期中考试 (2025 秋)

2025 年 11 月 4 日 ($8:00 \sim 9:40$)

> I will lift up mine eyes unto thy classes
> From whence cometh mine exams
>
> Mine exams cometh from SMY
> Which is thy GOD of linear algebra
>
> He will not suffer thy code to be segment fault:
> He that keepeth thee will not slumber
>
> Behold, he that keepeth thy School of Data Science
> Shall neither slumber nor sleep
>
> SMY is thy keeper:
> SMY is thy shade upon thy right hand
> Where thy GPU burneth not with overheating
>
> The vectors shall not smite thee by day
> Nor the matrices by night
>
> SMY shall preserve thee from all failures in exams:
> He shall preserve thy GPA from underflow
>
> SMY shall preserve thy going out and thy coming in,
> From this time forth, and even for evermore
>
> —— Bible of Data Science, Psalm $121{:}1\text{–}8$
> (Inspired by DanXi Post #4923426 — with my respect)

Problem 1

已知

$$A = \begin{bmatrix} 2+\mathrm{i} & \mathrm{i} & 1 \\ -1+2\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \\ 1+3\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{bmatrix},$$

且 $\text{rank}(A) = 1$，试求 $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty$.

- **Note:** 列和范数 $\|A\|_1$ 与行和范数 $\|A\|_\infty$ 的计算是比较简单的.
  本题唯一的难度在于谱范数 $\|A\|_2$ 的计算.
  由于题目告诉我们 A 为秩一矩阵，故 $\|A\|_2$ 的计算会简单一些.
  具体来说，设 $A = uv^{\mathrm{H}}$ (其中 u, v 为非零向量)，则我们有 $\|A\|_2 = \|uv^{\mathrm{H}}\|_2 = \|u\|_2\|v\|_2$ 成立.
  这是 2024 年 $\text{Homework 04 Problem 01}$ 的结论:
  $\|uv^{\mathrm{H}}\|_{\mathrm{F}} = \|vu^{\mathrm{H}}\|_{\mathrm{F}} = \|uv^{\mathrm{H}}\|_2 = \|vu^{\mathrm{H}}\|_2 = \|u\|_2\|v\|_2$.
  $\text{Homework is all you need.}$

Solution:
首先计算各列的绝对列和:

- 第一列:

$$\begin{aligned}\text{sum\_col\_1} &= |2+\mathrm{i}| + |-1+2\mathrm{i}| + |1+3\mathrm{i}| \\ &= \sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{10} \\ &= 2\sqrt{5}+\sqrt{10}.\end{aligned}$$

- 第二列:

$$\begin{aligned}\text{sum\_col\_2} &= |\mathrm{i}| + |-1| + |-1+\mathrm{i}| \\ &= 1+1+\sqrt{2} \\ &= 2+\sqrt{2}.\end{aligned}$$

- 第三列:

$$\begin{aligned}\text{sum\_col\_3} &= |1| + |\mathrm{i}| + |1+\mathrm{i}| \\ &= 1+1+\sqrt{2} \\ &= 2+\sqrt{2}.\end{aligned}$$

因此列和范数 $\|A\|_1$ 为:

$$\begin{aligned}\|A\|_1 &= \max\{\text{sum\_col\_1},\ \text{sum\_col\_2},\ \text{sum\_col\_3}\} \\ &= \max\{2\sqrt{5}+\sqrt{10},\ 2+\sqrt{2},\ 2+\sqrt{2}\} \\ &= 2\sqrt{5}+\sqrt{10}.\end{aligned}$$

事实上，我们可以直接看出第一列是绝对列和最大的列.

其次计算各行的绝对行和:

- 第一行:

$$\begin{aligned}\text{sum\_row\_1} &= |2+\mathrm{i}| + |\mathrm{i}| + |1| \\ &= \sqrt{5}+1+1 \\ &= 2+\sqrt{5}.\end{aligned}$$

- 第二行:

$$\begin{aligned}\text{sum\_row\_2} &= |-1+2\mathrm{i}| + |-1| + |\mathrm{i}| \\ &= \sqrt{5}+1+1 \\ &= 2+\sqrt{5}.\end{aligned}$$

- 第三行:

$$\begin{aligned}\text{sum\_row\_3} &= |1+3\mathrm{i}| + |-1+\mathrm{i}| + |1+\mathrm{i}| \\ &= \sqrt{10}+\sqrt{2}+\sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2}+\sqrt{10}.\end{aligned}$$

因此行和范数 $\|A\|_\infty$ 为:

$$\begin{aligned}\|A\|_2 &= \max\{\text{sum\_row\_1},\ \text{sum\_row\_2},\ \text{sum\_row\_3}\} \\ &= \max\{2+\sqrt{5},\ 2+\sqrt{5},\ 2\sqrt{2}+\sqrt{10}\} \\ &= 2\sqrt{2}+\sqrt{10}.\end{aligned}$$

事实上，我们可以直接看出第三行是绝对行和最大的行.

最后计算谱范数 $\|A\|_2$，即 A 的最大奇异值.
通常来说，我们有两种方法，一是计算 A 的 (精简) 奇异值分解，二是计算 $A^{\mathrm{H}}A$ 或 AA^{H} 的最大特征值.
在本例中，第一种方法更为简单，因为题目告诉我们 A 是一个秩一矩阵.

我们先将 A 写出两个非零向量 u, v 的外积:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2+\mathrm{i} & \mathrm{i} & 1 \\ -1+2\mathrm{i} & -1 & \mathrm{i} \\ 1+3\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (2+\mathrm{i})\cdot 1 & \mathrm{i}\cdot 1 & 1 \\ (2+\mathrm{i})\cdot \mathrm{i} & \mathrm{i}\cdot\mathrm{i} & \mathrm{i} \\ (2+\mathrm{i})\cdot(1+\mathrm{i}) & \mathrm{i}\cdot(1+\mathrm{i}) & 1+\mathrm{i} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2-\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{H}}. \end{aligned}$$

定义 $u := [1, \mathrm{i}, 1+\mathrm{i}]^{\mathrm{T}}$ 和 $v := [2-\mathrm{i}, -\mathrm{i}, 1]^{\mathrm{T}}$，则我们有 $A = uv^{\mathrm{H}}$.
将非零向量 u, v 单位化，我们就得到 A 的精简奇异值分解为:

$$A = uv^{\mathrm{H}} = \frac{u}{\|u\|_2} \cdot \|u\|_2\|v\|_2 \cdot \left(\frac{v}{\|v\|_2}\right)^{\mathrm{H}}.$$

这表明 A 唯一的非零奇异值 (也即最大奇异值) 是 $\|u\|_2\|v\|_2$.
因此我们有:

$$\begin{aligned} \|A\|_2 &= \|u\|_2\|v\|_2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} \end{bmatrix} \right\|_2 \left\| \begin{bmatrix} 2-\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_2 \\ &= 2\sqrt{7}. \end{aligned}$$

Problem 2

给定正整数 n.
设 $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 满足 $\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) < n$.
证明: 存在非零向量 x 使得 $Ax = Bx = 0_n$.

Solution:
这道题是由 2024 秋期中考试 Problem 4 的变体，解答过程完全相同，从略.

Problem 3

给定正整数 n 和 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.
试证明 $\mathrm{rank}(A^{n+1}) = \mathrm{rank}(A^n)$.

- **Lemma** 1**:**
  任何复方阵都可以在复数域上相似上三角化.
  换言之，对于任意 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，都存在非奇异阵 $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 和上三角阵 $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得 $S^{-1}AS = T$,
  其中 T 的对角元为 A 的特征值，且次序可任意指定.

这是 2024 年 Homework 01 Problem 05 的结论.
Homework is all you need.

- **Lemma** 2:
  设 $T = [t_{i,j}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是严格上三角阵 (即对角元均为 0 的上三角阵).
  对于任意 $k \geq 2$，T^k 的 (i,j) 位置元素为:

  $$(T^k)_{i,j} = \sum_{i<l_1<l_2<\cdots<l_{k-1}<j} t_{i,l_1} t_{l_1,l_2} t_{l_2,l_3} \cdots t_{l_{k-1},j}.$$

  当 $j - i \leq k$ 时，i,j 之间不存在严格递增下标链 $\{l_1, l_2, \ldots, l_{k-1}\}$，因此有 $(T^k)_{i,j} = 0$ 成立.
  这说明 T^k 从主对角线往上，至少有 k 条对角线是全 0 的.
  每乘一次，非零元素带状区域往 "右上角" 移动一层.
  因此对于任意 $p \geq n$，我们都有 $T^p = 0_{n\times n}$ 成立，即 $\operatorname{rank}(T^p) = 0$.

解法一:
根据 **Lemma** 1 可知，存在非奇异阵 $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 使得:

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} T_0 & * \\ & T_1 \end{bmatrix},$$

其中 $T_0 \in \mathbb{C}^{n_0\times n_0}$ 的对角元均为 0，$T_1 \in \mathbb{C}^{n_1\times n_1}$ 的对角元均非零，
n_0 和 n_1 分别为 A 的零特征值和非零特征值的个数，$n_0 + n_1 = n$.

值得注意的是，矩阵中的 "$*$" 代表我们无需关心的分块.
在下面的过程里，这个符号可能会给你带来一些困扰 (如果没有，那你很厉害了 o/o/o/).

根据 **Lemma** 2 可知 $\operatorname{rank}(T_0^{n+1}) = \operatorname{rank}(T_0^n) = 0$.
显然 $\operatorname{rank}(T_1^{n+1}) = \operatorname{rank}(T_1^n) = n_1$.
因此我们有:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rank}(A^{n+1}) &= \operatorname{rank}\left(\left(S\begin{bmatrix} T_0 & * \\ & T_1 \end{bmatrix}S^{-1}\right)^{n+1}\right) \\
&= \operatorname{rank}\left(S\begin{bmatrix} T_0 & * \\ & T_1 \end{bmatrix}^{n+1}S^{-1}\right) \\
&= \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} T_0^{n+1} & * \\ & T_1^{n+1} \end{bmatrix}\right) \\
&= \operatorname{rank}(T_0^{n+1}) + \operatorname{rank}(T_1^{n+1}) \\
&= \operatorname{rank}(T_0^n) + \operatorname{rank}(T_1^n) \quad \text{(use conclusion above)} \\
&= \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} T_0^n & * \\ & T_1^n \end{bmatrix}\right) \\
&= \operatorname{rank}\left(S\begin{bmatrix} T_0 & * \\ & T_1 \end{bmatrix}^{n}S^{-1}\right) \\
&= \operatorname{rank}\left(\left(S\begin{bmatrix} T_0 & * \\ & T_1 \end{bmatrix}S^{-1}\right)^{n}\right) \\
&= \operatorname{rank}(A^n).
\end{aligned}$$

命题得证.

解法二:
Jordan 标准型是理论分析的强有力工具，不过把过程清楚要费更多口舌 (doge).
记特征值为 $\lambda \in \mathbb{C}$ 的 k 阶 Jordan 块为:

$$J_k(\lambda) := \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}.$$

- 当 $\lambda \neq 0$ 时，我们称 $J_k(\lambda)$ 为 k 阶非幂零 Jordan 块.
  容易验证，对于任意 $p \geq 1$，我们都有 $\operatorname{rank}((J_k(\lambda))^p) = \dim(J_k(\lambda)) = k$.
- 当 $\lambda = 0$ 时，我们称 $J_k(0)$ 为 k 阶幂零 Jordan 块.
  根据 **Lemma** 2 可知，对于任意 $p \geq k$，我们都有 $(J_k(0))^p = 0_{k\times k}$ 成立.
  因此对于任意 $p \geq k$，我们都有 $\operatorname{rank}((J_k(0))^p) = \operatorname{rank}((J_k(0))^k) = 0$ 成立.

设复方阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的 Jordan 标准型为:

$$S^{-1}AS = J_0 \oplus J_1 = \begin{bmatrix} J_0 & \\ & J_1 \end{bmatrix},$$

其中 J_0 是 A 的零特征值对应的所有 Jordan 块的直和，
J_1 是 A 的非零特征值对应的所有 Jordan 块的直和.
由于 J_0 中幂零 Jordan 块的阶数一定小于等于 n，因此 $\operatorname{rank}(J_0^{n+1}) = \operatorname{rank}(J_0^n) = 0$.
由于 J_1 中的 Jordan 块都是非幂零的，因此 $\operatorname{rank}(J_1^{n+1}) = \operatorname{rank}(J_1^n) = \dim(J_1)$.
因此我们有:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rank}(A^{n+1}) &= \operatorname{rank}\left(\left(S\begin{bmatrix} J_0 & \\ & J_1 \end{bmatrix}S^{-1}\right)^{n+1}\right) \\
&= \operatorname{rank}\left(S\begin{bmatrix} J_0 & \\ & J_1 \end{bmatrix}^{n+1}S^{-1}\right) \\
&= \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} J_0^{n+1} & \\ & J_1^{n+1} \end{bmatrix}\right) \\
&= \operatorname{rank}(J_0^{n+1}) + \operatorname{rank}(J_1^{n+1}) \\
&= \operatorname{rank}(J_0^n) + \operatorname{rank}(J_1^n) \quad \text{(use conclusion above)} \\
&= \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} J_0^n & \\ & J_1^n \end{bmatrix}\right) \\
&= \operatorname{rank}\left(S\begin{bmatrix} J_0 & \\ & J_1 \end{bmatrix}^{n}S^{-1}\right) \\
&= \operatorname{rank}\left(\left(S\begin{bmatrix} J_0 & \\ & J_1 \end{bmatrix}S^{-1}\right)^{n}\right) \\
&= \operatorname{rank}(A^n).
\end{aligned}$$

命题得证.

事实上，我们可以得到更一般的结论.
对于任意 $p \geq n$，我们都有 $\operatorname{rank}(A^{n+p}) = \operatorname{rank}(A^n)$ 成立.

解法三:

- **Lemma** 3**:**
  设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}, B \in \mathbb{C}^{n\times p}$，则 $\operatorname{rank}(AB) \leq \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}$.
- **Lemma** 4:
  设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.
  由 $\operatorname{Range}(A^{k+1}) \subseteq \operatorname{Range}(A^k)$ 可知，
  $\operatorname{rank}(A^{k+1}) = \operatorname{rank}(A^k)$ 当且仅当

$\text{Range}((A^{k+1})^{\text{H}}) = \text{Range}(A^{k+1}) = \text{Range}(A^k) = \text{Range}((A^k)^{\text{H}})$ 成立,
即当且仅当 $\text{Ker}(A^{k+1}) = \text{Range}((A^{k+1})^{\text{H}})^{\perp} = \text{Range}((A^k)^{\text{H}})^{\perp} = \text{Ker}(A^k)$ 成立.
因此证明 $\text{rank}(A^{n+1}) = \text{rank}(A^n)$，就等价于证明 $\text{Ker}(A^{n+1}) = \text{Ker}(A^n)$.

若 A 可逆，则我们有 $\text{rank}(A^{n+1}) = \text{rank}(A^n) = n$ 成立.
若 A 不可逆，则根据 **Lemma** 3 可知:

$$n > \text{rank}(A) \geq \text{rank}(A^2) \geq \cdots \geq \text{rank}(A^n) \geq \text{rank}(A^{n+1}) \geq 0.$$

注意到 $\text{rank}(A), \ldots, \text{rank}(A^n), \text{rank}(A^{n+1})$ 这 $n+1$ 个数仅有 $0, \ldots, n-1$ 这 n 个取值.
根据抽屉原理可知，存在正整数 $1 \leq k \leq n$ 使得 $\text{rank}(A^{k+1}) = \text{rank}(A^k)$.
根据 **Lemma** 4 可知，这等价于 $\text{Ker}(A^{k+1}) = \text{Ker}(A^k)$ 成立.
因此我们有:

$$\begin{gathered}
x \in \text{Ker}(A^{n+1}) \\
\Updownarrow \\
A^{n+1}x = A^{k+1}(A^{n-k}x) = 0_n \\
\Updownarrow \\
A^{n-k}x \in \text{Ker}(A^{k+1}) \\
\Updownarrow \\
A^{n-k}x \in \text{Ker}(A^k) \\
\Updownarrow \\
A^n x = A^k(A^{n-k}x) = 0_n \\
\Updownarrow \\
x \in \text{Ker}(A^n)
\end{gathered}$$

这说明 $\text{Ker}(A^{n+1}) = \text{Ker}(A^n)$，根据 **Lemma** 4 可知 $\text{rank}(A^{n+1}) = \text{rank}(A^n)$.
命题得证.

Problem 4

给定正整数 n.
设 $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 都是 Hermite 阵.
试证明 $\text{In}_-(A) + \text{In}_-(B) \geq \text{In}_-(A+B)$，其中 $\text{In}_-(A)$ 代表 A 的负惯性指数.

Solution:
这道题是 2024 年 Homework 06 Problem 05 (即 2025 年 Homework 07 Problem 01) 的变体，
仅仅只是将 "正惯性指数" 替换为了 "负惯性指数"，解答过程几乎相同，从略.
Again, homework is all you need.

Problem 5

已知:

$$A = \begin{bmatrix} \ln 2 & \ln 2 & \ln 2 & \ln 2 \\ 0 & \ln 2 & \ln 2 & \ln 2 \\ 0 & 0 & \ln 2 & \ln 2 \\ 0 & 0 & 0 & \ln 2 \end{bmatrix}.$$

试求 $\exp(A)$ 的 Jordan 标准型.

- **Note:** 这道题是 2024 秋期中考试 Problem 5 的变体，但难度有所降低.

Solution:
显然 $\ln 2$ 是 A 的特征值，代数重数为 4.
注意到 $\operatorname{rank}(A-\ln(2)\cdot I)=3$,
根据秩-零度定理可知 $\operatorname{null}(A-\ln(2)\cdot I)=4-\operatorname{rank}(A-\ln(2)\cdot I)=1$.
因此 $\ln 2$ 作为 A 的特征值，其几何重数为 1，即只对应一个 Jordan 块.
这说明 A 的 Jordan 标准型为:

$$J=\begin{bmatrix}\ln 2 & 1 & & \\ & \ln 2 & 1 & \\ & & \ln 2 & 1 \\ & & & \ln 2\end{bmatrix}.$$

记 $f(\lambda):=\exp(\lambda)$，则我们有:

$$\begin{aligned}\exp(J)&=\begin{bmatrix}f(\ln 2) & f'(\ln 2) & f''(\ln 2)/2! & f^{(3)}(\ln 2)/3! \\ & f(\ln 2) & f'(\ln 2) & f''(\ln 2)/2! \\ & & f(\ln 2) & f'(\ln 2) \\ & & & f(\ln 2)\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1 & 1/3 \\ & 2 & 2 & 1 \\ & & 2 & 2 \\ & & & 2\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

要求 $\exp(A)$ 的 Jordan 标准型，即要求 $\exp(J)$ 的 Jordan 标准型.
显然 2 是 $\exp(J)$ 的特征值，代数重数为 4.
注意到 $\operatorname{rank}(\exp(J)-2I)=3$,
根据秩-零度定理可知 $\operatorname{null}(\exp(J)-2I)=4-\operatorname{rank}(\exp(J)-2I)=1$.
因此 2 作为 $\exp(J)$ 的特征值，其几何重数为 1，即只对应一个 Jordan 块.
这说明 $\exp(J)$ 的 Jordan 标准型为:

$$J=\begin{bmatrix}2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2\end{bmatrix}.$$

Problem 6

已知:

$$A=\begin{bmatrix}16 & 16 & 0 & 0 \\ 4 & 16 & 12 & 0 \\ 0 & 3 & 16 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & 16\end{bmatrix}.$$

证明: A 的所有特征值都是正实数.

Solution:
这道题是 2024 年 Homework 09 Problem 01 的变体，解答过程完全相同，从略.
I know I keep saying it, but homework is all you need!

Problem 7

给定正整数 m,n 和矩阵序列 $\{A_k\}\subset\mathbb{C}^{m\times n}$.
证明: 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\|A_k\|$ 收敛，则矩阵级数 $\sum_{k=1}^{\infty}A_k$ 收敛，且

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}A_k\right\|\leq\sum_{k=1}^{\infty}\|A_k\|.$$

- **Note:**
由于复数域 $\mathbb{C}$ 是完备的，故 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 是完备的赋范空间，这意味着 Cauchy 序列等价于收敛序列.
由于有限维赋范空间上的所有范数都是等价的，因此讨论 "依某一特定范数收敛" 是没有必要的.
换言之，所有范数诱导的收敛性是等价的，因此这里仅称其为 "收敛".

> 男生超级扣分的行为，快来看看自己中了几条:
>
> - ① 不定积分的结果不加常数 C.
> - ② 定积分换元时忘记更换积分上下限.
> - ③ 看到分式极限就开洛，滥用 L'Hôpital 法则.
>
> - ④ 计算行列式时遗漏代数余子式的符号.
> - ⑤ 在加减运算中使用等价无穷小.
> - ⑥ 解非齐次微分方程时遗漏特解.
> - ⑦ 默认积分次序可交换.
> - ⑧ 认为所有度量空间上的 Cauchy 序列都等价于收敛序列.
> - ⑨ 认为所有赋范空间上的范数都是等价的.
>
> 骗你的，女生也扣分 (doge)
> (Inspired by DanXi Post #4844372 — with my respect)

Solution:
若级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\|A_k\|$ 收敛，则部分和序列 $\{\sum_{k=1}^{n}\|A_k\|\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Cauchy 序列，
即对于任意 $\varepsilon>0$，都存在正整数 N 使得对于任意 $m,n>N$ 都有:

$$\left|\sum_{k=1}^{m}\|A_k\|-\sum_{k=1}^{n}\|A_k\|\right|=\sum_{k=\min\{m,n\}+1}^{\max\{m,n\}}\|A_k\|<\varepsilon,$$

进而有:

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=1}^{m}A_k-\sum_{k=1}^{n}A_k\right\|&=\left\|\sum_{k=\min\{m,n\}+1}^{\max\{m,n\}}A_k\right\|\\&\leq\sum_{k=\min\{m,n\}+1}^{\max\{m,n\}}\|A_k\|\\&<\varepsilon.\end{aligned}$$

这说明部分和序列 $\{\sum_{k=1}^{n}A_k\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 上的 Cauchy 序列.
由于赋范空间 $\mathbb{C}^{m\times n}$ 是完备的，故 $\{\sum_{k=1}^{n}A_k\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛，即矩阵级数 $\sum_{k=1}^{\infty}A_k$ 收敛.

根据范数的次可加性可知，对于任意正整数 n，我们都有:

$$\left\|\sum_{k=1}^{n}A_k\right\|\leq\sum_{k=1}^{n}\|A_k\|.$$

令 $n\to\infty$，则我们有:

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}A_k\right\| \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\|A_k\| = \sum_{k=1}^{\infty}\|A_k\|.$$

根据有限维赋范空间上范数的连续性，我们有:

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}A_k\right\| = \left\|\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}A_k\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty}A_k\right\|.$$

因此我们有:

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}A_k\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}A_k\right\| \le \sum_{k=1}^{\infty}\|A_k\|.$$

命题得证.

Problem 8

给定正整数 m,n,k，其中 $k<n$.
若 $A_1,A_2,\ldots,A_m\in\mathbb{C}^{n\times k}$ 都是列满秩矩阵，
试证明存在 $B\in\mathbb{C}^{n\times(n-k)}$ 使得

$$\prod_{i=1}^{m}\det\left([A_i,B]\right)\neq 0.$$

Solution:
这道题是 2024 年 $\text{Homework 05 Problem 07}$ (一道选做题) 的等价命题，原命题是这样说的:

> 给定正整数 m,n,k，其中 $k<n$，设 $\mathcal{V}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 n 维向量空间.
> 现有 $\mathcal{V}$ 中 m 组向量，每组中均含有 k 个线性无关的向量.
> 试证明在 $\mathcal{V}$ 中必存在 $n-k$ 个向量，使得它们与上面任意一组向量合在一起都能构成 $\mathcal{V}$ 的一组基.

解答过程完全相同，从略.
$\text{Man, what can I say?}$
"选做题做了不算分，但没说考试不考哦." —— SMY.

The End