup_{i=1}^m S_i\right)\subset\mathbb{F}^n$ 和 $S_{m+1}\subset\mathbb{F}^n$，故存在 s_1,s_2 满足 $\begin{cases}s_1\in S_{m+1},\ s_1\notin\left(\bigcup_{i=1}^m S_i\right)\\ s_2\notin S_{m+1},\ s_2\in\left(\bigcup_{i=1}^m S_i\right)\end{cases}$

  根据线性空间对向量加法的封闭性，对于任意 k 都有 $ks_1+s_2\in\mathbb{F}^n$ 成立
  因此对于任意给定的标量 $\alpha\in\mathbb{F}$，αs_1+s_2 势必属于 S_{m+1} 和 $\left(\bigcup_{i=1}^m S_i\right)$ 中的一个.
  若 $\alpha s_1+s_2\in S_{m+1}$
  则 $s_2=(\alpha s_1+s_2)+\alpha(-s_1)\in S_{m+1}$ (注意到 S_{m+1} 是子空间，故 $\alpha(-s_1)\in S_{m+1}$)，与假设矛盾;
  因此我们有 $\alpha s_1+s_2\in\left(\bigcup_{i=1}^m S_i\right)$ $(\forall\ \alpha\in\mathbb{F})$ 成立.

  设 $0_{\mathbb{F}},1_{\mathbb{F}}$ 分别是域 $\mathbb{F}$ 的加法单位元和数乘单位元.
  考虑 $\alpha=k1_{\mathbb{F}}$ $(k\in\mathbb{Z})$ 的情况:
  显然我们有无限个形如 $(k1_{\mathbb{F}})s_1+s_2$ $(\forall\ k\in\mathbb{Z})$ 的向量在 $\left(\bigcup_{i=1}^m S_i\right)$ (它是有限个真子空间 $S_1,\ldots,S_m$ 的并集)

根据**抽屉原理**可知，对于真子空间 S_1，
至少存在两个不同的整数 $k_1,k_2\in\mathbb{Z}$ (不妨设 $k_2>k_1$) 使得 $\begin{cases}(k_1 1_{\mathbb{F}})s_1+s_2\in S_1\\(k_2 1_{\mathbb{F}})s_1+s_2\in S_1\end{cases}$
故我们有 $[(k_2-k_1)1_{\mathbb{F}}]\cdot s_1\in S_1$
注意到域 $\mathbb{F}$ 的特征 $\text{char}(\mathbb{F})=0$，故 $(k_2-k_1)1_{\mathbb{F}}\neq 0_{\mathbb{F}}$，从而有 $s_1\in S_1$
这与 $s_1\notin(\bigcup_{i=1}^m S_i)$ 的假设相矛盾.
因此在归纳假设下，命题对正整数 $m+1$ 也成立.

根据数学归纳法可知，命题对任意正整数 $m\in\mathbb{Z}_+$ 都成立，
即当 $\text{char}(\mathbb{F})=0$ 时，$\mathbb{F}^n$ 不能表示为其有限个真子空间的并.

0.2.4 同构

若 V_1,V_2 是同一域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，
且双射 $f:V_1\mapsto V_2$ 满足对于任意 $\begin{cases}x,y\in V_1\\a,b\in\mathbb{F}\end{cases}$ 都有 $f(ax+by)=af(x)+bf(y)$ 成立，
则我们称 V_1,V_2 是**同构的** (isomorphic) (即 "构造相同的")
同构意味着它们可以有区别 (如果我们关心的话)，否则它们就是没有区别的.

(vector-spaces-linear-maps (stanford.edu) **Section** 3.1)
同一域上的两个有限维线性空间同构，当且仅当它们具有相同的维数.

- 上述定理表明: 域 $\mathbb{F}$ 上任意一个 n 维线性空间都与 $\mathbb{F}^n$ 同构.
  具体来说，若 V 是域 $\mathbb{F}$ 上的一个 n 维线性空间，且有指定的基 $\mathcal{B}=\{x_1,\ldots,x_n\}$
  则任意 $x\in V$ 都可唯一地表示为 $\mathcal{B}$ 的线性组合 $x=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n$ (其中 $\alpha_i\in\mathbb{F}$)
  于是我们可建立起 $x\in V$ 和 n 元向量 $[x]_{\mathcal{B}}=[\alpha_1,\ldots,\alpha_n]\in\mathbb{F}^n$ 的 1-1 对应.
  这样，映射 $x\mapsto[x]_{\mathcal{B}}$ 就是 V 与 $\mathbb{F}^n$ 之间的一个同构.
- 上述定理的证明我们放在 $0.3.1$ 节.

0.3 线性映射

0.3.1 线性映射

线性映射 (linear map) 是线性空间之间的保持向量加法和数乘运算以及加法单位元的映射 (即线性空间之间的同态)
对于建立在域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V_1,V_2，若映射 $T:V_1\mapsto V_2$ 是线性映射，则它满足:

$$\begin{aligned}T(u+v)&=T(u)+T(v)\quad&(\forall\,u,v\in V_1)\\T(\alpha v)&=\alpha T(v)\quad&(\forall\,\alpha\in\mathbb{F},v\in V_1)\end{aligned}$$

值得注意的是，上述性质已经蕴含了 $T(0_{V_1})=0_{V_2}$ 的结论.
(取 $u=0_{V_1}$ 则对于任意 $v\in V_1$ 都有 $T(v)=T(0_{V_1}+v)=T(0_{V_1})+T(v)$ 成立，因而有 $T(0_{V_1})=0_{V_2}$)

- 此时若线性映射 $T:V_1\mapsto V_2$ 还是双射，则我们称 T 是线性空间 V_1,V_2 之间的**同构**.
  (这与 $0.2.4$ 的同构定义是一致的)
- 特殊地，当 $V_2=V_1$ 时，
  我们称 $T:V_1\mapsto V_2$ 为 V_1 上的**线性变换** (linear transformation) 或**线性算子** (linear operator)
  此时若线性变换 $T:V_1\mapsto V_1$ 还是双射，则我们称 T 是 V_1 的**自同构**.
- 当 $V_2=\mathbb{F}$ 时，我们称 $T:V_1\mapsto\mathbb{F}$ 为 V_1 到域 $\mathbb{F}$ 的**线性泛函** (linear functional).

关于线性映射的一个有用的事实 (无论是在概念上还是在证明中):
线性映射由其对基的作用所唯一确定.

> One useful fact regarding linear maps (both conceptually and for proofs)
> is that they are uniquely determined by their action on a basis.

(vector-spaces-linear-maps (stanford.edu) **Proposition 10)**
考虑定义在域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V, W
设 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ 是线性空间 V 的一组基，而 $\{w_1, \ldots, w_n\}$ 是线性空间 W 中的任意向量组.
则存在唯一的线性映射 $T: V \mapsto W$ 使得 $T(v_i) = w_i \ (i = 1, \ldots, n)$

- 特别地，如果 $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ 是 W 的一组基，
  则这个唯一的线性映射是 V, W 间的一个同构.
  这就印证了 $0.2.4$ 节的断言:
  "同一域上的两个有限维线性空间同构，当且仅当它们具有相同的维数"
  - **证明:**
    考虑域 $\mathbb{F}$ 上的有限维线性空间 V, W，满足 $n := \dim(V) = \dim(W)$
    设 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ 和 $\{w_1, \ldots, w_n\}$ 分别是 V 和 W 的一组基
    - 一方面，存在唯一的线性映射 $T: V \mapsto W$ 使得 $T(v_i) = w_i \ (i = 1, \ldots, n)$
    - 另一方面，存在唯一的线性映射 $S: W \mapsto V$ 使得 $S(w_i) = v_i \ (i = 1, \ldots, n)$

    于是我们有 $S(T(v_i)) = S(w_i) = v_i \ (i = 1, \ldots, n)$
    这表明复合映射 $S \circ T$ 是 V 上的恒等变换 I_V

    同理我们有 $T(S(w_i)) = T(v_i) = w_i \ (i = 1, \ldots, n)$
    这表明复合映射 $T \circ S$ 是 W 上的恒等变换 I_W

    综上所述，$S = T^{-1}$
    这表明线性映射 $T: V \mapsto W$ 是一个双射，因而是 V, W 之间的同构.
- **证明:**
  我们定义映射 $T: V \mapsto W$ 为:

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \mapsto \alpha_1 w_n + \cdots + \alpha_n w_n \quad (\text{for all } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F})$$

  这个映射是定义良好的，因为任意 $v \in V$ 都可以表示为 $v_1, \ldots, v_n$ 的线性组合.
  而且显然它满足 $Tv_i = w_i \ (i = 1, \ldots, n)$
  下面我们证明它是线性映射.

  对于任意 $x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n \in V$ 和 $y = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n \in V$ 我们都有:

$$\begin{aligned}
T(x+y) &= T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n) \\
&= T((\alpha_1 + \beta_1) v_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) v_n) \\
&= (\alpha_1 + \beta_1) w_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) w_n \\
&= (\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n) + (\beta_1 w_1 + \cdots + \beta_n w_n) \\
&= T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) + T(\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n) \\
&= T(x) + T(y)
\end{aligned}$$

  对于任意 $x = \alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_n v_n \in V$ 和 $\gamma \in \mathbb{F}$ 我们都有: (**存疑**: 是否可精简?)

$$\begin{aligned}
T(\gamma x) &= T(\gamma(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n)) \\
&= T(\gamma \alpha_1 v_1 + \cdots + \gamma \alpha_n v_n) \\
&= \gamma \alpha_1 w_1 + \cdots + \gamma \alpha_n w_n \\
&= \gamma(\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n) \\
&= \gamma T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) \\
&= \gamma T(x)
\end{aligned}$$

  因此映射 $T: V \mapsto W$ 是一个线性映射.

  为证明线性映射 $T: V \mapsto W$ 是唯一的，假设 $\tilde{T}$ 是一个满足 $\tilde{T} v_i = w_i \ (i = 1, \ldots, n)$ 的线性映射.
  由于任意 $v \in V$ 都可以唯一表示为 $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$，故我们有:

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(v) &= \tilde{T}(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) \\
&= \alpha_1 \tilde{T}(v_1) + \cdots + \alpha_n \tilde{T}(v_n) \quad (\text{note that } \tilde{T} \text{ is a linear map}) \\
&= \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n \\
&= T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) \\
&= T(v)
\end{aligned}$$

因此 $\tilde{T} \equiv T$，表明线性映射 $T: V \mapsto W$ 是唯一的.
定理得证.

0.3.2 线性映射的代数运算

线性映射的线性组合仍是线性映射.
考虑域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V, W 和两个线性映射 $T_1, T_2 : V \mapsto W$
容易验证 $T_1 + T_2$ 和 αT_1 $(\forall\, \alpha \in \mathbb{F})$ 都是 $V \mapsto W$ 的线性映射.

- 由于映射的加法和数乘满足交换律、结合律和分配律，且单位元和加法逆元存在，
  (加法单位元是零映射，数乘单位元是 $1_{\mathbb{F}}$，加法逆元即给定线性映射对应的负映射)
  故 $V \mapsto W$ 的线性映射全体构成一个线性空间，记为 $\mathcal{L}(V, W)$
  若 $W = V$，则可简记为 $\mathcal{L}(V)$

(vector-spaces-linear-maps (stanford.edu) Proposition 11)
线性映射的复合映射仍是线性映射.

- **证明:**
  考虑域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 U, V, W
  任意给定线性映射 $S: U \mapsto V$ 和 $T: V \mapsto W$
  下面我们证明复合映射 $S \circ T: U \mapsto W$ 也是线性映射:

  一方面，对于任意 $u, v \in U$ 我们都有:

$$\begin{aligned}(S \circ T)(u+v) &= S(T(u+v)) \\ &= S(T(u)+T(v)) \\ &= S(T(u)) + S(T(v)) \\ &= (S \circ T)(u) + (S \circ T)(v)\end{aligned}$$

  另一方面，对于任意 $u \in U$ 和 $\alpha \in \mathbb{F}$ 我们都有:

$$\begin{aligned}(S \circ T)(\alpha u) &= S(T(\alpha u)) \\ &= S(\alpha T(u)) \\ &= \alpha S(T(u)) \\ &= \alpha (S \circ T)(u)\end{aligned}$$

  综上所述，复合映射 $S \circ T: U \mapsto W$ 也是线性映射.
  命题得证.

(高等代数学, 定义 $4.2.2$)
代数 (algebra) 是一个额外定义了乘法的线性空间，且这个乘法满足一定的性质.
设 $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，且额外定义了乘法 $(\times)$ 使得对于任意 $u, v, w \in \mathcal{A}$ 和 $\alpha \in \mathbb{F}$ 都有:

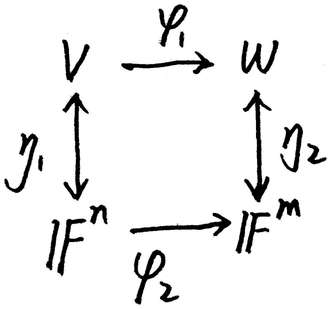
- 乘法结合律: $u \times (v \times w) = (u \times v) \times w$
- 乘法单位元: 存在 $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$ 使得 $1_{\mathcal{A}} \times u = u \times 1_{\mathcal{A}} = u$
- 分配律: $\begin{cases} u \times (v+w) = u \times v + u \times w \\ (v+w) \times u = v \times u + w \times u \end{cases}$
- 乘法与数乘的相容性: $(\alpha u) \times v = \alpha (u \times v) = u \times (\alpha v)$

(高等代数学, 定理 $4.2.1$)
线性空间 V 上线性变换的全体 $\mathcal{L}(V)$ 构成基域 $\mathbb{F}$ 上一个**代数**.
其加法、数乘和乘法就是映射的加法、数乘和复合运算，
而加法单位元是 V 上的零变换 0_V，数乘单位元是 $\mathbb{F}$ 上的乘法单位元 $1_{\mathbb{F}}$，乘法单位元是 V 上的恒等变换 I_V，
加法逆元即给定线性变换对应的负变换.

0.3.3 线性映射的表示矩阵

考虑域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V, W，其中 $\dim(V) = n$ 而 $\dim(W) = m$
我们知道 $V \mapsto W$ 的线性映射全体组成的集合 $\mathcal{L}(V, W)$ 在映射的加法和数乘运算下构成一个线性空间
我们知道域 $\mathbb{F}$ 上 $m \times n$ 矩阵全体组成的集合 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 在矩阵的加法和数乘运算下构成一个线性空间.
本节的目标就是证明**线性映射空间 $\mathcal{L}(V, W)$ 和矩阵空间 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 是同构的**.

> (vector-spaces-linear-maps (stanford.edu) Proposition 10)
> 考虑定义在域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V, W
> 设 $\{v_1, \dots, v_n\}$ 是线性空间 V 的一组基，而 $\{w_1, \dots, w_n\}$ 是线性空间 W 中的任意向量组.
> 则存在唯一的线性映射 $T : V \mapsto W$ 使得 $T(v_i) = w_i\ (i = 1, \dots, n)$
>
> - 特别地，如果 $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ 是 W 的一组基，
>   则这个唯一的线性映射是 V, W 间的一个同构.



设 V 的基为 $\{v_1, \dots, v_n\}$，记基矩阵 $B_V = [v_1, \dots, v_n]$
设 $\mathbb{F}^n$ 的基为 $\{e_1, \dots, e_n\}$ (其中 e_i 的第 i 个分量取 $1_{\mathbb{F}}$，其余分量为 $0_{\mathbb{F}}$)，记基矩阵 $E = [e_1, \dots, e_n]$
设 W 的基为 $\{w_1, \dots, w_m\}$，记基矩阵 $B_W = [w_1, \dots, w_m]$
设 $\mathbb{F}^m$ 的基为 $\{f_1, \dots, f_m\}$ (其中 f_i 的第 i 个分量取 $1_{\mathbb{F}}$，其余分量为 $0_{\mathbb{F}}$)，记基矩阵 $F = [f_1, \dots, f_m]$

我们知道:

- n 维线性空间 $V, \mathbb{F}^n$ 之间存在唯一的同构 $\eta_1 : V \mapsto \mathbb{F}^n$ 使得 $\eta_1(v_i) = e_i\ (i = 1, \dots, n)$
- m 维线性空间 $W, \mathbb{F}^m$ 之间存在唯一的同构 $\eta_2 : W \mapsto \mathbb{F}^m$ 使得 $\eta_2(w_j) = f_j\ (j = 1, \dots, n)$

这表明对于任意线性映射 $\varphi_1 : V \mapsto W$ 都存在一个线性映射 $\varphi_2 : \mathbb{F}^n \mapsto \mathbb{F}^m$ 定义如下:

$$\varphi_2(v) = \eta_2(\varphi_1(\eta_1^{-1}(v)))\ (\text{for all } v \in V)$$

由于 η_1, η_2 都是双射，因此 $\mathcal{L}(V, W) \mapsto \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$ 的映射 $T(\varphi_1) = \eta_2 \circ \varphi_1 \circ \eta_1^{-1}\ (\varphi_1 \in \mathcal{L}(V, W))$ 也是一个双射.

容易验证映射 $T : \mathcal{L}(V, W) \mapsto \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$ 保持加法和数乘运算:

- 对于任意 $\varphi, \phi \in \mathcal{L}(V, W)$ 我们都有:

$$\begin{aligned} T(\varphi + \phi) &= \eta_2 \circ (\varphi + \phi) \circ \eta_1^{-1} \\ &= \eta_2 \circ \varphi \circ \eta_1^{-1} + \eta_2 \circ \phi \circ \eta_1^{-1} \\ &= T(\varphi) + T(\phi) \end{aligned}$$

- 对于任意 $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$ 和 $\alpha \in \mathbb{F}$ 我们都有:

$$\begin{aligned} T(\alpha\varphi) &= \eta_2 \circ (\alpha\varphi) \circ \eta_1^{-1} \\ &= \alpha(\eta_2 \circ \varphi \circ \eta_1^{-1}) \\ &= \alpha T(\varphi) \end{aligned}$$

因而 T 还是一个线性映射.
这表明 $\mathcal{L}(V, W)$ 和 $\mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$ 是同构的.
因此要证明 $\mathcal{L}(V, W)$ 和 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 同构，只要证明 $\mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$ 和 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 同构.

任意给定线性映射 $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$，我们记:

$$\begin{aligned}\varphi(e_1) &= a_{11}f_1 + \cdots + a_{m1}f_m \\ &\vdots \\ \varphi(e_n) &= a_{1n}f_1 + \cdots + a_{mn}f_m\end{aligned}$$

$$\varphi(E) = [\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)] = [f_1, \ldots, f_m]\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix} = FA$$

- 对于给定的线性映射 $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$，上述矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 是唯一确定的.
  如若不然，我们会推出 $f_1, \ldots, f_m$ 线性相关，这与 $\{f_1, \cdots, f_m\}$ 是 $\mathbb{F}^m$ 的一组基的假设相矛盾.

反过来，对于给定的矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，满足 $\varphi(E) = FA$ 的线性映射 $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$ 也是唯一确定的.
下面我们就来证明这个结论.

- 对于任意 $v \in \mathbb{F}^n$，设 v 在 $\mathbb{F}^n$ 的基为 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 下的线性表示为 $v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n = Ex$
  (我们称 $x = [x_1, \ldots, x_n]^{\mathrm{T}}$ 为 $v \in \mathbb{F}^n$ 在基 $\{e_1, \ldots, e_n\}$ 下的坐标)
  则我们有:

  $$\begin{aligned}\varphi(v) &= \varphi(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) \\ &= x_1\varphi(e_1) + \cdots + x_n\varphi(e_n) \\ &= \varphi(E)x \\ &= FAx\end{aligned}$$

  设 $\varphi(v)$ 在 $\mathbb{F}^m$ 的基为 $\{f_1, \ldots, f_m\}$ 下的线性表示为: $\varphi(v) = y_1f_1 + \cdots + y_mf_m = Fy$
  (我们称 $y = [y_1, \ldots, y_m]^{\mathrm{T}}$ 为 $\varphi(v) \in \mathbb{F}^m$ 在基 $\{f_1, \ldots, f_m\}$ 下的坐标)
  则我们有:

  $$\begin{gathered}Fy = \varphi(v) = FAx \\ \Leftrightarrow \\ y = Ax\end{gathered}$$

  这表明 $v \in \mathbb{F}^n$ 的坐标 $x \in \mathbb{F}^n$ 与经线性变换 $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$ 得到的 $\varphi(v) \in \mathbb{F}^m$ 的坐标 $y \in \mathbb{F}^m$ 满足 $y = Ax$ 的关系.
- 给定的矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，设 $\varphi, \tilde{\varphi} \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$ 满足 $\varphi(E) = \tilde{\varphi}(E) = FA$
  则根据上面的讨论，对于任意 $v = Ex \in \mathbb{F}^n$ 我们都有:

  $$\tilde{\varphi}(v) = \tilde{\varphi}(E)x = FAx = \varphi(E)x = \varphi(v)$$

  这表明 $\tilde{\varphi} \equiv \varphi$

综上所述，矩阵空间 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 和线性映射空间 $\mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$ 之间存在一个双射 $T : \mathbb{F}^{m\times n} \mapsto \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$
其定义为:

$$T(A) := \varphi \text{ such that } \varphi(Ex) = FAx \text{ for all } x \in \mathbb{F}^n$$

注意到 $E = \operatorname{diag}(\underbrace{1_{\mathbb{F}}, \ldots, 1_{\mathbb{F}}}_{n})$ 和 $F = \operatorname{diag}(\underbrace{1_{\mathbb{F}}, \ldots, 1_{\mathbb{F}}}_{m})$
故上述定义还可以写得更简洁一些:

$$T(A) := \varphi \text{ such that } \varphi(x) = Ax \text{ for all } x \in \mathbb{F}^n$$

容易验证映射 $T : \mathbb{F}^{m\times n} \mapsto \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$ 保持加法和数乘运算:

- 对于任意 $A_1, A_2 \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 我们都有:

  $$\begin{aligned}T(A_1 + A_2)(x) &= (A_1 + A_2)x \\ &= A_1x + A_2X \qquad (\forall\, x \in \mathbb{F}^n) \\ &= T(A_1)(x) + T(A_2)(x)\end{aligned}$$

- 对于任意 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 和 $\alpha \in \mathbb{F}$ 我们都有:

$$
\begin{aligned}
T(\alpha A)(x) &= (\alpha A)x \\
&= \alpha(Ax) \qquad (\forall\, x \in \mathbb{F}^n) \\
&= \alpha T(A)(x)
\end{aligned}
$$

因而 T 还是一个线性映射.
这表明线性映射空间 $\mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$ 和矩阵空间 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 是同构的.
进而说明**线性映射空间 $\mathcal{L}(V, W)$ 和矩阵空间 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 是同构的**.
从这个角度来说，矩阵的本质就是线性映射.
对于无限维空间，可以定义无限维矩阵，也与无限维线性映射唯一对应.

综上所述，线性映射空间 $\mathcal{L}(V, W)$ 和矩阵空间 $\mathbb{F}^{m\times n}$ 是同构的:

- 对于任意线性映射 $\varphi : V \mapsto W$，都存在唯一的矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 使得 $\varphi(B_V x) = B_W A x$ $(\forall\, x \in \mathbb{F}^n)$
- 对于任意矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，都存在唯一的线性映射 $\varphi : V \mapsto W$ 满足 $\varphi(B_V x) = B_W A x$ $(\forall\, x \in \mathbb{F}^n)$

我们称与线性映射 $\varphi : V \mapsto W$ 1-1 对应的矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 为 φ 的**表示矩阵**.
它的作用是让线性映射 $\varphi : V \mapsto W$ 具体化:

- 基矩阵关系: $\varphi(B_V) = B_W A$
- 坐标关系: $y = Ax$

表明线性映射的像 $\varphi(v) = \varphi(B_V x)$ 在基矩阵 $\varphi(B_V) = B_W A$ 下的坐标为 $y = Ax$

特殊地，当 $W = V$ 且 $T = I_V$ (即 T 为 V 上的恒等变换) 时，我们称表示矩阵 A 为**过渡矩阵**.
显然 V 上的线性变换空间 $\mathcal{L}(V)$ 与矩阵空间 $\mathbb{F}^{n\times n}$ 同构.

> 回忆起 (vector-spaces-linear-maps (stanford.edu)) **Proposition 11)**
> 线性映射的复合映射仍是线性映射.

若线性映射 $T_1 : U \mapsto V$ 和 $T_2 : V \mapsto W$ 的表示矩阵分别为 A_1 和 A_2，
则复合得到的线性映射 $T_2 \circ T_1 : U \mapsto W$ 的表示矩阵就是 $A_2 A_1$
这说明**矩阵乘法的几何意义是线性映射的复合**.

给定置换矩阵 $P_1 \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 和 $P_2 \in \mathbb{F}^{m\times m}$，根据原基矩阵关系 $\varphi(B_V) = B_W A$ 可以做如下变换:

$$
\varphi(B_V P_1) = (W P_2) P_2^{-1} A P_1
$$

我们称 $A \mapsto P_2^{-1} A P_1$ 为一个等价变换，和线性映射有关的性质 (例如秩、零度) 都不发生改变.
通过行列 Gauss 消去法可以将 A 变换为秩标准型:

$$
A \mapsto P_2^{-1} A P_1 = \begin{bmatrix} I_r & 0_{r\times(n-r)} \\ 0_{(m-r)\times r} & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}
$$

0.3.4 线性映射的像与核

考虑域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间 V, W
设 $\varphi : V \mapsto W$ 是一个映射.
我们定义 φ 的**像** (image) 为 $\text{Img}(\varphi) := \varphi(V) = \{\varphi(v) : v \in V\}$
我们定义 φ 的**核** (kernel) 为 $\text{Ker}(\varphi) := \{v \in V : \varphi(v) = 0_W\}$

(高等代数学, 命题 $4.4.1$**)**
若 $\varphi : V \mapsto W$ 是一个线性映射，
则 $\text{Img}(\varphi)$ 是 W 的子空间，而 $\text{Ker}(\varphi)$ 是 V 的子空间.

- 根据线性映射的性质我们容易证明 $\text{Img}(\varphi)$ 和 $\text{Ker}(\varphi)$ 对加法和数乘封闭，
  因而分别是 W 和 V 的子空间.

  此时我们称 $\text{Img}(\varphi)$ 为 φ 的**像空间**，而称 $\text{Ker}(\varphi)$ 是 φ 的**核空间**.
  定义 $\text{rank}(\varphi) := \dim(\text{Img}(\varphi))$ 为 φ 的**秩**，而定义 $\text{null}(\varphi) := \dim(\text{Ker}(\varphi))$ 为 φ 的**零度**

- **(高等代数学, 推论** $4.4.1$**)**
  线性映射 φ 是满的，当且仅当 $\dim(\mathrm{Img}(\varphi)) = \dim(W)$
  线性映射 φ 是单的，当且仅当 $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_V\}$

(高等代数学, 定理 $4.4.1$**)**
设 V, W 分别为域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维和 m 维线性空间.
若 $\varphi : V \mapsto W$ 是一个线性映射，且表示矩阵为 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，则我们有:

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}(\varphi) &= \mathrm{rank}(A) \\ \mathrm{null}(\varphi) &= n - \mathrm{rank}(A)\end{aligned}$$

- **(高等代数学, 推论** $4.4.2$**)**
  设 V, W 分别为域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维和 m 维线性空间.
  若 $\varphi : V \mapsto W$ 是一个线性映射，则我们有:

$$\mathrm{rank}(\varphi) + \mathrm{null}(\varphi) = \dim(V) = n$$

- **(高等代数学, 推论** $4.4.3$**)**
  设 V, W 分别为域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维和 m 维线性空间.
  若 $\varphi : V \mapsto W$ 是一个线性映射，且表示矩阵为 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，则我们有:
  - 当且仅当 $\mathrm{rank}(A) = m \leq n$ 时，φ 是满的.
  - 当且仅当 $\mathrm{rank}(A) = n \leq m$ 时，φ 是单的.
- **(高等代数学, 推论** $4.4.4$**)**
  设 V 为域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间
  若 $\varphi : V \mapsto V$ 是 V 上的线性变换，且表示矩阵为 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$，
  则当且仅当 A 可逆 (即 $\mathrm{rank}(A) = n$) 时 φ 是可逆变换.

0.3.5 不变子空间

(高等代数学, 定义 $4.5.1$**)**
设 V 为域 $\mathbb{F}$ 上的 n 维线性空间，而 $\varphi : V \mapsto V$ 是 V 上的线性变换.
若 V 的子空间 S 满足 $\varphi(S) = \{\varphi(v) : v \in S\} \subseteq S$,
则我们称 S 是 V 的 **φ-不变子空间** (invariant subspace).
此时我们可以将 φ 的定义域限制在 S 上，得到 S 上的线性变换 $\varphi|_S : S \mapsto S$

- 线性空间 V 上的任意线性变换 φ 至少有两个不变子空间: 零向量空间 $\{0_V\}$ 和全空间 V
  我们称它们为平凡的 φ-不变子空间.
  此外，像空间 $\mathrm{Img}(\varphi)$ 和核空间 $\mathrm{Ker}(\varphi)$ 也是 φ 的不变子空间.

下面的定理给出了线性变换的不变子空间和表示矩阵之间的关系.
(高等代数学, 定理 $4.5.1$**)**
设 S 是 n 维线性空间 V 上线性变换 $\varphi : V \to V$ 的 $k \leq n$ 维不变子空间，且有一组基为 $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$
若将 S 的这组基扩充为 V 的一组基 $\{s_1, s_2, \ldots, s_k, v_{k+1}, v_{k+2}, \ldots, v_n\}$，
则线性变换 φ 在扩充得到的这组基下的表示矩阵形如:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ & A_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \cdots & a_{kn} \\ \hline & & & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right]$$

- 上述定理的逆命题也是成立的:
  若 V 有一组基 $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$
  使得线性变换 φ 在这组基下的表示矩阵是形如 $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}$ $(A_{11} \in \mathbb{F}^{k\times k})$ 的分块上三角矩阵,
  则 $S = \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$ 是线性变换 φ 的不变子空间.

- **(高等代数学, 推论 $4.5.1$)**
  设 $V=V_1\oplus V_2$，且 V_1,V_2 都是线性变换 φ 的不变子空间.
  若 V_1,V_2 的基分别为 $\{v_1,\dots,v_k\}$ 和 $\{v_{k+1},\dots,v_n\}$
  则 $\{v_1,\dots,v_k,v_{k+1},\dots,v_n\}$ 是 V 的一组基，
  且线性变换 φ 在这组基下的表示矩阵形如:

$$
A=\begin{bmatrix} A_{11} & \\ & A_{22} \end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ \hline & & & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & a_{n,k+1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right]
$$

  归纳法表明:
  若 $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_k$，且每个 $V_i\ (i=1,\dots,k)$ 都是线性变换 φ 的不变子空间，
  则 V 存在一组基 (可由 V_i 的基合并而成) 使得 φ 在这组基下的表示矩阵为分块对角阵 $A=A_1\oplus\cdots\oplus A_k$
  其中 A_i 是 $\varphi|_{V_i}$ 的表示矩阵，阶数等于 $\dim(V_i)$

从上述定理可以看到:
寻找不变子空间可以帮助我们降低问题的复杂性，简化系统的行为分析，使得问题变得更易于理解和解决.
在矩阵理论中，不变子空间有助于我们理解矩阵如何作用在向量上.
例如，一个方阵的特征子空间 (特征向量张成的线性空间) 是该方阵对应的线性变换的不变子空间，
因为这些特征向量在该方阵的作用下只是按特征值缩放.

0.4 矩阵

0.4.1 行列式

在数学中，用一个数来简要描述多元对象常常是有用的
而行列式函数 $\det(\cdot):\mathbb{F}^{n\times n}\mapsto\mathbb{F}$ 就是其中之一.

对于方阵 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$，我们递归地定义:

$$
\det(A):=\begin{cases} a_{11} & \text{if } n=1 \\ \sum_{j=1}^n(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})=\sum_{i=1}^n(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij}) & \text{if } n\geq 2 \end{cases}
$$

其中 $A_{ij}\in\mathbb{F}^{(n-1)\times(n-1)}$ 为 A 去掉第 i 行和第 j 列得到的子矩阵.

行列式函数 $\det(\cdot):\mathbb{F}^{n\times n}\mapsto\mathbb{F}$ 有如下性质:

- $\det\left(A^{\mathrm{T}}\right)=\det(A)\ \ (\forall\, A\in\mathbb{F}^{n\times n})$
- 若 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，则我们有 $\det\left(A^{\mathrm{H}}\right)=\overline{\det(A)}$
- $\det(AB)=\det(A)\det(B)\ \ (\forall\, A,B\in\mathbb{F}^{n\times n})$
- $\det(A)=0$ 当且仅当 A 的行 (列) 线性相关.

(1) 初等行列变换

有三种关于行和列的基本运算，我们称之为**初等行列变换** (elementary row and column operation)
它们可以用于将矩阵约化为简单的形式，以方便问题的求解.
初等行变换可通过左乘初等变换矩阵来实现，初等列变换可通过右乘初等行列变换矩阵来实现.
我们集中讨论对矩阵 $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ 进行初等行变换.

- **① 行交换**
  对于 $i\neq j$，交换 A 的第 i,j 行的初等变换矩阵为:

$$
P_{i\leftrightarrow j}=I_m-(e_ie_i^{\mathrm{T}}+e_je_j^{\mathrm{T}})+(e_ie_j^{\mathrm{T}}+e_je_i^{\mathrm{T}})=\begin{bmatrix}
1 &&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&& \\
&& 0 && \cdots && 1 &&& \\
&&& 1 &&&&&& \\
&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&&&& 1 &&&& \\
&& 1 && \cdots && 0 &&& \\
&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&& 1
\end{bmatrix}
$$

其中对角线以外的两个 1 位于 (i,j) 和 (j,i) 位置，对角线上的两个 0 位于 (i,i) 和 (j,j) 位置
其余未标注的元素均为零，而 e_i 代表 $\mathbb{F}^n$ 的第 i 个标准单位基向量.
它对行列式的作用效果是乘以 -1

- **② 行数乘**
  用 $c\in\mathbb{F}$ 对 A 的第 i 行进行数乘的初等变换矩阵为:

$$
P_{(ci)}=I_m+(c-1)e_ie_i^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&&& \\
&& 1 &&&& \\
&&& c &&& \\
&&&& 1 && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{bmatrix}
$$

  其中 (i,i) 处的对角元为 c，其余对角元均为 1，其余未标注的元素均为零.
  它对行列式的作用效果是乘以 c

- **③ 将一行的数乘加到另一行**
  对于 $i\neq j$，将 A 第 i 行与 $c\in\mathbb{F}$ 数乘的结果加到第 j 行的初等变换矩阵为 (以 $j>i$ 的情况为例):

$$
P_{(c_i)\to j}=I_m+ce_je_i^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&&& \\
&& 1 &&&& \\
&&& \ddots &&& \\
&& c && 1 && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{bmatrix}
$$

  其中 (j,i) 处的元素是 c，所有对角元均为 1，其余未标注的元素均为零.
  它不影响行列式的值.

(2) 伴随矩阵

设 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ $(n\geq 2)$
我们定义 A 的代数余子式构成的矩阵的转置为**伴随矩阵**.

$$
\operatorname{adj}(A):=\left(\left[\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\det(A)\right]_{i,j=1}^{n}\right)^{\mathrm{T}}=\{[(-1)^{i+j}\det(A[\{i\}^c,\{j\}^c])]_{i,j=1}^{n}\}^{\mathrm{T}}=[(-1)^{i+j}\det(A[\{j\}^c,\{i\}^c])]_{i,j=1}^{n}
$$

我们有 $\text{adj}(A)A = A\text{adj}(A) = \det(A)I_n$

这表明如果 A 非奇异 ($\det(A) \neq 0$)，那么我们有 $\begin{cases} A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A) \\ \det(\text{adj}(A)) = (\det(A))^{n-1} \\ \text{adj}(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}A = \text{adj}(A)^{-1} \end{cases}$

- 例如 $\text{adj}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
  当 $ad - bc \neq 0$ 时我们有 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
- 若 $A = [a_{ij}]$ 是上 (下) 三角阵/对角阵，
  则 $\text{adj}(A) = [b_{ij}]$ 也是上 (下) 三角阵/对角阵，且对角元 $b_{ii} = \prod_{j \neq i} a_{jj}\ (i = 1, \ldots, n)$
- 若 A 是奇异的，且 $\text{rank}(A) \leq n - 2$，则 A 的所有 $n - 1$ 阶子式都是零，于是此时 $\text{adj}(A)$ 是全零方阵.
- 若 A 是奇异的，且 $\text{rank}(A) = n - 1$，则我们有 $\text{rank}(\text{adj}(A)) = 1$
  - 一方面，A 的某个 $n - 1$ 阶子式不为零，故 $\text{adj}(A)$ 不是全零矩阵，有 $\text{rank}(\text{adj}(A)) \geq 1$
  - 另一方面，A 的某 $n - 1$ 行 (**存疑**: 列?) 是线性无关的.
    根据恒等式 $\text{adj}(A)A = \det(A)I_n = 0_{n\times n}$ 可知 $\text{null}(\text{adj}(A)) \geq n - 1$
    因此 $\text{rank}(\text{adj}(A)) = n - \text{null}(\text{adj}(A)) \leq n - (n-1) = 1$

  综上所述，我们有 $\text{rank}(\text{adj}(A)) = 1$
  因此存在非零的 $x, y \in \mathbb{F}^n$ 使得 $\text{adj}(A) = xy^{\text{T}}$
  根据 $(Ax)y^{\text{T}} = A(\text{adj}(A)) = 0_{n\times n} = (\text{adj}(A))A = x(y^{\text{T}}A)$ 可知 $\begin{cases} Ax = 0_m \\ y^{\text{T}}A = 0_n \end{cases}$

函数 $\text{adj}(\cdot) : \mathbb{F}^{n\times n} \mapsto \mathbb{F}^{n\times n}$ 是连续的.
(因为 $\text{adj}(A)$ 的每个元素都是 A 的元素的多项式)
结合 **"任意方阵 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 都是非奇异方阵序列的极限"** 的事实，我们可以得到很多有用的结论:

- 若 $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 非奇异，则我们有:

$$\begin{aligned} \text{adj}(AB) &= \det(AB)(AB)^{-1} \\ &= \det(A)\det(B)B^{-1}A^{-1} \\ &= \det(A)A^{-1}\det(B)B^{-1} \\ &= \text{adj}(A)\text{adj}(B) \end{aligned}$$

  根据函数 $\text{adj}(\cdot)$ 的连续性，我们可以去掉 A, B 非奇异的假设，得到:

$$\text{adj}(AB) = \text{adj}(A)\text{adj}(B)\ \ (\forall\ A, B \in \mathbb{F}^{n\times n})$$

- 对于任意 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 和 $c \in \mathbb{F}$ 我们都有 $\text{adj}(cA) = c^{n-1}\text{adj}(A)$
  特别地，我们有 $\text{adj}(cI_n) = c^{n-1}I_n$ 和 $\text{adj}(0_{n\times n}) = 0_{n\times n}$

  若 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 非奇异，则我们有:

$$\begin{aligned} \text{adj}(\text{adj}(A)) &= \text{adj}(\det(A)A^{-1}) \\ &= (\det(A))^{n-1}\text{adj}(A^{-1}) \\ &= (\det(A))^{n-1}\frac{1}{\det(A)}A \\ &= (\det(A))^{n-2}A \end{aligned}$$

  根据函数 $\text{adj}(\cdot)$ 的连续性，我们可以去掉 A 非奇异的假设，得到:

$$\text{adj}(\text{adj}(A)) = (\det(A))^{n-2}A\ \ (\forall\ A \in \mathbb{F}^{n\times n})$$

- 若 $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 且 $A + B$ 非奇异，则我们有:

$$
\begin{aligned}
A(A+B)^{-1}B &= (A+B)(A+B)^{-1}B - B(A+B)^{-1}B \\
&= B - B(A+B)^{-1}B \\
&= B(A+B)^{-1}(A+B-B) \\
&= B(A+B)^{-1}A
\end{aligned}
\quad \Leftrightarrow A\text{adj}(A+B)B = B\text{adj}(A+B)A
$$

根据函数 $\text{adj}(\cdot)$ 的连续性，我们可以去掉 A, B 非奇异的假设，得到:

$$
A\text{adj}(A+B)B = B\text{adj}(A+B)A \ \ (\forall\, A, B \in \mathbb{F}^{n\times n})
$$

- 设 $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 且 $AB = BA$ (即 A, B 可交换)
  若 A 非奇异，则 $BA^{-1} = A^{-1}ABA^{-1} = A^{-1}BAA^{-1} = A^{-1}B$，表明 A^{-1} 与 B 也可交换.
  注意到 $\begin{cases} BA^{-1} = B\frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A) = \frac{1}{\det(A)}B\text{adj}(A) \\ A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A)B \end{cases}$
  因此 $B\text{adj}(A) = \text{adj}(A)B$，表明 $\text{adj}(A)$ 与 B 也可交换.

  根据函数 $\text{adj}(\cdot)$ 的连续性，我们可以去掉 A 非奇异的假设:
  只要方阵 A, B 可交换，$\text{adj}(A)$ 与 B 就是可交换的.
- 若 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 非奇异，则我们有:

$$
\begin{aligned}
\text{adj}(A^{\mathrm{T}}) &= \det\left(A^{\mathrm{T}}\right)A^{-T} \\
&= \det(A)A^{-T} \\
&= [\det(A)A^{-1}]^{\mathrm{T}} \\
&= \text{adj}(A)^{\mathrm{T}} \\
\text{adj}(A^{\mathrm{H}}) &= \det\left(A^{\mathrm{H}}\right)A^{-H} \\
&= \det(A)A^{-H} \\
&= [\det(A)A^{-1}]^{\mathrm{H}} \\
&= \text{adj}(A)^{\mathrm{H}}
\end{aligned}
$$

  根据函数 $\text{adj}(\cdot)$ 的连续性，我们可以去掉 A 非奇异的假设，得到:

$$
\begin{cases} \text{adj}(A^{\mathrm{T}}) = \text{adj}(A)^{\mathrm{T}} \\ \text{adj}(A^{\mathrm{H}}) = \text{adj}(A)^{\mathrm{H}} \end{cases} \ (\forall\, A \in \mathbb{C}^{n\times n})
$$

(3) Cramer 法则

给定 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 和 $b \in \mathbb{F}^m$，考虑线性方程组 $Ax = b$
当 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 非奇异时，我们可以使用 Cramer 法则给出方程的唯一解的解析表达式.

(Matrix Analysis $0.8.3$ 节)
记 $\det(A \underset{(i)}{\leftarrow} b)$ 为用 b 替代 A 的第 i 列得到的矩阵的行列式值，则我们有:

$$
A\begin{bmatrix} \det(A \underset{(1)}{\leftarrow} b) \\ \vdots \\ \det(A \underset{(n)}{\leftarrow} b) \end{bmatrix} = A\text{adj}(A)b = \det(A)b
$$

当 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 非奇异时，我们就有:

$$
x_i = \frac{\det(A \underset{(i)}{\leftarrow} b)}{\det(A)} \ \ (i = 1, \dots, n)
$$

> Cramer 法则的另一种推导方法:
> 方程组 $Ax = b$ 可改写为 $A(I_n \underset{(i)}{\leftarrow} x) = (A \underset{(i)}{\leftarrow} b)$
>
> 两边取行列式即得到:

> $$\begin{aligned}\det\{(A \underset{(i)}{\leftarrow} b)\} &= \det\left(A(I_n \underset{(i)}{\leftarrow} x)\right) \\ &= \det(A)\det(I_n \underset{(i)}{\leftarrow} x) \quad (i=1,\dots,n) \\ &= \det(A)x_i\end{aligned}$$
>
> 当 $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 非奇异时，即得到 $x_i = \frac{\det(A \underset{(i)}{\leftarrow} b)}{\det(A)} \quad (i=1,\dots,n)$

0.4.2 秩

考虑矩阵 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$
我们定义**秩** $\text{rank}(A) := \dim(\text{Range}(A))$ 为 A 的列极大线性无关组的元素个数.
一个值得注意的事实是 $\text{rank}(A^{\text{T}}) = \text{rank}(A)$
因此我们可以用 A 的行极大线性无关组的元素个数 $\dim(\text{Range}(A^{\text{T}}))$ 作为 $\text{rank}(A)$ 的等价定义.
也就是说，列秩等于行秩.

- 我们定义**零度** $\text{null}(A) := \dim(\text{Ker}(A))$ (其中 $\text{Ker}(A) := \{x \in \mathbb{F}^n : Ax = 0_m\}$)
  (秩-零度定理)
  对于线性空间 $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ 上任意一个线性映射 $T : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{W}$ (记其表示矩阵为 A)
  我们都有 $\text{rank}(A) + \text{null}(A) = \text{rank}(T) + \text{null}(T) = \dim(\mathcal{V})$ 成立.
  其中 $\text{null}(T) := \dim(\text{Ker}(T))$ 为线性映射 T 的零度.

任意给定 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，下列命题是等价的:

- $\text{rank}(A) = r$
- A 的行向量中有 r 个 (且不多于 r 个) 是线性无关的
- A 的列向量中有 r 个 (且不多于 r 个) 是线性无关的
- A 至少存在一个 r 阶非零子式，且 A 的所有高于 r 阶的子式都为零
- $\text{null}(A) = n - r$
- $r = \min\{p \in \mathbb{N}_+ : A = XY^{\text{T}} \text{ where } X \in \mathbb{F}^{m\times p}, Y \in \mathbb{F}^{n\times p}\}$
- $r = \min\{p \in \mathbb{N}_+ : A = x_1y_1^{\text{T}} + \cdots + x_py_p^{\text{T}} \text{ where } x_1,\dots,x_p \in \mathbb{F}^m, y_1,\dots,y_p \in \mathbb{F}^n\}$

(1) 秩与线性方程组

给定 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 和 $b \in \mathbb{F}^m$，考虑线性方程组 $Ax = b$

- 线性方程组 $Ax = b$ 可能没有解 (称为不相容)，可能有唯一解，可能有无穷多组解.
- 线性方程组 $Ax = b$ 是相容的 (即至少存在一组解)，当且仅当 $\text{rank}([A, b]) = \text{rank}(A)$ (即 $b \in \text{Range}(A)$)
  线性方程组 $Ax = b$ 解的本质就是 b 表示为 A 的列线性组合时系数构成的向量.
- 当 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 时，根据 $\text{Range}(A)^{\perp} = \text{Ker}(A^{\text{H}})$ 我们知道:

  $$b \in \text{Range}(A) \;\Leftrightarrow\; b \notin \text{Range}(A)^{\perp} = \text{Ker}(A^{\text{H}})$$

  据此我们可以得到 **Fredholm 择一定理**:
  下列两个命题是互斥的 (即总是恰好有一个为真):

  - 线性方程组 $Ax = b$ 有解
  - 线性方程组 $A^{\text{H}}y = 0_n$ 有满足 $y^{\text{H}}b \neq 0$ 的解

  若 $Ax = b$ 无解，则等价说明存在 $A^{\text{H}}y = 0_n$ 的一个解 $y \in \mathbb{C}^m$ 使得 $y^{\text{H}}b \neq 0$,
  令 $y = b - Ax$ (代表残差)，则问题转变为求解 $A^{\text{H}}(b - Ax) = 0_n$

  注意到 $A^{\text{H}}(b - Ax)$ 是凸函数 $\|b - Ax\|_2^2$ 的梯度.
  因此求解 $A^{\text{H}}(b - Ax) = 0_n$ 就等价于求解最小二乘问题 $\min\limits_{x} \|b - Ax\|_2^2$

(2) 不等式

有如下关于秩的不等式:

- 若 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，则 $\operatorname{rank}(A) \le \{m, n\}$
- 子矩阵的秩不超过原矩阵的秩
- **(Sylvester 不等式)**
  若 $A \in \mathbb{F}^{m\times k}$ 而 $B \in \mathbb{F}^{k\times n}$，则我们有:
  $$(\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)) - k \le \operatorname{rank}(AB) \le \min(\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B))$$
- **(秩-和不等式 rank-sum inequality)**
  若 $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$，则我们有:
  $$|\operatorname{rank}(A) - \operatorname{rank}(B)| \le \operatorname{rank}(A+B) \le \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$$
  其中第二个等号当且仅当 $\begin{cases}\operatorname{Range}(A) \cap \operatorname{Range}(B) = \{0_m\} \\ \operatorname{Range}(A^{\mathrm{T}}) \cap \operatorname{Range}(B^{\mathrm{T}}) = \{0_n\}\end{cases}$ 时取等
  特殊地，若 $\operatorname{rank}(B) = 1$，则我们有 $|\operatorname{rank}(A+B) - \operatorname{rank}(A)| \le 1$
  也就是说，秩一修正至多将原矩阵的秩改变 1.
- **(Schur 补不等式)**
  对于任意 $A \in \mathbb{F}^{n_1\times n_2}, B \in \mathbb{F}^{n_3\times n_2}, C \in \mathbb{F}^{n_3\times n_4}$ 我们都有:
  $$\operatorname{rank}(\begin{bmatrix} A & \\ B & C \end{bmatrix}) \ge \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(C)$$
  当且仅当存在 $X \in \mathbb{F}^{n_3\times n_1}$ 和 $Y \in \mathbb{F}^{n_4\times n_2}$ 使得 $XA + CY = B$ 时取等.
- **(Frobenius 不等式)**
  若 $A \in \mathbb{F}^{m\times k}, B \in \mathbb{F}^{k\times p}, C \in \mathbb{F}^{p\times n}$，则我们有:
  $$\operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC) \le \operatorname{rank}(B) + \operatorname{rank}(ABC)$$
  当且仅当存在矩阵 $X \in \mathbb{F}^{n_2\times n_1}$ 和 $Y \in \mathbb{F}^{n_4\times n_3}$ 使得 $B = XAB + BCY$ 时取等.

  证明:
  首先注意到:
  $$\begin{aligned}
  \begin{bmatrix} I_{n_1} & -A \\ & I_{n_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ABC & \\ & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{n_4} & \\ C & I_{n_3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & I_{n_4} \\ -I_{n_3} & \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_{n_1} & -A \\ & I_{n_2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ABC & \\ BC & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & I_{n_4} \\ -I_{n_3} & \end{bmatrix} \\
  &= \begin{bmatrix} 0_{n_1\times n_4} & -AB \\ BC & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & I_{n_4} \\ -I_{n_3} & \end{bmatrix} \\
  &= \begin{bmatrix} AB & 0_{n_1\times n_4} \\ -B & BC \end{bmatrix}
  \end{aligned}$$
  根据 **Schur 补不等式** 可知:
  $$\begin{aligned}
  \operatorname{rank}(ABC) + \operatorname{rank}(B) &= \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} ABC & \\ & B \end{bmatrix}\right) \\
  &= \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} AB & 0_{n_1\times n_4} \\ -B & BC \end{bmatrix}\right) \quad (\text{utilize Schur complement inequality}) \\
  &\ge \operatorname{rank}(AB) + \operatorname{rank}(BC)
  \end{aligned}$$
  当且仅当存在矩阵 $X \in \mathbb{F}^{n_2\times n_1}$ 和 $Y \in \mathbb{F}^{n_4\times n_3}$ 使得 $B = XAB + BCY$ 时取等.

(3) 恒等式

有如下关于秩的等式:

- 若 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$，则 $\operatorname{rank}(A^{\mathrm{H}}A) = \operatorname{rank}(A^{\mathrm{H}}) = \operatorname{rank}(A^{\mathrm{T}}) = \operatorname{rank}(\bar{A}) = \operatorname{rank}(A)$
- 左乘或右乘非奇异矩阵不改变原矩阵的秩
- 若 $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$，
  则当且仅当存在非奇异矩阵 $X \in \mathbb{F}^{m\times m}, Y \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 使得 $B = XAY$ 时有 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$ 成立.
- **(满秩分解)**
  若 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$，则 $\operatorname{rank}(A) = r$ 当且仅当下列条件至少有一个成立 (实际上这些条件相互蕴含):
  - ① 存在两个列满秩矩阵 $X \in \mathbb{F}^{m\times r}$ 和 $Y \in \mathbb{F}^{n,r}$ 使得 $A = XY^{\mathrm{T}}$ (例如 QR 分解)
  - ② 存在两个列满秩矩阵 $X \in \mathbb{F}^{m\times r}$ 和 $Y \in \mathbb{F}^{n,r}$ 以及一个非奇异阵 $B \in \mathbb{F}^{r\times r}$ 使得 $A = XBY^{\mathrm{T}}$ (例如奇异值分解)
  - ③ 存在两个非奇异阵 $S \in \mathbb{F}^{m\times m}$ 和 $T \in \mathbb{F}^{n\times n}$ 使得 $A = S\begin{bmatrix} I_r & \\ & 0_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}T$
    其中 ③ 所描述的就是秩 r 矩阵 A 的**秩标准型** (rank normal form)，它可由初等行列变换得到.

  特别地，$\operatorname{rank}(A) = 1$ 当且仅当存在两个非零向量 $x \in \mathbb{F}^m$ 和 $y \in \mathbb{F}^n$ 使得 $A = xy^{\mathrm{T}}$
- 设 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, X \in \mathbb{F}^{n\times k}, Y \in \mathbb{F}^{n\times k}$
  若 $W = Y^{\mathrm{T}}AX$ 非奇异，则我们有:
  $$\operatorname{rank}(A - AXW^{-1}Y^{\mathrm{T}}A) = \operatorname{rank}(A) - \operatorname{rank}(AXW^{-1}Y^{\mathrm{T}}A)$$
  当 $k = 1$ 时，这就是 **Wedderburn 秩一化简公式**:
  - 设 $x \in \mathbb{F}^n, y \in \mathbb{F}^m$
    若 $w = y^{\mathrm{T}}Ax \neq 0$，则 $\operatorname{rank}(A - w^{-1}Axy^{\mathrm{T}}A) = \operatorname{rank}(A) - 1$
  - 反之，设 $\sigma \in \mathbb{F}, u \in \mathbb{F}^n, v \in \mathbb{F}^m$
    若 $\operatorname{rank}(A - \sigma uv^{\mathrm{T}}) < \operatorname{rank}(A)$，
    则 $\operatorname{rank}(A - \sigma uv^{\mathrm{T}}) = \operatorname{rank}(A) - 1$ 且存在 $x \in \mathbb{F}^n$ 和 $y \in \mathbb{F}^m$ 使得 $\begin{cases} u = Ax \\ v = A^{\mathrm{T}}y \\ y^{\mathrm{T}}Ax \neq 0 \\ \sigma = (y^{\mathrm{T}}Ax)^{-1} \end{cases}$

Sherman–Morrison–Woodbury 公式:
设 $\begin{cases} A \in \mathbb{C}^{n\times n} \\ U, V \in \mathbb{C}^{n\times k} \\ B \in \mathbb{C}^{k\times k} \\ n \geq k \end{cases}$ 且 A, B 均为可逆矩阵，
则 $(A + UBV^{\mathrm{H}})$ 可逆的充要条件是 $(B^{-1} + V^{\mathrm{H}}A^{-1}U)$ 可逆，
此时逆矩阵 $(A + UBV^{\mathrm{H}})^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(B^{-1} + V^{\mathrm{H}}A^{-1}U)^{-1}V^{\mathrm{H}}A^{-1}$

- 上述公式给出了 A 进行秩 k 更新得到的矩阵 $A + UBV^{\mathrm{H}}$ 的逆矩阵.
  若 A^{-1} 已知，则我们可以很方便地计算 $(A + UBV^{\mathrm{H}})^{-1}$
- 特殊地，当 $B = I_k$ 且 $(I_k + V^{\mathrm{H}}A^{-1}U)$ 非奇异时，
  公式化为 $(A + UV^{\mathrm{H}})^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(I_k + V^{\mathrm{H}}A^{-1}U)^{-1}V^{\mathrm{H}}A^{-1}$
  (这便是实用意义下的 Sherman–Morrison–Woodbury 公式)
- 进一步，当 $k = 1$ 时，记 $u, v \in \mathbb{C}^n$ (假设 $1 + v^{\mathrm{H}}A^{-1}u \neq 0$)
  公式化为 $(A + uv^{\mathrm{H}})^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^{\mathrm{H}}A^{-1}}{1+v^{\mathrm{H}}A^{-1}u}$
  (这便是最早的 Sherman–Morrison 公式)

证明:
考虑线性系统 $(A + UBV^{\mathrm{H}})x = b$，其中 $x, b \in \mathbb{C}^n$
其增广形式为 $\begin{bmatrix} A & U \\ V^{\mathrm{H}} & -B^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$ (引入的附加变量 $\xi \in \mathbb{C}^k$)
对系数矩阵做 LU 分解有:
$$\begin{bmatrix} A & U \\ V^{\mathrm{H}} & -B^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & \\ V^{\mathrm{H}}A^{-1} & I_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & U \\ & -(B^{-1} + V^{\mathrm{H}}A^{-1}U) \end{bmatrix}$$

于是增广系统变为:
$$\begin{bmatrix} I_n & \\ V^{\mathrm{H}}A^{-1} & I_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & U \\ & -(B^{-1}+V^{\mathrm{H}}A^{-1}U) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 考虑对分块下三角阵做**前向替换** (Forward Substitution):
  即利用下三角阵的结构的特殊性求解 $\begin{bmatrix} I_n & \\ V^{\mathrm{H}}A^{-1} & I_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$
  解得 $\begin{cases} y = b \\ \eta = -V^{\mathrm{H}}A^{-1}y \end{cases}$
- 再对分块上三角阵做**后向替换** (Backward Substitution):
  即利用上三角阵的结构的特殊性求解 $\begin{bmatrix} A & U \\ & -(B^{-1}+V^{\mathrm{H}}A^{-1}U) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \eta \end{bmatrix}$
  当且仅当 $(B^{-1}+V^{\mathrm{H}}A^{-1}U)$ 可逆时有解 $\begin{cases} \xi = -(B^{-1}+V^{\mathrm{H}}A^{-1}U)^{-1}\eta \\ x = A^{-1}(y - U\xi) \end{cases}$

综合 $\begin{cases} y = b \\ \eta = -V^{\mathrm{H}}A^{-1}y \\ \xi = -(B^{-1}+V^{\mathrm{H}}A^{-1}U)^{-1}\eta \\ x = A^{-1}(y-U\xi) \end{cases}$
可得 $x = [A^{-1} - A^{-1}U(B^{-1}+V^{\mathrm{H}}A^{-1}U)^{-1}V^{\mathrm{H}}A^{-1}]\cdot b$
将这个解代入原始系统 $(A+UBV^{\mathrm{H}})x = b$
可知 $(A+UBV^{\mathrm{H}})$ 可逆且逆矩阵为 $[A^{-1} - A^{-1}U(B^{-1}+V^{\mathrm{H}}A^{-1}U)^{-1}V^{\mathrm{H}}A^{-1}]$
命题得证.

一个简单应用:
若 $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为非奇异三对角矩阵,
则 T^{-1} 的严格上三角部分的任一分块 (或严格下三角部分的任一分块) 的秩都不超过 1.

证明:
首先对于超对角线有零元的三对角矩阵

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} * & * & & & & & & \\ * & * & * & & & & & \\ & * & * & * & & & & \\ & & * & * & 0 & & & \\ \hline & & & * & * & * & & \\ & & & & * & * & * & \\ & & & & & * & * & * \\ & & & & & & * & * \end{array}\right] = \begin{bmatrix} T_1 & \\ * & T_2 \end{bmatrix} \overset{\Delta}{=} T_0,$$

其逆矩阵

$$T_0^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} T_1^{-1} & \\ \hline * & T_2^{-1} \end{array}\right]$$

的右上分块为零矩阵.
对于一般的三对角阵 T，我们总可以将其表示为形如 T_0 的三对角阵加上一个秩 1 修正,
即 $T = T_0 + vv^{\mathrm{H}}$.

根据 **Sherman–Morrison 公式**可知

$$T^{-1} = (T_0 + vv^{\mathrm{H}})^{-1} = T_0^{-1} - \frac{T_0^{-1}vv^{\mathrm{H}}T_0^{-1}}{1+v^{\mathrm{H}}T_0^{-1}v}.$$

我们知道 T_0^{-1} 是一个分块下三角矩阵，而 $T_0^{-1}vv^{\mathrm{H}}T_0^{-1}/(1+v^{\mathrm{H}}T_0^{-1}v)$ 为一个秩 1 矩阵,
因此 T^{-1} 的右上分块的秩不超过 1.
根据 T_0 中超对角线零元位置的任意性,
可知 T^{-1} 的严格上三角部分的任意分块的秩都不超过 1.

对 T^T 应用上述结论即可知 T^{-1} 的任一严格下三角部分的分块的秩都不超过 1.
命题得证.

0.4.3 Frobenius 友阵

考虑关于 $x \in \mathbb{F}$ 的 n 次首一复系数多项式 $p(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \alpha_{n-2}x^{n-2} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$.
方程 $p(x) = 0$ 可等价表示为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^{n-2} \\ x^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^{n-2} \\ x^{n-1} \end{bmatrix} x.$$

记上述线性方程组的系数矩阵为 A,
则 $p(x)$ 的根 λ 一定是 A 的特征值，对应的特征向量为 $[1, \lambda, \cdots, \lambda^{n-2}, \lambda^{n-1}]^{\mathrm{T}}$.
我们称 A 为 $p(x)$ 的 **Frobenius 友阵** (Frobenius companion matrix).
它有很多等价定义，例如:

$$\begin{bmatrix} -\alpha_{n-1} & -\alpha_{n-2} & \cdots & -\alpha_1 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ or } \begin{bmatrix} 0 & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

有趣的是，虚数单位 i 的实表示矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

便是首一多项式 $x^2 + 1 = 0$ 的 Frobenius 友阵.

总之，多项式求根问题可以等价表示为矩阵求特征值问题.
若 $p(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ 的 n 个根是 $x_1, x_2, \ldots, x_n$，则我们有

$$\begin{gathered} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & \cdots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \\ = \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & & & & \\ & x_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & x_{n-1} & \\ & & & & x_n \end{bmatrix}. \end{gathered}$$

0.5 矩阵运算

0.5.1 Hadamard 乘积

Hadamard 乘积 $\odot : \mathbb{F}^{m\times n} \mapsto \mathbb{F}^{m\times n}$ 即逐元素乘积，又称 Schur 乘积.
对于任意给定的 $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$，我们定义 $A \odot B := [a_{ij}b_{ij}] \in \mathbb{F}^{m\times n}$

对于任意 $A, B, C \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 和 $\alpha \in \mathbb{F}$ 我们都有:

- 可交换: $A \odot B = B \odot A$ (这区别于矩阵乘法)
- 可结合: $(A \odot B) \odot C = A \odot (B \odot C)$
- 对加法分配: $\begin{cases} A \odot (B + C) = A \odot B + A \odot C \\ (B + C) \odot A = B \odot A + C \odot A \end{cases}$
- 与数乘相容: $(\alpha A) \odot B = \alpha(A \odot B) = A \odot (\alpha B)$
- 零元: $A \odot 0_{m\times n} = 0_{m\times n} \odot A = 0_{m\times n}$
- 单位元: $A \odot 1_{m\times n} = 1_{m\times n} \odot A = A$

Hadamard 乘积的其他性质: [Hadamard product (matrices) - Wikipedia]

- $\text{rank}(A \odot B) \le \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$
- 向量的对角化算子可以表示为 $\text{diag}(x) = (x 1_n^{\text{T}}) \odot I_n \ \ (\forall\, x \in \mathbb{C}^n)$
- 设 $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$
  若 $D_1 \in \mathbb{C}^{m\times m}, D_2 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是两个对角阵，则我们有: **(待补充)**

  $$D_1(A \odot B)D_2 = (D_1A) \odot (BD_2) = (D_1AD_2) \odot B = (AD_2) \odot (D_1B) = A\odot$$

- 设 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是两个 Hermite 阵.
  则其 Hadamard 乘积 $A \odot B$ 一定是 Hermite 阵,
  而其矩阵乘积 AB 是 Hermite 阵，当且仅当 $AB = BA$ (即 A, B 可交换)
- 对于任意 $x, y \in \mathbb{C}^n$ 我们都有:

  $$x \odot y = \text{diag}(x)y = \text{diag}(y)x$$

- 对于任意给定的 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 和 $x, y \in \mathbb{C}^n$，我们都有:

  $$(xy^{\text{H}}) \odot A = \text{diag}(x)A\text{diag}(\bar{y})$$

  证明:
  注意到 $\text{diag}(x)A = [x_i a_{ij}]$
  于是我们有 $\text{diag}(x)A\text{diag}(\bar{y}) = [(x_i a_{ij})\bar{y}_j] = [(x_i\bar{y}_j)a_{ij}] = (xy^{\text{H}} \odot A)$
- **(Matirx Analysis 引理 7.5.2)**
  对于任意给定的 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 和 $x, y \in \mathbb{C}^n$，我们都有:

  $$x^{\text{H}}(A \odot B)y = \text{tr}\left(\text{diag}(\bar{x})A\text{diag}(y)B^{\text{T}}\right)$$

  证明:
  注意到

  $$\begin{cases} \sum_{i,j}^{n} a_{ij}b_{ij} = \text{tr}\left(AB^{\text{T}}\right) \\ \text{diag}(\bar{x}) \cdot A = [\bar{x}_i a_{ij}] \\ B \cdot \text{diag}(y) = [b_{ij}y_j], \end{cases}$$

  于是我们有

  $$\begin{aligned} \text{tr}\left(\text{diag}(\bar{x})A\text{diag}(y)B^{\text{T}}\right) &= \text{tr}\left[(\text{diag}(\bar{x})A)(B\text{diag}(y))^{\text{T}}\right] \\ &= \sum_{i,j}^{n}(\bar{x}_i a_{ij})(b_{ij}y_j) \\ &= \sum_{i,j}^{n}\bar{x}_i(a_{ij}b_{ij})y_j \\ &= x^{\text{H}}(A \odot B)y. \end{aligned}$$

- **(Schur 乘积定理, Matrix Analysis 定理 $7.5.3$)**
  设 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 都是半正定的，则我们有:
  - ① $A \odot B$ 是半正定的
  - ② 若 A 正定，且 B 的主对角元均为正实数，则 $A \odot B$ 是正定的
  - ③ 若 A, B 都正定，则 $A \odot B$ 正定
    注意此时 AB 不一定正定，例如:

$$\begin{aligned} &A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, A \odot B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ are all positive definite,} \\ &\text{but } AB = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ is not positive definite; it is not even symmetric.} \end{aligned}$$

- 若 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 都是正定的，则我们有:

$$\prod_{i=k}^{n} \lambda_i(A \odot B) \geq \prod_{i=k}^{n} \lambda_i(AB) \ \ (\text{for all } k = 1, \dots, n)$$

  其中 $\lambda_i(A \odot B)$ 和 $\lambda_i(AB)$ 分别是 $A \odot B$ 和 AB 的第 i 大的特征值.

0.5.2 Kronecker 乘积

给定 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 和 $B \in \mathbb{F}^{r\times q}$，我们定义 Kronecker 乘积 $A \otimes B \in \mathbb{F}^{mr\times nq}$ 为:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

(Matrix Cookbook Nov.15, 2012 Page 60)
对于任意 $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{r\times q}, C \in \mathbb{F}^{p\times l}, D \in \mathbb{F}^{s\times t}$ 和 $\alpha \in \mathbb{F}$，Kronecker 乘积具有以下性质:

- 一般不满足交换律: $A \otimes B \neq B \otimes A$ in general (二者相差行列重排)
- 可结合: $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$
- 对加法分配: $\begin{cases} A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C \\ (B + C) \otimes A = B \otimes A + C \otimes A \end{cases}$
- 与数乘相容: $(\alpha A) \otimes B = \alpha(A \otimes B) = A \otimes (\alpha B)$
- $(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$ if the matrix products AB and CD are well-defined
- $\begin{cases} (A \otimes B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} \otimes B^{\mathrm{T}} \\ (A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1} \\ (A \otimes B)^{\dagger} = A^{\dagger} \otimes B^{\dagger} \end{cases}$
- $\operatorname{rank}(A \otimes B) = \operatorname{rank}(A) \operatorname{rank}(B)$
-
  $$\operatorname{tr}(A \otimes B) = \operatorname{tr}(A) \operatorname{tr}(B) = \operatorname{tr}(\operatorname{diag}(A) \otimes \operatorname{diag}(B)) = \operatorname{tr}(\Lambda_A \otimes \Lambda_B) \text{ if } A, B \text{ are square matrices}$$

  (其中 Λ_A, Λ_B 分别代表 A, B 的特征值构成的对角阵)
- 若 A, B 均为方阵，则 $\det(A \otimes B) = \det(A)^{\dim(B)} \det(B)^{\dim(A)}$，其中 $\dim(A)$ 代表 A 的阶数.
- $\operatorname{eig}(A \otimes B) = \operatorname{eig}(A) \otimes \operatorname{eig}(B)$
  其中 $\operatorname{eig}(A)$ 代表 A 的特征值构成的列向量 (邵老师采用的记号为 $\operatorname{spec}(A)$).
- $\{\operatorname{eig}(A \otimes B)\} = \{\operatorname{eig}(B \otimes A)\}$ if A, B are square matrices
- $\{\operatorname{eig}(A \otimes B)\} = \{\operatorname{eig}(A)\operatorname{eig}(B)^{\mathrm{T}}\}$ if A, B are symmetric square matrices

---

应用举例: 证明代数数构成一个数域.
有理系数多项式的根称为代数数.
由于代数数是复数，天然满足复数域上的运算律.
因此要证明代数数构成一个数域，我们只需验证封闭性，
即对于任意代数数 α, β，$\alpha + \beta, \alpha - \beta, \alpha \times \beta, \alpha \backslash \beta \ (\beta \neq 0)$ 也都是代数数.

证明: (待补充)
任意给定代数数 α, β，根据 Frobenius 友阵的知识，
我们知道存在 $A \in \mathbb{Q}^{m\times m}, B \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ 和 $x \in \mathbb{C}^m, y \in \mathbb{C}^m$ 使得

$$\begin{cases} Ax = x\alpha \\ By = y\beta. \end{cases}$$

- ① 注意到 $(A \otimes I_n + I_m \otimes B) \in \mathbb{Q}^{mn\times mn}$ 具有特征值 $\alpha+\beta$，表明 $\alpha+\beta$ 是代数数.
- ② 注意到 $(-B)y = y(-\beta)$，因此 $-\beta$ 也是一个代数数，因此 $\alpha-\beta = \alpha+(-\beta)$ 也是代数数.
- ③ 注意到 $(A\otimes B)(x\otimes y) = (Ax)\otimes(By) = (x\alpha)\otimes(y\beta) = (x\otimes y)(\alpha\otimes\beta) = (x\otimes y)(\alpha\times\beta)$
由于 $\alpha\times\beta$ 是 $(A\otimes B)\in\mathbb{Q}^{mn\times mn}$ 的特征值，因而是代数数.
- ④ 注意到若代数数 $\beta\neq 0$ 是有理系数多项式 $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ 的根，
那么我们有 $1 + a_{n-1}(\beta^{-1}) + \cdots + a_1(\beta^{-1})^{n-1} + a_0(\beta^{-1})^n = 0$，表明 β^{-1} 也是一个代数数.
因此 $\alpha\backslash\beta\ = \alpha\times(\beta^{-1})$ 也是一个代数数.

综上所述，代数数构成一个数域.
Attention is all you need.

0.5.3 向量化操作符

向量化操作符 $\mathrm{vec}(\cdot)$ 将矩阵 $A = [a_1, \ldots, a_n] \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 按列拉伸为一个 mn 维的列向量

$$\mathrm{vec}(A) = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{mn}.$$

(Matrix Cookbook Nov.15, 2012 Page 60)
向量化操作符具有以下性质:

- 它是一个线性映射: $\begin{cases} \mathrm{vec}(A+B) = \mathrm{vec}(A) + \mathrm{vec}(B) \\ \mathrm{vec}(\alpha A) = \alpha\mathrm{vec}(A) \end{cases}$
- $\mathrm{tr}\left(A^{\mathrm{T}}B\right) = \mathrm{vec}(A)^{\mathrm{T}}\mathrm{vec}(B)$
- $\mathrm{vec}(AXB) = (B^{\mathrm{T}}\otimes A)\mathrm{vec}(X)$
- $a^{\mathrm{T}}XCX^{\mathrm{T}}b = \mathrm{vec}(X)^{\mathrm{T}}[C\otimes(ba^{\mathrm{T}})]\mathrm{vec}(X)$
- 给定 $A\in\mathbb{F}^{m\times m}, B\in\mathbb{F}^{n\times n}, C\in\mathbb{F}^{m\times n}$.
Sylvester 方程组 $AX - XB = C$ 可以等价表示为 $\mathrm{vec}(X) = (I_n\otimes A - B^{\mathrm{T}}\otimes I_m)^{-1}\mathrm{vec}(C)$
$$\begin{gathered} AX - XB = C \\ \Leftrightarrow \\ (I_n\otimes A - B^{\mathrm{T}}\otimes I_m)\mathrm{vec}(X) = \mathrm{vec}(C) \end{gathered}$$
(Sylvester 定理, Matrix Analysis 定理 $2.4.4.1$)
Sylvester 方程组有唯一解，
当且仅当系数矩阵 $(I_n\otimes A - B^{\mathrm{T}}\otimes I_m)$ 非奇异，即当且仅当 A, B 没有公共特征值.
这个命题的证明需要 Schur 分解定理，故我们将其放在下一篇笔记中.

> 根据邵老师的讲述，Sylvester 是一个很喜欢猜想的数学家，
> 但可惜的是，他几乎所有的猜想都是错的，不过有一个猜想是对的.
> **(Sylvester–Gallai 定理)**
> 若在平面上有有限个点，不全在同一直线上，
> 则存在一条直线，恰好通过这组点中的两点.
>
> **Proof:**
> 因为点集 S 有限，故存在两点 $P, Q\in S$，
> 使得它们的距离是点集 S 中任意两点间的最小距离.
> 假设不存在只包含点集 S 中两点的直线，则直线 PQ 上必有第三个点 $R\in S$.

0.5.4 求导运算

(1) 向量求导

给定 $x \in \mathbb{F}^n$ 和 $y \in \mathbb{F}^m$，考虑 $\frac{\partial y}{\partial x}$

- 对于一般的情况，我们记:

$$\frac{\partial y}{\partial x} := \left[\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{m\times n}$$

$$\nabla_x y := \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} = \left[\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times m}$$

- 若 x 是一个标量 (即 $n=1$)，则我们有:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x} \\ \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{m\times 1}$$

$$\nabla_x y = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{1\times m}$$

- 若 y 是一个标量 (即 $m=1$)，则我们有:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{1\times n}$$

$$\nabla_x y = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times 1}$$

  若标量 y 关于 n 维向量 x 二阶可微，则我们记:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial x}\nabla_x y = \left[\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial y}{\partial x_i}\right] = \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$\nabla_x^2 y := \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^{\mathrm{T}} = \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

(链式法则)
给定 $x \in \mathbb{F}^n, y \in \mathbb{F}^r, z \in \mathbb{F}^m$，则 $\frac{\partial z}{\partial x} \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $\frac{\partial y}{\partial x} \in \mathbb{F}^{r\times n}$, $\frac{\partial z}{\partial y} \in \mathbb{F}^{m\times r}$ 满足:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\nabla_x z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}} = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{\mathrm{T}} = \nabla_x y \nabla_y z$$

(2) 矩阵求导

我们假设 X 没有特殊结构 (例如对称性和正定性等等) 以保证 X 的元素都是相互独立的.
这个基本假设可以表示为:

$$\frac{\partial X_{kl}}{\partial X_{ij}} = \delta_{ik}\delta_{lj} = \begin{cases} 1 & \text{if } i=k \text{ and } l=j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中 $\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{if } i=j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ 代表 Kronecker δ-函数.

考虑矩阵 $X \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 对标量 y 的求导:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \left[\frac{\partial X_{ij}}{\partial y}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_{11}}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial X_{1n}}{\partial y} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial X_{m1}}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial X_{mn}}{\partial y} \end{bmatrix}$$

考虑矩阵 $X \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 对其自身元素 X_{ij} 的求导:

$$\frac{\partial X}{\partial X_{ij}} = E_{ij}$$

其中 $E_{ij} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 在 (i,j) 位置上为 1，在其余位置为零.

考虑标量 $y = f(X)$ 关于矩阵 $X \in \mathbb{F}^{m\times n}$ 的求导，我们记:

$$\frac{\partial y}{\partial X} := \left[\frac{\partial y}{\partial X_{ji}}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_{m1}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_{1n}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_{mn}} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times m}$$

$$\nabla_X y := \left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)^{\mathrm{T}} = \left[\frac{\partial y}{\partial X_{ij}}\right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_{1n}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_{m1}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_{mn}} \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{m\times n}$$

(Matrix Cookbook Nov.15, 2012 Page 8)
微分运算符 $\partial(\cdot)$ 具有以下性质:

- $\partial A \equiv 0_{m\times n} \ \ (\text{where } A \in \mathbb{F}^{m\times n} \text{ is a constant matrix})$
- $\begin{cases} \partial(X+Y) = \partial X + \partial Y \\ \partial(\alpha X) = \alpha \partial X \end{cases}$
- $\begin{cases} \partial(X^{\mathrm{T}}) = (\partial X)^{\mathrm{T}} \\ \partial(X^{\mathrm{H}}) = (\partial X)^{\mathrm{H}} \end{cases}$
- $\partial(\mathrm{tr}\,(X)) = \mathrm{tr}\,(\partial X)$
- $\partial(XY) = (\partial X)Y + X(\partial Y)$
- $\partial(X \odot Y) = (\partial X) \odot Y + X \odot (\partial Y)$
- $\partial(X \otimes Y) = (\partial X) \otimes Y + X \otimes (\partial Y)$
- $\partial(X^{-1}) = -X^{-1}(\partial X)X^{-1}$
- $\partial(\det\,(X)) = \mathrm{tr}\,(\mathrm{adj}(X)\partial X) = \det\,(X)\,\mathrm{tr}\left(X^{-1}\partial X\right)$
- $\partial(\log\,(\det\,(X))) = \mathrm{tr}\left(X^{-1}\partial X\right)$

(3) 常用结论

求导的有效思路: 固定一个对另一个求导.
例如对于 $f(x)=Axx^{\mathrm{T}}x$，可将其改写为 $f(x)=Ax_1x_2^{\mathrm{T}}x_3|_{x_1=x,x_2=x,x_3=x}$
然后分别对 x_1,x_2,x_3 求梯度 $\begin{cases}\nabla_{x_1}Ax_1x_2^{\mathrm{T}}x_3=\nabla_{x_1}Ax_1\cdot(x_2^{\mathrm{T}}x_3I_n)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}\cdot(x_3^{\mathrm{T}}x_2I_n)=x_3^{\mathrm{T}}x_2A^{\mathrm{T}}\\\nabla_{x_2}Ax_1x_2^{\mathrm{T}}x_3=\nabla_{x_2}x_3^{\mathrm{T}}x_2\cdot(Ax_1)^{\mathrm{T}}=x_3\cdot x_1^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=x_3x_1^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\\\nabla_{x_3}Ax_1x_2^{\mathrm{T}}x_3=(Ax_1x_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=x_2x_1^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\end{cases}$
最后将变量 x_1,x_2,x_3 重新替换为x，相加得到 $\nabla_xf=2xx^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}+x^{\mathrm{T}}xA^{\mathrm{T}}$

计算结果可由 [Matrix Calculus] 网站验证.

(Matrix Cookbook Nov.15, 2012 Page 10)
一阶结论:

- $\nabla_xx^{\mathrm{T}}a=\nabla_xa^{\mathrm{T}}x=a$
- $\begin{cases}\nabla_xAx=A^{\mathrm{T}}\\\nabla_xx^{\mathrm{T}}A=A\end{cases}$(特殊地我们有 $\nabla_xx=\nabla_xx^{\mathrm{T}}=I_n$)
- $\begin{cases}\nabla_x(Ax-b)^{\mathrm{T}}(Ax-b)=2A^{\mathrm{T}}(Ax-b)\\\nabla_x^2(Ax-b)^{\mathrm{T}}(Ax-b)=2A^{\mathrm{T}}A\\\nabla_x\|Ax-b\|_2=\nabla_x\sqrt{(Ax-b)^{\mathrm{T}}(Ax-b)}=\frac{1}{2\|Ax-b\|_2}2A^{\mathrm{T}}(Ax-b)=\frac{A^{\mathrm{T}}(Ax-b)}{\|Ax-b\|_2}\\\nabla_x\|Ax-b\|_1=\nabla_x1_n^{\mathrm{T}}|Ax-b|=A^{\mathrm{T}}\mathrm{sgn}(Ax-b)\text{ if }Ax-b\text{ has no zero entries}\end{cases}$
- $\begin{cases}\nabla_Xa^{\mathrm{T}}Xb=ab^{\mathrm{T}}\\\nabla_Xa^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}b=ba^{\mathrm{T}}\end{cases}\Rightarrow\ \nabla_Xa^{\mathrm{T}}Xa=\nabla_Xa^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}a=aa^{\mathrm{T}}$
- $\nabla_{X_{ij}}AXB=AE_{ij}B$ (其中 E_{ij} 在 (i,j) 位置上为 1，在其余位置为零)
- $\begin{cases}\nabla_{X_{ij}}(XA)_{kl}=\delta_{ik}A_{jl}=(E_{ij}A)_{kl}\\\nabla_{X_{ij}}(X^{\mathrm{T}}A)_{kl}=\delta_{il}A_{jk}=(E_{ji}A)_{kl}\end{cases}$(其中 $\delta_{ij}:=\begin{cases}1&\text{if }i=j\\0&\text{otherwise}\end{cases}$ 代表 Kronecker δ-函数)

(Matrix Cookbook Nov.15, 2012 Page 11)
二阶结论:

- $\nabla_xx^{\mathrm{T}}Ax=(A+A^{\mathrm{T}})x$ (特殊地我们有 $\nabla_xx^{\mathrm{T}}x=2x$)
  $\nabla_x(Ax+b)^{\mathrm{T}}C(Dx+e)=A^{\mathrm{T}}C(Dx+e)+D^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}(Ax+b)$
- $\begin{cases}\nabla_xa^{\mathrm{T}}x^{\mathrm{T}}xb=2xa^{\mathrm{T}}b\\\nabla_xa^{\mathrm{T}}xx^{\mathrm{T}}b=(ab^{\mathrm{T}}+ba^{\mathrm{T}})x\end{cases}\quad\Leftarrow\quad\begin{cases}\nabla_Xa^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}Xb=X(ab^{\mathrm{T}}+ba^{\mathrm{T}})\\\nabla_Xa^{\mathrm{T}}XX^{\mathrm{T}}b=(ab^{\mathrm{T}}+ba^{\mathrm{T}})X\end{cases}$
- $\nabla_{X_{ij}}\sum\limits_{k,l,m,n}X_{kl}X_{mn}=2\sum\limits_{k,l}X_{kl}$
- $\begin{cases}\nabla_{X_{ij}}(X^{\mathrm{T}}AX)_{kl}=\delta_{lj}(X^{\mathrm{T}}A)_{ki}+\delta_{kj}(AX)_{il}\\\nabla_{X_{ij}}X^{\mathrm{T}}AX=X^{\mathrm{T}}AE_{ij}+E_{ji}AX\end{cases}$(注意 $(E_{ij})_{kl}=\delta_{ik}\delta_{jl}$)

[Appendix D Matrix Calculus (stanford.edu)]
其他结论:

- $\nabla_X\operatorname{tr}(AX)=\nabla_X\operatorname{tr}(XA)=\nabla_X\operatorname{tr}\left(A^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}\right)=\nabla_X\operatorname{tr}\left(X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}\right)=A^{\mathrm{T}}$ (特殊地我们有 $\nabla_X\operatorname{tr}(X)=I$)
  据此可推出前面的 $\nabla_Xa^{\mathrm{T}}Xb=\nabla_X\operatorname{tr}\left(ba^{\mathrm{T}}X\right)=\nabla_X\operatorname{tr}\left(X^{\mathrm{T}}ab^{\mathrm{T}}\right)=\nabla_Xb^{\mathrm{T}}X^{\mathrm{T}}a=ab^{\mathrm{T}}$
  一般来说我们有 $\nabla_X\operatorname{tr}\left(AX^k\right)=\nabla_X\operatorname{tr}\left(X^kA\right)=\sum\limits_{i=0}^{k-1}(X^iAX^{k-1-i})^{\mathrm{T}}$
- $\nabla_X\|X\|_{\mathrm{F}}^2=\nabla_X\operatorname{tr}\left(X^{\mathrm{T}}X\right)=\nabla_X\operatorname{tr}\left(XX^{\mathrm{T}}\right)=2X$
- $\nabla_X\operatorname{tr}\left(X^{-1}\right)=-(X^{-2})^{\mathrm{T}}$
- $\nabla_X\det(X)=\nabla_X\det\left(X^{\mathrm{T}}\right)=\det(X)X^{-T}=\operatorname{adj}(X)^{\mathrm{T}}$
  一般来说我们有 $\nabla_X\det\left(X^k\right)=\nabla_X\det^k(X)=k\det^{k-1}(X)\det(X)X^{-T}=k\det^k(X)X^{-T}$
- $\nabla_X\det\left(X^{-1}\right)=-\det\left(X^{-1}\right)X^{-T}=-\det(X)^{-1}X^{-T}$
- $\nabla_X\log(\det(X))=X^{-T}$
  一般来说我们有 $\nabla_X\log(\det(X^\mu))=\mu X^{-T}$ (特殊地我们有 $\nabla_X\log\left(\det\left(X^{-1}\right)\right)=-X^{-T}$)
- $\nabla_x1_n^{\mathrm{T}}e^{Ax}=A^{\mathrm{T}}e^{Ax}$
- $\nabla_x\log\left(1_n^{\mathrm{T}}e^x\right)=\frac{1}{1_n^{\mathrm{T}}e^x}e^x$

应用举例:
给定实方阵 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\min_{X^{\mathrm{T}}X=I_k} \operatorname{tr}\left(X^{\mathrm{T}}AX\right) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$$
$$\text{where } \lambda_i \text{ denote the } i\text{-th smallest eigenvalue of matrix } A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

首先构造 Lagrange 函数:

$$\begin{aligned} L(X,\Lambda) &= \operatorname{tr}\left(X^{\mathrm{T}}AX\right) - \operatorname{tr}\left(\Lambda(X^{\mathrm{T}}X - I_k)\right) \\ &= \operatorname{tr}\left(X^{\mathrm{T}}AX\right) - \operatorname{tr}\left(X\Lambda X^{\mathrm{T}}\right) + \operatorname{tr}(\Lambda) \end{aligned}$$

接下来我们对 Lagrange 函数求梯度:

$$\begin{cases} \begin{cases} \nabla_{X_1} \operatorname{tr}\left(X_1^{\mathrm{T}}AX_2\right) = AX_2 \\ \nabla_{X_2} \operatorname{tr}\left(X_1^{\mathrm{T}}AX_2\right) = (X_1^{\mathrm{T}}A)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}X_1 \end{cases} & \Rightarrow \nabla_X \operatorname{tr}\left(X^{\mathrm{T}}AX\right) = AX + A^{\mathrm{T}}X \\ \begin{cases} \nabla_{X_1} \operatorname{tr}\left(X_1\Lambda X_2^{\mathrm{T}}\right) = (\Lambda X_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = X_2\Lambda \\ \nabla_{X_2} \operatorname{tr}\left(X_1\Lambda X_2^{\mathrm{T}}\right) = X_1\Lambda \end{cases} & \Rightarrow \nabla_X \operatorname{tr}\left(X\Lambda X^{\mathrm{T}}\right) = 2X\Lambda \end{cases}$$
$$\nabla_X L(X,\Lambda) = \nabla_X \operatorname{tr}\left(X^{\mathrm{T}}AX\right) - \nabla_X \operatorname{tr}\left(X\Lambda X^{\mathrm{T}}\right) = (A+A^{\mathrm{T}})X - 2X\Lambda$$

KKT 条件指导我们令 $\nabla_X L(X,\Lambda) = (A+A^{\mathrm{T}})X - 2X\Lambda = 0_{n\times k}$，得到 $\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})X = X\Lambda$
表明 $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$ 的列向量是 $\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})$ 的 k 个单位特征向量 (之所以 "单位" 是因为满足 $X^{\mathrm{T}}X = I_k$ 的约束条件)
与其相伴的 $\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})$ 的特征值就是 Λ 的 k 个对角元 (即 Lagrange 乘子)

值得注意的是，满足 KKT 条件的 Λ 的 k 个对角元 (不计排列) 的选取方式共有 $\binom{n}{k}$ 种
假设 $\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_{\pi(1)},\dots,\lambda_{\pi(k)}\}$ (其中 π 是 $\{1,\dots,n\}$ 的一个排列) 且 X 的列由相应的单位特征向量构成，
则此时目标函数值为 $\lambda_{\pi(1)} + \cdots + \lambda_{\pi(k)}$
显而易见，在这 $\binom{n}{k}$ 种选取方式中，目标函数的最优值为 $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$
(其中 λ_i 代表对称阵 $\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的第 i 小特征值)

- 特殊地，当 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为对称阵时，
  优化问题 $\min_{X^{\mathrm{T}}X=I_k} \operatorname{tr}\left(X^{\mathrm{T}}AX\right) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ 的最优值便是 A 的前 k 小的特征值之和.
- 推广到复数域上，当 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 为 Hermite 阵时，
  优化问题 $\min_{X^{\mathrm{H}}X=I_k} \operatorname{tr}\left(X^{\mathrm{H}}AX\right) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$ 的最优值便是 A 的前 k 小的特征值之和.
  ($A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 必须是 Hermite 阵，因为这样才能保证其任意二次型都是实数)

> You may want to refer to the following theorems:
> **(Rayleigh-Ritz 定理, Matrix Analysis 定理 $4.2.2$)**
> 若 A 是 n 阶 Hermite 阵，则我们有:
>
> $$\lambda_{\min} = \min_{x\neq 0_n} \frac{x^{\mathrm{H}}Ax}{x^{\mathrm{H}}x} = \min_{\|x\|_2=1} x^{\mathrm{H}}Ax$$
> $$\lambda_{\max} = \max_{x\neq 0_n} \frac{x^{\mathrm{H}}Ax}{x^{\mathrm{H}}x} = \max_{\|x\|_2=1} x^{\mathrm{H}}Ax$$
>
> **(Courant–Fischer min-max 定理, Matrix Analysis 定理 $4.2.6$)**
> 若 A 是 n 阶 Hermite 阵，并记 $\mathbb{C}^n$ 的 k 维子空间的全体为 $\mathcal{G}_k^n$，则对于任意 $k = 1,\dots,n$ 我们都有:
>
> $$\begin{aligned} \lambda_k &= \max_{\mathcal{X}\in\mathcal{G}_k^n} \min_{x\neq 0_n\in\mathcal{X}} \frac{x^{\mathrm{H}}Ax}{x^{\mathrm{H}}x} \\ &= \min_{\mathcal{X}\in\mathcal{G}_k^n} \max_{x\neq 0_n\in\mathcal{X}} \frac{x^{\mathrm{H}}Ax}{x^{\mathrm{H}}x} \end{aligned}$$

The End