

高等线性代数 Homework 05

Due: Oct. 12, 2024

姓名: 雍崔扬

学号: 21307140051

Problem 1

给定正整数 n .

试证明: 若 \mathbb{F} 是一个域, 则 \mathbb{F}^n 不能表示为它的两个真子空间的并.

当 $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$ 时, \mathbb{F}^n 不能表示为其有限个真子空间的并.

Proof:

(反证法) 假设存在 \mathbb{F}^n 的两个真子空间 S_1, S_2 使得 $\mathbb{F}^n = S_1 \cup S_2$.

由于 S_1, S_2 是真子空间, 故存在 s_1, s_2 满足:

$$\begin{cases} s_1 \in S_1, s_1 \notin S_2 \\ s_2 \notin S_1, s_2 \in S_2. \end{cases}$$

根据线性空间对向量加法的封闭性, 有 $s_1 + s_2 \in \mathbb{F}^n$, 则 $s_1 + s_2$ 势必属于 S_1, S_2 中的一个.

- 若 $s_1 + s_2 \in S_1$, 则 $s_2 = (s_1 + s_2) + (-s_1) \in S_1$

(注意到 S_1 是子空间, 故 $(-s_1) \in S_1$), 与假设矛盾.

- 若 $s_1 + s_2 \in S_2$, 则 $s_1 = (s_1 + s_2) + (-s_2) \in S_2$

(注意到 S_2 是子空间, 故 $(-s_2) \in S_2$), 与假设矛盾.

因此 \mathbb{F}^n 不能表示为它的两个真子空间的并.

当 $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$ 时, 我们使用数学归纳法证明 \mathbb{F}^n 不能表示为其有限个真子空间的并.

对真子空间数量 m 进行数学归纳:

① 当 $m = 1, 2$ 时, 命题显然成立.

② 现假设命题对正整数 m 成立

则对于 \mathbb{F}^n 的任意给定的 m 个真子空间 S_1, \dots, S_m 都有 $(\bigcup_{i=1}^m S_i) \subset \mathbb{F}^n$ 成立.

根据归纳假设可知 $(\bigcup_{i=1}^m S_i)$ 不是 \mathbb{F}^n 的真子空间, 仅仅是真子集.

下面证明在归纳假设下, 命题对正整数 $m+1$ 也成立.

(反证法) 假设存在 \mathbb{F}^n 的一个真子空间 S_{m+1} 使得 $(\bigcup_{i=1}^m S_i) \cup S_{m+1} = \mathbb{F}^n$.

由于 $(\bigcup_{i=1}^m S_i) \subset \mathbb{F}^n$ 和 $S_{m+1} \subset \mathbb{F}^n$, 故存在 s_1, s_2 满足:

$$\begin{cases} s_1 \in S_{m+1}, s_1 \notin (\bigcup_{i=1}^m S_i) \\ s_2 \notin S_{m+1}, s_2 \in (\bigcup_{i=1}^m S_i). \end{cases}$$

根据线性空间对向量加法的封闭性, 对于任意 k 都有 $ks_1 + s_2 \in \mathbb{F}^n$ 成立.

因此对于任意给定的标量 $\alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha s_1 + s_2$ 势必属于 S_{m+1} 和 $(\bigcup_{i=1}^m S_i)$ 中的一个.

若 $\alpha s_1 + s_2 \in S_{m+1}$, 则 $s_2 = (\alpha s_1 + s_2) + \alpha(-s_1) \in S_{m+1}$

(注意到 S_{m+1} 是子空间, 故 $\alpha(-s_1) \in S_{m+1}$), 与假设矛盾.

因此我们有 $\alpha s_1 + s_2 \in (\bigcup_{i=1}^m S_i)$ ($\forall \alpha \in \mathbb{F}$) 成立.

设 $0_{\mathbb{F}}, 1_{\mathbb{F}}$ 分别是域 \mathbb{F} 的加法单位元和数乘单位元.

考虑 $\alpha = k1_{\mathbb{F}}$ ($k \in \mathbb{Z}$) 的情况:

显然我们有无限个形如 $(k1_{\mathbb{F}})s_1 + s_2$ ($\forall k \in \mathbb{Z}$) 的向量在 $(\bigcup_{i=1}^m S_i)$

(它是有限个真子空间 S_1, \dots, S_m 的并集).

根据抽屉原理可知, 对于真子空间 S_1 ,
至少存在两个不同的整数 $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ (不妨设 $k_2 > k_1$) 使得:

$$\begin{cases} (k_1 1_{\mathbb{F}}) s_1 + s_2 \in S_1 \\ (k_2 1_{\mathbb{F}}) s_1 + s_2 \in S_1, \end{cases}$$

故我们有 $((k_2 - k_1) 1_{\mathbb{F}}) \cdot s_1 \in S_1$.

注意到域 \mathbb{F} 的特征 $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$, 故 $(k_2 - k_1) 1_{\mathbb{F}} \neq 0_{\mathbb{F}}$, 从而有 $s_1 \in S_1$.
这与 $s_1 \notin (\bigcup_{i=1}^m S_i)$ 的假设相矛盾.

因此在归纳假设下, 命题对正整数 $m + 1$ 也成立.

根据数学归纳法可知, 命题对任意正整数 $m \in \mathbb{Z}_+$ 都成立,
即当 $\text{char}(\mathbb{F}) = 0$ 时, \mathbb{F}^n 不能表示为其有限个真子空间的并.

Problem 2

(Cauchy 函数方程)

设 $f : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{R}$ 满足 $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ($\forall x, y \in \mathbb{Q}$).
试证明 f 是线性映射.

- **Note:** 对于连续函数 $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ (由有理点完全决定),
我们也有线性可加性 $f(x + y) = f(x) + f(y)$ ($\forall x, y \in \mathbb{R}$).
可以证明 f 不可能为线性映射, 它只对有理数数乘有线性性:

$$\begin{aligned} f(\alpha x) &= \alpha f(x) \quad (\alpha \in \mathbb{Q}) \quad (\checkmark) \\ f(\alpha x) &= \alpha f(x) \quad (\alpha \in \mathbb{R}) \quad (\times) \end{aligned}$$

Proof:

根据 $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$ 可知 $f(0) = 0$.
根据 $f(x) + f(-x) = f(x + (-x)) = f(0) = 0$ 可知,
对于任意 $x \in \mathbb{Q}$ 都有 $f(-x) = -f(x)$ 成立.

对于任意整数 $k \in \mathbb{Z}$ 和有理数 $x \in \mathbb{Q}$, 我们有:

$$f(kx) = \begin{cases} \underbrace{f(x + \cdots + x)}_k = kf(x) & \text{if } k > 0 \\ f(0) = 0 = 0f(x) & \text{if } k = 0 \\ \underbrace{f((-x) + \cdots + (-x))}_{-k} = (-k)f(-x) = kf(x) & \text{if } k < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(kx) = kf(x) \text{ for all } k \in \mathbb{Z} \text{ and } x \in \mathbb{Q}$$

对于任意 $\alpha, x \in \mathbb{Q}$ (记 $\alpha = \frac{p}{q}$, 其中 $p, q \in \mathbb{Z}$ 而 $q \neq 0$) 我们都有:

$$\begin{aligned}
f(\alpha x) &= f\left(\frac{p}{q}x\right) \\
&= f\left(p\frac{x}{q}\right) \\
&= p \cdot f\left(\frac{x}{q}\right) \\
&= \frac{p}{q} \cdot qf\left(\frac{x}{q}\right) \\
&= \frac{p}{q}f\left(q\frac{x}{q}\right) \\
&= \frac{p}{q}f(x) \\
&= \alpha f(x)
\end{aligned}$$

再结合 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ($\forall x, y \in \mathbb{Q}$) 便可知 f 是一个线性映射.

有点小错误的解法:

(其错误原因是 p, q 有可能是负整数, 这让我们的论述有点逻辑不严谨)

对于任意 $\alpha, x \in \mathbb{Q}$ (记 $\alpha = \frac{p}{q}$, 其中 $p, q \in \mathbb{Z}$ 而 $q \neq 0$) 我们都有:

$$\begin{aligned}
f(\alpha x) &= f\left(\frac{p}{q}x\right) \\
&= f\left(p\frac{x}{q}\right) \\
&= f\left(\underbrace{\frac{x}{q} + \cdots + \frac{x}{q}}_p\right) \quad (\text{use } f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ } (\forall x, y \in \mathbb{Q})) \\
&= p \cdot f\left(\frac{x}{q}\right) \\
&= \frac{p}{q} \cdot qf\left(\frac{x}{q}\right) \quad (\text{use } f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ } (\forall x, y \in \mathbb{Q})) \\
&= \frac{p}{q} \cdot f\left(\underbrace{\frac{x}{q} + \cdots + \frac{x}{q}}_q\right) \\
&= \frac{p}{q}f(x) \\
&= \alpha f(x)
\end{aligned}$$

再结合 $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ($\forall x, y \in \mathbb{Q}$) 便可知 f 是一个线性映射.

Problem 3

设 V 是 \mathbb{R} 上不超过 5 次的多项式全体构成的向量空间, D 是 V 上的求导算子.

试选取 V 的一组基, 在这组基下写出 D 的表示矩阵, 并求出其所有特征值.

利用上述结论求解常微分方程 $y'' - 2y' + y = x^5$ 的通解.

Solution:

显然 $B_{\text{polynomial}} = [1, x, x^2, x^3, x^4, x^5]^T$ 是 V 的一组基.

根据

$$\begin{cases} D(1) = 0 \\ D(x) = 1 \\ D(x^2) = 2x \\ D(x^3) = 3x^2 \\ D(x^4) = 4x^3 \\ D(x^5) = 5x^4 \end{cases}$$

可知求导算子 D 在基 $[1, x, x^2, x^3, x^4, x^5]$ 下的表示矩阵为:

$$[D]_{B_{\text{polynomial}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 2 & & & \\ & & 0 & 3 & & \\ & & & 0 & 4 & \\ & & & & 0 & 5 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

显然求导算子 D 的所有特征值均为 0.

设 $y = a^T B_{\text{polynomial}}$ (其中 $a \in \mathbb{R}^6$),

则求解常微分方程 $y'' - 2y' + y = x^5$ 的问题就等价于求解以下线性方程组:

$$([D]_{B_{\text{polynomial}}})^2 a - 2[D]_{B_{\text{polynomial}}} a + a = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 & & & \\ & 1 & -4 & 6 & & \\ & & 1 & -6 & 12 & \\ & & & 1 & -8 & 20 \\ & & & & 1 & -10 \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

使用前代法解得:

$$\begin{cases} a_5 = 1 \\ a_4 = 10a_5 = 10 \\ a_3 = 8a_4 - 20a_5 = 8 \times 10 - 20 \times 1 = 60 \\ a_2 = 6a_3 - 12a_4 = 6 \times 60 - 12 \times 10 = 240 \\ a_1 = 4a_2 - 6a_3 = 4 \times 240 - 6 \times 60 = 600 \\ a_0 = 2a_1 - 2a_2 = 2 \times 600 - 2 \times 240 = 720. \end{cases}$$

因此我们有如下特解:

$$\begin{aligned} y(x) &= a^T B_{\text{polynomial}} \\ &= a_5 x^5 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ &= x^5 + 10x^4 + 60x^3 + 240x^2 + 600x + 720. \end{aligned}$$

于是通解形式为:

$$y(x) = x^5 + 10x^4 + 60x^3 + 240x^2 + 600x + 720 + C,$$

其中 C 是一个常数.

Problem 4

设 \mathbb{F} 是 \mathbb{C} 的子域, n_1, n_2, n_3, n_4 是正整数, $A \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}, B \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_3}, C \in \mathbb{F}^{n_3 \times n_4}$. 试证明 Frobenius 不等式:

$$\text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) \leq \text{rank}(ABC) + \text{rank}(B),$$

当且仅当存在矩阵 $X \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_1}$ 和 $Y \in \mathbb{F}^{n_4 \times n_3}$ 使得 $B = XAB + BCY$ 时取等.

- **Lemma 1: (秩-零度定理)**

对于线性空间 V, W 上任意一个线性映射 $T : V \mapsto W$,
我们都有 $\text{rank}(T) + \text{null}(T) = \dim(V)$ 成立,
其中 $\text{null}(T) := \dim(\text{Ker}(T))$ 为线性映射 T 的零度.

- **Lemma 2:**

对于任意 $A \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}, B \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_3}$ 都有
 $\text{rank}(AB) = \text{rank}(B) - \dim(\text{Ker}(A) \cap \text{Range}(B))$ 成立.

Proof of lemma 2:

考虑定义为 $T(x) := Ax (\forall x \in \text{Range}(B))$ 的映射 $T : \text{Range}(B) \mapsto \text{Range}(AB)$.
 对于任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ 和 $y_1, y_2 \in \text{Range}(B)$ (设 $y_1 = Bx_1, y_2 = Bx_2$) 我们都有:

$$\begin{aligned} T(\alpha y_1 + \beta y_2) &= T(B(\alpha x_1 + \beta x_2)) \\ &= AB(\alpha x_1 + \beta x_2) \\ &= \alpha ABx_1 + \beta ABx_2 \\ &= \alpha T(Bx_1) + \beta T(Bx_2) \\ &= \alpha T(y_1) + \beta T(y_2) \end{aligned}$$

因此 T 是线性映射.

显然我们有:

$$\begin{cases} \text{Ker}(T) = \text{Ker}(A) \cap \text{Range}(B) \\ \text{Range}(T) = \text{Range}(AB) \cap \text{Range}(A) = \text{Range}(AB) \end{cases}$$

故根据秩-零度定理我们有:

$$\begin{aligned} \text{rank}(AB) &= \dim(\text{Range}(T)) \quad (\text{utilize rank-nullity theorem}) \\ &= \dim(\text{Range}(B)) - \dim(\text{Ker}(T)) \\ &= \text{rank}(B) - \dim(\text{Ker}(A) \cap \text{Range}(B)) \end{aligned}$$

引理得证.

Proof:

根据 $\text{Range}(BC) \subseteq \text{Range}(B)$ 我们有:

$$\begin{aligned} \text{Range}(BC) \cap \text{Ker}(A) &\subseteq \text{Range}(B) \cap \text{Ker}(A) \\ \dim(\text{Range}(BC) \cap \text{Ker}(A)) &\leq \dim(\text{Range}(B) \cap \text{Ker}(A)) \end{aligned}$$

根据 Lemma 2 可知:

$$\begin{aligned} \text{rank}(ABC) &= \text{rank}(BC) - \dim(\text{Range}(BC) \cap \text{Ker}(A)) \quad (\text{utilize lemma 2}) \\ &\geq \text{rank}(BC) - \dim(\text{Range}(B) \cap \text{Ker}(A)) \\ &= \text{rank}(BC) - [\text{rank}(B) - \text{rank}(AB)] \quad (\text{utilize lemma 2}) \end{aligned}$$

即有 $\text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) \leq \text{rank}(ABC) + \text{rank}(B)$ 成立.

显然上述不等式当且仅当 $\text{Range}(BC) = \text{Range}(B)$ 时取等, 但这样似乎证不出取等条件.

另一种证明:

- **Lemma 3: (Schur 补不等式)**

对于任意 $A \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}, B \in \mathbb{F}^{n_3 \times n_2}, C \in \mathbb{F}^{n_3 \times n_4}$ 我们都有:

$$\text{rank}\left(\begin{bmatrix} A & \\ B & C \end{bmatrix}\right) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(C)$$

当且仅当存在 $X \in \mathbb{F}^{n_3 \times n_1}$ 和 $Y \in \mathbb{F}^{n_4 \times n_2}$ 使得 $XA + CY = B$ 时取等.

Proof: (存疑: 有更简单的证明吗?)

设非奇异阵 $P_1 \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_1}, P_2 \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_2}, P_3 \in \mathbb{F}^{n_3 \times n_3}, P_4 \in \mathbb{F}^{n_4 \times n_4}$ 使得:

$$P_1 A P_2 = \begin{bmatrix} I_{r_A} & 0_{r_A \times (n_2 - r_A)} \\ 0_{(n_1 - r_A) \times r_A} & 0_{(n_1 - r_A) \times (n_2 - r_A)} \end{bmatrix}$$

$$P_3 C P_4 = \begin{bmatrix} I_{r_C} & 0_{r_C \times (n_4 - r_C)} \\ 0_{(n_3 - r_C) \times r_C} & 0_{(n_3 - r_C) \times (n_4 - r_C)} \end{bmatrix}$$

其中 $r_A = \text{rank}(A), r_C = \text{rank}(C)$.

我们将 $P_3 B P_2$ 划分为:

$$P_3 B P_2 = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} \\ \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{22} \end{bmatrix} \text{ where } \begin{cases} \tilde{B}_{11} \in \mathbb{F}^{r_A \times r_C} \\ \tilde{B}_{12} \in \mathbb{F}^{r_A \times (n_2 - r_C)} \\ \tilde{B}_{21} \in \mathbb{F}^{(n_3 - r_A) \times r_C} \\ \tilde{B}_{22} \in \mathbb{F}^{(n_3 - r_A) \times (n_2 - r_C)} \end{cases}$$

则我们有:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P_1 & \\ & P_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_2 & \\ & P_4 \end{bmatrix} &\geq \begin{bmatrix} P_1 A P_2 & \\ P_3 B P_2 & P_3 C P_4 \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{cc|cc} I_{r_A} & 0_{r_A \times (n_2 - r_A)} & & \\ 0_{(n_1 - r_A) \times r_A} & 0_{(n_1 - r_A) \times (n_2 - r_A)} & & \\ \hline \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} & I_{r_C} & 0_{r_C \times (n_4 - r_C)} \\ \tilde{B}_{21} & \tilde{B}_{22} & 0_{(n_3 - r_C) \times r_C} & 0_{(n_3 - r_C) \times (n_4 - r_C)} \end{array} \right] \\ &= P^{(1)} \begin{bmatrix} I_{r_A} & & & \\ & I_{r_C} & & \\ & & \tilde{B}_{22} & \\ & & & 0_{(n_1 - r_C) \times (n_4 - r_A)} \end{bmatrix} P^{(2)} \end{aligned}$$

其中 $P^{(1)} \in \mathbb{F}^{(n_1+n_3) \times (n_1+n_3)}$ 和 $P^{(2)} \in \mathbb{F}^{(n_2+n_4) \times (n_2+n_4)}$

因此我们有:

$$\begin{aligned} \text{rank} \left(\begin{bmatrix} A & \\ B & C \end{bmatrix} \right) &= \text{rank} \left(\begin{bmatrix} I_{r_A} & & & \\ & I_{r_C} & & \\ & & \tilde{B}_{22} & \\ & & & 0_{(n_1 - r_C) \times (n_4 - r_A)} \end{bmatrix} \right) \\ &= \text{rank}(I_{r_A}) + \text{rank}(I_{r_C}) + \text{rank}(\tilde{B}_{22}) \\ &= \text{rank}(A) + \text{rank}(C) + \text{rank}(\tilde{B}_{22}) \\ &\geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) \end{aligned}$$

其取等条件为:

$$\begin{aligned}
& \text{rank}(\tilde{B}_{22}) = 0 \\
& \Leftrightarrow \\
& \tilde{B}_{22} = 0_{(n_3-r_C) \times (n_2-r_A)} \\
& \Leftrightarrow \\
P_3BP_2 &= \tilde{B} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} \\ \tilde{B}_{21} & 0_{(n_3-r_C) \times (n_2-r_A)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0_{r_C \times r_A} & 0_{r_C \times (n_2-r_A)} \\ \tilde{B}_{21} & 0_{(n_3-r_C) \times (n_2-r_A)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{r_A} & 0_{r_A \times (n_2-r_A)} \\ 0_{(n_1-r_A) \times r_A} & 0_{(n_1-r_A) \times (n_2-r_A)} \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} I_{r_C} & 0_{r_C \times (n_4-r_C)} \\ 0_{(n_3-r_C) \times r_C} & 0_{(n_3-r_C) \times (n_4-r_C)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} \\ 0_{(n_3-r_C) \times r_A} & 0_{(n_3-r_C) \times (n_2-r_A)} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0_{r_C \times r_A} & 0_{r_C \times (n_2-r_A)} \\ \tilde{B}_{21} & 0_{(n_3-r_C) \times (n_2-r_A)} \end{bmatrix} P_1AP_2 + P_3CP_4 \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} \\ 0_{(n_3-r_C) \times r_A} & 0_{(n_3-r_C) \times (n_2-r_A)} \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \\
B &= XA + CY \text{ where } \begin{cases} X = P_3^{-1} \begin{bmatrix} 0_{r_C \times r_A} & 0_{r_C \times (n_2-r_A)} \\ \tilde{B}_{21} & 0_{(n_3-r_C) \times (n_2-r_A)} \end{bmatrix} P_1 \\ Y = P_4 \begin{bmatrix} \tilde{B}_{11} & \tilde{B}_{12} \\ 0_{(n_3-r_C) \times r_A} & 0_{(n_3-r_C) \times (n_2-r_A)} \end{bmatrix} P_2^{-1} \end{cases}
\end{aligned}$$

因此取等条件为存在 $X \in \mathbb{F}^{n_3 \times n_1}$ 和 $Y \in \mathbb{F}^{n_4 \times n_2}$ 使得 $XA + CY = B$
引理得证.

(Problem 4 题干)

设 \mathbb{F} 是 \mathbb{C} 的子域, n_1, n_2, n_3, n_4 是正整数, $A \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}, B \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_3}, C \in \mathbb{F}^{n_3 \times n_4}$.
试证明 Frobenius 不等式:

$$\text{rank}(AB) + \text{rank}(BC) \leq \text{rank}(ABC) + \text{rank}(B)$$

当且仅当存在矩阵 $X \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_1}$ 和 $Y \in \mathbb{F}^{n_4 \times n_3}$ 使得 $B = XAB + BCY$ 时取等.

Proof:

首先注意到:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} I_{n_1} & -A \\ & I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ABC & \\ & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n_4} & \\ C & I_{n_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & I_{n_4} \\ -I_{n_3} & \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_{n_1} & -A \\ & I_{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ABC & \\ BC & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & I_{n_4} \\ -I_{n_3} & \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0_{n_1 \times n_4} & -AB \\ BC & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & I_{n_4} \\ -I_{n_3} & \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} AB & 0_{n_1 \times n_4} \\ -B & BC \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

根据 Lemma 3 (Schur 补不等式) 可知:

$$\begin{aligned}
\text{rank}(ABC) + \text{rank}(B) &= \text{rank} \left(\begin{bmatrix} ABC & \\ & B \end{bmatrix} \right) \\
&= \text{rank} \left(\begin{bmatrix} AB & 0_{n_1 \times n_4} \\ -B & BC \end{bmatrix} \right) \quad (\text{utilize lemme 3}) \\
&\geq \text{rank}(AB) + \text{rank}(BC)
\end{aligned}$$

当且仅当存在矩阵 $X \in \mathbb{F}^{n_2 \times n_1}$ 和 $Y \in \mathbb{F}^{n_4 \times n_3}$ 使得 $B = XAB + BCY$ 时取等.

Problem 5

已知 $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ 是有限维向量空间 \mathcal{V} 上的子空间，满足 $\dim(\mathcal{V}_1) + \dim(\mathcal{V}_2) = \dim(\mathcal{V})$.
试证明存在 \mathcal{V} 上的线性变换 T 使得 $\text{Range}(T) = \mathcal{V}_1$ 且 $\text{Ker}(T) = \mathcal{V}_2$.

- **Lemma: (线性映射由其对基的作用所唯一确定)**

考虑定义在域 \mathbb{F} 上的线性空间 \mathcal{V}, \mathcal{W} .

设 $\{v_1, \dots, v_n\}$ 是线性空间 \mathcal{V} 的一组基，而 $\{w_1, \dots, w_n\}$ 是线性空间 \mathcal{W} 中的任意向量组，则存在唯一的线性映射 $T : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{W}$ 使得 $T(v_i) = w_i$ ($i = 1, \dots, n$).

Proof:

我们定义映射 $T : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{W}$ 为：

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \mapsto \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n \quad (\text{for all } \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F})$$

这个映射是定义良好的，因为任意 $v \in \mathcal{V}$ 都可以表示为 v_1, \dots, v_n 的线性组合.

而且显然它满足 $Tv_i = w_i$ ($i = 1, \dots, n$).

下面我们证明它是线性映射.

对于任意 $x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in \mathcal{V}$ 和 $y = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \in \mathcal{V}$ 我们都有：

$$\begin{aligned} T(x+y) &= T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n) \\ &= T((\alpha_1 + \beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)v_n) \\ &= (\alpha_1 + \beta_1)w_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n)w_n \\ &= (\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n) + (\beta_1 w_1 + \dots + \beta_n w_n) \\ &= T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) + T(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n) \\ &= T(x) + T(y) \end{aligned}$$

对于任意 $x = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in \mathcal{V}$ 和 $\gamma \in \mathbb{F}$ 我们都有：

$$\begin{aligned} T(\gamma x) &= T(\gamma(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n)) \\ &= T(\gamma \alpha_1 v_1 + \dots + \gamma \alpha_n v_n) \\ &= \gamma \alpha_1 w_1 + \dots + \gamma \alpha_n w_n \\ &= \gamma(\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n) \\ &= \gamma T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \\ &= \gamma T(x) \end{aligned}$$

因此映射 $T : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{W}$ 是一个线性映射.

为证明线性映射 $T : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{W}$ 是唯一的，假设 \tilde{T} 是一个满足 $\tilde{T}v_i = w_i$ ($i = 1, \dots, n$) 的线性映射.

由于任意 $v \in \mathcal{V}$ 都可以唯一表示为 $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ ，故我们有：

$$\begin{aligned} \tilde{T}(v) &= \tilde{T}(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \\ &= \alpha_1 \tilde{T}(v_1) + \dots + \alpha_n \tilde{T}(v_n) \quad (\text{note that } \tilde{T} \text{ is a linear map}) \\ &= \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n \\ &= T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) \\ &= T(v) \end{aligned}$$

因此 $\tilde{T} \equiv T$ ，表明线性映射 $T : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{W}$ 是唯一的.

引理得证.

Proof:

记 $\begin{cases} n := \dim(\mathcal{V}) \\ r := \dim(\mathcal{V}_1) \end{cases}$ 并记 $0_{\mathcal{V}}$ 为向量空间 \mathcal{V} 的加法单位元.

- ① 若 $r = 0$ ，则 $\begin{cases} \mathcal{V}_1 = \{0_{\mathcal{V}}\} \\ \mathcal{V}_2 = \mathcal{V} \end{cases}$ ，从而 \mathcal{V} 上的零变换 $Z_{\mathcal{V}}$ 满足 $\begin{cases} \text{Range}(Z_{\mathcal{V}}) = \{0_{\mathcal{V}}\} = \mathcal{V}_1 \\ \text{Ker}(Z_{\mathcal{V}}) = \mathcal{V} = \mathcal{V}_2 \end{cases}$

- ② 若 $r = n$, 则 $\begin{cases} \mathcal{V}_1 = \mathcal{V} \\ \mathcal{V}_2 = \{0_{\mathcal{V}}\} \end{cases}$, 从而 \mathcal{V} 上的恒等变换 $I_{\mathcal{V}}$ 满足 $\begin{cases} \text{Range}(I_{\mathcal{V}}) = \mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \\ \text{Ker}(I_{\mathcal{V}}) = \{0_{\mathcal{V}}\} = \mathcal{V}_2 \end{cases}$
- ③ 若 $n \geq 2$ 且 $1 \leq r \leq n - 1$, 则可设 \mathcal{V}_2 的一组基为 $\{e_1, \dots, e_{n-r}\}$ 而 \mathcal{V}_1 的一组基为 $\{f_1, \dots, f_r\}$.

由基扩张定理可知, 存在 $e_{n-r+1}, \dots, e_n \in \mathcal{V}$ 使得 $\{e_1, \dots, e_{n-r}, e_{n-r+1}, \dots, e_n\}$ 构成 \mathcal{V} 的一组基.

将 f_1, \dots, f_r 扩充为 \mathcal{V} 的一个 n 元向量组 $\underbrace{\{0_{\mathcal{V}}, \dots, 0_{\mathcal{V}}\}}_{n-r}, f_1, \dots, f_r\}$.

根据 Lemma 可知, 存在唯一的线性映射 $T : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}_1$ 使得:

$$T(e_i) := \begin{cases} 0_{\mathcal{V}}, & i = 1, \dots, n-r \\ f_{i-r}, & i = n-r+1, \dots, n. \end{cases}$$

换言之, 它将 \mathcal{V}_2 映射到 $\{0_n\}$, 而把 \mathcal{V}_2^\perp 映射到 \mathcal{V}_1 .

因此我们有:

$$\begin{aligned} \text{Range}(T) &= T(\text{span}\{e_1, \dots, e_{n-r}, e_{n-r+1}, \dots, e_n\}) \\ &= \text{span}\{T(e_1), \dots, T(e_{n-r}), T(e_{n-r+1}), \dots, T(e_n)\} \\ &= \text{span}\{\underbrace{0_{\mathcal{V}}, \dots, 0_{\mathcal{V}}}_{n-r}, f_1, \dots, f_r\} \\ &= \text{span}\{f_1, \dots, f_r\} \\ &= \mathcal{V}_1 \\ \hline \text{Ker}(T) &= T^{-1}(\{0_{\mathcal{V}}\}) \\ &= T^{-1}(\text{span}\{T(e_1), \dots, T(e_{n-r})\}) \\ &= \text{span}\{e_1, \dots, e_{n-r}\} \\ &= \mathcal{V}_2 \end{aligned}$$

命题得证.

Problem 6 (optional)

已知 n 为正整数, $A, B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 满足 $AB = BA$.

试证明:

$$\text{rank}(A + B) + \text{rank}(AB) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$$

当且仅当存在 $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 和 $Y \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使得 $X(A + B) + (AB)Y = B$ 时取等.

Proof:

注意到 A, B 均为 n 阶方阵, 因此我们有 $\text{Range}(A + B) \subseteq \text{Range}(A) + \text{Range}(B)$. 于是我们有:

$$\begin{aligned} \text{rank}(A + B) &= \dim(\text{Range}(A + B)) \\ &\leq \dim(\text{Range}(A) + \text{Range}(B)) \\ &= \dim(\text{Range}(A)) + \dim(\text{Range}(B)) - \dim(\text{Range}(A) \cap \text{Range}(B)) \\ &= \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - \dim(\text{Range}(A) \cap \text{Range}(B)) \end{aligned} \tag{6-1}$$

注意到:

$$\begin{cases} \text{Range}(AB) \subseteq \text{Range}(A) \\ \text{Range}(BA) \subseteq \text{Range}(B) \end{cases}$$

根据 $AB = BA$ 可知:

$$\begin{aligned}
\text{Range}(AB) &= \text{Range}(AB) \cap \text{Range}(BA) \quad (\text{use } AB = BA) \\
&= \text{Range}(AB) \cap \text{Range}(BA) \\
&\subseteq \text{Range}(A) \cap \text{Range}(B)
\end{aligned}$$

因此有 $\text{rank}(AB) = \dim(\text{Range}(AB)) \leq \dim(\text{Range}(A) \cap \text{Range}(B))$.
代入 (6-1) 式即有:

$$\begin{aligned}
\text{rank}(A + B) &= \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - \dim(\text{Range}(A) \cap \text{Range}(B)) \\
&\leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - \text{rank}(AB)
\end{aligned}$$

命题得证.

Another Proof:

- **Lemma 1:**

对于任意 $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ 和 $B \in \mathbb{C}^{n \times p}$, 我们都有 $\text{rank}(AB) \leq \min\{\text{rank}(A), \text{rank}(B)\}$.

- **Lemma 2 (Schur 补不等式):**

对于任意 $A \in \mathbb{F}^{n_1 \times n_2}, B \in \mathbb{F}^{n_3 \times n_2}, C \in \mathbb{F}^{n_3 \times n_4}$ 我们都有:

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} A \\ B & C \end{bmatrix} \right) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(C)$$

当且仅当存在 $X \in \mathbb{F}^{n_3 \times n_1}$ 和 $Y \in \mathbb{F}^{n_4 \times n_2}$ 使得 $XA + CY = B$ 时取等.

(证明参见 Problem 4)

现在给出证明.

注意到:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & -B \\ I_n & A \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & B \\ & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & -B \\ I_n & A \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} A+B & -AB+BA \\ B & BA \end{bmatrix} \quad (\text{note that } AB = BA) \\
&= \begin{bmatrix} A+B & \\ B & AB \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

于是我们有:

$$\begin{aligned}
\text{rank}(A) + \text{rank}(B) &= \text{rank} \left(\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix} \right) \\
&\geq \min \left\{ \text{rank} \left(\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ & I_n \end{bmatrix} \right), \text{rank} \left(\begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix} \right), \text{rank} \left(\begin{bmatrix} I_n & -B \\ I_n & A \end{bmatrix} \right) \right\} \\
&\geq \text{rank} \left(\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \\ & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & -B \\ I_n & A \end{bmatrix} \right) \quad (\text{utilize lemma 1}) \\
&= \text{rank} \left(\begin{bmatrix} A+B & \\ B & AB \end{bmatrix} \right) \\
&\geq \text{rank}(A + B) + \text{rank}(AB) \quad (\text{utilize lemma 2})
\end{aligned}$$

当且仅当存在 $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 和 $Y \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 使得 $XA + CY = B$ 时取等.

Problem 7 (optional)

给定正整数 m, n, k , 其中 $k < n$, 设 \mathcal{V} 是 \mathbb{R} 上的 n 维向量空间.

现有 \mathcal{V} 中 m 组向量, 每组中均含有 k 个线性无关的向量.

试证明在 \mathcal{V} 中必存在 $n - k$ 个向量, 使得它们与上面任意一组向量合在一起都能构成 \mathcal{V} 的一组基.

- 这是符合直觉的，任意给定 k 个线性无关的向量，再随机生成 $n - k$ 个向量构成一个 n 阶方阵。通常来说这个 n 阶方阵是有(很大)可能是非奇异的。
- 考虑题干中的 m 组向量，每组中均含有 k 个线性无关的向量。
即使它们分别张成不同真子空间，它们的并集也无法覆盖全空间 \mathcal{V} 。
因此 \mathbb{R} 是特征为 0 的域， \mathcal{V} 作为 \mathbb{R} 上的向量空间不能表示为有限个真子空间的并，这是本次作业 Problem 01 的结论。

Proof:

设这 m 组向量张成的 k 维子空间为 S_1, \dots, S_m 。

由于 \mathcal{V} 作为 \mathbb{R} 上的向量空间不能表示为有限个真子空间的并，故我们有：

$$\mathcal{V} \setminus (\bigcup_{i=1}^m S_i) \neq \emptyset$$

因此存在 $x_1 \in \mathcal{V} \setminus (\bigcup_{i=1}^m S_i)$ ，

它使得 $S_1 \oplus \text{span}\{x_1\}, \dots, S_m \oplus \text{span}\{x_1\}$ 成为 $k + 1$ 维子空间。

依此类推可知存在 $n - k$ 个线性无关的向量 $x_1, \dots, x_{n-k} \in \mathcal{V} \setminus (\bigcup_{i=1}^m S_i)$ 使得：

$$S_1 \oplus \text{span}\{x_1, \dots, x_{n-k}\} = \mathcal{V}$$

⋮

$$S_m \oplus \text{span}\{x_1, \dots, x_{n-k}\} = \mathcal{V}$$

即它们与给定的 m 组向量中的任意一组合在一起都能构成 \mathcal{V} 的一组基。

命题得证。

Problem 8 (optional)

设正整数 $n > 1$ ，试证明不存在 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\text{tr}(A) = y^T A x$ 对一切 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 恒成立。

Proof:

记 E_{ij} 为 (i, j) 位置上为 1，其余位置为 0 的 n 阶实方阵。

(反证法) 假设存在 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\text{tr}(A) = y^T A x$ 对一切 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 恒成立，则我们有：

$$y_i x_j = y^T E_{ij} x = \text{tr}(E_{ij}) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

显然上述结论是自相矛盾的：

根据 $y_i x_i = 1 (\forall i = 1, \dots, n)$ 可知 $x_i, y_i \neq 0 (\forall i = 1, \dots, n)$ ，

这与 $y_i x_j = 0 (\forall i, j = 1, \dots, n \text{ such that } i \neq j)$ 相矛盾。

因此不存在 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\text{tr}(A) = y^T A x$ 对一切 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 恒成立。

命题得证。

• **一点观察：**

显然 $E_{ij} (i, j = 1, \dots, n)$ 是 $\mathbb{R}^{n \times n}$ 的一组基。

由任意给定的 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 定义的 $\mathbb{R}^{n \times n} \mapsto \mathbb{R}$ 的线性映射 $A \mapsto y^T A x$ (如果存在的话)，

必然由它对基 $E_{ij} (i, j = 1, \dots, n)$ 的作用唯一确定。

我们便是通过它对基 $E_{ij} (i, j = 1, \dots, n)$ 的作用导出的矛盾。

Problem 9

若 \mathcal{V} 是有限维线性空间, $L : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}$ 是 \mathcal{V} 上的线性变换.

试证明 L 是单射等价于 L 是满射.

- **Lemma (秩-零度定理)**

对于线性空间 \mathcal{V}, \mathcal{W} 上任意一个线性映射 $T : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{W}$ (记其表示矩阵为 A)

我们都有 $\text{rank}(A) + \text{null}(A) = \text{rank}(T) + \text{null}(T) = \dim(\mathcal{V})$ 成立.

其中 $\text{null}(T) := \dim(\text{Ker}(T))$ 为线性映射 T 的零度.

Solution:

L 是单射, 即 $\text{Ker}(L) = \{0_{\mathcal{V}}\}$,

等价于 $\text{null}(L) = \dim(\text{Ker}(L)) = 0$.

根据 Lemma 可知等价于 $\text{rank}(L) = \dim(\mathcal{V})$,

等价于 $\text{Range}(L) = \mathcal{V}$ 即 L 是满射.

Problem 10

给定正整数 m, n , $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{n \times m}$.

试证明 Sylvester 恒等式 $\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA)$.

Solution:

注意到:

$$\begin{bmatrix} I_n & -B \\ & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n + BA & 0_{n \times m} \\ A & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & B \\ & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times m} \\ A & I_m + AB \end{bmatrix}.$$

又注意到:

$$\left(\begin{bmatrix} I_n & B \\ & I_m \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & -B \\ & I_m \end{bmatrix}$$

因此我们有:

$$\begin{aligned} \det(I_m + AB) &= \det \left(\begin{bmatrix} I_n & 0_{n \times m} \\ A & I_m + AB \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} I_n & -B \\ & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n + BA & 0_{n \times m} \\ A & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & B \\ & I_m \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} I_n & -B \\ & I_m \end{bmatrix} \right) \det \left(\begin{bmatrix} I_n + BA & 0_{n \times m} \\ A & I_m \end{bmatrix} \right) \det \left(\begin{bmatrix} I_n & B \\ & I_m \end{bmatrix} \right) \\ &= \left(\det \left(\begin{bmatrix} I_n & B \\ & I_m \end{bmatrix} \right) \right)^{-1} \det \left(\begin{bmatrix} I_n + BA & 0_{n \times m} \\ A & I_m \end{bmatrix} \right) \det \left(\begin{bmatrix} I_n & B \\ & I_m \end{bmatrix} \right) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} I_n + BA & 0_{n \times m} \\ A & I_m \end{bmatrix} \right) \\ &= \det(I_n + BA). \end{aligned}$$

Problem 11 (optional)

给定正整数 m, n , 设 $\mathbb{C}^{m \times n}$ 上的矩阵序列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ (逐元素) 收敛.

试证明:

$$\text{rank} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} A_k \right) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \text{rank}(A_k).$$

Solution:

由于矩阵序列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ (逐元素) 收敛, 故极限 $\lim_{k \rightarrow \infty} A_k$ 存在, 记 $A := \lim_{k \rightarrow \infty} A_k$.
记 $r := \text{rank}(A)$.

根据秩的定义可知, A 的某 r 行 r 列向量线性无关,
即 A 存在某个 $r \times r$ 的子阵 $A[\mathcal{I}, \mathcal{J}]$ 满足 $\det(A[\mathcal{I}, \mathcal{J}]) \neq 0$,
其中 \mathcal{I}, \mathcal{J} 分别为 r 行与 r 列的索引集合, 满足:

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &\subseteq \{1, \dots, m\}, \quad |\mathcal{I}| = r \\ \mathcal{J} &\subseteq \{1, \dots, n\}, \quad |\mathcal{J}| = r\end{aligned}$$

根据行列式的定义可知, 行列式是关于矩阵元素的连续函数.

因此对于任意 $\varepsilon \in (0, |\det(A[\mathcal{I}, \mathcal{J}])|)$, 都存在正整数 K 使得:

$$|\det(A_k[\mathcal{I}, \mathcal{J}]) - \det(A[\mathcal{I}, \mathcal{J}])| < \varepsilon \quad (\forall k \geq K),$$

进而有:

$$\begin{aligned}|\det(A_k[\mathcal{I}, \mathcal{J}])| &= |\det(A[\mathcal{I}, \mathcal{J}]) + \det(A_k[\mathcal{I}, \mathcal{J}]) - \det(A[\mathcal{I}, \mathcal{J}])| \\ &\geq |\det(A[\mathcal{I}, \mathcal{J}])| - |\det(A_k[\mathcal{I}, \mathcal{J}]) - \det(A[\mathcal{I}, \mathcal{J}])| \quad (\forall k \geq K) \\ &> |\det(A[\mathcal{I}, \mathcal{J}])| - \varepsilon \\ &> 0,\end{aligned}$$

因而有 $\det(A_k[\mathcal{I}, \mathcal{J}]) \neq 0$ ($\forall k \geq K$).

这说明 $\text{rank}(A_k) \geq r$ ($\forall k \geq K$).

于是我们有:

$$\begin{aligned}\liminf_{k \rightarrow \infty} \text{rank}(A_k) &\geq r \\ &= \text{rank}(A) \\ &= \text{rank}\left(\lim_{k \rightarrow \infty} A_k\right).\end{aligned}$$

The End