

# 高等线性代数 Homework 09

Due: Nov. 18, 2024

姓名: 雍崔扬

学号: 21307140051

## Problem 1

设:

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 16 & 0 & 0 \\ 4 & 16 & 12 & 0 \\ 0 & 3 & 16 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

利用 Gershgorin 圆盘定理证明  $A$  的特征值的实部都严格大于 0.

- **Lemma 1: (关于行的 Gershgorin 圆盘定理, Matrix Analysis 定理 6.1.1)**

记  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$  第  $i$  行的去心绝对行和 (deleted absolute row sums) 为  $\text{Row}'_i(A) = \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}|$ .

记  $A$  关于第  $i$  行的 Gershgorin 圆盘为  $G_i(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \text{Row}'_i(A)\}$ .

则我们有以下命题成立:

- ①  $A$  的  $n$  个特征值一定落在这  $n$  个关于行的 Gershgorin 圆盘的并集  $G(A) := \bigcup_{i=1}^n G_i(A)$  中.
- ② 进一步, 若  $S \subset \mathbb{C}$  是  $A$  的  $k$  个关于行的 Gershgorin 圆盘的并集,  
且与剩下的  $n - k$  个关于行的 Gershgorin 圆盘不相交,  
则  $S$  恰好包含  $A$  的  $k$  个特征值 (按照它们的代数重数计算).
- ③ 特殊地, 若某个关于行的 Gershgorin 圆盘与其余  $n - 1$  个关于行的 Gershgorin 圆盘不相交,  
则它恰好包含  $A$  的 1 个特征值, 且该特征值一定是单重的.
- ④ 考虑第  $i$  行的 Gershgorin 圆盘  $G_i(A)$  的元素到原点的最远距离,  
即为  $\text{Row}'_i(A) + |a_{ii}| = \sum_{j \neq i}^n |a_{ij}| + |a_{ii}| = \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ , 即  $A$  第  $i$  行的绝对行和.  
注意到  $A$  的模最大特征值落在  $G(A) := \bigcup_{i=1}^n G_i(A)$  中, 因此我们有:

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i(A)| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \|A\|_\infty$$

这与谱半径定理的结论  $\rho(A) \leq \|A\|_\infty$  是吻合的.

- 对  $D^{-1}AD$  及其转置  $DA^{-1}D^{-1}$  应用 Gershgorin 圆盘定理就得到如下结果:

**Lemma 2: (Matrix Analysis 推论 6.1.6)**

任意给定  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times n}$  和  $D = \text{diag}\{d_1, \dots, d_n\}$  ( $d_i > 0$  for all  $i = 1, \dots, n$ ).

我们都有以下命题成立:

- ①  $A$  的  $n$  个特征值一定落在  $G(D^{-1}AD) = \bigcup_{i=1}^n G_i(D^{-1}AD) = \bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \frac{1}{d_i} \sum_{j \neq i}^n d_j |a_{ij}|\}$  中.  
此外, 若这些圆盘中有  $k$  个的并集与剩下的  $n - k$  个都不相交,  
则这个并集恰好包含  $A$  的  $k$  个特征值 (按照它们的代数重数计算).
- ②  $A$  的  $n$  个特征值一定落在  
 $G(DA^T D^{-1}) = \bigcup_{j=1}^n G_j(DA^T D^{-1}) = \bigcup_{j=1}^n \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq d_j \sum_{i \neq j}^n \frac{1}{d_i} |a_{ij}|\}$  中.  
此外, 若这些圆盘中有  $k$  个的并集与剩下的  $n - k$  个都不相交,  
则这个并集恰好包含  $A$  的  $k$  个特征值 (按照它们的代数重数计算).
- ③  $\rho(A) \leq \min\{\|D^{-1}AD\|_\infty, \|DA^T D^{-1}\|_\infty\} = \min\{\|D^{-1}AD\|_\infty, \|D^{-1}AD\|_1\}$

记忆这些结论的诀窍是 "行变换是左乘的, 列变换是右乘的".

因此  $D^{-1}AD = [\frac{1}{d_i} a_{ij} d_j]$  而  $DA^T D^{-1} = [d_i a_{ji} \frac{1}{d_j}]$  (方括号中都是对应矩阵  $(i, j)$  位置上的元素).

额外的参数  $d_1, \dots, d_n > 0$  让我们有足够的灵活性对特征值进行任意好的估计.

**Proof:**

考虑方阵:

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 16 & & \\ 4 & 16 & 12 & \\ & 3 & 16 & 16 \\ & & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

注意到:

$$a_{12} = 16 = 4 \times 4 = 4a_{21}$$

$$a_{23} = 12 = 4 \times 3 = 4a_{32}$$

$$a_{34} = 16 = 4 \times 4 = 4a_{43}$$

故可取  $D := \text{diag}\{8, 4, 2, 1\}$  (后一项是前一项的  $\frac{1}{2}$ ).

则我们有:

$$D^{-1}AD = \begin{bmatrix} 16 & 8 & & \\ 8 & 16 & 6 & \\ & 6 & 16 & 8 \\ & & 8 & 16 \end{bmatrix}$$

我们发现它严格对角占优, 故它的所有关于行的 Gershgorin 圆盘都不包含 0 (复平面原点),

同时注意到  $D^{-1}AD$  是对称阵, 故  $A$  的特征值均为实数.

综上所述,  $A$  的特征值均为正实数.

## Problem 2

给定正整数  $n$ .

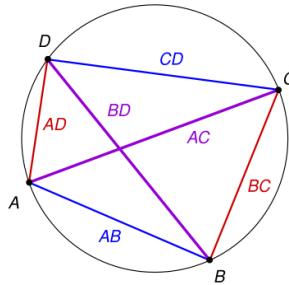
试证明对于任意  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$  都有:

$$\|a - b\|_2^2 + \|b - c\|_2^2 + \|c - d\|_2^2 + \|d - a\|_2^2 \geq \|a - c\|_2^2 + \|b - d\|_2^2.$$

- (一个更难的问题: Ptolemy 定理)

对于任意  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^n$  都有  $\|a - c\|_2 \|b - d\|_2 \leq \|a - b\|_2 \|c - d\|_2 + \|a - d\|_2 \|b - c\|_2$ .

取等条件是  $a, b, c, d$  共面且端点共圆, 即四边形  $ABCD$  是圆内接的:



**Proof:**

记  $\mathbb{R}^n$  的 Euclid 内积为  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , 则我们有:

$$\begin{aligned} & \|a - b\|_2^2 + \|b - c\|_2^2 + \|c - d\|_2^2 + \|d - a\|_2^2 \\ &= \langle a - b, a - b \rangle + \langle b - c, b - c \rangle + \langle c - d, c - d \rangle + \langle d - a, d - a \rangle \\ &= 2\langle a, a \rangle + 2\langle b, b \rangle + 2\langle c, c \rangle + 2\langle d, d \rangle - 2\langle a, b \rangle - 2\langle b, c \rangle - 2\langle c, d \rangle - 2\langle d, a \rangle \\ &= 2\langle a, a \rangle + 2\langle b, b \rangle + 2\langle c, c \rangle + 2\langle d, d \rangle - 2\langle a + c, b + d \rangle \\ &= (\langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle + \langle c, c \rangle + \langle d, d \rangle - 2\langle a, c \rangle - 2\langle b, d \rangle) + (\langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle + \langle c, c \rangle + \langle d, d \rangle + 2\langle a, c \rangle + 2\langle b, d \rangle) - 2\langle a + c, b + d \rangle \\ &= (\langle a - c, a - c \rangle + \langle b - d, b - d \rangle) + (\langle a + c, a + c \rangle + \langle b + d, b + d \rangle) - 2\langle a + c, b + d \rangle \\ &= \|a - c\|_2^2 + \|b - d\|_2^2 + \|(a + c) - (b + d)\|_2^2 \\ &\geq \|a - c\|_2^2 + \|b - d\|_2^2. \end{aligned}$$

取等条件是  $a + c = b + d$ .

这意味着  $ABCD$  是平行四边形 (它一定是圆内接的).

此时就是平行四边形恒等式  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$  ( $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ ).

命题得证.

---

事实上, 上述命题可以推广到  $\mathbb{C}^n$ :

$$\begin{aligned}
& \|a - b\|_2^2 + \|b - c\|_2^2 + \|c - d\|_2^2 + \|d - a\|_2^2 \\
&= \langle a - b, a - b \rangle + \langle b - c, b - c \rangle + \langle c - d, c - d \rangle + \langle d - a, d - a \rangle \\
&= 2\langle a, a \rangle + 2\langle b, b \rangle + 2\langle c, c \rangle + 2\langle d, d \rangle - 2\operatorname{Re}\langle a, b \rangle - 2\operatorname{Re}\langle b, c \rangle - 2\operatorname{Re}\langle c, d \rangle - 2\operatorname{Re}\langle d, a \rangle \\
&= 2\langle a, a \rangle + 2\langle b, b \rangle + 2\langle c, c \rangle + 2\langle d, d \rangle - 2\operatorname{Re}\langle a + c, b + d \rangle \\
&= (\langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle + \langle c, c \rangle + \langle d, d \rangle - 2\operatorname{Re}\langle a, c \rangle - 2\operatorname{Re}\langle b, d \rangle) \\
&\quad + (\langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle + \langle c, c \rangle + \langle d, d \rangle + 2\operatorname{Re}\langle a, c \rangle + 2\operatorname{Re}\langle b, d \rangle) - 2\operatorname{Re}\langle a + c, b + d \rangle \\
&= (\langle a - c, a - c \rangle + \langle b - d, b - d \rangle) + (\langle a + c, a + c \rangle + \langle b + d, b + d \rangle) - 2\operatorname{Re}\langle a + c, b + d \rangle \\
&= \|a - c\|_2^2 + \|b - d\|_2^2 + \|(a + c) - (b + d)\|_2^2 \\
&\geq \|a - c\|_2^2 + \|b - d\|_2^2.
\end{aligned}$$

## Problem 3

给定正整数  $n$ , 设  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  是  $n$  维内积空间.

若  $V$  中的向量  $x$  与  $V$  的一组基  $v_1, \dots, v_n$  的每个向量都正交,

试证明  $x = 0_V$ , 其中  $0_V$  代表  $V$  的加法单位元.

**Proof:**

我们可以使用经典 Gram-Schmidt 过程将  $v_1, \dots, v_n$  标准正交化得到  $q_1, \dots, q_n$ :

(由于  $v_1, \dots, v_n$  线性无关, 故这个过程可以完整进行)

$$\begin{aligned}
v_1 &= q_1 r_{11} \\
&\Downarrow \\
\begin{cases} r_{11} = \|v_1\|_2 \\ q_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|_2} = \frac{v_1}{r_{11}} \end{cases} \\
v_k &= \sum_{i=1}^k q_i r_{ik} = \sum_{i=1}^k q_i \langle q_i, v_k \rangle = q_k r_{kk} + \sum_{i=1}^{k-1} q_i \langle q_i, v_k \rangle \ (k = 2, \dots, n) \\
&\Downarrow \\
\text{for } k = 2, \dots, n \quad \begin{cases} r_{ik} = \langle q_i, v_k \rangle \ (i = 1, \dots, k-1) \\ r_{kk} = \|v_k - \sum_{i=1}^{k-1} q_i r_{ik}\|_2 \\ q_k = \frac{1}{r_{kk}}(v_k - \sum_{i=1}^{k-1} q_i r_{ik}) \end{cases}
\end{aligned}$$

可以证明  $q_1, \dots, q_n$  是  $V$  的一组基.

否则必然存在某个  $q_i = 0_V$ , 这与  $\|q_i\| = \langle q_i, q_i \rangle = 1$  的事实矛盾.

于是可设  $x$  在  $q_1, \dots, q_n$  下的表示为  $x = \alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_n q_n$ ,

其中  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ , 而  $\mathbb{F}$  是内积空间  $V$  对应的数域, 注意内积空间一定是线性空间.

注意到  $v_1, \dots, v_n$  可以表示为  $q_1, \dots, q_n$  的线性组合:  $v_k = \sum_{i=1}^k q_i r_{ik}$  ( $k = 1, \dots, n$ ),

因此根据  $x$  与  $v_1, \dots, v_n$  都正交可以推出  $x$  与  $q_1, \dots, q_n$  都正交.

于是我们有:

$$\alpha_i = \langle x, q_i \rangle = 0 \ (\forall i = 1, \dots, n).$$

这表明  $x = 0_V$ , 命题得证.

## Problem 4

给定正整数  $n$ , 设  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是对称正定阵.

试证明对于任意  $x, y \in \mathbb{R}^n$  都有:

$$y^T A^{-1} y + x^T A x \geq 2y^T x.$$

试探究等号成立的充要条件.

**Proof:**

注意到  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是对称正定阵 (自然是正规矩阵).

因此其存在谱分解  $A = Q^T \Lambda Q$ ,

其中  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  为正交阵, 而  $\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  是具有正实数对角元的对角阵.

我们定义:

$$\begin{aligned}
\Lambda^{\frac{1}{2}} &:= \operatorname{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\} \\
A^{\frac{1}{2}} &:= Q^T \Lambda^{\frac{1}{2}} Q \\
A^{-\frac{1}{2}} &:= (A^{\frac{1}{2}})^{-1} = Q^T \Lambda^{-\frac{1}{2}} Q
\end{aligned}$$

显然  $A^{\frac{1}{2}}$  也是对称正定阵.

因此我们有:

$$\begin{aligned} y^T A^{-1} y + x^T A x - 2y^T x &= (A^{-\frac{1}{2}} y)^T (A^{-\frac{1}{2}} y) + (A^{\frac{1}{2}} x)^T (A^{\frac{1}{2}} x) - 2(A^{-\frac{1}{2}} y)^T (A^{\frac{1}{2}} x) \\ &= \|A^{-\frac{1}{2}} y - A^{\frac{1}{2}} x\|_2^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

当且仅当  $A^{-\frac{1}{2}} y = A^{\frac{1}{2}} x$  时取等, 即  $y = Ax$  时取等.

命题得证.

事实上, 上述命题可以推广到复数域:

给定正整数  $n$ , 设  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  是 Hermite 正定阵(自然是正规矩阵),

因此其存在谱分解  $A = U^H \Lambda U$ ,

其中  $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$  为酉矩阵, 而  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  是具有正实数对角元的对角阵.

可以类似定义:

$$\begin{aligned} \Lambda^{\frac{1}{2}} &:= \text{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\} \\ A^{\frac{1}{2}} &:= U^H \Lambda^{\frac{1}{2}} U \\ A^{-\frac{1}{2}} &:= (A^{\frac{1}{2}})^{-1} = U^H \Lambda^{-\frac{1}{2}} U \end{aligned}$$

对于任意  $x, y \in \mathbb{C}^n$  都有:

$$\begin{aligned} y^H A^{-1} y + x^H A x - 2\operatorname{Re}(y^T x) &= (A^{-\frac{1}{2}} y)^H (A^{-\frac{1}{2}} y) + (A^{\frac{1}{2}} x)^H (A^{\frac{1}{2}} x) - 2\operatorname{Re}((A^{-\frac{1}{2}} y)^H (A^{-\frac{1}{2}} x)) \\ &= \|A^{-\frac{1}{2}} y - A^{\frac{1}{2}} x\|_2^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

当且仅当  $A^{-\frac{1}{2}} y = A^{\frac{1}{2}} x$  时取等, 即  $y = Ax$  时取等.

**邵老师提供的证明:**

给定 Hermite 正定阵  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ .

定义内积  $\langle x, y \rangle_A := y^H A x$  ( $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$ ) (记其诱导的范数为  $\|\cdot\|_A$ ), 则我们有:

$$\begin{aligned} y^H A^{-1} y + x^H A x &= \langle A^{-1} y, A^{-1} y \rangle_A + \langle x, x \rangle_A \\ &= \|A^{-1} y\|_A^2 + \|x\|_A^2 \\ &\geq 2\|A^{-1} y\|_A \|x\|_A \quad (\text{Cauchy-Schwarz}) \quad (\forall x, y \in \mathbb{C}^n) \\ &\geq 2|\langle x, A^{-1} y \rangle_A| \\ &\geq 2\langle x, A^{-1} y \rangle_A \\ &= 2y^H x. \end{aligned}$$

## Problem 5

若  $T$  是内积空间上的保持内积的变换, 试证明  $T$  一定是线性变换.

**Proof:**

考虑域  $\mathbb{F}$  上的内积空间  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

若  $T$  是内积空间上的保持内积的变换, 则我们有:

$$\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad (\forall x, y \in V).$$

- ① 对于任意  $x_1, x_2 \in V$  我们都有:

$$\begin{aligned} &\langle T(x_1 + x_2) - T(x_1) - T(x_2), T(x_1 + x_2) - T(x_1) - T(x_2) \rangle \\ &= \langle T(x_1 + x_2), T(x_1 + x_2) \rangle - \langle T(x_1), T(x_1 + x_2) \rangle - \langle T(x_2), T(x_1 + x_2) \rangle \\ &\quad - \langle T(x_1 + x_2), T(x_1) \rangle + \langle T(x_1), T(x_1) \rangle + \langle T(x_2), T(x_1) \rangle \\ &\quad - \langle T(x_1 + x_2), T(x_2) \rangle + \langle T(x_1), T(x_2) \rangle + \langle T(x_2), T(x_2) \rangle \\ &= \langle x_1 + x_2, x_1 + x_2 \rangle - \langle x_1, x_1 + x_2 \rangle - \langle x_2, x_1 + x_2 \rangle \\ &\quad - \langle x_1 + x_2, x_1 \rangle + \langle x_1, x_1 \rangle + \langle x_2, x_1 \rangle \\ &\quad - \langle x_1 + x_2, x_2 \rangle + \langle x_1, x_2 \rangle + \langle x_2, x_2 \rangle \\ &= \langle x_1, x_1 + x_2 \rangle + \langle x_2, x_1 + x_2 \rangle - \langle x_1, x_1 + x_2 \rangle - \langle x_2, x_1 + x_2 \rangle \\ &\quad - \langle x_1, x_1 \rangle - \langle x_2, x_1 \rangle + \langle x_1, x_1 \rangle + \langle x_2, x_1 \rangle \\ &\quad - \langle x_1, x_2 \rangle - \langle x_2, x_2 \rangle + \langle x_1, x_2 \rangle + \langle x_2, x_2 \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

因此  $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$  ( $\forall x_1, x_2 \in V$ ).

- ② 对于任意  $x \in V$  和  $\alpha \in \mathbb{F}$  我们都有:

$$\begin{aligned} & \langle T(\alpha x) - \alpha T(x), T(\alpha x) - \alpha T(x) \rangle \\ &= \langle T(\alpha x), T(\alpha x) \rangle - \langle \alpha T(x), T(\alpha x) \rangle - \langle T(\alpha x), \alpha T(x) \rangle + \langle \alpha T(x), \alpha T(x) \rangle \\ &= \langle \alpha x, \alpha x \rangle - \alpha \langle x, \alpha x \rangle - \bar{\alpha} \langle \alpha x, x \rangle + |\alpha|^2 \langle x, x \rangle \\ &= |\alpha|^2 \langle x, x \rangle - |\alpha|^2 \langle x, x \rangle - |\alpha|^2 \langle x, x \rangle + |\alpha|^2 \langle x, x \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

综合①②可知  $T$  是  $V$  上的线性变换.

进一步, 根据  $T$  保持内积的性质可知  $T$  保持范数:

$$\|T(x)\| = \sqrt{\langle T(x), T(x) \rangle} = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \|x\| \quad (\forall x \in V)$$

由于  $T$  是  $V$  上的线性变换, 故  $\|T(x) - T(y)\| = \|T(x - y)\| = \|x - y\|$  ( $\forall x, y \in V$ ).

因此  $T(x) = T(y)$  当且仅当  $x = y$ , 这表明  $T$  是一个单射.

在有限维空间中, 任何线性单射算子必定是满射, 因此  $T$  还是一个满射.

于是  $T$  是  $V$  上的保同构.

### (错误的做法)

考虑域  $\mathbb{F}$  上的内积空间  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

若  $T$  是内积空间上的保持内积的变换, 则我们有:

$$\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle \quad (\forall x, y \in V).$$

现固定  $y \in V$

- ① 对于任意  $x_1, x_2 \in V$  我们都有:

$$\begin{aligned} \langle T(x_1 + x_2), T(y) \rangle &= \langle x_1 + x_2, y \rangle \\ &= \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle \\ &= \langle T(x_1), T(y) \rangle + \langle T(x_2), T(y) \rangle \\ &= \langle T(x_1) + T(x_2), T(y) \rangle \end{aligned}$$

即有  $\langle T(x_1 + x_2) - T(x_1) - T(x_2), T(y) \rangle = 0$  ( $\forall x_1, x_2 \in V$ ) 成立.

根据  $y \in V$  的任意性可知  $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$  ( $\forall x_1, x_2 \in V$ ).

注意: 我们需要说明  $T$  是满射, 即  $\text{Range}(T) = V$ .

尽管在有限维内积空间(一定是 Hilbert 空间)中保积算子  $T$  一定是满射(因而是同构).

- ② 对于任意  $x \in V$  和  $\alpha \in \mathbb{F}$  我们都有:

$$\begin{aligned} \langle T(\alpha x), T(y) \rangle &= \langle \alpha x, y \rangle \\ &= \alpha \langle x, y \rangle \\ &= \alpha \langle T(x), T(y) \rangle \\ &= \langle \alpha T(x), T(y) \rangle \end{aligned}$$

即有  $\langle T(\alpha x) - \alpha T(x), T(y) \rangle = 0$  ( $\forall x \in V, \alpha \in \mathbb{F}$ ) 成立.

根据  $y \in V$  的任意性可知  $T(\alpha x) = \alpha T(x)$  ( $\forall x \in V, \alpha \in \mathbb{F}$ ).

出的问题与 ① 相同

综合①②可知  $T$  是  $V$  上的线性变换.

## Problem 6 (optional)

给定正整数  $n > 1$ .

试证明  $\mathbb{C}^n$  上的  $l_1$  范数和  $l_\infty$  范数都不能由内积诱导.

- **Lemma: 平行四边形恒等式 (Parallelogram Identity)**

设  $\{V, \langle \cdot, \cdot \rangle\}$  为域  $\mathbb{F}$  上的内积空间,  $\|\cdot\|$  为  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  诱导出的范数, 则我们有:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad (\forall x, y \in V)$$

展开消去交叉项即可证明:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y \rangle + \langle x-y, x-y \rangle \\
&= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle + \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\
&= 2\langle x, x \rangle + 2\langle y, y \rangle \\
&= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2
\end{aligned}$$

平行四边形恒等式刻画了能被内积诱导出的范数所必须满足的性质.

#### Proof:

我们只需举出反例说明  $\mathbb{C}^n$  ( $n > 1$ ) 上的  $l_1$  范数和  $l_\infty$  范数不满足平行四边形恒等式即可.

- ① 取  $x = e_1$  和  $y = e_2$  (其中  $e_1, \dots, e_n$  代表  $\mathbb{C}^n$  的标准正交基),  
则我们有:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_1^2 + \|x-y\|_1^2 - 2\|x\|_1^2 - 2\|y\|_1^2 &= \|e_1+e_2\|_1^2 + \|e_1-e_2\|_1^2 - 2\|e_1\|_1^2 - 2\|e_2\|_1^2 \\
&= 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1^2 \\
&= 4 \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

因此  $\mathbb{C}^n$  ( $n > 1$ ) 上的  $l_1$  范数不满足平行四边形恒等式.

- ② 取  $x = e_1$  和  $y = e_2$ , 则我们有:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_\infty^2 + \|x-y\|_\infty^2 - 2\|x\|_\infty^2 - 2\|y\|_\infty^2 &= \|e_1+e_2\|_\infty^2 + \|e_1-e_2\|_\infty^2 - 2\|e_1\|_\infty^2 - 2\|e_2\|_\infty^2 \\
&= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1^2 \\
&= -2 \\
&\neq 0
\end{aligned}$$

因此  $\mathbb{C}^n$  ( $n > 1$ ) 上的  $l_\infty$  范数不满足平行四边形恒等式.

综上所述,  $\mathbb{C}^n$  ( $n > 1$ ) 上的  $l_1$  范数和  $l_\infty$  范数都不能由内积诱导.

## Problem 7 (optional)

设  $V$  是  $[-1, 1]$  上的实系数多项式全体构成的向量空间.

定义  $V \times V \mapsto \mathbb{R}$  的泛函  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  如下:

$$\langle p, q \rangle := \int_{-1}^1 \frac{p(t)q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad (\forall p, q \in V)$$

试证明  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  构成  $V$  上的一个内积,

且第一类 Chebyshev 多项式  $p_n(t) = \cos(n \arccos(t))$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) 在该内积下两两正交.

- (内积的定义)**

设  $V$  是建立在域  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  or  $\mathbb{C}$  上的线性空间.

泛函  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \mapsto \mathbb{F}$  称为一个**内积** (inner product), 如果它满足下列五条公理:

对于任意  $x, y, z \in V$  和  $\alpha \in \mathbb{F}$

- ① 非负性:  $\langle x, x \rangle \geq 0$
- ② 正定性:  $\langle x, x \rangle = 0$  当且仅当  $x = 0_V$
- ③ 线性性:  $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- ④ 齐次性:  $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- ⑤ 共轭对称性:  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

#### Proof:

我们逐一验证  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  在  $V$  上满足内积定义的五条公理:

- ① 非负性:

$$\langle p, p \rangle = \int_{-1}^1 \frac{(p(t))^2}{\sqrt{1-t^2}} dt \geq 0 \quad (\forall p \in V)$$

- ② 正定性:

$$\begin{aligned}
\langle p, p \rangle &= \int_{-1}^1 \frac{(p(t))^2}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0 \\
&\Leftrightarrow \\
p(t) &\equiv 0 \quad (\forall t \in [-1, 1])
\end{aligned}$$

- ③ 线性性:

$$\begin{aligned}
\langle p_1 + p_2, q \rangle &= \int_{-1}^1 \frac{(p_1(t) + p_2(t))q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
&= \int_{-1}^1 \frac{p_1(t)q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt + \int_{-1}^1 \frac{p_2(t)q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad (\forall p_1, p_2, q \in V) \\
&= \langle p_1, q \rangle + \langle p_2, q \rangle
\end{aligned}$$

- ④ 齐次性:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha p, q \rangle &= \int_{-1}^1 \frac{(\alpha p(t))q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
&= \alpha \int_{-1}^1 \frac{p(t)q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad (\forall p, q \in V, \alpha \in \mathbb{F}) \\
&= \alpha \langle p, q \rangle
\end{aligned}$$

- ⑤ (共轭) 对称性:

$$\begin{aligned}
\langle q, p \rangle &= \int_{-1}^1 \frac{q(t)p(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
&= \int_{-1}^1 \frac{p(t)q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad (\forall p, q \in V) \\
&= \langle p, q \rangle
\end{aligned}$$

因此  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  构成  $V$  上的一个内积.

现考虑第一类 Chebyshev 多项式  $p_n(t) = \cos(n \arccos(t))$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ).

对于任意  $m, n \in \mathbb{N}$  我们都有:

$$\begin{aligned}
\langle p_n, p_m \rangle &= \int_{-1}^1 \frac{p_n(t)p_m(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
&= \int_{-1}^1 \frac{\cos(n \arccos(t)) \cos(m \arccos(t))}{\sqrt{1-t^2}} dt \quad (\text{Let } \theta := \arccos(t) \in [0, \pi]) \\
&= \int_{\pi}^0 \frac{\cos(n\theta) \cos(m\theta)}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}} d(\cos(\theta)) \\
&= \int_{\pi}^0 \frac{\frac{1}{2}[\cos(n\theta - m\theta) + \cos(n\theta + m\theta)]}{\sin(\theta)} (-\sin(\theta)d\theta) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n-m)\theta) d\theta + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n+m)\theta) d\theta
\end{aligned}$$

注意到对于任意  $k \in \mathbb{Z}$  我们都有:

$$\int_0^\pi \cos(k\theta) d\theta = \begin{cases} \int_0^\pi 1 d\theta = \pi & \text{if } k = 0 \\ \frac{1}{k} \sin(k\theta)|_{\theta=0}^{\theta=\pi} = 0 & \text{if } k \neq 0 \end{cases}$$

因此我们有:

$$\begin{aligned}
\langle p_n, p_m \rangle &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n-m)\theta) d\theta + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n+m)\theta) d\theta \\
&= \begin{cases} \pi & \text{if } m = n = 0 \\ \frac{1}{2}\pi & \text{if } m = n \in \mathbb{Z}_+ \\ 0 & \text{if } m, n \in \mathbb{N} \text{ such that } m \neq n \end{cases}
\end{aligned}$$

这表明  $p_n(t) = \cos(n \arccos(t))$  ( $\forall n \in \mathbb{N}$ ) 是两两正交的.

命题得证.

**The End**