Centro de Massa e Momento Linear

1 Centro de Massa

O **centro de massa (CM)** é o ponto que representa a posição média da massa de um sistema. O movimento de um sistema pode ser descrito como se toda a sua massa estivesse concentrada nesse ponto (Física 12.o Ano - F1.2. ⋆ EstudaFQ, 2026).

1.1 Sistema de partículas

Para um sistema constituído por partículas de massas m_i, localizadas nas posições $\vec{r}_i$, o centro de massa é dado por:

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{1}$$

Cálculo por Coordenadas Cartesianas O cálculo pode ser realizado de forma independente para cada um dos eixos (x, y e z) utilizando as coordenadas cartesianas das partículas:

- Coordenada x: $x_{\mathrm{CM}} = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n}$
- Coordenada y: $y_{\mathrm{CM}} = \dfrac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \cdots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n}$
- Coordenada z: $z_{\mathrm{CM}} = \dfrac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + m_3 z_3 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n}$

O **vector posição final** é a combinação destas coordenadas:

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = x_{\mathrm{CM}} \vec{e}_x + y_{\mathrm{CM}} \vec{e}_y + z_{\mathrm{CM}} \vec{e}_z \tag{2}$$

Casos Particulares e Propriedades A localização do centro de massa depende da distribuição de massa no sistema:

- Se o sistema tiver apenas duas partículas com massas iguais ($m_1 = m_2$), o centro de massa encontra-se equidistante de ambas.
- Se as massas forem diferentes, o centro de massa estará mais próximo da partícula de maior massa.

- Em corpos rígidos ou sistemas complexos, o centro de massa pode inclusive encontrar-se num ponto fora do corpo físico (como num objeto em forma de anel).

- Para objetos com densidade constante e formas geométricas regulares, a posição pode ser determinada por razões de simetria. No caso de corpos sólidos contínuos, o cálculo envolve integração: $r_{\text{CM}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \int r dm$

Grandezas Dinâmicas Associadas Além da posição, é possível calcular a velocidade e a aceleração deste ponto:

- **Velocidade** (v_{CM}): É a média ponderada das velocidades das partículas, dada por $v_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i v_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$;

- **Aceleração** (a_{CM}): É calculada como $a_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$, sendo que apenas as forças exteriores podem alterar esta aceleração, uma vez que a resultante das forças interiores de um sistema é nula.

1.2 Exemplo em uma dimensão (1D)

Considere duas partículas situadas ao longo do eixo x:

- $m_1 = 2\,\text{kg}$ em $x_1 = 1\,\text{m}$

- $m_2 = 4\,\text{kg}$ em $x_2 = 4\,\text{m}$

O centro de massa é:

$$x_{\text{CM}} = \frac{2 \cdot 1 + 4 \cdot 4}{2 + 4} = 3\,\text{m} \tag{3}$$

1.3 Exemplo em duas dimensões (2D)

Três massas iguais colocadas nos vértices de um triângulo equilátero têm o seu centro de massa no **centro geométrico** do triângulo, devido à simetria do sistema.

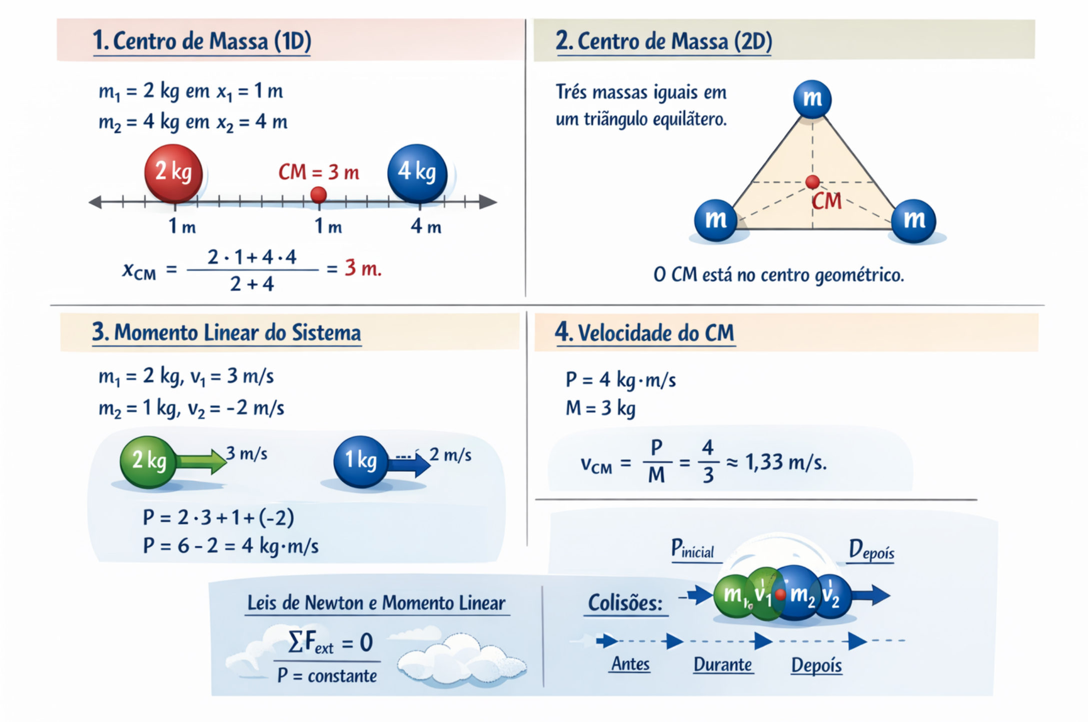

Figura 1: Exemplos ilustrativos de centro de massa, momento linear e colisões.

2 Momento Linear

O **momento linear** (também designado por quantidade de movimento) de uma partícula é definido por:

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{4}$$

Para um sistema de partículas, o momento linear total é:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \tag{5}$$

2.1 Exemplo

Considere:

- $m_1 = 2\,\text{kg}$ com $v_1 = 3\,\text{m/s}$
- $m_2 = 1\,\text{kg}$ com $v_2 = -2\,\text{m/s}$

O momento linear total do sistema é:

$$p = 2 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) = 4\,\text{kg·m/s} \tag{6}$$

3 Relação entre Momento Linear e Centro de Massa

O momento linear total de um sistema pode ser escrito como:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = M \cdot \vec{v}_{\mathrm{CM}} \tag{7}$$

onde M representa a massa total do sistema e $\vec{v}_{\mathrm{CM}}$ a velocidade do centro de massa.

3.1 Velocidade do centro de massa

Usando o exemplo anterior, temos uma velocidade do centro de massa:

$$v_{\mathrm{CM}} = \frac{p}{M} = \frac{4}{3} \approx 1{,}33\,\mathrm{m/s} \tag{8}$$

3.2 Conservação da Velocidade

De acordo com a *Lei da Conservação do Momento Linear*, se a resultante das forças exteriores que atuam sobre o sistema for nula ($\sum \vec{F}_{\mathrm{ext.}} = 0$, o momento linear do sistema permanece constante e, consequentemente, a velocidade do centro de massa permanece constante em módulo, direção e sentido.

4 Leis de Newton e Momento Linear

A segunda lei de Newton, na sua forma geral, pode ser expressa por:

$$\sum \vec{F}_{\mathrm{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{9}$$

Se a resultante das forças externas for nula:

$$\sum \vec{F}_{ext} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{constante} \tag{10}$$

Este resultado traduz a **lei da conservação do momento linear**.

5 Colisões

Durante uma colisão, as forças internas obedecem à terceira lei de Newton (acção e reacção), cancelando-se mutuamente. Assim, na ausência de forças externas significativas, o momento linear total do sistema conserva-se. Assim, a principal diferença entre as colisões elásticas e inelásticas reside na conservação ou não da energia cinética do sistema, embora em ambos os casos o momento linear se conserve

5.1 Colisão perfeitamente inelástica

Após a colisão, os corpos permanecem unidos:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v_f \tag{11}$$

Neste caso, o momento linear conserva-se, mas a energia cinética não.
Assim, nas colisões inelásticas, o comportamento do sistema altera-se:

- Conservação do momento linear: Tal como nas elásticas, o momento linear total do sistema conserva-se ($p_i = p_f$);
- Dissipação de energia: A energia cinética total do sistema não se conserva ($E_c(i) \neq E_C(f)$), havendo geralmente uma perda de energia cinética durante a interação.
- Colisões Perfeitamente Inelásticas: São um caso extremo onde as partículas passam a mover-se juntas após a colisão, partilhando a mesma velocidade final. Nestes casos, o coeficiente de restituição é $e = 0$.

5.2 Colisão elástica

Numa colisão elástica conservam-se:

- o momento linear: O momento linear total antes da colisão é igual ao momento linear total após a colisão ($p_i = p_f$);
- a energia cinética: A energia cinética total do sistema permanece constante ($E_c(f) = E_c(i)$);
- Coeficiente de restituição (e): Apresentam um valor de $e = 1$, o que significa que a velocidade relativa de recessão é igual à velocidade relativa de aproximação;
- Propriedade específica: Numa colisão elástica não frontal entre duas partículas iguais, estando uma em repouso, as partículas são projetadas em direções perpendiculares entre si após o embate.

6 Centro de Massa em Colisões

O movimento do centro de massa é descrito por:

$$M\vec{a}_{CM} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \tag{12}$$

Se a resultante das forças externas for nula, o centro de massa desloca-se com velocidade constante antes, durante e após a colisão.

7 Centro de Massa e explosões

Durante uma explosão, o movimento do centro de massa (CM) de um sistema não é alterado pelas forças internas que provocam a fragmentação. Isto ocorre porque, de acordo com a Segunda Lei de Newton aplicada a sistemas de partículas, apenas as forças exteriores podem alterar a aceleração do centro de massa.
Os principais aspetos do comportamento do centro de massa numa explosão são:

- Conservação do Momento Linear: Numa explosão, as forças de interação entre os fragmentos são forças interiores de elevada intensidade que atuam num intervalo de tempo muito curto. Como a resultante das forças interiores de um sistema é nula, o momento linear total do sistema ($p_{\text{sistema}} = Mv_{CM}$) conserva-se, desde que a resultante das forças exteriores seja nula ou desprezável durante o evento.

- Velocidade do Centro de Massa: Se o momento linear se conserva, a velocidade do centro de massa (v_{CM}) permanece constante em módulo, direção e sentido. O sistema move-se como se toda a sua massa estivesse concentrada no CM e como se todas as forças externas fossem aplicadas nesse ponto.

- Trajetória Inalterada:
  - Em repouso: Se um objeto (como um asteroide) estiver em repouso e explodir, o seu centro de massa permanece parado no mesmo local, enquanto os fragmentos são projetados em direções opostas de forma a que a soma vetorial dos seus momentos lineares continue a ser zero.
  - Em movimento balístico: Se um projétil (como um "foguete") explodir no ar, o seu centro de massa continua a descrever a mesma trajetória balística que seguiria se a explosão não tivesse ocorrido. Os fragmentos espalham-se em torno do CM, mas a posição média ponderada pelas massas desses fragmentos segue o caminho original.

Em suma, embora as partes individuais do sistema mudem radicalmente as suas trajetórias devido às forças internas da explosão, o ponto que representa o centro de massa ignora essas forças internas, respondendo apenas à resultante das forças externas (como a gravidade).

8 Conservação do momento linear em colisões

A conservação do momento linear em colisões fundamenta-se no facto de as interações entre as partículas ocorrerem num intervalo de tempo muito curto, durante o qual as forças de colisão (forças interiores) apresentam intensidades muito elevadas. Nesse período, as forças exteriores que possam atuar sobre o sistema têm uma intensidade desprezável quando comparadas com as forças de colisão, permitindo considerar a resultante das forças exteriores como nula ($\sum F_{\text{ext.}} = 0$).

8.1 O Princípio de Conservação

De acordo com a Lei da Conservação do Momento Linear, se a resultante das forças exteriores for nula, o momento linear total do sistema permanece constante ao longo do tempo. Isto implica que:

- O momento linear total antes da colisão é igual ao momento linear total após a colisão ($p_i = p_f$).
- A velocidade do centro de massa do sistema permanece constante durante todo o processo.

O momento linear de um sistema de partículas é definido como a soma dos momentos lineares de cada partícula constituinte, sendo também igual ao produto da massa total do sistema pela velocidade do seu centro de massa ($p_{\text{sistema}} = Mv_{CM}$).

8.2 Aplicação nos diferentes tipos de colisão

A conservação do momento linear verifica-se em todos os tipos de colisão, independentemente de haver ou não conservação da energia cinética:

- Colisões Elásticas: Verificam-se as conservações do momento linear e da energia cinética total do sistema ($E_{\text{ci}} = E_{\text{cf}}$). Nestes casos, o coeficiente de restituição (e), que mede a elasticidade do choque, é igual a 1.
- Colisões Inelásticas: O momento linear conserva-se, mas a energia cinética total não se conserva ($E_{\text{ci}} \neq E_{\text{cf}}$), ocorrendo dissipação de energia.
- Colisões Perfeitamente Inelásticas: São um caso específico onde as partículas, após colidirem, passam a mover-se juntas com a mesma velocidade final. A expressão matemática para este sistema é $m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2) v_f$, e o coeficiente de restituição é nulo ($e = 0$).

8.3 Fatores influentes

A eficácia da conservação e as forças envolvidas dependem também do tempo de interação (Δt). Numa colisão, a variação do momento linear (Δp) é igual ao impulso da força exercida. Assim, para uma determinada variação de momento linear, quanto menor for o intervalo de tempo da colisão, maior será a força exercida entre as partículas. Por esta razão, em termos experimentais, a utilização de calhas de ar ou de baixo atrito é importante para garantir que as forças exteriores (como o atrito) sejam mínimas e a lei da conservação seja observada com precisão.

9 Resumo

- O centro de massa representa a posição média da massa de um sistema;
- O momento linear total é dado por $\vec{p} = M\vec{v}_{CM}$;
- Na ausência de forças externas, o momento linear conserva-se;
- As colisões não alteram o movimento do centro de massa quando as forças externas são desprezáveis.

Referências

- Física 12.o ano - F1.2. ⋆ EstudaFQ. (2026, January 26). EstudaFQ. `https://estudafq.pt/f12/fisica-12-o-ano-f1-2-centro-de-massa-e-momento-linear/`