Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского
Радиофизический факультет

Отчет по лабораторной работе

Оптимальные фильтры

Выполнили студенты 431 и 432 групп

Мищенко Евгения, Смирнов Дмитрий,
Балашов Артём, Травин Роман, Владислав Черняев

Введение

Цель работы: изучение построения и свойств оптимальных фильтров на примерах фильтров для видеоимпульсных и радиоимпульсных сигналов прямоугольной формы и радиоимпульса с линейным законом изменения частоты.

Оборудование: компьютер с установленной программой LabView 2011

Теоретическая часть

Общие сведения

Для задачи обнаружения сигналов на фоне шумов наибольшее распространение получил так называемый оптимальный фильтр, который максимизирует отношение сигнал-шум. Требования к такому фильтру можно сформулировать следующим образом. На вход фильтра подаётся сумма сигнала и шума. Сигнал является полностью известным (заданы его форма и положение на оси времени). Шум представляет собой случайный процесс с заданными статистическими характеристиками. Требуется синтезировать фильтр, обеспечивающий получение на выходе наибольшего возможного отношения пикового значения сигнала к среднеквадратичному значению шума. При этом не ставится условие сохранения формы сигнала, так как для обнаружения его в шумах форма не имеет значения.

Передаточная функция оптимального фильтра

Под синтезом оптимального фильтра будем подразумевать отыскание передаточной функции физически осуществимого фильтра, обеспечивающего максимизацию отношения сигнал-шум.

Передаточную функцию будем представлять в форме

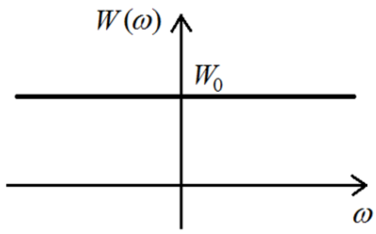
$$\overline{\mathbf{K}}(i\omega) = K(\omega)e^{i\varphi_k(\omega)} \quad (1)$$

Таким образом, задана сводится к отысканию АЧХ $K(\omega)$ и ФЧХ $\varphi_k(\omega)$ оптимального фильтра.

Наиболее просто эта задача решается для сигнала, действующего на фоне белого шума с равномерным спектром

$$W(\omega)=W_0=const \quad (2)$$

Рис. 1. Энергетический спектр белого шума



где W_0 – уровень двухсторонней спектральной плотности мощности (энергетического спектра) белого шума (рис. 1).

Для отыскания оптимальной передаточной функции $\overline{\mathbf{K}}(i\omega)$составим выражение для сигнала и шума на выходе фильтра сначала порознь, а затем в виде их отношения.

Допустим, что пик сигнала получается на выходе фильтра в какой-то (пока неизвестный) момент времени $t = t_0$. Выходной сигнал запишется так:

$$s_{\text{вых}}\left(t_0\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\mathbf{S}}(\omega)\overline{\mathbf{K}}(i\omega)\,e^{i\omega t_0}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)\,K\,(\omega)\,e^{i\left[\theta_S(\omega)+\phi_k(\omega)+\omega t_0\right]}, \quad (3)$$

а среднеквадратическое значение шума выражением

$$\sigma_{вых} = \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) K^2(\omega) d\omega\right]^{1/2} = \left[\frac{W_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) d\omega\right]^{1/2}. \qquad (4)$$

В выражении (3) $\bar{\mathbf{S}}(\omega) = S(\omega)e^{i\theta_S(\omega)}$ - спектральная плотность заданного входного сигнала $s(t)$, а под t_0 подразумевается момент времени, соответствующий максимуму (пику) сигнала на выходе фильтра. Для образования пика требуется использование всей энергии сигнала, а это возможно не ранее окончания действия входного сигнала, поэтому t_0 не может быть меньше значения момента времени окончания сигнала.

Используя (3) и (4) составим отношение сигнал-шум:

$$\frac{s_{вых}(t_0)}{\sigma_{вых}} = \frac{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)K(\omega)\; e^{i[\theta_S(\omega)+\phi_k(\omega)+\omega t_0]} d\omega\right|}{\left(\frac{W_0}{2\pi}\right)^{1/2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) d\omega\right]^{1/2}}. \qquad (5)$$

Оптимальный коэффициент передачи фильтра должен максимизировать это выражение и может быть найден на основе неравенства Коши-Шварца для определенных интегралов:

$$\left|\int_a^b f(x)\cdot\phi^*(x)dx\right| \le \left[\int_a^b \left|f(x)^2\right| dx \cdot \int_a^b \left|\phi(x)^2\right| dx\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (6)$$

где *f(x)* и *φ(x)* - функции комплексной переменной. Знак равенства имеет место в том случае, если функции f(x) и *φ(x)* равны или, в общем случае, связаны соотношением

$$f(x) = A\,\varphi^*(x), \quad (7)$$

где *A* – произвольный постоянный коэффициент, * знак комплексного сопряжения.

На основе неравенства Коши-Шварца (6) выражение (5) запишется в следующем виде:

$$\frac{s_{вых}(t_0)}{\sigma_{вых}} \le \frac{\left[\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega) d\omega \cdot \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) d\omega\right]^{1/2}}{\left(\frac{W_0}{2\pi}\right)^{1/2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) d\omega\right]^{1/2}} = \frac{1}{W_0^{1/2}}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S^2(\omega)\; d\omega\right]^{1/2}. \qquad (8)$$

Учитывая, что выражение в квадратных скобках правой части этого равенства есть не что иное, как полная энергия *E* входного сигнала *s(t),* приходим к следующему результату:

$$s_{вых}(t_0)/\sigma_{вых} \le \sqrt{E/W_0}. \qquad (9)$$

Из выражения (6) это неравенство обращается в равенство при выполнении условия $K(\omega)e^{i[\phi_k(\omega)+\omega_0 t]} = A\bar{\mathbf{S}}^*(\omega) = AS(\omega)e^{-i\theta_s(\omega)}$ или, что тоже,

$$\bar{\mathbf{K}}(i\omega) = K(\omega)e^{i\phi_k(\omega)} = A\bar{\mathbf{S}}^*(\omega)e^{-i\omega t_0} = AS(\omega)e^{-i[\theta_s(\omega)+\omega t_0]}. \quad (10)$$

Полученное соотношение полностью определяет передаточную функцию фильтра, максимизирующего отношение сигнал-шум на выходе (при входной помехе типа белого шума).

Функция $\overline{\mathbf{K}}(i\omega)$, отвечающая условию (10), согласована со спектральными характеристиками сигнала – амплитудой и фазой. В связи с этим рассматриваемый оптимальный фильтр часто называют *согласованным* фильтром.

Итак, отношение пика сигнала к среднеквадтическому значению шума на выходе согласованного фильтра определяется равенством

$$s_{вых}(t_0)/\sigma_{вых} = \sqrt{E/W_0} \qquad (11)$$

Таким образом, отношение сигнал-шум на выходе ОФ не зависит от формы сигнала и определяется лишь отношением его энергии к спектральной плотности мощности белого шума.

Из соотношения (10) вытекают следующие два требования к согласованному фильтру:

1) ФЧХ фильтра должна отвечать условию

$$\varphi_k(\omega) = -[\theta_s(\omega) + \omega t_0] \qquad (12)$$

2) АЧХ должна отвечать условию

$$K(\omega) = AS(\omega) \qquad (13)$$

Физический смысл соотношения (12) состоит в том, что начальные фазы спектральных составляющих на выходе согласованного фильтра должны быть скомпенсированы таким образом, чтобы в момент времени t_0 все они имели одинаковую фазу. Это достигается фазовым сдвигом в фильтре $-\theta_s(\omega)$, равным по величине и обратным по знаку начальной фазе соответствующей составляющей спектра $S(\omega)$ входного сигнала. В результате прохождения сигнала через фильтр с фазовой характеристикой $\varphi_k(\omega)$сложение всех компонентов спектра, скорректированных по фазе, образует пик выходного сигнала. Слагаемое фазовой характеристики $\varphi_k(\omega)$, равное $-\omega t_0$, указывает на то, что пик задержан относительно начала сигнала *s(t)* на время t_0. Иначе говоря, элементарные спектральные составляющие при условии (12) складываются когерентно и в момент времени $t=t_0$ образуют "всплеск" выходного сигнала. Это возможно, если задержка сигнала при прохождении фильтра не меньше, чем полная длительность сигнала.

Связь между фазовым спектром $\vartheta_s(\omega)$ входного сигнала, компенсирующей его характеристикой фильтра $\vartheta_s(\omega)$ и полной ФЧХ фильтра $\varphi_k(\omega) = -[\theta_s(\omega) + \omega t_0]$ поясняется на рис. 2.

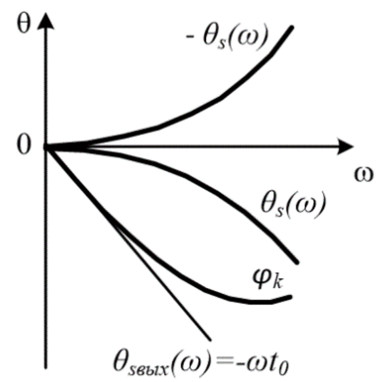


Рис. 2. Соотношение между фазовыми характеристиками спектра сигнала

После прохождения через фильтр спектр выходного сигнала будет иметь фазовую характеристику, показанную прямой линией на том же рисунке:

$$\theta_{sвых}(\omega) = \theta_s(\omega) + \varphi_k(\omega) = \theta_s(\omega) + [-\theta_s(\omega) + \omega t_0] = -\omega t_0. \qquad (14)$$

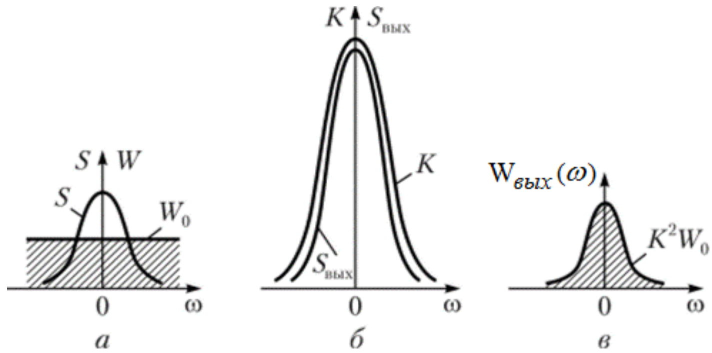


Рис. 3: Оптимальная фильтрация: а — спектры входных сигнала и шума; б — спектр выходного сигнала и АЧХ фильтра; в — спектр выходного

Суть метода обработки принимаемого сигнала оптимальным фильтром приемника поясняет рис. 3, где показаны спектры входных сигнала $S(\omega)$, белого шума W_0 и выходного сигнала $S_{вых}(\omega)$, а также АЧХ фильтра $K(\omega)$ и энергетический спектр выходного шума $W_{вых}(\omega)$.

Соотношение (13) устанавливает, что АЧХ фильтра $K(\omega)$ должна с точностью до масштабного множителя A совпадать по форме с амплитудным спектром $S(\omega)$ входного сигнала. Благодаря этому подавляющая часть спектральных составляющих входного сигнала, имеющих наибольшие амплитуды, проходит на выход оптимального фильтра без ослабления и вносит основной вклад в образование пикового значения. Из множества спектральных компонентов входного белого шума, располагающихся в бесконечной полосе частот, на выход фильтра проходят и не ослабляются те, которые находятся под кривой его АЧХ, т.е. в ограниченной полосе частот. Это приводит к ослаблению средней мощности шума на выходе фильтра по сравнению с его мощностью на входе. В результате этого отношение сигнал-шум на выходе оптимального фильтра увеличивается.

Импульсная характеристика согласованного фильтра

Тот факт, что коэффициент передачи согласованного фильтра $\overline{\mathbf{K}}(i\omega)$ является функцией, сопряженной со спектром сигнала $\overline{\mathbf{S}}(\omega)$, указывает на существование тесной связи также и между временными характеристиками согласованного фильтра.

Другой исчерпывающей характеристикой для линейного фильтра с постоянными во времени параметрами является его импульсная характеристика $h(t)$, которая используется для описания цепи во временной области. Если задан сигнал $s(t)$, то импульсная характеристика согласованного (оптимального) фильтра $h(t)$ определяется как функция

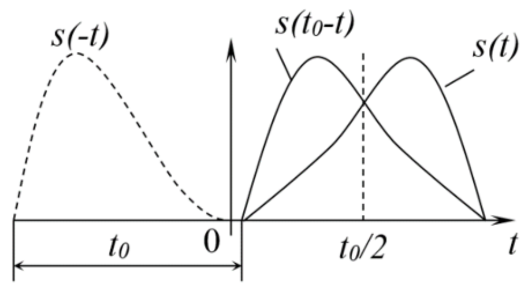


Рис. 4.1. Построение функции, зеркальной по отношению к сигналу

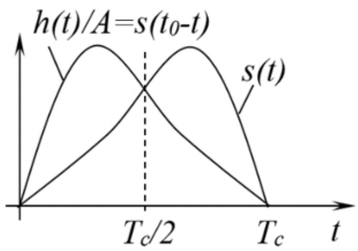


Рис. 4.2. Построение импульсной характеристики согласованного фильтра

$$h(t)=As(t_0t), \qquad (15)$$

где t_0 – время задержки сигнала в фильтре.

Таким образом, импульсная характеристика по своей форме должна совпадать с зеркальным отражением сигнала. Построение графика функции $s(t_0t)$ показано на рис. 4.1.

Кривая $s(-t)$ является зеркальным отражением заданного сигнала $s(t)$ с осью ординат в качестве оси симметрии. Функция же $s(t_0-t)$, сдвинутая относительно $s(-t)$ на время t_0 вправо, также зеркальна по отношению к исходному сигналу $s(t)$, но с осью симметрии, проходящей через точку $t_0/2$ на оси абсцисс.

На рис. 4.2 показано аналогичное построение для случая, когда отсчет времени ведется от начала сигнала.

Поскольку импульсная характеристика фильтра не может начинаться при $t < 0$, задержка t_0 не может быть меньше T_c. Вся энергия сигнала для создания наибольшего пика в точке $t = t_0$ может быть использована только при $t_0 \geq T_c$. Это накладывает на сигнал $s(t)$ требование, чтобы длительность его T_c была конечна. Поэтому использование согласованной фильтрации для увеличения отношения сигнал-шум возможно при импульсном сигнале или при ограниченной по длительности пачке импульсов.

Сигнал и помеха на выходе согласованного фильтра

В [1] показано, что сигнал на выходе согласованного фильтра $s_{вых}(t)$, а также корреляционная функция шума на выходе согласованного фильтра $R_{вых}(\tau)$ с точностью до постоянных множителей совпадают с корреляционной функцией входного сигнала $B_s(\tau)$:

$$s_{вых}(t) = AB_s(t - t_0), \qquad (16)$$

$$R_{вых}(\tau) = A^2 W_0 B_s(\tau). \qquad (17)$$

При $t = t_0$ величина $B_s(0)$ равна энергии сигнала, поэтому пиковое значение выходного сигнала равно

$$s_{вых}(t_0) = AB_s(0) = AE, \qquad (18)$$

а дисперсия (средняя мощность) шума на выходе

$$\sigma^2_{вых} = R_{вых}(0) = A^2 W_0 B_s(0) = A^2 W_0 E. \qquad (19)$$

Используя (18-19), получим выражение для отношения сигнал-шум на выходе согласованного фильтра в момент времени t_0, определённое выше формулой (11).

Коэффициент А, фигурирующий во многих предыдущих выражениях, удобно нормировать так, чтобы энергии входного и выходного сигналов были одинаковы, исключая тем самым из анализа усиление сигнала по энергии.

Энергия входного сигнала $E = B_s(0)$, а выходного –

$$E_{вых} = \int_{-\infty}^{\infty} s^2_{вых}(t)dt = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} B_s^2(\tau)d\tau. \qquad (20)$$

Приравнивая $E_{вых}$ величине E, получим условие нормирования коэффициента А:

$$A = \sqrt{B_s(0) \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} B_s^2(\tau)d\tau}. \qquad (21)$$

Примеры построения согласованных фильтров

Оптимальные фильтры для видеосигнала

Структура оптимального фильтра обычно находится либо спектральным способом – по соотношению (10), либо временным ⍰ по соотношению (15). В частности, для прямоугольного видеоимпульса длительностью 2τ (рис. 5а) структура оптимального фильтра, представленная на рис. 5б, может быть достаточно легко найдена из анализа передаточной функции фильтра, получаемой из спектральной плотности входного сигнала [1]:

$$\overline{\mathbf{K}}(i\omega) = QA\frac{1-e^{-i\omega 2\tau}}{i\omega}. \qquad (22)$$

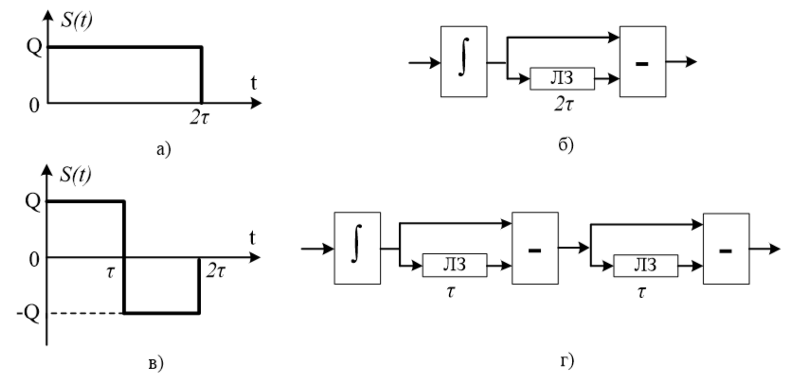


Рис. 5. Сигналы и структурные схемы оптимальных фильтров прямоугольных импульсов

Множитель $1/i\omega$ в (22) реализуется интегратором, множитель $1-e^{-i\omega 2\tau}$ соответствует устройству вычитания прямого и задержанного сигналов, а $e^{-i\omega 2\tau}$ ⍰ передаточная функция линии задержки.

Для видеосигнала, состоящего из двух разнополярных прямоугольных импульсов длительностью τ (рис. 5в), оптимальный фильтр имеет структуру, представленную на рис. 5г.

Структуры оптимальных фильтров, представленные на рис. 5, имеют смысл, прежде всего, для их реализации в виде аналоговых цепей. Если же фильтр реализовывать с помощью цифрового вычислительного устройства (при этом вначале потребуется оцифровать сигнал), то процедура оптимальной фильтрации может быть реализована в виде вычисления цифровой свёртки входного сигнала с импульсной характеристикой фильтра, которая заранее заносится в память цифрового вычислительного устройства:

$$s_{вых}(n) = \sum_{m=0}^{n} h(m)s(n-m), \qquad (23)$$

где *s(п)* и *h(п)* имеют длины по N_1 и N_2 отсчетов, т. е. *s(п)* отлична от нуля при $0 \le n \le N_1-1$, а *h(п)* ⍰ при $0 \le n \le N_2-1$.

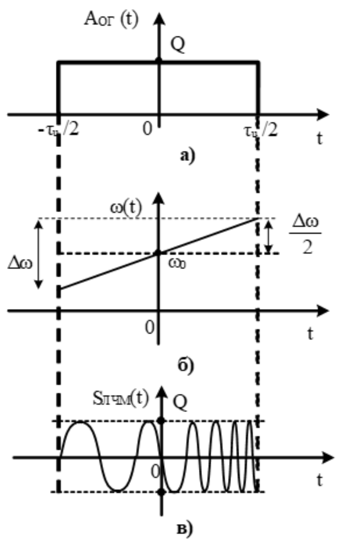


Рис. 6. Принцип формирования ЛЧМ радиосигнала: а) огибающая сигнала; б) закон изменения частоты; в) ЛЧМ радиоимпульс

Оптимальный фильтр для ЛЧМ радиоимпульса

На рис. 6 показан принцип формирования линейно-частотно-модулированного (ЛЧМ) радиоимпульса.

Огибающая такого импульса $A_{ОГ}(t)$ – одиночный прямоугольный видеоимпульс, а частота заполнения (мгновенная частота) возрастет или убывает по линейному закону от начала до конца импульса:

$$\omega(t) = \omega_0 + \beta t, \text{ при } |t| \le \tau_u/2, \qquad (24)$$

где $\beta = \frac{\Delta\omega}{\tau_u}$ – параметр, задающий скорость изменения частоты; ω_0 – средняя частота, $\Delta\omega$ – девиация частоты, τ_u – длительность импульса.

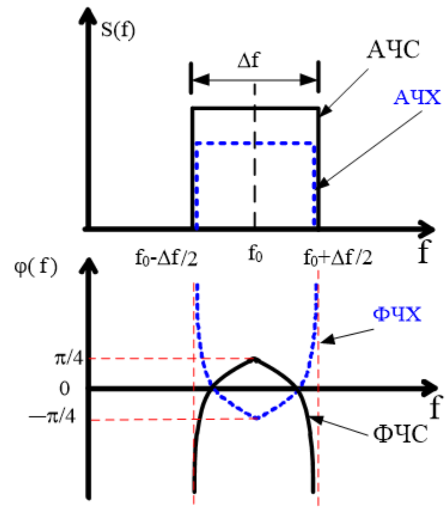


Рис. 8. Аппроксимация амплитудно-частотного и фазо-частотного спектров (АЧС и ФЧС) сигнала и АЧХ и ФЧХ согласованного фильтра

Колебание, представленное на рис. 6, можно записать в виде

$$s_{ЛЧМ}(t) = A(t)\cos\left(\theta(t)\right) = \begin{cases} Q \cdot \cos\left(\omega_0 t + \frac{\beta t^2}{2}\right), & -\frac{\tau_u}{2} \le t \le \frac{\tau_u}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau_u}{2} \end{cases}. \qquad (25)$$

Если параметры сигнала (25) подобрать так, чтобы удовлетворить соотношению $D = \Delta f \tau_u = \tau_u \Delta\omega / 2\pi \gg 1$, то такой ЛЧМ радиоимпульс будет относиться к числу *сложных* сигналов. Параметр *D* часто называют *базой* ЛЧМ сигнала.

Амплитудный (амплитудно-частотный) и фазовый (фазо-частотный) спектры ЛЧМ радиосигнала являются достаточно сложными [1], пример амплитудного спектра для импульса с *D* = 60 показан на рис. 7. Сложность формы спектральных характеристик ЛЧМ импульса не позволяет добиться точной аналоговой реализации согласованного с ним фильтра, поэтому на практике часто прибегают к аппроксимации амплитудного спектра прямоугольной формой, а фазового – квадратичной параболой (рис. 8):

$$S(\omega) = Q \cdot \left(\frac{\omega - \omega_0}{\beta}\right) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2\beta}}\,, \qquad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{4} - \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\beta}. \qquad (26)$$

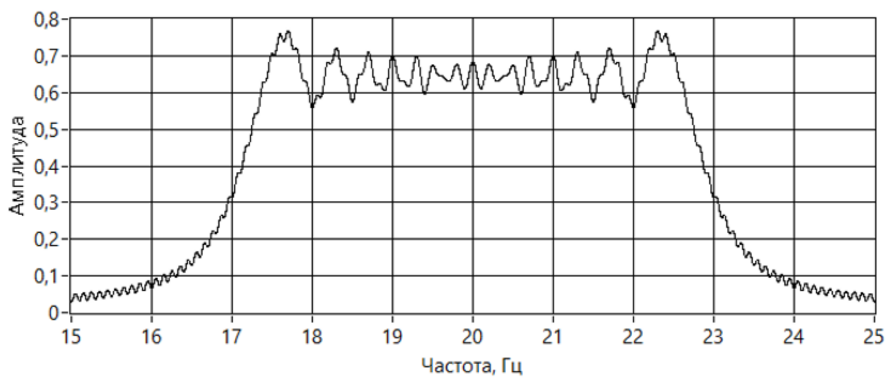


Рис. 7. Пример амплитудного спектра ЛЧМ радиоимпульса с центральной частотой 20 Гц, длительностью 10 сек. и *D*=60

Поскольку строго прямоугольная форма АЧХ также нереализуема, то используют АЧХ реализуемого полосового фильтра. Таким образом, согласованный фильтр в аналоговом виде реализуется в виде сочетания двух линейных четырёхполюсников: полосно-пропускающего фильтра и специального четырёхполюсника с равномерной АЧХ и квадратичной ФЧХ, противоположной по знаку аппроксимации фазо-частотного спектра сигнала.

Квадратичную форму ФЧХ можно получить с помощью дисперсионных ультразвуковых линий задержки, использующих эффект дисперсии упругих ультразвуковых волн в твердых телах (зависимость скорости распространения волн от частоты).

В цифровом виде согласованный с ЛЧМ импульсом фильтр легко реализовать более точно, без указанных выше аппроксимаций, вычисляя цифровую свёртку (23), в которой импульсная характеристика *h*(*n*) берётся в соответствии с (15).

Мгновенное выходное напряжение (выходной сигнал) оптимального фильтра при действии на его входе сигнала (17) можно приближённо представить в следующем виде (при условии равенства энергий входного и выходного сигналов):

$$s_{\text{вых}}(t) = Q\sqrt{D} \cdot \frac{Sin\,\pi\Delta f(t-\tau_{\text{и}})}{\pi\Delta f(t-\tau_{\text{и}})} cos\omega_0(t-\tau_{\text{и}})\,, \qquad (27)$$

где $D=\tau_u/\tau_1=\Delta f\tau_u$ – коэффициент сжатия сигнала в фильтре по длительности, а $\tau_1=1/\Delta f$ – длительность отклика фильтра на уровне $2/\pi$ = 0.637, как представлено на рис. 9.

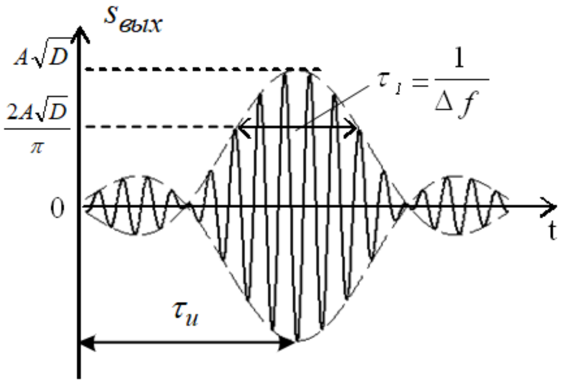
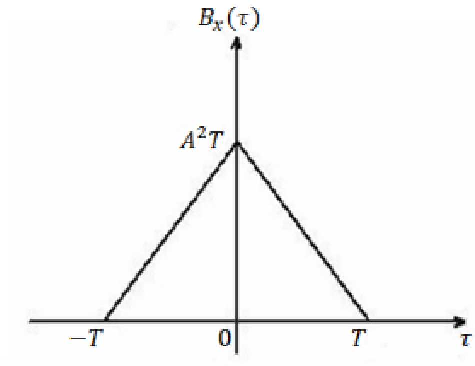


Рис. 9. Выходной сигнал оптимального фильтра, согласованного с ЛЧМ сигналом

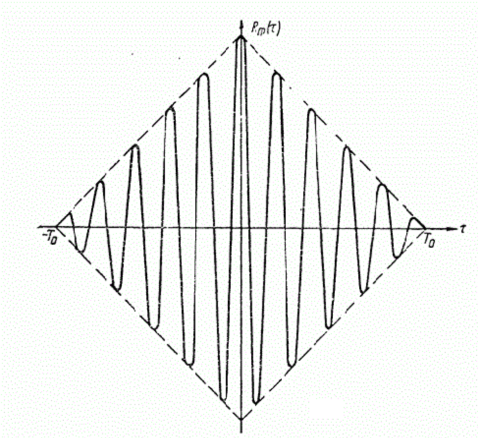
Из (27) и рис. 9 видно, что компенсация фаз спектра сигнала при согласованной фильтрации в рассматриваемом случае приводит к сокращению длительности импульса в D раз при одновременном увеличении амплитуды сигнала в $\sqrt{D}$ раз. Это обстоятельство является весьма ценным в радиолокации, так как позволяет удлинять импульс, излучаемый передатчиком, и увеличивать его энергию без потери разрешающей способности, которая определяется длительностью импульса на выходе согласованного фильтра. Это преимущество особенно сильно проявляется в тех случаях, когда увеличение амплитуды импульсов в передатчике ограничивается импульсной мощностью приборов, используемых в генераторе колебаний. Технически значительно проще повышать энергию сигнала путем удлинения импульсов при одновременном наложении частотной модуляции, чем увеличением амплитуды импульсов. Практические значения величины D обычно лежат в диапазоне $10^3...10^4$.

Практическая часть

1. Построили корреляционные функции прямоугольного импульса (рис. 1а) и прямоугольного радиоимпульса



Корреляционная функция прямоугольного импульса



Корреляционная функция прямоугольного радиоимпульса.

2. Мы настроили виртуальную установку в соответствии с указанными значениями параметров и выбрали «Вид импульса» значение «прямоугольный импульс».

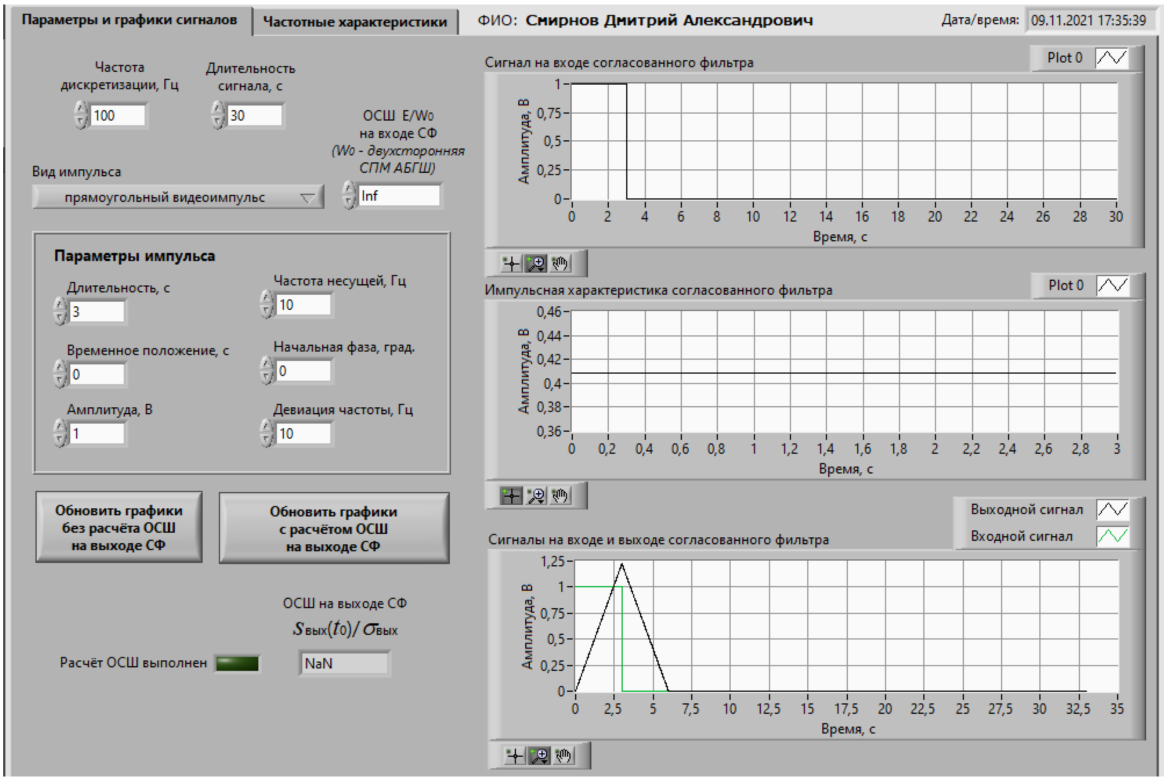
Выполнили согласованную фильтрацию, изучили построенные графики и из них нашли значения, которые занесли в таблицу.

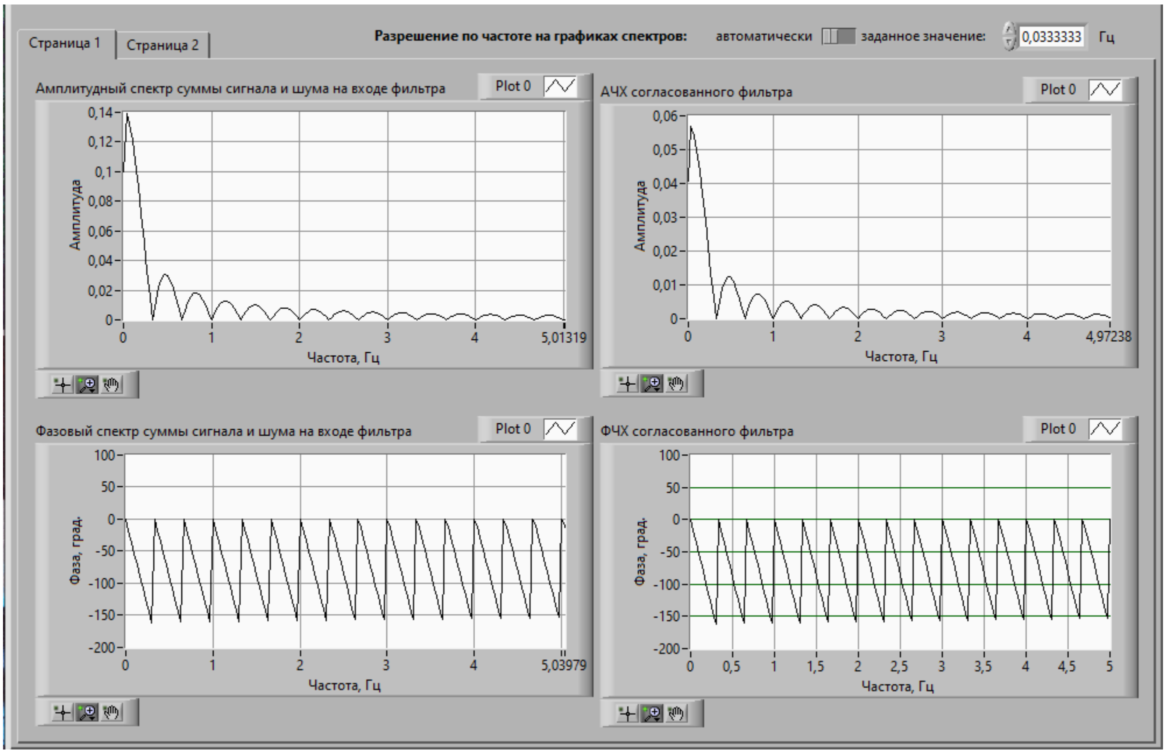
Затем, установили значение отношения сигнал-шум E/W0 на входе фильтра равным 1000, запустили согласованную фильтрацию зашумлённого сигнала и изучили построенные графики, а также записали значение отношения сигнал-шум на выходе согласованного фильтра.

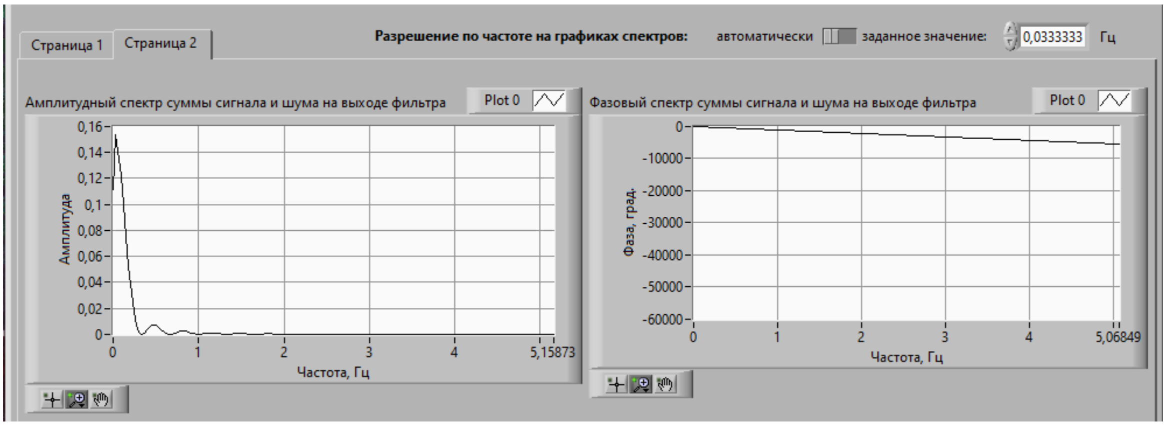
То же самое проделали с прямоугольным радиоимпульсом и ЛЧМ импульсом.

Вид импульса	**Отношение пикового значения выходного импульса к амплитуде входного $s_{вых}(t_0)/Q$**	**Коэффициент сжатия сигнала в фильтре по длительности $\tau_и/\tau_1$**	**Значение отношения сигнал-шум на входе согласованного фильтра E/W_0**	**Значение отношения сигнал-шум на выходе согласованного фильтра $s_{вых}(t_0)/\sigma_{вых}$**	**Ширина спектра сигнала Δf, Гц**	**База сигнала $D = \Delta f \tau_и$**
прямоугольный видеоимпульс	1.25	1.43	1000	32.9118	0.33	1
прямоугольный радиоимпульс	1.225	1.5	1000	32.6629	0.66	2
ЛЧМ импульс	5.48	100	1000	30.7458	10	30

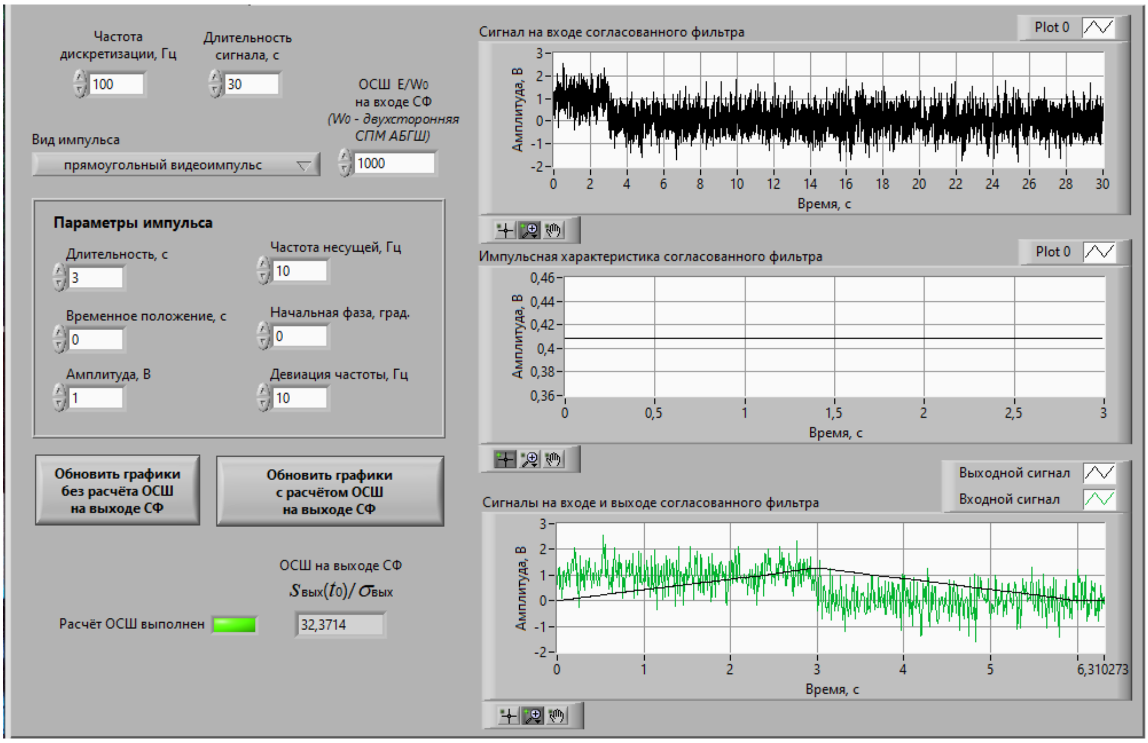
Прямоугольный видеоимпульс без расчета ОСШ

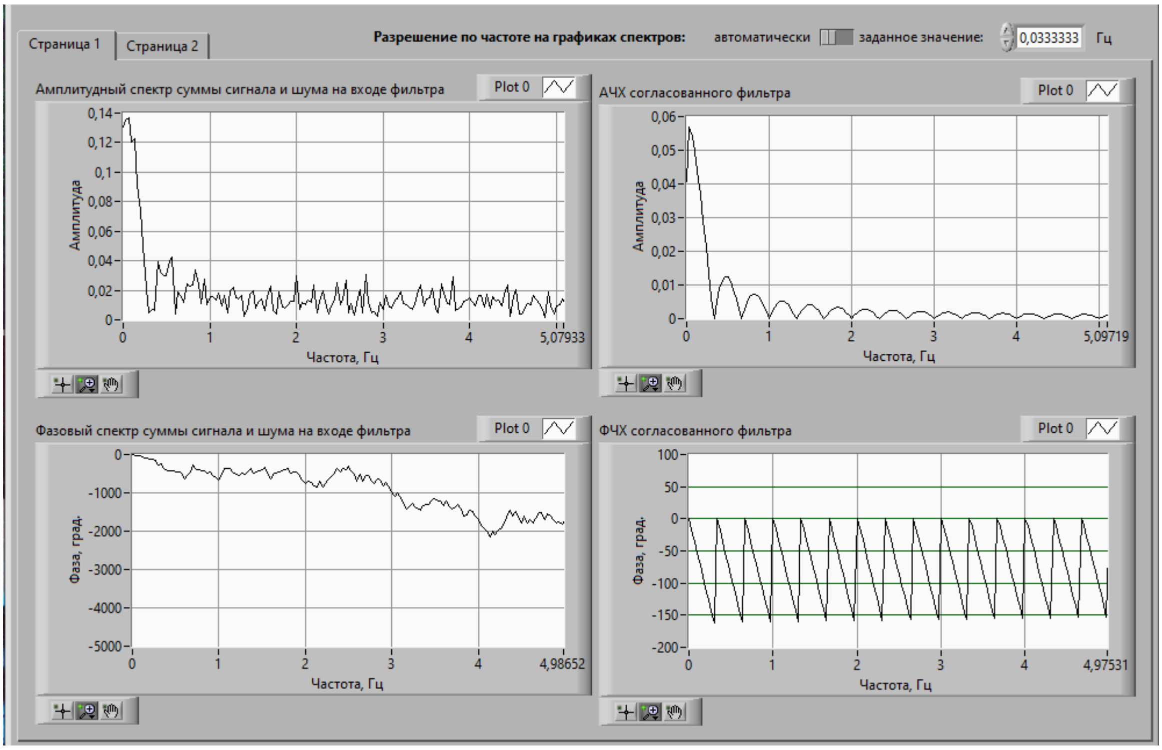


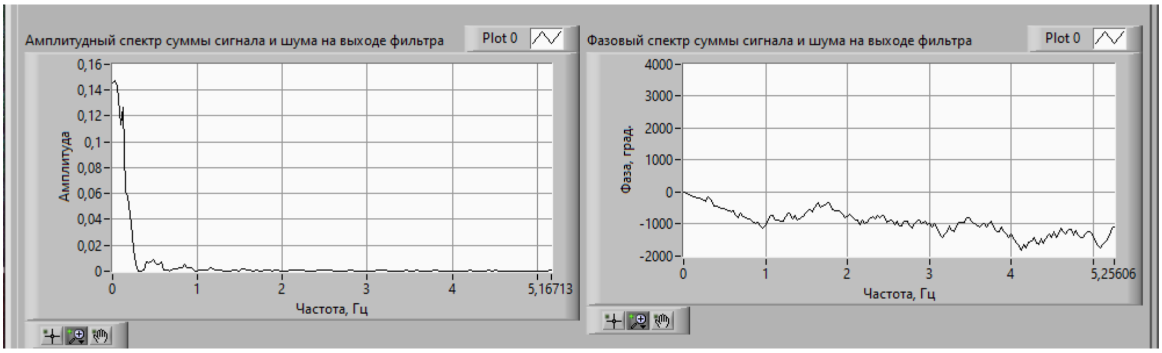




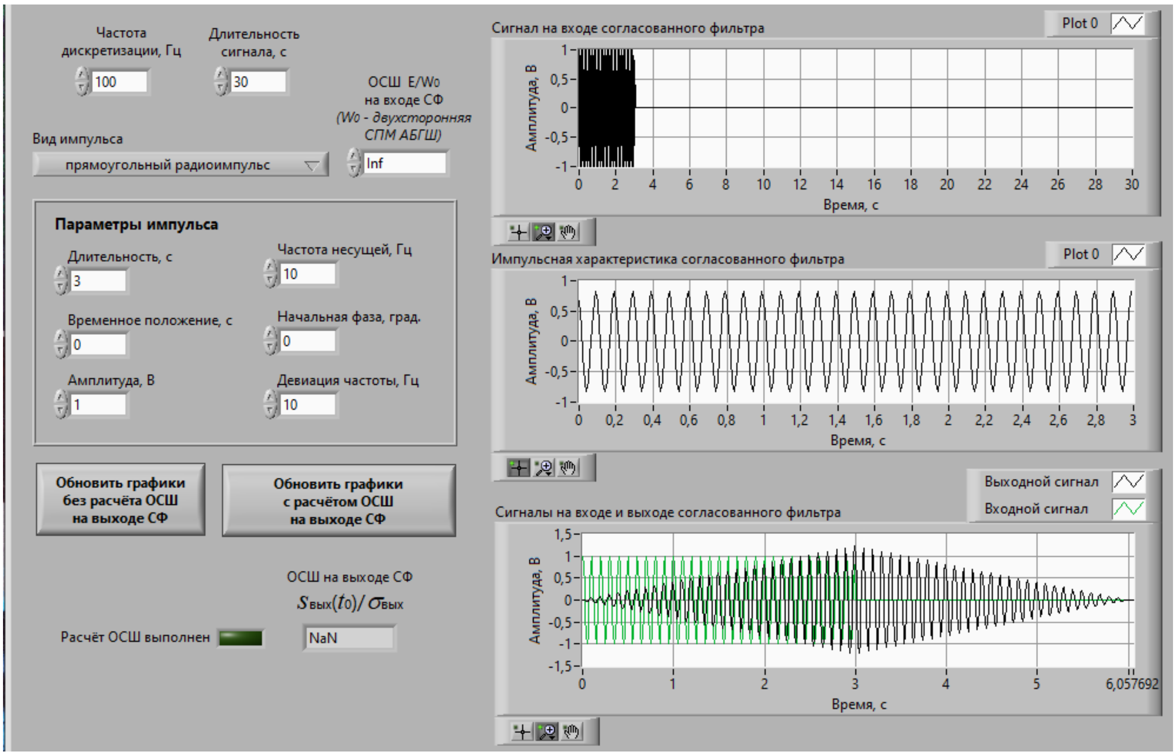
Прямоугольный видеоимпульс с расчетом ОСШ

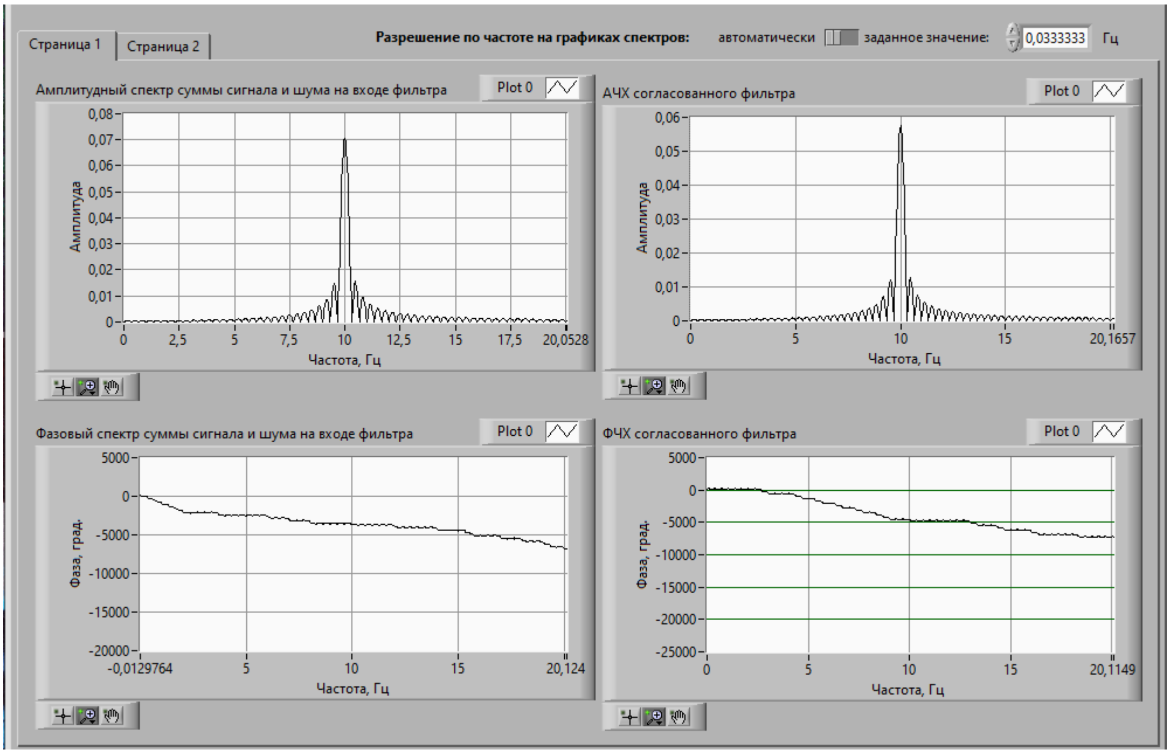


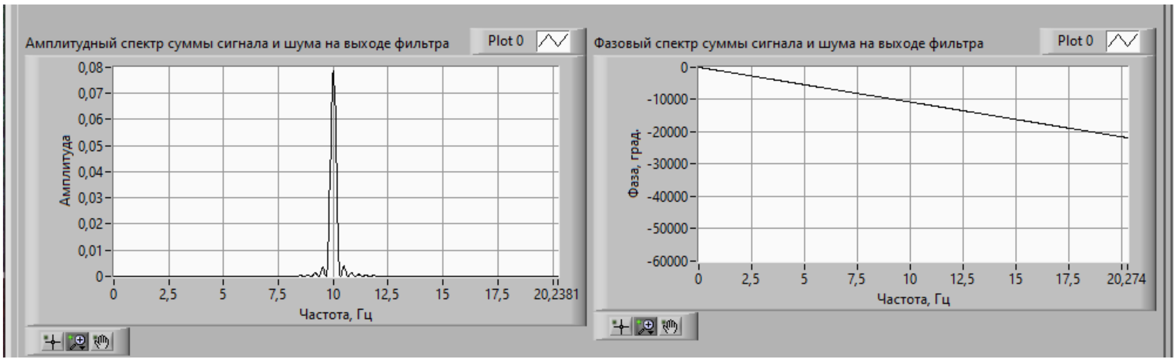




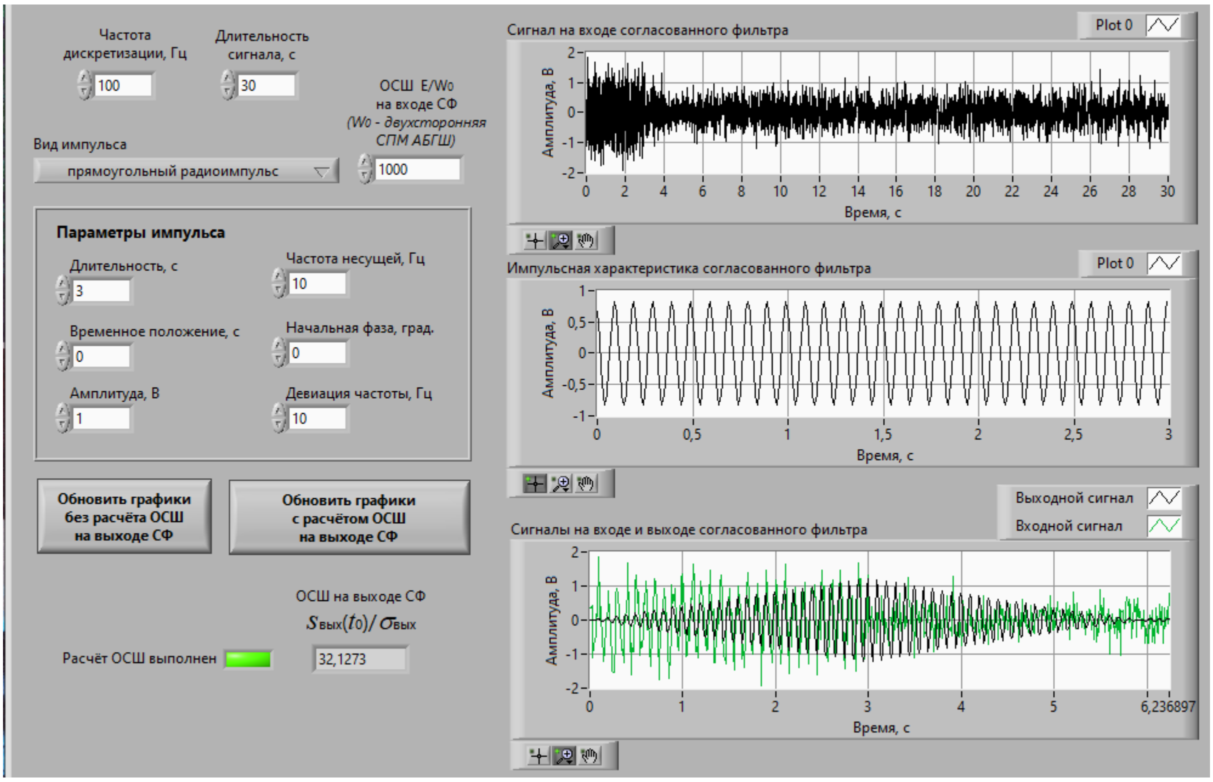
Прямоугольный радиоимпульс без расчета ОСШ

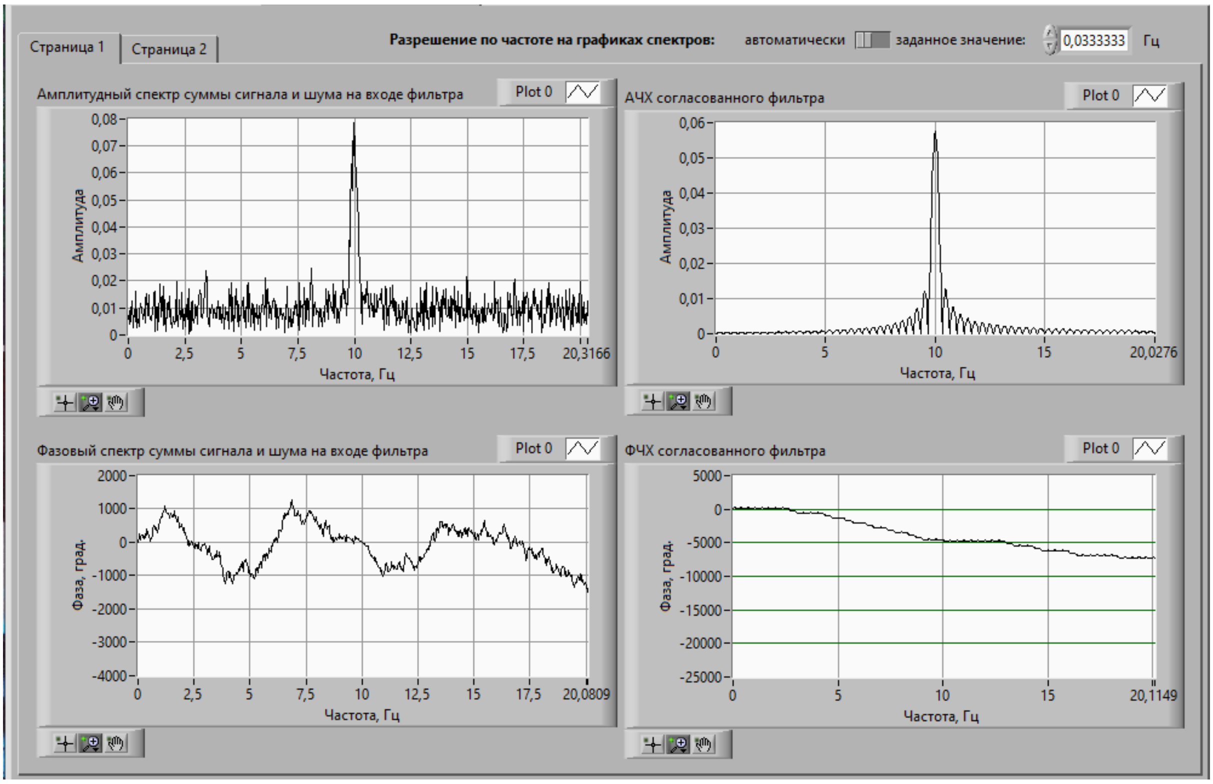


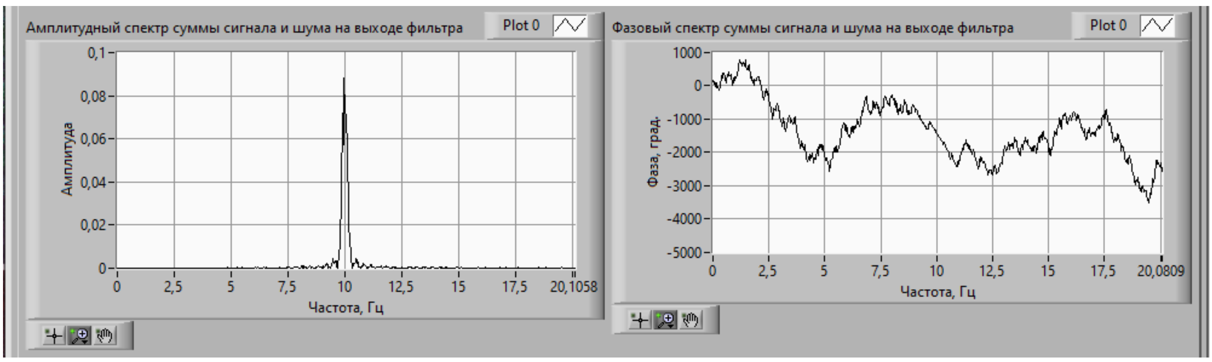




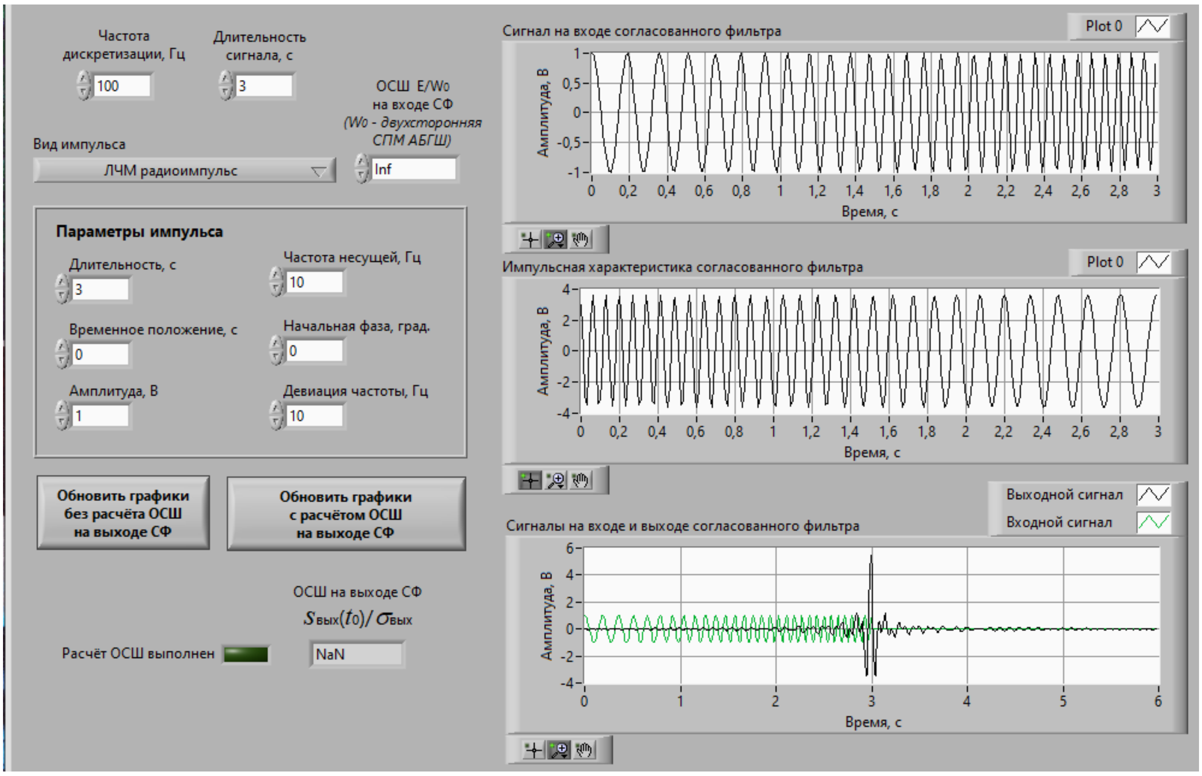
Прямоугольный радиоимпульс с расчетом ОСШ

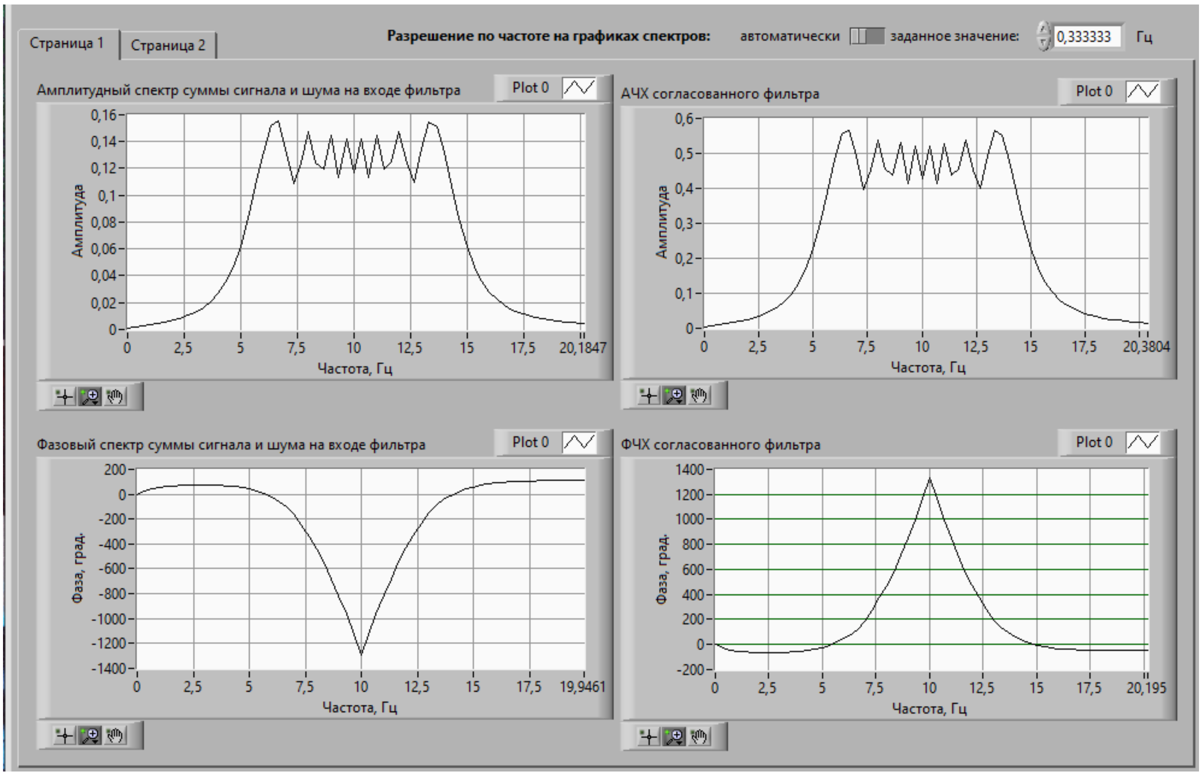


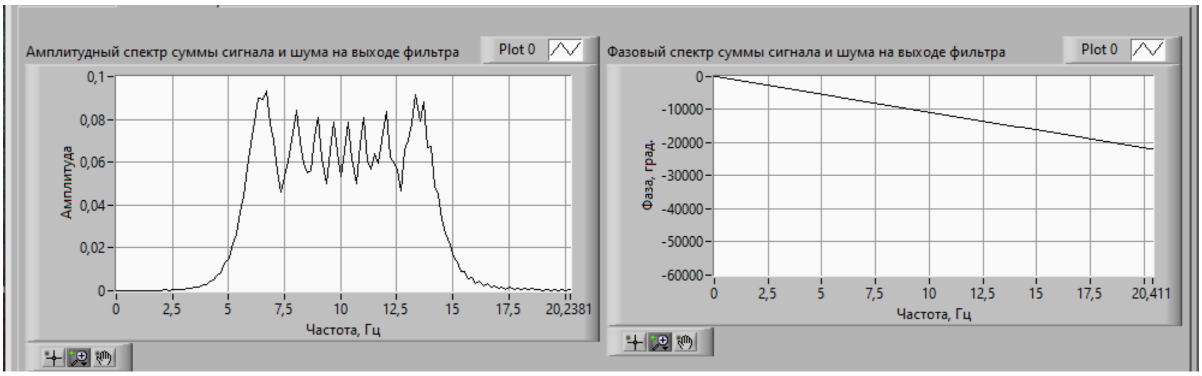




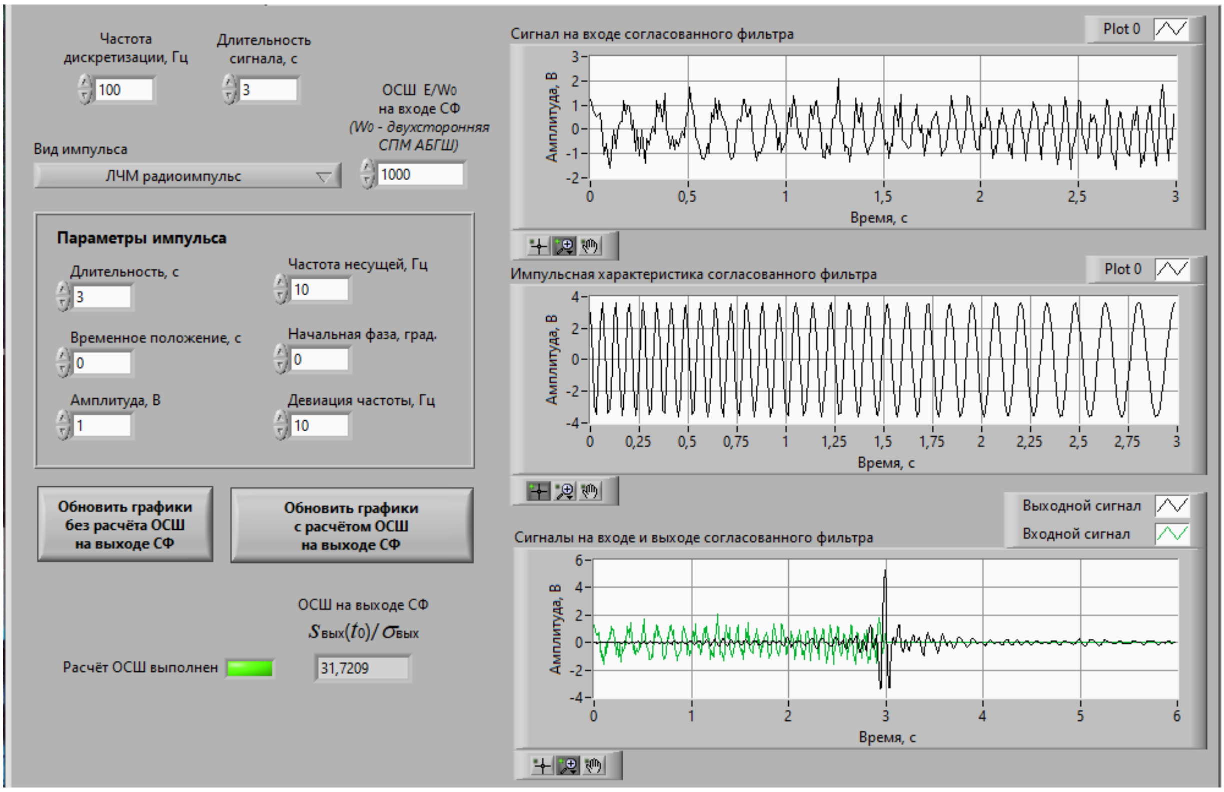
ЛЧМ без расчета ОСШ

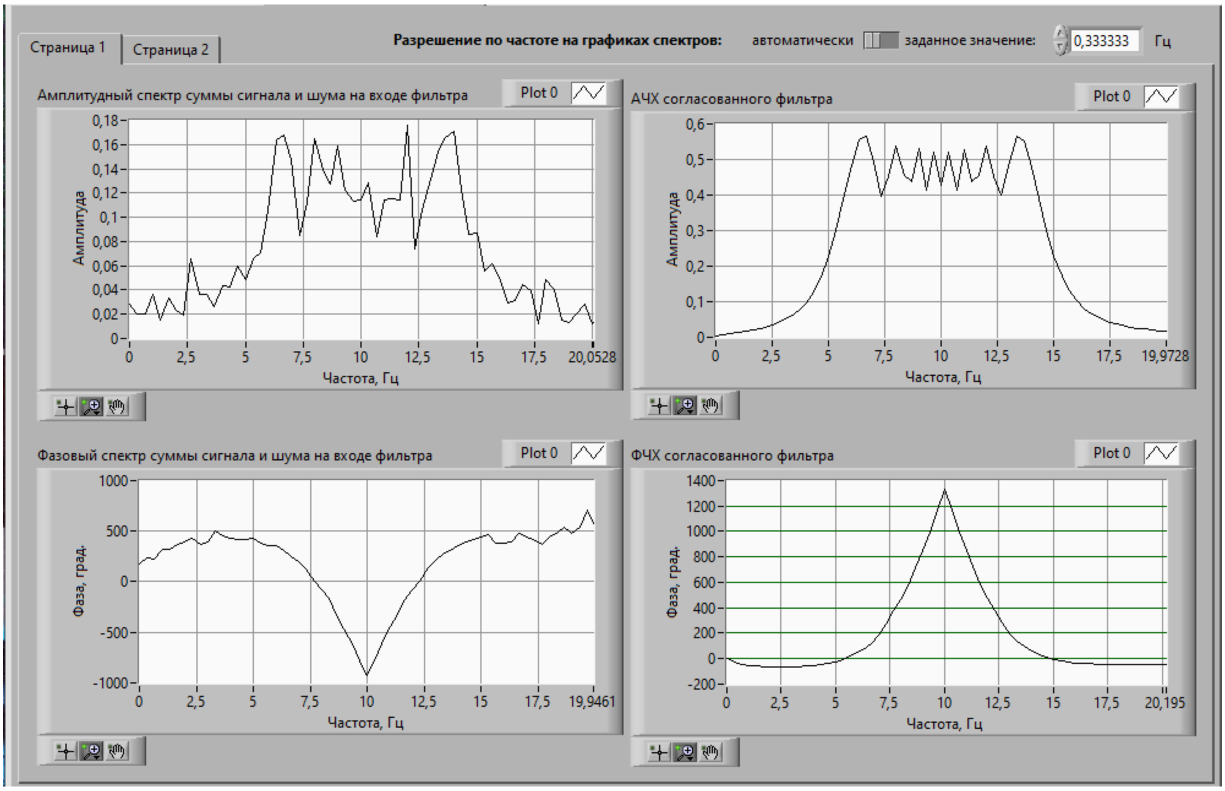


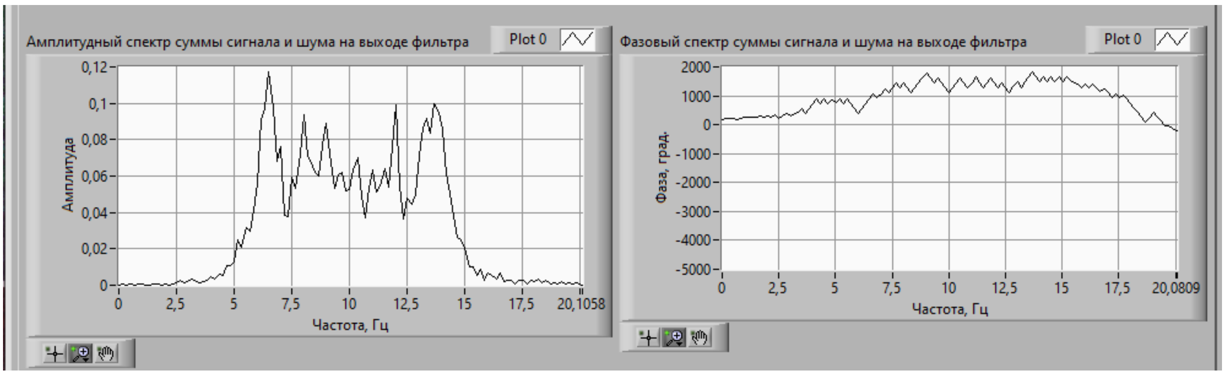




ЛЧМ с расчетом ОСШ







Вывод

Мы изучили построения и свойств оптимальных фильтров на примерах фильтров для видеоимпульсных и радиоимпульсных сигналов прямоугольной формы и радиоимпульса с линейным законом изменения частоты, увидели, что теоретические графики корреляционных функций совпадают с практическими, полученными в процессе лабораторной работы