

# 高等线性代数 Homework 05

Due: Oct. 12, 2024

姓名: 雍崔扬

学号: 21307140051

## Problem 1

给定正整数  $n$ .

试证明: 若  $\mathbb{F}$  是一个域, 则  $\mathbb{F}^n$  不能表示为它的两个真子空间的并.

当  $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$  时,  $\mathbb{F}^n$  不能表示为其有限个真子空间的并.

**Proof:**

(反证法) 假设存在  $\mathbb{F}^n$  的两个真子空间  $S_1, S_2$  使得  $\mathbb{F}^n = S_1 \cup S_2$ .

由于  $S_1, S_2$  是真子空间, 故存在  $s_1, s_2$  满足:

$$\begin{cases} s_1 \in S_1, s_1 \notin S_2 \\ s_2 \notin S_1, s_2 \in S_2. \end{cases}$$

根据线性空间对向量加法的封闭性, 有  $s_1 + s_2 \in \mathbb{F}^n$ , 则  $s_1 + s_2$  势必属于  $S_1, S_2$  中的一个.

- 若  $s_1 + s_2 \in S_1$ , 则  $s_2 = (s_1 + s_2) + (-s_1) \in S_1$

(注意到  $S_1$  是子空间, 故  $(-s_1) \in S_1$ ), 与假设矛盾.

- 若  $s_1 + s_2 \in S_2$ , 则  $s_1 = (s_1 + s_2) + (-s_2) \in S_2$

(注意到  $S_2$  是子空间, 故  $(-s_2) \in S_2$ ), 与假设矛盾.

因此  $\mathbb{F}^n$  不能表示为它的两个真子空间的并.

当  $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$  时, 我们使用数学归纳法证明  $\mathbb{F}^n$  不能表示为其有限个真子空间的并.

对真子空间数量  $m$  进行数学归纳:

① 当  $m = 1, 2$  时, 命题显然成立.

② 现假设命题对正整数  $m$  成立

则对于  $\mathbb{F}^n$  的任意给定的  $m$  个真子空间  $S_1, \dots, S_m$  都有  $(\bigcup_{i=1}^m S_i) \subset \mathbb{F}^n$  成立.

根据归纳假设可知  $(\bigcup_{i=1}^m S_i)$  不是  $\mathbb{F}^n$  的真子空间, 仅仅是真子集.

下面证明在归纳假设下, 命题对正整数  $m+1$  也成立.

(反证法) 假设存在  $\mathbb{F}^n$  的一个真子空间  $S_{m+1}$  使得  $(\bigcup_{i=1}^m S_i) \cup S_{m+1} = \mathbb{F}^n$ .

由于  $(\bigcup_{i=1}^m S_i) \subset \mathbb{F}^n$  和  $S_{m+1} \subset \mathbb{F}^n$ , 故存在  $s_1, s_2$  满足:

$$\begin{cases} s_1 \in S_{m+1}, s_1 \notin (\bigcup_{i=1}^m S_i) \\ s_2 \notin S_{m+1}, s_2 \in (\bigcup_{i=1}^m S_i). \end{cases}$$

根据线性空间对向量加法的封闭性, 对于任意  $k$  都有  $ks_1 + s_2 \in \mathbb{F}^n$  成立.

因此对于任意给定的标量  $\alpha \in \mathbb{F}$ ,  $\alpha s_1 + s_2$  势必属于  $S_{m+1}$  和  $(\bigcup_{i=1}^m S_i)$  中的一个.

若  $\alpha s_1 + s_2 \in S_{m+1}$ , 则  $s_2 = (\alpha s_1 + s_2) + \alpha(-s_1) \in S_{m+1}$

(注意到  $S_{m+1}$  是子空间, 故  $\alpha(-s_1) \in S_{m+1}$ ), 与假设矛盾.

因此我们有  $\alpha s_1 + s_2 \in (\bigcup_{i=1}^m S_i)$  ( $\forall \alpha \in \mathbb{F}$ ) 成立.

设  $0_{\mathbb{F}}, 1_{\mathbb{F}}$  分别是域  $\mathbb{F}$  的加法单位元和数乘单位元.

考虑  $\alpha = k1_{\mathbb{F}}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) 的情况:

显然我们有无限个形如  $(k1_{\mathbb{F}})s_1 + s_2$  ( $\forall k \in \mathbb{Z}$ ) 的向量在  $(\bigcup_{i=1}^m S_i)$

(它是有限个真子空间  $S_1, \dots, S_m$  的并集).

根据抽屉原理可知，对于真子空间  $S_1$ ，  
至少存在两个不同的整数  $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$  (不妨设  $k_2 > k_1$ ) 使得：

$$\begin{cases} (k_1 1_{\mathbb{F}}) s_1 + s_2 \in S_1 \\ (k_2 1_{\mathbb{F}}) s_1 + s_2 \in S_1, \end{cases}$$

故我们有  $((k_2 - k_1) 1_{\mathbb{F}}) \cdot s_1 \in S_1$ .

注意到域  $\mathbb{F}$  的特征  $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$ ，故  $(k_2 - k_1) 1_{\mathbb{F}} \neq 0_{\mathbb{F}}$ ，从而有  $s_1 \in S_1$ .  
这与  $s_1 \notin (\bigcup_{i=1}^m S_i)$  的假设相矛盾.

因此在归纳假设下，命题对正整数  $m + 1$  也成立.

根据数学归纳法可知，命题对任意正整数  $m \in \mathbb{Z}_+$  都成立，  
即当  $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$  时， $\mathbb{F}^n$  不能表示为其有限个真子空间的并.

## Problem 2

---

### (Cauchy 函数方程)

设  $f : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{R}$  满足  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  ( $\forall x, y \in \mathbb{Q}$ ).  
试证明  $f$  是线性映射.

- **Note:** 对于连续函数  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  (由有理点完全决定)，  
我们也有线性可加性  $f(x + y) = f(x) + f(y)$  ( $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ).  
可以证明  $f$  不可能为线性映射，它只对有理数数乘有线性性：

$$\begin{aligned} f(\alpha x) &= \alpha f(x) \quad (\alpha \in \mathbb{Q}) \quad (\checkmark) \\ f(\alpha x) &= \alpha f(x) \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad (\times) \end{aligned}$$

#### Proof:

根据  $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$  可知  $f(0) = 0$ .  
根据  $f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(0) = 0$  可知，  
对于任意  $x \in \mathbb{Q}$  都有  $f(-x) = -f(x)$  成立.

对于任意整数  $k \in \mathbb{Z}$  和有理数  $x \in \mathbb{Q}$ ，我们有：

$$f(kx) = \begin{cases} \underbrace{f(x + \cdots + x)}_k = kf(x) & \text{if } k > 0 \\ f(0) = 0 = 0f(x) & \text{if } k = 0 \\ \underbrace{f((-x) + \cdots + (-x))}_{-k} = (-k)f(-x) = kf(x) & \text{if } k < 0 \end{cases}$$


---


$$\Rightarrow f(kx) = kf(x) \text{ for all } k \in \mathbb{Z} \text{ and } x \in \mathbb{Q}$$

对于任意  $\alpha, x \in \mathbb{Q}$  (记  $\alpha = \frac{p}{q}$ , 其中  $p, q \in \mathbb{Z}$  而  $q \neq 0$ ) 我们都有：

$$\begin{aligned}
f(\alpha x) &= f\left(\frac{p}{q}x\right) \\
&= f\left(p\frac{x}{q}\right) \\
&= p \cdot f\left(\frac{x}{q}\right) \\
&= \frac{p}{q} \cdot qf\left(\frac{x}{q}\right) \\
&= \frac{p}{q}f\left(q\frac{x}{q}\right) \\
&= \frac{p}{q}f(x) \\
&= \alpha f(x)
\end{aligned}$$

再结合  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  ( $\forall x, y \in \mathbb{Q}$ ) 便可知  $f$  是一个线性映射.

---

### 有点小错误的解法:

(其错误原因是  $p, q$  有可能是负整数, 这让我们的论述有点逻辑不严谨)

对于任意  $\alpha, x \in \mathbb{Q}$  (记  $\alpha = \frac{p}{q}$ , 其中  $p, q \in \mathbb{Z}$  而  $q \neq 0$ ) 我们都有:

$$\begin{aligned}
f(\alpha x) &= f\left(\frac{p}{q}x\right) \\
&= f\left(p\frac{x}{q}\right) \\
&= f\left(\underbrace{\frac{x}{q} + \cdots + \frac{x}{q}}_p\right) \quad (\text{use } f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ } (\forall x, y \in \mathbb{Q})) \\
&= p \cdot f\left(\frac{x}{q}\right) \\
&= \frac{p}{q} \cdot qf\left(\frac{x}{q}\right) \quad (\text{use } f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ } (\forall x, y \in \mathbb{Q})) \\
&= \frac{p}{q} \cdot f\left(\underbrace{\frac{x}{q} + \cdots + \frac{x}{q}}_q\right) \\
&= \frac{p}{q}f(x) \\
&= \alpha f(x)
\end{aligned}$$

再结合  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  ( $\forall x, y \in \mathbb{Q}$ ) 便可知  $f$  是一个线性映射.

## Problem 3

---

设  $V$  是  $\mathbb{R}$  上不超过 5 次的多项式全体构成的向量空间,  $D$  是  $V$  上的求导算子.

试选取  $V$  的一组基, 在这组基下写出  $D$  的表示矩阵, 并求出其所有特征值.

利用上述结论求解常微分方程  $y'' - 2y' + y = x^5$  的通解.

### Solution:

显然  $B_{\text{polynomial}} = [1, x, x^2, x^3, x^4, x^5]^T$  是  $V$  的一组基.

根据

$$\begin{cases} D(1) = 0 \\ D(x) = 1 \\ D(x^2) = 2x \\ D(x^3) = 3x^2 \\ D(x^4) = 4x^3 \\ D(x^5) = 5x^4 \end{cases}$$

可知求导算子  $D$  在基  $[1, x, x^2, x^3, x^4, x^5]$  下的表示矩阵为:

$$[D]_{B_{\text{polynomial}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 2 & & & \\ & & 0 & 3 & & \\ & & & 0 & 4 & \\ & & & & 0 & 5 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

显然求导算子  $D$  的所有特征值均为 0.

设  $y = a^T B_{\text{polynomial}}$  (其中  $a \in \mathbb{R}^6$ ),

则求解常微分方程  $y'' - 2y' + y = x^5$  的问题就等价于求解以下线性方程组:

$$([D]_{B_{\text{polynomial}}})^2 a - 2[D]_{B_{\text{polynomial}}} a + a = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & & & \\ & 1 & -4 & 6 & & \\ & & 1 & -6 & 12 & \\ & & & 1 & -8 & 20 \\ & & & & 1 & -10 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

使用前代法解得:

$$\begin{cases} a_5 = 1 \\ a_4 = 10a_5 = 10 \\ a_3 = 8a_4 - 20a_5 = 8 \times 10 - 20 \times 1 = 60 \\ a_2 = 6a_3 - 12a_4 = 6 \times 60 - 12 \times 10 = 240 \\ a_1 = 4a_2 - 6a_3 = 4 \times 240 - 6 \times 60 = 600 \\ a_0 = 2a_1 - 2a_2 = 2 \times 600 - 2 \times 240 = 720. \end{cases}$$

因此我们有如下特解:

$$\begin{aligned} y(x) &= a^T B_{\text{polynomial}} \\ &= a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ &= x^5 + 10x^4 + 60x^3 + 240x^2 + 600x + 720. \end{aligned}$$

于是通解形式为:

$$y(x) = x^5 + 10x^4 + 60x^3 + 240x^2 + 600x + 720 + C,$$

其中  $C$  是一个常数.

## Problem 4

设  $\mathbb{F}$  是  $\mathbb{C}$  的子域,  $n_1, n_2, n_3, n_4$  是正整数,  $A \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}, B \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_3}, C \in \mathbb{F}^{n_3 \times n_4}$ . 试证明 Frobenius 不等式:

$$\text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) \leq \text{rank}(ABC) + \text{rank}(B),$$

当且仅当存在矩阵  $X \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_1}$  和  $Y \in \mathbb{F}^{n_4 \times n_3}$  使得  $B = XAB + BCY$  时取等.

- **Lemma 1: (秩-零度定理)**

对于线性空间  $V, W$  上任意一个线性映射  $T : V \mapsto W$ ,  
我们都有  $\text{rank}(T) + \text{null}(T) = \dim(V)$  成立,  
其中  $\text{null}(T) := \dim(\text{Ker}(T))$  为线性映射  $T$  的零度.

- **Lemma 2:**

对于任意  $A \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}, B \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_3}$  都有  
 $\text{rank}(AB) = \text{rank}(B) - \dim(\text{Ker}(A) \cap \text{Range}(B))$  成立.

**Proof of lemma 2:**

考虑定义为  $T(x) := Ax (\forall x \in \text{Range}(B))$  的映射  $T : \text{Range}(B) \mapsto \text{Range}(AB)$ .  
 对于任意  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$  和  $y_1, y_2 \in \text{Range}(B)$  (设  $y_1 = Bx_1, y_2 = Bx_2$ ) 我们都有:

$$\begin{aligned} T(\alpha y_1 + \beta y_2) &= T(B(\alpha x_1 + \beta x_2)) \\ &= AB(\alpha x_1 + \beta x_2) \\ &= \alpha ABx_1 + \beta ABx_2 \\ &= \alpha T(Bx_1) + \beta T(Bx_2) \\ &= \alpha T(y_1) + \beta T(y_2) \end{aligned}$$

因此  $T$  是线性映射.

显然我们有:

$$\begin{cases} \text{Ker}(T) = \text{Ker}(A) \cap \text{Range}(B) \\ \text{Range}(T) = \text{Range}(AB) \cap \text{Range}(A) = \text{Range}(AB) \end{cases}$$

故根据秩-零度定理我们有:

$$\begin{aligned} \text{rank}(AB) &= \dim(\text{Range}(T)) \quad (\text{utilize rank-nullity theorem}) \\ &= \dim(\text{Range}(B)) - \dim(\text{Ker}(T)) \\ &= \text{rank}(B) - \dim(\text{Ker}(A) \cap \text{Range}(B)) \end{aligned}$$

引理得证.

**Proof:**

根据  $\text{Range}(BC) \subseteq \text{Range}(B)$  我们有:

$$\begin{aligned} \text{Range}(BC) \cap \text{Ker}(A) &\subseteq \text{Range}(B) \cap \text{Ker}(A) \\ \dim(\text{Range}(BC) \cap \text{Ker}(A)) &\leq \dim(\text{Range}(B) \cap \text{Ker}(A)) \end{aligned}$$

根据 Lemma 2 可知:

$$\begin{aligned} \text{rank}(ABC) &= \text{rank}(BC) - \dim(\text{Range}(BC) \cap \text{Ker}(A)) \quad (\text{utilize lemma 2}) \\ &\geq \text{rank}(BC) - \dim(\text{Range}(B) \cap \text{Ker}(A)) \\ &= \text{rank}(BC) - [\text{rank}(B) - \text{rank}(AB)] \quad (\text{utilize lemma 2}) \end{aligned}$$

即有  $\text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) \leq \text{rank}(ABC) + \text{rank}(B)$  成立.

显然上述不等式当且仅当  $\text{Range}(BC) = \text{Range}(B)$  时取等, 但这样似乎证不出取等条件.

**另一种证明:**

- **Lemma 3: (Schur 补不等式)**

对于任意  $A \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}, B \in \mathbb{F}^{n_3 \times n_2}, C \in \mathbb{F}^{n_3 \times n_4}$  我们都有:

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} A & \\ B & C \end{bmatrix}\right) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(C)$$

当且仅当存在  $X \in \mathbb{F}^{n_3 \times n_1}$  和  $Y \in \mathbb{F}^{n_4 \times n_2}$  使得  $XA + CY = B$  时取等.

**Proof: (存疑: 有更简单的证明吗?)**

设非奇异阵  $P_1 \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_1}, P_2 \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_2}, P_3 \in \mathbb{F}^{n_3 \times n_3}, P_4 \in \mathbb{F}^{n_4 \times n_4}$  使得:

$$P_1 A P_2 = \begin{bmatrix} I_{r_A} & 0_{r_A \times (n_2 - r_A)} \\ 0_{(n_1 - r_A) \times r_A} & 0_{(n_1 - r_A) \times (n_2 - r_A)} \end{bmatrix}$$

$$P_3 C P_4 = \begin{bmatrix} I_{r_C} & 0_{r_C \times (n_4 - r_C)} \\ 0_{(n_3 - r_C) \times r_C} & 0_{(n_3 - r_C) \times (n_4 - r_C)} \end{bmatrix}$$

其中  $r_A = \text{rank}(A), r_C = \text{rank}(C)$ .

我们将  $P_3 B P_2$  划分为:

$$P_3 B P_2 = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} \\ \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{22} \end{bmatrix} \text{ where } \begin{cases} \tilde{B}_{11} \in \mathbb{F}^{r_A \times r_C} \\ \tilde{B}_{12} \in \mathbb{F}^{r_A \times (n_2 - r_C)} \\ \tilde{B}_{21} \in \mathbb{F}^{(n_3 - r_A) \times r_C} \\ \tilde{B}_{22} \in \mathbb{F}^{(n_3 - r_A) \times (n_2 - r_C)} \end{cases}$$

则我们有:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P_1 & \\ & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 & \\ & P_4 \end{bmatrix} &\geq \begin{bmatrix} P_1 A P_2 & \\ P_3 B P_2 & P_3 C P_4 \end{bmatrix} \\ &= \left[ \begin{array}{cc|cc} I_{r_A} & 0_{r_A \times (n_2 - r_A)} & & \\ 0_{(n_1 - r_A) \times r_A} & 0_{(n_1 - r_A) \times (n_2 - r_A)} & & \\ \hline \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} & I_{r_C} & 0_{r_C \times (n_4 - r_C)} \\ \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{22} & 0_{(n_3 - r_C) \times r_C} & 0_{(n_3 - r_C) \times (n_4 - r_C)} \end{array} \right] \\ &= P^{(1)} \begin{bmatrix} I_{r_A} & & & \\ & I_{r_C} & & \\ & & \tilde{B}_{22} & \\ & & & 0_{(n_1 - r_C) \times (n_4 - r_A)} \end{bmatrix} P^{(2)} \end{aligned}$$

其中  $P^{(1)} \in \mathbb{F}^{(n_1+n_3) \times (n_1+n_3)}$  和  $P^{(2)} \in \mathbb{F}^{(n_2+n_4) \times (n_2+n_4)}$

因此我们有:

$$\begin{aligned} \text{rank} \left( \begin{bmatrix} A & \\ B & C \end{bmatrix} \right) &= \text{rank} \left( \begin{bmatrix} I_{r_A} & & & \\ & I_{r_C} & & \\ & & \tilde{B}_{22} & \\ & & & 0_{(n_1 - r_C) \times (n_4 - r_A)} \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{rank}(I_{r_A}) + \text{rank}(I_{r_C}) + \text{rank}(\tilde{B}_{22}) \\ &= \text{rank}(A) + \text{rank}(C) + \text{rank}(\tilde{B}_{22}) \\ &\geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) \end{aligned}$$

其取等条件为:

$$\begin{aligned}
& \text{rank}(\tilde{B}_{22}) = 0 \\
& \Leftrightarrow \\
& \tilde{B}_{22} = 0_{(n_3-r_C) \times (n_2-r_A)} \\
& \Leftrightarrow \\
P_3BP_2 &= \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} \\ \tilde{B}_{21} & 0_{(n_3-r_C) \times (n_2-r_A)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0_{r_C \times r_A} & 0_{r_C \times (n_2-r_A)} \\ \tilde{B}_{21} & 0_{(n_3-r_C) \times (n_2-r_A)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{r_A} & 0_{r_A \times (n_2-r_A)} \\ 0_{(n_1-r_A) \times r_A} & 0_{(n_1-r_A) \times (n_2-r_A)} \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} I_{r_C} & 0_{r_C \times (n_4-r_C)} \\ 0_{(n_3-r_C) \times r_C} & 0_{(n_3-r_C) \times (n_4-r_C)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} \\ 0_{(n_3-r_C) \times r_A} & 0_{(n_3-r_C) \times (n_2-r_A)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0_{r_C \times r_A} & 0_{r_C \times (n_2-r_A)} \\ \tilde{B}_{21} & 0_{(n_3-r_C) \times (n_2-r_A)} \end{bmatrix} P_1AP_2 + P_3CP_4 \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} \\ 0_{(n_3-r_C) \times r_A} & 0_{(n_3-r_C) \times (n_2-r_A)} \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \\
B &= XA + CY \text{ where } \begin{cases} X = P_3^{-1} \begin{bmatrix} 0_{r_C \times r_A} & 0_{r_C \times (n_2-r_A)} \\ \tilde{B}_{21} & 0_{(n_3-r_C) \times (n_2-r_A)} \end{bmatrix} P_1 \\ Y = P_4 \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} \\ 0_{(n_3-r_C) \times r_A} & 0_{(n_3-r_C) \times (n_2-r_A)} \end{bmatrix} P_2^{-1} \end{cases}
\end{aligned}$$

因此取等条件为存在  $X \in \mathbb{F}^{n_3 \times n_1}$  和  $Y \in \mathbb{F}^{n_4 \times n_2}$  使得  $XA + CY = B$   
引理得证.

#### (Problem 4 题干)

设  $\mathbb{F}$  是  $\mathbb{C}$  的子域,  $n_1, n_2, n_3, n_4$  是正整数,  $A \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}, B \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_3}, C \in \mathbb{F}^{n_3 \times n_4}$ .  
试证明 Frobenius 不等式:

$$\text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) \leq \text{rank}(ABC) + \text{rank}(B)$$

当且仅当存在矩阵  $X \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_1}$  和  $Y \in \mathbb{F}^{n_4 \times n_3}$  使得  $B = XAB + BCY$  时取等.

#### Proof:

首先注意到:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} I_{n_1} & -A \\ & I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ABC & \\ & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_4} & \\ C & I_{n_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & I_{n_4} \\ -I_{n_3} & \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_{n_1} & -A \\ & I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ABC & \\ BC & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & I_{n_4} \\ -I_{n_3} & \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0_{n_1 \times n_4} & -AB \\ BC & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & I_{n_4} \\ -I_{n_3} & \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} AB & 0_{n_1 \times n_4} \\ -B & BC \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

根据 Lemma 3 (Schur 补不等式) 可知:

$$\begin{aligned}
\text{rank}(ABC) + \text{rank}(B) &= \text{rank} \left( \begin{bmatrix} ABC & \\ & B \end{bmatrix} \right) \\
&= \text{rank} \left( \begin{bmatrix} AB & 0_{n_1 \times n_4} \\ -B & BC \end{bmatrix} \right) \quad (\text{utilize lemme 3}) \\
&\geq \text{rank}(AB) + \text{rank}(BC)
\end{aligned}$$

当且仅当存在矩阵  $X \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_1}$  和  $Y \in \mathbb{F}^{n_4 \times n_3}$  使得  $B = XAB + BCY$  时取等.

## Problem 5

已知  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$  是有限维向量空间  $\mathcal{V}$  上的子空间，满足  $\dim(\mathcal{V}_1) + \dim(\mathcal{V}_2) = \dim(\mathcal{V})$ .  
试证明存在  $\mathcal{V}$  上的线性变换  $T$  使得  $\text{Range}(T) = \mathcal{V}_1$  且  $\text{Ker}(T) = \mathcal{V}_2$ .

- **Lemma: (线性映射由其对基的作用所唯一确定)**

考虑定义在域  $\mathbb{F}$  上的线性空间  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ .

设  $\{v_1, \dots, v_n\}$  是线性空间  $\mathcal{V}$  的一组基，而  $\{w_1, \dots, w_n\}$  是线性空间  $\mathcal{W}$  中的任意向量组，则存在唯一的线性映射  $T : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{W}$  使得  $T(v_i) = w_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

**Proof:**

我们定义映射  $T : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{W}$  为：

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \mapsto \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n \quad (\text{for all } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F})$$

这个映射是定义良好的，因为任意  $v \in \mathcal{V}$  都可以表示为  $v_1, \dots, v_n$  的线性组合.

而且显然它满足  $Tv_i = w_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

下面我们证明它是线性映射.

对于任意  $x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in \mathcal{V}$  和  $y = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \in \mathcal{V}$  我们都有：

$$\begin{aligned} T(x+y) &= T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n) \\ &= T((\alpha_1 + \beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)v_n) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1)w_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)w_n \\ &= (\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n) + (\beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n) \\ &= T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) + T(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n) \\ &= T(x) + T(y) \end{aligned}$$

对于任意  $x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in \mathcal{V}$  和  $\gamma \in \mathbb{F}$  我们都有：

$$\begin{aligned} T(\gamma x) &= T(\gamma(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n)) \\ &= T(\gamma \alpha_1 v_1 + \dots + \gamma \alpha_n v_n) \\ &= \gamma \alpha_1 w_1 + \dots + \gamma \alpha_n w_n \\ &= \gamma(\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n) \\ &= \gamma T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \\ &= \gamma T(x) \end{aligned}$$

因此映射  $T : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{W}$  是一个线性映射.

为证明线性映射  $T : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{W}$  是唯一的，假设  $\tilde{T}$  是一个满足  $\tilde{T}v_i = w_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 的线性映射.

由于任意  $v \in \mathcal{V}$  都可以唯一表示为  $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ ，故我们有：

$$\begin{aligned} \tilde{T}(v) &= \tilde{T}(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \\ &= \alpha_1 \tilde{T}(v_1) + \dots + \alpha_n \tilde{T}(v_n) \quad (\text{note that } \tilde{T} \text{ is a linear map}) \\ &= \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n \\ &= T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \\ &= T(v) \end{aligned}$$

因此  $\tilde{T} \equiv T$ ，表明线性映射  $T : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{W}$  是唯一的.

引理得证.

**Proof:**

记  $\begin{cases} n := \dim(\mathcal{V}) \\ r := \dim(\mathcal{V}_1) \end{cases}$  并记  $0_{\mathcal{V}}$  为向量空间  $\mathcal{V}$  的加法单位元.

- ① 若  $r = 0$ ，则  $\begin{cases} \mathcal{V}_1 = \{0_{\mathcal{V}}\} \\ \mathcal{V}_2 = \mathcal{V} \end{cases}$ ，从而  $\mathcal{V}$  上的零变换  $Z_{\mathcal{V}}$  满足  $\begin{cases} \text{Range}(Z_{\mathcal{V}}) = \{0_{\mathcal{V}}\} = \mathcal{V}_1 \\ \text{Ker}(Z_{\mathcal{V}}) = \mathcal{V} = \mathcal{V}_2 \end{cases}$

- ② 若  $r = n$ , 则  $\begin{cases} \mathcal{V}_1 = \mathcal{V} \\ \mathcal{V}_2 = \{0_{\mathcal{V}}\} \end{cases}$ , 从而  $\mathcal{V}$  上的恒等变换  $I_{\mathcal{V}}$  满足  $\begin{cases} \text{Range}(I_{\mathcal{V}}) = \mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \\ \text{Ker}(I_{\mathcal{V}}) = \{0_{\mathcal{V}}\} = \mathcal{V}_2 \end{cases}$
- ③ 若  $n \geq 2$  且  $1 \leq r \leq n - 1$ , 则可设  $\mathcal{V}_2$  的一组基为  $\{e_1, \dots, e_{n-r}\}$  而  $\mathcal{V}_1$  的一组基为  $\{f_1, \dots, f_r\}$ .

由基扩张定理可知, 存在  $e_{n-r+1}, \dots, e_n \in \mathcal{V}$  使得  $\{e_1, \dots, e_{n-r}, e_{n-r+1}, \dots, e_n\}$  构成  $\mathcal{V}$  的一组基.

将  $f_1, \dots, f_r$  扩充为  $\mathcal{V}$  的一个  $n$  元向量组  $\underbrace{\{0_{\mathcal{V}}, \dots, 0_{\mathcal{V}}\}}_{n-r}, f_1, \dots, f_r\}$ .

根据 Lemma 可知, 存在唯一的线性映射  $T : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}_1$  使得:

$$T(e_i) := \begin{cases} 0_{\mathcal{V}}, & i = 1, \dots, n-r \\ f_{i-r}, & i = n-r+1, \dots, n. \end{cases}$$

换言之, 它将  $\mathcal{V}_2$  映射到  $\{0_n\}$ , 而把  $\mathcal{V}_2^\perp$  映射到  $\mathcal{V}_1$ .

因此我们有:

$$\begin{aligned} \text{Range}(T) &= T(\text{span}\{e_1, \dots, e_{n-r}, e_{n-r+1}, \dots, e_n\}) \\ &= \text{span}\{T(e_1), \dots, T(e_{n-r}), T(e_{n-r+1}), \dots, T(e_n)\} \\ &= \text{span}\{\underbrace{0_{\mathcal{V}}, \dots, 0_{\mathcal{V}}}_{n-r}, f_1, \dots, f_r\} \\ &= \text{span}\{f_1, \dots, f_r\} \\ &= \mathcal{V}_1 \\ \hline \text{Ker}(T) &= T^{-1}(\{0_{\mathcal{V}}\}) \\ &= T^{-1}(\text{span}\{T(e_1), \dots, T(e_{n-r})\}) \\ &= \text{span}\{e_1, \dots, e_{n-r}\} \\ &= \mathcal{V}_2 \end{aligned}$$

命题得证.

## Problem 6 (optional)

已知  $n$  为正整数,  $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  满足  $AB = BA$ .

试证明:

$$\text{rank}(A + B) + \text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

当且仅当存在  $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$  和  $Y \in \mathbb{C}^{n \times n}$  使得  $X(A + B) + (AB)Y = B$  时取等.

**Proof:**

注意到  $A, B$  均为  $n$  阶方阵, 因此我们有  $\text{Range}(A + B) \subseteq \text{Range}(A) + \text{Range}(B)$ .  
于是我们有:

$$\begin{aligned} \text{rank}(A + B) &= \dim(\text{Range}(A + B)) \\ &\leq \dim(\text{Range}(A) + \text{Range}(B)) \\ &= \dim(\text{Range}(A)) + \dim(\text{Range}(B)) - \dim(\text{Range}(A) \cap \text{Range}(B)) \\ &= \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - \dim(\text{Range}(A) \cap \text{Range}(B)) \end{aligned} \tag{6-1}$$

注意到:

$$\begin{cases} \text{Range}(AB) \subseteq \text{Range}(A) \\ \text{Range}(BA) \subseteq \text{Range}(B) \end{cases}$$

根据  $AB = BA$  可知:

$$\begin{aligned}
\text{Range}(AB) &= \text{Range}(AB) \cap \text{Range}(BA) \quad (\text{use } AB = BA) \\
&= \text{Range}(AB) \cap \text{Range}(BA) \\
&\subseteq \text{Range}(A) \cap \text{Range}(B)
\end{aligned}$$

因此有  $\text{rank}(AB) = \dim(\text{Range}(AB)) \leq \dim(\text{Range}(A) \cap \text{Range}(B))$ .  
代入 (6-1) 式即有:

$$\begin{aligned}
\text{rank}(A + B) &= \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - \dim(\text{Range}(A) \cap \text{Range}(B)) \\
&\leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - \text{rank}(AB)
\end{aligned}$$

命题得证.

### Another Proof:

- **Lemma 1:**

对于任意  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  和  $B \in \mathbb{C}^{n \times p}$ , 我们都有  $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$ .

- **Lemma 2 (Schur 补不等式):**

对于任意  $A \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}, B \in \mathbb{F}^{n_3 \times n_2}, C \in \mathbb{F}^{n_3 \times n_4}$  我们都有:

$$\text{rank} \left( \begin{bmatrix} A \\ B & C \end{bmatrix} \right) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(C)$$

当且仅当存在  $X \in \mathbb{F}^{n_3 \times n_1}$  和  $Y \in \mathbb{F}^{n_4 \times n_2}$  使得  $XA + CY = B$  时取等.

(证明参见 Problem 4)

现在给出证明.

注意到:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & -B \\ I_n & A \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B \\ & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & -B \\ I_n & A \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A+B & -AB+BA \\ B & BA \end{bmatrix} \quad (\text{note that } AB = BA) \\
&= \begin{bmatrix} A+B & \\ B & AB \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

于是我们有:

$$\begin{aligned}
\text{rank}(A) + \text{rank}(B) &= \text{rank} \left( \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix} \right) \\
&\geq \min \left\{ \text{rank} \left( \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ & I_n \end{bmatrix} \right), \text{rank} \left( \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix} \right), \text{rank} \left( \begin{bmatrix} I_n & -B \\ I_n & A \end{bmatrix} \right) \right\} \\
&\geq \text{rank} \left( \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & -B \\ I_n & A \end{bmatrix} \right) \quad (\text{utilize lemma 1}) \\
&= \text{rank} \left( \begin{bmatrix} A+B & \\ B & AB \end{bmatrix} \right) \\
&\geq \text{rank}(A + B) + \text{rank}(AB) \quad (\text{utilize lemma 2})
\end{aligned}$$

当且仅当存在  $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$  和  $Y \in \mathbb{C}^{n \times n}$  使得  $XA + CY = B$  时取等.

## Problem 7 (optional)

已知  $n, m, k$  为正整数,  $V$  是  $\mathbb{R}$  上的  $n$  维向量空间.

现有  $V$  中  $m$  组向量, 每组中均含有  $k$  个线性无关的向量.

试证明在  $V$  中必存在  $n - k$  个向量, 使得它们与上面任意一组向量合在一起都能构成  $V$  的一组基.

- 这是符合直觉的，任意给定  $k$  个线性无关的向量，再随机生成  $n - k$  个向量构成一个  $n$  阶方阵。通常来说这个  $n$  阶方阵是有(很大)可能是非奇异的。
- 考虑题干中的  $m$  组向量，每组中均含有  $k$  个线性无关的向量。即使它们分别张成不同真子空间，它们的并集也无法覆盖全空间  $V$ 。因此  $\mathbb{R}$  是特征为 0 的域， $V$  作为  $\mathbb{R}$  上的向量空间不能表示为有限个真子空间的并，这是 Problem 1 的结论。

**Proof:**

设这  $m$  组向量张成的  $k$  维子空间为  $S_1, \dots, S_m$ 。

由于  $V$  作为  $\mathbb{R}$  上的向量空间不能表示为有限个真子空间的并，故我们有：

$$V \setminus (\bigcup_{i=1}^m S_i) \neq \emptyset$$

因此存在  $x_1 \in V \setminus (\bigcup_{i=1}^m S_i)$ 。

它使得  $S_1 \oplus \text{span}\{x_1\}, \dots, S_m \oplus \text{span}\{x_1\}$  成为  $k + 1$  维子空间。

依此类推可知存在  $n - k$  个线性无关的向量  $x_1, \dots, x_{n-k} \in V \setminus (\bigcup_{i=1}^m S_i)$  使得：

$$S_1 \oplus \text{span}\{x_1, \dots, x_{n-k}\} = V$$

⋮

$$S_m \oplus \text{span}\{x_1, \dots, x_{n-k}\} = V$$

即它们与给定的  $m$  组向量中的任意一组合在一起都能构成  $V$  的一组基。

命题得证。

## Problem 8 (optional)

---

设正整数  $n > 1$ ，试证明不存在  $x, y \in \mathbb{R}^n$  使得  $\text{tr}(A) = y^T A x$  对一切  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  恒成立。

**Proof:**

记  $E_{ij}$  为  $(i, j)$  位置上为 1，其余位置为 0 的  $n$  阶实方阵。

(反证法) 假设存在  $x, y \in \mathbb{R}^n$  使得  $\text{tr}(A) = y^T A x$  对一切  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  恒成立，则我们有：

$$y_i x_j = y^T E_{ij} x = \text{tr}(E_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

显然上述结论是自相矛盾的：

根据  $y_i x_i = 1 (\forall i = 1, \dots, n)$  可知  $x_i, y_i \neq 0 (\forall i = 1, \dots, n)$ ，

这与  $y_i x_j = 0 (\forall i, j = 1, \dots, n \text{ such that } i \neq j)$  相矛盾。

因此不存在  $x, y \in \mathbb{R}^n$  使得  $\text{tr}(A) = y^T A x$  对一切  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  恒成立。

命题得证。

• **一点观察：**

显然  $E_{ij} (i, j = 1, \dots, n)$  是  $\mathbb{R}^{n \times n}$  的一组基。

由任意给定的  $x, y \in \mathbb{R}^n$  定义的  $\mathbb{R}^{n \times n} \mapsto \mathbb{R}$  的线性映射  $A \mapsto y^T A x$  (如果存在的话)，

必然由它对基  $E_{ij} (i, j = 1, \dots, n)$  的作用唯一确定。

我们便是通过它对基  $E_{ij} (i, j = 1, \dots, n)$  的作用导出的矛盾。

## Problem 9

---

若  $\mathcal{V}$  是有限维线性空间,  $L : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}$  是  $\mathcal{V}$  上的线性变换.

试证明  $L$  是单射等价于  $L$  是满射.

- **Lemma (秩-零度定理)**

对于线性空间  $\mathcal{V}, \mathcal{W}$  上任意一个线性映射  $T : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{W}$  (记其表示矩阵为  $A$ )

我们都有  $\text{rank}(A) + \text{null}(A) = \text{rank}(T) + \text{null}(T) = \dim(\mathcal{V})$  成立.

其中  $\text{null}(T) := \dim(\text{Ker}(T))$  为线性映射  $T$  的零度.

**Solution:**

$L$  是单射, 即  $\text{Ker}(L) = \{0_{\mathcal{V}}\}$ ,

等价于  $\text{null}(L) = \dim(\text{Ker}(L)) = 0$ .

根据 Lemma 可知等价于  $\text{rank}(L) = \dim(\mathcal{V})$ ,

等价于  $\text{Range}(L) = \mathcal{V}$  即  $L$  是满射.

## Problem 10

给定正整数  $m, n$ ,  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$ .

试证明 Sylvester 恒等式  $\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA)$ .

**Solution:**

注意到:

$$\begin{bmatrix} I_n & -B \\ & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n + BA & 0_{n \times m} \\ A & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & B \\ & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times m} \\ A & I_m + AB \end{bmatrix}.$$

又注意到:

$$\left( \begin{bmatrix} I_n & B \\ & I_m \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & -B \\ & I_m \end{bmatrix}$$

因此我们有:

$$\begin{aligned} \det(I_m + AB) &= \det \left( \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times m} \\ A & I_m + AB \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left( \begin{bmatrix} I_n & -B \\ & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n + BA & 0_{n \times m} \\ A & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & B \\ & I_m \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left( \begin{bmatrix} I_n & -B \\ & I_m \end{bmatrix} \right) \det \left( \begin{bmatrix} I_n + BA & 0_{n \times m} \\ A & I_m \end{bmatrix} \right) \det \left( \begin{bmatrix} I_n & B \\ & I_m \end{bmatrix} \right) \\ &= \left( \det \left( \begin{bmatrix} I_n & B \\ & I_m \end{bmatrix} \right) \right)^{-1} \det \left( \begin{bmatrix} I_n + BA & 0_{n \times m} \\ A & I_m \end{bmatrix} \right) \det \left( \begin{bmatrix} I_n & B \\ & I_m \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left( \begin{bmatrix} I_n + BA & 0_{n \times m} \\ A & I_m \end{bmatrix} \right) \\ &= \det(I_n + BA). \end{aligned}$$

## Problem 11 (optional)

给定正整数  $m, n$ , 设  $\mathbb{C}^{m \times n}$  上的矩阵序列  $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$  (逐元素) 收敛.

试证明:

$$\text{rank} \left( \lim_{k \rightarrow \infty} A_k \right) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \text{rank}(A_k).$$

**Solution:**

由于矩阵序列  $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$  (逐元素) 收敛, 故极限  $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k$  存在, 记  $A := \lim_{k \rightarrow \infty} A_k$ .  
记  $r := \text{rank}(A)$ .

根据秩的定义可知,  $A$  的某  $r$  行  $r$  列向量线性无关,  
即  $A$  存在某个  $r \times r$  的子阵  $A[\mathcal{I}, \mathcal{J}]$  满足  $\det(A[\mathcal{I}, \mathcal{J}]) \neq 0$ ,  
其中  $\mathcal{I}, \mathcal{J}$  分别为  $r$  行与  $r$  列的索引集合, 满足:

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &\subseteq \{1, \dots, m\}, \quad |\mathcal{I}| = r \\ \mathcal{J} &\subseteq \{1, \dots, n\}, \quad |\mathcal{J}| = r\end{aligned}$$

根据行列式的定义可知, 行列式是关于矩阵元素的连续函数.

因此对于任意  $\varepsilon \in (0, |\det(A[\mathcal{I}, \mathcal{J}])|)$ , 都存在正整数  $K$  使得:

$$|\det(A_k[\mathcal{I}, \mathcal{J}]) - \det(A[\mathcal{I}, \mathcal{J}])| < \varepsilon \quad (\forall k \geq K),$$

进而有:

$$\begin{aligned}|\det(A_k[\mathcal{I}, \mathcal{J}])| &= |\det(A[\mathcal{I}, \mathcal{J}]) + \det(A_k[\mathcal{I}, \mathcal{J}]) - \det(A[\mathcal{I}, \mathcal{J}])| \\ &\geq |\det(A[\mathcal{I}, \mathcal{J}])| - |\det(A_k[\mathcal{I}, \mathcal{J}]) - \det(A[\mathcal{I}, \mathcal{J}])| \quad (\forall k \geq K) \\ &> |\det(A[\mathcal{I}, \mathcal{J}])| - \varepsilon \\ &> 0,\end{aligned}$$

因而有  $\det(A_k[\mathcal{I}, \mathcal{J}]) \neq 0$  ( $\forall k \geq K$ ).

这说明  $\text{rank}(A_k) \geq r$  ( $\forall k \geq K$ ).

于是我们有:

$$\begin{aligned}\liminf_{k \rightarrow \infty} \text{rank}(A_k) &\geq r \\ &= \text{rank}(A) \\ &= \text{rank}\left(\lim_{k \rightarrow \infty} A_k\right).\end{aligned}$$

**The End**