FDU 随机过程导论 5. Galton-Watson 分支过程

本文根据王老师课堂笔记整理而成，并参考了以下教材：

- 随机过程 (苏中根) 第 5 章
- Introduction to Probability Models: Applied Stochastic Processes (S. Ross)
- 应用随机过程概率论模型导论 (S. Ross) 龚光鲁译 第 4.7 节

欢迎批评指正！

5.1 Introduction

考察一个总体，它由能产生同类型后代的个体构成.
假设每个个体在其生命结束时，以概率 $P_i(i\geq 0)$ 产生 i 个后代，且独立于其他个体产生的后代个数.
假设对于一切 $i\geq 0$ 都有 $P_i<1$

记最初的个体数为 X_0，记第 n 代的个体数为 X_n，
显然**分支过程** $\{X_n:n\geq 0\}$ 是以 $\mathbb{N}$ 为状态空间的 **Markov 链**.

- 我们有**递推关系** $X_n=\sum\limits_{i=1}^{X_{n-1}}\xi_i$
  其中 ξ_i 表示第 $n-1$ 代中的第 i 个个体产生的后代数.
  因此对于任意 $i\geq 1$，向状态 j 的**转移概率** $P_{ij}=\mathrm{P}\{X_n=j|X_{n-1}=i\}=\mathrm{P}\{\sum\limits_{k=1}^{i}\xi_k=j\}$
  一般情况下，很难计算出转移概率 P_{ij}

显然状态 0 是**吸收态** (自然是正常返态)，有 $P_{00}=1$ 成立.
此外，若个体产生 0 个后代的概率 $P_0>0$，则除 0 以外的其他状态都是**瞬时态**.
这是因为：对于任意状态 $i>0$，它的所有个体都不产生后代的概率 $P_{i0}=(P_0)^i>0$ 是正值.
此时，由于瞬时态的任意有限集 $\{1,2,\dots,n\}$ 都只能有限次地被访问，
这就导出一个重要的结论：

- **若个体产生 0 个后代的概率 $P_0>0$，则该总体或者灭绝，或者趋于无穷.**

我们记单个个体产生后代数的均值和方差为 $\begin{cases}\mu=\mathrm{E}[\xi]=\sum\limits_{i=0}^{\infty}iP_i\\ \sigma^2=\mathrm{Var}[\xi]=\sum\limits_{i=0}^{\infty}(i-\mu)^2P_i\end{cases}$

假设 $X_0=1$，我们尝试计算第 n 代个体数的期望 $\mathrm{E}[X_n]$ 和方差 $\mathrm{Var}[X_n]$：

- 取条件于 X_{n-1}，我们得到期望：
  $$\begin{aligned}\mathrm{E}[X_n]&=\mathrm{E}[\mathrm{E}[X_n|X_{n-1}]]\\&=\mathrm{E}[\mathrm{E}[\sum_{i=1}^{X_{n-1}}\xi_i|X_{n-1}]]\\&=\mathrm{E}[X_{n-1}\mathrm{E}[\xi]]\\&=\mathrm{E}[X_{n-1}\mu]\\&=\mu\mathrm{E}[X_{n-1}]\end{aligned}$$
  根据 $X_0=1$ (自然有 $\mathrm{E}[X_0]=1$) 可得 $\mathrm{E}[X_n]=\mu^n$
  它表明：
  - 若 $\mu>1$，则 $\mathrm{E}[X_n]=\mu^n\to\infty\ \ (n\to\infty)$ (几何级数增长)

- 若 $\mu = 1$，则 $\mathrm{E}[X_n] = \mu^n \equiv 1$
- 若 $0 < \mu < 1$，则 $\mathrm{E}[X_n] = \mu^n \to 0 \ \ (n \to \infty)$ (几何级数衰减)

- 类似地，取条件于 X_{n-1}，我们得到方差：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[X_n] &= \mathrm{E}[\mathrm{Var}(X_n|X_{n-1})] + \mathrm{Var}(\mathrm{E}[X_n|X_{n-1}]) \\
&= \mathrm{E}[\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_i|X_{n-1})] + \mathrm{Var}(\mathrm{E}[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_i|X_{n-1}]) \\
&= \mathrm{E}[X_{n-1}\sigma^2] + \mathrm{Var}(X_{n-1}\mu) \\
&= \sigma^2\mathrm{E}[X_{n-1}] + \mu^2\mathrm{Var}[X_{n-1}] \\
&= \sigma^2\mu^{n-1} + \mu^2(\sigma^2\mu^{n-2} + \mu^2\mathrm{Var}[X_{n-2}]) \\
&= \sigma^2(\mu^{n-1} + \mu^n) + \mu^4\mathrm{Var}[X_{n-2}] \\
&= \cdots \\
&= \sigma^2(\mu^{n-1} + \mu^n + \cdots + \mu^{2n-2}) + \mu^{2n}\mathrm{Var}[X_0] \\
&= \sigma^2(\mu^{n-1} + \mu^n + \cdots + \mu^{2n-2}) + \mu^{2n} \cdot 0 \\
&= \sigma^2(\mu^{n-1} + \mu^n + \cdots + \mu^{2n-2}) \\
&= \begin{cases} n\sigma^2 & \text{if } \mu = 1 \\ \sigma^2\mu^{n-1}(\frac{1-\mu^n}{1-\mu}) & \text{if } \mu \neq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

在假定 $X_0 = 1$ 的前提下，我们定义总体最终灭绝的概率为：
$\tau = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\{X_n = 0|X_0 = 1\}$ (可以简记为 $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\{X_n = 0\}$)

- 我们首先注意如果单个个体产生后代数的均值 $\mu < 1$，则灭绝概率 $\tau = 1$
  这是因为 (下面我们省略 $X_0 = 1$ 的条件, 单纯简化记号):

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\{X_n \geq 1\} &= \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}\{X_n = i\} \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \mathrm{P}\{X_n = i\} \\
&= \mathrm{E}[X_n] \\
&= \mu^n \to 0 \ \ (n \to \infty)
\end{aligned}$$

  表明灭绝概率 $\tau = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\{X_n = 0\} = 1$

- 事实上，即使单个个体产生后代数的均值 $\mu = 1$，我们也可以证明灭绝概率 $\tau = 1$

- 现在考虑 $\mu > 1$ 的情况：
  给定 $X_1 = i$，总体最终灭绝当且仅当从第一代成员开始的 i 个家族都最终灭绝.
  由于这 i 个家族的分支过程相互独立，灭绝概率均为 τ
  因此我们有：

$$\begin{aligned}
\tau &= \mathrm{P}\{\text{extinction}\} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{P}\{\text{extinction}|X_1 = i\}\mathrm{P}\{X_1 = i\} \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} (\tau)^i \cdot P_i
\end{aligned}$$

  从而灭绝概率 τ 满足方程 $\tau = \sum_{i=0}^{\infty} \tau^i P_i$ (我们可以看出这个方程有一个平凡解 $\tau = 1$)
  事实上，我们可以证明 τ 是上述方程的最小正解.

(S. Ross 例 4.32)
设 $\begin{cases} P_0 = \frac{1}{2} \\ P_1 = \frac{1}{4} \\ P_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$，可计算得单个个体产生后代数的均值 $\mu = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
由于 $\mu = \frac{3}{4} \leq 1$，故灭绝概率 $\tau = 1$

(S. Ross 例 4.33)
设 $\begin{cases} P_0 = \frac{1}{4} \\ P_1 = \frac{1}{4} \\ P_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$，可计算得单个个体产生后代数的均值 $\mu = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$
由于 $\mu = \frac{5}{4} > 1$ 且 $P_0 = \frac{1}{4}$，故可能灭绝也可能无穷繁衍下去.

我们知道 τ 满足方程 $\tau = \tau^0 \cdot \frac{1}{4} + \tau^1 \cdot \frac{1}{4} + \tau^2 \cdot \frac{1}{2}$
即 $2\tau^2 - 3\tau + 1 = 0$
解得 $\tau = \frac{1}{2}$ 或 $\tau = 1$ (平凡解)
我们取最小正解 $\tau = \frac{1}{2}$，表明这个分支过程的灭绝概率为 $\tau = \frac{1}{2}$

(S. Ross 例 4.34)
对于上述两个例子，若 $X_0 = m$ (即第 0 代由 m 个个体构成)
则总体灭绝的概率是 τ^m，
对于**例 4.32** 是 $\tau^m = 1^m = 1$，对**例 4.33** 是 $\tau^m = (\frac{1}{2})^m = \frac{1}{2^m}$

5.2 生成函数

假设 ξ 为非负整数值随机变量，概率分布由 $P_k = \mathrm{P}\{\xi = k\}$ $(k \in \mathbb{N})$ 给定.
对 $0 \leq z \leq 1$ 定义 $G(z) = \mathrm{E}[z^\xi] = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P_k$
我们称 $G(z)$ 为随机变量 ξ 的**生成函数**.

- 等价地，我们也可以取 $z = e^{-t}$ $(t \geq 0)$，
  以 $G(t) = \mathrm{E}[e^{-t\xi}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kt} P_k$ 为随机变量 ξ 的**生成函数**.

生成函数具有很多良好的性质：

- $\begin{cases} G(0) = 0 \\ G(1) = 1 \end{cases}$ 且 $0 \leq G(z) \leq 1$ $(\forall\, 0 \leq z \leq 1)$
- $G(z)$ 在 $[0,1]$ 上一致连续，且是严格单调递增的凸函数
- $G(z)$ 在 $z = 0$ 处无穷次可微，并且概率 $P_k = \mathrm{P}\{\xi = k\} = \frac{1}{k!} G^{(k)}(0)$
- 若 ξ 的 k 阶矩 $\mathrm{E}[\xi^k] < \infty$，则 $G(z)$ 在 $[0,1]$ 上 k 次可微.
  特别地，当 $\mathrm{E}[\xi^2] < \infty$ 时，我们有 $\begin{cases} G'(1) = \mathrm{E}[\xi] \\ G''(1) = \mathrm{E}[\xi^2] - \mathrm{E}[\xi] \end{cases}$
- 假设 ξ, η 是两个相互独立的非负整数值随机变量，
  那么 $\xi + \eta$ 的生成函数等于各自生成函数的乘积，即 $G_{\xi+\eta}(z) = G_\xi(z) G_\eta(z)$
  这个性质可以推广至任意有限个独立随机变量的和.

下面讨论分支过程 $\mathbf{X} = \{X_n : n \geq 0\}$ 的生成函数：
记 X_n 的生成函数为 $G_n(z)$

- X_1 与 ξ 同分布：$G_1(z) = G(z)$

- 考虑 $n \geq 2$ 的情况:
  $$\begin{aligned} G_n(z) &= \mathrm{E}[z^{X_n}] \\ &= \mathrm{E}[z^{\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_i}] \\ &= \mathrm{E}[\mathrm{E}[z^{\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_i} | X_{n-1}]] \\ &= \mathrm{E}[\prod_{i=1}^{X_{n-1}} \mathrm{E}[z^{\xi_i}]] \\ &= \mathrm{E}[(G(z))^{X_{n-1}}] \\ &= G_{n-1}(G(z)) \end{aligned}$$

归纳可得 $G_n(z) = G_{n-1}(G(z)) = G(G_{n-1}(z)) = \underbrace{G \circ G \circ \cdots \circ G}_{n}(z)$

(苏中根 例 5.3)
设 $0 < p < 1$，随机变量 $\xi \sim \mathrm{Geo}(p) - 1$，即 $\mathrm{P}\{\xi = k\} = p(1-p)^k \ \ (k \geq 0)$
我们计算从状态 $i \geq 1$ 到状态 j 的**转移概率** $P_{ij} = P\{\sum_{k=1}^{i} \xi_k = j\}$:

(一般情况下，很难计算出转移概率 P_{ij})

- 随机变量 ξ 的生成函数:
  $$\begin{aligned} G_\xi(z) &= \mathrm{E}[z^\xi] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot p(1-p)^k \\ &= p \cdot \sum_{k=0}^{\infty} [z(1-p)]^k \\ &= p \cdot \frac{1}{1 - z(1-p)} \end{aligned}$$
- 随机变量和 $S_i = \sum_{k=1}^{i} \xi_k$ 的生成函数:
  $$\begin{aligned} G_{S_i}(z) &= \mathrm{E}[z^{S_i}] \\ &= \mathrm{E}[z^{\sum_{k=1}^{i} \xi_k}] \\ &= \prod_{k=1}^{i} \mathrm{E}[z^{\xi_k}] \\ &= (G_\xi(z))^i \\ &= p^i \cdot (\frac{1}{1 - z(1-p)})^i \\ &= p^i \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \binom{i+j-1}{i-1} [z(1-p)]^j \end{aligned}$$

  从而我们知道 $P_{ij} = P\{\sum_{k=1}^{i} \xi_k = j\} = \mathrm{P}\{S_i = j\} = \binom{i+j-1}{i-1} p^i (1-p)^j$

(王勤文补充示例, 苏中根 例 5.5)
设随机变量 ξ 的分布由 $P_k = \mathrm{P}\{\xi = k\} = \frac{1}{2^{k+1}} \ \ (k \geq 0)$ 确定.
(也就是说 $\xi \sim \mathrm{Geo}(\frac{1}{2}) - 1$，即**苏中根 例 5.3** 取 $p = \frac{1}{2}$ 的情况)

- 利用**苏中根 例 5.3** 的结论，随机变量 ξ 的生成函数为：
  $$\begin{aligned}G(z)&=\frac{p}{1-z(1-p)}\\&=\frac{\frac{1}{2}}{1-z(1-\frac{1}{2})}\\&=\frac{1}{2-z}\end{aligned}$$
- X_1 的生成函数 $G_1(z)=G(z)$
  X_2 的生成函数 $G_2(z)=G_1(G(z))=G(G(z))=\frac{1}{2-\frac{1}{2-z}}=\frac{2-z}{3-2z}$
  X_3 的生成函数 $G_3(z)=G_2(G(z))=\frac{2-\frac{1}{2-z}}{3-2\frac{1}{2-z}}=\frac{3-2z}{4-3z}$
  归纳可得 X_n 生成函数的通式为 $G_n(z)=\frac{n-(n-1)z}{n+1-nz}$
- 为避免对 $G_n(z)$ 求高阶导数，我们可以对 $G_n(z)$ 进行 Taylor 展开：
  $$\begin{aligned}G_n(z)-\frac{n}{n+1}&=\frac{n-(n-1)z}{n+1-nz}-\frac{n}{n+1}\\&=\frac{z}{(n+1)(n+1-nz)}\\&=\frac{z}{(n+1)^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{n}{n+1}z}\end{aligned}$$
  我们知道，当 $|x|<1$ 时，函数 $\frac{1}{1-x}$ 的 Taylor 展开式为 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k$
  因此我们有 $\frac{1}{1-\frac{n}{n+1}z}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\frac{n}{n+1}z)^k$
  于是我们有：
  $$\begin{aligned}G_n(z)&=\frac{n}{n+1}+\frac{z}{(n+1)^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{n}{n+1}z}\\&=\frac{n}{n+1}+\frac{z}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{n}{n+1}z)^k\\&=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{n}{n+1})^kz^{k+1}\\&=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{n}{n+1})^{k-1}z^k\end{aligned}$$
  因此我们有 $\begin{cases}\mathrm{P}\{X_n=0\}=G_n(0)=\frac{n}{n+1}\\\mathrm{P}\{X_n=k\}=\frac{1}{k!}G_n^{(k)}(0)=\frac{n^{k-1}}{(n+1)^{k+1}}\quad(k\geq 1)\end{cases}$

5.3 灭绝概率

我们现在重新审视灭绝概率：
在假定 $X_0=1$ 的前提下，我们定义总体最终灭绝的概率为：
$\tau=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{P}\{X_n=0|X_0=1\}$ (可以简记为 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{P}\{X_n=0\}$)

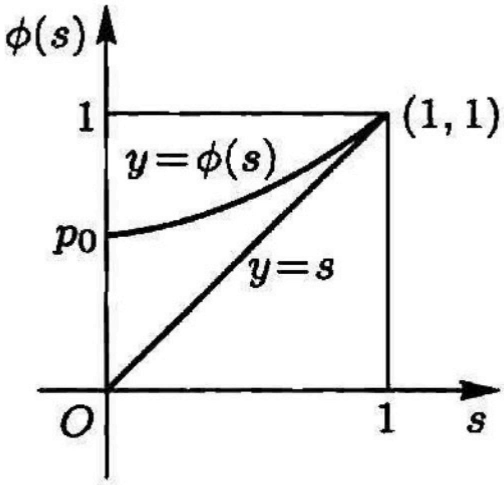
利用 5.2 节生成函数的结论，我们有 $\mathrm{P}\{X_n=0\}=G_n(0)$ 成立.
记 $\alpha_n=\mathrm{P}\{X_n=0\}$ 即得：
$\alpha_n=\mathrm{P}\{X_n=0\}=G_n(0)=G(G_{n-1}(0))=G(\alpha_{n-1})$
令 $n\to\infty$ 可得：
$\tau=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}G(\alpha_{n-1})=G(\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_{n-1})=G(\tau)$
(其中倒数第二步使用了生成函数 $G(\cdot)$ 的连续性)

定理 5.3.1：(苏中根 定理 5.3)
在假定第 0 代个体数 $X_0=1$ 且单个个体产生 0 个后代的概率 $P_0>0$ 的前提下，
设单个个体产生后代数 ξ 的均值是 $\mu=\mathrm{E}[\xi]$
设 ξ 的生成函数为 $G(z)=\mathrm{E}[z^{\xi}]\ (z\in[0,1])$
定义灭绝概率为 $\tau=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{P}\{X_n=0|X_0=1\}$ (可以简记为 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{P}\{X_n=0\}$)

- 若 $0<\mu\leq 1$，则 $\tau=1$
- 若 $\mu>1$，则 $0<\tau<1$ 为方程 $\tau=G(\tau)$

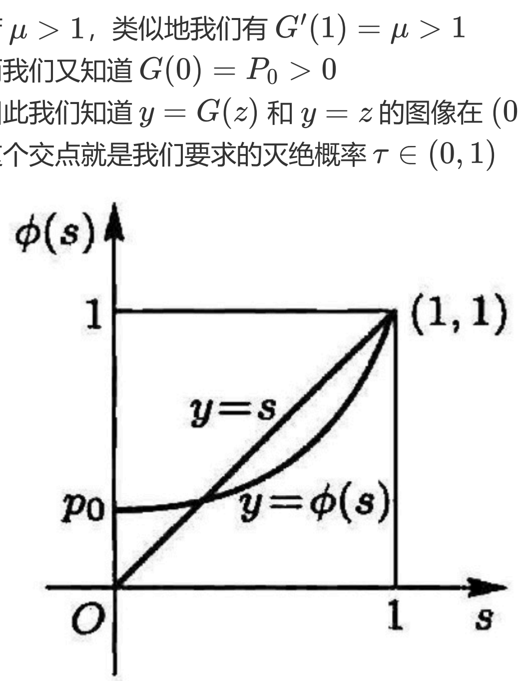
证明：

- $0<\mu<1$ 的情况我们已经在 5.1 节证明过了.
- 若 $\mu=1$，则根据生成函数的性质 (参考 5.2 节) 可知 $G'(1)=\mu=1$
  又由于生成函数在 $[0,1]$ 上是严格单调递增的凸函数，
  故我们可以绘制 $y=G(z)$ 和 $y=z$ 的图像，
  发现方程 $z=G(z)$ 仅有 $z=1$ 一个解，
  因此灭绝概率 $\tau=1$



(a)

- 若 $\mu>1$，类似地我们有 $G'(1)=\mu>1$
  而我们又知道 $G(0)=P_0>0$
  因此我们知道 $y=G(z)$ 和 $y=z$ 的图像在 $(0,1)$ 上必有一个交点.
  这个交点就是我们要求的灭绝概率 $\tau\in(0,1)$



(b)

(苏中根 例 5.7-续例 5.3, 5.5)
设 $0 < p < 1$，随机变量 $\xi \sim \mathrm{Geo}(p) - 1$，即 $\mathrm{P}\{\xi = k\} = p(1-p)^k \ \ (k \geq 0)$
我们知道 $\mu = \frac{1}{p} - 1$
根据**定理 5.3.1** 可以知道:

- 当 $0 < \mu \leq 1$，即 $\frac{1}{2} \leq p < 1$ 时，灭绝概率 $\tau = 1$
- 当 $\mu > 1$，即 $0 < p < \frac{1}{2}$ 时，灭绝概率 $\tau \in (0,1)$ 且是方程 $\tau = G(\tau)$ 的最小正解.
  根据**苏中根 例 5.3** 可知 ξ 的生成函数为 $G(z) = \mathrm{E}[z^\xi] = \frac{p}{1-z(1-p)}$
  求解方程 $\tau = G(\tau) = \frac{p}{1-\tau(1-p)}$ 解得 $\tau = \frac{p}{1-p} \in (0,1)$ 或 $\tau = 1$ (平凡解)
  因此灭绝概率为 $\tau = \frac{p}{1-p} \in (0,1)$