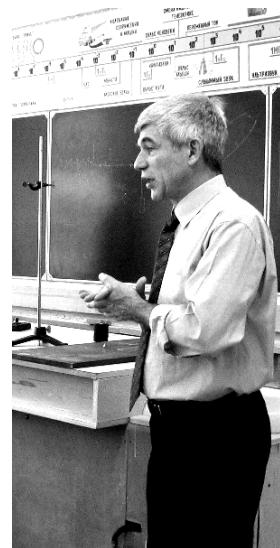


А.И. Слободянюк
Физическая
олимпиада:
экспериментальный
тур

Каждый школьник, выучивший две-три (или два-три десятка) формулы из учебника, считает себя достойным участником физической олимпиады любого уровня от школьного до международного. Неудачное выступление на олимпиаде, как правило, не переводит учащегося в состояние уныния, потому как он тут же находит множество причин своего провала: плохо себя чувствовал; не писала ручка; не «проходили» ту или иную тему; попалась совсем незнакомая задача и т.д. и т.п. По-видимому, это правильно и хорошо, было бы гораздо хуже, если бы при первой неудаче у юного, но талантливого физика сразу опускались руки. В действительности, успешное выступление на олимпиаде требует определенной подготовки, как в смысле накопления «знаний, умений, навыков», так и в психологическом плане - умения сосредоточиться на быструю и точную работу, настроиться на импульсное и даже «взрывное» включение своей интеллектуальной мощи (или «мощей»). Безусловно, что единственный, и поэтому лучший, способ подготовки к олимпиаде - самостоятельное выполнение заданий предыдущих олимпиад, решение большого числа сложных задач, проведение экспериментальных исследований, не говоря уж, конечно, об изучении основного материала учебной программы.



С этой точки зрения теоретический тур олимпиад имеет существенные преимущества: имеется достаточное количество учебных пособий и сборников олимпиадных теоретических задач, да и число «обычных» сборников задач значительно превышает число книг, посвященных проведению физического эксперимента. Может тогда стоит вообще отказаться от проведения экспериментального тура? Мы глубоко убеждены, что такое решение будет в корне неверным - физика наука экспериментальная, без эксперимента она приблизится к казуистике, исследующей проблемы типа: «сколько чертей массой m поместятся на кончике иглы плотностью ρ ».

В конце концов, теоретический и экспериментальные туры прекрасно дополняют друг друга: в первом участники «доказывают, как должно быть», а во втором смотрят «как есть на самом деле».

Итак,

будучи уверенным в необходимости физического эксперимента,

искренне желая помочь вашим талантам,

зная, что в ближайшее время олимпиады не закончатся,

надеясь получить законный гонорар,

написана эта книга, в которой собраны экспериментальные задания белорусских физических олимпиад: приведены условия заданий, даны указания по их выполнению, а в некоторых случаях даже проведены измерения, обработаны и получены какие-то результаты.

Автор.



Что такое хорошая экспериментальная задача?

С нашей точки зрения, экспериментальное задание по своей сути должно являться **исследованием физического явления**, по возможности, достаточно полным и комплексным. Под комплексным

исследованием явления мы понимаем изучение различных его аспектов, получение зависимостей конечного результата от целого набора варьируемых параметров. Желательно также, чтобы этот комплекс исследований включал в себя применение знаний из различных разделов физики. Такой подход заметно отличается от постановки заданий традиционных лабораторных работ школьного курса. Фактически, методика выполнение только одного этапа заданий олимпиады совпадает с методикой выполнения лабораторной работы - измерение отдельных физических величин, проверка отдельного физического закона.

Перечень явлений, изучаемых в курсе физики средней школы достаточно широк, однако, немногие из них допускают прямую экспериментальную проверку.

Не составляет труда дать практически полный перечень возможных физических величин, которые традиционно измеряются в школьном курсе: плотность (закон Архимеда), удельное электрическое сопротивление (закон Ома), удельная теплоемкость (тепловой баланс), коэффициент трения (на наклонной плоскости), коэффициент жесткости пружины (закон Гука), ускорение свободного падения (математический маятник), показатель преломления (закон Снелиуса), длина волны света (дифракционная решетка).

Конечно, ни республиканские, ни тем более международные олимпиады, не могут ограничиться этим списком - практически всегда рамки этого списка расширяются. Тем не менее, **предлагаемая задача не должна выходить за рамки учебной программы**. В некоторых случаях в качестве объекта исследования используются некоторые простые явления, которые непосредственно не входят в программу, но доступны пониманию учащихся на основании общих физических законов, изучаемых в школе, иногда бывает достаточно просто здравого смысла и обыденного опыта, а иногда, наоборот, требуется провести исследование, достойное места в истории.

В таких случаях, в условии задачи мы приводим некоторые формулы, законы, определения, которые могут потребоваться в ходе выполнения работы.

Использование приборов, проведение измерений, методы обработки результатов - вот перечень базовых навыков, которыми должен обладать участник олимпиады, для выполнения полученных заданий.

К нашему глубокому сожалению, одной из самых трудноразрешимых проблем подготовки экспериментальных заданий является **подбор необходимого оборудования**. Помимо того, что оно должно удовлетворять требованиям техники безопасности, быть простым и надежным, с ним должны быть знакомы участники олимпиады - его, прежде всего, необходимо найти или изготовить в нужном количестве. Поэтому часто приходится готовить задание, требующее самого простого оборудования. Заметим, однако, и что на

примитивном оборудовании можно выполнять учебные работы весьма высокого методического уровня. В качестве собственного оправдания отказа от использования ускорителей на встречных пучках, заметим, что очень многие фундаментальные открытия были сделаны с помощью «сургуча и веревочек» - неужели учащиеся XXI века уступают ученым века XVII?

Мы считаем, что физический эксперимент на олимпиаде должен давать **количественные результаты** с приемлемой точностью. Поэтому из перечня возможных экспериментальных проблем должны быть исключены те, изучение или демонстрация которых носит иллюстративный характер. При проведении измерений на олимпиаде участник существенно ограничен во времени. Поэтому явно или неявно предлагаемая схема эксперимента должна исключать по мере возможности влияние побочных факторов, затрудняющих интерпретацию результатов.

Успеху того или иного задания, во многом способствует, хорошая формулировка условия. С одной стороны, она должна оставлять определенный простор для творческого поиска, с другой стороны, должна быть достаточно конкретной, указывающей основной порядок проведения эксперимента.

Таким образом, **хорошая экспериментальная олимпиадная задача должна быть четко и однозначно сформулирована, иметь исследовательский комплексный характер, выполняться на достаточно простом оборудовании за ограниченное время, приводить к количественным результатам, допускающим, после соответствующей математической обработки, наглядную и физически верную интерпретацию.**

Разработка экспериментальных заданий олимпиад требует много времени, которое затрачивается на выбор темы исследования, подготовку и изготовление оборудования, неоднократное проведение измерений и их обработку, формулировку условий, выработку критериев оценивая и т.д. При этом в ходе работы первоначальные идеи, задуманные схемы экспериментов неоднократно меняются и отвергаются. Наш многолетний опыт показывает, что «коэффициент полезного действия» (отношение числа подготовленных задач к числу исходных идей) редко превышает двадцать процентов.

В заключение данного раздела, отметим, что авторы задач оставляют за собой право включать в перечень заданий некоторые «ловушки», позволяющие выявить тех «хитрых» участников, которые предпочитают «сочинить» результаты экспериментов, а не заниматься их получением.



Часть I. Методика выполнения экспериментальных заданий.

*Методист - рассказывает как бы он выполнил задание, если бы умел.
(Экспериментальный факт)*

Каждое экспериментальной задание имеет свои собственные специфические особенности, которые могут потребовать особых подходов в решении. Однако даже в такой ситуации знание общих методов проведения экспериментальных исследований не сможет навредить - легче отступить на шаг в сторону от известного пути, чем каждый раз искать принципиально новый путь. Поэтому рассмотрим основные традиционные этапы выполнения экспериментального задания.



1.1 Ознакомление с условием задания и предлагаемым оборудованием.

*В начале было слово
(Евангелие от Иоанна)*

В настоящее время длина условия постоянно растет¹. По ходу внимательного изучения условия задачи необходимо четко уяснить смысл предлагаемого задания, понять его основные этапы, увидеть взаимосвязи между различными его частями. Обязательно следует сразу ознакомиться с перечнем предлагаемого оборудования, убедиться в его наличии, вспомнить название и назначение каждого прибора. Если же в приведенном перечне что-то непонятно, то следует уточнить у организаторов - может трудно догадаться, что «мобильный элемент циркулярной формы» это просто какое-нибудь колечко.

В результате изучения условия следует предельно конкретно сформулировать цели, которые должны быть достигнуты в ходе выполнения каждого пункта задания. Эта проблема отпадает, если задание требует определение численного значения какой-либо физической величины. В том же случае, когда задача заключается в изучении какого-либо закона, либо в экспериментальной проверке формулы, требуется конкретизация - какие именно зависимости следует получить. Заметим, что часто эти зависимости могут быть указаны в подпунктах заданий, поэтому не следует сразу бросаться за выполнение одного из пунктов, не дочитав всего условия до конца.

¹ Отметим, что условия экспериментальных заданий Международной физической олимпиады излагаются не менее чем на 10 страницах.



1.2 Построение математической модели изучаемого явления (теоретическое описание).

*Скупа теория...
(B.Гете)*

Экспериментальное задание, как правило, не требует решения сложных теоретических задач. Однако вид исследуемых зависимостей желательно знать заранее.

Следует подумать о возможном упрощении полученных функций, о возможности их линеаризации. Заметим, что графическое представление полученных результатов является почти обязательным, а обработка линейных зависимостей значительно проще всех остальных. В ходе теоретического анализа необходимо выяснить, численные значения каких физических параметров необходимо знать (или измерять) обязательно, а без которых можно обойтись.

Заметим, что даже если необходимо измерить одну физическую величину, то проведение совокупных измерений (то есть исследование функциональной зависимости) предпочтительнее перед одним измерением. Такие измерения позволяют проверить правильность теоретических построений и существенно уменьшают погрешность полученного результата. Конечно, план в ходе работы может быть скорректирован, но, по словам шахматистов «лучше играть по плохому плану, чем совсем без плана».

Здесь нeliшне запомнить одну из заповедей экспериментатора: *чем меньше величин надо измерять, тем лучше схема эксперимента*. Уменьшение числа измеряемых параметров упрощает эксперимент, сокращает время его проведения, как правило, повышает точность и достоверность полученных результатов. Результатом теоретического анализа должен быть план проведения измерений - какие физические величины и зависимости должны быть измерены, с какой точностью, каким методом полученные результаты будут обрабатываться. Не вредно также представить себе примерные численные значения ожидаемых результатов, например, не стоит надеяться, что

ускорение свободного значения существенно превысит $20 \frac{M}{c^2}$.



1.3 Разработка схемы экспериментальной установки, ее реализация, проведение предварительных измерений.

*В настоящее время стоимость научных исследований значительно возросла.
(Из отчетного доклада XXIII съезду КПСС)*

Не вредно подготовить предварительный эскиз экспериментальной установки, на которой следует измерять те величины, которые фигурируют в ранее разработанном плане. Особенно необходим такой эскиз при сборке электрических цепей, даже самых простых. Найти ошибку в подключенных и перепутавшихся проводах значительно сложнее, если под рукой нет принципиальной электрической схемы. Не повредит также и схема хода лучей в оптической установке. После этого, можно отложить в сторону ручку, бумагу и, засучив рукава, взяться за приборы. При непосредственной сборке экспериментальной установки следует стремиться к ее надежности, устойчивости, удобству работы. Желательно также найти место возле установки для экспериментатора и его рабочей тетради.

Проведение предварительных измерений является обязательным условием успешного выполнения задания - эта недолгая процедура позволяет проверить работоспособность установки, выявить наличие ожидаемых эффектов, оценить диапазоны изменения варьируемых параметров, оценить достижимость требуемой точности, и ... вернуться к предыдущему пункту - разработке иного теоретического описания.

Не следует, конечно, надеяться, что собранная установка сразу будет удовлетворять всем требованиям - очень часто ее необходимо модернизировать, изменять порядок проведения измерений, или делать вывод о ее непригодности. В таком печальном случае, необходимо менять идею и план проведения эксперимента, лучше сделать это на предварительном этапе, чем после длинной серии кропотливо проведенных экспериментов.



1.4 Проведение измерений.

*Чем дальше эксперимент от теории,
тем ближе он к Нобелевской премии.
(Теоретическая гипотеза)*

После того, как вы убедились в возможности реализации намеченного плана, можно приступить к проведению измерений. Поверьте, что заранее подготовленная таблица для записи полученных результатов существенно экономит время, как при проведении эксперимента, так и на этапе обработки его результатов. Поэтому, не пожалейте минутки времени на ее подготовку - «сэкономленная минута может стать последней».

При исследовании зависимостей необходимо варьировать в максимально возможных пределах задаваемые параметры - стремиться расширить диапазон их изменения. По меньшей мере, расширение диапазона повышает точность окончательного результата, не говоря уже о том, что больший диапазон внушает больше доверия к обоснованности теоретических построений.

Если теоретическая модель предсказывает линейную зависимость, то это не значит, что экспериментально достаточно снять показания для двух точек (даже на предельных значениях параметров)! Во-первых, где гарантия, что эти точки не окажутся в чем-то особенными? Во-вторых, ваша теоретическая модель может не подтверждаться экспериментально, и зависимость на самом деле не линейна. В-третьих, увеличение числа точек увеличивает точность измерений. Для получения достоверной линейной зависимости необходимо около 10 экспериментальных точек.

Снимая показания приборов, записывайте результаты с той максимальной точностью, которую обеспечивает ваша установка - отбросить лишние цифры вы всегда успеете. Конечно, если вы заранее, в ходе предварительных измерений оценили точность окончательного результата, то показания приборов сразу можно округлять, не забывая все же оставить одну запасную цифру.

Очень полезно в ходе измерений постоянно мысленно анализировать получаемые данные. Может быть, ваши данные вынудят вас остановиться, и, не теряя напрасно времени, пересмотреть свой план эксперимента. Однако к этому совету относитесь с осторожностью - вполне возможно, что надежно полученные результаты натолкнут вас на новые оригинальные идеи, как в теоретическом описании, так и в продолжение эксперимента.



1.5 Обработка результатов измерений.

Через любые две точки можно провести любую кривую и, причем, только одну.

(Теорема экспериментатора)

Этот этап работы подробно описывается в многочисленных изданиях. Кроме того, основные правила обработки результатов рассмотрены ниже. Поэтому здесь мы ограничимся простым перечислением того, что включает в себя обработка результатов измерений: вычисление численного значения измеряемых физических величин; оценку их погрешностей; правильное округление результата; грамотное построение графиков; обработку графических зависимостей. Не следует сильно увлекаться расчетом погрешностей, но нельзя им пренебрегать - любой эксперимент без оценки погрешностей имеет нулевую ценность. К сожалению, достаточно часто встречаются работы, в которых расчет погрешностей занимает основное место, явно в ущерб ее содержательной части; еще большее сожаление вызывают работы, в которых результаты измерения по методу «на глазок» приведены с десятью значащими цифрами.

Последний, но возможно самый важный совет: будьте честны перед собой - подгонка результатов (как умышленная, так и неумышленная) иногда может принести несколько лишних баллов, но чаще видна не вооруженным глазом (особенно если авторы задания заложили некоторый подвох), и не к чему хорошему не приводит.



1.6 Сравнение экспериментальных данных с теоретическими расчетами.

Теоретическая гипотеза: Число 60 делится без остатка на все целые числа, меньшие его.

Экспериментальная проверка: Последовательно проверяем -

60 делится на 1,2,3,4,5,6... возьмем наугад еще несколько чисел - на 10 делится, на 20 делится, на 30 делится. Гипотеза экспериментально подтверждена!

Ценность любого физического исследования обусловлена разумным согласованием теоретических и экспериментальных результатов. Поэтому логичным завершением эксперимента является сравнение полученных данных с результатами теоретического анализа. Трудно ожидать полного соответствия между ними - причины возможных расхождений могут быть самыми различными: погрешности измерений, недостаточная точность методов измерений, влияние побочных факторов, приближенность теоретической модели и т.д. Поэтому необходимо провести качественный анализ полученных результатов и сделать обоснованные выводы типа:

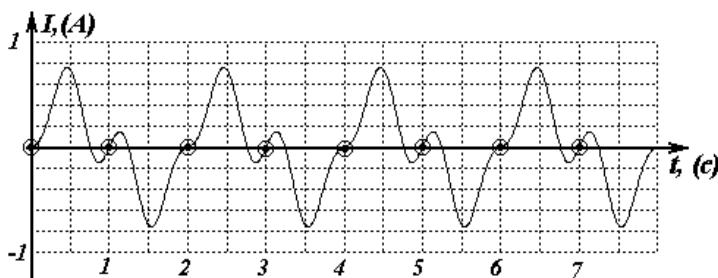
- эксперимент полностью подтверждает теоретические данные (*что маловероятно*);
- экспериментальные данные в пределах погрешности измерений совпадают теоретическими расчетами (*оптимальный вариант*);
- эксперимент качественно подтверждает теорию (*тоже неплохо*);
- экспериментальные данные опровергают теоретическую модель (*победа экспериментатора над силой разума*).

В любом случае полезно указать основные причины возможных расхождений и, возможно, найти способы устранения имеющихся расхождений. Особое внимание следует обратить на экспериментальное обоснование сложных теоретических зависимостей: линейная зависимость проявляется гораздо нагляднее, чем замысловатые теоретические построения.

Приведем пример «полного» соответствия между «теорией и практикой».

В результате теоретического анализа генератора электрических сигналов, получена следующая зависимость силы тока I (в амперах) от времени t (в секундах) $I = 0,5 \sin(\omega t) + 0,16 \sin(2\omega t) + 0,239 \sin(3\omega t)$, причем период колебаний точно равен 1 секунде. Результаты экспериментальных измерений представлены в таблице и на графике (на котором также построена теоретическая зависимость)

$t, (c)$	1,0	2,0	3,0	4,0
$I, (A)$	0,0	0,0	0,0	0,0
$t, (c)$	5,0	6,0	7,0	8,0
$I, (A)$	0,0	0,0	0,0	0,0



Как видно, экспериментальные точки идеально точно легли на теоретическую кривую, что полностью подтверждает теоретические расчеты.



1.7 Оформление работы.

*В конце-концов, это просто красиво...
(Из научной дискуссии)*

Правила олимпиады не предусматривают каких-либо жестких правил оформления работы.

Тем не менее, дадим несколько общих рекомендаций, которые помогут участникам олимпиад достойно завершить выполнение экспериментального задания.

Понятно, что автору работы хочется полностью описать все этапы обдумывания, поиска оптимального пути, все промежуточные попытки и т.д. Однако, не следует стремиться к тому, чтобы работа занимала десятки страниц, так как, во-первых, на это просто может не хватить времени, во-вторых, подробные описания и арифметические выкладки не всегда интересны, наконец, следует просто пожалеть проверяющих, которым предстоит прочитать не только вашу работу.

К сожалению, часто бывает, что участник олимпиады не успевает полностью оформить работу, поэтому советуем приступить к оформлению каждого пункта задания, непосредственно после его выполнения.

Перечислим и кратко охарактеризуем, что должно содержаться в грамотно оформленной работе. Как мы уже отмечали ранее, данная схема является не догмой, а руководством к действию.

Название работы (или одного из пунктов задания).

Формулировка цели не должна дословно повторять название работы, а конкретизировать ее.

В **теоретическом описании** необходимо кратко изложить вывод тех формул, которые в дальнейшем будут использованы как для экспериментальной проверки, так и для расчетов требуемых физических величин. Эта часть работы должна заканчиваться выводами о том, какие физические величины, зависимости должны быть измерены, как будут обрабатываться результаты.

Схема установки обязательно должна присутствовать в работе. Нет необходимости увлекаться «игрой светотени» на изображениях приборов - достаточно указать основные элементы вашей установки, обеспечивающие измерение нужных физических величин. Из схемы должны быть понятны все методики измерения. С особой тщательностью должны быть представлены оптические схемы - с обязательным указанием хода лучей. При проведении электрических измерений необходимо привести принципиальную электрическую схему с использованием стандартных обозначений.

Все результаты измерений, которые вы считаете необходимыми, должны быть представлены в одной или нескольких **Таблицах результатов измерений**. Построение таблиц должно быть логичным и удобочитаемым. Не следует забывать о единицах измерений, которые обязательно должны быть указаны. Обработку результатов прямых измерений удобно также представлять в виде граф таблицы. При этом необходимо указать формулы, по которым проводилась такая обработка. Сейчас большинство расчетов проводится с помощью калькулятора, поэтому нет необходимости выписывать длинные ряды сумм и других громоздких формул.

Описание **обработки результатов косвенных измерений** также должно быть предельно кратким - достаточно записать расчетные формулы (иди сослаться, если они приведены в теоретическом описании) и привести конечные результаты, не забыв при этом их правильно округлить и записать.

Не забудьте сделать **выводы** из своей великолепно выполненной работы: если цель работы получить численное значение - приведите его: число, погрешность, размерность; если следует получить зависимость - сформулируйте полученный закон, можете дать его обоснование (особенно, если он ближе к Нобелевской премии, чем к вашим теоретическим измышлениям).

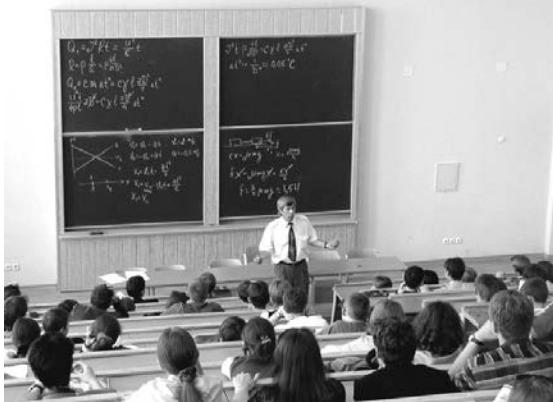


1.8 Получение наград.

No comments...

При получении заслуженной медали или диплома ведите себя с чувством собственного достоинства - не высакивайте на сцену до тех пор, пока не назовут вашу фамилию; не вытягивайте шею, когда на нее водружают заслуженную награду (особенно, если вручающий едва достает вам до пояса); диплом возьмите в левую руку, правую оставьте для равноправного рукопожатия; сдержано поблагодарите за то, что проверяющие профессора сумели понять вашу работу; будьте осторожны на ступеньках, ведущих со сцены в рукоплещущий зал.

Если вы получаете награду как лучший экспериментатор, то можно подняться на сцену в рабочей форме с прожженным рукавом, с мотком проволоки, свисающим из надорванного кармана, розу в петлице можно заменить на крестовую отвертку, трясящиеся руки объяснить последствием удара электрическим током, а треснувшие темные очки - воздействием ультрафиолетового излучения от короткого замыкания, в остальном примерное поведение описано выше.



Часть 2. О некоторых простых, но необходимых вещах.

- Маршал! Почему вы проиграли сражение?

- У меня было тринацать причин.

- Какие?

- Во-первых, у нас закончились патроны...

- Можете не продолжать!

(диалог Наполеона с одним из маршалов)

Так как олимпиада - соревнование, цель которого победа, то уместно в некоторых местах использовать военную терминологию. Успех в сражении зависит от стратегии, тактики и технического обеспечения. О первых двух составляющих военного искусства мы говорим на протяжении всей книги, сейчас же рассмотрим некоторые простые вопросы, без знания которых не следует обсуждать проблемы «тактики и стратегии» - элементарные технические составляющие выполнения и оформления экспериментальной работы. К слову, эти же навыки могут пригодиться и в других жизненно важных ситуациях, например, при решении задач теоретического тура.



2.1 Таблицы.

Мы уже говорили, что результаты измерений следует представлять в виде таблиц и при необходимости графиков. Позволим себе дать несколько рекомендаций по их оформлению. Начиная с этого пункта, дальнейшее изложение будем проводить с помощью конкретных примеров - перейдем от голого обобщенного умствования к животворящей эмпирии.

Итак, экспериментальная задача (не пугайтесь ее сложности): **измерить объем спичечного коробка.** Оборудование: коробок, линейка.

Изучение условия (*линейка деревянная есть, коробок картонный, помятый и пустой, в наличии*), построение теоретической модели (*после несложных преобразований можно получить, что объем коробка рассчитывается по формуле $V = abc$, где a, b, c - длина, ширина и высота коробка*), разработку экспериментальной установки (*что лучше прикладывать линейку к коробку, или коробок к линейке*), проведение предварительных измерений (*длина линейки больше длины коробка - измерения проводить можно*) опустим, перейдем к непосредственно к результатам измерений, которые представим в Таблице 1.

Таблица 1.

Физическая величина	$a(\text{мм})$	$b(\text{мм})$	$c(\text{мм})$
Результаты измерений	52,0	36,0	14,0
	51,0	37,0	16,0
	51,5	36,0	15,5
среднее	51,5	36,3	15,2
приборная погрешность	0,5	0,5	0,5
случайная погрешность	0,8	1,0	0,8
полная погрешность	0,94	1,1	0,94

Так как коробок старый и помятый, то нет ничего удивительного, что результаты измерений его размеров (проведенные, конечно с разных сторон, и в разных местах) различны. Правила расчета погрешностей рассмотрим позднее, здесь обратим внимание на следующие детали составления таблицы:

- 1) Все графы таблицы подписаны;
- 2) Для физических величин указаны размерности;
- 3) Измерения проведены с максимально возможной точностью (половина цены деления), одинаковой для всех результатов;
- 4) В той же таблице приведены результаты обработки результатов прямых измерений (среднее и погрешности - формулы для их расчета должны быть указаны в тексте).

Несколько забегая вперед, отметим, что значений объема (и тем более, нескольких значений объемов) коробка в таблице нет, эта величина есть результат косвенного измерения, поэтому рассчитывается по средним значениям результатов прямых измерений.

Надеемся, что ваши таблицы будут оформлены не хуже.



2.2 Графики.

Покажем, как следует грамотно оформить график полученной экспериментальной зависимости, решив следующую задачу.

Задача: Построить зависимость высоты уровня воды в вазе от количества налитой в нее воды.

Результаты измерений приведены в **Таблице 2** (V - объем налитой воды, h - высота уровня).

Таблица 2.

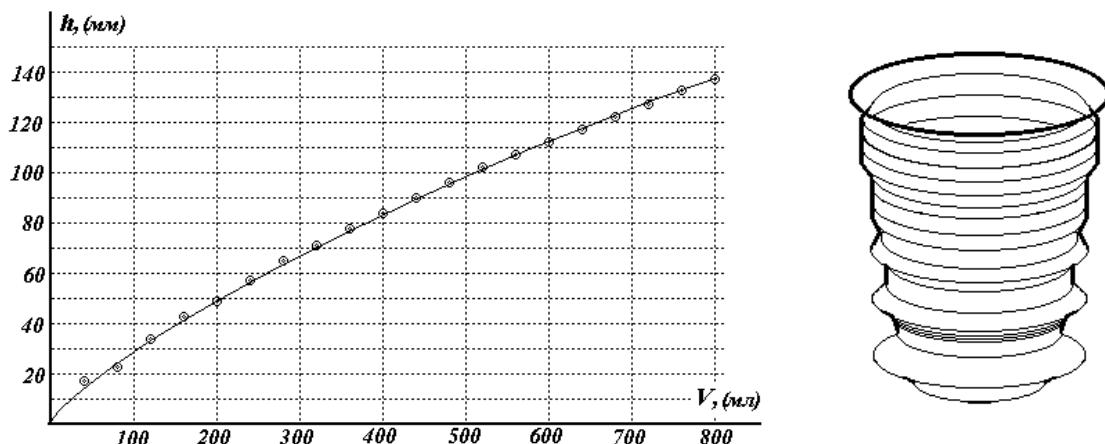
$V \cdot 10^{-2}, (cm^3)$	0,40	0,80	1,20	1,60	2,00	2,40	2,80	3,20	3,60	4,00
$h, (mm)$	17	23	34	43	49	57	65	71	78	84
$V \cdot 10^{-2}, (cm^3)$	4,40	4,80	5,20	5,60	6,00	6,40	6,80	7,20	7,60	8,00
$h, (mm)$	90	96	102	107	112	117	122	127	133	137

Заметьте, что для экономии места, никто не запрещает расположить таблицу горизонтально, кроме того, общий десятичный множитель вынесен в заголовок строки (допустима также запись $V, (10^2 cm^3)$) в остальном требования остаются прежними.

Теперь можно приступить к построению графика полученной зависимости. Возможная последовательность выполнения этой задачи следующая:

- 1) Выбираем кусок листа миллиметровой бумаги, размеры которого не меньше, чем половина стандартного тетрадного листа (иначе ваши экспериментальные точки трудно будет найти);
- 2) Рисуем оси координат, подписываем их и размечаем (не обязательно каждую ось начинать с нуля, масштаб подбирают так, чтобы график занимал большую часть отведенного ему места, а не шел параллельно одной из осей);
- 3) Наносим экспериментальные точки, каждую из них помечаем (например, обводим кружком), при возможности отмечаем размер погрешности измерений в виде вертикального отрезка прямой;
- 4) Проводим линию зависимости, которая, по вашему мнению, отражает ход полученной зависимости; если это должна быть прямая, то и рисуйте ее прямой; совсем не обязательно, чтобы линия проходила через все экспериментальные точки - они же известны с некоторой погрешностью.

Пример выполнения этих требований для рассматриваемой задачи показан на рисунке.



Что можно сделать с этими данными? Если надо, то можно попытаться восстановить форму сосуда, с которым проводились измерения. Действительно, изменение высоты уровня жидкости в сосуде (осесимметричном) связано с объемом налитой воды очевидным соотношением $\Delta V = \pi r^2 \Delta h$, где r - радиус сосуда на данной высоте. Из этой формулы можно приблизительно рассчитать значения радиусов на различных высотах, то есть восстановить форму сосуда. Результат таких расчетов показан на следующем рисунке. *Может на самом деле форма сосуда несколько отличается от приведенной, но полученный рисунок реально получен из построенного ранее графика. Разве не очевидно?*



2.3 Запись численного результата.

*Полтора землекопа.
(Ответ в учебнике арифметики)*

К сожалению, об этой, возможно, самой важной и самой простой процедуре приходится постоянно упоминать - грамотная запись численного результата содержит: численное значение, погрешность, размерность. Конечно, числа, фигурирующие в ответе, должны быть правильно округлены. Простые правила округления¹:

погрешность округляется до одной значащей цифры (если эта цифра единица, то следует округлять до двух значащих цифр), численное значение результата округляется так, чтобы последний его разряд совпадал с последним разрядом округленной погрешности.

Приведем несколько примеров.

- 1) В результате расчетов получены следующие значения объема сосуда $V = 234,3666 \text{ см}^3$, с погрешностью $\Delta V = 3,235 \text{ см}^3$. Грамотная запись окончательного результата $V = (234 \pm 3) \text{ см}^3$.
- 2) Значение резонансной частоты колебательного контура $v = 12645 \text{ Гц}$, ее погрешность $\Delta v = 200 \text{ Гц}$. Правильно записанное значение погрешности с одной значащей цифрой имеет вид $\Delta v = 0,2 \cdot 10^3 \text{ Гц}$ (не запрещено $\Delta v = 2 \cdot 10^2 \text{ Гц}$), поэтому запись результата должна быть в виде $v = (12,6 \pm 0,2) \cdot 10^3 \text{ Гц}$.

Обращайте внимание на запись результатов в тех задачах, которые приводятся в этой книге, при наличии ошибок - сообщите о них авторам, вознаграждение гарантируется!

Теперь мы можем закончить выполнение Задачи 1:

Рассчитываем объем коробка по полученной ранее формуле (обратите внимание – используем только средние значения измеренных длин сторон):

$$V = \langle a \rangle \langle b \rangle \langle c \rangle = 51,5 \cdot 36,3 \cdot 15,2 = 28415,64 \text{ мм}^3 \approx 28,42 \text{ см}^3.$$

(Это промежуточный результат, поэтому округляем с одной запасной цифрой).

Рассчитываем погрешность косвенного измерения

$$\Delta V = V \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{\langle a \rangle} \right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{\langle b \rangle} \right)^2 + \left(\frac{\Delta c}{\langle c \rangle} \right)^2} = 28,42 \sqrt{\left(\frac{0,94}{51,5} \right)^2 + \left(\frac{1,1}{36,3} \right)^2 + \left(\frac{0,94}{15,2} \right)^2} = 2,02 \text{ см}^3$$

Записываем окончательный результат с учетом правил округления:

$$V = (28 \pm 2) \text{ см}^3.$$

Для большего «блеска» можно также привести относительную погрешность полученного результата

$$\varepsilon = \frac{\Delta V}{V} = \frac{2}{28} \approx 7\%$$

¹ Эти правила касаются записи окончательного результата. При проведении промежуточных вычислений рекомендуется оставлять одну дополнительную запасную цифру



2.4 Действия с приближенными числами.

*Если от миллиона отнять несколько тысяч,
то все равно останется миллион.
О.Бендер*

Все числа, являющиеся результатами измерений, поэтому арифметические действия над ними должны вестись по правилам действий с приближенными числами. Эти правила изучают в школе на уроках арифметики, они подробно описываются в специальной литературе. Поэтому здесь мы их приведем без доказательств, позволив их себе только проиллюстрировать несколькими примерами.

При сложении (вычитании) двух и более чисел результат округляют так, чтобы последний разряд результата совпадал с последним разрядом наименее точного слагаемого. Примеры:

- 1) $2 + 2 = 4$;
- 2) $259 + 12,3 = 271$;
- 3) $6,02 \cdot 10^{23} - 5,3645 \cdot 10^{15} = 6,02 \cdot 10^{23}$;
- 4) $100,3 - 100 = 0$

Заметим, что с точки зрения действия над приближенными числами операция вычитания является самой неблагополучной - разность двух больших и близких чисел может иметь очень большую относительную погрешность, поэтому, по возможности, таких действий следует избегать.

При умножении (делении) в результате оставляют столько значащих цифр, сколько их в наименее точном сомножителе. Примеры:

- 1) $2 \times 2 = 4$;
- 2) $20 \times 2 = 4 \cdot 10^1$;
- 3) $245 \times 71 = 35$;
- 4) $1,5643 \cdot 10^7 / 2,3098 \cdot 10^{-3} = 0,6772 \cdot 10^{10}$.

При вычислении простейших функций (степенных, тригонометрических, логарифмических, показательных) в результате оставляют столько же значащих цифр, как и у аргумента функции. Это правило является приближенным, при необходимости, в каждом конкретном случае можно разумно оценить погрешность функции, если известна погрешность аргумента. Так при малых относительных погрешностях аргумента можно воспользоваться приближенной формулой $F(x_0 \pm \Delta x) \approx F(x_0) \pm F'(x_0) \Delta x$.



2.5 Расчет погрешностей.

*Не ошибается только тот,
кто ничего не делает.*

Как часто при проверке экспериментальных работ основную часть времени приходится тратить на длинные выкладки расчета погрешностей - доходит до того, что создается впечатление, что кроме погрешностей в работе больше ничего нет.

Сразу подчеркнем, мы глубоко убеждены в том, что **без оценки погрешностей любой экспериментальный результат имеет нулевую ценность**. Однако расчеты погрешностей должны разумно дополнять основную работу - проведение измерений и получение окончательного результата. Здесь мы приведем только краткую сводку порядка и правил расчета погрешностей, а с некоторыми замечаниями по их обоснованию вы можете познакомиться в специальной литературе (если это вам интересно), более того, можете быть уверены в том, что теория погрешностей является настоящей научной теорией, со своими аксиомами, правилами математических выводов, экспериментальным подтверждением и т.д.

Отметим, что приводимая вами погрешность измерений (как и любое иное число, фигурирующее в физике) должна иметь явный смысл. Так, например, записывая длину стола в виде $l = (135 \pm 6) \text{ см}$, мы ни в коем случае не утверждаем, что длина стола изменяется в пределах от 129 до 141 сантиметра! Смысл погрешности заключается в том, что с некоторой вероятностью (которая называется доверительной) истинное значение длины стола лежит в указанном интервале. Заметьте, не точно лежит в этом интервале, а с некоторой доверительной вероятностью. Иными словами экспериментатор при правильном использовании теории погрешностей оставляет за собой право на ошибку. В серьезных научных исследованиях доверительная вероятность принимается равной 99,5%, в учебных лабораториях принимается доверительная вероятность в 95%. Заметим, что интервал ошибки рассчитывается исходя из заданной доверительной вероятности, а не наоборот. Приводимые ниже правила и позволяют получить величину ошибки для указанной доверительной вероятности.

Если результат измерения x снимается непосредственно с измерительного прибора, то такое измерение называется **прямым**. На результат такого измерения влияет множество факторов: посмотрел на стрелку под другим углом, досталась искривленная линейка, рядом с лабораторией проехал трамвай, сама изменяемая величина по некоторым причинам немного изменилась (например, при измерении диаметра шарика длины разных диаметров могут быть различными) и т.д. Все эти факторы приводят к тому, что результаты измерений различаются, наличие такого разброса требует проведения нескольких измерений, результаты которых обозначим X_1, X_2, \dots, X_N .

В качестве окончательного результата прямого измерения принимается среднее арифметическое всех измерений

$$\langle x \rangle = \frac{\sum_{k=1}^N x_k}{N} \quad (1)$$

При прямых измерениях, как правило, учитывают три типа ошибок: приборную, округления, случайную.

Приборная ошибка возникает вследствие несовершенства любого прибора - изготовитель не может (и не обязан) гарантировать абсолютную точность. Поэтому каждый тип прибора имеет гарантированную заводом изготовителем максимальную погрешность. Эти предельные приборные погрешности задаются во всевозможных справочниках, краткую выдержку из которых мы и приводим в Приложении 1. Если приборная погрешность не задана в условии задачи (или в описании прибора), то допускается в качестве приборной погрешности использовать половину цены наименьшего деления. Итак, расчет приборной погрешности Δx_{np} сводится к тому, чтобы вспомнить таблицу, или внимательно посмотреть на шкалу прибора.

В ходе измерений по разным причинам приходится проводить округление результата, в связи с чем, неизбежно появление **ошибки округления** Δx_{okr} . Величина этой ошибки принимается равной половине интервала округления. Например, если показания амперметра вы округляете до 0,1 А, то погрешность округления принимается равной 0,05 А.

Случайная ошибка рассчитывается по формуле (здесь приведены два равносильных выражения, – по какому из них проводить расчеты зависит от индивидуального вкуса)

$$\Delta x_{cl} = t \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^N (x_k - \langle x \rangle)^2}{N(N-1)}} = t \sqrt{\frac{1}{N-1} (\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)}. \quad (2)$$

где обозначено $\langle x^2 \rangle = \frac{\sum_{k=1}^N x_k^2}{N}$ - средний квадрат измеряемой величины. В этой

формуле t коэффициент (он называется коэффициент Стьюдента), зависящий от числа измерений и от требуемой доверительной вероятности - вам нет необходимости запоминать значения этих коэффициентов - Вы не сильно ошибетесь, полагая $t = 2$, если число ваших измерений больше 5. Вторая часть формулы более удобна для расчетов на калькуляторе. Обратите внимание, что при $N = 1$ погрешность стремится к бесконечности – вот вам математическое обоснование правила – «единичные измерения недопустимы»! Отметим также, что увеличение числа измерений приводит к уменьшению случайной (но не полной!) ошибки, причем при больших N ошибка убывает примерно обратно

пропорционально квадратному корню из N : $\Delta x_{cl} \propto \sqrt{\frac{1}{N}}$. Поэтому для

уменьшения ошибки в 10 раз, число измерений следует увеличить в 100 раз. Правда, при выполнении экспериментальных заданий олимпиад вам этот пример не поможет – хватило бы времени на проведение 10 измерений (или хотя бы одного, которое *не допустимо*).

Полная погрешность прямого измерения (объединяющая все три типа ошибок) имеет вид

$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{cl.})^2 + (\Delta x_{np.})^2 + (\Delta x_{okr.})^2} \quad (3)$$

На первый взгляд расчет полной погрешности прямого измерения требует значительного времени, однако, при небольшой тренировке и наличии калькулятора² эта процедура занимает не более одной минуты. Все эти правила сведены в таблице Приложения 2.

Так как погрешность округляется до одной значащей цифры, в громоздкой формуле (3) можно смело отбрасывать некоторые слагаемые. Так если одна из ошибок более чем в три раза меньше остальных, то ее можно отбрасывать. В конце концов, если вы измерили три раза и результаты отличаются меньше чем на цену деления, то можете смело в качестве полной погрешности принимать половину цены деления! Если же ситуация противоположная – результаты различных измерений отличаются на несколько делений шкалы, то считайте случайную погрешность и принимайте ее за полную. Можно дать и более общее правило: *при расчете погрешностей надо больше думать, тогда считать придется меньше!*

Если окончательный экспериментальный результат получается в ходе вычислений над результатами прямых измерений, то такое измерение называется **косвенным**. Так, например, для определения объема шарика можно измерить с помощью штангенциркуля его диаметр (прямое измерение) и затем по известной формуле рассчитать его объем (косвенное измерение). Если же для измерения объема использовать мензурку с водой, то такое измерение объема будет прямым.

Итак, в общем случае, результат косвенного измерения Y является некоторой функцией $y = F(a, b, \dots)$ от результатов прямых измерений: $\langle a \rangle \pm \Delta a, \langle b \rangle \pm \Delta b, \dots$. В качестве окончательного результата используется значение функции, вычисленное при средних значениях результатов прямых измерений

$$\langle y \rangle = F(\langle a \rangle, \langle b \rangle, \dots).$$

Еще раз подчеркнем – результат косвенного измерения вычисляется **один раз**! Если вы по 5 раз измерили длину, ширину и высоту коробка, то не имеет смысла вычислять 5 значений объема, тем более что возможных комбинаций произведения может быть $5^3 = 125$ вариантов.

Погрешность измерения каждой из величин a, b, \dots вносит некоторую погрешность в расчет величины Y , причем величина этой погрешности зависит от вида функции $y = F(a, b, \dots)$. Будем считать, что результаты прямых измерений не зависят друг от друга, тогда можно считать независимыми вклады погрешностей этих величин в результат косвенного измерения. Так как обычно погрешности прямых измерений не слишком велики, то изменение функции Y при изменении ее аргумента, например, a , можно рассчитать по формуле

² Мы имеем в виду простейший «базарный» калькулятор, выполняющий четыре арифметических действия, операцию извлечения квадратного корня, и имеющий одну ячейку памяти. Более сложные калькуляторы могут автоматически проводить статистическую обработку введенных данных: подсчитывать среднее и выборочную дисперсию (чаще всего обозначается символом σ) на основании которых можно рассчитать все погрешности.

$(\Delta y)_a = \left(\frac{\partial F}{\partial a} \right) \Delta a$, где в скобках стоит частная производная функции F по параметру a . Не пугайтесь такого «страшилища» как частная производная, она вычисляется по тем же правилам, что и обычные производные, только все остальные параметры надо считать постоянными. Для вычисления полной погрешности необходимо сложить «по теореме Пифагора» погрешности, возникающие из-за погрешностей прямых измерений всех параметров

$$\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial a} \Delta a \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial b} \Delta b \right)^2 + \dots} \quad (4)$$

Часто функция $y = F(a, b, \dots)$ имеет вид произведения различных степеней от измеряемых напрямую величин $y = a^\alpha b^\beta \dots$. В этом распространенном случае вычисление полной погрешности упрощается

$$\frac{\Delta y}{y} = \sqrt{\left(\alpha \frac{\Delta a}{a} \right)^2 + \left(\beta \frac{\Delta b}{b} \right)^2 + \dots} \quad (5)$$

Вывод этой формулы предоставляем читателям в качестве упражнения.



2.6 Графическая обработка результатов.

Исследование зависимостей между различными варьируемыми переменными, как правило, является основным методом экспериментальных исследований. Поэтому, по возможности, стремитесь проводить такие исследования при выполнении экспериментальных заданий.

Приведем основные правила планирования и реализации экспериментального исследования функциональных зависимостей.

- 1. Выбирайте для исследования тот вид зависимости, который наиболее просто и надежно описан теоретически (если, конечно, в условии четко не указано, какие зависимости необходимо получить).**
- 2. Стремитесь провести измерения в максимальном диапазоне варьируемых параметров - полностью используйте возможности вашей экспериментальной установки (если, конечно, в условии четко не указано, в каком диапазоне необходимо провести измерения). Кстати, увеличение диапазона изменения варьируемых величин приводит к уменьшению погрешностей рассчитываемых параметров.**
- 3. Число измерений должно быть достаточно для построения зависимости, даже для построения линейной зависимости необходимо получить 8-10 экспериментальных точек (если, конечно, в условии четко не указано, с каким шагом проводить измерения). Чем больше погрешность отдельного измерения, тем больше экспериментальных точек должно быть получено.**
- 4. Если ваша зависимость имеет какие-либо особенности (максимумы, минимумы, перегибы, точки разрыва и т.д.), в районе этих особенностей «густота» экспериментальных точек должна быть больше.**

Наиболее просто обрабатываются линейные зависимости - даже «на глаз» легко отличить прямую от «кривой», а попробуйте отличить участок параболы от какой-нибудь лемнискаты Бернулли. Поэтому даже в том случае, если ваша зависимость нелинейная, постарайтесь соответствующим преобразованием переменных привести ее к линейному виду.

Пусть в рамках своих теоретических построений вы пришли к выводу, что некоторые физические величины связаны функциональной зависимостью $y = F(x)$, причем эта функция содержит набор постоянных параметров p, q, \dots , либо подлежащих определению, либо просто неизвестных (следовательно, вид зависимости следует записать в более общем виде $y = F(x, p, q, \dots)$). Практически всегда можно найти такие преобразования к новым переменным³ $Y(y)$, $X(x)$, так что зависимость между ними линейна. Подчеркнем, что эти преобразования не должны содержать неизвестных параметров. Возможные варианты таких преобразований мы будем встречать при рассмотрении

³ В более общем случае каждая из новых переменных Y, X может зависеть от обоих исходных $Y(x, y), X(x, y)$ - этот случай принципиально не отличается от рассматриваемого здесь.

конкретных задач. Краткая сводка наиболее популярных преобразований приведена в Приложении 2.

В некоторых случаях требуется определить не все параметры, а только некоторые из них (возможно, что некоторые из них и определить то невозможно). В такой ситуации следует руководствоваться известными правилами экспериментатора:

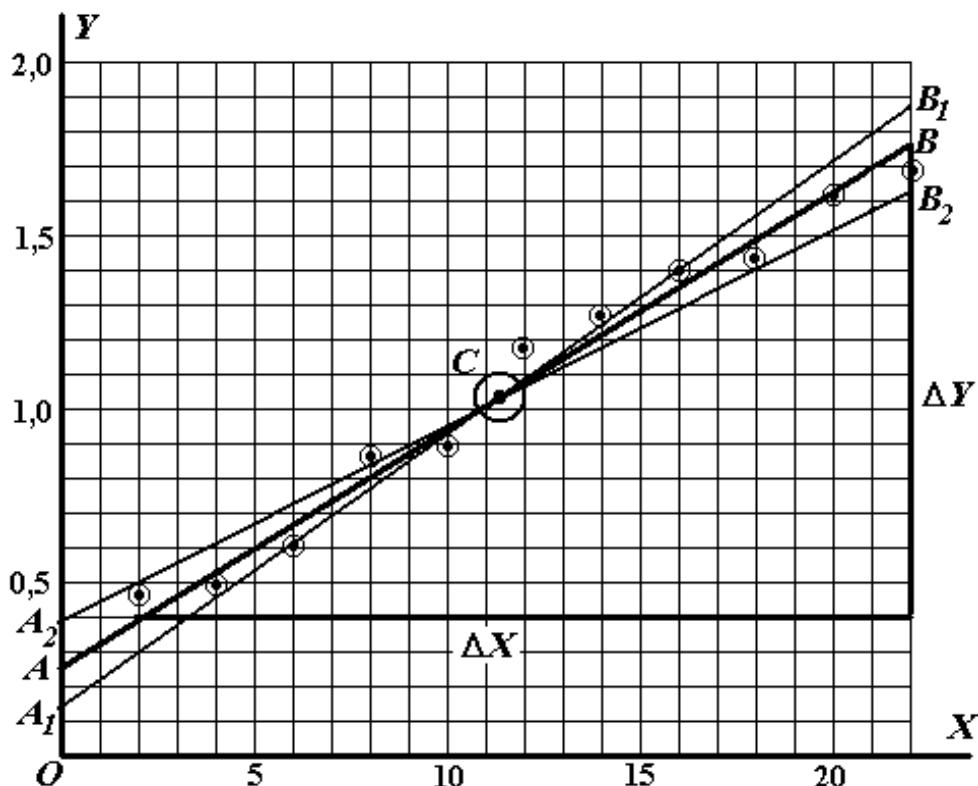
Чем проще модель, тем лучше.

Измеряй как можно меньше величин

Не можешь измерить, то хотя бы не изменяй (а вдруг сократится).

Итак, будем считать, что преобразования к линейному виду найдены, проведены измерения в нужном количестве, в нужном диапазоне, получены данные (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, N$, и на их основании подсчитаны величины (X_i, Y_i) , для которых ваша теория предсказывает линейную зависимость⁴ $Y = aX + b$.

Следующий шаг - построение графика (в полном соответствии с рассмотренными ранее правилами: выбор масштаба, разметка осей, нанесение экспериментальных точек ...). Ниже, на рисунке показано такое построение для некоторой «придуманной» зависимости. Воспользуемся этим рисунком, чтобы продемонстрировать порядок обработки результатов, целью которого является оценка параметров зависимости и их погрешностей.



Затем очень быстро можно провести определение параметров зависимости «на глаз». Для этого следует провести прямую, которая «ближе всего» лежит к экспериментальным точкам (на нашем рисунке это AB). Что ее построить, можно воспользоваться следующими рекомендациями: выберите «центр масс» имеющихся экспериментальных точек (приближенно ее координаты равны средним между крайними значениями соответствующих координат), на

⁴ Конечно, после проведенных преобразований коэффициенты полученной зависимости a, b должны выражаться через параметры исходной зависимости p, q, \dots

рисунке это точка C ; через эту точку проведите прямую так, чтобы по разные стороны от нее лежало примерно одинаковое число экспериментальных точек. Сразу же определите приближенные значения параметров зависимости:

- величина b есть величина отрезка AO (на рисунке $b \approx 0,25$);
- коэффициент a равен отношению $a \approx \frac{\Delta Y}{\Delta X}$, причем величину ΔX можно выбрать произвольно (но не слишком малой), так чтобы можно было вычислить отношение «в уме» (на рисунке $\Delta X = 20$, $\Delta Y \approx 1,85$, поэтому $a \approx \frac{\Delta Y}{\Delta X} \approx 0,09$).

Для оценки погрешностей параметров зависимости нужно провести две «границы» прямые (примерные): обе проходят через «центр масс», а область между прямыми должна захватывать большинство экспериментальных точек (ближайшие к центру точки могут выходить за выделяемую область). На нашем рисунке это прямые A_1B_1 и A_2B_2 . Так же как и для основной, для этих прямых можно определить параметры, которые и будут являться нижними и верхними границами величин a, b .

Настоятельно рекомендуем вам всегда проводить такую предварительную обработку (хотя бы без оценки погрешностей) - времени на это требуется не много, зато вы будете иметь данные, которые не позволят вам грубо ошибиться при более точной аналитической обработке.



2.7 Метод наименьших квадратов.

Для получения максимально достоверных результатов разработано множество серьезных методов обработки экспериментальных данных. Сейчас мы рассмотрим, пожалуй, самый популярный из них - **метод наименьших квадратов**. Впервые он был применен великим немецким математиком К.Гауссом еще в начале XIX века, с тех пор этот метод многократно модифицировался, получил строгое математическое обоснование.

Цель этого метода - получить наилучшие в некотором смысле оценки параметров известной зависимости по экспериментальным данным, содержащим оценки измерений. Пусть известно, что две переменных величины y и x связаны функциональной зависимостью $y = F(x, p, q\dots)$, включающей неизвестные параметры $p, q\dots$, оценки которых следует получить. При этом в нашем распоряжении имеется набор экспериментальных данных $(x_i, y_i) \quad i = 1, 2\dots N$. Основная идея метода получения таких оценок заключается в таком выборе параметров зависимости, при котором сумма квадратов отклонений экспериментальных значений y_i от «теоретических» $F(x_i, p, q\dots)$ была минимальна. Иными словами, речь идет о поиске минимума суммы

$$S^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - F(x_i, p, q\dots))^2, \quad (1)$$

которая является функцией от неизвестных параметров $p, q\dots$ Методы поиска минимума функций хорошо известны. Однако, в общем случае, получающиеся уравнения являются нелинейными, и их решение не всегда может быть получено аналитически.

Заметим, что метод наименьших квадратов в приведенной форме строго обоснован при выполнении следующих условий:

1. Значения x_i известны точно.
2. Абсолютные погрешности величин y_i одинаковы для всех измерений.

Заметим, что этот метод широко используется и в том случае, когда эти условия не выполняются. Однако, по возможности, следует стремиться к тому, что бы погрешности x_i были меньше погрешностей величин y_i .

Кстати, это требование является одним из основных при выборе вида преобразований к линейному виду.

Мы не в состоянии рассказать об его разновидностях и, тем более об его строгом обосновании, поэтому ограничимся набором рекомендаций по его применению в простейшем случае анализе линейной зависимости $Y = aX + b$. В этом случае функция (1) имеет вид

$$S^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - aX_i - b)^2, \quad (2)$$

а уравнения для определения минимума этой функции следуют из обычных условий равенства нулю всех производных

$$\frac{\partial S^2}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^N (y_i - aX_i - b)X_i = 0$$

$$\frac{\partial S^2}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^N (y_i - aX_i - b) = 0$$

Эта система легко преобразуется к линейному виду

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^N X_i^2 + b \sum_{i=1}^N X_i = \sum_{i=1}^N X_i Y_i \\ a \sum_{i=1}^N X_i + b N = \sum_{i=1}^N Y_i \end{cases} \quad (3)$$

Заметьте, что «ужасные» суммы, стоящие в этих уравнениях, являются коэффициентами и могут быть подсчитаны. Решение линейной системы уравнений хорошо знакомо старшеклассникам:

$$a = \frac{N \sum_{i=1}^N X_i Y_i - \left(\sum_{i=1}^N X_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^N Y_i \right)}{N \sum_{i=1}^N X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N X_i \right)^2}$$

$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^N X_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^N Y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^N X_i Y_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^N X_i \right)}{N \sum_{i=1}^N X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N X_i \right)^2} \quad (4)$$

Рассчитывать по этим формулам считать очень неудобно - лучше запомнить формулы пригодные для быстрого расчета неизвестных параметров a и b . Удобнее расчеты разбить на ряд последовательных этапов расчетов параметров, которые к тому же имеют наглядный и легко запоминаемый смысл:

- средние значения, которые определяют центр экспериментальных точек:

$$\langle X \rangle = \frac{\sum X_i}{N}; \quad \langle Y \rangle = \frac{\sum Y_i}{N};$$

- дисперсии (средний квадрат минус квадрат среднего), корень из дисперсии (называемый стандартным отклонением и считать его не обязательно) определяет разброс переменных

$$S_x^2 = \frac{\sum X_i^2}{N} - \langle X \rangle^2; \quad S_y^2 = \frac{\sum Y_i^2}{N} - \langle Y \rangle^2;$$

- коэффициент ковариации⁵ (среднее произведение минус произведение средних):

$$R_{XY} = \frac{\sum X_i Y_i}{N} - \langle X \rangle \cdot \langle Y \rangle;$$

- искомые коэффициенты выражаются через рассчитанные характеристики по формулам, которые эквивалентны формулам (4):

⁵ Это мудреное слово запоминать не обязательно, но при случае можно блеснуть эрудицией

$$a = \frac{R_{XY}}{S_x^2}; \quad b = \langle Y \rangle - a \langle X \rangle;$$

- погрешности этих величин рассчитываются по формулам⁶ (которые здесь даются без вывода):

$$\Delta a = 2 \sqrt{\frac{1}{N-2} \left(\frac{S_y^2}{S_x^2} - a^2 \right)}; \quad \Delta b = \Delta a \sqrt{S_x^2 + \langle X \rangle^2}.$$

Процедура расчета параметров линейной зависимости и их погрешностей изложена в Приложении 4.

В некоторых задачах важно доказать наличия прямо пропорциональной связи между изучаемыми физическими величинами $y = ax$, а не просто линейной зависимости $y = ax + b$. В этих случаях обработку полученной экспериментальной зависимости рекомендуется проводить по приведенным формулам для расчета параметров линейной зависимости. Если в итоге оказывается, что погрешность параметра b оказывается больше значения самого параметра $\Delta b > |b|$, то это и является обоснованием прямой пропорциональности. Иными словами, в такой ситуации мы имеем полное право считать, что $b = 0$. Очевидно, что в этом случае мы обязаны формально нарушать правила записи округленных результатов, оговоренных ранее.

Конкретные примеры применения метода наименьших квадратов будут рассмотрены при решении большинства экспериментальных задач.

Отметим еще одну весьма полезную характеристику: **коэффициент корреляции**, который дает численную характеристику близости экспериментальных точек к линейной зависимости:

$$r = \frac{R_{XY}}{\sqrt{S_x^2 \cdot S_y^2}}.$$

Эта безразмерная величина может принимать значения от минус до плюс единицы $r \in [-1, +1]$. Если экспериментальные точки точно ложатся на прямую, то коэффициент корреляции равен ± 1 (положительные значения коэффициента корреляции свидетельствуют о возрастании линейной функции, отрицательные – об ее убывании). Чем меньше модуль коэффициента корреляции, тем дальше экспериментальные точки от прямой. Если линеаризация может быть проведена несколькими способами, то следует отдать предпочтение той, для которой коэффициент корреляции выше.

⁶ Строго говоря, в формуле для погрешности вместо двойки должен стоять коэффициент Стьюдента, который не слишком заметно отличается от 2, поэтому для школьников допускается использовать это значение.

Часть 3. Основные приемы выполнения экспериментальных заданий.

Продолжим военную аналогию. Если предыдущая глава была посвящена вопросам технического обеспечения победы, то сейчас перейдем к изучению тактических вопросов - методам выполнения небольших экспериментальных задач, которые регулярно являются составной частью настоящих олимпиадных заданий. Некоторые из этих задач вам должны быть знакомы, возможно, вы даже их выполняли как лабораторные работы школьного курса физики, однако мы постараемся подойти к ним с несколько иной точки зрения - проиллюстрировать общую методику выполнения задания, сформулировать некоторые общие подходы, продемонстрировать методы обработки результатов.

Начиная с этой главы, мы вводим сплошную нумерацию задач, их полный список приводится в Приложении 3. В конце условия каждой задачи даны некоторые комментарии и рекомендации по подготовке оборудования к работе. Начало «официального» условия каждой задачи, отмечается логотипом белорусских физических олимпиад.

3.1 Планирование эксперимента.

Бессмысленно проводить измерения, не имея плана эксперимента. Очевидно, что в большинстве случаев работу следует начинать с разработки теоретической части, на основании которой и строится план проведения эксперимента. Проиллюстрируем выполнение этой части решения экспериментальных задач на примерах достаточно простых задач. Причем начнем с одной широко распространенной темы – гидростатическое взвешивание.

Задача 1. Гидростатическое взвешивание.



Иногда приходится сталкиваться с необходимостью измерения массы некоторых предметов, а весов под руками нет. Сейчас вам предлагается решить подобную проблему, используя подручные средства, имеющиеся в каждом доме.

Оборудование: линейка деревянная длиной 40 см, пластилин, кусок мела, мерный стакан с водой, нитки, лезвие бритвы, штатив с держателем.

Задание. Измерьте

- плотность пластилина;
- плотность мела;
- массу деревянной линейки.

Примечания:

1. Кусок мела желательно не мочить - может развалиться.

2. Плотность воды считать равной $\rho_0 = 1,0 \cdot 10^3 \frac{kg}{m^3}$.

Комментарии к условию.

1. Гидростатическое взвешивание со времен Архимеда является одной из самых популярных тем физических олимпиад.
2. Задача допускает множество вариантов решения и последовательностей измерения. Предпочтение надо отдавать тем методам, в которых проводится измерения наименьшего числа величин.
3. Кусок пластилина не должен быть слишком малым, чтобы измерение его объема с помощью мерного стакана было достаточно точным.
4. В качестве усложнения условия линейку можно заменить неоднородным стержнем, а в качестве измерительного инструмента предложить использовать миллиметровую бумагу.

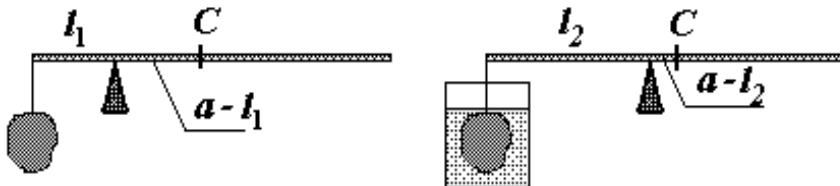
Если исключить измерение массы линейки, то решение не требует измерения объема пластилина, поэтому вместо мерного стакана можно использовать обычный, без шкалы.

Для измерения объема пластилина можно также пользоваться линейкой, если из пластилина слепить тело известной формы (кубик, шарик). Однако в этом случае точность измерений существенно уменьшится; правда, опять же, можно обойтись без мерного стакана.

Поиск решения.

Очевидно, что для определения плотностей и масс необходимо воспользоваться законом Архимеда, так как единственная известная величина, имеющая отношение к массе - плотность воды. Линейку следует использовать как коромысло весов, к концам которой с помощью ниток можно прикреплять кусочки пластилина. Лезвие можно использовать в качестве упора, на котором уравновешивается линейка. Вариантов решения данной задачи может быть несколько, рассмотрим один из них.

Прикрепим к одному из концов линейки нитку, на которую в последствии будем прикреплять грузы. Удобно нить прикрепить к началу отсчета шкалы линейки. Уравновесив линейку без грузов, можно определить положение ее центра масс - точки C на рис. . Отметим, что нет никакой гарантии, что центр масс реальной линейки находится точно в ее центре – линейку изготавлили люди из реального дерева, поэтому центр масс может быть незначительно смещен от центра. Обозначим a - расстояние от точки крепления нити до центра масс. Конечно, для однородной линейки эта величина близка к половине длине линейки. С помощью нити прикрепим к линейке кусок пластилина и уравновесим линейку. Обозначим расстояние от точки подвеса до упора l_1 (см. рис.). Опустим этот же кусок пластилина в воду и опять уравновесим линейку. Обозначим расстояние от точки подвеса до упора в этом случае l_2 .



Условия равновесия линейки в обоих случаях имеют вид

$$\begin{aligned} \rho V g l_1 &= mg(a - l_1) \\ (\rho - \rho_0) V g l_2 &= mg(a - l_2) \end{aligned} \quad , \quad (1)$$

где ρ, ρ_0 - плотности пластилина и воды, соответственно, m - масса линейки, V - объем куска пластилина.

Из этих уравнений можно выразить плотность пластилина

$$\rho = \rho_0 \frac{a(l_2 - l_1)}{l_2(a - l_1)}. \quad (2)$$

Таким образом, для измерения плотности пластилина необходимо измерить:

- 1) a - расстояние от точки подвеса до центра масс;
- 2) l_1 - расстояние от упора до центра масс, при подвешенном пластилине;
- 3) l_2 - расстояние от упора до центра масс, при погружении пластилина в воду.

Все величины, входящие в эту формулу легко измерямы.

Массу линейки также можно выразить из системы (1)

$$m = \rho V \frac{l_1}{a - l_1}, \quad (3)$$

Объем пластилина измеряется с помощью мерного стакана. Использование полученной формулы для расчета массы линейки не требует дополнительных измерений. Для увеличения точности измерения объема пластилина повышение уровня воды в мерном стакане можно использовать линейку, прикладывая ее к шкале стакана.

Имеет смысл провести несколько серий измерений для различных кусков пластилина. Понятно, что для каждого куска пластилина измерения всех требуемых величин следует провести несколько раз.

Для измерения плотности мела его следует полностью «завернуть» в пластилин. Затем с помощью мерного стакана можно измерить объем получившегося тела, а его массу легко измерить с помощью линейки известной массы и с известным положением центра масс. Для уменьшения числа измерений можно использовать тот же кусок пластилина, что и в первой части работы.

Дальнейший ход выполнения работы не вызывает никаких сложностей, поэтому здесь не приводится.

Следующий пример иллюстрирует основное правило «чистых экспериментаторов»: не все нужно измерять, и не все можно измерить – иногда можно чем-то и пренебречь.



Задача 2. Удельная теплота растворения гипосульфита.

При растворении гипосульфита в воде температура раствора сильно понижается.

Измерьте удельную теплоту растворения данного вещества.

Под удельной теплотой растворения понимают количество теплоты, необходимое для растворения единицы массы вещества.

$$\text{Удельная теплоемкость воды } c = 4,2 \cdot 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}, \text{ плотность воды } \rho = 1,0 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$$

Оборудование: калориметр; мензурка или мерный стакан; весы с разновесами; термометр; гипосульфит кристаллический; теплая вода.

Комментарии к условию.

1. Современное развитие электроники усложнило подготовку оборудования для этой задачи. Действительно, цифровые фотоаппараты практически вытеснили традиционную «мокрую» фотографию, в которой гипосульфит использовался в качестве закрепителя и в изобилии водился в магазинах.
2. Измерения в данной задаче надо проводить быстро, чтобы вода не успела остынуть из-за потери теплоты в окружающую среду.
3. Удельная теплота растворения не изучается в средней школе, поэтому в условии задачи приведено ее определение (которое понятно и очевидно).

Решение и обсуждение.

Основная идея эксперимента ясна: необходимо известное количество гипосульфита засыпать в известное количество воды и измерить понижение температуры. Для строгих расчетов удельной теплоты растворения необходимо знать (или измерить) теплоемкость калориметра, знать удельную теплоемкость гипосульфита, каким-то образом учесть потери теплоты в окружающую среду. Эти величины определить не просто. Поэтому для начала попробуем ими пренебречь, а затем оценим правомочность подобного допущения.

Итак, пренебрегая теплоемкостями калориметра и гипосульфита, а также потерями теплоты, уравнение теплового баланса при растворении можно записать в виде

$$cm(t_0 - t_1) = \lambda m_0, \quad (1)$$

где c - удельная теплоемкость воды, m - ее масса, m_0 -масса гипосульфита, λ - искомая удельная теплота растворения, t_0 -температура воды в калориметре до

растворения, t_1 - температура раствора после полного растворения. Из уравнения (1) следует расчетная формула

$$\lambda = \frac{cm(t_0 - t_1)}{m_0}, \quad (2)$$

из которой видно, какие величины необходимо измерить: массу воды можно определить с помощью мензурки и известной плотности, массу гипосульфита с помощью весов. Начальную и конечную температуру жидкости следует измерить термометром.

Приведем также формулу для расчета погрешности (удельную теплоемкость воды будем считать известной точно):

$$\Delta\lambda = \bar{\lambda} \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m_0}{m_0}\right)^2 + \left(\frac{2\Delta t}{t_0 - t_1}\right)^2}. \quad (3)$$

Так как эксперимент будет проводиться однократно (из-за дефицита гипосульфита), то все погрешности прямых измерений являются приборными. Кроме того, при записи последнего слагаемого в формуле (3) учтено, что измерения начальной и конечной температур проводятся одним термометром.

Интересно, сколько же воды заливать в калориметр? С одной стороны, чем больше воды, тем обоснование можно пренебречь теплоемкостями калориметра и гипосульфита. С другой стороны – чем больше воды, тем меньше изменение ее температуры, поэтому тем больше погрешность измерения. В условии сказано, что температура изменяется «сильно», поэтому воды следует взять побольше, но так, чтобы гипосульфит поместился в стакан.

Проведенные измерения дали следующие результаты:

$$m = (150 \pm 2) \text{ г}; \quad \varepsilon_m \approx 1,3\% \\ m_0 = (30,0 \pm 0,5) \text{ г}; \quad \varepsilon_{m_0} \approx 1,7\%$$

$$t_0 = (54,0 \pm 0,5)^\circ\text{C}; \quad t_1 = (43,0 \pm 0,5)^\circ\text{C}; \quad \varepsilon_{t_0-t_1} = \frac{2 \cdot 0,5}{54 - 43} \approx 9\%$$

Вычисления по формулам (2)-(3) приводят к результату:

$$\boxed{\lambda = (2,3 \pm 0,2) \cdot 10^5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}}$$

с относительной погрешностью $\varepsilon = 10\%$.

Теперь следует оценить допустимость сделанных допущений. Теплоемкостями калориметра и гипосульфита действительно можно пренебречь, так как их величина на порядок меньше теплоемкости воды. Кроме того, в уравнение теплового баланса они входят с противоположными знаками. Нами проведены оценки - так количество теплоты, отданное калориметром, приблизительно равно 540 Дж, а количество теплоты, полученное кристаллическим гипосульфитом, приблизительно равно 480 Дж. Вода отдала примерно 5,7 кДж. Таким образом, пренебрежение этими количествами теплоты вносит погрешность $\varepsilon \approx \frac{540 - 480}{5700}$, что составляет менее 1%.

Таким образом, в данном случае основное правило экспериментаторов применимо.



3.2 Изучай зависимости!

При малейшей возможности экспериментальное исследование должно сводится к изучению зависимостей. Как мы уже отмечали, экспериментальное изучение зависимостей имеет целый ряд преимуществ перед единичным измерением.

Во-первых, такие измерения позволяют подтвердить (или опровергнуть) теоретические построения.

Во-вторых, получение экспериментальной зависимости физических величин гарантирует, что вы случайно не попали в некую особую точку.

В-третьих, повышает точность результатов.

В-четвертых, позволяет иногда исключить измерения «трудно измеряемых» величин;

В-пятых, оценивается жюри большим числом баллов.

Проведение эксперимента по изучение зависимостей предполагает контролируемое изменение одной физической величины и измерение другое зависимой величины. Иногда, приходится изменять (возможно, и неконтролируемо) условия эксперимента и измерять две зависящие друг от друга величины. В любом случае, результатом такого эксперимента является набор пар взаимосвязанных физических величин $(x_i, y_i), i = 1, 2, \dots, N$. Эти результаты могут обрабатываться различными способами, но построенный по этим данным график зависимости $y(x)$ (или $x(y)$) никогда не помешает. Даже внешний вид этого графика может быть весьма информативен, а при наличии добросовестной математической обработки дает наилучшее решение поставленной задачи.

Важной проблемой (в том числе и с точки зрения схемы оценивания) является разумное определение числа N точек, в которых проводятся измерения. Если этих точек мало, то вид зависимости «не вырисовывается», а если слишком много, то не хватает отведенного времени на проведение измерений. Поэтому при выборе числа точек следует руководствоваться следующими правилами:

1. Диапазон изменения исследуемых величин должен быть максимально возможным. Пределы изменения обычно ограничиваются

- чисто физическими причинами (как правило, не удается нагреть воду до температуры выше 100°C);
- геометрическими размерами установки (трудно в лаборатории провести измерение времени падение с высоты более 5 метров);
- диапазонами измерения используемых приборов (ручным секундомером не измеришь сотые доли секунды);
- правилами техники безопасности (не следует подключать скрученную руками электрическую цепь к сети);
- временем проведения эксперимента (за пять отведенных часов не измеришь скорость роста ногтей);
- другими причинами.

2. Шаг изменения физической величины должен приводить к надежно регистрируемым изменениям измеряемой зависимой величины. Так при

измерении силы тока в цепи школьным амперметром, изменение ее параметров должно приводить к изменению силы тока не менее чем на 0,2А.

3. При наличии особенностей (максимумов, минимумов, точек разрыва и т.д.) густота точек вблизи этих особенностей должна быть увеличена.

4. Если случайные погрешности являются преобладающими, то увеличение числа точек (даже повторяющихся) увеличивает точность окончательного результата, поэтому в такой ситуации число экспериментальных точек, во многом, определяется требуемой точностью измерений.

Продемонстрируем преимущества совокупных измерений на простых примерах.



Задача 3. Математический маятник и ускорение свободного падения.

Если можешь не измерять - не измеряй!

Оборудование: штатив с лапкой, секундомер, кусок пластилина, линейка, нить.

Задание: измерить ускорение свободного падения с помощью математического маятника.

Комментарии к условию.

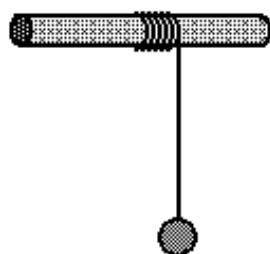
1. Изготовить математический маятник не представляет труда, в качестве груза можно использовать любой груз – пластилин, шарик (лучше металлический), гайку.
2. Длина нити должна быть не менее 0,5 метра, причем нить должна наматываться на стержень.

Решение.

Создание экспериментальной установки и проведение измерений и в этой задаче очевидны - небольшой кусок пластилина надо прикрепить к нити, которую можно подвесить к лапке штатива, отклонить от вертикали и с помощью секундомера измерить время нескольких колебаний. Поэтому начнем с теоретического описания и разработки методики проведения эксперимента. Формула для периода T малых колебаний математического маятника длины L хорошо известна

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad (1)$$

На первый взгляд, достаточно измерить длину маятника, период колебаний и затем из этой формулы выразить ускорение свободного падения. Однако для повышения точности измерений проведем исследование зависимости периода колебаний от длины нити. Для упрощения измерений длину нити можно изменять, наматывая ее на поддерживающий стержень. При этом длина свободного участка нити после n оборотов вокруг стержня выражается формулой



$$L_n = L_0 - nS, \quad (2)$$

где L_0 - начальная длина нити, S - длина одного витка (понятно, что S равна периметру стержня и, если его сечение является окружностью, то $S = \pi D$, где D -диаметр). Таким образом, появляется возможность исследовать зависимость периода колебаний от целого (!) числа оборотов, а ошибиться в подсчете сделанных оборотов гораздо сложнее, чем в измерении набора длин нитей. Используя выражение (2), приведем зависимость (1) к линейному виду (для этого достаточно возвести ее в квадрат)

$$T^2 = \frac{4\pi^2 L_0}{g} - \frac{4\pi^2 S}{g} n \quad (3)$$

Итак, мы получили линейную зависимость, идеально приспособленную для измерений. Обратите внимание, что нас даже не интересует начальная длина нити (а с ее измерением могут возникнуть проблемы – особенно, если подвешенный груз не является материальной точкой¹).

Удобно также применить графические методы обработки результатов – коэффициент наклона $a = -\frac{4\pi^2 S}{g}$ графика зависимости $T^2(n)$ может быть найден как непосредственно из графика, так и с помощью метода наименьших квадратов. Зная этот коэффициент наклона (и его погрешность) можно рассчитать ускорение свободного падения. Правда, для этого необходимо знать уменьшение длины нити S (периметра стержня), однако измерить ее не представляет труда. Достаточно саму нить несколько раз намотать на стержень (не забудьте точно измерить число этих оборотов), размотать и измерить длину полученного куска.

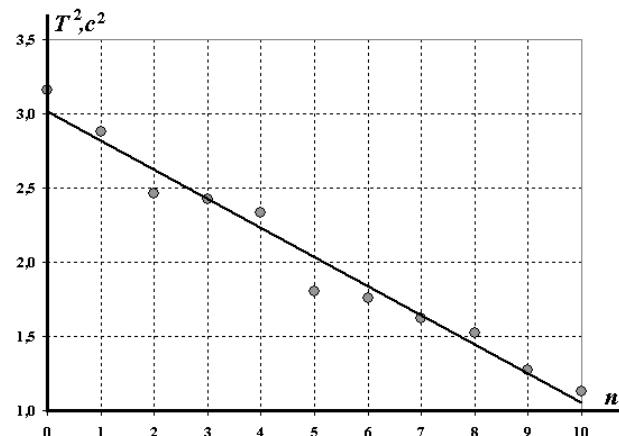
После этого ускорение свободного падения и его погрешность можно рассчитать по формулам:

$$g = -\frac{4\pi^2 S}{a}, \quad \Delta g = g \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2}. \quad (4)$$

Приведем результаты измерений (t - время 10 колебаний, T - период) и проведем их обработку.

Таблица результатов измерений.

n	t, c	T, c	T^2, c^2
0	17,8	1,78	3,160
1	17,0	1,70	2,881
2	15,7	1,57	2,465
3	15,6	1,56	2,422
4	15,3	1,53	2,330
5	13,4	1,34	1,801
6	13,3	1,33	1,759
7	12,7	1,27	1,620
8	12,3	1,23	1,524
9	11,3	1,13	1,269
10	10,6	1,06	1,132



¹ А когда он ею является?

Как и ожидалось, зависимость квадрата периода от числа сделанных витков в пределах погрешности измерений близка к линейной. Коэффициент наклона, рассчитанный по МНК, оказывается равным

$$a = (-0,19 \pm 0,02) c^2.$$

Для определения параметра S , было намотано 10 витков нити на стержень и затем измерена длина этого куска нити. В итоге получено значение $S = (4,90 \pm 0,05) \text{ см}$. Расчет по этим данным значения ускорения свободного падения дает следующий результат

$$g = (10,21 \pm 0,11) \frac{\text{м}}{\text{с}^2},$$

не очень точно, но близко к известному табличному значению.

Следующий пример также достаточно часто встречается, как составная часть «длинных» экспериментальных задач.



Задача 4. Показатель преломления материала линзы.

Задание: измерьте показатель преломления стекла, из которого изготовлена линза.

Оборудование: двояковыпуклая линза на подставке, источник света (лампочка на подставке с источником тока и соединительными проводами), экран на подставке, штангенциркуль, линейка.

Комментарии к условию.

1. Оборудование является стандартным, да и условие таковым же, поэтому ... без комментариев.

Разработка методики измерений.

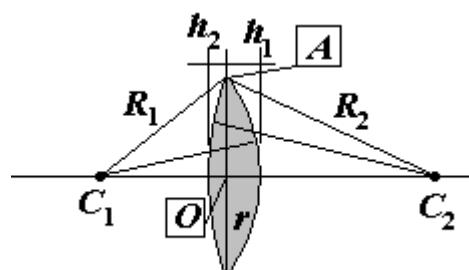
Показатель преломления материала линзы n входит в формулу для фокусного расстояния F :

$$\frac{1}{F} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (1)$$

поэтому может быть рассчитан, если измерить фокусное расстояние линзы, а также радиусы кривизны R_1, R_2 поверхностей линз.

Наибольшую сложность вызывает измерение именно этих радиусов. На рисунке показан профиль двояковыпуклой линзы. Из рисунка следует, что радиус кривизны поверхности удовлетворяет уравнению (теорема Пифагора для треугольника AC_1O)

$$(R_1 - h_1)^2 + r^2 = R_1^2,$$



из которого следует

$$R_1 = \frac{r^2 + h_1^2}{2h_1}, \quad (2)$$

где r - радиус линзы, h_1 - толщина выпуклости задней поверхности. Радиус линзы легко измерить с помощью штангенциркуля. А как измерить толщину выпуклости? А может ее и не надо измерять! Сделаем еще один шаг. Подставим выражения для радиусов кривизны (для второго радиуса формула аналогична формуле (2)):

$$\frac{1}{F} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = (n-1) \left(\frac{2h_1}{r^2 + h_1^2} + \frac{2h_2}{r^2 + h_2^2} \right),$$

а теперь, внимание, Если в знаменателях пренебречь квадратами толщин выпуклостей, то эта формула приобретает вид:

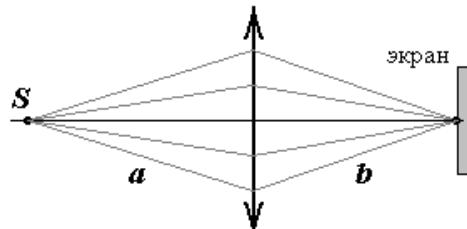
$$\frac{1}{F} = (n-1) \left(\frac{2h_1}{r^2 + h_1^2} + \frac{2h_2}{r^2 + h_2^2} \right) \approx (n-1) \frac{2(h_1 + h_2)}{r^2}, \quad (3)$$

в котором отсутствуют отдельные значения толщин выпуклостей, а только их сумма $(h_1 + h_2) = h$, то есть толщина линзы, которая легко измеряется штангенциркулем. Итак, с одной стороны мы огрубили расчетную формулу, но с другой существенно упростили требуемые измерения. Можно «на глаз» оценить погрешность, которую мы допустили при использовании указанного приближения. Радиус линзы r более чем в 10 раз больше ее толщины, поэтому сделанное приближение приводит к погрешности менее 1%, так как $\varepsilon \approx \frac{h^2}{r^2}$. Невысокая цена за существенное экспериментальное упрощение, тем более, что суммарная погрешность, скорее всего, превысит это значение. Поэтому с точки зрения экспериментатора переход к формуле (3) является громадным теоретическим достижением.

Обсудим теперь методику измерения фокусного расстояния линзы². Понятно, что идея измерений должна основываться на известной формуле линзы

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \quad (4)$$

где a - расстояние от предмета до линзы, b - расстояние от линзы до изображения.



Таким образом, необходимо с помощью линзы получить четкое изображение светящейся лампочки и измерить нужные расстояния. Однако сложно точно определить положение экрана, при котором изображение является «четким». Поэтому единственный выход повышения точности окончательного результата – увеличение числа измерений. Причем здесь необходимо вспомнить и воспользоваться замечательным правилом экспериментатора:³ **изучай зависимость!** Иными словами, необходимо провести измерения нескольких пар значений

² В условиях спешки и нервного напряжения весьма вероятны грубые ошибки, поэтому всегда полезно знать примерное значение той величины, которую собираешься измерять. Поэтому допустимо (об этом можно не писать в своей работе) провести грубые, оценочные измерения. Так в данном случае можно с помощью линзы можно получить изображение удаленного светящегося предмета (окна, ламп на потолке) на экране (или на ладони) и измерить расстояние между линзой и изображением – оно примерно равно фокусному расстоянию линзы.

³ Здесь может торжествовать теоретик – ему достаточно одной пары значений.

расстояний (a, b) , причем заметно изменяя эти параметры. Эти измерения удобно проводить следующим образом: установить экран и лампочку на некотором расстоянии друг от друга, затем найти два положения линзы между ними, при которых на экране получается четкое изображение, провести эту процедуру несколько раз.

Обратимся к формуле линзы (4), которая допускает красивую геометрическую интерпретацию. Если по осям координат отложить величины $\frac{1}{a}$ и $\frac{1}{b}$, то уравнение (4) определяет в этих координатах отрезок прямой, отсекающий на осях величину обратную фокусному расстоянию.

Итак, окончательная последовательность измерений и обработки их результатов должна быть следующей:

- измерить толщину и радиус линзы h, r (не забывая об оценке погрешностей $\Delta h, \Delta r$);
- провести серию измерений расстояний (a, b) , при которых на экране получается четкое изображение лампочки; эти измерения удобно проводить следующим образом: установить экран и лампочку на некотором расстоянии друг от друга, затем найти два положения линзы между ними, при которых на экране получается четкое изображение, провести эту процедуру несколько раз;

- далее следует построить зависимость величины $Y = \frac{1}{b}$ от величины $X = \frac{1}{a}$ убедиться, что она линейна и проходит под равными углами 45° к осям;
- с помощью МНК (или графически) определить коэффициенты линейной зависимости

$$Y = KX + C,$$

- убедиться, что параметр K этой зависимости в пределах погрешности равен 1, определить значение параметра C и его погрешность ΔC ;
- согласно формулам (3)-(4) этот параметр равен

$$C = (n - 1) \frac{2h}{r^2};$$

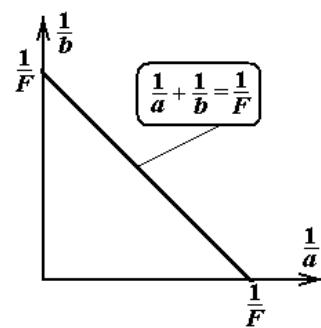
поэтому значение показателя преломления рассчитывается по формуле

$$n = 1 + C \frac{r^2}{2h}, \quad (5)$$

- погрешность показателя преломления рассчитывается по формуле

$$\Delta n = (n - 1) \sqrt{\left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2 + \left(2 \frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2}. \quad (6)$$

Работа проста и хорошо знакома – рекомендую самостоятельно провести измерения и обработку результатов самостоятельно.





3.3 Обработка нелинейных зависимостей.

В некоторых случаях теоретическая зависимость может быть достаточно сложной, так что ее непосредственная экспериментальная проверка затруднительна, особенно в тех случаях, когда неизвестны некоторые параметры этой зависимости.

В такой ситуации можно исследовать некоторые следствия из теоретической модели, допускающие экспериментальную проверку.

Большой интерес представляют особенности сложных зависимостей, такие как экстремумы (максимумы и минимумы), точки разрыва и т.д. Как уже отмечалось, вблизи этих особенностей густота экспериментальных точек должна быть выше. Наличие указанных особенностей позволяет экспериментально проверить физическую модель рассматриваемого явления, точное (по возможности) определение параметров особенности, как правило, позволяет найти некоторые численные характеристики изучаемой системы.

Иными словами, «сложные» зависимости встречаются в физике и их надо уметь исследовать.

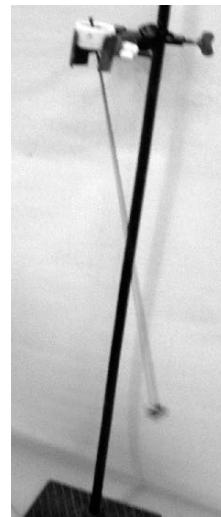
В качестве примера исследования приведем экспериментальную задачу, основная цель которой – изучение колебаний физического маятника.

Оборудование, необходимое для выполнения этого задания, примитивно, поэтому работа может быть выполнена не только в любом кабинете физики, но и дома, на кухне. Собственно экспериментальная часть задания также не слишком сложна, хотя и требует известной аккуратности в проведении измерений. Наиболее важной частью в данном изложении является анализ возможностей сравнения теоретических и экспериментальных данных, в том случае, когда явная линеаризация зависимости не очевидна. Поэтому здесь рассмотрено несколько возможных вариантов такого сравнения.



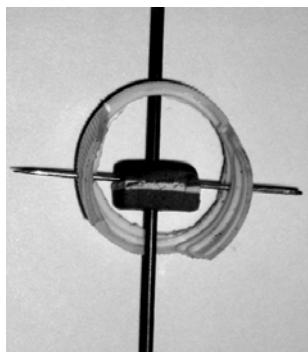
Задача 5. «Колебания стержня»

*Всякая неизвестная функция линейна,
если она не парабола*



Оборудование:

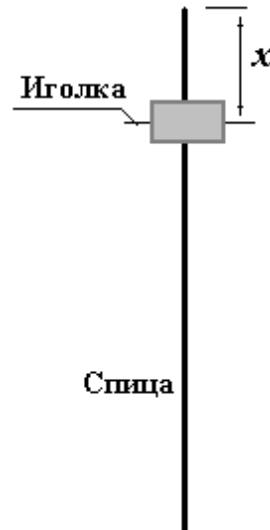
1. Штатив с лапкой .
2. Секундомер.
3. Спица вязальная
4. Ластик
- 5 Иголка
6. Линейка
7. Пробка пластиковая от пластиковой бутылки.



Изготовьте подвес для спицы, как показано на фотографии и закрепите его в штативе. Используйте иглу как ось вращения спицы: для этого насадите на спицу кусочек ластика, а затем перпендикулярно спице воткните иголку, потом концы иголки должны пройти через боковые стенки пробки. Спика должна легко колебаться вокруг оси. В ходе измерений вам необходимо изменять положение оси относительно спицы – для этого спицу следует сдвигать относительно оси, двигая ластик с иголкой по спице.

Обозначим длину спицы L (надеемся, вы сумеете ее измерить), а длину ее верхней части (над иголкой) - x . Период колебаний такого маятника (если спица однородная) определяется формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{L^2}{12} + \left(\frac{L}{2} - x\right)^2}{g\left(\frac{L}{2} - x\right)}} \quad (1)$$



Вам предстоит проверить выполнимость этой формулы.

1. Исследуйте зависимость периода колебаний получившегося физического маятника от длины верхней части спицы. Постройте график полученной зависимости. Проверьте выполнимость формулы (1) в вашем случае.
2. Определите с максимально возможной точностью минимальный период колебаний полученного маятника.
3. Определите значение ускорения свободного падения.

Если к нижнему концу спицы прикрепить небольшой груз массы m (половинку ластика), то период колебаний такого маятника будет определяться формулой

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M \frac{L^2}{12} + M \left(\frac{L}{2} - x\right)^2 + m(L-x)^2}{(M+m)g \left(\frac{ML+2mL}{2(M+m)} - x\right)}}. \quad (2)$$

4. Выполните задание пункта 1. для этого маятника.

Анализ и решение.

Формулы, приведенные в условии, громоздки, значения некоторых параметров, входящих в них неизвестны, поэтому сначала попытаемся их упростить и привести к виду, удобному для проверки.

Обозначим $z = \left(\frac{L}{2} - x\right)$ - расстояние от центра подвеса до центра масс стержня; $\frac{L^2}{12} = a^2$. Тогда формулу (1) из условия можно переписать в виде

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + z^2}{gz}} = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}} \sqrt{\frac{a}{z} + \frac{z}{a}}. \quad (1)$$

Функция, стоящая под вторым корнем $F(z) = \frac{a}{z} + \frac{z}{a}$ «красива и симметрична»: ее минимальное значение $F_{\min} = 2$, при $z^* = a$. Поэтому минимальный период равен

$$T_{\min} = 2\pi \sqrt{\frac{2a}{g}}. \quad (2)$$

Теперь формулу (1) можно представить в эквивалентном виде

$$T = T_{\min} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{a}{z} + \frac{z}{a} \right)}. \quad (3)$$

Эта формула уже не столь пугающая, как исходная. Правда, для ее экспериментальной проверки требуется определить с максимально возможной точностью значение минимального периода колебаний⁴.

Теперь можно приступить к проведению измерений. Длина спицы равна $L = 35\text{см} = 0,35\text{м}$.

В таблице 1. приведены результаты измерений периода колебаний стержня без груза при различных положениях оси. Обратите внимание, что время 20 колебаний измерено дважды для каждого положения точки повеса. Это проделано для того, чтобы исключить грубые промахи и иметь представление о порядке

⁴ Именно поэтому этот пункт выделен отдельно в условии задания.

погрешности измерений – погрешность измерения времени 20 колебаний по порядку величины составляет 0,1 секунды. Период колебаний рассчитан как сумма времен, деленная на 40 (так как всего 40 колебаний). Погрешность определения периода (опять по порядку величины) оценивается как $\frac{0,1c}{40} \approx 3 \cdot 10^{-3} c$, поэтому допустимо рассчитывать период с точностью до $10^{-3} c$ (хотя последняя цифра очень сомнительная).

Таблица 1. Колебания стержня без груза внизу.

<i>X, мм</i>	Время 20 колебаний, <i>c</i>	Период, <i>T, c</i>
10	19,15	0,956
21	19,01	0,948
28	18,71	0,937
37	18,7	0,932
43	18,53	0,925
52	18,3	0,917
61	18,14	0,906
72	18,19	0,908
80	18,22	0,911
87	18,2	0,912
95	18,59	0,925
103	18,59	0,931
111	19,23	0,958
116	19,62	0,977
123	20,09	1,005
131	21,37	1,069

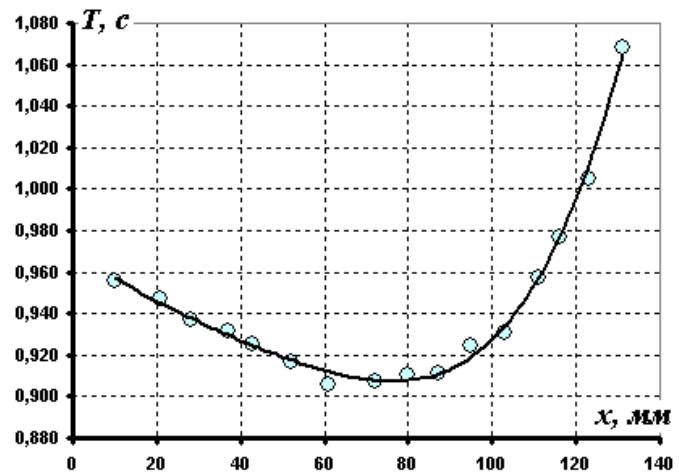


Рис.1 Зависимость периода колебаний стержня *T* от координаты точки подвеса *X*

На рис. 1 построен график этой зависимости, «на глаз» проведена сглаживающая кривая.

Естественно, что экспериментальные значения периодов колебаний получены с некоторой погрешностью, особенно заметен разброс значений вблизи минимума, где точные значения периода изменяются незначительно.

Проверка выполнимости формулы может быть проведена несколькими способами.

Способ 1.

Прямое построение графика теоретической зависимости (1). Правда, при этом надо знать значение ускорения свободного падения (пусть $g = 9,81 \frac{M}{c^2}$). На Рис.2 представлены результаты таких расчетов.

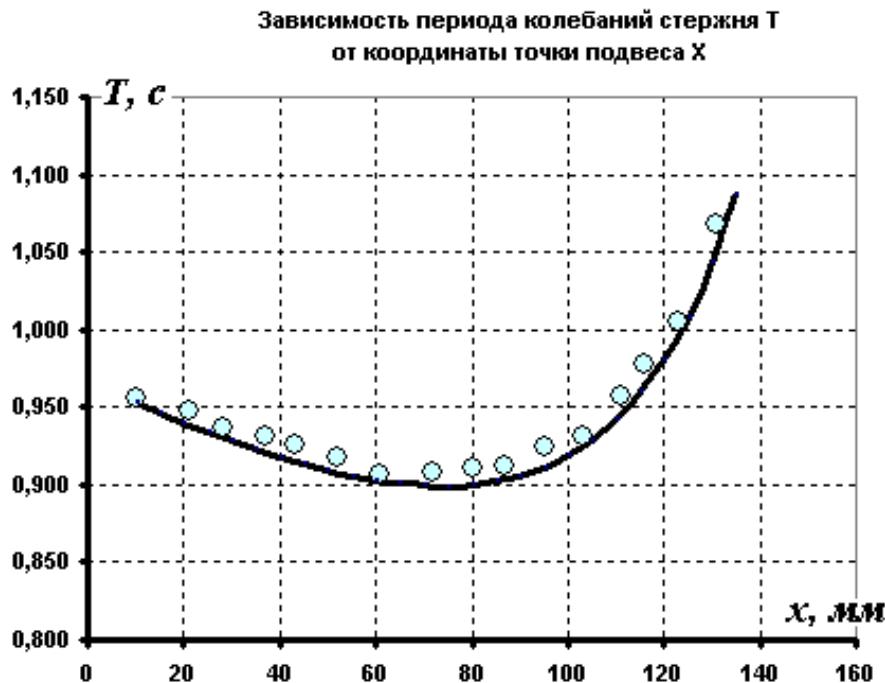


Рис.2 Сравнение с теоретической кривой.

К сожалению, наблюдается систематическое отклонение экспериментальных точек от теоретической зависимости. Для объяснения этого отклонения можно привлечь несколько гипотез: приведенная формула (1) справедлива для идеального стержня и не учитывает влияния узла подвеса; неверно выбрано значение ускорения свободного падения (что сомнительно). В любом случае, во время экспериментального тура думать об этом некогда.

Способ 2.

Провести нормировку на минимальное значение периода. Из формул (1), (3) следует, что

$$\frac{T}{T_{\min}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{a}{z} + \frac{z}{a} \right)}. \quad (4)$$

Эта формула допускает прямую проверку, так величина $a = \frac{L}{\sqrt{12}} \approx 0,101m$ известна с

«хорошой» точностью, важно также отметить, что значение g в этом случае не требуется. Но для проведения расчетов необходимо знать значение минимального периода, в качестве которого возьмем непосредственное минимальное значение из

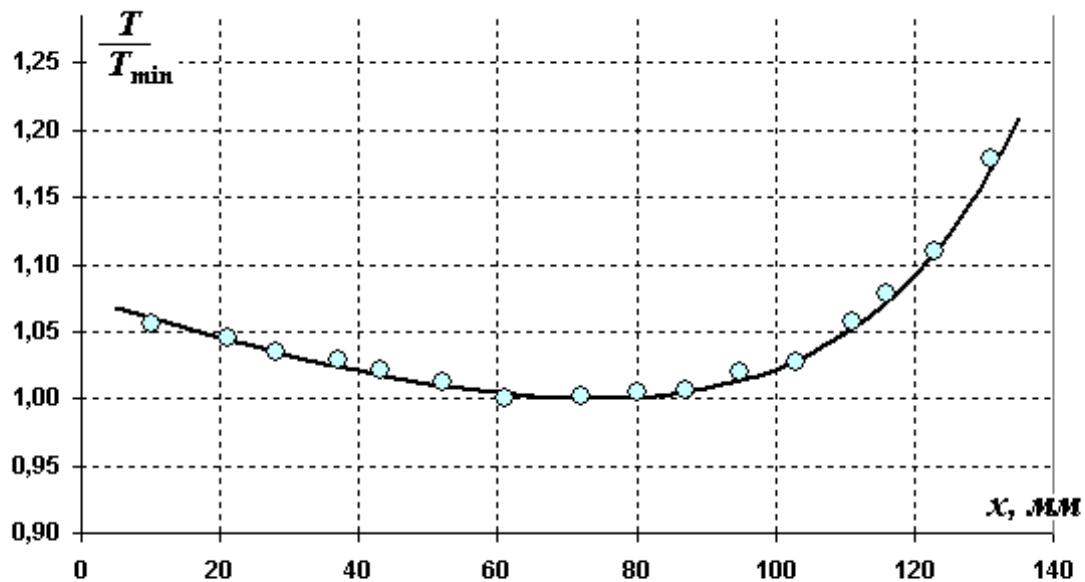


Рис. 3 "относительный период"

результатов измерений $T_{\min} = 0,906c$. На рис. 3 построен график теоретической зависимости с нанесенными экспериментальными точками – здесь соответствие практически полное.

Способ 3.

Провести линеаризацию зависимости (1), для чего представить ее в виде

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \frac{\frac{L^2}{12} + \left(\frac{L}{2} - x\right)^2}{\left(\frac{L}{2} - x\right)}, \quad (5)$$

и построить график зависимости T^2 от параметра $\xi = \frac{\frac{L^2}{12} + \left(\frac{L}{2} - x\right)^2}{\left(\frac{L}{2} - x\right)}$. График этой линеаризованной зависимости представлен на рис. 4.

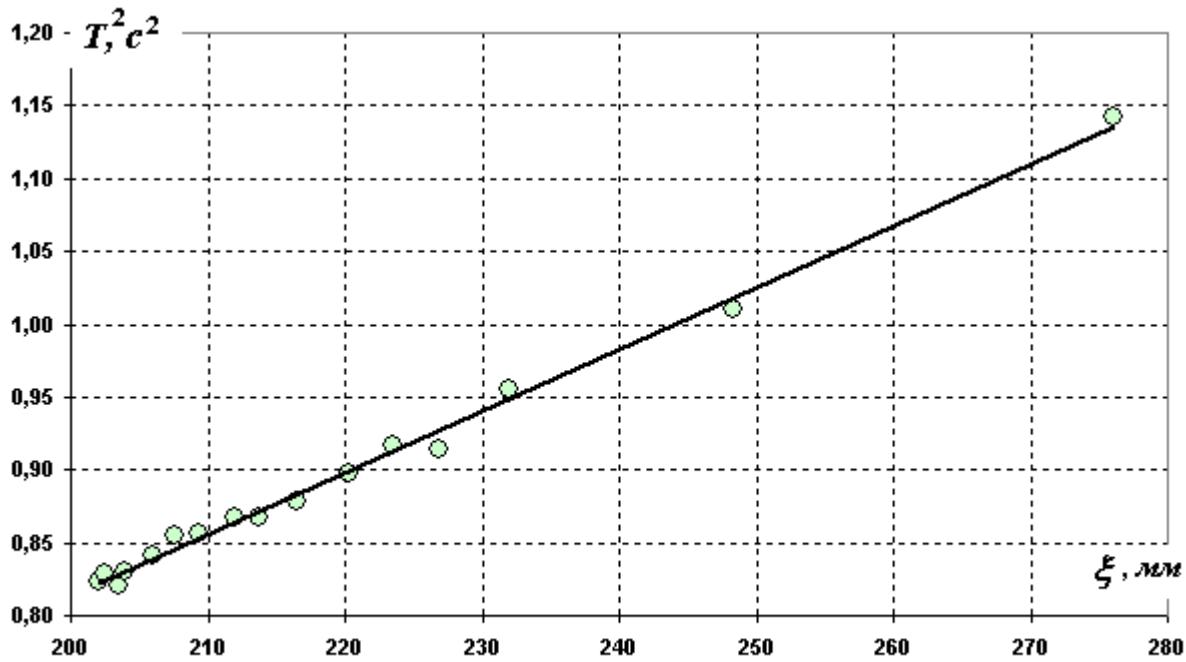


Рис. 4 Линеаризованная зависимость

Этот вид является оптимальным, так как позволяет найти значение ускорение свободного падения. Так из формулы (5) следует, что коэффициент наклона данной прямой равен $K = \frac{\Delta T^2}{\Delta \xi} = \frac{4\pi^2}{g}$. Найденный с помощью графика 4 по методу наименьших квадратов этот коэффициент равен $K \approx 4,23(4,23 \pm 0,17)\frac{c^2}{m}$. По этим данным находим $g = \frac{4\pi^2}{K} \approx (9,4 \pm 0,4)\frac{m}{c^2}$.

2. Для определения минимального периода колебаний можно провести дополнительные измерения вблизи точки минимума: по нашим данным $T_{\min} \approx 0,906c$.

3. Один раз ускорение свободного падения уже определено. Вторым способом определения ускорения является использование теоретической формулы для минимального периода (3). Из этой формулы можно определить $g = \frac{4\pi^2 L}{\sqrt{3}T_{\min}^2} \approx 9,7 \frac{m}{c^2}$. Здесь результат получен более привычный, кроме того, получен с меньшими временными затратами.

Часть 2.

Вторая формула, приведенная в условии еще более страшная, да и неизвестных величин в ней больше. Для приведения ее к виду, допускающему

экспериментальную проверку, заметим, что величина $\frac{ML + 2mL}{2(M + m)} = x_C$ является координатой центра масс маятника с дополнительным грузом. Формулу, приведенную в условии, можно привести к виду

$$\begin{aligned}
 T &= 2\pi \sqrt{\frac{M \frac{L^2}{12} + M \left(\frac{L}{2} - x\right)^2 + m(L - x)^2}{(M + m)g \left(\frac{ML + 2mL}{2(M + m)} - x\right)}} = \\
 &= 2\pi \sqrt{\frac{M \frac{L^2}{3} + mL^2 - (M + m)x_C^2 + (M + m)(x_C - x)^2}{(M + m)g(x_C - x)}} = . \quad (6) \\
 &= 2\pi \sqrt{\frac{M \frac{L^2}{3} + mL^2 - (M + m)x_C^2}{(M + m)g(x_C - x)} + (x_C - x)^2}
 \end{aligned}$$

Если теперь обозначить $\frac{M \frac{L^2}{3} + mL^2 - (M + m)x_C^2}{(M + m)} = a^2$, $(x_C - x) = z$, то получим

формулу, полностью совпадающую с «симметричной» формулой (2). Поэтому ее экспериментальная проверка может быть проведена теми же методами, рассмотренными выше. Положение центра масс и отношение масс груза и спицы легко определить, уравновесив маятник на упоре.

Рассмотрим пример более сложного исследования, включающий несколько принципиально различных экспериментальных методов. В этой задаче основные сложности связаны с теоретической разработкой методики проведения измерений и обработки их результатов, именно с этим и связано название очередной задачи⁵.

⁵ Обратите также внимание на длину условия этой задачи – олимпиадные экспериментальные задания последних лет обычно имеют именно такую длину.



Задача 6. «Мечта теоретика»

Оборудование: полоска прозрачной пленки, лист миллиметровой бумаги, два коробка спичек, источник света, подставка, 2 кнопки канцелярские.

Деформации тел не всегда поддаются точному теоретическому описанию. Даже такой простой вид деформации как изгиб тонкой полоски рассчитать не просто. Поэтому экспериментальное исследование этих проблем чрезвычайно важно.

Полоска пленки располагается между двумя упорами (в качестве которых используйте коробки) на листе миллиметровой бумаги. Используйте следующие обозначения (Рис. 1):

- длина недеформированной полоски L ;
- расстояние между упорами l ;
- величина прогиба h .

Используйте систему координат, в которой форма деформированной полоски симметрична относительно оси Oy . Форма профиля изогнутой полоски описывается уравнением $y(x)$.

Форма деформированной полоски существенно зависит от способа закрепления концов. Вам необходимо исследовать форму полоски в двух случаях, которые описаны далее. Конечной целью работы является установление приближенного уравнения изогнутой пленки $y(x)$.

Помимо непосредственных геометрических измерений оптическими методами можно измерять радиус кривизны изогнутой полоски. Для этого полоску следует осветить параллельным потоком света, так чтобы на миллиметровой бумаге были видны как падающие, так и отраженные от пленки лучи (для этого подставку с пленкой можно слегка наклонить). При этом на бумаге можно наблюдать освещенный участок с резким пиком (каустикой), вершина которого является фокусом отражающей поверхности (см. Фото). Возможно, что вам не удастся увидеть такие яркие картинки отраженных лучей (на фотографиях это отражение от лампы-вспышки), но фокус можно найти всегда!

Выполнение данной работы требует предельной аккуратности. Следите, чтобы полоска располагалась симметрично между упорами – при этом форма освещенной поверхности также должна быть симметричной.

Наконец, последняя подсказка: при поиске точного положения фокуса, образованного центральной частью полоски полезно перекрывать падающий пучок узким препятствием (карандашом или пальцем, наконец) при этом среди

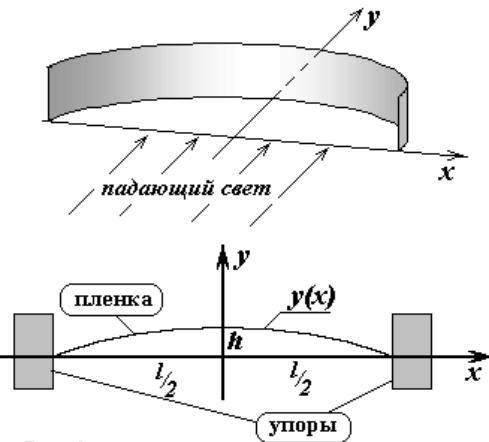
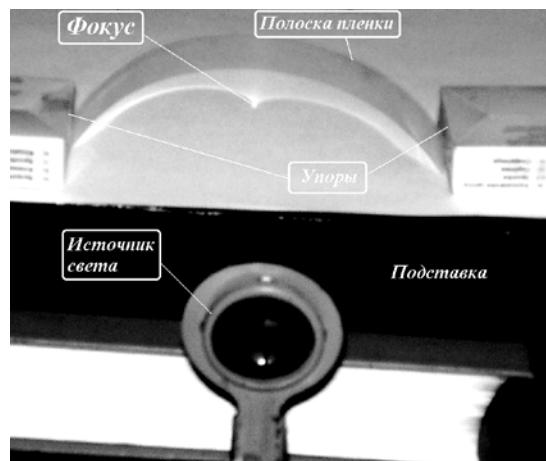


Рис. 1



отраженных лучей можно увидеть отраженную тень (законы отражения для света и тени одинаковы).

Часть 1. Свободные концы.

Расположите полоску пленки между двумя упорами (в качестве которых используйте коробки), концы пленки должны свободно опираться на стенки коробков, но не скользить по ним.

Для упрощения задачи выдвинем две гипотезы:

- А) профиль изогнутой поверхности является участком **параболы**;
- Б) профиль изогнутой поверхности является участком **синусоиды**.

Вам необходимо отдать предпочтение одной из этих гипотез.

1.1 Прямое измерение профиля.

1.1.1 Запишите уравнения профиля поверхности пленки $y(x)$ для каждой гипотезы, считая известными расстояние между упорами l и величину прогиба h .

1.1.2 Установите пленку на миллиметровой бумаге так, чтобы расстояние между упорами составляло три четверти от длины пленки $l = 0,75L$. Измерьте форму профиля пленки $y_{\text{эксп.}}(x)$. Постройте график этой функции. Сравните полученные экспериментальные данные с теоретическими предсказаниями пункта 1.1.

1.1.3 Какая из высказанных гипотез ближе к результатам эксперимента?

Что значит, по вашему мнению, «ближе»?

1.2 Изменение прогиба.

1.2.1 Покажите, что для обеих гипотез справедливо следующее утверждение: фокусное расстояние центральной части изогнутой пленки линейно зависит от

$$\text{параметра } z = \frac{l^2}{h}.$$

Установите теоретический вид этой зависимости для обеих гипотез.

Подсказка: если кривая задана уравнением $y(x)$, то ее радиус кривизны в точке экстремума обратно пропорционален второй производной от этой функции в этой точке $R = |y''|^{-1}$.

1.2.2 Измерьте зависимости величины прогиба $h(l)$ и фокусного $F(l)$ изогнутой пленки от расстояния между упорами. Постройте графики полученных зависимостей.

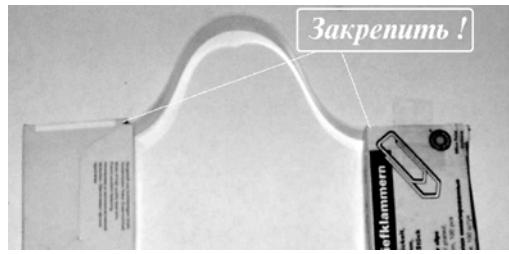
1.2.3 Проверьте выполнение теоретического утверждения п.1.2.1.

Совет: сильно не удивляйтесь – непонятная постоянная составляющая может появиться по многим причинам (например, не идеальна параллельность падающего потока)

1.2.4 На основании данных этого раздела 1.2 ответьте на вопрос: «Какая из высказанных гипотез ближе к результатам эксперимента?»

Часть 2. Закрепленные концы.

Проведите аналогичные исследования формы поверхности для пленки с закрепленными концами (когда грани крепления находятся на одной прямой) – см. Фото.



- 2.1 Выскажите самостоятельно гипотезу о форме профиля, приведете ее уравнение, выразите фокусное расстояние через измеряемые параметры (расстояние между закрепленными краями и величину прогиба).
- 2.2 Измерьте профиль прогиба (при $l = 0,75L$) и сравните его с теоретическим предсказанием.
- 2.3 Измерьте зависимости величины прогиба и фокусного расстояния от расстояния между упорами.
- 2.4 Проверьте теоретическое утверждение п.1.2.1.
- 2.5 Обоснуйте высказанную гипотезу.

Комментарии к условию.

1. Не смотря на название, успех в выполнении данной работы во многом связан с тщательностью и точностью измерений. При проведении измерений необходимо следить, чтобы коробки надежно держались на поверхности. При изменении расстояния между коробками нужно слегка поколебать пленку, чтобы она расположилась симметрично. В качестве источника света лучше использовать диапроектор, так как света от лампочки может не хватать, особенно в незатмненной комнате.

Решение и обсуждение.

Часть 1. Свободные концы.

1.1.1 «Гипотетические» функции имеют вид:

$$\text{для параболы: } y = h \left(1 - \left(\frac{2x}{l} \right)^2 \right) \quad (1)$$

$$\text{для синусоиды: } y = h \cos \left(\frac{\pi}{l} x \right) \quad (2)$$

В этой Части задания длина свободной части полоски равнялась $L = 210\text{мм}$.

1.1.2 Результаты измерения формы профиля (для $l = 150\text{мм}$) приведены ниже.

Таблица 1.

	$X, \text{мм}$	$1 - \left(\frac{2x}{l}\right)^2$	$\cos\left(\frac{\pi}{l}x\right)$	$Y, \text{мм}$
0	-75	0	0	0
5	-70	0,129	0,104	9
10	-65	0,249	0,208	18
15	-60	0,360	0,309	26
20	-55	0,462	0,407	33
25	-50	0,556	0,500	39
30	-45	0,640	0,588	44
35	-40	0,716	0,669	49
40	-35	0,782	0,743	52
45	-30	0,840	0,809	56
50	-25	0,889	0,866	58
55	-20	0,929	0,914	60
60	-15	0,960	0,951	61
65	-10	0,982	0,978	62
70	-5	0,996	0,995	63
75	0	1	1	63
80	5	0,996	0,995	63
85	10	0,982	0,978	62
90	15	0,960	0,951	61
95	20	0,929	0,914	60
100	25	0,889	0,866	58
105	30	0,840	0,809	55
110	35	0,782	0,743	52
115	40	0,716	0,669	49
120	45	0,640	0,588	44
125	50	0,556	0,500	39
130	55	0,462	0,407	33
135	60	0,360	0,309	25
140	65	0,249	0,208	17
145	70	0,129	0,105	8
150	75	0	0	0

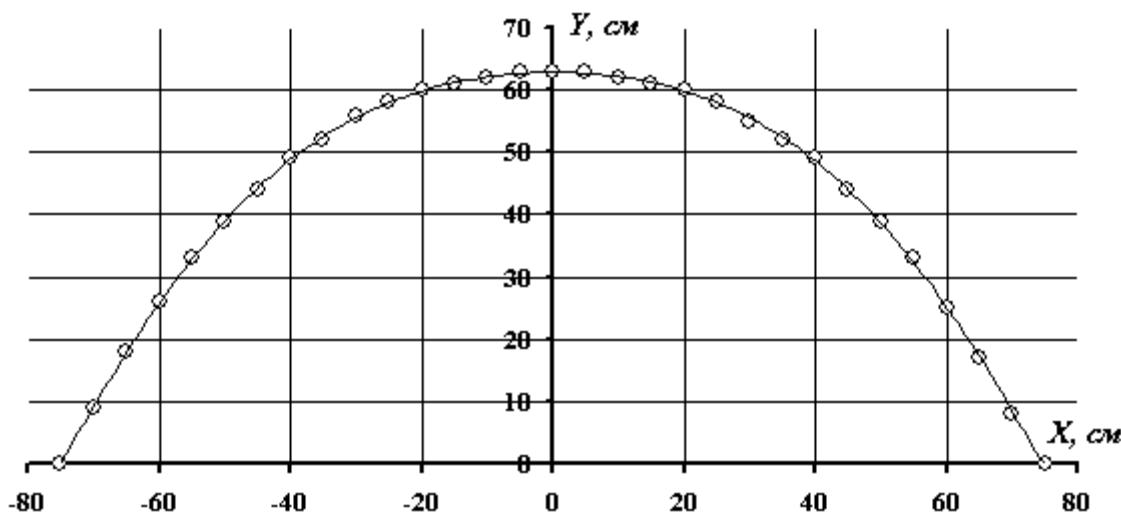


Рис. 1

Построенный по этим данным профиль показан на Рис.1
 «На глаз» определить, является ли данная кривая параболой или синусоидой невозможно, нужно сравнивать точнее. Один из вариантов – построить здесь же теоретические кривые, однако параметры этих функций абсолютно точно неизвестны, поэтому такое сравнение не совсем достоверно. Предпочтительнее «линеаризовать» эти зависимости: для этого можно построить графики зависимости прогиба y от $\xi = \left(1 - \left(\frac{2x}{l}\right)^2\right)$ в случае параболы; и от $\xi = \cos\left(\frac{\pi}{l}x\right)$ в случае синусоиды. Значения этих переменных также представлены в Таблице 1. Линеаризованные графики этих зависимостей показаны на Рис.2.

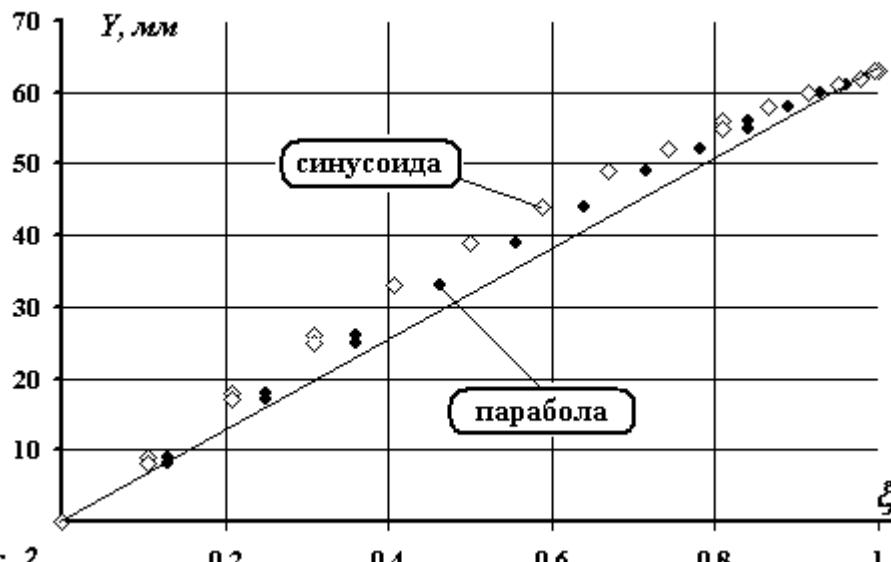


Рис. 2

Как следует из этих графиков, обе функции приблизительно с одинаковой точностью приближаются к линейной зависимости (но обе от нее отличаются). Но, по-видимому, парабола все-таки ближе.

1.2 Изменение прогиба.

1.2.1 Как известно фокусное расстояние изогнутой сферической поверхности равно половине ее радиуса. Это правило справедливо и для любой искривленной поверхности вблизи ее вершины, только в качестве радиуса следует брать радиус кривизны, формула для которого любезно приведена в условии. Поэтому фокусное расстояние

$$\text{для параболы } F = \frac{R}{2} = \frac{1}{2|y''(0)|} = \frac{1}{16} \frac{l^2}{h}; \quad (3)$$

$$\text{для синусоиды } F = \frac{R}{2} = \frac{1}{2|y''(0)|} = \frac{1}{2\pi^2} \frac{l^2}{h}. \quad (4)$$

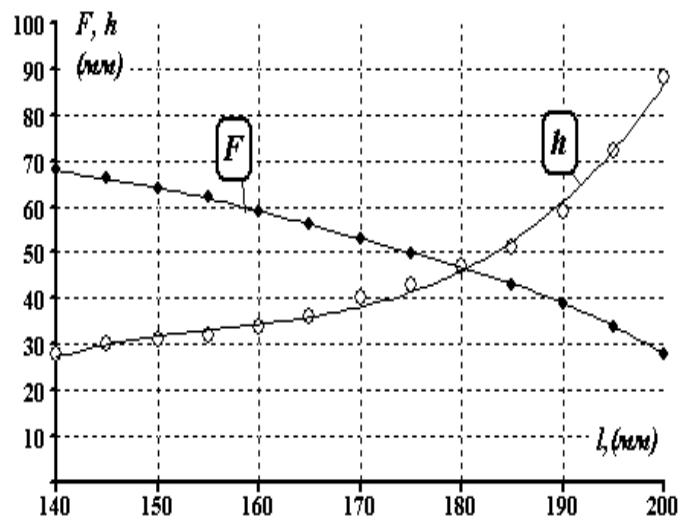
Действительно в обоих случаях фокусное расстояние пропорционально параметру $z = \frac{l^2}{h}$ (прямая пропорциональность – частный случай линейной зависимости).

Более того, коэффициенты пропорциональности очень близки, поэтому надежды увидеть различия тают. Но... тем не менее!

1.2.2 Результаты измерений величины прогиба и фокусного расстояния приведены в Таблице 2 и на Рис.3.

Таблица 2.

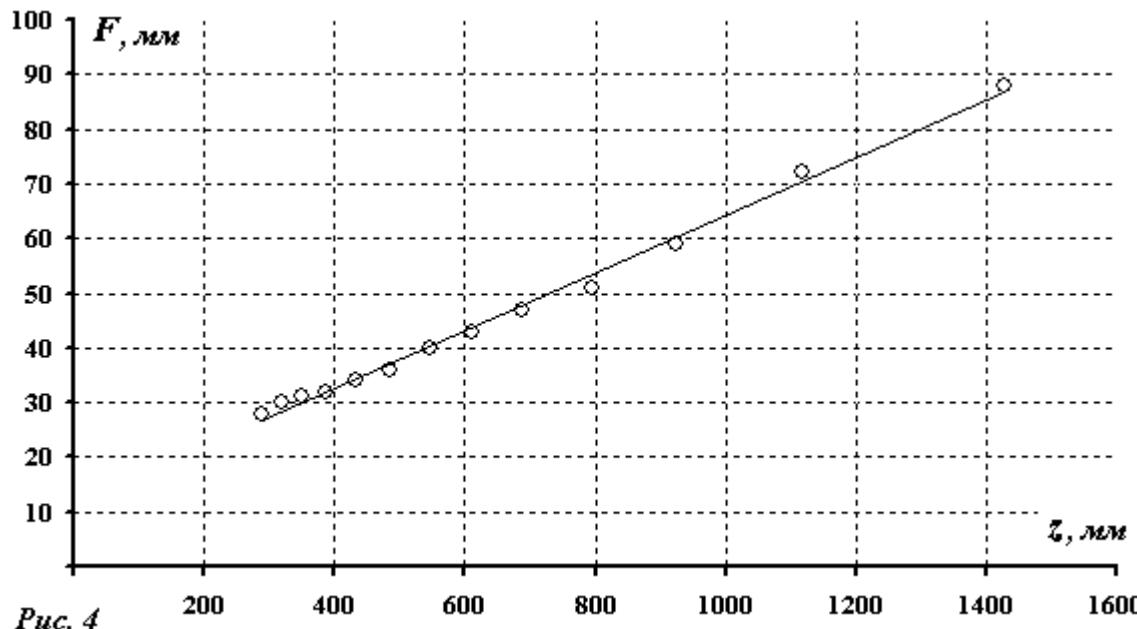
<i>l</i>	<i>h</i>	<i>z</i>	<i>F</i>
140	68	288,2	28
145	66	318,5	30
150	64	351,5	31
155	62	387,5	32
160	59	433,9	34
165	56	486,2	36
170	53	545,3	40
175	50	612,5	43
180	47	689,4	47
185	43	795,9	51
190	39	925,6	59
195	34	1118,3	72
200	28	1428,5	88



Rис. 3

1.2.3 Для проверки теоретического положения, построим график (Рис 4) зависимости фокусного расстояния от указанного параметра *z* - его значения также приведены в таблице 2.

Как видно экспериментальные точки лежат очень близко к прямой, что



Rис. 4

подтверждает высказанное положение. Значение коэффициента наклона этой прямой примерно равно $\frac{\Delta F}{\Delta z} \approx 0,053$, что лежит между теоретическими коэффициентами для параболы $\frac{1}{16} = 0,0625$ и для синусоиды $\frac{1}{2\pi^2} \approx 0,051$. Ближе к синусоиде, для более точного ответа следует считать погрешность определения экспериментального коэффициента наклона прямой на Рис. 4.

1.2.4 Таким образом, можно считать, что обе гипотезы достаточно хорошо (для оптимистов), или достаточно плохо (для пессимистов) описывают экспериментальные данные.

По измерениям фокального расстояния точнее – **синусоида**.

Часть 2. Закрепленные концы.

2.1 Если в предыдущем случае синусоида достаточно хорошо описывала профиль изгиба, то разумно предположить, что и данной ситуации эта функция будет удовлетворительна. Только сейчас участок синусоиды должен быть длиной в период, и сдвинут относительно середины (Рис. 5)

Представленная функция имеет вид

$$y = \frac{h}{2} \cos \frac{2\pi}{l} x. \quad (5)$$

Для нее фокусное расстояние равно

$$F = \frac{1}{4\pi^2} \frac{l^2}{h}. \quad (6)$$

Эта формула аналогична полученным ранее, поэтому для ее проверки можно использовать те же методики, что и в части 1.

В этой Части задания длина свободной части полоски равнялась $L = 180\text{мм}$.

2.2 В таблице 3 и на рис.6 приведены результаты измерения профиля изгиба в рассматриваемом случае для расстояния между упорами $l = 135\text{мм}$. Для сравнения с теоретической формулой на этом же рисунке (для разнообразия) построена теоретическая кривая, рассчитанная по формуле (5). Как видно, соответствие вполне удовлетворительное.

Таблица 3.

$X, \text{мм}$	$Y, \text{мм}$	$X, \text{мм}$	$Y, \text{мм}$
0	0	70	52,5
5	2	75	51,5
10	4	80	50
15	7	85	47
20	11	90	42
25	17,5	95	36
30	24,5	100	30
35	32	105	21
40	38,5	110	15
45	45	115	10
50	48	120	6
55	50	125	3
60	52	130	2
65	53	135	0

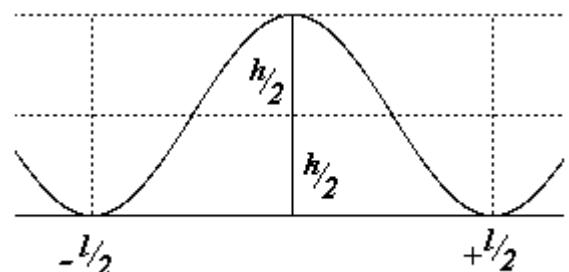


Рис. 5

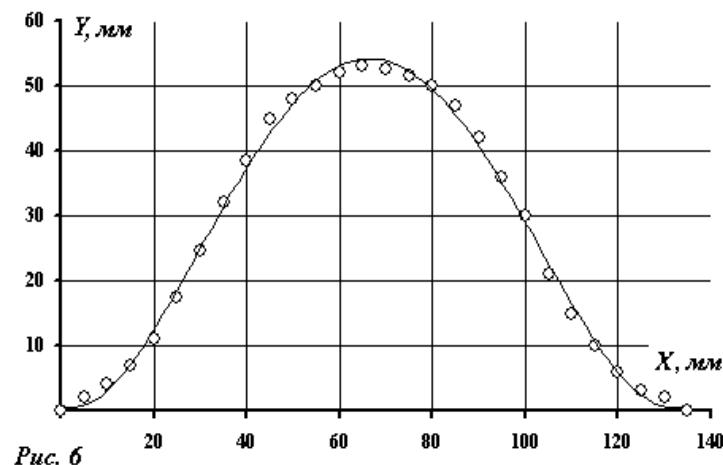
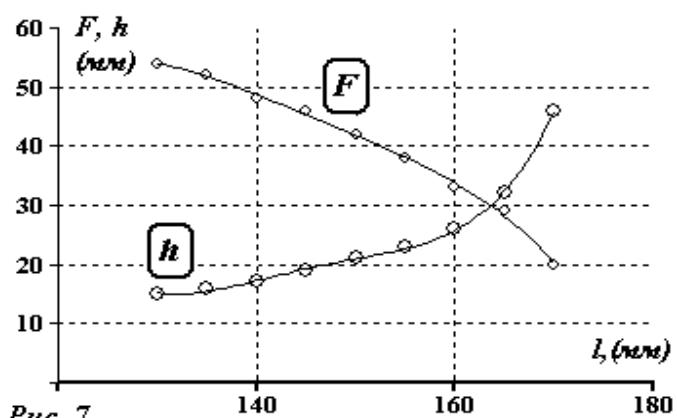


Рис. 6

2.3. Результаты измерений величины прогиба и фокусного расстояния приведены в Таблице 4 и на Рис.7.

Таблица 4.

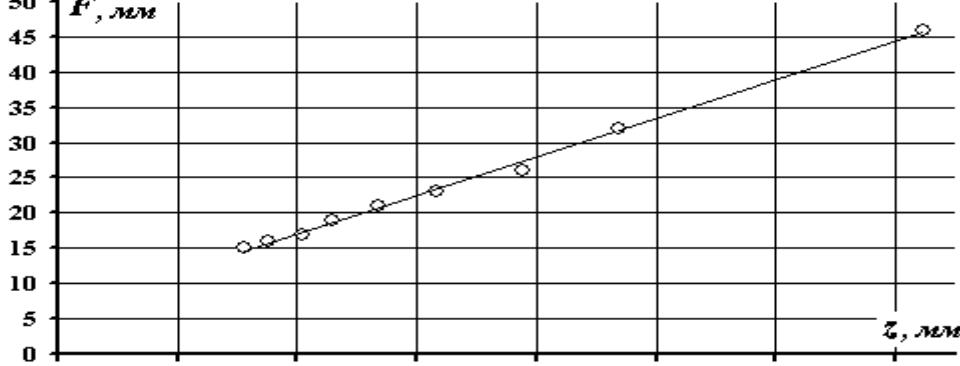
<i>l</i>	<i>h</i>	<i>z</i>	<i>F</i>
170	20	1445	46
165	29	9388	32
160	33	775,8	26
155	38	632,2	23
150	42	535,7	21
145	46	457,1	19
140	48	408,3	17
135	52	350,5	16
130	54	312,9	15



Rис. 7

2.4 Для проверки теоретического положения, построим график (Рис 8) зависимости фокусного расстояния от указанного параметра *z* - его значения приведены в Таблице 4. И данном случае полученная зависимость является линейной с коэффициентом наклона равным $\frac{\Delta F}{\Delta z} \approx 0,027$, что очень близко к теоретическому значению $\frac{1}{4\pi^2} \approx 0,025$.

Rис. 8



2.5 Таким образом высказанная гипотеза о форме профиля изгиба полоски подтверждается, что обосновывается результатами как прямого измерения профиля, так и исследования зависимости фокусного расстояния от величины изгиба.



3.4 Экспериментальное определение вида зависимости.

В этом параграфе мы рассмотрим несколько примеров экспериментальных задач, в которых требуется определить вид функциональной зависимости между физическими величинами. Более простыми следует признать те задачи, в которых вид зависимости задан, а требует только определить ее параметры. В этом случае основным методом является линеаризация с последующей обработкой (графической, или по МНК). Если же вид зависимости заранее не известен, то можно, во-первых, попытаться получить его теоретически; во-вторых, постараться угадать его по виду экспериментального графика. Но даже если вам удалось подобрать функцию, график которой проходит через все экспериментальные точки, необходимо осознать и качественно объяснить (хотя бы себе) полученный результат: *подумать никогда не вредно*. Тем более что часто полученные зависимости требуют обоснования.



Задача 7. Крутильные колебания.

Приборы и оборудование: Линейка ученическая длиной 40 см (2шт), нить, штатив с муфтой, секундомер, магниты керамические.

Закрепите в муфте штатива горизонтально расположенную линейку. С помощью двух нитей привяжите к ней вторую линейку, так, чтобы она также располагалась горизонтально. Линейка, подвешенная на двух параллельных нитях, может совершать крутильные колебания вокруг своей оси и является крутильным маятником. Чтобы колебания меньше затухали, прикрепите к нижней линейке керамические магниты, расположив их симметрично относительно середины линейки. Обозначим: R - расстояние между нитями; L - длины нитей; S - расстояние между центрами магнитов.

Вам необходимо исследовать зависимость периода крутильных колебаний данного маятника от его параметров.

Небольшая подсказка: зависимость периода колебаний от указанных параметров имеет вид

$$T = CR^\alpha L^\beta f(S), \quad (1)$$

где C - постоянный коэффициент, α, β - неизвестные показатель степеней; $f(S)$ - неизвестная функция зависящая от S и не зависящая от R и L .

Задания.

1. Исследуйте зависимость периода колебаний от расстояния между нитями. Определите показатель степени α .
2. Исследуйте зависимость периода колебаний от длины нитей. Определите показатель степени β .
3. Исследуйте зависимость периода колебаний от расстояния между центрами магнитов. Установите вид функции $f(S)$.
4. Качественно объясните полученные зависимости.

Комментарии к условию.

1. Не сложно подобрать оборудование для выполнения этой достаточно интересной задачи: вместо линеек можно использовать любые достаточно тяжелые стержни, магниты можно заменить кусками пластилина.

Обсуждение и решение.

Будем считать, что задача является чисто экспериментальной, и попытаемся определить требуемые зависимости на основании экспериментальных данных.

1. Проведем измерения зависимости периода крутильных колебаний от расстояния между нитями (не изменяя при этом длины нитей и положения магнитов). Результаты измерений приведены в Таблице 1.

Таблица 1

$R, \text{ см}$	32	30	28	26	24	22	20	18
$T, \text{ с}$	1,85	1,98	2,05	2,28	2,35	2,60	2,91	3,40
$R, \text{ см}$	16	14	12	10	8	6	4	2
$T, \text{ с}$	3,61	3,80	4,94	5,40	7,18	10,2	15,5	34,0

Построим по этим данным график.

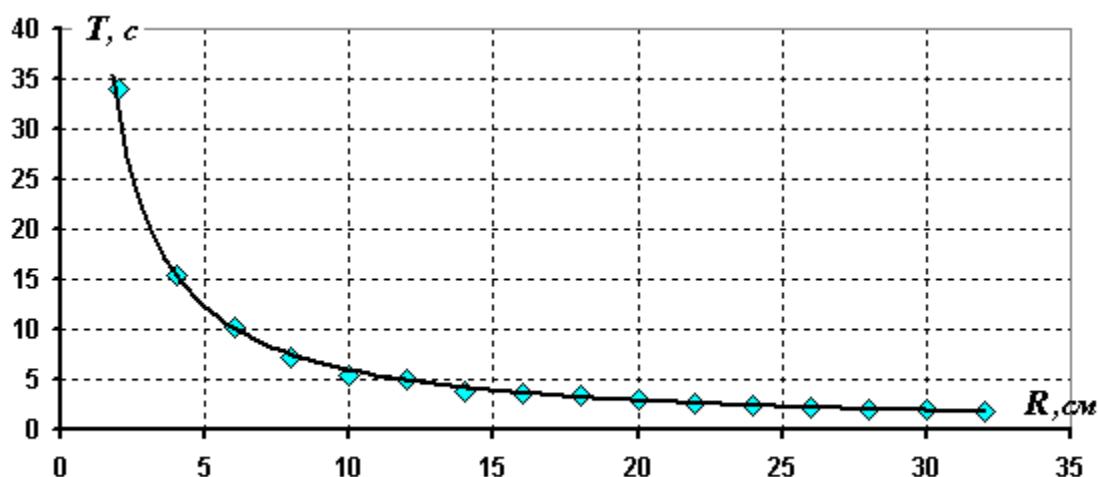


График 1. Зависимость периода колебаний от расстояния между нитями.

Хорошо видно, что при увеличении расстояния между нитями период колебаний убывает, поэтому показатель степени α отрицательный. Но чему он равен? Можно конечно попытаться угадать. Предположим, что $\alpha = -1$, то есть зависимость между периодом колебаний и расстоянием между нитями обратно пропорциональная. Для проверки этой гипотезы, линеаризуем ее, то есть построим

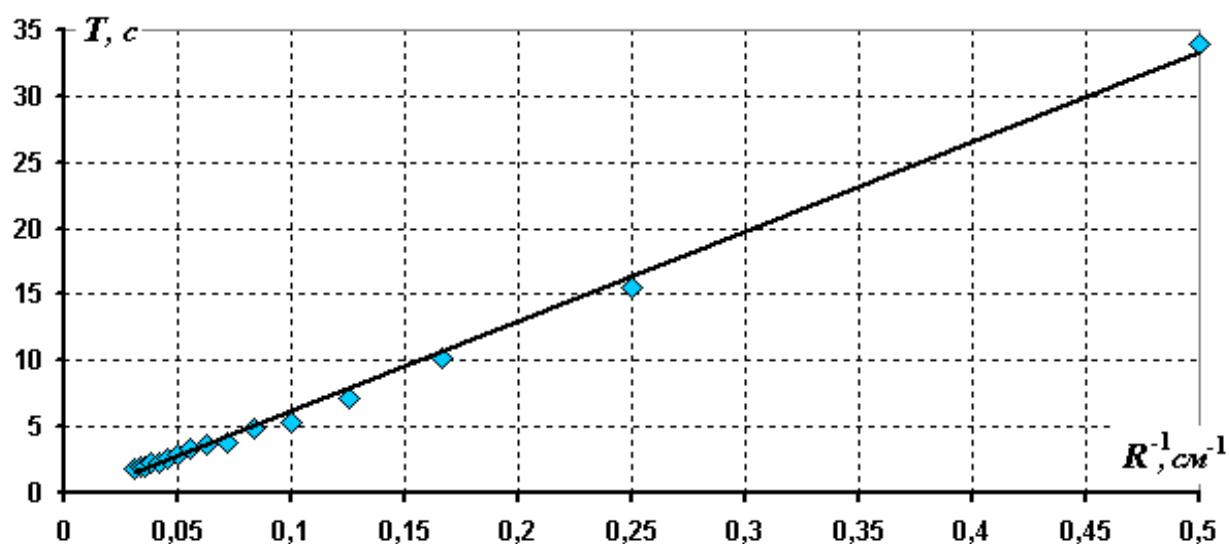


График 2. Обратная зависимость

график зависимости периода колебаний от величины обратной расстоянию $T\left(\frac{1}{R}\right)$.

Кажется, нам сразу повезло, потому что полученная зависимость близка к линейной, что подтверждает сделанное предположение. Однако, где гарантия того, что при другом показателе степени зависимость будет еще «более линейной».

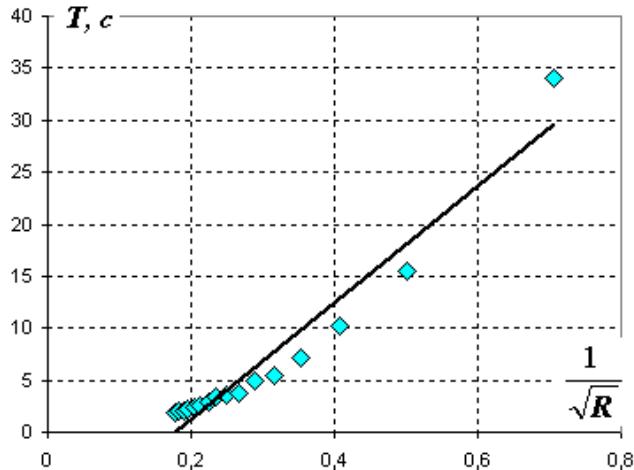


График 3. «Корневая» зависимость.

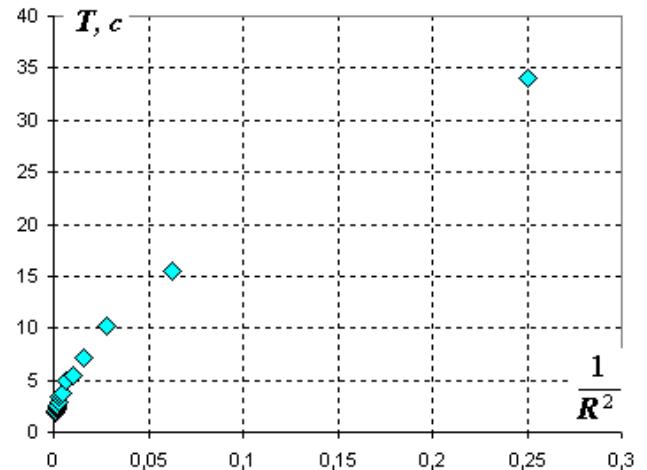


График 4. «Квадратичная зависимость»

Можно, конечно, попробовать⁶ и построить «корневую» $T\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)$ или «квадратичную» $T\left(\frac{1}{R^2}\right)$ зависимости – они заметно хуже, так как дальше от прямой.

Чтобы не заниматься подбором, надо запомнить, что показатель степени проще всего определяется по графику в логарифмическом масштабе («log-log» scale). Действительно, если известно, что функциональная зависимость имеет вид $T = C_1 R^\alpha$, то ее следует прологарифмировать⁷:

$$\ln T = \ln C_1 + \alpha \ln R, \quad (1)$$

и построить график зависимости $\ln T(\ln R)$. График этой зависимости должен быть линейным, а коэффициент его наклона определяет искомый показатель степени. Поэтому он может быть найден либо непосредственно по графику, либо по методу наименьших квадратов. График исследуемой зависимости в логарифмическом масштабе подтверждает зависимость,

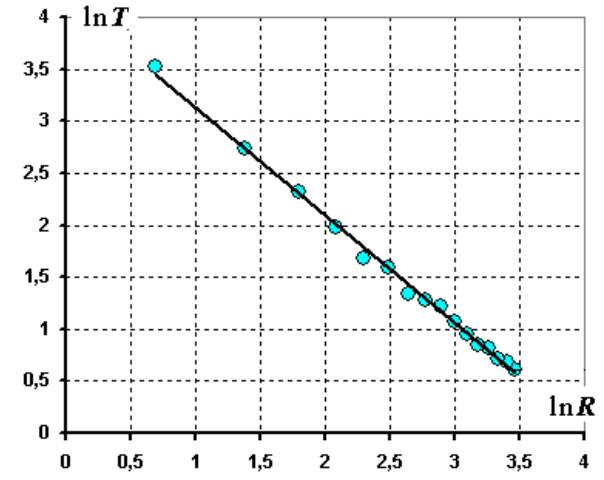


График 5. Логарифмический масштаб

⁶ Только, где взять время? Или компьютер!

⁷ Может быть кого-то пугает логарифм от размерной величины (а кого-то и просто логарифм). Не следует возмущаться – требуемый коэффициент наклона не зависит от выбора единиц измерения: действительно, переход к другим единицам (кратным, дольным) приведет к изменению значения свободного члена $\ln C_1$, но не изменит наклона графика. Поэтому указанная процедура законна и используется повсеместно.

приведенную в условии, так как экспериментальные точки хорошо ложатся на прямую. Кроме того, непосредственно из графика следует, что коэффициент наклона

$$\frac{\Delta(\ln T)}{\Delta(\ln R)} \approx -1,$$

то есть период крутильных колебаний обратно пропорционален расстоянию между нитями. Для завершения обработки можно с помощью МНК определить коэффициенты линейной зависимости (1). Расчет этих параметров привел к результату $\alpha = -1,04 \pm 0,03$. Таким образом, вывод об обратной зависимости между T и R можно считать обоснованным экспериментально. Строго говоря, -1 чуть-чуть не попадает в указанный диапазон. Но, «природа не терпит сложностей», поэтому лучше признать незначительную ошибку в измерениях, и в качестве окончательного значения признать $\alpha = -1$.

2. Теперь проведем измерения периодов крутильных колебаний при различных значениях длин нитей (при неизменных остальных параметрах).

Таблица 2.

$L, см$	69,0	61,0	52,5	49,0	46,0	42,0	37,0	34,0	29,0	25,0	20,0	16,0
$T, с$	2,56	2,49	2,30	2,20	2,13	2,00	1,84	1,75	1,66	1,53	1,32	1,18

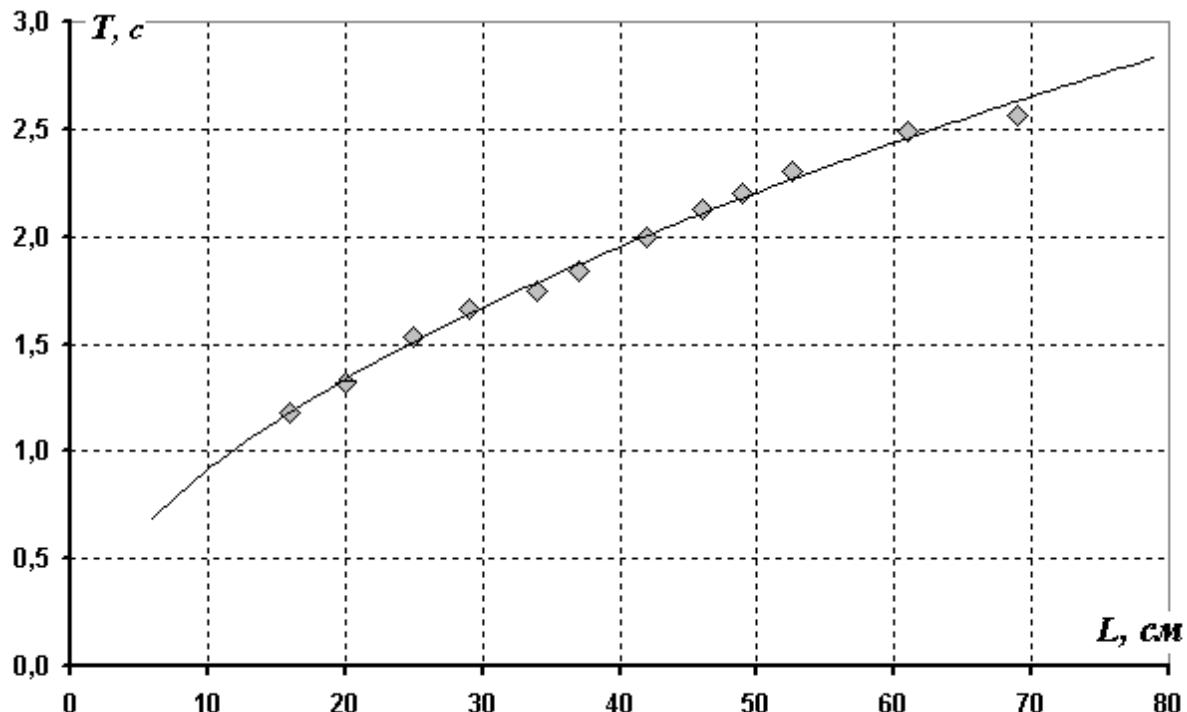


График 1. Зависимость периода колебаний от длины нитей

Нанесем полученные точки на график - опять получена нелинейная зависимость.

Не занимаясь подбором и подгонкой, сразу построим эту зависимость в логарифмическом масштабе. Линейность этого графика подтверждает степенную зависимость между периодом колебаний и длиной нитей. Коэффициент наклона данной прямой близок к $\beta \approx 0,5$, то есть период колебаний пропорционален

квадратному корню из длины нитей. Обработка по МНК дает следующее значение коэффициента наклона (равному показателю степени)

$$\beta = 0,55 \pm 0,03.$$

Не смотря на незначительное отклонение, будем считать, что период колебаний пропорционален квадратному корню из длины нитей

$T = C_2 \sqrt{L}$, тем более, что такая же зависимость справедлива для периода колебаний математического маятника.

3. Наконец, измерим периоды колебаний при различных положениях грузов – магнитов.

Таблица 3.

$S, \text{ см}$	38	36	34	32	30	28	26
$T, \text{ с}$	3,26	3,02	2,94	2,78	2,60	2,40	2,25
$S, \text{ см}$	24	16	14	12	10	8	6
$T, \text{ с}$	2,10	1,45	1,30	1,17	1,02	0,89	0,77

Построим график полученной зависимости.

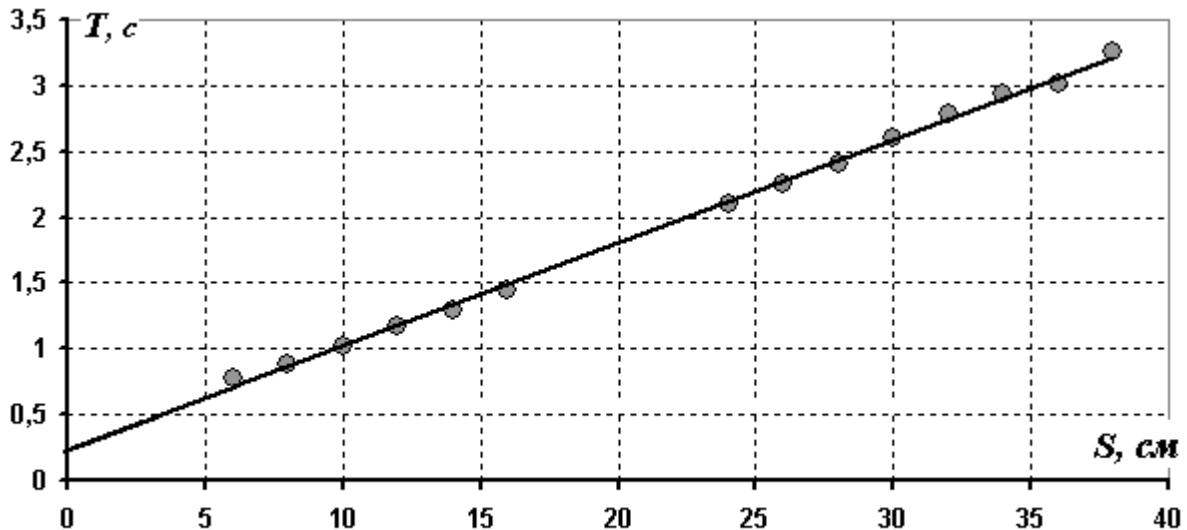


График 1. Зависимость периода колебаний от расстояния между грузами

Может быть и неожиданно, но данная зависимость очень близка к линейной. Анализ по МНК приводит к следующим значениям коэффициентов линейной зависимости $T = aS + b$:

$$a = (7,8 \pm 0,2) \cdot 10^{-2} \frac{\text{с}}{\text{см}}. \quad (2)$$

$$b = (0,24 \pm 0,05) \text{с}$$

Важно подчеркнуть, что зависимость близка к линейной, но не является прямо пропорциональной. Действительно, значение свободного члена b значимо отлично от нуля.

Отметим, что вывод об отсутствии пропорциональной зависимости подтверждается и графиком в логарифмическом масштабе, который заметно и систематически отклоняется от прямой линии. Кроме того, коэффициент наклона аппроксимирующей прямой заметно отличается от +1 (рассчитано по МНК): $a = 0,81 \pm 0,04$.

Этот дополнительный расчет показывает, что степенная зависимость не является универсальной, а только для нее удобен логарифмический масштаб. Поэтому *не ленись, хотя бы примерно, построить график непосредственно по экспериментальным данным*.

4. Итак, на основании экспериментальных данных мы построили следующую формулу для периода кручильных колебаний

$$T = C \frac{\sqrt{L}}{R} (aS + b), \quad (3)$$

значения параметров определены выше (2).

Попытаемся объяснить полученную формулу⁸. Зависимость от длины нитей, такая же, как и для математического маятника – в данном случае в процессе колебаний нити также отклоняются от вертикали. Поэтому полученный результат понятен.

При уменьшении расстояния между нитями уменьшается высота подъема линейки при ее повороте, иными словами, чем больше расстояние между нитями, тем труднее повернуть линейку – увеличивается «жесткость» маятника, что и должно приводить к уменьшению периода. Также можно отметить, что при расстоянии, между нитями стремящемся к нулю, период должен возрастать до бесконечности (кручильная «жесткость» одной нити стремится к нулю). Поэтому и зависимость периода от расстояния между нитями качественно понятна.

Сложнее объяснить зависимость периода колебаний от расстояния между грузами. Изменение этого расстояния приводит к увеличению момента инерции маятника. Однако, момент инерции грузов пропорционален квадрату расстояния между ними. Если массы грузов значительно превышают массу линейки (точнее, если можно пренебречь моментом инерции линейки по сравнению с моментом инерции грузов), то период должен быть прямо пропорционален расстоянию между грузами, при условии, что период пропорционален корню из момента инерции:

⁸ Не слишком сложно вывести точную формулу для периода рассматриваемых колебаний

$T = 2\pi \sqrt{\frac{4JL}{mgR^2}}$, где J - момент инерции линейки с грузами. Но сейчас мы проведем только качественные рассуждения.

если⁹ $T \propto \sqrt{J}$, а $J \propto S^2$, то $T \propto S$.

Полученная экспериментальная зависимость периода от расстояния S слегка отличается от прямо пропорциональной, причиной чего служит момент инерции самой линейки. Следовательно, физически более логично искать эту зависимость в виде

$$T = \sqrt{a_1 S^2 + b_1}. \quad (4)$$

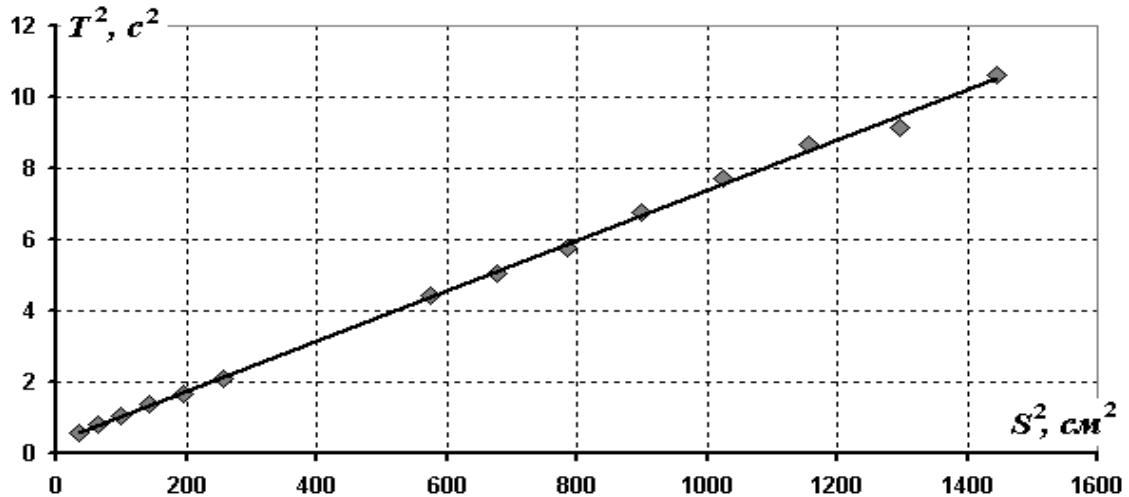


График 3. "Квадратичный" масштаб

Эта зависимость линеаризуется, при возведении ее в квадрат, то есть «квадратичная» зависимость $T^2(S^2)$ должна быть линейна. Проверим это по полученным данным.

Построенный в этом масштабе график также близок к линейному, как и график 1. Однако эта зависимость более обоснована физически. Поэтому следует отдать предпочтение именно зависимости (4). Коэффициенты этой зависимости, рассчитанные по МНК равны

$$a_1 = (7,06 \pm 0,15) \cdot 10^{-3} \frac{\text{с}^2}{\text{см}^2}.$$

$$b_1 = (0,33 \pm 0,12) \text{с}^2$$

Заметим, что $\sqrt{a_1} \approx 0,08 \approx a$ из линейной зависимости.

Окончательно, период крутильных колебаний рассмотренного маятника описывается формулой

$$T = C \frac{\sqrt{L}}{R} \sqrt{aS^2 + b}.$$

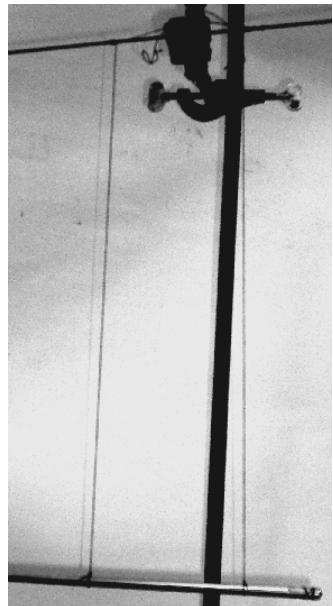
⁹ Символом \propto будем обозначать прямую пропорциональность.

К сожалению, не всегда удается быстро вывести теоретическую зависимость, которую затем можно проверять¹⁰ экспериментально. В таких более сложных для анализа случаях необходимо тщательно обрабатывать экспериментальные данные, причем часто результаты могут быть неоднозначны – один и тот же набор экспериментальных точек может быть аппроксимирован различными способами. Следующий пример иллюстрирует это положение.



Задача 8. «Кручение и верчение»

Движение тела не всегда бывает равномерным или равноускоренным. Однако эти упрощающие модели часто используются для описания реальных законов движения. В данной работе вам предстоит экспериментально исследовать один из таких законов, проанализировать возможность применения знакомых вам моделей и, наконец, попытаться установить эмпирический (опытный) закон движения.

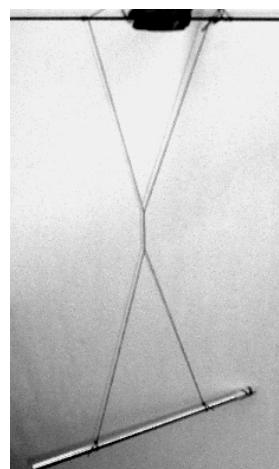


Приборы и оборудование:

1. Штатив с лапкой.
2. Линейка 40 см.
3. Секундомер
4. Нитки
5. Тяжелый металлический стержень.
6. Металлический стержень.

Подвесьте тяжелый стержень на двух параллельных нитях. Верхние концы нитей прикрепите ко второму стержню. Длины нитей должны быть примерно равны 30-40 см, расстояние между ними около 15 см. **Не забудьте указать точные численные значения этих величин в своей работе.**

Вам необходимо исследовать процесс раскручивания стержня, для этого первоначального его надо закрутить (при этом нити, естественно, окажутся перекрученными). Все измерения по изучению раскручивания следует начинать с нулевой скорости вращения.



При закручивании стержня (перекручивании нитей) стремитесь, чтобы нити все время оставались натянутыми. Проще всего этого добиться, если подвешенный стержень просто толкнуть, при необходимости подталкивая его (не забывая при этом подсчитывать число оборотов). Обозначим начальное число оборотов сделанное стержнем - N_0 .

При описании движения стержня в качестве его координаты следует использовать n - число оборотов, которое сделал стержень, при его движении от верхнего положения (когда нити максимально перекручены). Естественно, что это число может быть дробным.

¹⁰ Но не подгонять!

1. Закон движения.

1.1. Исследуйте закон движения стержня при фиксированном числе оборотов начальной закрутки стержня N_0 (эта величина должна быть примерно равна 60-70 оборотам).

Для этого измерьте зависимость времени раскручивания t_n от числа сделанных оборотов n , при фиксированном числе начального числа оборотов N_0 и нулевой начальной скорости.

Постройте график закона движения стержня $n(t)$.

При анализе различных моделей движения рассчитывать погрешности параметров моделей не требуется!

1.2 Приближение равномерного движения. Проанализируйте возможность использования модели равномерного движения для описания реального движения стержня. Для этого

- запишите функцию закона равномерного движения (при нулевой начальной координате);
- постройте график закона равномерного движения (при нулевой начальной координате), описывающий движение стержня с наименьшей погрешностью;
- определите скорость равномерного движения, при которой модель равномерного движения имеет минимальную ошибку;

в данном случае единицей измерения скорости служит $\left[\frac{\text{оборот}}{\text{секунда}} \right]$

- укажите максимальную ошибку в определении координаты стержня n , возникающую при использовании модели равномерно движения.

Проведите данное исследование для всего интервала движения стержня ($n \in [0, N_0]$) и для промежутка времени, когда число сделанных стержнем оборотов изменяется от 30 до 50 ($n \in [30, 50]$);

1.3 Приближение равноускоренного движения. Проанализируйте возможность использования модели равноускоренного движения для описания реального движения стержня. Для этого

- запишите функцию закона равноускоренного движения (при нулевой начальной координате и нулевой начальной скорости);
- постройте график закона равноускоренного движения (при нулевой начальной координате и нулевой начальной скорости), описывающий движение стержня с наименьшей погрешностью;
- определите ускорение, при котором модель равноускоренного движения имеет минимальную ошибку;
- укажите максимальную ошибку в определении координаты стержня n , возникающую при использовании модели равноускоренного движения.

Проведите данное исследование для всего интервала движения стержня ($n \in [0, N_0]$).

1.4 Приближение модели гармонического колебания. Проанализируйте возможность использования модели гармонического колебания для описания реального движения стержня. Для этого

- а) запишите функцию закона гармонического колебания (при нулевой начальной скорости);
- б) постройте график закона гармонического колебания (при нулевой начальной скорости), описывающий движение стержня с наименьшей погрешностью;
- в) определите угловую частоту колебания, при котором модель гармонического колебания имеет минимальную ошибку;
- г) укажите максимальную ошибку в определении координаты стержня n , возникающую при использовании модели гармонического колебания.

Проведите данное исследование для всего интервала движения стержня ($n \in [0, N_0]$).

1.5 Степенная зависимость. Допустим, что закон движения стержня (на всем интервале движения стержня) может быть приближенно представлен в виде

$$n = Ct^\gamma, \quad (1)$$

где C, γ - постоянные величины. При каком значении параметра γ эта формула наиболее точно описывает реальный закон движения? Чему равна максимальная ошибка такого описания движения.

2. Время раскрутки и потенциальная функция.

2.1. Исследуйте зависимость времени полного раскручивания стержня τ (от начального положения, до нижней точки, в которой нити вертикальны) от начального числа оборотов закрутки N_0 .

2.2. Постройте график полученной зависимости $\tau(N_0)$.

2.3 Допустим, что вращение стержня является консервативным (т.е. можно пренебречь сопротивлением воздуха). В этом случае потенциальная энергия стержня однозначно определяется его координатой. Предположим, что зависимость потенциальной энергии стержня от его координаты имеет вид

$$U(n) = Kn^\beta, \quad (2)$$

где K, β - постоянные величины. Определите значение показателя степени β , при котором функция (2) наиболее точно соответствует зависимости, полученной в пункте 2.1.

Комментарии к условию.

1. В работе можно использовать любой массивный (металлический) стержень: от штатива, кусок арматуры и т.д.
2. Значительную часть времени в данной работе занимает обработка результатов измерений. Поэтому эту работу можно задать в качестве домашнего задания, допустимо также использовать компьютер (например, Excel).

Результаты и обсуждение.

Часть 1. Исследования закона движения.

В Таблице 1 представлены результаты измерений времени¹¹ раскручивания (начальная закрутка равнялась 68 оборотов – так уж получилось) до нужного числа n . Рядом построен график закона движения.

Таблица 1.

Число сделанных оборотов n	Время раскручивания t , с
5	13,23
10	21,38
15	25,85
20	30,65
25	36,60
30	39,54
35	45,59
40	48,7
45	52,69
50	56,89
55	61,30
60	65,15
65	67,73

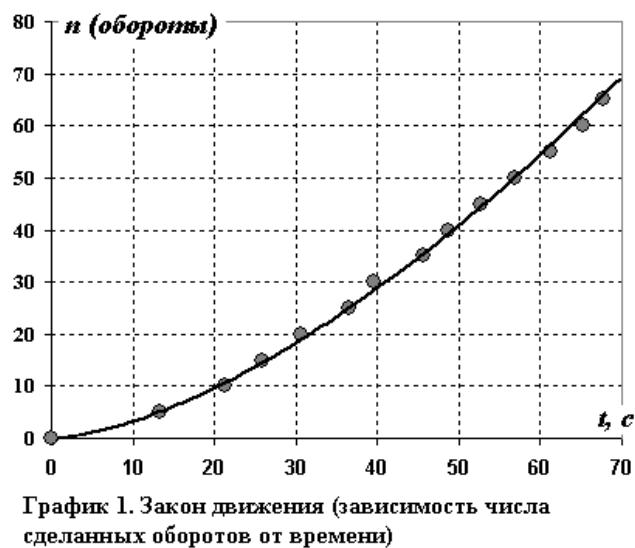


График 1. Закон движения (зависимость числа сделанных оборотов от времени)

Итак, экспериментальные данные получены. Приступим к их анализу – насколько хорошо знакомые модели движения могут описывать движение стержня.

1.2 Приближение равномерного движения.

Координата тела (напомним, в данном случае это число оборотов стержня) при равномерном движении изменяется по закону (при нулевой начальной координате)

$$n_{\text{теор.}} = Vt. \quad (1)$$

График этой функции изображается прямой, проходящей через начало координат. Поэтому на графике, изображающем экспериментальный закон движения, построим прямую, наиболее близко¹² проходящую среди экспериментальных точек (График 2). По построенному графику определяем, что в модели равномерного движения скорость может быть приятой

¹¹ Измерения времени проводились с помощью электронного секундомера, поэтому значения времени приведены с точностью до сотых долей секунды, хотя погрешность измерения определяется временем реакции человека, что составляет величину порядка 0,1 с.

¹² Конечно, это определение требует уточнения. Можно искать такую прямую, чтобы максимальное отклонение от нее было минимально; можно потребовать минимума суммы квадратов отклонений (как в МНК); возможны и другие варианты... В данном случае нас не интересуют эти математические тонкости. Поверьте, различия между прямыми, удовлетворяющим этим различным определениям «близости», лежат в пределах погрешностей измерений. Поэтому, в данной задаче все «оптимальные» теоретические зависимости будем строить «на глаз», а их параметры определять графически. Хотя, наиболее дотошные читатели могут обрабатывать их по методу наименьших квадратов.

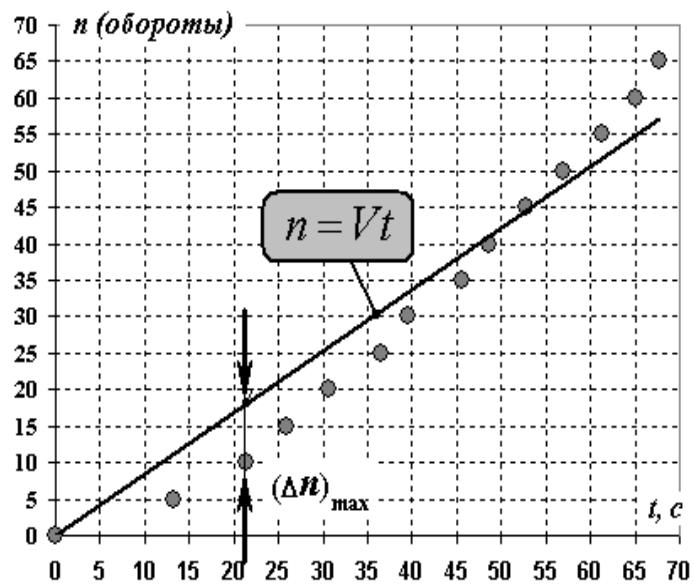
$$V = \frac{\delta n}{\delta t} \approx \frac{55}{65} \approx 0,85 \text{ c}^{-1}.$$

Обратите внимание, что «теоретическая» прямая не проходит через конечную точку – в этом случае максимальное отклонение было бы больше.

Далее в таблицу 2 заносим «теоретические» значения координат, рассчитанные по формуле (1) и находим разности между «теоретическими» и экспериментальными значениями для каждой экспериментальной точки $\Delta n = n_{meop.} - n$, которые также представлены в таблице.

Таблица 2.

t, c	n	$n_{meop.}$	Δn
0	0	0,0	0,0
13,23	5	11,2	6,2
21,38	10	18,1	8,1
25,85	15	21,8	6,8
30,65	20	25,9	5,9
36,60	25	30,9	5,9
39,54	30	33,4	3,4
45,59	35	38,5	3,5
48,70	40	41,2	1,2
52,69	45	44,5	-0,5
56,89	50	48,1	-1,9
61,30	55	51,8	-3,2
65,15	60	55,1	-4,9
67,73	65	57,2	-7,8



Видим: отклонения экспериментальных точек от построенной зависимости достаточно велики и явно превышают погрешности измерений закона движения. Так на первой половине движения относительные отклонения достигают 100%. Максимальное абсолютное отклонение равно $(\Delta n)_{\max} \approx 8$ оборотов.

Если же применить модель равномерного движения к описанию вращения стержня на второй половине его движения, то результаты получаются гораздо лучше. Анализ модели, в данном случае проводится аналогично: проводим прямую, близко проходящую к экспериментальным точкам (начиная с $n_1 = 30$) – График 3. Уравнение этой прямой

$$n_{meop.} = n_1 + V(t - t_1), \quad (2)$$

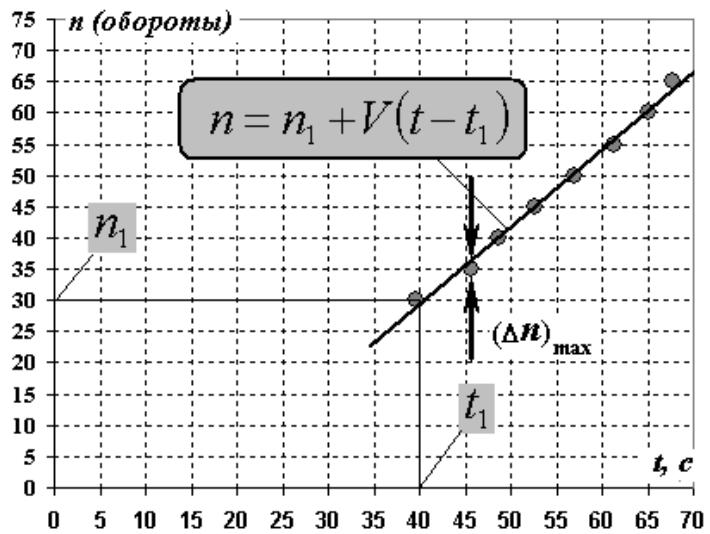
где (n_1, t_1) - «начальные условия» для этого участка движения. По наклону прямой определяем модельную скорость

$$V = \frac{\delta n}{\delta t} \approx \frac{30}{25} \approx 1,2 \text{ c}^{-1}.$$

Затем рассчитываем теоретические значения координат и их отклонения от экспериментальных (Таблица 3).

Таблица 3.

t, c	n	$n_{meop.}$	Δn
36,60	25	25,08	0,08
39,54	30	28,73	-1,27
45,59	35	36,23	1,23
48,70	40	40,09	0,09
52,69	45	45,04	0,04
56,89	50	50,24	0,24
61,30	55	55,71	0,71
65,15	60	60,49	0,49
67,73	65	63,69	-1,31



Максимальное отклонение в данном случае составляет величину $(\Delta n)_{\max} \approx 1,3 \text{ об.}$

Таким образом, в данном случае модель равномерного движения вполне применима.

Можно предложить следующее теоретическое «объяснение» полученного результата: после этапа разгона сопротивление воздуха¹³ стабилизирует скорость вращения. Однако этот вывод не обоснован – на небольших временных участках любая монотонная функция может быть приближена линейной зависимостью¹⁴. Возможно, что точность эксперимента не позволяет обнаружить присутствующее ускорение.

¹³ Как всегда в дискуссиях по поводу механики: во всем виновато трение и сопротивление воздуха.

¹⁴ Помните: всякая функция линейна, если...

1.3 Приближение равноускоренного движения.

Экспериментальные данные однозначно свидетельствуют о возрастании скорости вращения, рассмотрим, можно ли считать это возрастание равномерным, то есть считать движение равноускоренным, описываемым квадратичной функцией¹⁵.

При нулевых начальных скорости и координате, закон равноускоренного движения имеет вид

$$n_{meop.} = \frac{at^2}{2}. \quad (3)$$

Построить «на глаз» параболу, наиболее близко подходящую к заданным точкам затруднительно, поэтому сначала необходимо линеаризовать исследуемую зависимость.

В данном случае эта процедура очевидна: построим график зависимости координаты стержня от квадрата скорости. Если функция (3) применима, то экспериментальные точки на таком графике должны выставляться близко к прямой. Если не слишком привередничать, то можно считать, что это наблюдается на Графике 4.

Хорошо видно, что отклонения точек от прямой носят не случайный, а вполне закономерный характер, следовательно, движение не является строго равноускоренным. Но модель равноускоренного движения может приближенно описывать наблюдаемое движение.

Для определения оптимального «модельного» ускорения проведем на этом графике прямую через начало координат, проходящую близко к экспериментальным точкам. В соответствии с выражением (3) коэффициент наклона этой прямой равен $\frac{1}{2}a$. Поэтому ускорение стержня примерно равно

$$a = 2 \frac{\delta n}{\delta (t^2)} \approx 0,030 c^{-2}.$$

Дальнейший ход работы понятен: рассчитываем по формуле (3) теоретические значения координат и их отклонения (Таблица 4) и строим теоретический График 5 закона движения в модели равноускоренного движения. Максимальная погрешность использованной модели составляет $(\Delta n)_{max} \approx 6 об.$, что заметно меньше, чем погрешность модели равномерного движения (на всем интервале движения).

Если применить модель равноускоренного движения к начальному этапу разгона¹⁶ (скажем, до $n = 30$), то можно получить гораздо лучшее соответствие между моделью и реальными данными. Действительно, первые 6 точек лежат очень

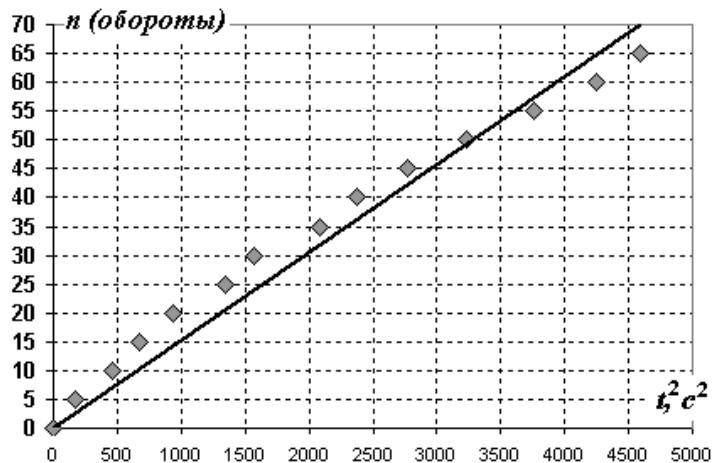


График 4. Зависимость числа оборотов от квадрата времени

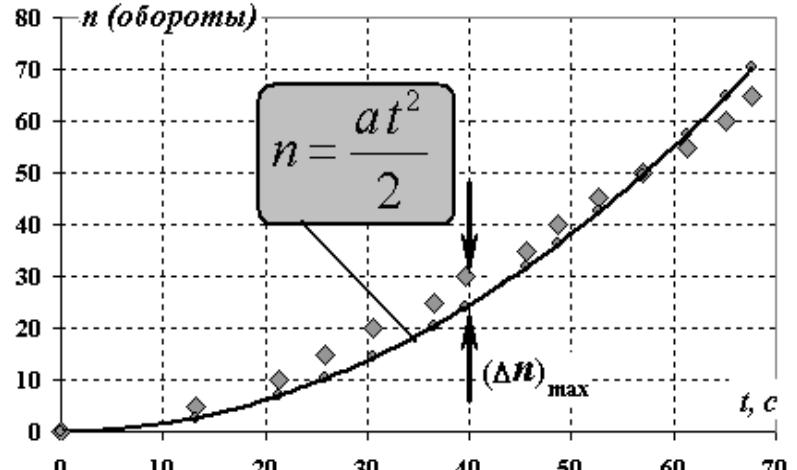
¹⁵ ...она не парабола!

¹⁶ Можете проделать это упражнение самостоятельно.

близко к прямой. Следовательно, модель равноускоренного движения может применяться к описанию вращения стержня, особенно на начальном этапе его разгона.

Таблица 4

t, c	n	$n_{\text{теор.}}$	Δn
0	0	0	0
13,23	5	2,7	-2,3
21,38	10	7,0	-3,0
25,85	15	10,2	-4,8
30,65	20	14,4	-5,6
36,60	25	20,5	-4,5
39,54	30	23,9	-6,1
45,59	35	31,8	-3,2
48,70	40	36,3	-3,7
52,69	45	42,5	-2,5
56,89	50	49,5	-0,5
61,30	55	57,5	2,5
65,15	60	64,9	4,9
67,73	65	70,2	5,2



Дадим и теоретическое «обоснование» этого вывода: ускорение стержня определяется силами натяжения нитей (только эти силы создают ненулевой врачающий момент); эти силы зависят от массы стержня (изменением которой во время движения можно пренебречь) и углами между нитями и стержнем; когда нити скручены, эти углы изменяются мало. Следовательно, момент силы, раскручивающей стержень, остается примерно постоянным, чем и объясняется примерное постоянство ускорения. Признаем, данное объяснение достойно возражений: моменты сил малы (так стержень тонкий), поэтому их малое изменение может существенно повлиять на характер движения. Дискуссия в таком стиле бесплодна — нужны серьезные (и очень не простые) расчеты. Возможно, что применимость анализируемой модели в данном случае объясняется тем, что квадратичная функция точнее аппроксимирует сложную неизвестную функцию.

1.4 Приближение модели гармонического колебания.

Движение стержня действительно является колебательным, достигнув нижней точки (когда нити раскрутились), он по инерции продолжит вращаться и опять закрутит нити (в противоположном направлении). Если бы не неизбежные потери механической энергии из-за сопротивления воздуха (опять!?), неупругих деформаций нити и трения между ними, такое колебательное движение стержня продолжалось бы бесконечно долго. Раскручивание стержня от начальной закрутки до нижней точки составляет четверть периода его колебания. Поэтому в данном разделе фактически речь идет о том, можно ли экспериментальный закон движения описать гармонической функцией вида

$$(N_0 - n)_{\text{meop.}} = N_0 \cos \omega t. \quad (4)$$

Такой ее выбор определен начальными условиями: нулевой начальной скоростью. Заметим, что положению равновесия соответствует $n = N_0$, так как мы отсчитываем обороты от начального положения максимально закрученных нитей. Величина $(N_0 - n)$ соответствует координате, отсчитываемой от нижнего положения стержня, когда нити вертикальны.

Для анализа применимости модели (4) линеаризуем ее, приведя к виду

$$\arccos \frac{N_0 - n}{N_0} = \omega t.$$

Теперь необходимо по экспериментальным данным построить график зависимости $\arccos \frac{N_0 - n}{N_0}$ от времени и рассмотреть, можно ли его приблизенно заменить прямой линией, проходящей, через начало координат. Результат построения показан на Графике 6. Действительно экспериментальные точки выстраиваются в линию, близкую к прямой, хотя и в данном случае отклонения носят систематический характер. Этот график показывает, что модель гармонического колебания также может примяться для приближенного описания наблюдаемого движения. По наклону построенной прямой определяем оптимальное значение круговой частоты колебания:

$$\omega \approx 0,023 c^{-1}.$$

Далее выполняем техническую работу – по найденному значению частоты и с помощью формулы (4) рассчитываем теоретические значения координат и их отклонений от экспериментальных значений. Результаты представлены в Таблице 5 и на Графике 7. В таблице обозначено $(N_0 - n) = n_1$ - координата стержня, отсчитываемая от положения равновесия стержня.

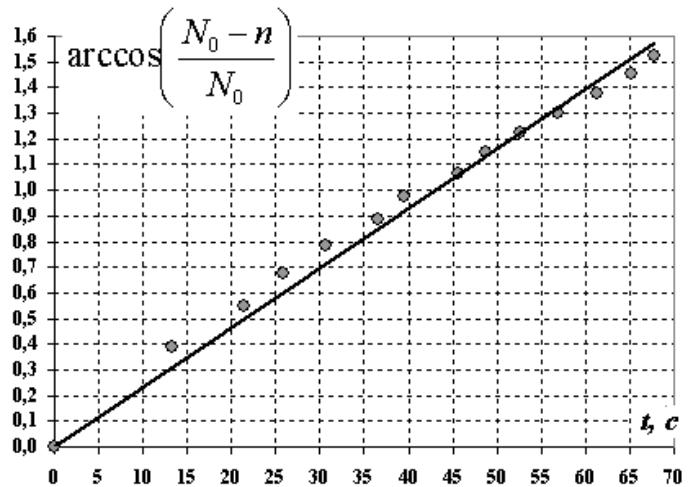
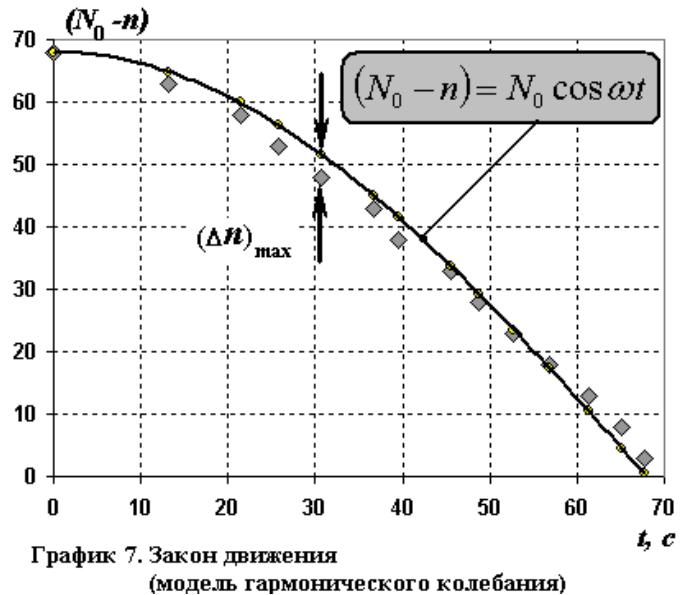


График 6. Модель гармонического колебания
(Линеаризация)

Таблица 5.

t, c	n	n_1	$(n_1)_{meop.}$	Δn
0	0	68	68,0	0,0
13,23	5	63	64,8	1,8
21,38	10	58	59,9	1,9
25,85	15	53	56,2	3,2
30,65	20	48	51,7	3,7
36,60	25	43	45,1	2,1
39,54	30	38	41,6	3,6
45,59	35	33	33,7	0,7
48,70	40	28	29,3	1,3
52,69	45	23	23,6	0,6
56,89	50	18	17,3	-0,7
61,30	55	13	10,5	-2,5
65,15	60	8	4,5	-3,5
67,73	65	3	0,4	-2,6



С удивлением обнаруживаем, что эта модель описывает движение лучше, чем модель равноускоренного движения. Ее максимальная погрешность составляет $(\Delta n)_{\max} \approx 4 \text{ об.}$ - менее 10%.

Применение модели гармонического колебания также можно дать теоретическое обоснование. Мы уже показали, что движение стержня является колебательным. Когда нити раскручены (вертикальны) стержень обладает минимальной потенциальной энергией. Вблизи минимума потенциальная функция может быть примерно заменена параболой. А если потенциальная энергия тела пропорциональна квадрату отклонения от положения равновесия, то тело совершает гармоническое колебания. В этих рассуждениях скрыты два существенных недостатка: во-первых, рассматриваемые колебания не являются «малыми», поэтому не обоснована возможность описания потенциальной функции как квадратичной во всем интервале движения; во-вторых, не всякая функция даже вблизи минимума может быть заменена квадратичной. Так, например, функция $y = x^4$ существенно отличается от функции $y = x^2$, хотя и обе имеют минимум в нуле. Поэтому, возможно, что хорошее соответствие между теоретическими и экспериментальными значениями обусловлено тем, что участок синусоиды и парабола не отличимые «на глаз», с чем мы уже сталкивались в задаче «Мечта теоретика».

1.5 Степенная зависимость.

В данном пункте предлагается отставить в стороне теоретические дискуссии в рамках курса физики средней школы и обратиться к своеобразной «палочке-выручалочке» - степенной функции, позволяющей описывать многие нелинейные зависимости.

Для определения показателя степени приведенной в условии функции $n = Ct^\gamma$, необходимо представить закон движения в логарифмическом масштабе

$$\ln n = \ln C + \gamma \ln t.$$

На Графике 8 показан построенный график, на котором видно, что экспериментальные точки замечательно ложатся на прямую, что свидетельствует о возможности использования степенной функции для описания закона движения, найденного в эксперименте.

Коэффициент наклона данной прямой, совпадающий с показателем степени, в данном случае равен $\gamma \approx 1,57$. Трудно принять такую экзотическую функцию в качестве закона движения. Поэтому примем в качестве показателя степени очень близкое и более «красивое» значение¹⁷

$$\gamma = \frac{3}{2},$$

следовательно, в данной модели теоретический закон движения имеет вид

$$n_{meop.} = C t^{\frac{3}{2}} \quad (5)$$

Так как мы незначительно (но самовольно) изменили показатель степени, то надо изменить и коэффициент пропорциональности¹⁸ C , получающийся из графика 8. Наиболее точно он может быть найден с помощью линеаризации зависимости (5) с последующей обработкой по МНК, однако два часа, отведенных на решение данной задачи, давно истекли, поэтому поступим проще: подберем его по одной из экспериментальных точек (например, последней – она почти точно попала на

$$\text{построенную прямую}): C = \frac{n}{t\sqrt{t}} = \frac{65}{67,7\sqrt{67,7}} \approx 0,116.$$

Дальнейшее известно: по найденным параметрам по формуле (5) рассчитываем теоретические значения и сравниваем их с экспериментальными

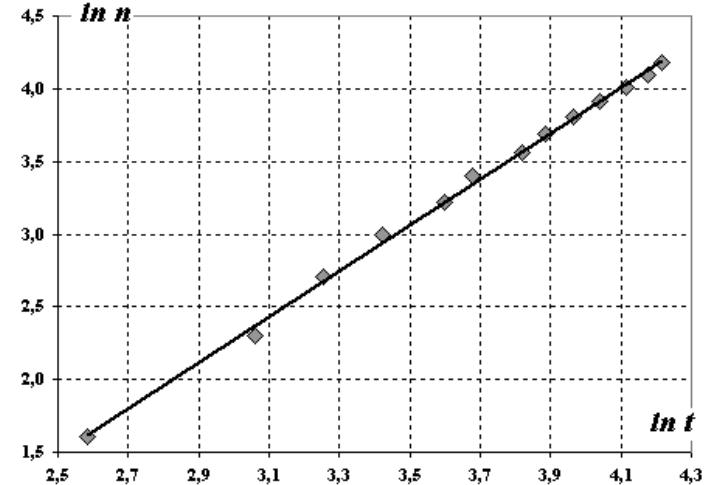


График 8. Закон движения (логарифмический масштаб)

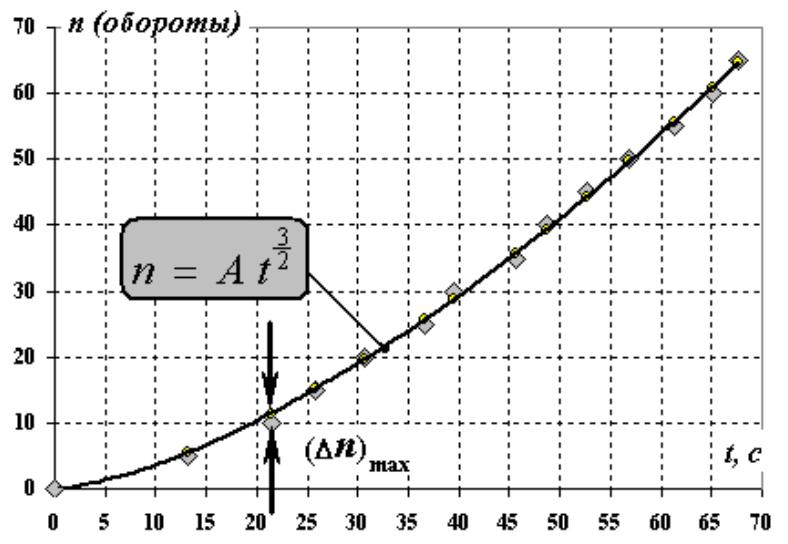
¹⁷ Можно было бы покривить душой и сказать, что отличие между этими значениями лежит в пределах погрешности, но это, к сожалению, не так. В этой, как и во всех остальных задачах приводится численные значения, полученные в реальных измерениях. Расчет проведенный по приведенным данным с помощью МНК, показывает, коэффициент наклона равен $\gamma = 1,57 \pm 0,04$.

¹⁸ Ранее мы подчеркивали, что свободный член линейной зависимости, найденный по МНК (или графически), как правило, определяется с большой погрешностью, поэтому при определении коэффициента пропорциональности в степенной функции необходимо проявлять осторожность. Этот коэффициент экспоненциально зависит от свободного члена, поэтому небольшая ошибка в расчете погрешности может приводить к катастрофическим последствиям в расчете степенной функции.

(Таблица 6, График 9). Получаем наилучшее соответствие между результатами измерений и расчетов.

Таблица 6.

<i>t</i>	<i>n</i>	<i>n_{теор.}</i>	Δn
0	0	0,0	0,0
13,23	5	5,6	0,6
21,38	10	11,5	1,5
25,85	15	15,2	0,2
30,65	20	19,7	-0,3
36,60	25	25,7	0,7
39,54	30	28,8	-1,2
45,59	35	35,7	0,7
48,70	40	39,4	-0,6
52,69	45	44,4	-0,6
56,89	50	49,8	-0,2
61,30	55	55,7	0,7
65,15	60	61,0	1,0
67,73	65	64,7	-0,3



Краткий вывод из проведенного длительного анализа: реальный закон движения строго не описывается ни одной из знакомых моделей движения, хотя с определенной точностью каждая из них может примяться для приближенного описания отдельных этапов движения.

Проведенный анализ также подчеркивает чрезвычайно важное общее положение. Взаимоотношение между экспериментальными и теоретическими методами физических исследований очень сложны: с одной стороны, качественными теоретическими рассуждениями можно «обосновать» чуть ли не любой экспериментальный результат, с другой – некачественная обработка экспериментальных данных может «подтвердить» многие (и различающиеся) теоретические модели. При необходимости альтернативного выбора между различными моделями следует искать такой эксперимент, чтобы его результаты могли быть истолкованы однозначно, а не «в пределах погрешности». Хорошим примером такого эксперимента послужит вторая часть данной задачи, в которой будет показано, что колебательное движение стержня, рассмотренное в п. 1.3, на самом деле нельзя считать гармоническим.

Что же касается возможной дискуссии между сторонниками «теории постоянства скорости» (в которой координата пропорциональна первой степени времени) и «теории постоянства ускорения» (в которой координата пропорциональна второй степени), то ее итог подвел экспериментатор: истина по середине – координата пропорциональна времени в полуторной степени! Пусть теперь теоретики объясняют почему.

Часть 2. Время раскрутки и потенциальная функция.

Поясним различие в измерениях первой и второй частях данной задачи.

В первой части измеряли зависимость времени движения t от **фиксированной начальной точки** N_0 до некоторого **переменного конечного положения** (задаваемого числом оборотов n). Изучение этой зависимости позволило получить закон движения (зависимость координаты от времени) $n(t)$ при фиксированных начальных условиях. Конечно, при наличии современного оборудования эту зависимость можно было бы снять по гораздо быстрее: закрутили стержень, отпустили его и фиксировали его положения через определенные промежутки времени. Но провести такие измерения одному в ручном режиме практически невозможно: необходимо считать обороты, смотреть на секундомер, да еще и записывать результаты! Поэтому и пришлось при каждом измерении возвращать стержень в исходное положение.

Сейчас, во второй части работы нам необходимо измерить зависимость времени движения T от **переменной начальной точки** N_0 до **фиксированного конечного положения** $n = N_0$, которое к тому же является положением равновесия. Если рассматривать движение стержня как колебательное, то измеряемая здесь величина T является четвертью периода колебаний. То есть, фактически, нам предстоит исследовать **зависимость периода колебаний от их амплитуды**.

Хорошо известно, что при гармонических колебаниях период не зависит от амплитуды, поэтому экспериментальное обнаружение такой зависимости однозначно будет свидетельствовать об ангармонизме колебаний.

2.1, 2.2 В Таблице 7 и на графике 10 представлены результаты измерений.

Таблица 7.

N_0	$T, \text{с}$	$\ln N_0$	$\ln T$
5	12,14	1,61	2,50
10	19,55	2,30	2,97
15	24,75	2,71	3,21
20	28,98	3,00	3,37
25	32,95	3,22	3,49
30	38,63	3,40	3,65
35	41,59	3,56	3,73
40	45,74	3,69	3,82
45	51,13	3,81	3,93
50	55,08	3,91	4,01

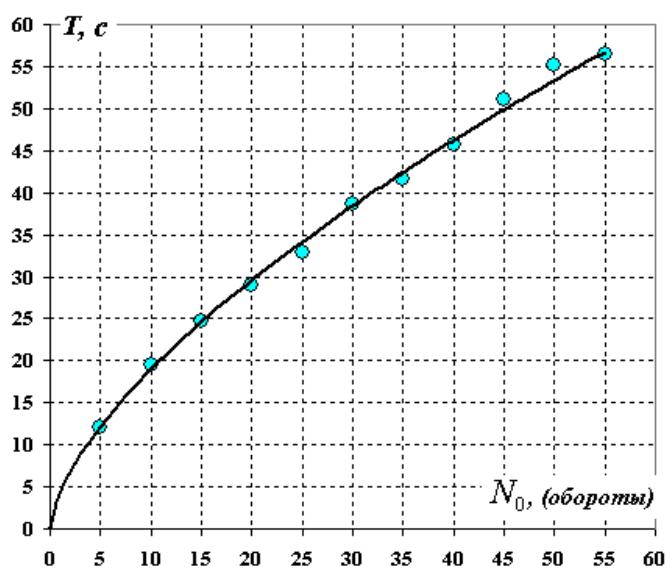
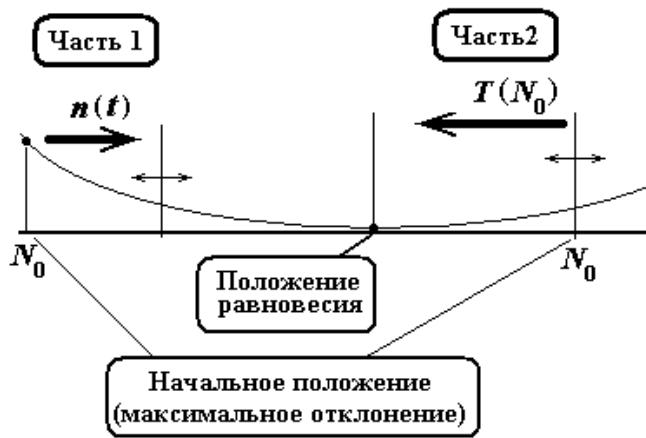


График 10. Зависимость времени раскручивания от начального угла

55	56,49	4,01	4,03
----	-------	------	------

Полученные результаты однозначно показывают, что период колебаний существенно зависит от амплитуды, то есть колебания не являются гармоническими¹⁹.

2.3 Теперь нам необходимо связать между собой зависимость периода колебаний от амплитуды с видом потенциальной функции (зависимости потенциальной энергии тела от его координаты).

Потенциальная функция полностью определяет характер движения тела (в том числе и исследуемую зависимость). Нам же предстоит решить обратную задачу: по зависимости периода от амплитуды найти потенциальную функцию. Отметим, что не всегда эта задача имеет однозначное решение. Но в данном случае, когда задан вид искомой потенциальной функции мы сможем получить однозначный результат.

Сначала решим следующую теоретическую задачу: материальная точка массы m движется без трения вдоль оси X , известна зависимость потенциальной энергии тела от его координаты²⁰ $U(x) = Kx^\beta$, которая имеет минимум в начале координат; требуется найти зависимость периода колебаний от его амплитуды.

Запишем закон сохранения механической энергии $\frac{mv^2}{2} + U(x) = E$ для

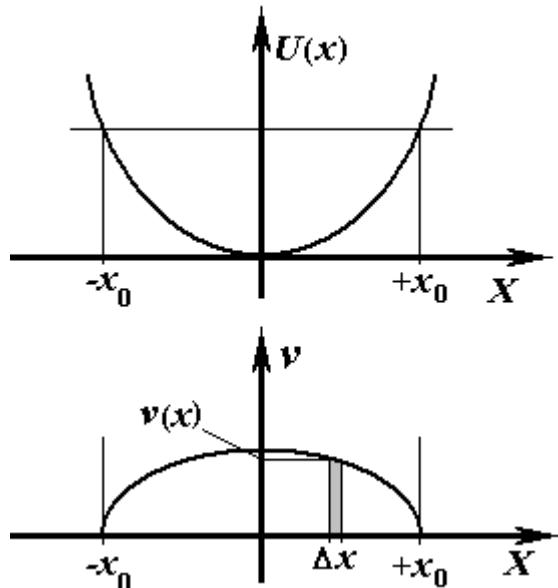
рассматриваемого тела

$$\frac{mv^2}{2} + Kx^\beta = Kx_0^\beta,$$

Здесь полная механическая энергия E равна потенциальной энергии в крайнем положении x_0 . Из последнего уравнения выразим зависимость скорости тела от координаты

$$v(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{m} K(x_0^\beta - x^\beta)}.$$

Два знака перед корнем соответствуют двум возможным направлениям движения, мы будем рассматривать движение в одном, положительном направлении. Итак, потенциальная функция $U(x)$ определяет зависимость скорости тела от его координаты. Эта зависимость, в свою очередь, позволяет выразить зависимость периода колебаний²¹ от амплитуды (начального отклонения). Рисунок иллюстрирует наше алгебраическое



¹⁹ Истину ради отметим, из условия постоянства периода колебаний не следует вывод о том, что колебания являются гармоническими. Возможны и другие типы колебаний, для которых период не зависит от амплитуды, такие колебания называются **изохронными**.

²⁰ Точнее следовало бы написать $U(x) = K|x|^\beta$, но чтобы не загружать и так не простые выкладки, мы будем опускать знак модуля, считая, рассматриваем движение только в положительной области изменения координаты – движение в отрицательной области отражается симметрично.

²¹ Более того, она позволяет также при известных начальных условиях найти и закон движения $x(t)$.

описание. Разобьем весь интервал движения тела $x \in [-x_0, +x_0]$ на малые интервалы Δx_i , в пределах которого изменением скорости можно пренебречь. Тогда время, за которое тело проходит это интервал, равно

$$\Delta t_i = \frac{\Delta x_i}{v(x_i)} = \frac{\Delta x_i}{\sqrt{\frac{2}{m} K(x_0^\beta - x_i^\beta)}}.$$

Тогда время движения от крайнего до положения равновесия (четверть периода колебания) определяется как сумма времен движения по всем интервала разбиения

$$\frac{T}{4} = \sum_0^{x_0} \frac{\Delta x_i}{\sqrt{\frac{2}{m} K(x_0^\beta - x_i^\beta)}}.$$

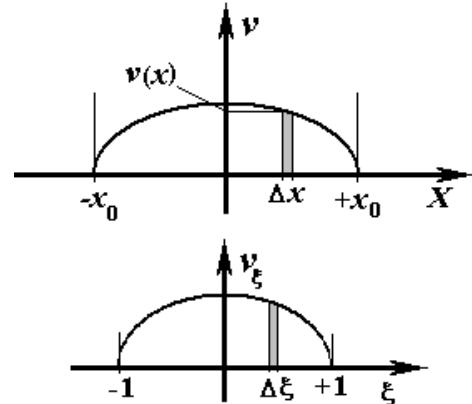
В данной формуле предпочтительнее вместо суммы нарисовать интеграл, но не будем пугать – суть дела от этого не изменяется. Вычисление этой суммы²² – не простая задача, причем необходимо задавать численные значения параметров. Однако для наших целей этого и не требуется, задачу можно решить простой заменой переменной.

Вместо координаты x , введем относительную переменную величину $\xi = \frac{x}{x_0}$ – отношение координаты тела к ее максимальному значению. Можно также сказать, что в качестве единицы измерения длины выбрана амплитуда колебаний. Замечательно, что пределы изменения этой относительной переменной являются универсальными, не зависящими от амплитуды $\xi \in [-1, +1]$. Используя эту переменную, формулу для периода колебаний запишем в виде (с учетом $\Delta x = x_0 \Delta \xi$):

$$\frac{T}{4} = \sum_0^{+x_0} \frac{\Delta x}{\sqrt{\frac{2}{m} K(x_0^\beta - x^\beta)}} = \sum_0^{+1} \frac{x_0 \Delta \xi}{\sqrt{\frac{2}{m} K x_0^\beta \left(1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^\beta\right)}} = x_0^{\frac{1-\beta}{2}} \sqrt{\frac{m}{K}} \sum_0^{+1} \frac{\Delta \xi}{\sqrt{2(1 - \xi^\beta)}}.$$

Прелесть этой записи заключается в том, что фигурирующая в ней сумма зависит только от показателя степени и не зависит от других параметров (в том числе от начального отклонения). Обратите внимание, что в исходной сумме амплитуда колебаний x_0 входила как в выражение для скорости, так и в границы суммирования. Сейчас же сумма является некоторым числом, постоянным коэффициентом (пусть и неизвестным – при необходимости его можно рассчитать), которое мы обозначим

$$\sum_0^{+1} \frac{\Delta \xi}{\sqrt{2(1 - \xi^\beta)}} = C_\beta.$$



²² Соответствующий интеграл вычислить также весьма не просто.

Теперь можно записать формулу для периода колебаний²³

$$T = C_\beta x_0^{\frac{1-\beta}{2}} \sqrt{\frac{m}{K}},$$

которая выражает искомую зависимость периода колебаний от амплитуды.

Итак, если потенциальная энергия пропорциональна $U \propto x_0^\beta$, то период $T \propto x_0^\alpha = x_0^{\frac{1-\beta}{2}}$. Следовательно, искомая связь между показателями степеней имеет вид:

$$\alpha = 1 - \frac{\beta}{2}, \quad \text{или} \quad \beta = 2(1 - \alpha). \quad (6)$$

Таким образом, для определения показателя степени в потенциальной функции β достаточно показать, что зависимость периода колебаний от амплитуды имеет степенной вид и найти значение ее показателя α , чем мы сейчас и займемся.

2.3 Для определения показателя степени в зависимости периода от амплитуды $T = CN_0^{\frac{2}{3}}$ построим экспериментальную зависимость в логарифмическом масштабе

$$\ln T = \ln C + \alpha \ln N_0.$$

Значения логарифмов также приведены в Таблице 7, на графике 11 показана полученная зависимость. С удовлетворением отмечаем, что экспериментальные точки хорошо ложатся на прямую. Коэффициент наклона этой прямой (опять определенный графическим методом) примерно равен $\alpha \approx 0,64$. Данное значение очень близко к простой дроби $\alpha = \frac{2}{3}$, которую мы и примем за

экспериментальное значение показателя степени²⁴.

Итак, экспериментальная зависимость периода колебаний от амплитуды для рассматриваемого движения имеет вид²⁵:

$$T = CN_0^{\frac{2}{3}}.$$

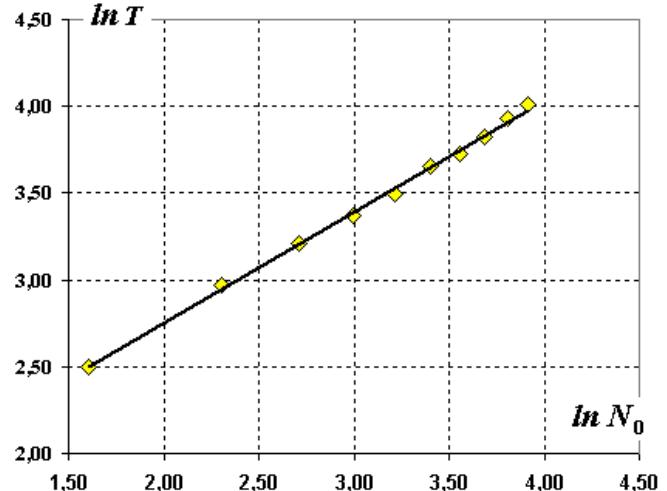


График 11. Зависимость времени раскручивания от начального угла (логарифмический масштаб)

²³ Известная формула для периода колебаний пружинного маятника $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$, является частным

случаем полученного выражения, в котором следует положить $\beta = 2$. В этом частном случае показатель степени в начальном отклонении обращается в нуль. Повезло гармоническим колебаниям – из всех степенных потенциальных функций только для квадратичной колебания являются изохронными.

²⁴ С тем же теоретическим «обоснованием», что и п. 1.5, где $1,57 \pm 0,04 = \frac{3}{2}$. Кстати, $\frac{1}{1,57} \approx 0,64$: случайное ли совпадение?

²⁵ Что-то очень знакомое: куб периода пропорционален квадрату амплитуды – третий закон Кеплера? Жаль, но нет: там квадрат периода пропорционален кубу большой полуоси. Но, все равно, красиво.

С помощью формулы (6) находим искомый показатель степени потенциальной функции

$$\beta = 2(1 - \alpha) = 2\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}. \quad (7)$$

Удивительно, но эти показатели равны. Единственное значение равных показателей степеней. Это является эстетическим подтверждением правильности полученного результата.

Найденная потенциальная функция позволяет рассчитать закон движения, рассмотренный в первой части данной задачи. Интересно, будут ли согласовываться проведенные таким образом результаты с экспериментальными данными? К сожалению, нет. Проведенный расчет закона движения (его пришлось проводить численно, на компьютере) показывает, что при аппроксимации закона движения степенной функцией (как в п. 1.6) показатель степени близок к 2, хотя и немного меньше его. Значит ли это, что результат «близок к Нобелевской премии», или все-таки виновато сопротивление воздуха?

3.5 Как измерить сопротивление с помощью секундомера?

- *Почему ваши часы все время показывают пол шестого?*
- *это не часы, это барометр!*

Научное приборостроение развивается семимильными шагами. К сожалению, организаторы олимпиад¹ не имеют возможности использовать дорогостоящее (и не очень) современное оборудование. Поэтому часто приходится использовать то, что имеется под руками: линейки, мензурки, секундомеры (иногда электронные), часы, школьные вольтметры и амперметры (иногда цифровые мультиметры), весы, спиртовые термометры, стандартный набор грузов - вот практически полный перечень измерительных приборов. Поэтому сначала авторам задач, а потом школьникам приходится измышлять всевозможные уловки, что бы провести достоверные измерения: расширять диапазоны приборов, использовать их не по прямому назначению. Данный раздел посвящен именно этим проблемам. Невозможно полностью перечислить на какие хитрости «голь сильна», поэтому ограничимся некоторыми примерами с небольшими комментариями.

¹ Речь идет о белорусских олимпиадах. Для сравнения в конце книги приведена одна экспериментальная задача, предложенная на Международной физической олимпиаде.

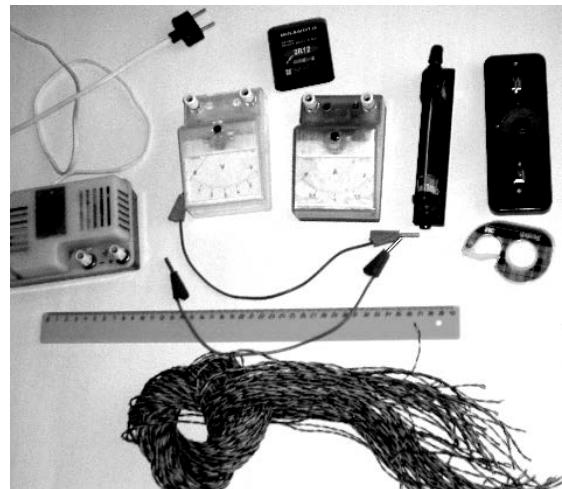


Задача 9. «Очень малые сопротивления»

В данной задаче вам необходимо, используя простое школьное оборудование, измерить малые сопротивления стальной проволоки, соединительного провода, амперметра.

Приборы и оборудование:

1. Вольтметр школьный 6 В.
2. Амперметр школьный 2 А.
3. Реостат.
4. Ключ
5. Провода соединительные.
6. Линейка 40 см.
7. Источник питания ЛИП, или батарейка 4,5 В.
8. Скотч узкий (один на всех)
9. Проволока стальная без изоляции.



Выберите два одинаковых соединительных проводка (в наборе они должны быть отмечены). В дальнейшем амперметр и вольтметр подключайте к другим приборам только с помощью этих выделенных проводов – вам необходимо будет определить их сопротивление!

Изготовьте реохорд (если его не сделали для вас другие): натяните стальную проволоку без изоляции вдоль шкалы линейки и закрепите ее концы с помощью скотча. Вам придется «подключаться» не только к концам проволоки, но и к ее центральной части – последнее проводите с помощью кусочка жесткой проволочки – щупа. Для лучшего контакта хорошо прижимайте пальцами щуп к боковой поверхности проволоки при измерениях.

В дальнейшем на схемах данный реохорд обозначается как удлиненный переменный резистор, «традиционный» реостат обозначается «традиционно»:



Часть 1. Сопротивление проволоки.

Соберите электрическую схему, показанную на рисунке 1.

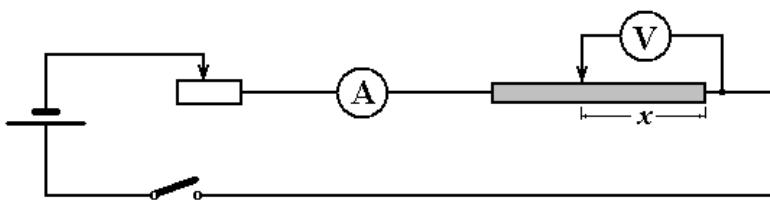


Рис. 1

1.1 Измерьте зависимость напряжения на участке проволоки (длиной x) и силы тока в цепи от длины участка x при двух положениях движка реостата.

Сила тока в цепи не должна превышать 1,3 А.

1.2 Постройте графики полученных зависимостей. Кратко объясните вид полученных зависимостей.

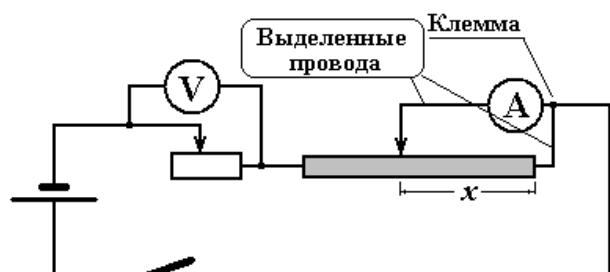
1.3 Используя полученные данные, определите r - сопротивление 1 мм стальной проволоки.

Часть 2. Реостат.

2.1. Используя имеющиеся приборы, установите движок реостата так, чтобы его сопротивление между выводами равнялось $R_0 = 1,3 \text{ Ом}$. Нарисуйте схему, с помощью которой вам удалось выполнить данное задание. Приведите результаты необходимых измерений.

В дальнейшем сопротивление реостата не изменяйте!

Часть 3. Амперметр и соединительные провода.



3.1. Соберите схему, показанную на рис. 2 .

Рис. 2

Амперметр подключайте с помощью выделенных соединительных проводов. Один из этих проводов присоедините к концу проволоки реохорда, к концу второго подключите щуп. Провод от источника подключайте к клемме амперметра, а не к концу проволоки реохорда.

Будьте аккуратны при проведении этих измерений (как, впрочем, и остальных).

3.2 Измерьте зависимости силы тока через амперметр и напряжения на реостате от длины участка проволоки x , к которой подключен амперметр. Постройте графики этих зависимостей.

3.3 Получите теоретическую формулу, связывающую измеренные значения силы тока и напряжения с длиной участка x . В эту формулу должны входить и параметры вашей цепи: сопротивления реостата R_0 , сопротивление амперметра R_A , сопротивление единицы длины проволоки реохорда r , сопротивление выделенных соединительных проводов $R_{c.n.}$.

3.4 Используя полученные в п. 3.2 экспериментальные данные, проверьте справедливость полученной формулы. Определите сопротивление амперметра и выделенного соединительного провода.

***Погрешность результатов в части 3 оценивать не следует,
так как измерения носят оценочный характер.***

Комментарии к условию.

1. Основная проблема при подготовке оборудования к данной задаче заключается в изготовлении реохорда – лучше это сделать заранее. Обычный реохорд с проволокой высокого сопротивления не годится, он имеет слишком высокое сопротивление, медная проволока слишком малое, поэтому оптимальной является тонкая стальная проволока, например, одна жила из стального многожильного провода.
2. Важно также обеспечить хороший контакт между проволокой и подвижным контактом (в условии назван щупом). Так как в задаче речь идет об измерениях сопротивлений в несколько сотых Ома, то незначительное изменение сопротивления контакта приводит к сильному искажению результатов и даже к невозможности их получения. Хорошим щупом может служить разъем типа «крокодил».
3. Данная задача предлагалась для учеников девятых классов, поэтому ее условие переполнено явными и неявными подсказками, некоторые из них могут быть опущены (например, электрические схемы).
4. Обращаем внимание на необходимость использования двух одинаковых соединительных проводков (лучше чтобы они были стальными – у них сопротивление немного больше, чем у медных) при подключении амперметра в Части 3.
5. Если в качестве источника используется батарейка, то подключать ее к цепи следует только на время измерений, отключая ее от цепи с помощью ключа, когда измерения не проводятся. Иначе батарейка может быстро разрядиться!

Обсуждение, результаты, рекомендации.

При обсуждении решения данной задачи попытаемся воспроизвести возможный ход рассуждений ученика (заметим – очень хорошего ученика). С ним мы еще не раз встретимся в дальнейшем.



Условие длинное и подробное, попытаемся разобраться в нем так, чтобы четко представлять себе задачу целиком. Тогда при проведении измерений будет ясно, на что обратить особое внимание.

В первой очень традиционной части задачи фактически измеряется зависимость сопротивления от ее длины. Скорее всего, что сопротивление реостата заметно выше сопротивления проволоки реохорда, а сопротивление вольтметра значительно превышает сопротивления остальных элементов цепи. Поэтому при проведении измерений (при изменении положения подвижного контакта) сила тока в цепи изменяться не будет. Так как вольтметр обладает большим сопротивлением, то током через него можно пренебречь и считать, что сила тока через все участки проволоки реохорда одинакова и равна силе тока, показываемой амперметром. Результаты измерений должны дать значение сопротивления единицы длины проволоки: очевидно, что напряжение должно быть пропорционально длине участка проволоки x . Силу тока измеряем, напряжение измеряем – сопротивление найдем и разделим на длину участка: вот и все! А зачем нужна зависимость? Для того чтобы не скучал.

Часть вторая нужна для проведения измерений в последней, основной части работы.

В схеме части 3 вольтметр с реостатом известного сопротивления работает в качестве измерителя силы тока (могли бы дать и второй амперметр). Амперметр подключается параллельно проволоке (оригинально – всегда учили, что амперметр включается в цепь последовательно). По-видимому, сопротивления амперметра и соединительных проводов сравнимы с сопротивлением проволоки реохорда (которое должно быть известно из части 1), поэтому будет проходить какое-то разделение токов между реохордом и амперметром, поэтому зависимость силы тока от длины участка

проводок будет какой-то «хитрой» - ее надо будет получить теоретически и посмотреть как из нее «вытянуть» требуемые величины сопротивлений амперметра и вольтметра.

Взглянем на приборы – обычные знакомые школьные амперметр и вольтметр, с грубыми шкалами, особо точно не намеряешь! Зато проволока натянута на линейку с миллиметровыми делениями, длину участка проволоки можно измерять достаточно точно. Поэтому **во всех измерениях, связанных с изменением длины части реохорда, удобно перемещать контакт до тех пор, пока стрелка прибора не совпадет с одним из делений шкалы** – в этом случае следует определять положение контакта x . Таким способом достигается большая точность измерений² (нет необходимости «высматривать» доли делений шкалы амперметра и вольтметра).

Приступаем к измерениям. Собираем схему 1. Движок реостата на середине. Подключаем к источнику – ток есть, амперметр что-то показывает. Стрелка вольтметра практически на нуле. Ясно, какое напряжение на проволоке? Как его увеличить – подключить к большему куску проволоки – точно растет. Как еще? Увеличить силу тока: двигаем движок реостата, сила тока изменяется, напряжение на тоже. Жаль, что нельзя сделать ток максимальным. Зачем это ограничение³ в условии? Максимальное значение напряжение, которого удается достичь – 0,6 В. Хороша зависимость – по трем точкам. Но этого должно быть достаточно, сомнений в справедливости закона Ома для стальной проволоки нет, а прямую можно построить и по двум точкам. Еще одна проверка – реостат не трогаем, двигаем контакт реохорда: напряжение изменяется, сила тока практически нет, предварительные рассуждения оказались верными.

Итак, измеряем. Сила тока ставим 1,3 А (это же меньше, чем полтора ампера). Двигаем контакт, глядя на вольтметр, добиваемся того, чтобы стрелка поточнее остановилась на первом делении (0,2 В) – где оказался контакт? Десять сантиметров, точнее $x = 101\text{мм}$. Этот результат в таблицу 1. Двигаем контакт дальше, гоним стрелку до следующего деления (0,4 В). Что с «иксом»? Что-то непонятное: $x = 243\text{мм}$! А должно быть в 202 мм, или около того. Не мог же я ошибиться на 4 сантиметра. Повторю измерения – все повторяется. Видно, не зря заставили измерять зависимость! Проведу все измерения, а там посмотрим.

Так, все результаты получены и занесены в таблицу 1.. Жаль, что для силы тока в 1 ампер, всего две точки. Строим график 1. Для большей силы тока все три точки на одной прямой (это радует). Для меньшего тока две точки тоже легли на прямую (а как же иначе!)

Таблица 1.

$U, \text{ В}$	$x, \text{ мм}$	
	$I = 1,1\text{A}$	$I = 1,3\text{A}$
0,2	175	101
0,4	385	243
0,6		376

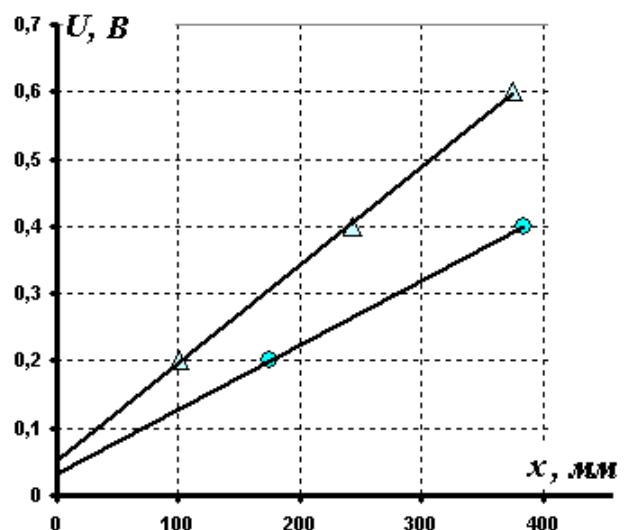
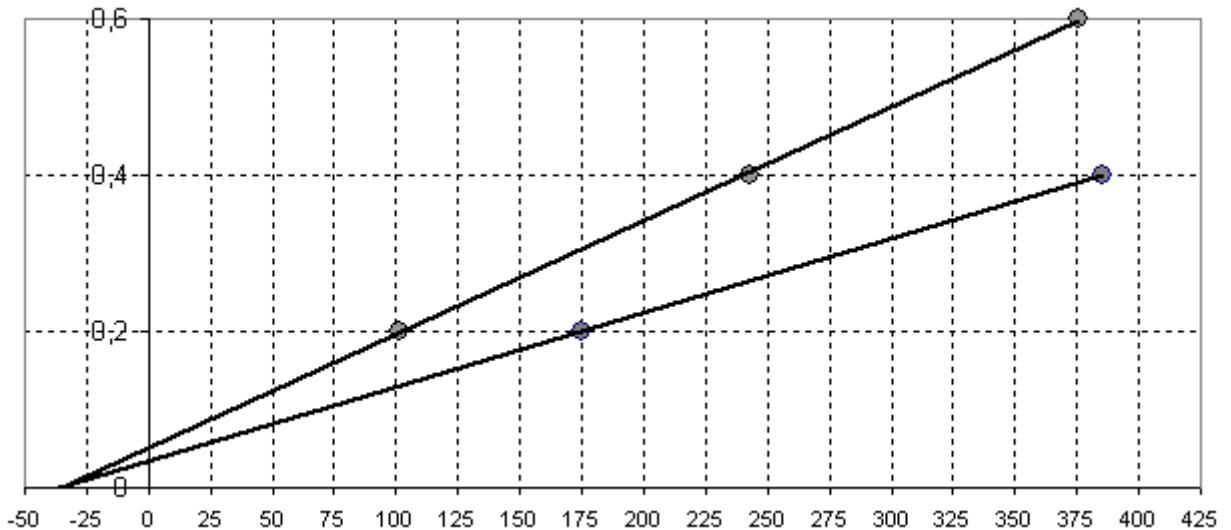


Рис. 1 Зависимость напряжения от длины участка проволоки

² Очень разумное замечание. Его даже следует обобщить: **фиксируй то, что фиксируется; измеряй то, что измеряется!** Напомним аналогичный прием, использованный неоднократно ранее при изучении закона движения: задаем расстояние и измеряем время его прохождения.

³ Если источник батарейка, то при больших токах (коротком замыкании) очень быстро разрядится; если источник ЛИП, то может не выдержать.

Итак, прямые получены, но почему они не проходят через начало координат? Что это означает? При $x \rightarrow 0$ проволоки между клеммами вольтметра уже нет, а напряжение еще есть? Проверю – подвижный контакт к самому началу проволоки, стрелка вольтметра почти на нуле, но не совсем на нуле, ну и точность! Может шкала сбилась? Закоротим, подвижный контакт реохорда ко второму выводу вольтметра: порядок, стрелка мертвко легла на нуль. К концу проволоки – чуть дрогнула! Кажется ясно – влияет сопротивление контакта между соединительным проводом и проволокой реохорда $R_{\text{конт.}}$, напряжение на нем и измеряю, когда $x \rightarrow 0$. Интересно, как можно проверить эту идею? По условию этого делать не надо, но интересно же! Надо продлить эти линии в область отрицательных длин проволоки, жалко времени, но интересно.



Ай, браво! Почти точно пересекаются в одной точке $x \approx -30\text{мм}$, это значит, что сопротивление контакта такое же, как сопротивление 3 сантиметров проволоки – нужно минус три сантиметра проволоки, чтобы убрать это паразитное сопротивление. Жаль, что авторы задачи не попросили найти это сопротивление⁴.

Пора возвращаться к условию: нужно найти сопротивление единицы длины проволоки, это просто, надо написать поумнее.

Данная зависимость определяется законом Ома для участка цепи

$$U = I(rx + R_{\text{конт.}}). \quad (1)$$

Для определения искомого сопротивления единицы длины проволоки реохорда следует воспользоваться выражением

$$r = \frac{1}{I} \frac{\Delta U}{\Delta x}. \quad (2)$$

Расчет по этой формуле приводит к следующим результатам (коэффициенты наклона $\frac{\Delta U}{\Delta x}$

можно снять с графиков, можно воспользоваться таблицей):

Для тока $I = 1,3A$:

$$r = \frac{1}{1,3} \cdot \frac{0,6 - 0,2}{376 - 101} \approx 1,1 \cdot 10^{-3} \frac{\Omega m}{mm}$$

Для тока $I = 1,1A$:

$$r = \frac{1}{1,1} \cdot \frac{0,4 - 0,2}{385 - 175} \approx 1,05 \cdot 10^{-3} \frac{\Omega m}{mm}$$

⁴ Будем считать, что эти рассуждения и этот график в черновике и не вошел в «основное собрание».

Хорошо сходится, или плохо? Надо оценить погрешность. Силу тока и напряжения я подгонял к делениям, поэтому погрешностями этих величин пренебрежем⁵. Будем считать, что основная погрешность связана с неточностью измерения длины участка проволоки. Для миллиметровой шкалы погрешность⁶ можно взять $\delta x \approx 0,5\text{мм}$, а толщина контакта, а малые различия в измерениях? Может повторить, и рассчитать случайную погрешность – нет времени, все в контакт ушло. Буду считать, что погрешность отдельного измерения длины $\delta x \approx 2\text{мм}$ (1 на цену деления 1 на толщину щупа). Тогда погрешность разности длин еще в два раза больше, поэтому относительная погрешность измерения этой разности $\varepsilon_{\Delta x} = \frac{2\delta x}{\Delta x}$, такая же относительная погрешность и измерения

сопротивления. Считаем: для первого значения $\varepsilon_{\Delta x} = \frac{2\delta x}{\Delta x} = \frac{4}{376 - 101} \approx 1,5\%$; для второго

$$\varepsilon_{\Delta x} = \frac{4}{385 - 175} \approx 2\%. \text{ Не много, различия в значениях сопротивления целых } 5\%, \text{ все-таки}$$

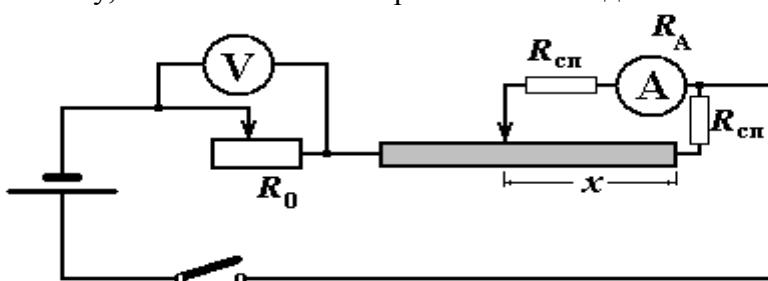
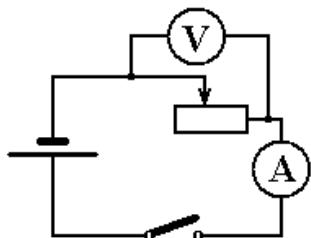
надо было учесть случайную погрешность и погрешность приборов. В другой раз! Сейчас будем считать погрешностью разность между полученными значениями – полный балл за расчет погрешности я, конечно, не получу, но что-то поставят.

Вывод: сопротивление единицы длины проволоки равно

$$r \approx 1,1 \cdot 10^{-3} \frac{\Omega\text{м}}{\text{мм}}, \quad \varepsilon = 5\%.$$

Вторую часть надо сделать быстро и мудрить тут нечего: собираю очевидную схему – все приборы по своему прямому назначению, двигаю движок реостата, пока отношение их показаний $\frac{U}{I}$ не станет равным 1,3 Ом. Получилось!

Наконец-то, добрался до основной части 3. Здесь надо начать с теории. Нужно найти зависимость силы тока через амперметр от длины участка проволоки x . Нарисую эквивалентную схему, с обозначением сопротивления соединительных проводов.



Общий ток в цепи $I_0 = \frac{U}{R_0}$ (измеряется вольтметром) в параллельном соединении делится

между цепью амперметра (его измеряет сам амперметр – обозначу I_A), сопротивление которой равно сумме сопротивления амперметра R_A и сопротивление соединительного

⁵ Может и зря! Надо было учесть хотя бы толщину штриха и стрелки. Приборную погрешность вольтметра учитывать не надо (в формулу входит разность напряжений, поэтому постоянная приборная погрешность исчезает), а вот приборную погрешность амперметра следовало бы учесть!

⁶ Такое обозначение для погрешности использовано для того, чтобы отличить от разности, которая входит в расчетную формулу. Талантливый ученик – знает греческий алфавит!

проводы R_{cn} , и параллельной ветвью, сопротивление которой сумма сопротивления участка проволоки rx и второго соединительного провода. Сила тока в этой второй ветви $I_0 - I_A$. Отношение сил этих токов обратно отношению сопротивлений, поэтому

$$\frac{I_A}{\frac{U}{R_0} - I_A} = \frac{R_{cn} + rx}{R_{cn} + R_A} = \frac{r}{R_{cn} + R_A} x + \frac{R_{cn}}{R_{cn} + R_A}. \quad (3)$$

Все дальше можно не писать, сразу получилась нужная линеаризованная зависимость⁷. При каждом значении x надо измерять силу тока и напряжение – не сложно. Стоп, не забыть: двигаем подвижный контакт, выставляем стрелку амперметра точно на деление и замеряем x . Еще одно – полный диапазон изменения положения контакта, по всей линейке.

Проблема – а сопротивление контактов? Получше прикрутим и пренебрежем, тем более что измерения оценочные.

Собираем цепь, включаем – работает! Двигаем по проволоке – сила тока изменяется, можно измерять. А напряжение? Изменяется очень слабо, не померяешь. Почему так мало изменяется? Видно сопротивление реостата (всего 1,3 Ом) на много больше сопротивления проволоки и амперметра. Хорошо, чтобы вообще это напряжение не изменилось. Как это сделать? Увеличить сопротивление реостата! Нельзя: условие задачи – закон для участника! А может и правильно – сделай больше сопротивление, ток станет меньше, измерять его сложнее. Выхода не вижу! А может пренебречь изменением силы тока в общей цепи? Взять среднее значение. Все-таки какой-то выход. Но на всякий случай запишу.

При проведении измерений по указанной схеме оказалось, что напряжение на реостате изменяется незначительно (в пределах от 1,55 В до 1,75 В), провести точные измерения весьма затруднительно, поэтому можно приближенно считать, что оно остается постоянным и равным среднему значению $\tilde{U} = 1,65V$.

Теперь аккуратно провожу измерения, результаты записываю в таблицу 2, отдельная графа для рассчитанных отношений сил токов (для линеаризации).

Таблица 2.

$x, \text{мм}$	I_A, A	$\frac{I_A}{\tilde{U} - I_A}$
0	0,35	0,38
9	0,4	0,46
22	0,45	0,55
35	0,5	0,65
50	0,55	0,76
66	0,6	0,90
81	0,65	1,05
105	0,7	1,23
130	0,75	1,44
160	0,8	1,70
197	0,85	2,03
227	0,9	2,44
270	0,95	2,98
325	1	3,71
390	1,05	4,79

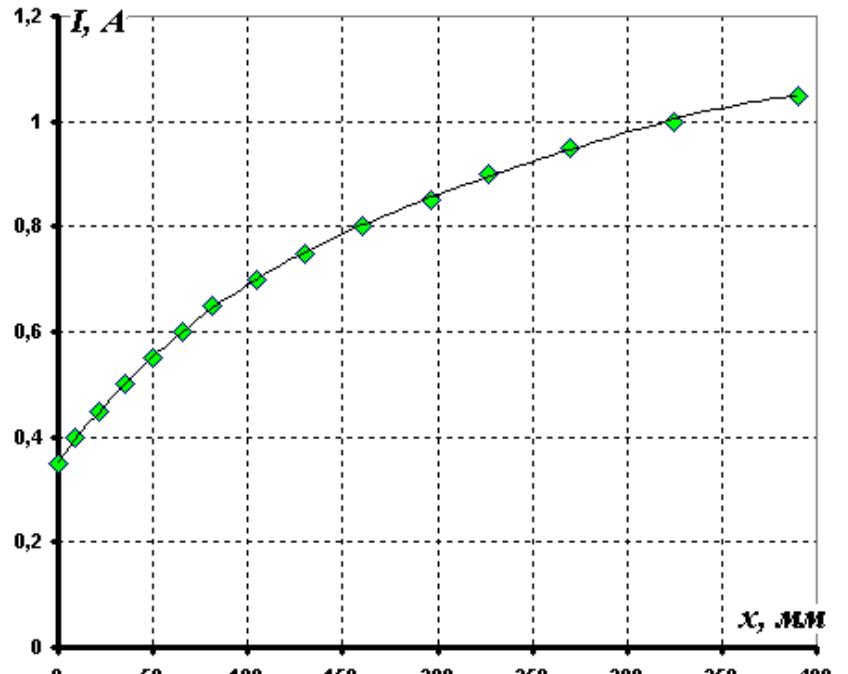


Рис. 2 Зависимость силы тока от длины участка проволоки

⁷ У авторов задач, ничего такого сразу не получилось – в официальном решении найдена зависимость $I_A(x)$, линеаризация которой привела к этому же выражению.

Строим график зависимости силы тока от длины x . Красиво: зависимость не линейна и не проходит через начало координат. Здесь все понятно: и не линейность – в уравнении (3) сила тока и в числителе и в знаменателе; и непопадание в нуль – сопротивление соединительного провода заметно и сравнимо с сопротивлением амперметра⁸. Подсчитаем отношение сил токов. Хорошо изменяется! Опять при $x=0$ ток через амперметр не равен нулю. Но ток через амперметр более чем в три меньше тока через что? – соединительный провод. Что это значит? Что сопротивление соединительного провода примерно в три раза меньше, чем сопротивление провода с амперметром. Это значит, что сопротивление амперметра примерно в два раза больше сопротивления проводка. Надо запомнить.

Так, а что делать с графиком зависимости напряжения от длины участка? Измерить изменение напряжения практически невозможно! Оставить? Нет, баллы не помешают: хотя бы за подписанные оси пусть жюри добавит: всякая неизвестная функция линейна!

Теперь основной график, линеаризованный для силы тока.

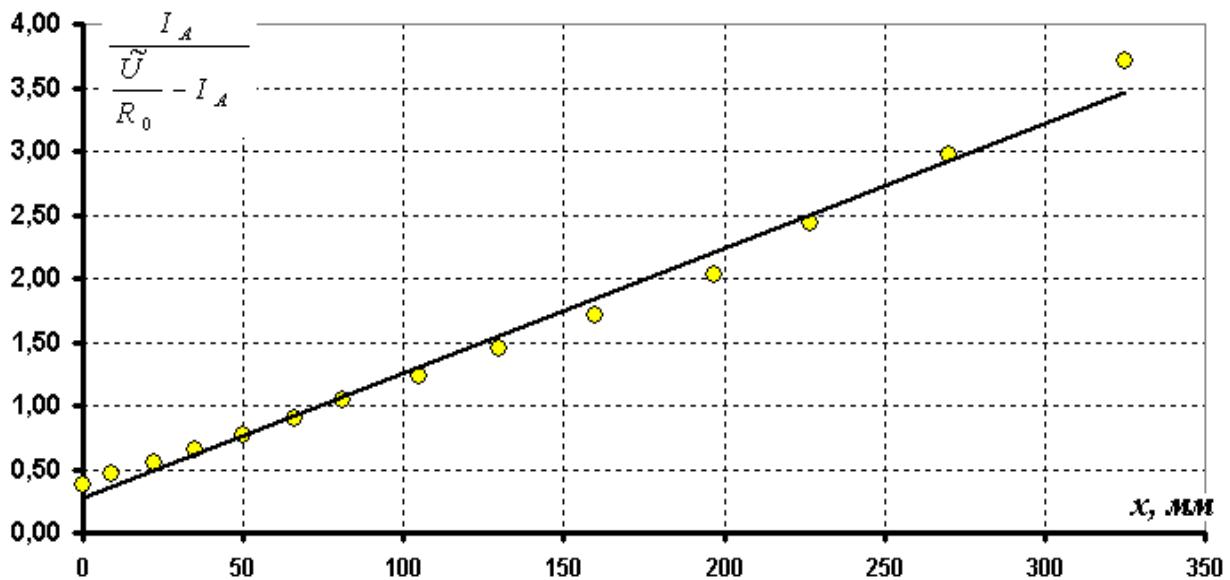
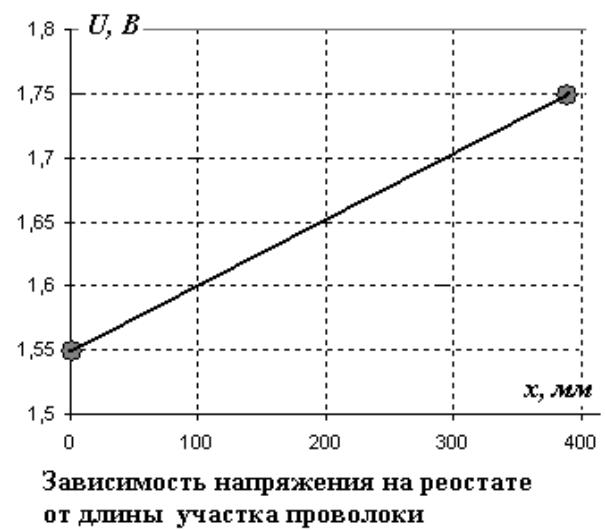


Рис. 3 Зависимость отношений сил токов о длины участка проволоки

Конечно, не совсем линейная зависимость, с заметным прогибом, но провести прямую можно: так гораздо ровней!

Запишем уравнение (4) этой прямой в виде $Y = ax + b$, где $a = \frac{r}{R_{cn} + R_A}$, $b = \frac{R_{cn}}{R_{cn} + R_A}$ – параметры линейной зависимости. Из графика (по МНК считать никогда,

⁸ Замечательный ученик – все работа сопровождается обдумыванием. И где только время берет?

да и незачем) можно найти численные значения этих параметров: $a \approx 9,8 \cdot 10^{-3} \text{ мм}^{-1}$, $b \approx 0,3$. Из выражений для этих коэффициентов находим, что

$$R_{cn} = \frac{b}{a} r \approx 0,03 \text{ Ом}; \quad R_A = \frac{r}{a} - R_{cn} \approx 0,08 \text{ Ом}.$$

Ну вот, работа закончена, результаты получены. И отношение сопротивлений близко к предсказанному по одной (нужной) точке. Действительно, оказались измеренными очень малые сопротивления – с помощью предоставленных приборов напрямую измерить такие сопротивления невозможно: либо вольтметр будет показывать сплошные нули, либо сгорит амперметр.

Осталось время⁹. Может попробовать избавиться от прогиба на графике 3. Скорее всего, он появился из-за того, что напряжение считалось постоянным. Надо учесть его изменение, хотя бы по примерной линейной зависимости, что она зря построена? Уравнение этой прямой записать легко (по крайним точкам – других и нет!):

$$U = 1,55 + \frac{0,2}{390} x. \quad (4)$$

Теперь пересчитываем таблицу 2. Просто дополним ее еще одним столбцом – значение напряжения. Получаем Таблицу 3, по которой строим новый график 4 – последний.

Таблица 4.

$x, \text{мм}$	$I_A, \text{А}$	$U, \text{В}$	$\frac{I_A}{U} - I_A$
0	0,35	1,55	0,42
9	0,4	1,55	0,50
22	0,45	1,56	0,60
35	0,5	1,57	0,71
50	0,55	1,58	0,83
66	0,6	1,58	0,97
81	0,65	1,59	1,13
105	0,7	1,60	1,31
130	0,75	1,62	1,52
160	0,8	1,63	1,76
197	0,85	1,65	2,02
227	0,9	1,67	2,36
270	0,95	1,69	2,72
325	1	1,72	3,12
390	1,05	1,75	3,55

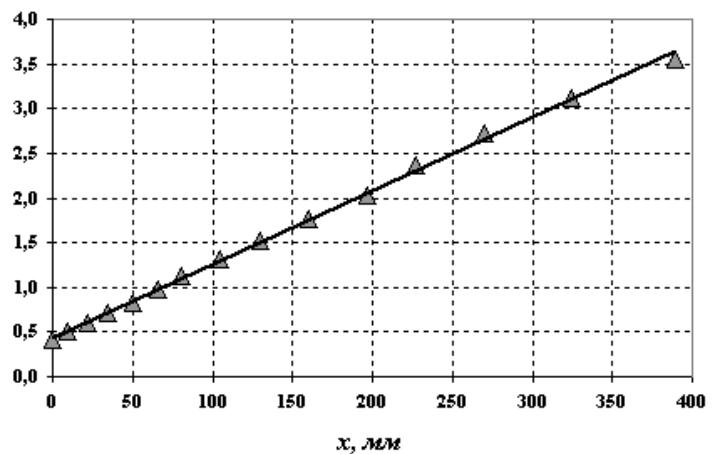


График 4 Зависимость отношения сил токов от длины участка проволоки (с учетом изменения напряжения)

Проделанная работа оказалась не напрасной: точки практически точно легли на прямую. Так, что даже хочется рассчитать коэффициенты этой зависимости по МНК. Получились следующие значения коэффициентов этой линейной зависимости

$$a = (8,2 \pm 0,2) \cdot 10^{-3} \text{ мм}^{-1}, \quad b = (0,44 \pm 0,03)$$

Рассчитанные по этим коэффициентам значения сопротивления оказались равными

⁹ Здесь наверно, наш вундеркинд остановил Солнце, как Иисус Навин!

$$R_{cn} = \frac{b}{a} r \approx 0,060 \text{ } Om; \quad R_A = \frac{r}{a} - R_{cn} \approx 0,074 \text{ } Om,$$

с погрешностью порядка 10%, что надо признать хорошей точностью. Как всегда, основной вклад в полную погрешность внесла погрешность расчета свободного члена b в линейной зависимости.

Последний вопрос – как же с найденным по одной точке отношением сопротивлений?

Неплохо, сейчас отношение токов при $x = 0$ равно 0,42. Поэтому оценка отношений

сопротивлений по этой точке дает $\frac{R_A}{R_{cn}} = \frac{1}{0,42} - 1 \approx 1,4$, что близко к значению,

полученному по МНК $\frac{R_A}{R_{cn}} = \frac{0,074}{0,060} \approx 1,2$. Поэтому такой примитивный, но мгновенный

метод получения оценки не лишний.

Вот такой замечательный ученик нам попался! Учитесь!

Следующая задача навеяла название данного раздела. Кроме заявленной темы, в обсуждении и решении этой задачи следует обратить внимание на два важных обстоятельства: первое (встречается достаточно часто) – использование полулогарифмического масштаба; второе (встречается всегда, во всех задачах) – анализ погрешностей измерений и способов их уменьшения.



Задача 10. Изучение светодиода.

Приборы и оборудование: красный светодиод, переменный проградуированный резистор (на шкале указаны значения сопротивления в кОм), два постоянных резистора, конденсатор неизвестной емкости, вольтметр, батарейка 4,5 В, секундомер, соединительные провода, ключ.

Погрешностями значений сопротивлений выданных резисторов (в том числе и шкалы переменного резистора) пренебрегайте, хотя это и не совсем корректно.

Часть 1. «Как правильно включать вольтметр?»

Соберите схему, показанную на рис. 1: Вы же знаете, что вольтметр всегда включается в цепь ... последовательно!

1.1 Исследуйте зависимость напряжения на вольтметре от времени в течении процесса зарядки конденсатора при нескольких (не менее трех) значениях сопротивления переменного резистора. Значение сопротивлений резисторов выбирайте самостоятельно, свой выбор обоснуйте (см. п.1.2).

Постройте графики полученных зависимостей.

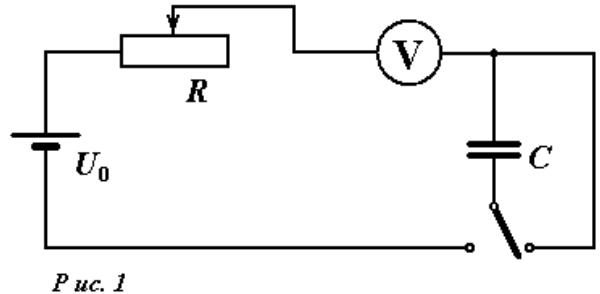


Рис. 1

Напоминаем:

1. Нуль – это тоже число!

2. В процессе зарядки сила тока в цепи зависит от времени по закону $I = I_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$, где R – полное сопротивление цепи зарядки.

1.2 По полученным данным определите емкость конденсатора C , сопротивление вольтметра R_V и характерное время разрядки конденсатора через вольтметр $\tau_0 = R_V C$ с максимально возможной точностью.

Часть 2. «Мало тока – мало света!»

Включите в цепь светодиод (Рис. 2). При правильном подключении светодиод должен слабо светиться (в противном случае поменяйте полярность его подключения). К плюсу светодиода припаян белый провод.

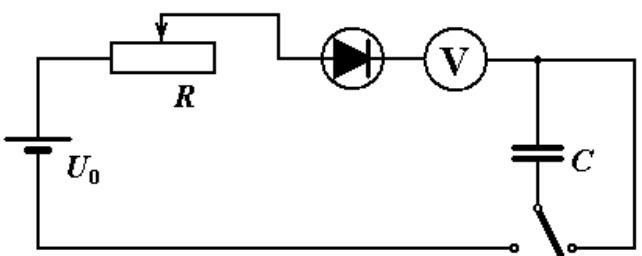


Рис. 2

2.1 Измерьте зависимости напряжения на вольтметре от времени в течении процесса зарядки конденсатора при сопротивлениях резистора $R_1 = 3,0 \text{ кОм}$ и $R_2 = 0$. Приведите графики полученных зависимостей в наиболее наглядной форме. Определите, согласуются ли эти данные между собой.

2.2 Определите, можно ли считать, что при таком включении светодиода его сопротивление не зависит от силы тока, протекающего через него. Определите среднее значение этого сопротивления, используя все данные, полученные в п.2.1. Оцените пределы изменения сопротивления светодиода при указанном подключении.

2.3 Оцените при какой силе тока полностью прекращается свечение светодиода.

Часть 3. «Много тока – как измерять?»

В данной части работы вам необходимо измерить сопротивление светодиода при его ярком свечении. Самостоятельно предложите методику измерения этого сопротивления – *не забудьте нарисовать принципиальную схему вашей цепи*.

Подсказываем: используйте предоставленные вам постоянные резисторы известных сопротивлений.

3.1 Измерьте сопротивление светодиода для нескольких значений силы тока, протекающего через него (например, для четырех).

3.2 Постройте примерный график зависимости напряжения на светодиоде от силы, протекающей через него тока.

Комментарии к условию задачи.

1. Для выполнения этого задания подходит, в принципе любой светодиод, рассчитанный на рабочее напряжение порядка 2-4 В. Переменный резистор, упомянутый в перечне оборудования должен иметь максимальное сопротивление порядка 10 кОм. В принципе, можно использовать и два постоянных резистора, сопротивлениями порядка 10 кОм (отличающиеся не менее, чем в полтора раза). В этом случае из условия необходимо исключить пункты о самостоятельном выборе сопротивлений при проведении измерений. Два постоянных резистора, используемых в третьей части работы, должны иметь такое сопротивление, что бы при последовательном подключении к светодиоду и источнику питания, напряжение на диоде было близко к номинальному значению (эти сопротивления по порядку величины несколько единиц – десятков Ом). Сопротивления этих резисторов должны отличаться примерно в два раза. Емкость использованного нами конденсатора составляла 500 мкФ, желательно использовать конденсатор не меньшей емкости – в противном случае измеряемые времена будут слишком малы.

2. Перед каждым новым измерением следует разрядить конденсатор – емкость его велика!

3. Это задание предлагалось на заключительном этапе республиканской олимпиады, поэтому его условие не столь конкретно, а предоставляет возможность самостоятельно поразмыслить не только об обработке результатов, но и методике измерений.

Обсуждение и решение.

Основная цель задачи заключается в частичном изучении вольтамперной характеристики нелинейного элемента – светодиода. То есть необходимо измерять напряжение, силу тока (или сопротивление) этого диода. Даётся один довольно грубый электрический измерительный прибор – школьный вольтметр. Гораздо более точным прибором является секундомер. Наличие в перечне оборудования конденсатора, приведенные схемы, подсказки и само условие намекают на необходимость измерения времен зарядки (или разрядки) конденсатора. Временные зависимости тока зарядки зависят от емкости конденсатора и (самое важное!) сопротивления цепи.

Во второй части приведена схема измерения, согласно которой конденсатор заряжается через вольтметр (и другие элементы цепи). Здесь конденсатор играет двойную роль: как измерительный прибор и как дополнительный резистор. Поэтому для расчета характеристик светодиода необходимо знать сопротивление вольтметра (не менее нескольких кОм) и емкость конденсатора. Получить их значения необходимо в первой части работы.

Часть 1.

В принципе, идея получения результата понятна и проста – необходимо измерить характерное время зарядки $\tau = RC$ при двух известных значениях дополнительно включенного резистора. Получить два значения времени зарядки, на основании которых записать два уравнения с двумя неизвестными: емкостью конденсатора и сопротивлением вольтметра. В условии задачи предлагается выбирать значения сопротивлений самостоятельно и обосновать свой выбор. Кроме того, просят найти значения параметров с максимально возможной точностью. Из этих двух требований условия можно сделать следующие выводы:

- погрешности надо считать серьезно: жюри будет их оценивать высоко;
- критерием выбора сопротивлений служит условие минимальности погрешностей окончательного результата;
- для определения времен затухания следует использовать полученные зависимости (а не одну экспериментальную точку) и обрабатывать их по МНК.

Поэтому сначала необходимо получить расчетные формулы (это всегда надо делать заранее) и формулы для расчета погрешностей.

В первую очередь, обсудим, как по зависимости напряжения на конденсаторе от времени определить характерное время зарядки. Понятно, что измеряемое напряжение на вольтметре равно произведению его сопротивления на силу тока в цепи:

$$U = IR_V. \quad (1)$$

Эта формула понадобится при расчете сил токов. Она также показывает, что временная зависимость напряжения совпадает с временной зависимостью силы тока: из известной формулы, к тому же приведенной в условии, следует, что

$$U(t) = U_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right). \quad (2)$$

При наличии двух измерительных приборов измерять следует, ту величину, которая может быть измерена точнее, а вторую следует фиксировать. То есть, как и в предыдущей задаче необходимо измерять время: следить за стрелкой вольтметра и отмечать времена, когда стрелка точно совпадает с делением шкалы. При такой методике измерения фактически измеряется функция $t(U)$, обратная к функции (2)

$$t = -RC \ln \frac{U}{U_0}. \quad (3)$$

Поэтому следует строить именно эту зависимость и именно ее обрабатывать по МНК, тем более, что она уже линеаризована¹⁰. Поэтому обозначим $x = -\ln \frac{U}{U_0}$ и представим (3) в виде

$$t = ax + b, \quad (4)$$

где параметр a служит оценкой величины $\tau = RC$, параметр b должен быть примерно равен нулю (его значение меньше его погрешности).

Зависимость (3) прямо пропорциональная, поэтому в функции (4) параметр b может быть сразу опущен. Но лучше, все-таки, искать зависимость в виде (4), потому что: во-первых, для расчета коэффициента пропорциональности надо знать методику, несколько отличающуюся от изложенной; во-вторых, в реальности параметр b может быть отличен от нуля (например, из-за того, что ошибочно задано значение U_0), в такой ситуации расчет коэффициента пропорциональности может привести к заметным ошибкам.

Итак, будем считать, что нам известно два значения параметра (a_1, a_2) (и их погрешности $(\Delta a_1, \Delta a_2)$) для двух различных сопротивлений резисторов (R_1, R_2) . Это позволяет записать два уравнения:

$$\begin{aligned} a_1 &= (R_1 + R_V)C \\ a_2 &= (R_2 + R_V)C, \end{aligned} \quad (5)$$

из которых следует найти значения C и R_V и их погрешности. Разность двух уравнений позволяет найти значение емкости:

$$a_2 - a_1 = (R_2 - R_1)C \Rightarrow C = \frac{a_2 - a_1}{(R_2 - R_1)}. \quad (6)$$

Погрешность определения емкости выражается через погрешности коэффициентов линейных зависимостей следующим образом:

$$\Delta(a_2 - a_1) = \sqrt{(\Delta a_1)^2 + (\Delta a_2)^2} \Rightarrow \Delta C = \frac{\Delta(a_2 - a_1)}{a_2 - a_1} C. \quad (7)$$

Значение сопротивления легко выразить через отношение коэффициентов:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{R_2 + R_V}{R_1 + R_V} = \eta \Rightarrow R_V = \frac{R_2 - \eta R_1}{\eta - 1}. \quad (8)$$

Из выражения (8) следуют формулы для расчета погрешности сопротивления вольтметра:

$$\eta = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow \Delta \eta = \eta \sqrt{\left(\frac{\Delta a_1}{a_1} \right)^2 + \left(\frac{\Delta a_2}{a_2} \right)^2}, \quad (9)$$

$$\Delta R_V = \left| \frac{\partial R_V}{\partial \eta} \right| \Delta \eta = \frac{(R_2 - R_1)}{(\eta - 1)^2} \Delta \eta. \quad (10)$$

Полученные выражения должны хотя бы немножко насторожить: искомые величины выражаются через разности коэффициентов. Как известно, операция вычитания (особенно двух близких величин) приводит к большим погрешностям. Поэтому для максимального увеличения точности следует выбирать такие значения сопротивлений, чтобы разности

¹⁰ Более традиционно строят зависимость $\ln \frac{U}{U_0} = -\frac{1}{RC} t$. Такая линеаризация экспоненциальной

зависимости и называется полулогарифмическим (semi-log scale). Применение МНК в этом случае более обосновано, когда измеряется напряжение в фиксированные моменты времени. Заметим, применение МНК к двум обратным функциям $y = kx + b$ и $x = \frac{1}{k}y - \frac{b}{k}$ дает разные результаты для параметров k, b .

времен зарядки были максимальны. Следовательно, два значения сопротивлений резисторов должны быть: **максимальное значение сопротивления** переменного резистора (движок до упора) и **минимальное значение – вообще без резистора** (зарядка конденсатора через вольтметр)! Но так как по условию требуется снять три зависимости, то третье где-то посередине.

Результаты проведенных измерений приведены в таблице 1. Эти зависимости проиллюстрированы графиками¹¹.

Таблица 1.

$R_1 = 6,0 \text{ кОм}$			$R_2 = 9,0 \text{ кОм}$			$R_3 = 0,0 \text{ кОм}$		
U, B	$-\ln\left(\frac{U}{U_0}\right)$	t, c	U, B	$-\ln\left(\frac{U}{U_0}\right)$	t, c	U, B	$-\ln\left(\frac{U}{U_0}\right)$	t, c
						4,0	0	0
2,3	0,000	0				3,6	0,105	3
2,0	0,140	8				3,2	0,223	6
1,8	0,245	13	1,8	0,000	0	2,8	0,357	9
1,6	0,363	18	1,6	0,118	8	2,4	0,511	13
1,4	0,496	25	1,4	0,251	16	2,0	0,693	18
1,2	0,651	34	1,2	0,405	26	1,6	0,916	23
1,0	0,833	43	1,0	0,588	38	1,2	1,204	32
0,8	1,056	55	0,8	0,811	53	1,0	1,386	37
0,6	1,344	70	0,6	1,099	73	0,8	1,609	44
0,4	1,749	94	0,4	1,504	101	0,6	1,897	52
a, c	53,1		67,0		27,3			
$\Delta a, c$	1,1		1,0		0,5			
b, c	-0,5		-0,7		-0,5			
$\Delta b, c$	1,0		0,8		0,5			
ε_a	2%		1,5%		1,8%			

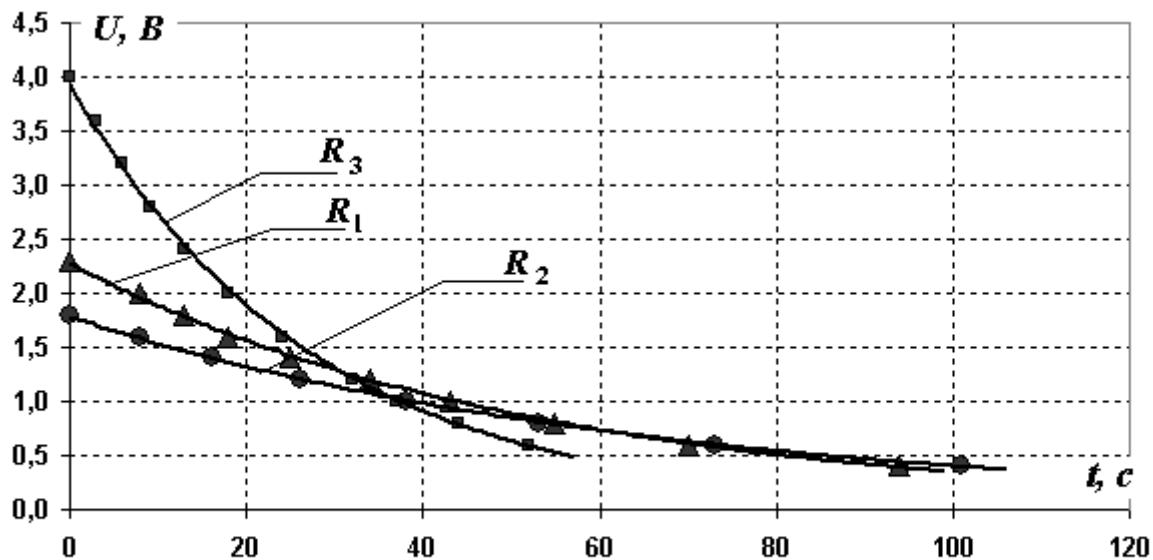


График 1. Зависимости напряжения от времени при разных сопротивлениях резистора

В этой же таблице представлены значения, необходимые для их обработки по МНК, рассчитанные значения параметров линейной зависимости (4), их погрешности, а

¹¹ Отметим, что эти графики не информативны: они необходимы только для того, чтобы убедиться в нелинейности полученных зависимостей и заработать несколько баллов на олимпиаде.

также относительная погрешность параметра a . Диапазоны изменения напряжения (соответственно и начальные значения) различны для разных сопротивлений. Естественно, что чем больше сопротивление резистора, там меньше напряжение на вольтметре. Замечательно, что во всех трех случаях значение параметра b по модулю меньше его погрешности – действительно результаты подтверждают справедливость зависимости (3). Также радует достаточно высокая точность полученных значений времен зарядки (напомним – это параметр a) – их относительная погрешность порядка 1%. На графике 2 построенные обработанные, линеаризованные зависимости¹², показывающие прекрасное соответствие с теоретической формулой и высокую точность измерений.

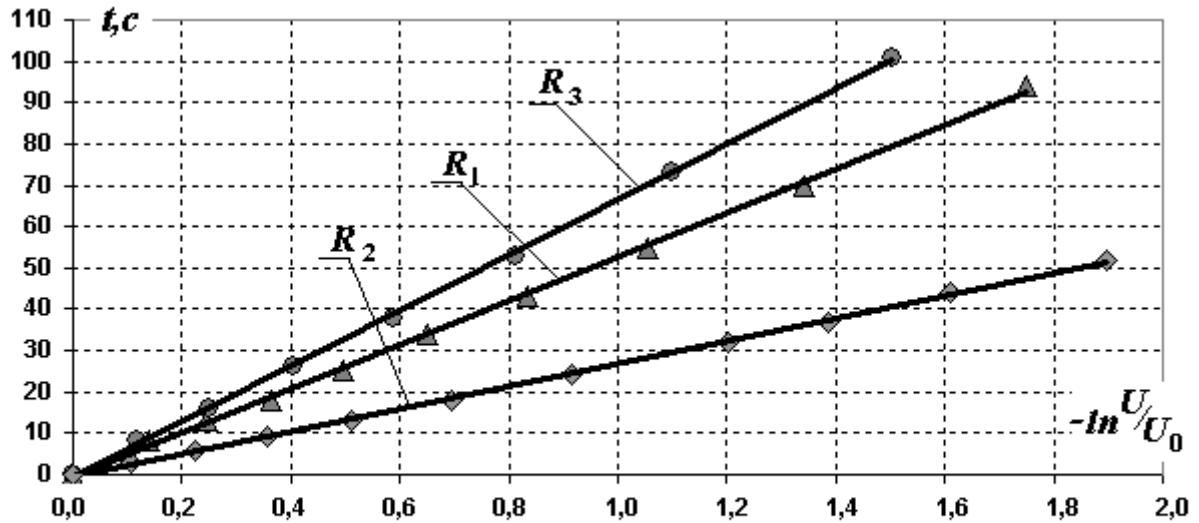


График 2. Зависимости напряжения от времени разрядки (логарифмический масштаб)

Теперь можно провести расчеты необходимых величин¹³:
значение емкости конденсатора

$$C = \frac{a_2 - a_3}{R_2} = \frac{67,0 - 27,3}{9,00 \cdot 10^3} \approx 4,41 \cdot 10^{-3} \Phi;$$

ее погрешность:

$$\Delta(a_2 - a_3) = \sqrt{(\Delta a_2)^2 + (\Delta a_3)^2} \approx 1,1 c$$

$$\Delta C = \frac{\Delta(a_2 - a_3)}{a_2 - a_3} C = \frac{1,1}{67,0 - 27,3} \cdot 4,4 \cdot 10^{-3} \approx 0,12 \cdot 10^{-3} \Phi;$$

отношение коэффициентов и его погрешность:

$$\eta = \frac{a_2}{a_3} \approx 2,454, \quad \Delta \eta = \eta \sqrt{\left(\frac{\Delta a_2}{a_2} \right)^2 + \left(\frac{\Delta a_3}{a_3} \right)^2} \approx 0,047;$$

сопротивление резистора:

$$R_V = \frac{R_2}{\eta - 1} \approx 6,19 \text{ кОм};$$

¹² Хотя в условии явно не требуется приводить эти графики, но они необходимы в работе для того, чтобы показать те зависимости, которые обрабатываются; чтобы была возможность проверить полученные результаты «на глаз»: так снимая с графиков показания времени при единичном аргументе, получаем оценки значений времен зарядки. Подумайте об этом – может быть полезно!

¹³ Напоминаем, нами выбраны значения параметров при максимальном сопротивлении $R_2 = 9,0 \text{ кОм}$ и его отсутствии $R_3 = 0$ (поэтому эта величина отсутствует в расчетных формулах).

его погрешность:

$$\Delta R_V = \frac{R_2}{(\eta - 1)^2} \Delta \eta \approx 0,20 \text{ kOm}.$$

После округления в соответствии с правилами записываем окончательные результаты:

$C = (4,41 \pm 0,12) \cdot 10^{-3} \Phi, \quad \varepsilon_C \approx 3\%$ $R_V = (6,2 \pm 0,2) \text{ kOm}, \quad \varepsilon_R \approx 3\%$

Осталось определить значение величины τ_0 :

$$\tau_0 = R_V C \approx 4,4 \cdot 6,2 \approx 27 \text{ c};$$

и его погрешность:

$$\frac{\Delta \tau_0}{\tau_0} = \sqrt{\left(\frac{\Delta R_V}{R_V} \right)^2 + \left(\frac{\Delta C}{C} \right)^2} \approx 4\%.$$

Последний расчет следует воспринимать как шутку: он лишний! Параметр a_3 и есть требуемое значение, да еще и с более высокой точностью. Поэтому окончательный результат следующий:

$\tau_0 = a_3 = (27,3 \pm 0,5) \text{ c} \quad \varepsilon_\tau = 1,8\%$
--

Тем не менее, обратите внимание – расчеты ухудшают точность результата, непосредственное измерение точнее. Для сравнения¹⁴ приведем результаты расчетов проведенных по первой и второй зависимостям ($R_1 = 6,0 \text{ kOm}$, $R_2 = 9,0 \text{ kOm}$):

$$C = (4,6 \pm 0,5) \cdot 10^{-3} \Phi, \quad \varepsilon_C \approx 11\%; \quad R_V = (5,5 \pm 0,7) \text{ kOm}, \quad \varepsilon_R \approx 13\%; \quad \varepsilon_{RC} \approx 17\%$$

Исходные данные имеют приблизительно ту же точность – а погрешности окончательных результатов в десять раз больше. Единственное, что радует, что полученные по разным данным интервалы перекрываются. Так, что проведенные заранее рассуждения и выкладки оказываются не напрасными.

¹⁴ Главным образом, именно для этого здесь приведены три зависимости.

Часть 2.

Методика проведения измерений не отличается от той, которая была разработана в первой части задачи. При последовательном включении дополнительных элементов (общее сопротивление которых обозначим R) зависимость напряжения на вольтметре (опять измеряемая величина) будет описываться уравнением (2), если сопротивление включенных элементов не зависит от силы тока в цепи¹⁵. Поэтому линейность зависимости (4) будет свидетельствовать о постоянстве этого сопротивления.

Пункты 2.1 и 2.2 тесно взаимосвязаны между собой, основаны на одних экспериментальных данных, поэтому их обсуждение проведем совместно.

Результаты измерений зависимости напряжения от времени¹⁶, значения нужные для линеаризации, коэффициенты линеаризированных зависимостей представлены в Таблице 2, которая полностью аналогична Таблице 1.

Таблица 2.

	$R_1 = 3,0 \text{ кОм}$		$R_2 = 0$			
	$U, \text{ В}$	$-\ln\left(\frac{U}{U_0}\right)$	$t, \text{ с}$	$U, \text{ В}$	$-\ln\left(\frac{U}{U_0}\right)$	$t, \text{ с}$
2,0	0,000	0,0	2,8	0,000	0,0	
1,8	0,105	6,5	2,6	0,074	2,7	
1,6	0,223	13,0	2,4	0,154	5,3	
1,4	0,357	19,5	2,2	0,241	8,0	
1,2	0,511	27,3	2,0	0,336	10,6	
1,0	0,693	35,1	1,8	0,442	14,6	
0,8	0,916	46,7	1,6	0,560	19,1	
0,6	1,204	62,3	1,4	0,693	23,9	
0,4	1,609	84,4	1,2	0,847	29,2	
0,2	2,303	119,5	1,0	1,030	35,9	
			0,8	1,253	43,8	
			0,6	1,540	54,5	
			0,4	1,946	70,4	
			0,2	2,639	99,3	
$a, \text{ с}$	51,58		37,15			
$\Delta a, \text{ с}$	0,75		0,88			
$b, \text{ с}$	0,57		-1,3 9			
$\Delta b, \text{ с}$	0,79		0,99			
ε_a	1,5%		2,4%			

Наиболее наглядным представлением полученных зависимостей является полулогарифмический масштаб, также использованный в первой части. На графике 3 показаны эти результаты. Полученные точки достаточно близко лежат к прямым, поэтому «в первом приближении» представленные зависимости можно считать линейными и применять к ним методы обработки, разработанные в первой части.

¹⁵ Сразу отметим, что это утверждение для светодиода вызывает сомнение и требует проверки.

¹⁶ В данном случае значения времен приведены с точностью до десятых, ручной секундомер позволяет провести измерения с такой точностью. Правда в этом случае время измерений возрастает: каждое такое измерение требует остановки секундомера, после чего следует разрядить конденсатор и начать его заряжать сначала. Более того, признаемся, что здесь приведены средние значения времен, каждое из которых найдено по трем измерения.

Однако следующие обстоятельства вызывают сомнения в строгой линейности:

- в цепи присутствует светодиод, элемент явно нелинейный; правда он в данном случае работает в режиме слабых токов, значения сил которых далеки от номинального значения (об этом свидетельствует его слабое свечение), поэтому возможно, что в данном режиме его сопротивление примерно постоянно;
- свободные члены линейных зависимостей b , рассчитанные по МНК, значимо отличны от нуля ($\Delta b > |b|$), причиной чего может быть нелинейность зависимостей;
- точки на графике, вроде закономерно отклоняются от построенной прямой¹⁷.

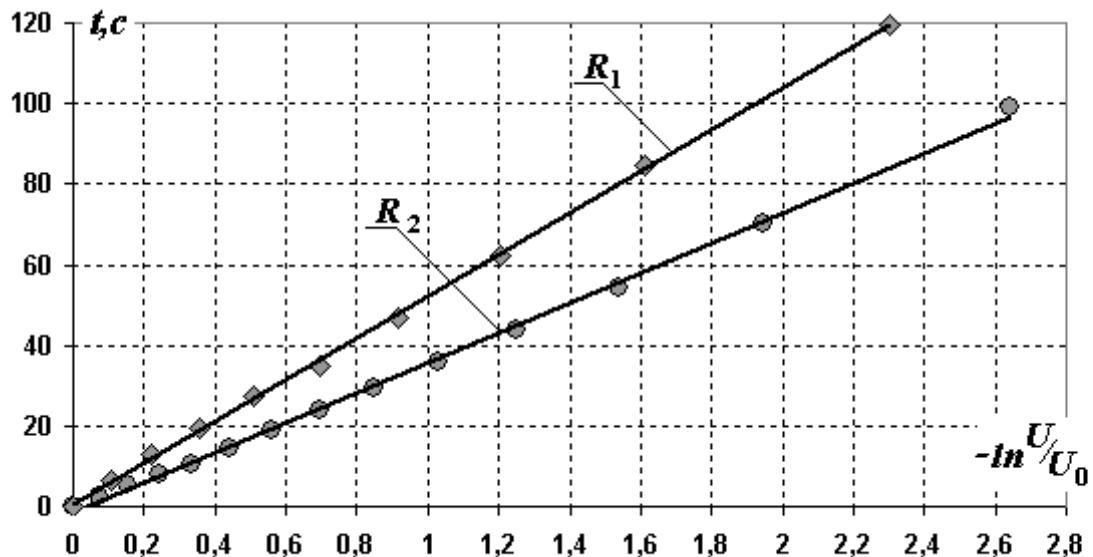


График 3. Зарядка через светодиод

Эти наблюдения мы обоснуем далее, а пока обработаем эти зависимости как линейные.

Коэффициенты наклона и в данном случае являются оценками произведения емкости конденсатора на полное сопротивление цепи:

$$a = (R + R_V)C,$$

поэтому дополнительное сопротивление, включенное в цепь, следует рассчитывать по формуле:

$$R = \frac{a - R_V C}{C} = \frac{a - \tau_0}{C}. \quad (11)$$

Очевидно, что для расчетов следует использовать значение величины τ_0 , найденное с максимальной точностью. Формула для расчета погрешности дополнительного сопротивления имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta R &= \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial a} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial \tau_0} \Delta \tau_0\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial C} \Delta C\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{C} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{1}{C} \Delta \tau_0\right)^2 + \left(\frac{a - \tau_0}{C^2} \Delta C\right)^2} = \\ &= R \sqrt{\frac{(\Delta a)^2 + (\Delta \tau_0)^2}{(a - \tau_0)^2} + \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2} \end{aligned} \quad (12)$$

¹⁷ Смотри дополнение к данной задаче.

Из этой формулы следует, что относительная погрешность возрастает, если время зарядки a приближается к величине τ_0 - как обычно, когда в расчетных формулах присутствуют разности близких величин.

Используя эти формулы найдем значения дополнительных сопротивлений для двух серий измерений, представленных в Таблице 2.

Общее сопротивление¹⁸ в первом случае (включен резистор и диод) равно

$$R^{(1)} = \frac{a_1 - \tau_0}{C} = \frac{51,58 - 27,3}{4,41 \cdot 10^{-3}} \approx 5,51 \text{k}\Omega,$$

а его погрешность

$$\Delta R^{(1)} = R^{(1)} \sqrt{\frac{(\Delta a_1)^2 + (\Delta \tau_0)^2}{(a_1 - \tau_0)^2} + \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2} = 5,51 \sqrt{\frac{(0,75)^2 + (0,5)^2}{(51,58 - 27,3)^2} + (0,03)^2} \approx 0,26 \text{k}\Omega,$$

с невысокой относительной погрешностью $\varepsilon \approx 5\%$. Это сопротивление есть сумма известного сопротивления резистора $R_1 = 3,0 \text{k}\Omega$ и среднего сопротивления светодиода, которое мы обозначим R_X . Поэтому, найденное по этим данным сопротивление диода равно: $R_X = R^{(1)} - R_1 \approx 2,51 \text{k}\Omega$. Так погрешностью сопротивление резистора пренебрегаем, то абсолютная погрешность значения сопротивления диода рана найденной погрешности полного сопротивления цепи. Таким образом, сопротивление диода равно¹⁹

$$R_X^{(1)} = (2,51 \pm 0,26) \text{k}\Omega. \quad (13)$$

Заметьте, что опять вычитание существенно увеличило относительную ошибку, которая составляет здесь $\varepsilon \approx 10\%$.

Аналогично, рассчитаем сопротивление цепи во второй серии измерений (это есть сопротивление диода):

$$R^{(2)} = \frac{a_2 - \tau_0}{C} = \frac{37,15 - 27,3}{4,41 \cdot 10^{-3}} \approx 2,23 \text{k}\Omega,$$

и его погрешность:

$$\Delta R^{(2)} = R^{(2)} \sqrt{\frac{(\Delta a_2)^2 + (\Delta \tau_0)^2}{(a_2 - \tau_0)^2} + \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2} = 2,23 \sqrt{\frac{(0,88)^2 + (0,5)^2}{(37,15 - 27,3)^2} + (0,03)^2} \approx 0,24 \text{k}\Omega,$$

что составляет $\varepsilon \approx 10\%$. Таким образом, по этим данным сопротивление диода равно

$$R_X^{(2)} = (2,23 \pm 0,24) \text{k}\Omega. \quad (14)$$

Полученные интервалы для значений этого сопротивления (13)-(14) перекрываются, поэтому можно считать, что полученные зависимости согласуются²⁰ друг с другом. Для расчета окончательного значения сопротивления диода следует усреднить полученные значения. Так как эти результаты имеет примерно равные погрешности²¹, то в качестве окончательного результата следует взять среднее арифметическое между ними:

$$R_X = \frac{R_X^{(1)} + R_X^{(2)}}{2} \approx 2,37 \text{k}\Omega.$$

Так как этот результат является средним по двум значениям, то его погрешность в $\sqrt{2}$ раз меньше погрешности отдельного результата

$$\Delta R_X \approx \frac{\Delta R_X^{(1)}}{\sqrt{2}} \approx 0,2 \text{k}\Omega.$$

¹⁸ В данной задаче много различных сопротивлений, поэтому приходится использовать различные обозначения. В данном разделе верхний индекс в $R^{(1)}$ означает номер измерения, а не показатель степени!

¹⁹ Это еще не окончательный результат, поэтому оставляем одну запасную цифру.

²⁰ Для обсуждения этой проблемы (а также проблемы усреднения нескольких результатов) в условии было предложено провести две серии измерений в этой части.

²¹ Если это не так, то смотрите дополнение к данной задаче.

Итак, используя все полученные данные, получено следующее значение среднего сопротивления светодиода

$$R_X = (2,4 \pm 0,2) \text{к} \Omega \text{м}, \quad \varepsilon = 8\%. \quad (15)$$

Обратимся еще раз к вопросу о согласовании данных. Можно ответить на него и иным способом. Найдем разность полученных значений сопротивлений $R^{(1)}$ и $R^{(2)}$ (которая должна быть равна известному сопротивлению резистора):

$$R^{(1)} - R^{(2)} = 5,51 - 2,23 \approx 3,28 \text{к} \Omega \text{м}$$

и ее погрешность

$$\Delta(R^{(1)} - R^{(2)}) = \sqrt{(\Delta R^{(1)})^2 + (\Delta R^{(2)})^2} \approx 0,35 \text{к} \Omega \text{м}. \quad (16)$$

Видим, что в пределах погрешности получено известное значение $R_1 = 3,0 \text{ к} \Omega \text{м}$, что подтверждает вывод о согласованности.

Интересно, что можно рассчитать разность этих сопротивлений с большей точностью. Для этого ее необходимо вычислить непосредственно из полученных экспериментальных данных. Из формулы (11) следует, что оценка этой разности может быть получена по формуле:

$$\delta R = \frac{a_1 - a_2}{C} = \frac{51,58 - 37,15}{4,41 \cdot 10^{-3}} \approx 3,27 \text{к} \Omega \text{м}, \quad (17)$$

что практически совпадает с полученным ранее значением (различие связано с ошибками округления). Однако расчет погрешности этой формулы приводит к результату

$$\Delta(\delta R) = \delta R_1 \sqrt{\frac{(\Delta a_1)^2 + (\Delta a_2)^2}{(a_1 - a_2)^2} + \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2} = 3,27 \sqrt{\frac{(0,75)^2 + (0,88)^2}{(51,58 - 37,15)^2} + (0,03)^2} \approx 0,28 \text{к} \Omega \text{м}.$$

Относительная погрешность этого результата равна $\varepsilon \approx 8\%$, в то время как погрешность результата (16) равна $\varepsilon \approx 11\%$. Полученный выигрыш связан с тем, что формуле (17) нет величины τ_0 , поэтому ее неточность не влияет на конечный результат: чем меньше неточных величин входит в расчетную формулу, тем она точнее.

Приступим к анализу возможного изменения сопротивления. Как уже было отмечено, при наличии зависимости сопротивления светодиода от силы тока, протекающего через него, построенная в полулогарифмическом масштабе зависимость должна быть нелинейной. Поэтому вопрос об изменении сопротивления связан с проблемой выявления нелинейности полученных зависимостей. Когда диод был включен в цепь без дополнительного резистора, сила тока через него изменялась в больших пределах, поэтому следует анализировать вторую серию измерений.

Конечно, невысокая точность экспериментальных данных не позволяет найти с хорошей точностью, поэтому речь идет только об оценке возможного диапазона изменения сопротивления.

Одним из возможных способов получения такой оценки является разбиение всего диапазона измерений на несколько частей и обработка каждой части отдельно. Брать слишком малые интервалы неразумно: это приводит к большим погрешностям и ненадежности получаемых результатов²².

В данном случае можно построить линейные зависимости для нескольких начальных и нескольких конечных точек, а затем по этим зависимостям найти значения средние значения сопротивлений диода. Выбор числа этих точек требует некоторого компромисса: мало точек - высока погрешность; много точек – мало ожидаемое различие в средних значениях. Поэтому в данном случае линейные зависимости построены по пяти начальным и пяти конечным точкам. Отметим, что даже если аккуратно провести две таких прямых «на глаз», то видно различие в их наклонах (График 4).

²² Тем не менее в дополнении приведены такие расчеты.

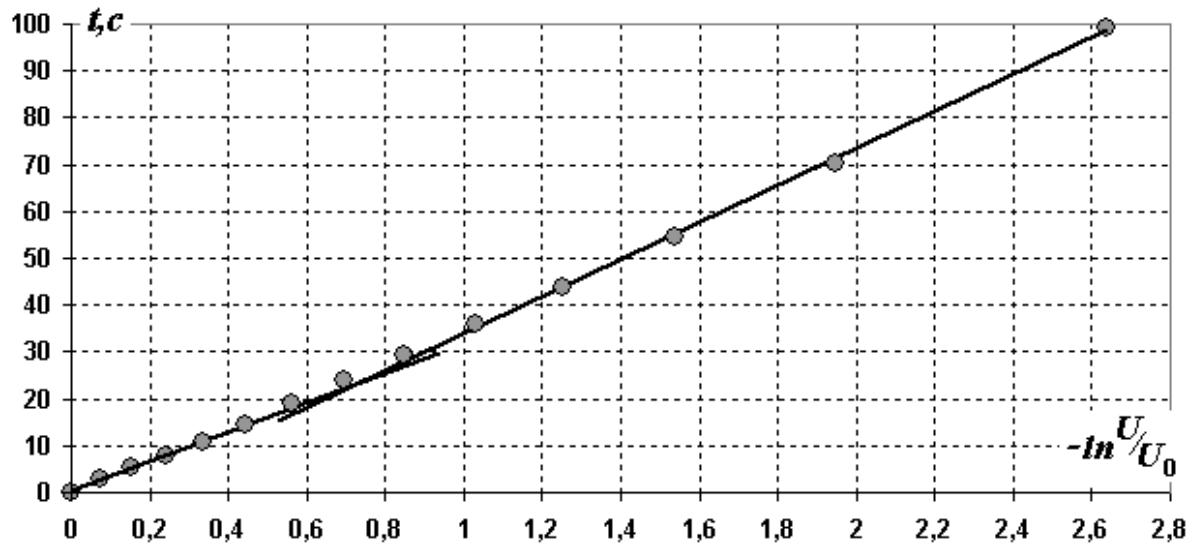


График 4. Зарядка через светодиод (обработка)

Обработка по МНК этих зависимостей дала следующие значения коэффициентов наклона (и их погрешностей):

Для интервала напряжений на вольтметре $U \in (0,2 \div 0,8)B$ (среднее 0,6 В):

$$a_{0,6} = (39,5 \pm 1,4)c;$$

Для интервала $U \in (2,0 \div 2,8)B$ (среднее 2,4 В):

$$a_{2,4} = (31,5 \pm 1,9)c.$$

Как видно интервалы этих значений не перекрываются, поэтому различия в коэффициентах (следовательно, и в сопротивлениях) значимы. Кроме того, получен качественно верный результат: с ростом напряжения на диоде его сопротивление падает. Как и ранее разность сопротивлений лучше рассчитывать непосредственно из полученных данных (без расчета каждого сопротивления по отдельности):

$$R_{0,6} - R_{2,4} = \frac{a_{0,6} - a_{2,4}}{C} \approx 1,8 \kappa\text{Om},$$

погрешность²³ этой разности

$$\Delta(R_{0,6} - R_{2,4}) = (R_{0,6} - R_{2,4}) \sqrt{\frac{(\Delta a_{0,6})^2 + (\Delta a_{2,4})^2}{(a_{0,6} - a_{2,4})^2} + \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2} \approx 0,5 \kappa\text{Om}.$$

Таким образом, окончательная оценка диапазона изменения сопротивления следующая

$$R_{0,6} - R_{2,4} = (1,8 \pm 0,5)\kappa\text{Om}.$$

Мы получили достаточно заметное изменение сопротивления диода, но это изменение на «линейаризованной» зависимости не слишком заметно, потому что оно накладывается на значительное сопротивление вольтметра, которую вносит основной вклад в общее сопротивление цепи: очередной раз сталкиваемся с проблемой малых разностей!

2.3 Наблюдение показывает, что светодиод светится достаточно долго, когда показания вольтметра равны нулю, поэтому непосредственно измерить силу тока с помощью вольтметра невозможно. Кроме того, не наблюдается порогового эффекта, при котором свечение диода резко прекращается – свечение затухает очень постепенно. Конкретный смысл выражения «прекращает светиться» зависит от чувствительности глаза

²³ Обычно, когда по условию требуется «оценить» некоторую величину, то и ее погрешность оценивается самым примитивным методом, либо вообще не оценивается.

наблюдателя и условий внешнего освещения. Все это приводит к тому, что разброс значений силы тока может быть очень значительным. Но уж очень привлекательна идея этого измерения: использовать секундомер. Вид зависимости силы тока от времени известен:

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{t}{a}\right) = \frac{U_0}{R_V} \exp\left(-\frac{t}{a}\right),$$

(здесь использовано очевидное соотношение между силой тока в цепи и измеряемым напряжением на вольтметре – закон Ома), параметры этой зависимости найдены. Поэтому следует измерить время свечения (по нашим данным это примерно 5 минут) и подставить его формулу, описывающую зависимость силы тока от времени:

$$I = \frac{U_0}{R_V} \exp\left(-\frac{T}{a}\right) \approx \frac{2,8B}{6,6k\Omega} \exp\left(-\frac{300}{40}\right) \approx 0,2 \mu A.$$

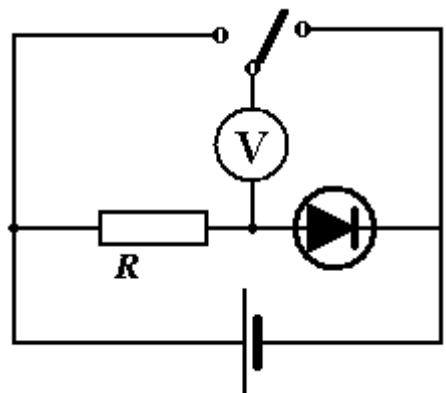
Погрешность этого результата не будем, что бы не пугать тысячами процентов, сошлемся на то, что в условии требуется только грубо оценить.

Часть 3.

Может быть неожиданно для учащихся эта часть работы наиболее проста и не требует экспериментальных хитростей. Достаточно диод подключить к источнику тока последовательно с небольшим резистором и вольтметром (ни конденсатор, ни секундомер здесь не нужен), и измерить напряжения на резисторе и на диоде. Отношение этих напряжений равно отношению сопротивлений (одно из которых известно). При таком подключении сопротивления диода и резистора заметно меньше сопротивления вольтметра, поэтому учитывать его не надо. Что бы подтвердить это утверждение необходимо экспериментально убедится в том, что измеряемое суммарное напряжение на диоде и резисторе равно сумме напряжений на каждом элементе.

Заметим, что, имея два различных резистора, из них можно составить четыре различных составных: каждый по отдельности, соединенные последовательно и параллельно.

Эта работа столь проста, что обсуждать ее далее нет смысла.



Полезные Дополнения.

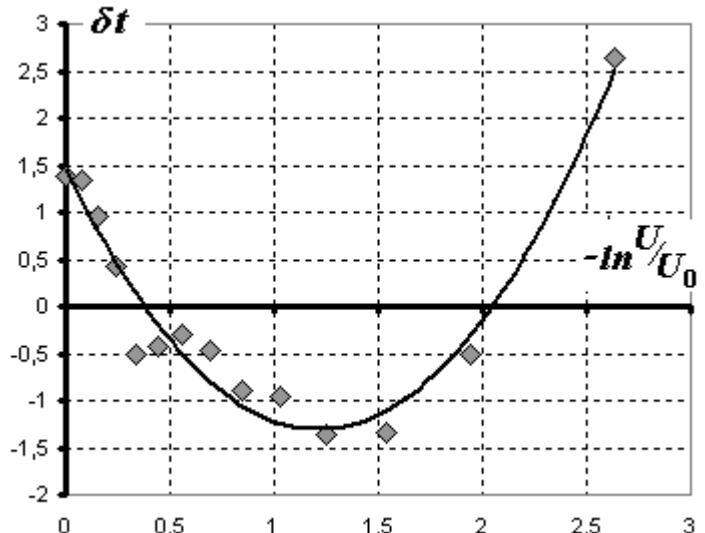
1. Чтобы показать, что отклонения от линейной (а впрочем, и любой другой) зависимости являются систематическими (закономерными) можно рассчитать эти отклонения и даже построить их график.

Так в данной задаче мы утверждали, что при зарядке конденсатора через светодиод, полученные значения отклоняются от линейной зависимости (График 3), построенной по МНК. Рассчитаем разности между экспериментальными значениями времен t_k и рассчитанными с помощью полученной линейной функцией $\bar{t}_k = ax_k + b$:

$$\delta t_k = t_k - \bar{t}_k = t_k - (ax_k + b)$$

и построим график зависимости этой величины от того же аргумента. Построенный график неопровергимо убеждает, что отклонения подчиняются некоторой функциональной закономерности.

Еще один способ доказать, что полученная зависимость не является линейной: построить другую зависимость и доказать, что она лучше.



2. В данной работе мы встретились с необходимости усреднения значений, полученных разными методами. Нам повезло, что эти данные оказались примерно равноточными. В том случае, когда все значения имеют равные погрешности, в качестве итогового результата следует брать среднее арифметическое этих значений, погрешность этого результата в \sqrt{N} раз меньше погрешности отдельного результата²⁴. На языке формульной записи:

Если имеются равноточные данные:
$$\begin{cases} x_1 \pm \Delta x \\ x_2 \pm \Delta x \\ \dots \\ x_N \pm \Delta x \end{cases}, \text{ (или } x_k \pm \Delta x, k = 1, 2, \dots, N\text{),}$$

то результат усреднения имеет вид
$$\langle x \rangle = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \frac{\sum_{k=1}^N x_k}{N}; \quad \Delta \langle x \rangle = \frac{\Delta x}{\sqrt{N}}$$

Если погрешности отдельных результатов различны, то для усреднения следует применять более сложную процедуру. Действительно, более точным результатом доверять следует больше, они должны вносить в окончательный результат больший вес.

Можно (но сложно) доказать, что для получения окончательного результата следует брать среднее взвешенное, причем в качестве весов следует брать величины обратные квадрату погрешностей. Погрешность окончательного результата

²⁴ Как и ранее мы не приводим выводов многочисленных формул теории погрешностей. Их строгий вывод требует применения теории вероятностей и математической статистики. Поэтому ограничиваемся некоторыми соображениями, основанными на здравом смысле.

рассчитывается по правилу: величина обратная квадрату суммарной погрешности равна сумме величин, обратных погрешностям отдельных результатов.

На языке формул это правило записывается в виде:

Если имеются данные с разными погрешностями: $x_k \pm \Delta x_k, k = 1, 2, \dots, N,$
$\text{то результат усреднения имеет вид} \quad \langle x \rangle = \frac{\sum_{k=1}^N \frac{x_k}{(\Delta x_k)^2}}{\sum_{k=1}^N \frac{1}{(\Delta x_k)^2}}, \quad \left(\frac{1}{\Delta \langle x \rangle} \right)^2 = \sum_{k=1}^N \left(\frac{1}{\Delta x_k} \right)^2$

Отметим, что в любом случае такое усреднение приводит к уменьшению погрешности. Приведем примеры такого усреднения и покажем, что, результаты полученные по этим двум правилам могут заметно отличаться.

Пусть $\begin{cases} x_1 = 10 \pm 2 \\ x_2 = 11 \pm 3 \end{cases}$, то результат усреднения $\langle x \rangle = 10,3 \pm 1,7$, что отличается от среднего арифметического 10,5 и ближе к более точному значению.

Еще более заметны отличия, если погрешности отличаются сильнее.

Так для $\begin{cases} x_1 = 10 \pm 1 \\ x_2 = 11 \pm 3 \end{cases}$ результат взвешенного усреднения $\langle x \rangle = 10,10 \pm 0,95$.

Если же погрешности отличаются мало, то результат взвешенного усреднения мало отличается от арифметического. Так для чисел, полученных в данной работе

$R_X^{(1)} = (2,51 \pm 0,26) \text{kOм}$, $R_X^{(2)} = (2,23 \pm 0,24) \text{kOм}$, «правильное» усреднение²⁵ дает $R_X = (2,359 \pm 0,176) \text{kOм}$, а не $R_X = (2,370 \pm 0,183) \text{kOм}$, как при арифметическом усреднении.

3. По полученной зависимости напряжения на вольтметре от времени можно «теоретически» построить зависимость сопротивления от силы тока, или даже вольтамперную характеристику.

Для этого будем рассматривать интервал между двумя соседними измерениями (скажем, между двумя значениями напряжений U_k, U_{k+1} и соответствующим им значениям времен). Среднее значение тока в этом интервале равно

$$I_{k+0,5} = \frac{U_k + U_{k+1}}{2R_V}.$$

Применяя к этому интервалу традиционную линеаризацию $t = -RC \ln \frac{U}{U_0}$, находим

среднее значение сопротивления на этом интервале (здесь Δ - означает разности между крайними значениями):

$$R_{k+0,5} = -\frac{1}{C} \frac{\Delta t}{\Delta \left(\ln \frac{U}{U_0} \right)}.$$

Далее можно вычислить напряжение на диоде:

$$U_{k+0,5}^{(\text{диод})} = I_{k+0,5} \cdot R_{k+0,5},$$

²⁵ Лишние цифры – для того, чтобы увидеть различие.

и построить нужные графики. Ниже показаны построенные таким образом зависимости. Но вспомните, неоднократно обсужденную проблему малых разностей и усомнитесь в обоснованности подобных расчетов, хотя тенденции они отражают верно.

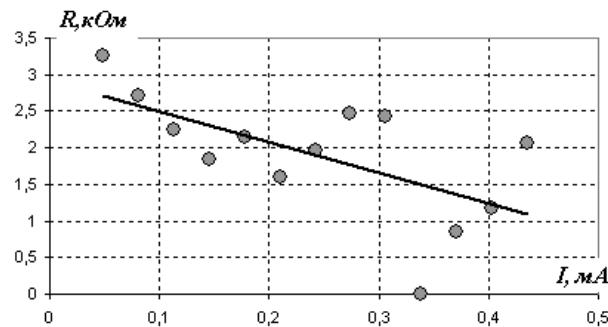


График 5. Зависимость сопротивления светодиода от силы тока

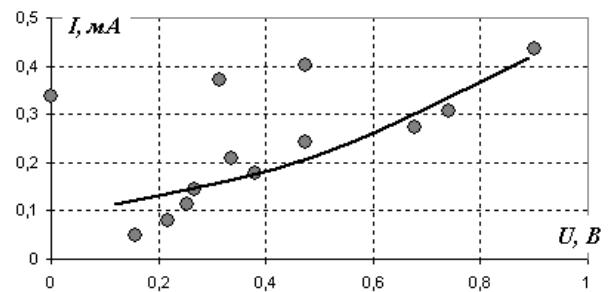


График 6. Вольтамперная характеристика диода

Тем не менее, подобные процедуры используются при обработке экспериментальных данных (в том числе и в данной книге).

3.6 Когда нужна градуировка.

Рассмотренные примеры должны были убедить в том, что в экспериментальных исследованиях предпочтительнее проводить прямые измерения: напряжение измерять вольтметром, скорость – спидометром, расстояние – линейкой. К сожалению, далеко не всегда это удается, поэтому приходится измерять некие физические величины, а затем проводить пересчеты (то есть проводить косвенные измерения), которые лишь ухудшают точность результатов. Хорошо если можно записать явные формулы, позволяющие переходить от результатов прямых измерений к интересующим физическим величинам²⁶. А что делать в том случае, если такие формулы вам (и авторам задач) не известны?

Представим себе гипотетическую ситуацию: вы едете в автомобиле с неработающим спидометром. Зато у вас случайно оказался под руками частотомер, позволяющий измерять частоту звука (а может у вас музыкальный слух, позволяющий точно определять звучащую ноту, а как физик вы знаете частоты всех нот). Конечно же, частота основного тона гула автомобиля зависит от скорости его движения. Но знаете ли вы эту зависимость? Скорее всего, что нет! Но ехать надо! В такой ситуации можно экспериментально найти требуемую зависимость – причем не обязательно ее искать в аналитическом формульном виде. Можно построить экспериментальный график этой зависимости, который называется **градуировочным**.

Для построения этого графика обе физические величины должны быть известны, то есть измерены. После того, как получен градуировочный график, можно измерить одну из величин, а вторую определить по графику. Так в рассматриваемом примере с автомобилем вам было необходимо заранее построить градуировочный график, устанавливающий связь между скоростью автомобиля (которую надо было измерять, пока спидометр работал) и частотой издаваемого звука. Построив такой жизненно необходимый график, нужно случайно захватить его с собой. Правда, если в следующий раз вы захотите определить температуру воды в чайнике при его нагревании с помощью своего частотомера, вам необходимо заранее, случайно, построить градуировочный график, устанавливающий связь между температурой воды и частотой шипения чайника. Не забудьте, что эти зависимости различны для разных чайников, также зависят от количества налитой воды.

Покажем, как эта идея заблаговременного построения градуировочного графика используется в заданиях экспериментальных туров.

²⁶ Как правило, все равно, необходимо проверять применимость этих формул в конкретных условиях: а вдруг сопротивление воздуха опять пакостит!



Задача 11. «Каверна»

Физические методы исследования позволяют заглянуть «внутрь» непрозрачных тел. В данной работе Вам предстоит исследовать форму полости внутри непрозрачного тела.

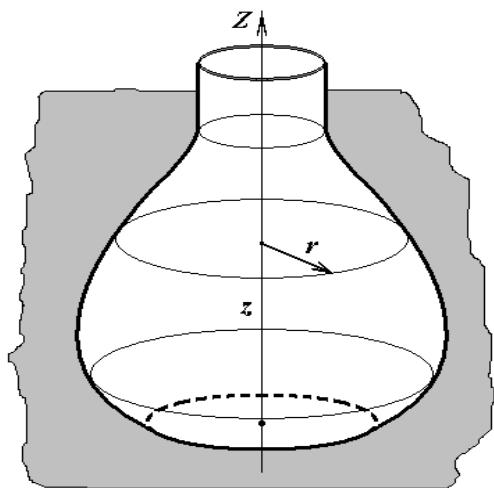


Рис. 1

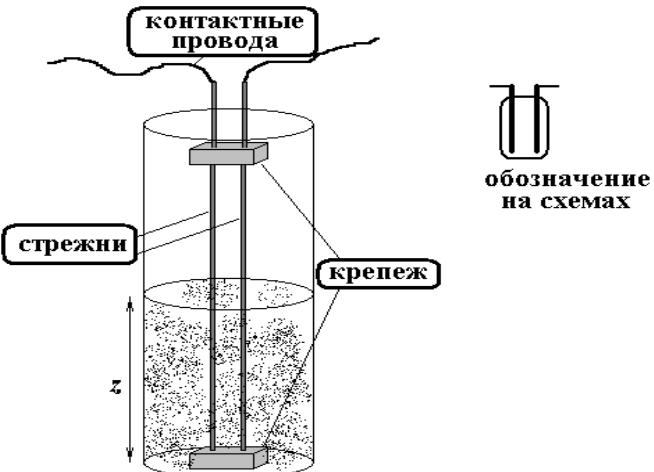


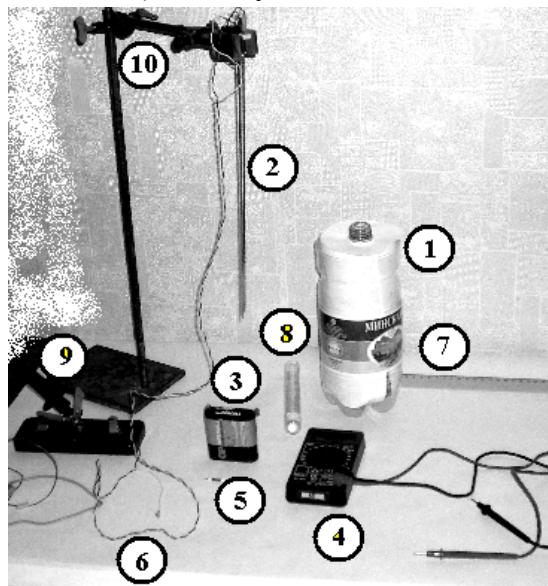
Рис. 2

Известно, что полость имеет осесимметричную форму (*по секрету – внутри запакована бутылка нестандартной формы*) – Рис.1. Форму такой полости можно задать (а затем нарисовать) с помощью функции $r(z)$ - зависимости радиуса сечения r от высоты над дном z .

Для выполнения поставленной задачи вам предлагается использовать электрический датчик, состоящий из двух металлических спиц, закрепленных параллельно друг другу, к которым подсоединенны контактные провода (Рис.2). Если такой датчик поместить в проводящую жидкость, то электрическое сопротивление между спицами будет зависеть от глубины погруженной части спиц (если концы спиц находятся на дне, то – глубине слоя жидкости). Таким образом, по измерению сопротивления (или иной электрической характеристики протекающего тока) между спицами можно определить глубину слоя жидкости.

Пропускайте электрический ток через электролит только во время проведения измерений – электрические свойства электролита (например, его цвет) изменяются при протекании тока.

Приборы и оборудование: Тело с полостью (1); датчик (2); батарейка 4,5 В (3); мультиметр (4); резистор (5); соединительные провода (6); линейка (7); мензурка (8); ключ электрический (9), штатив (10) прозрачная бутылка, вода.



Часть 1. Градуировка.

При проведении измерений в данной части используйте прозрачную бутылку.

1.1 Покажите²⁷ (теоретически), что электрическое сопротивление раствора между спицами датчика обратно пропорционально глубине погружения спиц в раствор

$$R = \frac{A}{z}, \quad (1)$$

где A - некоторая постоянная, зависящая от диаметра спиц, расстояния между ними и удельного сопротивления раствора²⁸.

При протекании электрического тока через раствор, его химический состав изменяется, следовательно, изменяется и его сопротивление. Поэтому при проведении измерений следует стремиться к тому, чтобы сила тока через электролит была мала. С другой стороны, изменение глубины погружения должно заметно сказываться на измеряемой физической величине. Эти рассуждения приводят к выводу, что наиболее рационально измерять напряжение между спицами при небольшой силе тока в цепи, причем, желательно, чтобы эта сила тока практически не зависела от сопротивления раствора. В этом случае напряжение между спицами датчика зависит от глубины погружения по закону

$$U = \frac{B}{z}, \quad (2)$$

где B - некоторая постоянная, зависящая от параметров электрической цепи и постоянной A в формуле (1).

1.2. Предложите электрическую схему, позволяющую реализовать высказанную идею определения глубины погружения по измерению напряжения между спицами датчика. Нарисуйте эту схему.

Не забудьте поставить ключ, чтобы подключать источник только во время проведения измерений.

1.3. Докажите (теоретически) формулу (2) для вашей цепи, выразите постоянную B через параметры цепи и постоянную A .

1.4 Проверьте экспериментально применимость формулы (2) в вашем случае.

Часть 2. Полость.

Поместите датчик внутрь полости в непрозрачном теле.

2.1 Измерьте зависимость напряжения между спицами от объема раствора, налитого внутрь полости. Постройте график полученной зависимости.

2.2 По полученным данным постройте профиль полости, то есть зависимость ее горизонтального радиуса от расстояния до дна $r(z)$.

²⁷ Если вы не знаете как доказать эту формулу, то пользуйтесь ей без доказательства.

²⁸ Значение этого коэффициента выводить не надо (это слишком сложно) – лучше определить его (при необходимости) экспериментально.

Комментарии к условию задачи.

1. Задачи подобного типа часто называют «черными ящиками»: в них требуется определить нечто, невидимое, скрытое от ученика. Известно много задач такого типа: в «черном ящике» электрическая цепь – необходимо ее нарисовать; в ящике – оптические элементы; и т.д. В данном случае в «ящике» – полость.
2. Изготовить тело с полостью для этой задачи не сложно: бутылку нестандартной формы (мы использовали пузатую коньячную) можно поместить в двухлитровую пластиковую бутылку и засыпать песком и каким то образом его закрепить (например, тонким слоем цементного раствора). Естественно, горлышко бутылки должно торчать наружу.
3. Датчик можно изготовить из двух кусков жесткой проволоки (мы использовали вязальные спицы), их можно закрепить с помощью двух кусочков ластика. Соединительные провода лучше заранее прикрепить к спицам, а еще лучше собрать весь датчик заранее. Не забывайте - датчик должен входить в горлышко бутылки.
4. Прозрачная бутылка может быть любой, важно, чтобы ее высота была больше высоты исследуемой полости, и чтобы была возможность достаточно точно измерять высоту уровня жидкости в бутылке.
5. В качестве жидкости можно использовать обыкновенную слегка подсоленную воду (можно водопроводную). Повторное использование этой жидкости не рекомендуется – после протекания тока, ее химический состав изменяется. Поэтому ученикам следует предоставить количество, достаточное для заполнения обеих бутылок: сначала прозрачной, для построения градуировочного графика, а затем «полости» для определения ее формы.
6. В предлагаемом варианте задачи для измерения напряжения необходимо использовать цифровой мультиметр – обычный школьный вольтметр не обеспечивает нужную точность.
7. Важную роль играет выбор сопротивления предлагаемого резистора. Его величина должна быть на порядок (раз в десять) больше, сопротивление датчика, на 1 см погруженный в используемую жидкость. Величина этого сопротивления составляет несколько десятков Ом.

Решение и обсуждение.

Основная идея восстановления формы скрытой полости уже изложена в параграфе 2.2 данной книги. Если в осесимметричный сосуд заливать известный небольшой объем жидкости ΔV , то повышение уровня жидкости Δz может быть найдено из очевидного геометрического выражения

$$\Delta V = \pi r^2 \Delta z. \quad (1)$$

Если измерить зависимость высоты уровня жидкости в сосуде от ее объема, то с помощью формулы (1) можно восстановить форму сосуда, то есть зависимость его радиуса от высоты $r(z)$. Эта идея реализуется во второй части данной задачи. Основная же проблема решения задачи заключается в определении высоты уровня жидкости по результатам измерения напряжения между спицами датчика. Идея этого расчета проста, красива и изложена в условии задачи, но требует экспериментальной проверки.

Сейчас последовательно рассмотрим решение всех пунктов данной задачи.

1.1 Так как электрический ток протекает между спицами, то площадь эффективного поперечного сечения²⁹ пропорциональна глубине погружения спиц датчика. Следует также отметить, что ток протекает в основном в пространстве между спицами, поэтому

²⁹ Точный расчет сопротивления требует расчета линий тока пространстве между спицами.

форма сосуда (если его поперечные размеры превышают расстояние между спицами) практически не влияет на электрическое сопротивление датчика.

1.2 Чтобы реализовать сформулированную идею, необходимо датчик соединить последовательно с резистором, сопротивление которого должно значительно превышать сопротивление жидкости между спицами. В этом случае сила тока практически не будет зависеть от сопротивления датчика. Поэтому напряжение на датчике будет пропорционально его сопротивлению.

Принципиальная схема приведена на рисунке.

1.3 Формула для напряжения на датчике имеет вид:

$$U = IR = \frac{U_0}{R + R_0} R \approx \frac{U_0}{R_0} \frac{A}{z}. \quad (2)$$

1.4 Для экспериментальной проверки полученной формулы необходимо провести измерения напряжения на датчике U при различных значениях высоты уровня z предоставленной жидкости в прозрачном сосуде (где эту высоту можно измерять).

Результаты измерений приведены в таблице 1, полученная зависимость показана на графике 1.

Таблица 1.

$z, \text{мм}$	$U, \text{мВ}$
13	4,35
21	4,00
30	3,74
38	3,52
46	3,32
54	3,14
62	2,99
69	2,88
79	2,76
87	2,68
95	2,60
103	2,53
112	2,47
119	2,41
127	2,36
136	2,31
143	2,27

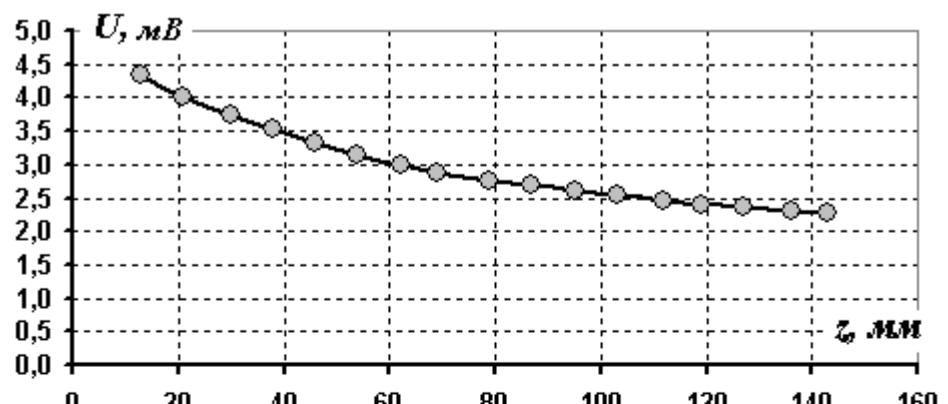
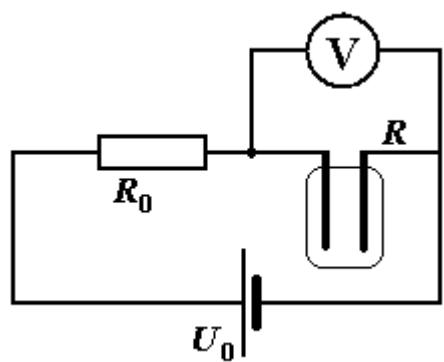


График 1.
Зависимость напряжения от высоты уровня жидкости

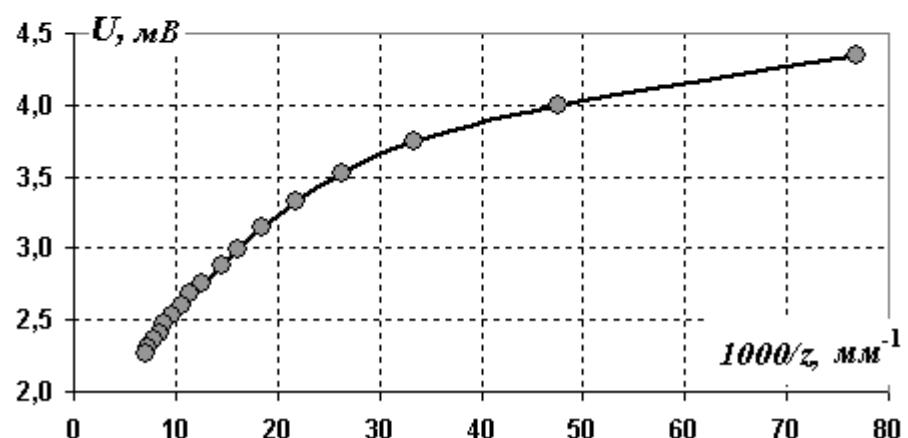


График 2. Линеаризация (попытка 1)

График напоминает график функции (2), по крайней мере – убывающая нелинейная функция. Чтобы проверить применимость формулы (2), полученную зависимость следует линеаризовать. Способ линеаризации подсказывает сам вид функции: необходимо построить зависимость напряжения от величины обратной высоте уровня жидкости.

Линейность этой зависимости будет свидетельствовать о справедливости проверяемой формулы. Результат построения³⁰ на Графике 2. Однако... не о какой линейности речи быть не может! Точки хорошо легли на плавную кривую, поэтому случайные погрешности измерений не могут быть причиной наблюдаемой нелинейности.

Не будем спешить с выводом о неприменимости формулы (1) в данном случае. Попытаемся все-таки линеаризовать эту зависимость, тем более, что она нам необходима для выполнения второй, основной части работы.

Возможной причиной нелинейности Графика 2 является систематическая ошибка в определении глубины погружения (причины: часть спиц в крепеже, толщина дна и т.д.). В таком случае зависимость напряжения от глубины погружения должна иметь вид:

$$U = \frac{B}{z + z_0}.$$

Такая зависимость линеаризуется, если построить график зависимости измеренной высоты z от величины, обратной напряжению $1/U$:

$$z = \frac{B}{U} - z_0.$$

По этому графику можно будет определить и величину систематической погрешности.

Пробуем – График 3. Эта зависимость ближе к линейной, но все же заметно отличается от нее. Здесь причину найти сложно. Поэтому попробуем еще два традиционных метода: логарифмический (может зависимость степенная) и полулогарифмический (или экспоненциальная) масштаб: графики 4, 5.

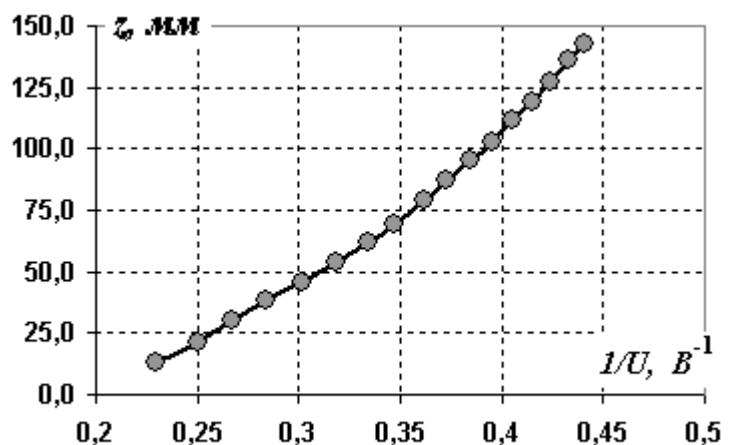


График 3. Линеаризация (попытка 2)

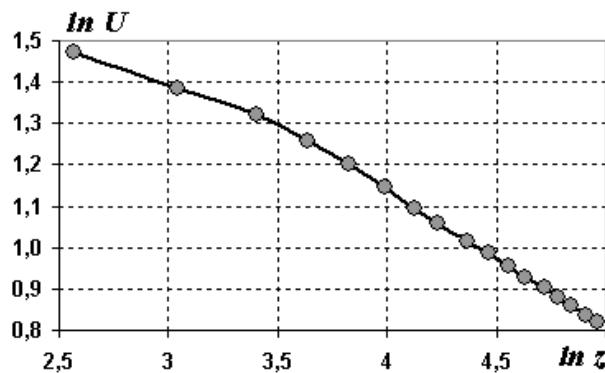


График 4. Линеаризация (попытка 3)

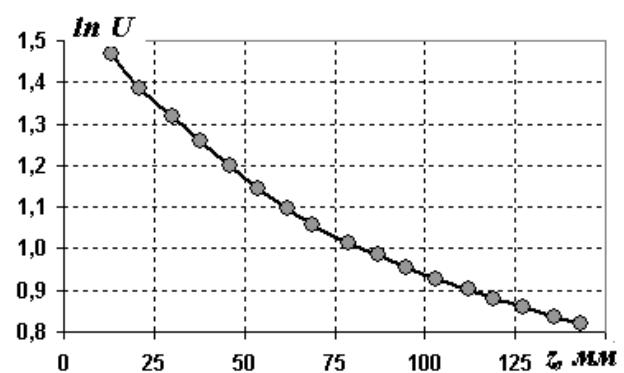


График 5. Линеаризация (попытка 4)

Но и эти попытки не увенчались успехом – зависимости явно нелинейные.

Поэтому следует признать, что формула (1) в данных условиях не применима. Условие задачи не требует объяснения, поэтому необходимо смириться с этим неожиданным результатом. Для выполнения второй части работы не остается другого способа, как использовать График 1, построенный по данным прямых измерений, в качестве градуировочного. То есть измерять напряжение, а значения высоты уровня жидкости снимать с графика. Для этого его, конечно, следует построить побольше и очень аккуратно. Сложно, но зато не надо будет долго считать погрешности.

³⁰ Для экономии места таблицы преобразованных значений опущены.

Заметим, что авторы задач не обязаны предлагать только те вопросы, ответы на которые положительные. Олимпиада – это интеллектуальное соревнование, призванное выявить не только талантливых, но и добросовестных учащихся, которые свои выводы строят на основе собственных результатов и имеющие смелость обоснованно не соглашаться с авторами задач.

2.1 Во второй части работы необходимо последовательно заливать в полость небольшие порции жидкости (по 25 мл), измерять напряжение на датчике U , а затем по градуировочному графику определять значения высоты уровня жидкости z . Результаты проделанной работы представлены в Таблице 2 и на графике 6.

Таблица 2.

$V, \text{мл}$	$U, \text{В}$	$z, \text{мм}$	$r, \text{см}$
25	4,57		
50	4,35	12	
75	4,17	18	3,64
100	4,00	22	4,46
125	3,84	27	3,99
150	3,71	31	4,46
175	3,58	36	3,99
200	3,46	40	4,46
225	3,33	45	3,99
250	3,24	49	4,46
275	3,14	54	3,99
300	3,08	58	4,46
325	3,00	62	4,46
350	2,93	67	3,99
375	2,87	71	4,46
400	2,81	76	3,99
425	2,75	83	3,37
435	2,71	85	3,99
445	2,69	87	3,99
455	2,67	89	3,99
465	2,64	91	3,99
475	2,60	95	2,82
485	2,53	104	1,88
495	2,45	115	1,70
505	2,33	133	1,33
515	2,18	170	0,93

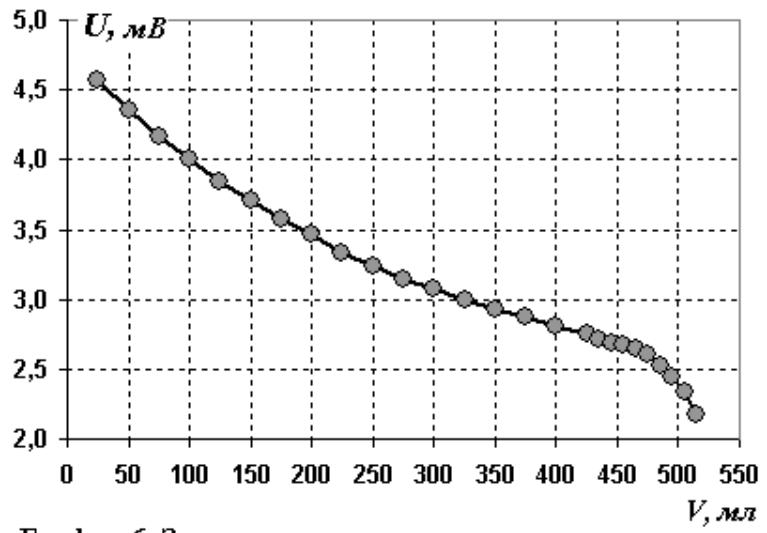


График 6. Зависимость напряжения на датчике от объема налитой жидкости

Красивый и необычный график, но здесь он просто иллюстрирует проделанную работу. Для решения задачи (восстановления формы полости) необходимы численные данные, приведенные в таблице.

Не останавливаясь подробно на выкладках и их анализе, приведем формулу, по которой

рассчитаны значения радиусов r полости на различных высотах: $r = \sqrt{\frac{\Delta V}{\pi \Delta z}}$, где значения

Δz брались как разности значений высот в двух соседних строках. На графике 7 показан построенный профиль полости. Трудно предположить, что боковая поверхность бутылки гофрирована (или, что использованный метод позволил выявить такие детали), поэтому на графике проведена сглаживающая кривая.

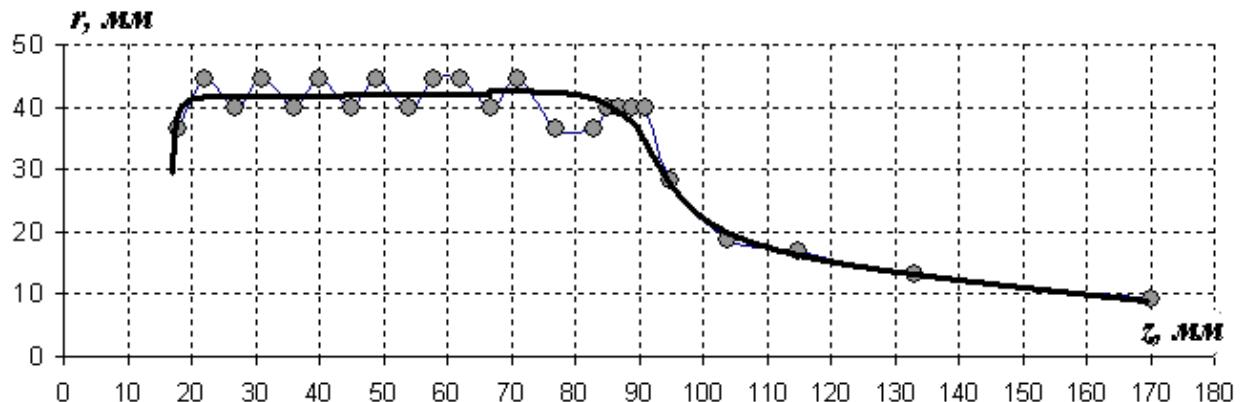


График 7. Профиль бутылки

В данной задаче использован метод расчета основанный на использовании малых разностей, раскритикованный при обсуждении предыдущей задачи. Но как следует из полученного результата, он привел к успеху. Помимо погрешностей, связанных с использованием этого метода, заметную погрешность вносит использование градуировочного графика: «гофрирование» боковой поверхности связано, по-видимому, с неточностями снятия значений по этому графику (ошибки округления).

Признаемся, что представленные здесь результаты – это лучшее, чего удалось добиться авторам задачи при многократных попытках самостоятельно выполнить эту задачу. Остальные попытки дали гораздо худший результат.

В следующей задаче помимо градуировки рассматривается еще один важный вопрос – выбор оптимального режима работы измерительной установки. Косвенно это проблема затрагивалась и в предыдущих задачах. Критерии оптимальности могут быть различными, но наиболее популярными являются следующие:

- обеспечение максимального диапазона изменения параметров исследуемого явления;
- обеспечение максимальной точности измерений;
- простота измерений и последующей обработки;
- уменьшение числа измеряемых и контролируемых параметров.

В любом случае, когда вам необходимо самостоятельно разработать схему экспериментальной установки, уточнить методику проведения измерений, выбрать рабочие параметры, прежде всего следует четко понимать свою основную цель, на основании чего и сформулировать критерий оптимальности в данной конкретной задаче.

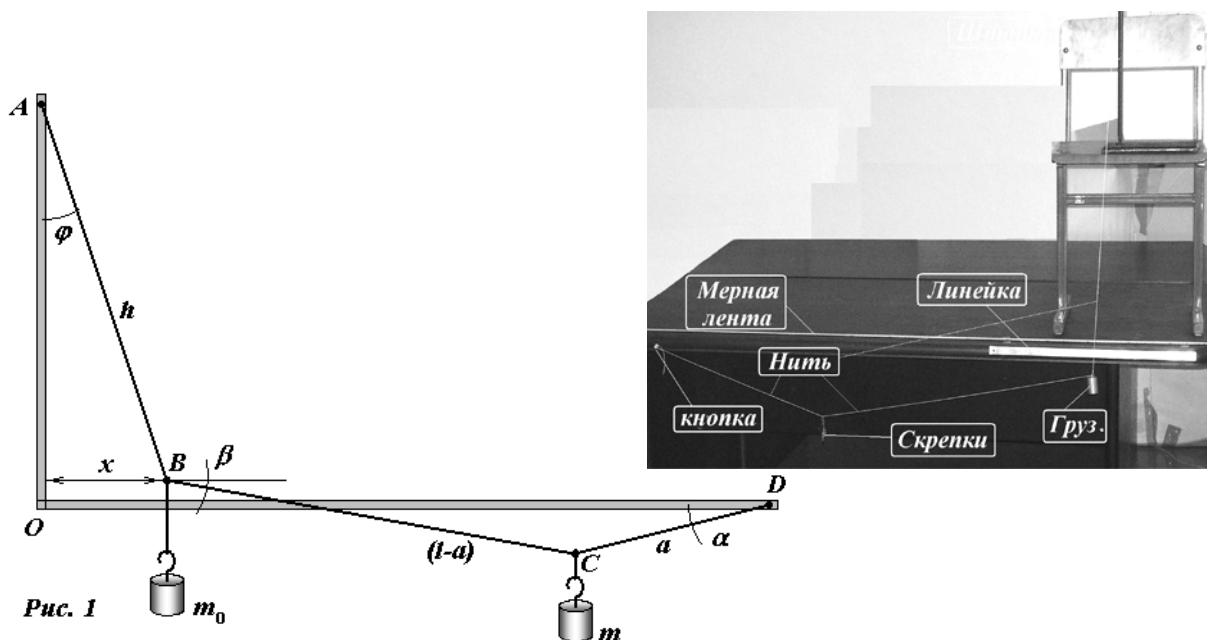


Задача 12.

«Взвешивание без весов, или весы висячие»

Приборы и оборудование: Штатив, нитки с кнопкой, линейка 40 см, линейка пластмассовая 10-20 см, мерная лента 1,5 м, скрепки канцелярские 10 штук, миллиметровая бумага, груз известной массы, высокий сосуд с водой, скотч, кусочек сырого картофеля.

Соберите установку, схема которой показана на фотографии и на рис.1. В качестве вертикальной стойки используйте штатив, который поднимите как можно выше – на стол поставьте стул, а на него уже штатив. Длина вертикальной нити до точки крепления груза известной массы m_0 должна быть как можно больше (не менее 100 см). В положении равновесия горизонтальная нить должна располагаться вдоль края стола, один конец этой нити прикрепите к грузу известной массы, второй закрепите на торце стола с помощью кнопки. Длина этой нити тоже должна быть как можно длиннее (не менее 120 см). На торце стола прикрепите с помощью скотча линейку длиной 40 см для измерения отклонения вертикальной нити x . Вдоль края стола разверните мерную ленту для измерения положения (a - расстояние до точки крепления) измеряемых грузов m , в качестве которых используйте канцелярские скрепки.



Часть 1. Оптимальное положение точки подвеса.

- 1.1 Измерьте зависимость величины смещения x от положения точки подвеса измеряемого груза a , при постоянной массе этого груза. Число подвешенных скрепок задайте самостоятельно, свой выбор обоснуйте.
- 1.2 Постройте график полученной зависимости.
- 1.3 Укажите оптимальное положение точки подвеса грузов для дальнейших измерений.

Часть 2. Градуировка.

2.1 Измерьте зависимость отклонения нити x от числа скрепок N , подвешенных в оптимальном положении.

2.2 Постройте график полученной зависимости.

Теоретический анализ показывает, что при не очень больших углах отклонения нити от вертикали величина отклонения x связана с отношением масс грузов приближенным законом «трех вторых»:

$$x^{\frac{3}{2}} = C \frac{m}{m_0}. \quad (1)$$

где C - постоянный коэффициент, зависящий только от геометрических размеров установки и точки крепления грузов.

Примечания.

1. Не старайтесь получить эту формулу, потому что, во-первых, это не будет оцениваться, во-вторых, потратите много драгоценного времени, в-третьих, все равно не получите.

2. Справка для экспериментаторов $x^{\frac{3}{2}} = x\sqrt{x}$.

2.2 На основании полученных экспериментальных данных проверьте, выполняется ли закон (1) для вашей установки.

2.3 Определите массу одной скрепки.

Часть 3. Проверка закона Архимеда.

Прикрепите к нити в оптимальной точке подвеса пластмассовую линейку, так чтобы ее нижний конец находился у дна сосуда. Доливая воду в сосуд легко добиться, чтобы часть линейки оказалась погруженной в воду.

3.1 Измерьте зависимость отклонения нити от длины погруженной в воду части линейки.

3.2 На основании полученных данных докажите справедливость закона Архимеда: выталкивающая сила пропорциональна весу вытесненной жидкости.

3.3 Определите экспериментально плотность сырого картофеля.

Комментарии к условию задачи.

1. Подготовка и выполнение данной задачи не вызывает особых затруднений. Результаты измерений стабильны, достаточно точны и не обычны. Поэтому эту задачу можно рекомендовать учащимся 9 класса.

2. Пластмассовая линейка, входящая в перечень оборудования, необходима для проверки закона Архимеда – ее надо будет опускать в сосуд с водой. Поэтому диаметр сосуда должен быть таким, чтобы линейка входила в него вертикально. Удобно использовать обычную мензурку.

Решение и обсуждение.

В данной задаче предложена оригинальная конструкция весов. Главное ее достоинство – отсутствие труящихся деталей. Правда это достоинство достигается ценой усложнения градуировки – шкала весов, судя по формулам, приведенным в условии не линейна. Первые две части работы предназначены для настройки «прибора»: выбора оптимального режима и градуировки. В данном случае оптимальным, будет такой выбор параметров, при котором достигается максимальная точность измерений. Непосредственно измеряемой величиной является отклонение, измеряемое линейкой. Абсолютная погрешность измерения линейки является приблизительно постоянной, поэтому относительная погрешность будет минимальна при максимальном отклонении нити от вертикали. Скорее всего, приведенная формула (1) является приближенной, справедливой при небольших отклонениях. Поэтому необходимо искать некий компромисс: очень малые отклонения сложно измерять, при больших отклонениях может оказаться неприменимой приведенная формула. Именно поэтому требуется предварительная градуировка весов. В последней части работы предлагается проверить закон Архимеда (как будто у кого-то есть сомнения в его справедливости), а затем измерить плотность картофеля. Идея этого измерения была реализована еще самим Архимедом – гидростатическое взвешивание. Поэтому методика измерения хорошо известна. Можно приступать к выполнению работы³¹.

Часть 1.

1.1 Для измерений следует взять максимальное число скрепок $N = 10$, так как в этом случае отклонения максимальны, что облегчает измерения и повышает их точность. Результаты измерений зависимости отклонения грузов x от положения точки подвеса a приведены в **Таблице 1**.

Таблица 1.

$a, \text{ см}$	5,0	10	15	20	25	30	35	40	45
$x, \text{ см}$	2,5	4,5	6,5	8,0	9,4	11	11,5	12	12,6

50	55	60	65	70	75	80	85	90	95
13	13,1	13	13	12,5	12,1	11,5	11	10	8,5

График полученной зависимости представлен на рис. 1.

Из полученных результатов следует, что максимальное отклонение достигается, когда точка подвеса находится в центре горизонтальной нити, поэтому эта точка подвеса является оптимальной для дальнейших измерений.
Очевидный результат!

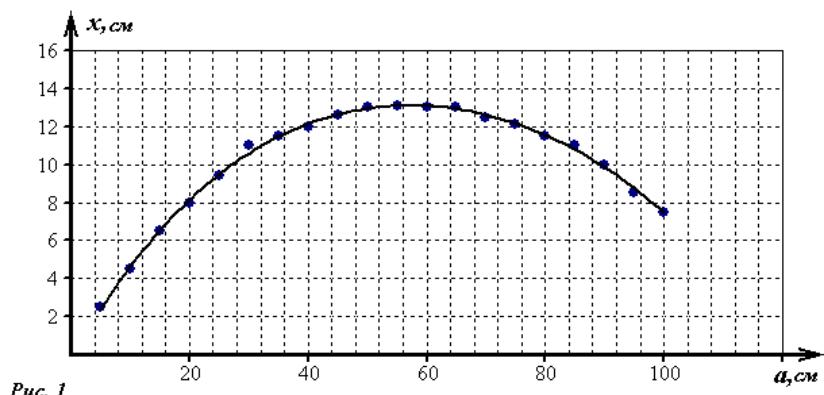


Рис. 1

³¹ Все экспериментальные данные приведены для установки с параметрами $l = 110 \text{ см}$, $h = 120 \text{ см}$, $m_0 = 15 \text{ г}$, погрешностями этих величин будем пренебрегать.

Часть 2. Градуировка.

2.1 -2.2 Результаты проведенных измерений зависимости отклонения нити x от числа подвешенных скрепок N представлены в таблице 2.

Таблица 2.

N , штук	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x , см	3,1	4,4	5,8	6,9	8,1	9,2	10,3	11,2	12,2	13,0

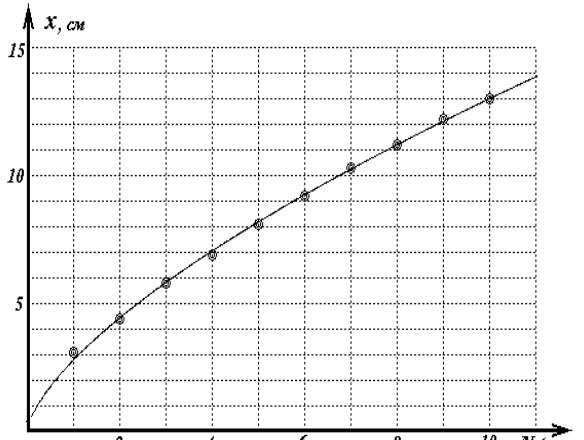


Рис. 2

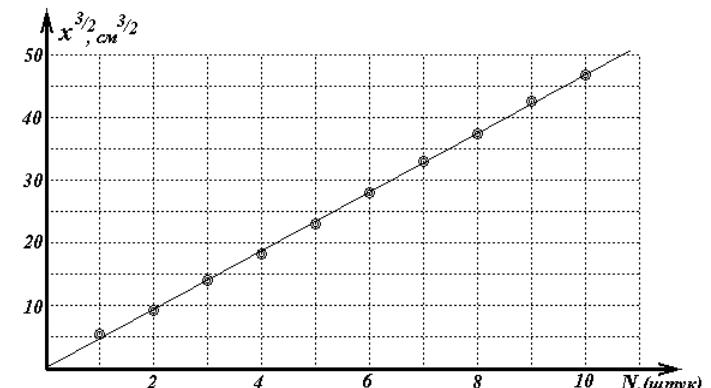


Рис. 3

График полученной зависимости изображен на Рис. 2. Как видно из графика полученная зависимость является нелинейной. Для проверки выполнимости закона «трех вторых» предпочтительнее построить график зависимости $x^{3/2}$ от числа подвешенных скрепок³² (Рис. 3). Прекрасно видно, что эта зависимость является прямо пропорциональной, что однозначно подтверждает справедливость приведенной в условии формулы в исследованном диапазоне отклонений. Таким образом, установлена связь между массой подвешенного груза (единица измерения – масса одной скрепки) и отклонением груза. Эту зависимость можно использовать в качестве **градуировочной**, позволяющей по измеренному отклонению определять массу груза. Удобнее, конечно пользоваться подтвержденной функциональной зависимостью. Если бы оказалось, что закон «трех вторых» не выполняется, то в дальнейшем можно было бы использовать непосредственно график 2.

Подчеркнем, диапазон дальнейших измерений не должен выходить за пределы диапазона проведенной градуировки, так как вне этого предела полученные значения будут не обоснованными (хотя, и могут быть верными).

2.3. Для оценки массы одной скрепки необходимо знать коэффициент пропорциональности в формуле (1). Найти его значение по проведенным измерениям нельзя: нам не известно отношение масс грузов, известно только как изменяется это отношение – пропорционально числу скрепок. Поэтому для определения этого коэффициента можно воспользоваться скрепками: так если в качестве груза m_0 взять 8 скрепок, а в качестве груза m две скрепки, то отношение их масс известно точно $\frac{m'}{m'_0} = \frac{1}{4}$.

При таких грузах отклонение нити при оптимальной точке подвеса составило

³² Можно также использовать и более надежный метод: построить данную зависимость в логарифмическом масштабе и с помощью МНК определить: является ли полученная зависимость степенной; найти показатель степени и оценить его погрешность. Но... не все знают, что такое логарифм.

$x_{0,25} = (12,0 \pm 0,1) \text{ см}$. В качестве погрешности мы выбрали цену деления линейки. Теперь коэффициент пропорциональности легко находится из формулы (1)

$$C = \frac{m'_0}{m'} x_{0,25}^{\frac{3}{2}} = 4x_{0,25}^{\frac{3}{2}} = 4 \cdot 12^{\frac{3}{2}} \approx 166 \text{ см}^{\frac{3}{2}}; \quad \Delta C = \frac{3}{2} C \frac{\Delta x_{0,25}}{x_{0,25}} \approx 2 \text{ см}^{\frac{3}{2}}.$$

В принципе, для определения массы скрепки (и для выполнения условия задачи), рассчитывать этот коэффициент необязательно, но, найдя его, мы закончили построение градуировочной функции.

Теперь можно воспользоваться полученными ранее данными: при $m_0 = 15 \text{ г}$ и $m = 10m_1$ (m_1 - масса одной скрепки) величина отклонения нити составила $x = (13,0 \pm 0,1) \text{ см}$. Используя очередной раз формулу (1), находим

$$m_1 = \frac{m_0}{10} \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{C} \approx 0,42 \text{ г}. \quad \Delta m_1 = m_1 \sqrt{\left(\frac{3}{2} \frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2} \approx 0,01 \text{ г}$$

Возможно, что погрешность полученного результата занижена.

Чтобы каждый раз не заниматься решением уравнения (1), можно представить градуировочную функцию в более удобном виде. Для этого обозначим $C = 4A^{\frac{3}{2}}$, где $A = x_{0,25} = (12,0 \pm 0,1) \text{ см}$ и выразим значение массы из формулы (1):

$$m = m_0 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{C} = \frac{m_0}{4} \left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

В этой записи присутствует отношение отклонений, поэтому можно их измерять в любых единицах (например, в единицах длины скрепки). Относительная погрешность измерения массы в таком случае записывается в виде

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{3}{2} \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta A}{A}\right)^2}.$$

Часть 3. Проверка закона Архимеда.

Как и на любых весах, на данной установке реально измеряется вес тела (сила натяжения нити), который в обычно пропорционален массе. Если же тело частично погрузить в жидкость, то его вес уменьшится на величину силы Архимеда. Поэтому для проверки этого закона можно исследовать, как зависит вес тела от глубины его погружения. При вертикальном погружении пластмассовой линейки в воду, объем погруженной части (поэтому и сила Архимеда) пропорционален глубине погружения. Следовательно, линейное уменьшение веса линейки с ростом глубины погружения подтверждает справедливость закона Архимеда.

В свою очередь, нами доказано, отклонение нити в степени «три вторых» пропорционально весу тела. Для проверки закона Архимеда можно измерить зависимость величины отклонения x от глубины погружения линейки z . Тогда линейное убывание $x^{\frac{3}{2}}$ при увеличении z в очередной раз подтвердит правоту Архимеда.

Результаты измерения величины отклонения нити x от глубины погружения линейки z (при измерениях использовалась линейка длиной $L = 10 \text{ см}$) даны в Таблице 3, а график этой зависимости показан на рис. 4. На рис. 5 построен линеаризованный график этой же зависимости.

Таблица 2.

$z, \text{ см}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x, \text{ см}$	10,6	10,1	9,8	9,3	8,9	8,5	8,0	7,5	6,9	6,4

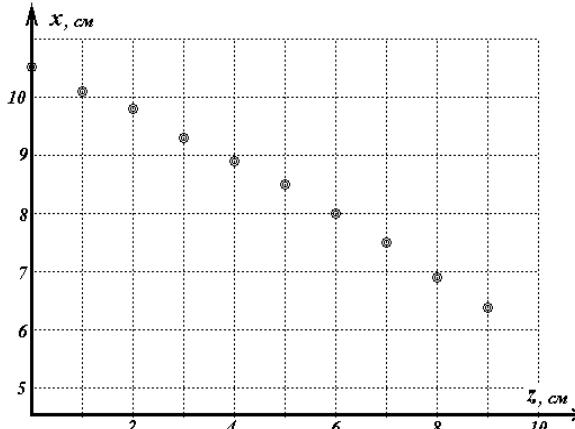


Рис. 4

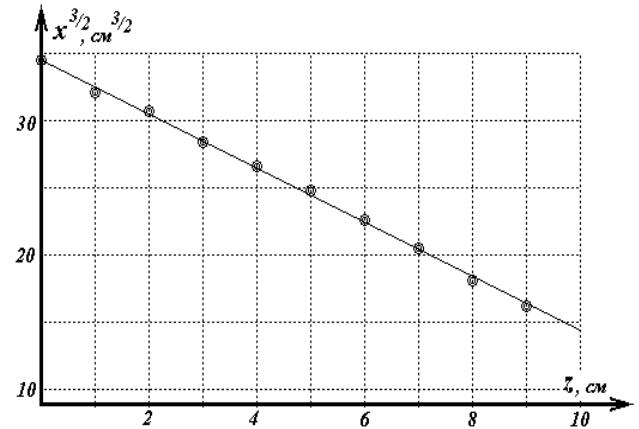


Рис. 5

Эта зависимость практически линейна, что подтверждает справедливость закона Архимеда.

Теоретики, вынужденные заниматься экспериментом, могут облечь эти простые рассуждения в алгебраическую форму, а затем обработать результаты измерений более изящно.

Так вес линейки, частично погруженной в воду равен

$$P = mg - F_A = \rho SLg - \rho_0 Szg = mg \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{z}{L}\right).$$

С помощью градиуровочной функции можно получить

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^{3/2} = 1 - \frac{\rho_0}{\rho} \left(\frac{z}{L}\right),$$

где x_0 - отклонение нити для не погруженной в воду линейки. График 5 лучше строить в «нормированных» координатах $\left(\left(\frac{x}{x_0}\right)^{3/2}, \left(\frac{z}{L}\right)\right)$, тогда коэффициент наклона прямой будет равен отношению плотностей воды и пластмассы (график 6)

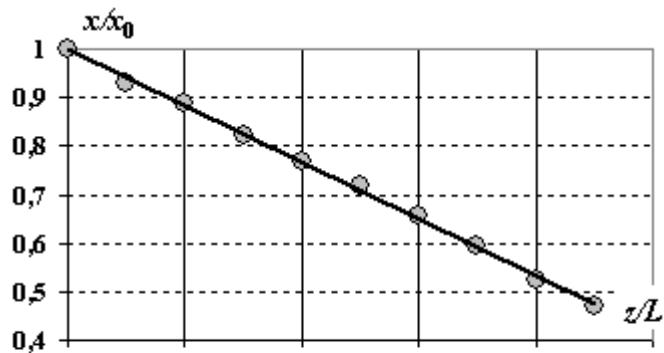


График 6. Проверка закона Архимеда (нормировка)

3.3 Так как закон Архимеда выполняется в наших условиях, то им можно воспользоваться для определения плотности сырого картофеля. Подвесим на нити в точке оптимального подвеса кусочек сырого картофеля, при этом отклонение нити равно $x_0 = 11,3 \text{ см}$. Поднесем к кусочку картофеля стакан с водой так, чтобы он полностью погрузился в воду, при этом отклонение нити составляет всего $x_1 = 3,2 \text{ см}$. Используя закон Архимеда, можно доказать, что плотность тела рассчитывается по формуле

$$\rho_1 = \rho_0 \frac{P_0}{P_0 - P_1},$$

где P_0 - вес тела в воздухе, P_1 - вес тела в воде ρ_0 - известная плотность воды. Так как в нашей установке вес тела пропорционален отклонению в степени три вторых, то последнюю формулу можно преобразовать к «расчетному виду»:

$$\rho_1 = \rho_0 \frac{P_0}{P_0 - P_1} = \rho_0 \frac{1}{1 - \frac{P_1}{P_0}} = \frac{\rho_0}{1 - \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^{3/2}} \approx 1,18 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Расчет погрешности этого результата проводится следующим образом:

$$\eta = \frac{x_1}{x_0} \approx 0,283; \quad \Delta\eta = \eta \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta x_0}{x_0}\right)^2} = 0,0091$$

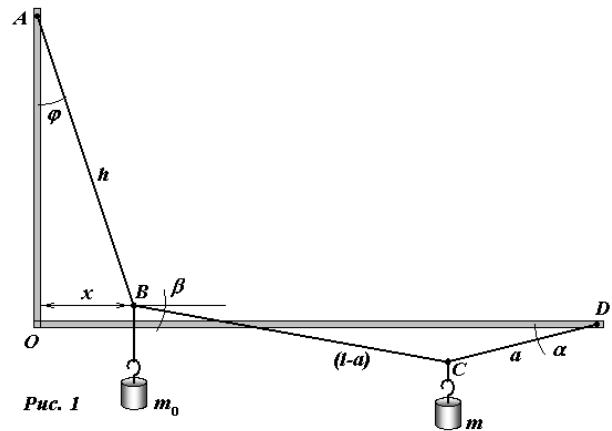
$$\rho_1 = \frac{\rho_0}{1 - \eta^{3/2}}; \quad \Delta\rho_1 = \left| \frac{\partial\rho_1}{\partial\eta} \right| \Delta\eta = \frac{3\eta^{1/2}\rho_0}{2(1 - \eta^{3/2})^2} \approx 0,01 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

Небольшое дополнение.

Использованный в данной задаче закон «трех вторых» может быть получен теоретически, на основании законов динамики. Действительно оказывается, что он справедлив при малых отклонениях. Проведенные измерения, подтвердившие экспериментально этот закон, подтверждают, что в использованном диапазоне измерений приближение малых углов вполне применимо.

Дополнение. Теоретическое описание.

Все обозначения приведены на Рис. 1. Отметим, что длина l «горизонтальной» нити BCD в рассматриваемой установке равна расстоянию между точкой крепления D основанием O вертикали, опущенной из верхней точки подвеса A , а длина h «вертикальной» нити AB равна высоте точки подвеса AO . То есть при отсутствии груза m нить занимает положение AOD .



Найдем зависимость отклонения x точки B от масс подвешенных грузов.

Положению равновесия соответствует минимум потенциальной энергии.

Потенциальная энергия системы грузов выражается формулой

$$U = -m_0gh \cos \varphi - mga \sin \alpha. \quad (1)$$

Понятно, что положение грузов однозначно определяется одним углом, в качестве такого «определяющего» угла выберем φ угол отклонения нити AB от вертикали. Двигаясь по нити, перейдем от точки A до точки D , тогда проекции таких смещений на горизонталь равны

$$h \sin \varphi + (l - a) \cos \beta + a \cos \alpha = l, \quad (2)$$

а на вертикаль

$$h \cos \varphi + (l - a) \sin \beta - a \sin \alpha = h. \quad (3)$$

В ходе измерений угол отклонения нити φ достаточно мал, поэтому и здесь будем считать его малым, так что можно считать, что $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1$, в дальнейшем также будем оставлять члены только первого порядка по φ . Используя это приближение, перепишем выражения (2)-(3) в виде

$$\begin{aligned} (l - a) \cos \beta &= (l - x) - a \cos \alpha \\ (l - a) \sin \beta &= a \sin \alpha \end{aligned}, \quad (4)$$

(здесь обозначено $h \sin \varphi = x$ - измеряемое отклонение, имеющее первый порядок малости). Далее возводим эти выражения (4) в квадрат и складываем

$$(l - a)^2 = (l - x)^2 - 2a(l - x)\cos \alpha + a^2.$$

Раскрывая скобки и пренебрегая малым слагаемым x^2 , выразим значение косинуса угла с точностью до первого порядка

$$\cos \alpha = \frac{1 - \frac{x}{a}}{1 - \frac{x}{l}} \approx 1 - \frac{x}{a} + \frac{x}{l} = 1 - \frac{l - a}{la} x. \quad (5)$$

Синус этого угла равен

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{l - a}{la} x\right)^2} \approx \sqrt{2 \frac{l - a}{la} x}. \quad (6)$$

Теперь потенциальная энергия системы может быть выражена через величину отклонения нити

$$U = -m_0gh \cos \varphi - mga \sin \alpha \approx m_0g \frac{x^2}{2h} - mg \sqrt{2 \frac{l - a}{la} x}.$$

Вычисляя производную

$$U' = m_0 g \frac{x}{h} - mg \sqrt{2 \frac{l-a}{la}} \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

и приравнивая ее к нулю, получим формулу, определяющую положение равновесия системы

$$x^{\frac{3}{2}} = \frac{m}{m_0} h \sqrt{\frac{(l-a)a}{2l}}. \quad (7)$$

Получен «третий закон Кеплера» - куб смещения пропорционален квадрату отношения масс. Фактически эта формула является теоретической основой данного экспериментального задания. Отметим, что при постоянных массах грузов максимальное смещение нити достигается при $a = \frac{l}{2}$, то есть измеряемый груз следует располагать по середине горизонтальной нити.



3.7 Немного о поправках.

В этой главе мы движемся по пути ухудшения условий проведения эксперимента: линейные зависимости – нелинейные зависимости – неизвестные зависимости; прибор по своему назначению – нетрадиционное использование приборов – установка, требующая предварительной градуировки. Но и это еще не все – при проведении экспериментальных исследований достаточно часто ситуации, в которых экспериментальные данные противоречат не только проведенному теоретическому анализу, но и законам физики. Вполне возможно, что причиной такого казуса является некий побочный фактор (хорошо, если один), не учтенный при разработке методики эксперимента. Иногда ситуацию спасает введение **поправок** в результаты уже проведенных измерений. Подчеркнем, что введение каждой поправки должно быть оправдано, описано и обосновано. Один пример на эту тему представлен в данном параграфе.

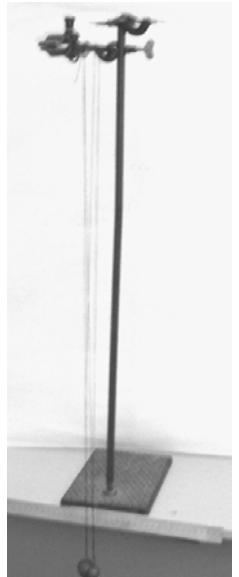
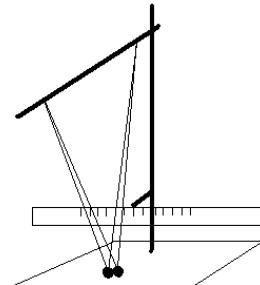
Задача 13. «Неупругий удар».



При столкновениях пластичных тел (например, шариков из пластилина) происходит неупругий удар – удар, при котором часть кинетической энергии шариков переходит во внутреннюю энергию. В данной задаче предлагается исследовать столкновения именно в случае неупругого удара.

Приборы и оборудование:

1. Штатив.
2. Линейка 40 см.
3. Пластилин (на одного участника один целый брускок)
4. Нитки.
5. Две скрепки.



Соберите установку, показанную на фотографии и на схеме. Линейку удобно закрепить на краю стола. Чтобы уменьшить закручивание нитей каждый шарик удобно подвешивать на двух расходящихся нитях (бифилярный подвес). Длина повеса должна быть не менее 60 см. К нижней части подвеса привяжите скрепку, к которой удобно прикреплять пластилиновые шарики. Для измерения отношения масс шариков можете использовать линейку как рычажные весы.

Рекомендация: удобно изготавливать шарики, массы которых относятся как целые числа: 1:2, 2:1, 3:4 и т.д.

Вам предстоит исследовать столкновения шариков, один из которых изначально неподвижен – желательно, чтобы после столкновения шарики двигались вместе.

Обозначим массу движущегося (ударяющего) шарика m_0 , а массу неподвижного - m_1 , а их отношение $\frac{m_0}{m_1} = \eta$. Начальное отклонение нити от вертикали, измеренное по линейке обозначим x_0 , а максимальное отклонение после удара - x_1 .

Часть 1 – Теоретическая.

1.1 Рассмотрите неупругий удар при котором один шарик массой m_1 покоится, а второй массой m_0 налетает на него со скоростью v_0 . Покажите, что скорость слизшихся шариков после удара определяется формулой

$$v_1 = \frac{m_0}{m_0 + m_1} v_0. \quad (1)$$

1.2 Покажите, что отношение количества теплоты, выделившейся при неупругом ударе, к начальной кинетической энергии шарика определяется формулой

$$\frac{Q}{E_0} = \frac{m_1}{m_1 + m_0}. \quad (2)$$

1.3 Покажите, что при малых углах отклонения (а в данной задаче их можно считать малыми, если длина подвеса значительно превышает величины отклонений) потенциальная энергия шарика пропорциональна квадрату отклонения нити x и массе шарика m

$$U = Ax^2, \quad (3)$$

где A - постоянный коэффициент, зависящий только от геометрических параметров установки;

а скорость шарика в нижней точке пропорциональна максимальному отклонению

$$v_0 = Bx_0, \quad (4)$$

где B - постоянный коэффициент, зависящий только от геометрических параметров установки.

Часть 2. Отношение скоростей.

2.1 Измерьте зависимости отклонения слизшихся шариков после удара x_1 от начального отклонения ударяющего шарика x_0 при отношении их масс равных $\frac{m_0}{m_1} = 1$ и $\frac{m_0}{m_1} = 2$.

Постройте графики полученных зависимостей.

2.2 На основании полученных экспериментальных данных проверьте, можно ли считать, что отношение скорости шариков после удара к скорости ударяющего шарика является постоянной величиной. Проверьте выполнимость формулы (1) в вашем случае.

Часть 3. Потери энергии.

3.1 Измерьте зависимость отношения скорости шариков после удара к скорости шарика до удара от отношения их масс при неизменном начальном отклонении x_0 . Постройте график этой зависимости.

3.2 Постройте график зависимости относительных потерь механической энергии при неупругом ударе $\delta = \frac{Q}{E_0}$ от отношения масс шариков. $\frac{m_0}{m_1} = \eta$.

3.3 Сравните полученные графики с теоретическими зависимостями. Объясните полученные результаты.

При необходимости внесите корректировки и поправки в ваши расчеты.

Комментарии к условию задачи.

- Подготовка оборудования не представляет никаких сложностей. Единственное пожелание – длины нитей должны быть порядка 1 метра. При этом их крепление должно быть проведено предельно аккуратно: в нижнем положении шарики должны быть на одной высоте, движение шариков должно происходить в одной вертикальной плоскости.
- Для изготовления пластилиновых шариков известного отношения масс можно кусок пластилина разделить на несколько равных частей (например на 5) с помощью линейки, из которых потом лепить нужные шарики. Можно добавить в перечень оборудования весы с разновесами.
- К сожалению, точность измерений в данной задаче не слишком высока, поэтому можно рекомендовать все измерения проводить 3-5 раз (авторы ограничились двумя), а в дальнейших расчетах использовать средние значения отклонений.

Решение и обсуждение.

Законы удара (в том числе неупругого) настолько подробно изучаются в курсе физике средней школы, что условие задачи и порядок ее выполнения очевидны и не требуют предварительного обсуждения.

Часть 1 – Теоретическая.

1.1 – 1.2 приведенные формулы следуют из законов сохранения импульса и энергии при ударе, более подробный вывод можете провести самостоятельно.

1.3 Из закона сохранения механической энергии следует, что при движении шарика от верхней точки до момента столкновения изменение его потенциальной энергии $\Delta U = mgl(1 - \cos \alpha)$ равно приобретенной кинетической энергии $E = \frac{mv^2}{2}$. Косинус угла начального отклонения при малости последних выражается через измеряемое отклонение x следующим образом:

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{l^2 - x^2}}{l} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{l}\right)^2} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2.$$

Следовательно, изменение его потенциальной энергии равно

$$\Delta U = \frac{mgx^2}{2l},$$

что подтверждает формулу (3). Приравнивая это выражение к кинетической энергии в нижней точке, получим, что его скорость

$$v = x\sqrt{\frac{g}{2l}},$$

что совпадает с формулой (4).

Часть 2. Отношение скоростей.

Из формулы (1) следует, что отношение скорости шариков после удара, к скорости ударяющего шарика есть величина постоянная, зависящая от отношения масс. Так как скорость шарика в нижней точке пропорциональна величине отклонения, то постоянство отношения скоростей должно приводить к постоянству отношения отклонений до и после удара. Поэтому и необходимо измерить зависимость, указанную в п.2.1. Результаты измерений приведены в таблице 1 и на графиках рис. 1. (для каждого угла отклонения проведено два измерения)

Таблица 1.

$x_0, \text{мм}$	$\eta = 1$		$\eta = 2$	
	$x_1, \text{мм}$	$x_1, \text{мм}$	$x_1, \text{мм}$	$x_1, \text{мм}$
200	105	105	150	150
180	100	95	140	140
160	85	80	125	120
140	80	80	110	110
120	70	70	100	100
100	60	55	85	85
80	50	50	70	70
60	40	40	55	55
40	30	30	40	40

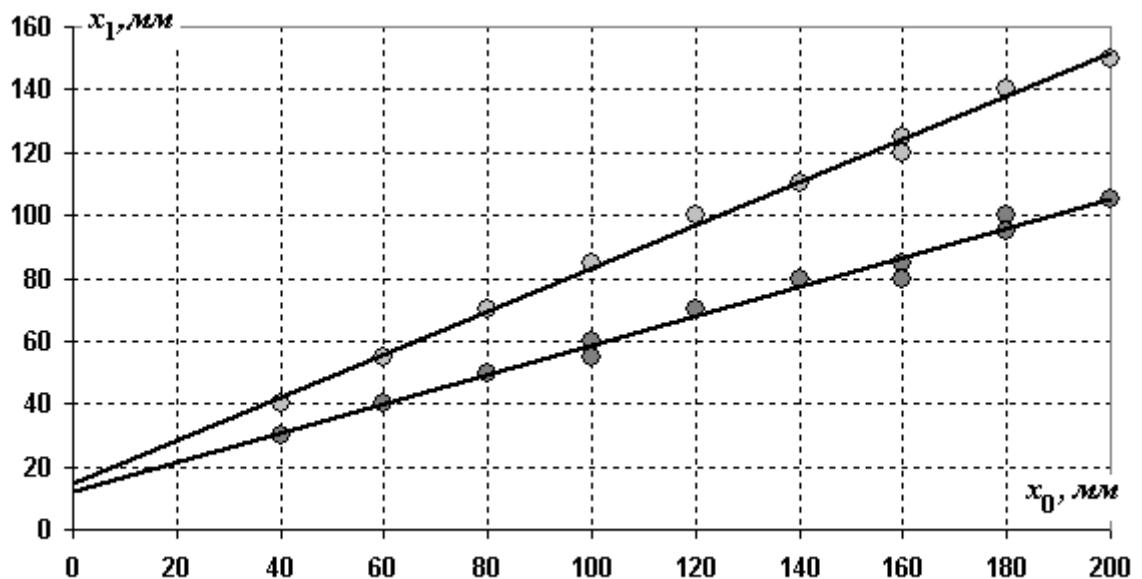


График 1. Зависимость отклонения после удара от начального отклонения

2.2 Полученные результаты неожиданы: связь между отклонениями линейная, но не прямо пропорциональная (прямые, не проходят через начало координат). Этот результат требует осмысления и объяснения³³. Скорее всего, выявленное постоянное смещение связано с неправильным измерением величины отклонения после удара. Подтверждением этой гипотезы служит то обстоятельство, что обе прямые пересекают ось ординат практически в одной точке. Причиной этой систематической ошибки может служить, например, то, что шарики имеют конечные размеры, приводя конечности размеров шарика, приводящее к тому, что в положении равновесия нити не вертикальны. Эта

³³ Отклонения после столкновения (а следовательно, и скорости) превышают теоретические значения, поэтому обвинять виноватым сопротивление воздуха нельзя.

выявленная систематическая ошибка может быть исправлена введением **поправки**. По графикам можно определить, что прямые пересекают ось ординат в точке, координата которой примерно равна $\delta x_1 \approx 13\text{мм}$. Поэтому в качестве величины отклонения после удара следует взять «исправленную» величину $\tilde{x}_1 = x_1 - \delta x_1$. С учетом поправки, величины отклонений (и скоростей) оказываются прямо пропорциональны друг другу, как того требует формула (1). По графикам также можно определить коэффициенты наклона (они не зависят от постоянной поправки)

$$\left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_0} \right)_{\eta=1} \approx 0,47 \quad \text{и} \quad \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta x_0} \right)_{\eta=1} \approx 0,69,$$

которые близки к теоретическим значениям 0,50 и 0,67, соответственно. Следовательно, можно считать, что формула (1) подтверждается экспериментально.

*Полученные зависимости при наличии времени могут быть обработаны по МНК.
В результате расчетов коэффициентов линейной зависимости $x_1 = ax_0 + b$ оказались равными:*

для $\eta = 1$: $a = 0,47 \pm 0,03$, $b = 12 \pm 3$

для $\eta = 2$ $a = 0,69 \pm 0,02$, $b = 14 \pm 3$.

Эти результаты более надежно подтверждают сделанный вывод о справедливости формулы (1).

Часть 3. Потери энергии.

Найденная поправка к измерению смещения после столкновения должна проявиться и в изучении потерь энергии при неупругом ударе.

Для проведения измерений необходимо подвешивать шарики различных масс. При этом для каждой пары разных шариков можно (и нужно) получить два результата: первый раз отклонять один шарик, а второй – другой.

Результаты измерений приведены в таблице 2. (Все измерения проведены при начальном отклонении $x_0 = 120\text{мм}$).

Таблица 2.

Отношение масс η	Конечное отклонение x_1 , мм	Отношение скоростей	Потери энергии, δ
1	70	0,58	0,32
2	100	0,83	-0,04
0,5	40	0,33	0,67
1,33	80	0,67	0,22
0,75	65	0,54	0,32
4	110	0,92	-0,05
0,25	20	0,17	0,86
1	70	0,58	0,32
2	100	0,83	-0,04
0,5	35	0,29	0,74
1,33	85	0,71	0,12
0,75	65	0,54	0,32
4	105	0,88	0,04
0,25	20	0,17	0,86

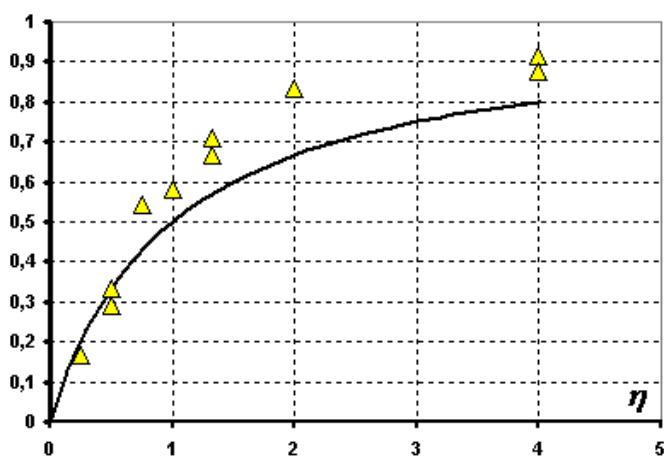


Рис. 2 Зависимость отношения скоростей от отношения масс (без поправки на начальное смещение)

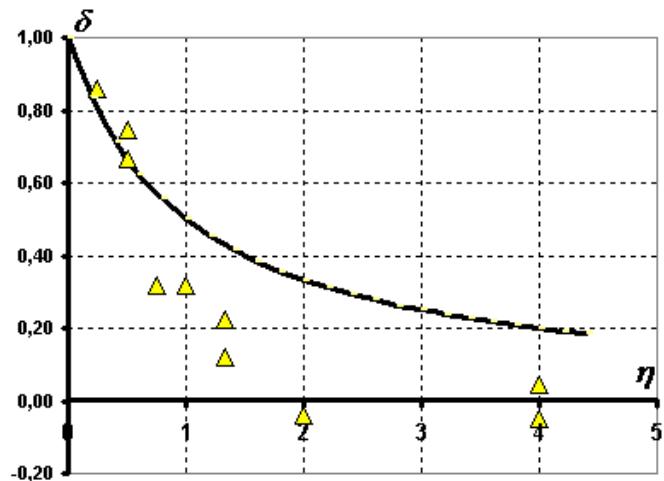


Рис.3 Зависимость доли потерь от отношения масс (без учета поправки на начальное смещение)

Для построения требуемых зависимостей следует по экспериментальным данным рассчитать необходимые величины: отношение скоростей и относительные потери механической энергии. Так отношение скоростей, как и ранее, равно отношению отклонений

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{x_1}{x_0}. \quad (1)$$

Долю энергии перешедшей в тепло по экспериментальным данным следует рассчитывать следующим образом:

$$\delta = \frac{Q}{E_0} = \frac{m_0 v_0^2 - (m_0 + m_1) v_1^2}{m_0 v_0^2} = 1 - \frac{\eta + 1}{\eta} \left(\frac{x_1}{x_0} \right)^2. \quad (2)$$

Графики этих зависимостей построены на рис. 2 и 3.

Выведенные в первой части задачи формулы позволяют найти теоретический вид этих зависимостей.

Так теоретическое значение отношения скоростей следует из формулы (1) условия:

$$\left(\frac{v_1}{v_0} \right)_T = \frac{m_0}{m_0 + m_1} = \frac{\eta}{\eta + 1}. \quad (3)$$

Теоретическое значение относительных потерь энергии находится из формулы (2) условия задачи³⁴:

$$\begin{aligned} \delta_T &= \frac{m_0 v_0^2 - (m_0 + m_1) v_1^2}{m_0 v_0^2} = 1 - \frac{(m_0 + m_1)}{m_0} \left(\frac{v_1}{v_0} \right)^2 = 1 - \frac{(m_0 + m_1)}{m_0} \left(\frac{m_0}{m_0 + m_1} \right)^2 \\ &= 1 - \frac{m_0}{m_0 + m_1} = \frac{m_1}{m_0 + m_1} = \frac{1}{\eta + 1} \end{aligned} \quad (4)$$

На рис. 2, 3 построены теоретические кривые, рассчитанные по формулам (3) и (4). Видно, что экспериментальные и теоретические зависимости различаются существенно и систематически. Более того, в некоторых случаях получен абсурдный результат – потери энергии отрицательны?

³⁴ Здесь фактически приведен вывод этой формулы.

Причина подобных расхождений заключается в том, что не учтена **поправка** на отклонение нитей в положении равновесия. Эту поправку можно учесть, уменьшив величину конечного отклонения x_1 , мм на поправку $\delta x_1 \approx 13\text{мм}$, найденную во второй части данной работы. То есть при обработке экспериментальных данных следует везде заменить x_1 на исправленное значение $\tilde{x}_1 = x_1 - \delta x_1$. Учет этой поправки приводит к хорошему соответствуию, которое продемонстрировано на рис. 3,4.

Рис. 4 Зависимость отношения скоростей от отношения масс (с поправкой на начальное смещение)

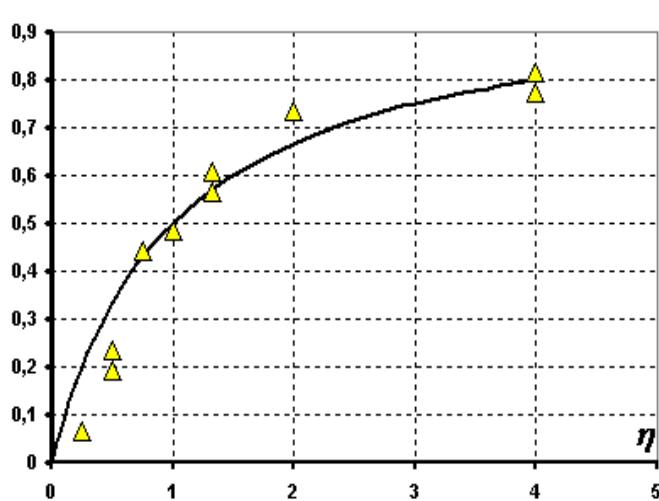
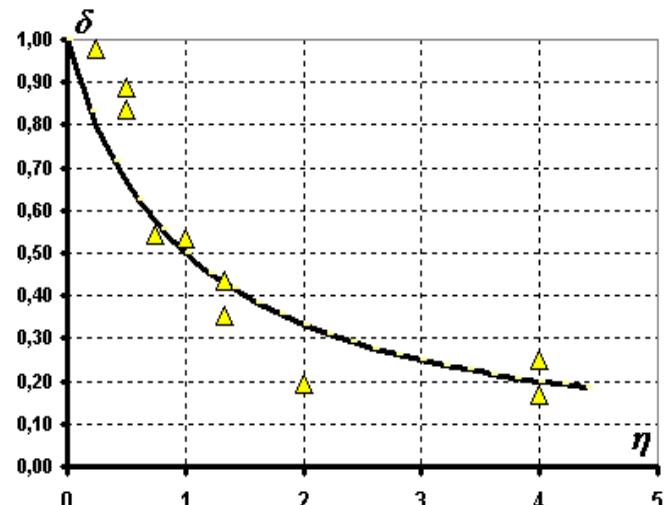


Рис.5 Зависимость доли потерь от отношения масс (с поправкой на начальное смещение)



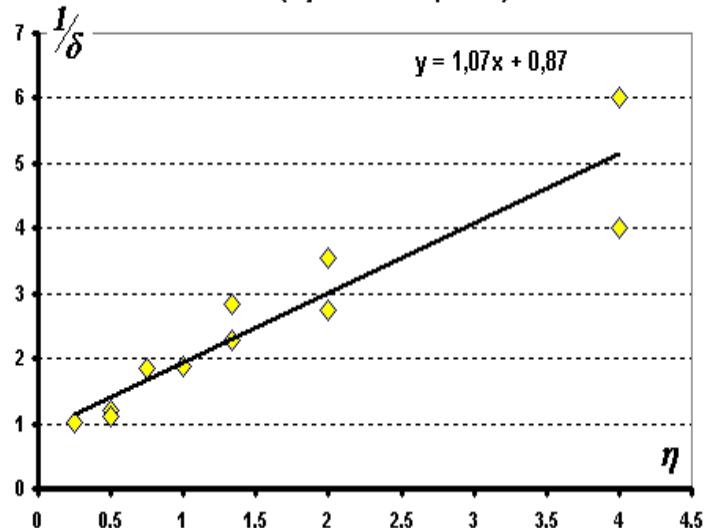
Дополнения.

1. Еще более впечатляющим и разумным способом проверки является линеаризация зависимости (4) посредством очевидного преобразования

$$\frac{1}{\delta} = \eta + 1.$$

На рис. 6 приведена данная зависимость (с учетом поправки) и приведено ее уравнение — очень хорошее соответствие экспериментальных данных и теоретической зависимости. Конечно, можно и эту зависимость обработать по МНК.

Линеаризованная энергетическая зависимость (с учетом поправки)



Вот уж действительно одна поправка (которая могла быть учтена при измерениях) спасла фундаментальные физические законы сохранения импульса и энергии.

3.8 Не все так просто!

Мы рассматриваем экспериментальные задачи олимпиад, а не просто отчеты о проведенной исследовательской работе. В некотором смысле, олимпиада это не только соревнование участников олимпиады между собой с целью выявления лучшего, но и соревнование разработчиков заданий с талантливыми школьниками. Авторы стремятся сделать задачу: физически корректной, выполняемой в отведенное время, красивой и оригинальной. Если задание выполнено практически полностью всеми участниками – то это плохое задание (как же тогда определить лучших?); если задание не выполнил никто – то это очень плохое задание (и в этом случае победителя определить невозможно). Часто красота задачи определяется неожиданностью, парадоксальностью результата, дающей возможность ученику проявить себя, свой характер – надо проявить силу духа³⁵, что бы не усомниться в своих результатах, а дать объяснение (хотя бы словесное), или просто честно представить их в своей работе! Это рискованно, а вдруг, в расчеты или измерения закралась элементарная ошибка. Приходится решать, решаться или «опустить крылья».

В этом параграфе мы рассмотрим несколько примеров задач такого типа. В описании поиска подходов к их решению мы опять воспользуемся услугами молодого, но очень талантливого физика, от лица которого поведем изложение. Как известно, любимым словом участников олимпиад является «очевидно», даже в тех случаях, когда ничего очевидного нет. Поэтому это слово, мы будем выделять в рассуждениях нашего героя.



³⁵ Интересно, в каких единицах она измеряется?



Задача 14. «Майдодыр»

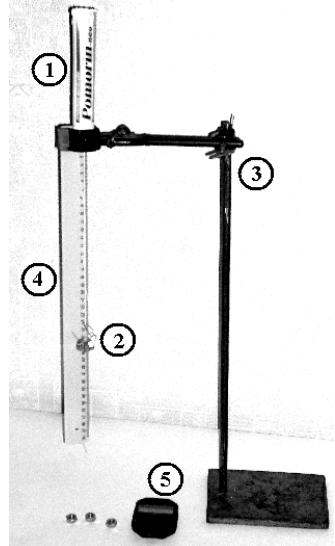
Механические свойства паст отличаются громадным разнообразием – познакомьтесь и изучите одно из этих свойств – способность оказывать сопротивление движению.

Приборы и оборудование: тюбик зубной пасты, с продетой ниткой и гайкой внутри (1); набор грузов (2), штатив (3), линейка (4), секундомер (5), весы с разновесами.

Через тюбик с пастой протянута нить, на которой закреплена металлическая гайка (она находится внутри тюбика). К нижнему концу нити можно подвешивать различные грузы, за верхний конец нити гайку можно вытягивать вверх. Если к нижнему концу нити подвесить груз достаточной массы, то он начнет медленно опускаться, протягивая гайку через пасту.

1. Измерьте законы движения подвешенных грузов для различных значений их масс.

Определите, можно ли считать это движение равномерным.



2. Используя полученные данные, рассчитайте средние скорости движения грузов в каждом случае.

3. Постройте график зависимости средней скорости движения гайки внутри пасты от массы повешенных грузов. Объясните полученную зависимость.

Комментарии к условию задачи.

1. Сорт зубной пасты принципиальной роли не играет.
2. Для проведения эксперимента следует срезать заднюю часть тюбика, проделать в пробке малое отверстие, через которое пропустить нить. Для того, что бы пропустить нить через весь тюбик с пастой можно воспользоваться куском тонкой проволоки.
3. Со временем паста начинает затвердевать на воздухе, поэтому эксперимент следует проводить быстро, сразу проводя все измерения. Можно добавить в верхнюю часть тюбика немного воды.
4. Набор грузов должен давать возможность подбирать наборы от 20 до 50 г.
5. При выполнении работы исполнитель постоянно перемазывается пастой, поэтому надо дать ему несколько салфеток.

Обсуждение и решение.

На первый взгляд задача выглядит не сложной, а простой и очевидной. Сила вязкого трения зависит от скорости, поэтому движение гайки будет равномерным (если пропустить небольшой начальный участок разгона). Будем надеяться, что движение не слишком быстрое – поэтому будет возможным измерить закон движения. Понятно, что для увеличения точности следует измерять времена, за которые грузик проходит фиксированные расстояния – так измерять удобнее. Какая там длина тюбика? 9 сантиметров, значит можно снять 9 точек (через каждый сантиметр, меньше нельзя – лучше потом выбросить), достаточно, чтобы построить графики и убедится, что они являются прямыми. Это является доказательством того, что движение является

равномерным (а каким еще?) Затем, по наклону прямых (или по МНК) можно будет найти скорости при каждой массе груза. Наконец, построить график зависимости скорости движения от массы грузов. Что может получиться? Очевидно, что сила сопротивления при движении гайки в пасте пропорциональна ее скорости (гайка ползет очень медленно), поэтому скорость должна быть пропорциональная массе груза. Ну может быть, что маловероятно, что сила пропорциональна квадрату скорости – тогда скорость должна быть пропорциональна корню квадратному из массы груза. Посмотрим.

Так, перемазался в пасту, но результаты получены и нарисованы в Таблице 1.

Таблица 1.

Путь $x, \text{см}$	Время движения для разных масс $t, \text{с}$			
	$m_1 = 23,3\text{г}$	$m_2 = 32,3\text{г}$	$m_3 = 36,8\text{г}$	$m_4 = 41,3\text{г}$
1	18,6	6,0	4,9	3,4
2	35,4	15,5	11,7	8,6
3	54,3	24,3	19,6	11,9
4	73,4	34,6	26,8	15,3
5	93,6	46,2	34,3	19,8
6	114,3	59,4	41,0	23,4
7	132,6	68,2	47,7	27,5
8	156,7	78,4	54,9	32,2
9		88,3	62,3	
Скорость $v, \frac{\text{см}}{\text{с}}$	$0,051 \pm 0,002$	$0,095 \pm 0,004$	$0,140 \pm 0,002$	$0,251 \pm 0,012$

По этим данным строим графики зависимости времени движения от пройденного пути. Прекрасно, все точки почти идеально ложатся на прямые: движение, действительно, является равномерным. Не случайно, я построил зависимость времени от пути – случайная погрешность измерения времени больше, чем погрешность задания координаты. Что-то уже конец работы виден – осталось один график построить. Поэтому скорость можно подсчитать по МНК, да еще с погрешностями. Итак, представляем зависимость в виде

$$t = ax + b,$$

параметр b должен быть приблизительно равен нулю. Коэффициент a – величина обратная скорости – время, за которое тело проходит единицу пути. Поэтому скорость и ее погрешность рассчитаем по формулам

$$v = \frac{1}{a}; \quad \Delta v = v \frac{\Delta a}{a}.$$

Промежуточные арифметические выкладки можно опустить, а значения скорости добавляю в таблицу. Прекрасные результаты: погрешность – несколько процентов. Теперь график. Да, назвать эту зависимость линейной затруднительно. Но это и не корневая зависимость! А если плавно продлить кривую, то и нуль не попадешь. Действительно, не при всякой массе груза гайка начинает двигаться.



Так, мои предсказания не оправдались. Правы авторы, свойства пасты не обычны – это не вязкая жидкость. Искать вид зависимости по четырем точкам – работа бессмысленная, особенно, если вид зависимости не известен.

Какой же вывод? С ростом массы груза скорость гайки в пасте увеличивается. Эта скорость растет быстрее, чем при прямо пропорциональной зависимости. Возможно, что паста разжижается при увеличении давления на нее³⁶.

³⁶ Прекрасный вывод – оценивается высшим баллом. Действительно, паста – это неньютоновская жидкость, сила сопротивления которой зависит не только от скорости, но и от давления. Определить, вид зависимости также не представляется возможным. Авторы задач и ожидали, что будут честно проведены измерения, без подгонки под «очевидный» результат.



Задача 15. «Сопротивление электролита».

Известно, что растворы электролитов проводят электрический ток. Вам предлагается исследовать электрические свойства раствора поваренной соли в воде. Для этого используйте банку с раствором поваренной соли, в которую опустите два электрода. Расстояния между электродами изменяйте, переставляя их в другие отверстия. Страйтесь, чтобы во время измерений электроды располагались параллельно друг другу.

Задание 1.1. Измерьте зависимость напряжения между электродами от силы тока в растворе. Постройте график полученной зависимости. Попытайтесь объяснить полученные результаты.

Задание 1.2. Исследуйте зависимость сопротивления раствора от расстояния между электродами. Поясните, что вы понимаете под сопротивлением раствора. Постройте график полученной зависимости. Качественно объясните полученную зависимость.

Оборудование: Источник постоянного тока ЛИП-90; реостат лабораторный; вольтметр лабораторный; амперметр лабораторный; банка стеклянная с крышкой капроновой с отверстиями; два алюминиевых электрода; соединительные провода, ключ электрический.

Примечания к условию задачи.

1. В качестве электродов рекомендуется использовать куски алюминиевой проволоки без изоляции диаметром около 1 мм, длина электродов должна немного превышать высоту банки (достаточно взять полулитровую банку). К электродам следует заранее подсоединить провода.
2. В капроновой крышке необходимо просверлить в один ряд, на расстоянии 1 см друг от друга, для того, чтобы в них вставлять электроды.
3. При проведении измерений раствор необходимо время от времени заменять на свежий, так как при протекании электрического тока его электрические свойства изменяются. С этой же целью рекомендуется включать ток только на время проведения измерений, для чего цепь должна содержать ключ.

Размышления и решение.

Простенькая задачка – проверить закон Ома, какая разница через что течет ток. Внимательно, не перепутать: зависимость напряжения от силы тока³⁷ (U - вверх, I - в сторону), иначе пару баллов снимут. Должна получиться прямая, что же еще? Потом U разделить на I , получится сопротивление. Лучше конечно, подсчитать по МНК, если успею, а нет, то и по графику можно будет снять. А как изменять напряжение (или силу тока) – хорошо, дали реостат. Потом переставить электроды (и поменять раствор) и все повторить. Сколько там дырок насверлили? Шесть – значит, получим пять прямых. Для каждой надо посчитать сопротивление и построить график зависимости сопротивления от расстояния. Тоже не сложно – очевидно, что сопротивление пропорционально расстоянию («ро – эль – на эс» - песня!).

³⁷ Небось радиофизик писал, всякий нормальный физик знает, что ток зависит от напряжения, а не наоборот!

Приступим. Не забыть нарисовать схему. Собираем, подключаем, ток есть, напряжение есть, двигаем реостат – изменяется, больше ток – больше напряжение, как я и говорил. Теперь проводим измерения (подгоняем стрелку вольтметра под деление шкалы, снимаем силу тока – конечно, можно только с точностью пол деления, но я «на глазок», поточнее) результаты записываю в аккуратную табличку 1, движок реостата от одного края, до другого!

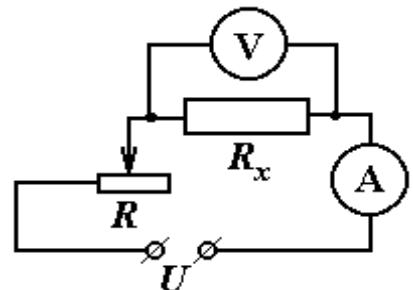
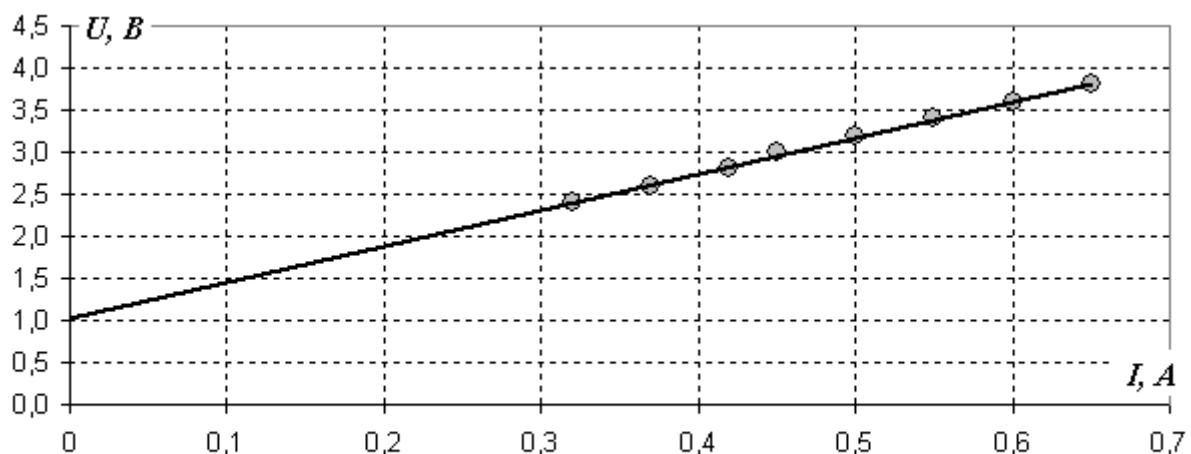


Таблица 1. Зависимость напряжения между электродами от силы тока.

$U, (V)$	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8
$I, (A)$	0,32	0,37	0,42	0,45	0,50	0,55	0,60	0,65

Строим график, оси координат, разметка (начну с нуля – надо же показать прямую пропорциональность), подписать оси, название графика, нанести точки, провести прямую. Стоп, почему не проходит через нуль? Проверяю: оси с нуля, значения тока и напряжения из таблицы – все верно. Плохо измерил? Проверю – еще раз включаю, смотрю – вроде все верно, конечно, сотые можно и немного другие записать, но это не принципиально! Так две точки поточнее. Изменяю ток в два раза: 0,3 ампера, напряжение – 2,4 вольта; ток 0,6 ампера, напряжение всего 3,6 вольта (а должно быть почти пять - 4,8). Поменять раствор? А что изменится? Но все-таки поменяю, все равно, для следующих измерений менять надо! Все напрасно, данные те же. Что делать? Может провести прямую через начало? Нет, как-то уж очень некрасиво получается! Этот график надо оставлять.



**Зависимость напряжения между электродами от силы тока.
(расстояние между электродами 2 см)**

Появилось две проблемы: первая – объяснить, почему не проходит через нуль; вторая – как тут считать сопротивление. Подумаем, что, значит, не проходит через нуль? Тока нет, а напряжение есть? Батарейка какая-то! А может действительно батарейка? Электроды, электролит – гальванический элемент! Попробую напрямую измерить напряжение, не пропуская тока. Отключаю – напряжение нуль! Откуда ему взяться – электроды одинаковые, где плюс, где минус? А когда проходит ток появляется и плюс и минус – но тогда и электрода становятся разными. Может быть. Так и напишем: «при

пропускании тока банка становится похожей на гальванический элемент, поэтому появляется дополнительная ЭДС» - другого объяснения не вижу³⁸.

Теперь о сопротивлении – не случайно этот вопрос поставлен в условии! Если просто делить напряжение на силу тока, то результат будет различным для разных экспериментальных значений тока и напряжения. Так делать нельзя. А как? Если есть дополнительное напряжение, то его надо вычесть! Отнять один вольт, можно! А лучше взять отношение изменения напряжения к изменению силы тока

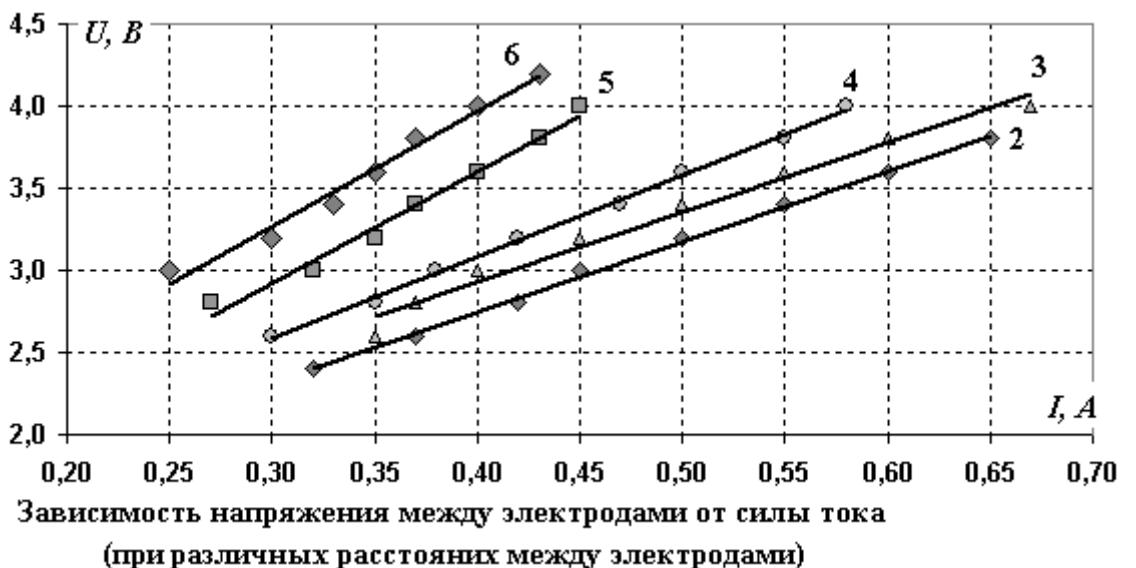
$$R = \frac{\Delta U}{\Delta I},$$

оно то будет постоянным. Но это же коэффициент наклона. Значит, лучше воспользоваться МНК, тогда еще и дополнительное напряжение (или ЭДС) получу. Ладно, проведу измерения для остальных значений расстояния между электродами, а потом все обработаю. Табличку, измерения, результаты!

Таблица 2. Зависимость напряжения между электродами от силы тока, при различных расстояниях r между электродами.

$U, (В)$ $r, (см)$	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,2
3	0,35	0,37	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	0,67	-
4	0,30	0,35	0,38	0,42	0,47	0,50	0,55	0,58	-
5	-	0,27	0,32	0,35	0,37	0,40	0,43	0,45	-
6	-	-	0,25	0,30	0,33	0,35	0,37	0,40	0,43

Диапазон изменения сопротивления реостата – полный, а изменение напряжения зависит от расстояния. Понятно, сопротивление изменяется. Теперь графики. Здесь можно оси начинать не с нуля, через него прямые не проходят. Разметка, подписи, точки, прямые. Ну не совсем точно ложатся на прямые – а что они хотят с такими приборами? Готово, подписать прямые: укажу значения расстояния.



³⁸ И он оказался прав: при пропускании электрического тока через раствор электролита вблизи электродов собираются ионы разных знаков, этот эффект называется поляризацией электродов – благодаря этому и возникает дополнительная ЭДС. Ученник не обязан знать об этом явлении, но выдвинуть идею об этом обязан. Объяснение, приведенное нашим «молодым, но талантливым», достаточно для того, чтобы получить за него высший балл.

Что же получилось? Наклон изменяется, но прямые 2 и 3 почти параллельны. По графику сопротивления не очень то и снимешь: где-то в районе 4-6 Ом. Надо считать по МНК. Итак, напряжение между электродами зависит от силы тока по закону:

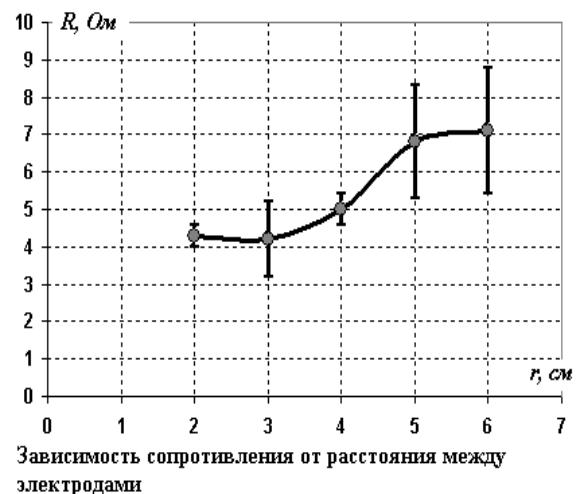
$$U = RI + U_0.$$

Параметры линейной зависимости между U и I равны коэффициент наклона - R сопротивление, свободный член U_0 - дополнительное напряжение (или ЭДС). Считаю – нужна еще одна Таблица 3. (Расчеты в черновике). И график – с погрешностями.

Таблица 3. Параметры линейных зависимостей между напряжением и силой тока при разных значениях расстояния между электродами.

$r, \text{см}$	$R, \text{Ом}$	$\Delta R, \text{Ом}$	$U_0, \text{В}$	$\Delta U_0, \text{В}$
2,0	4,3	0,3	1,0	0,2
3,0	4,2	1,0	1,2	0,5
4,0	5	0,4	1,1	0,2
5,0	6,8	1,5	0,9	0,6
6,0	7,1	1,7	1,2	0,6

Что радует - U_0 для всех прямых примерно одинаково (как это пишут – в пределах погрешности) – точно батарейка!



Сопротивление между электродами возрастает с ростом расстояния между ними, но не пропорционально этому расстоянию, а почему это должно быть пропорционально – между электродами не кусок провода! Отсутствие пропорциональности связано с тем, что происходит сложное растекание тока между электродами. Объяснить полученную зависимость сложно: теоретически необходимо искать распределение токов; экспериментально – не хватает данных, и те не точны³⁹.

³⁹ И здесь он прав – в авторском решении сказано: большие погрешности результатов измерения сопротивления не позволяют установить вид зависимости.



Задача 16. «Закон Фурье».

Приборы и оборудование :

Сосуд для воды, 2 термометра, штатив с двумя лапками, стаканчики пластмассовые 2 штуки, секундомер, мензурка, горячая и холодная вода.

Процесс передачи теплоты через перегородку подчиняется закону Фурье: плотность потока теплоты q (количество теплоты, протекающее через площадку единичной площади в единицу времени) пропорциональна разности температур и обратно пропорционален толщине перегородки h

$$q = k \frac{\Delta T}{h}, \quad (1)$$

где k - коэффициент теплопроводности материала перегородки.

Вам предстоит изучить процесс передачи теплоты от горячей воды (находящейся в сосуде) через пластмассовый стаканчик к холодной воде, находящейся в этом же стаканчике. Из закона Фурье следует, что поток теплоты $\frac{\Delta Q}{\Delta \tau}$ (количество теплоты перетекающей от одного тела к другому за единицу времени⁴⁰) пропорционален разности температур

$$\frac{\Delta Q}{\Delta \tau} = K \Delta T. \quad (2)$$

в этой формуле коэффициент K - называется коэффициентом теплопередачи. Этот коэффициент зависит от материала перегородки, ее толщины, площади и т.д.

Ваша задача проверить выполнимость закона Фурье (точнее следствие из него – формулу (2)) и определить коэффициент теплопередачи для одноразового пластмассового стаканчика.

Поместите стаканчик в банке (большом сосуде). Укрепите один термометр в штативе и опустите его измерительную часть в стаканчик, так чтобы она не касалась ни его дна, ни его стенок. Второй термометр поместите в банку. Во всех экспериментах заливайте в стаканчик 150 г холодной воды, в банку заливайте горячую воду. Уровни воды в банке и стаканчике должны совпадать.

Все измерения проведите для одного стаканчика и для «двойного стаканчика», (двух стаканчиков, вставленных «один в один»).

Несколько советов:

Рекомендуем начинать измерения с «двойного» стаканчика – они выполняются проще.

Не стремитесь заливать слишком горячую воду – температура будет изменяться слишком быстро, поэтому точно измерять крайне сложно. А еще – сильно горячая воды «жжется»!

Точность секундомера выше точности термометров – подумайте, как рационально использовать этот научный факт.

⁴⁰ Будем обозначать время символом τ , чтобы не путать с температурами, за которыми оставим обозначение t .

В течение отводимых на выполнение этой задачи 2,5 часов измерения можно провести неоднократно.

$$\text{Удельная теплоемкость воды } C = 4,2 \frac{\text{кДж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}.$$

Наконец, задания:

1. Измерьте зависимости температуры воды в стаканчике (напоминаем, один раз одинарный, второй раз двойной) и банке от времени.
2. Постройте графики полученных зависимостей.
3. На основании полученных данных проверьте справедливость закона Фурье в данных случаях.
4. Определите коэффициенты теплопередачи для одинарного и «двойного» стаканчиков.
5. Сравните полученные значения коэффициентов теплопередачи. Дайте объяснение полученных результатов.

Комментарии к условию задачи.

1. Для проведения измерений удобно использовать одноразовые пластиковые стаканчики. Сосуд для горячей воды должен иметь широкое горлышко, чтобы в него помещался стакан и термометр. Нами использовался небольшой глиняный горшок. Стакан следует закрепить в лапке штатива. Во второй лапке штатива следует закрепить термометр.
2. Два термометра в данной работе необходимы, так как требуется одновременно измерять температуры остивающей горячей воды в сосуде и нагревающейся воды в стакане. Следует стремиться к тому, чтобы измерительные части термометров находились внутри воды не слишком близко к стенкам.

Обсуждение и решение.

Условие задачи понятно и не блещет оригинальностью: при погружении стаканчика с холодной водой в горячую воду, холодная вода начнет нагреваться. Какая-то часть теплоты от горячей воды будет уходить в окружающую среду. Скорее всего, что потерями теплоты от воды в стаканчике можно пренебречь, так как, во-первых, он полностью погружен в горячую воду (теплопередачи со стенок нет); во-вторых, температура воды в нем не будет слишком большой. Кроме того, температура воды в стаканчике будет изменяться в больших пределах (воды в нем меньше, чем в горшочке). Все это намекает на то, что надо наиболее тщательно измерять именно температуру воды в стаканчике. Следующее обычное правило: секундомер точнее термометра, поэтому будем измерять времена, когда столбик термометра будет достигать определенного значения (фиксируем температуру – измеряем время). Кстати, какая там цена деления? Два градуса, значит будем измерять через два градуса.

Итак, вырисовывается следующая процедура измерения зависимости температуры от времени:

- собираю установку;
- заливаю воду (не перепутать: горячую в горшок, холодную в стакан);
- дождаюсь момента времени, когда температура холодной воды достигла некоторой фиксируемой по риске термометра температуры $t_{хол.0}$; пускаю секундомер и одновременно замеряю температуру горячей воды $t_{гор.0}$ (она должна изменяться гораздо медленнее и в меньших пределах);

- жду, когда столбик термометра в стакане достигнет очередной риски $t_{xol.k}$, и измеряю времени τ_k , в этот же момент измеряю температуру горячей воды $t_{top.k}$ (смотрю на холодный термометр, потом быстро на секундомер, а затем на холодный термометр: два числа можно запомнить; пока вода нагреется до следующей риски, успею записать);

- продолжаю измерения до тех пор, пока разность температур не станет малой (два – три градуса).

Так, с измерениями разобрался. Теперь, что делать с результатами? Читаю еще раз задание: построить графики – не проблема. Проверить закон Фурье! Знать бы, что это такое! Ладно, формула (2) есть, опять пожалели бедного школьника, а могли бы и производную нарисовать. Внимательно разбираюсь с формулой: ΔQ - количество перетекающей теплоты, надо понимать: от горячей к холодной за время $\Delta\tau$, пропорционально разности температур ΔT . Каких? Горячей и холодной воды. Логично! И еще коэффициент (надо полагать постоянный), который надо будет определить. Значит, для проверки закона надо знать три «дельты». А что я получу в эксперименте (если получу): набор времен τ_k и температуры в эти моменты времени: горячей $t_{top.k}$ и холодной $t_{xol.k}$. Теперь «дельты» надо выразить через эти результаты:

- проще всего с интервалом времени $\Delta\tau_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ (эти интервалы будут разными);

- количество переданной теплоты пойдет на нагревание холодной воды (про потери пока забудем) на $\delta t = t_{xol.k} - t_{xol.k-1}$ градусов (эта величина фиксирована и равна $\delta t = 2^\circ C$), поэтому количество полученной теплоты можно посчитать, как учили: $\Delta Q_k = cm\delta t$. Удельная теплоемкость воды задана, масса воды задана – считается! Теперь можно будет посчитать и поток теплоты (надо точнее выразиться – средний поток):

$$\left(\frac{\Delta Q}{\Delta\tau} \right)_k = \frac{cm\delta t}{\tau_k - \tau_{k-1}}. \quad (1)$$

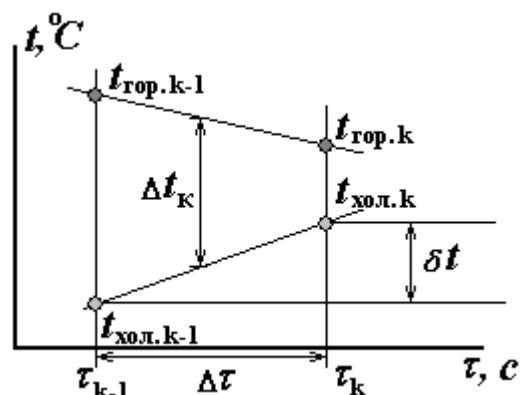
Такая важная формула, что надо ее занумеровать – да, считать придется долго! Нет, числитель то постоянный – раз подсчитал и записал (а еще лучше на cm в самом конце домножить, по ходу буду считать, что теплота это разность температур – такая у меня система единиц!). Поэтому два разделил на разность времен (можно в уме) и получил поток – просто! С левой частью разобрался. Теперь разность температур – но они же изменяются, какие брать в начале промежутка, или в его конце?

Конечно, лучше среднюю по этому интервалу (тоже можно в уме посчитать):

$$\Delta t_k = \frac{(t_{top.k} + t_{top.k-1}) - (t_{xol.k} + t_{xol.k-1})}{2}. \quad (2)$$

Ну вот и все: все переменные в уравнении определяются по результатам измерений. Красиво, надо даже нарисовать, что бы проверяющий понял.

Дальше построил график зависимости потока от разности температур, получил прямую, нашел ее наклон по МНК и получил коэффициент теплопередачи. Вывод даже сейчас могу написать: «так как график прямая линия, то закон Фурье выполняется». Все аналогично для одного стаканчика: измерения, таблица, график, расчеты, еще один график, коэффициент наклона, получите: «для одинарного стаканчика коэффициент теплопередачи в два раза меньше, чем для двойного!». Наоборот, в два раза больше – он же тоньше.



Все – можно измерять. Результаты измерений зависимости температур холодной и горячей воды от времени представлены в таблице 1. Для результатов расчетов – еще две колонки (поток теплоты по формуле (1) без теплоемкости), средняя разность температур по формуле (2)) – для их расчетов нужны две строчки, поэтому первая в таблице будет пустой.

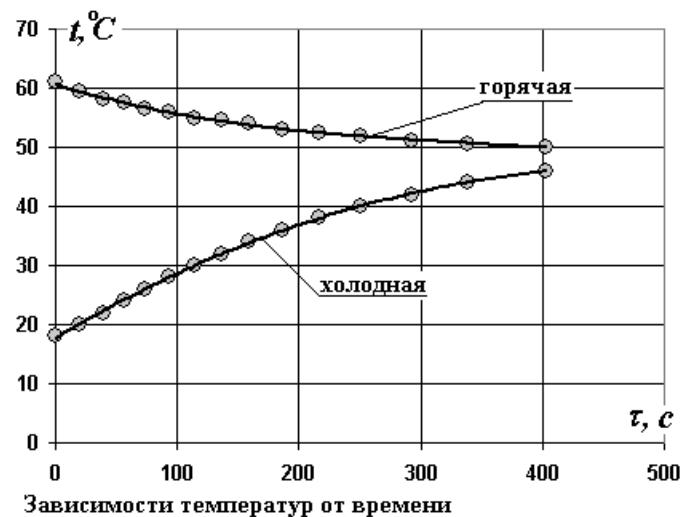
Таблица 1.

τ_k, c	$t_{хол.k}, ^\circ C$	$t_{гор.к}, ^\circ C$	$\frac{\delta t}{\Delta \tau}$	$\Delta t_{ср}, ^\circ C$
0	18,0	61,0		
20	20,0	59,5	0,100	41,3
39	22,0	58,0	0,105	37,8
56	24,0	57,5	0,118	34,8
74	26,0	56,5	0,111	32,0
93	28,0	56,0	0,105	29,3
114	30,0	55,0	0,095	26,5
136	32,0	54,5	0,091	23,8
159	34,0	54,0	0,087	21,3
186	36,0	53,0	0,074	18,5
216	38,0	52,5	0,067	15,8
250	40,0	52,0	0,059	13,3
292	42,0	51,0	0,048	10,5
338	44,0	50,5	0,043	7,8
403	46,0	50,0	0,031	5,3

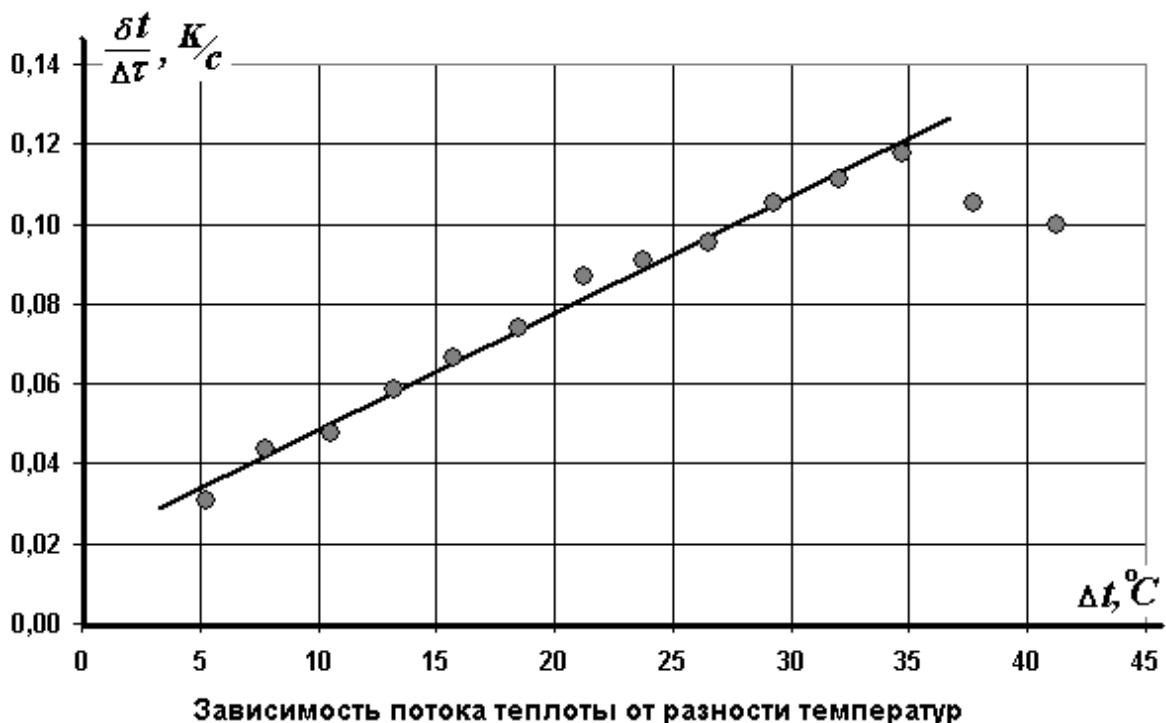
Теперь нарисую график (для дальнейшего не нужный – опять проверяют, как умеем графики строить). Но, красиво (особенно, если сглаживающую кривую нарисовать) – гладкие монотонные зависимости. Полностью ожидаемые: холодная вода нагревается быстрее, чем остывает горячая. Диапазоны изменения также разумны – холодная нагревается на 30 градусов, горячая остывает на 10, но ее примерно в три раза больше.

Так, что можно ожидать хорошего основного графика – зависимости потока теплоты от разности температур.

Рассчитываю, строю ... Да, не очень. Особенно хвост какой-то из последних двух точек. Правда, это первые точки (по измерениям) – плохо измерял? Возможно, там и температуры изменились быстрее, еле успевал записывать. Возможна и другая, физическая причина. Эти измерения проводил непосредственно после того, как залил воду – не установился еще тепловой режим⁴¹: конвекция, перераспределение температур и т.д. и т.п.



⁴¹ Надо согласиться, вполне возможные причины, только можно было бы, и назвать какой режим не установился – квазистационарный.



Зависимость потока теплоты от разности температур

Ладно – эти точки при расчетах отбросим, остальные то легли примерно на прямую. Нарисуем ее. Еще одна проблема: она не проходит через нуль. Может быть, погрешности измерений повлияли? Надо рассчитывать параметры линейной зависимости $y = ax + b$

($x = \Delta t$ – разность температур горячей и холодной воды, $y = \frac{\delta t}{\Delta \tau}$ – поток теплоты), конечно, по МНК:

$$a = (2,83 \pm 0,17) \cdot 10^{-3} c^{-1}; \quad b = (2,15 \pm 0,40) \cdot 10^{-2} \frac{K}{c}$$

Сравним с графиком: похоже на правду и наклон, и отсечение на оси. Правдоподобно? А с чем сравнивать? Какой смысл имеет параметр a ? Размерность обратная времени, значит,

$\frac{1}{a}$ какое-то время. Смотрим на формулу (пока без этого ненулевого b): $\frac{1}{a} = \frac{\Delta \tau}{\delta t \cdot \Delta t}$ – ясно,

время нагревания холодной воды на 1 градус при разности температур тоже 1 градус. И сколько же это получается $\frac{1}{a} \approx 360 \text{ с}$ – немало (6 минут). Но у меня разность температур

гораздо выше: возьмем 20° – время нагревания на 1 градус в двадцать раз меньше: получаем – 18 секунд. А по моим данным от 34° до 36° нагрелась примерно за тридцать секунд: по порядку величины сходится – грубой ошибки в расчетах нет. Ну, и конечно, погрешность этого коэффициента (около 7%) тоже может свою роль сыграть.

Разберемся с b . Что это такое? Жаль, что не нуль! Какой смысл этого: разность температур нуль, а поток теплоты идет!? Интересно, в какую сторону, по инерции, что ли? Формально, при какой разности температур поток станет равным нулю?

$(\Delta t)_{q=0} = -\frac{b}{a} \approx -8^\circ$. Невероятно, может я на столько ошибся при расчете разностей температур? Не может быть! Точно объяснить не могу, причин много: погрешности измерений (одна погрешность b около 20%); точнее надо было находить среднюю разность; да и метод расчета, честно скажем, не очень хорош: опять приходится считать разности. Оставлю, как есть, без комментариев. Все-таки коэффициент теплопередачи найден с неплохой точностью. Кстати, чуть не забыл. Найти значение этого коэффициента: надо умножить a на теплоемкость воды в стакане:

$$K = cma = 1,78 \frac{Bm}{K}; \quad \Delta K = cm\Delta a = 0,11 \frac{Bm}{K}.$$

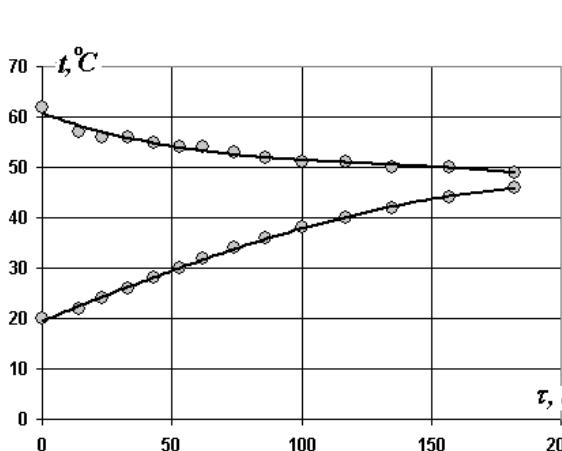
Относительная погрешность 6%. Неплохо, для таких приборов!

Теперь все то же для одного стаканчика. Измеряю, результаты в таблицу 2.

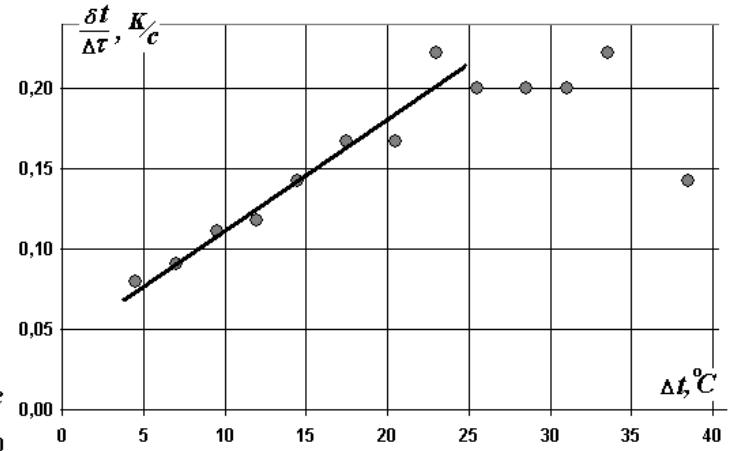
Таблица 2.

τ_k, c	$t_{xol.k}, ^\circ C$	$t_{cop.k}, ^\circ C$	$\frac{\delta t}{\Delta \tau}$	$\Delta t_{cp}, ^\circ C$
0	20,0	62,0		
14	22,0	57,0	0,143	38,5
23	24,0	56,0	0,222	33,5
33	26,0	56,0	0,200	31,0
43	28,0	55,0	0,200	28,5
53	30,0	54,0	0,200	25,5
62	32,0	54,0	0,222	23,0
74	34,0	53,0	0,167	20,5
86	36,0	52,0	0,167	17,5
100	38,0	51,0	0,143	14,5
117	40,0	51,0	0,118	12,0
135	42,0	50,0	0,111	9,5
157	44,0	50,0	0,091	7,0
182	46,0	49,0	0,080	4,5

Рассчитываю потоки теплоты и средние разности и туда же в таблицу. Теперь два графика, для одного стаканчика.



Зависимости температур от времени



Зависимость потока теплоты от разности температур

Еще хуже – не зря рекомендовано сначала провести измерения для двойного, там и измерять было легче (медленнее нагревался) и результаты приличнее. Что сейчас делать? Семь первых точек надо отбрасывать! Кстати, по времени, почти, как и в первой серии – первую минуту можно не измерять. Ничего не поделаешь. Осталось 6 точек, по ним провожу прямую и рассчитываю параметры линейной зависимости:

$$a = (6,64 \pm 0,97) \cdot 10^{-3} c^{-1}; \quad b = (4,6 \pm 0,11) \cdot 10^{-2} \frac{K}{c}.$$

Погрешности под 20% - и точек меньше, и пляшут больше. Все те же проблемы с параметром b . По этим данным поток должен прекратиться при разности температур

$(\Delta t)_{q=0} = -\frac{b}{a} \approx -7^\circ$. Интересно, что почти такое же значение. Но это секретные данные.

Не забыть: коэффициент теплопередачи

$$K = cma = 4,18 \frac{Bm}{K}; \quad \Delta K = cm\Delta a = 0,61 \frac{Bm}{K}.$$

Но этот коэффициент больше чем в два раза превышает коэффициент теплопередачи для двойного стакана! А может все в пределах погрешности? Найду их отношение:

$$\frac{K_1}{K_2} \approx 2,3 \text{ и ее погрешность } \Delta \left(\frac{K_1}{K_2} \right) = \frac{K_1}{K_2} \sqrt{\left(\frac{\Delta K_1}{K_1} \right)^2 + \left(\frac{\Delta K_2}{K_2} \right)^2} \approx 0,4. \text{ Можно считать, что в}$$

два раза (в пределах погрешности).

Осталось сделать выводы:

- Закон Фурье выполняется;
- значения коэффициентов теплопередачи равны

$$K_1 = (4,2 \pm 0,6) \frac{Bm}{K};$$

$$K_2 = (1,8 \pm 0,1) \frac{Bm}{K};$$

и отличаются примерно в два раза, хотя, возможно, что большее уменьшение этого коэффициента для двойного стаканчика объясняется неплотным прилеганием стенок стаканов друг к другу и наличием малой прослойки воздуха между ними.

Вот выдал, а что? Рамы оконные тоже двойными делают!

А все-таки интересно, в два раза уменьшается теплопередача или больше? При такой точности измерений ответить точно нельзя. Все дало в методе – вечные проблемы с этими разностями! Можно ли результаты обрабатывать по-другому, не считая отношения разностей. Это же фактически я так производную рассчитывал. Недавно читал, что операция численного дифференцирования незаконна (точнее, не корректна). Как бы экспериментальную кривую, без пересчета, обрабатывать? Надо будет обдумать дома. Но не сегодня – устал. И не завтра – надо же будет за дипломом с медалью идти!

Дополнение к задаче. Домашняя работа⁴².

Вот я и дома, теперь загоню свои данные в Excel – смогу этих графиков настроить, этих коэффициентов насчитать по МНК – сколько душе угодно. Важно только сообразить, что считать, что строить – этого мне никакой компьютер не подскажет. Начну с результатов по двойному стаканчику: точек больше,

Итак, основная идея – целиком обрабатывать экспериментальные графики. Что мне необходимо сделать? Проверить выполнение закона Фурье, раз; найти коэффициенты теплопередачи, два! Что я делал? – анализировал поток, как функцию разности температур, на основании зависимости температуры (двух температур) от времени. Значит, надо от потока перейти к температуре. А что такое уравнение закона Фурье, как не связь между скоростью изменения температуры с температурой: как в механике, известна зависимость скорости от координаты, надо найти зависимость координаты от времени! Эта же задача решается! Конечно, я анализировал производную, а надо анализировать саму функцию, но тогда надо знать ее вид! Эх, если бы я знал вид этой функции, я бы и на олимпиаде ее проверял и искал ее параметры! Жаль, не умею я решать такие уравнения. А если подумать? Производная пропорциональна самой функции. Где-то я уже такое встречал, и не раз: разрядка конденсатора – сила тока (производная от заряда) пропорциональна заряду; торможение тела в вязкой жидкости – ускорение (производная

⁴² В очередной раз восхитимся нашим учеником – действительно, у него появилась блестящая идея исследовать не производную от экспериментальной функции, а саму функцию. Посмотрим, что у него получится!

от скорости) пропорциональная скорости. Здесь то же самое: скорость изменения температуры линейно зависит от температуры. Ура, решение будет экспонентой

$$t = A \exp(-a\tau), \quad (1)$$

с параметрами разберусь потом. Надо логарифмировать. То есть логарифм температуры должен линейно зависеть от времени:

$$\ln t = \ln A - a\tau.$$

Проверить элементарно – времена есть, температуры есть, строим.

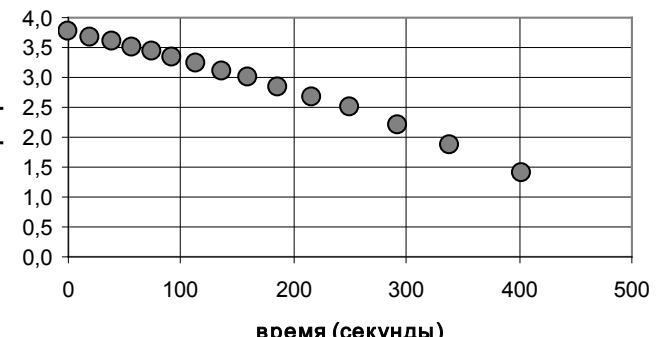
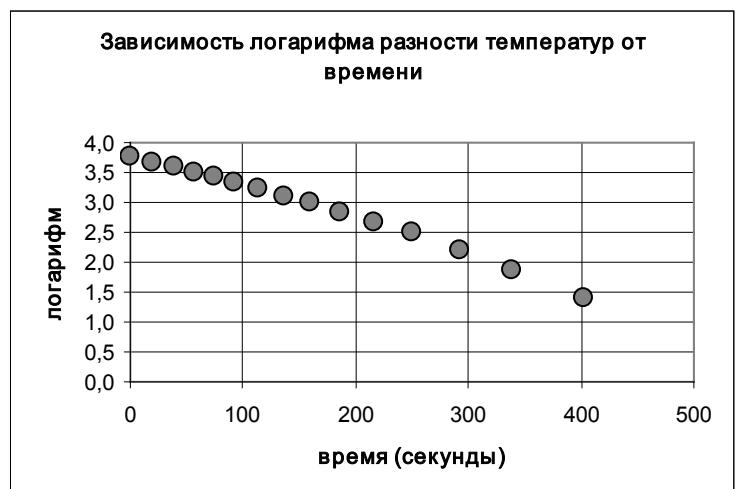
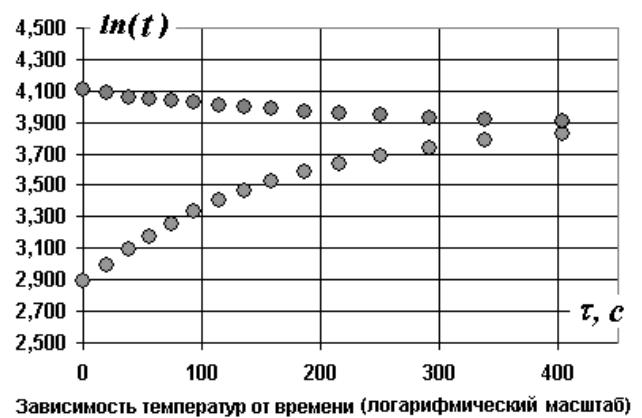
Столбец для логарифма $\ln t_{\text{хол.к.}}$, столбец для логарифма $\ln t_{\text{гор.к.}}$, мастер диаграмм, готово. И это прямые? Нет, конечно! Проверяю – можно пару точек и «вручную» проверить, что я глупее Excel'я? Все правильно. Может, потеря теплоты в воздухе виноваты? Но в моем решении они не проявились, или я не заметил? За что тогда медаль дали? Что-то я напутал. Посмотрю еще раз на свою функцию (1). Конечно, кто такое придумал? Разве температура должна стремиться к нулю, как эта функция? Нет, функция должна быть другой. Что у нас должно стремиться к нулю – **разность температур**. Похоже, что разность температур надо логарифмировать (а логарифм разности не равен разности логарифмов!). Попробую: еще один столбец для разности температур $(t_{\text{гор.к.}} - t_{\text{хол.к.}})$ (и не надо никаких средних), еще один столбец для логарифма разности $\ln(t_{\text{гор.к.}} - t_{\text{хол.к.}})$ и на график: Здорово, конечно не идеальная прямая, но очень близко, особенно если несколько первых точек отбросить! Я на верном пути. Что с эти графиком делать? Нужно знать эту функцию. И еще – опять разности (правда, большие – ничего страшного!), но используются значения температур и холодной (измерены хорошо), и горячей (измерены не очень хорошо) воды. Вот если бы получить результат только по «холодной» воде. На время на стать теоретиком. Попробую. Запишу уравнение для изменения температуры холодной воды (количество теплоты, пошедшей на нагревание холодной воды, равно количеству теплоты, полученной от горячей):

$$C_1 \Delta t_1 = K(t_2 - t_1) \Delta \tau, \quad (2)$$

все, что относится к холодной пойдет с индексом 1 t_1 – температура (зависит от времени); C_1 – теплоемкость (полная, а не удельная); все, что относится к горячей – с индексом 2. Хорошее уравнение, только решить его нельзя – две неизвестных (температура горячей тоже изменяется). Надо записать такое же уравнение для горячей (только она отдает теплоту)

$$C_2 \Delta t_2 = -K(t_2 - t_1) \Delta \tau. \quad (3)$$

Уравнений два, неизвестных две, но как их найти? Справа в обоих уравнениях разность температур, надо сделать ту же разность



$$\begin{cases} C_1 \Delta t_1 = K(t_2 - t_1) \Delta \tau \\ C_2 \Delta t_2 = -K(t_2 - t_1) \Delta \tau \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta t_1 = \frac{K}{C_1}(t_2 - t_1) \Delta \tau \\ \Delta t_2 = -\frac{K}{C_2}(t_2 - t_1) \Delta \tau \end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta(t_2 - t_1)}{\Delta \tau} = -K \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) (t_2 - t_1)$$

А вот это уже совсем знакомо: постоянный коэффициент при разности и есть показатель экспоненты.

Обозначу его, как и раньше:

$$a = K \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right).$$

Как его находить по экспериментальным данным известно: это коэффициент наклона графика в полулогарифмическом масштабе. Даже если я его найду, то чтобы найти коэффициент теплопередачи надо знать теплоемкости. Теплоемкость холодной воды известна: $C_1 = cm$, а для горячей? Измерить объем горячей воды? А теплоемкость горшка, наверное, не маленькая. Надо тоже рассчитывать по экспериментальным данным. Не сложно – знаю изменение температуры холодной, знаю изменение температуры горячей – легко найти отношение теплоемкостей, да, именно отношение! Еще одно обозначение:

$$\frac{C_1}{C_2} = \eta, \text{ тогда показатель экспоненты имеет вид:}$$

$$a = \frac{K}{C_1} (1 + \eta). \quad (4)$$

Теперь «теоретическая» модель построена: разность температур горячей и холодной воды зависит от времени по закону:

$$(t_2 - t_1) = (t_2 - t_1)_0 \exp(-a \tau), \quad (5)$$

где $(t_2 - t_1)_0$ – начальная разность температур, которую мне знать и необязательно, в логарифмическом масштабе она уйдет в свободный член. Ну и хорошо, мне же надо будет отбрасывать плохо измеренные начальные точки!

А как же зависят от времени сами температуры? Должны содержать такие же экспоненты – иначе их разность не будет иметь вид (5). А что будет стоять перед экспонентами: тоже должна быть какая-то разность, причем, стремящаяся к нулю. Ну конечно, отклонение от конечной (стационарной) температуры, которую обозначу θ . Как это я сразу не догадался: всегда по экспоненте убывает отклонение от стационарного значения: и заряд при зарядке конденсатора, и скорость лодки при разгоне! Поэтому температуры воды должны зависеть от времени по законам

$$(\theta - t_1) = (\theta - t_1)_0 \exp(-a \tau), \quad (6)$$

$$(t_2 - \theta) = (t_2 - \theta)_0 \exp(-a \tau). \quad (7)$$

Оказывается, теоретиком быть не сложно, если думать, как физик, а не как математик! Теперь у меня есть целы три способа определения показателя экспоненты (а через него и коэффициента теплопередачи): «по холодной воде», «по горячей воде», по разности температур! Интересно, а совпадут ли эти показатели? Хорошо бы! Теперь последнее: а как мне построить зависимости (6)-(7) в логарифмическом масштабе, если неизвестна конечная температура? Просто логарифмировать температуры я уже пробовал, теперь понятно, почему ничего хорошего не получилось! Надо искать поточнее конечную температуру и, чуть не забыл, отношение теплоемкостей. Все эти величины входят в уравнение теплового баланса, надо его записать:

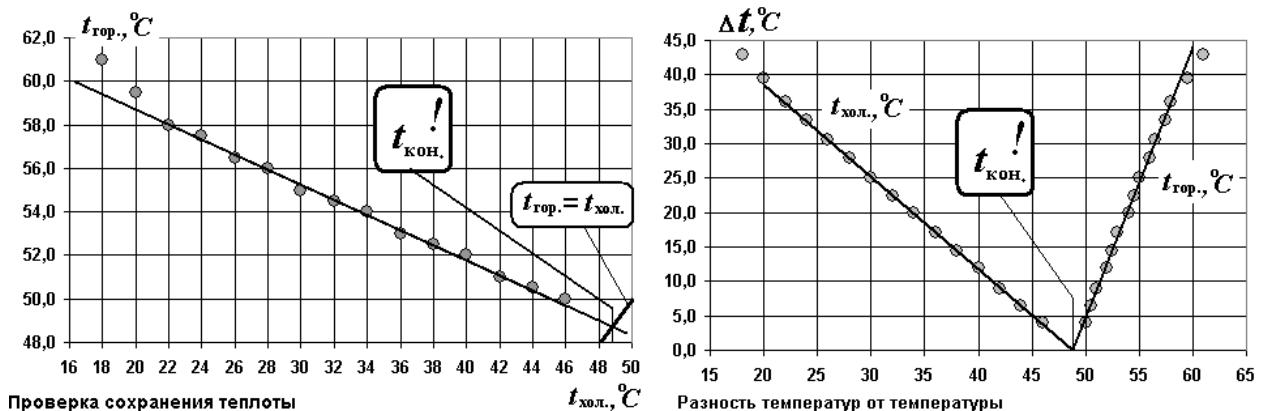
$$C_1(\theta - t_1) = C_2(t_2 - \theta),$$

а если использовать отношение теплоемкостей $\frac{C_1}{C_2} = \eta$, то еще проще

$$\eta(\theta - t_1) = (t_2 - \theta). \quad (8)$$

Так оно же линейное: строй зависимость t_1 от t_2 , получай прямую (если получится!), обрабатывай ее по МНК (тогда лучше t_2 от t_1 , температура холодной измерена точнее) и находи, что тебе надо: два параметра линейной зависимости, две неизвестных. Еще одна мысль: использовать разность температур $\Delta t = (t_2 - t_1)$, построить ее зависимость от t_1 (или от t_2), и смотри при какой температуре разность станет равной нулю! А эти зависимости тоже должны быть линейными. Какой способ лучше; наверно, разность как функция температуры холодной (она точнее!). Хотя лучше попробовать все три способа и сравнить. Последнее теоретическое усилие: привести все три зависимости к явному линейному виду, выразить параметры зависимостей через конечную температуру и отношение теплоемкости, наконец, выразить неизвестные (и их погрешности, иначе как сравнивать) через параметры линейных зависимостей – с этим даже экспериментатор справится. Проделаю эту работу в табличке (я же все-таки больше экспериментатор, а какой экспериментатор без таблицы). Ну вот и готово: Таблица 1.

Теперь можно построить графики:



Здорово и красиво! Если бы потери теплоты были существенны, то прямые бы не получились. А хорошо видно, что в начале точки явно отходят от прямой – то ли плохо измерял, то ли, действительно, заметно нагревание воздуха. Поэтому первый график можно назвать проверка закона сохранения теплоты. Вывод: почти сохраняется! По второму графику сразу можно определить конечную температуру: продолжаю прямые до пресечения с осью и получаю значение конечной температуры (когда разность равна нулю) – странно, совпадает! А на первом графике надо провести прямую с уравнением $t_2 = t_1$ (в самом уголочке поместилась) и найти точку ее пересечения с построенной прямой – то же приблизительно 49° . Действительно здорово, первые точки отбросил, а конечную температуру нашел по усреднению всех остальных точек. Имеет смысл повозиться с методом наименьших квадратов для всех прямых. Считаю, результаты в таблицу 2.

Таблица 1. Теоретические результаты.

Уравнение теплового баланса	$C_1(\theta - t_1) = C_2(t_2 - \theta)$		
Вид зависимости	1) $y(x) = t_2(t_1)$	2) $y(x) = \Delta t(t_1)$	3) $y(x) = \Delta t(t_2)$
Замена переменных		$t_2 = t_1 + \Delta t$	$t_1 = t_2 - \Delta t$
Теоретическая зависимость	$t_2 = -\frac{C_1}{C_2}t_1 + \frac{C_1 + C_2}{C_2}\theta$	$\Delta t = \frac{C_1 + C_2}{C_2}(\theta - t_1)$	$\Delta t = \frac{C_1 + C_2}{C_1}(t_2 - \theta)$
Вид линейной зависимости	$y = ax + b$		
Обозначения переменных	$y = t_2$ $x = t_1$	$y = t_2 - t_1 = \Delta t$ $x = t_1$	$y = t_2 - t_1 = \Delta t$ $x = t_2$
Теоретические значения параметров линейной зависимости	$a = -\frac{C_1}{C_2} = -\eta$ $b = \frac{C_1 + C_2}{C_2}\theta = (\eta + 1)\theta$	$a = -\frac{C_1 + C_2}{C_2} = -(\eta + 1)$ $b = \frac{C_1 + C_2}{C_2}\theta = (\eta + 1)\theta$	$a = \frac{C_1 + C_2}{C_1} = 1 + \frac{1}{\eta}$ $b = -\frac{C_1 + C_2}{C_1}\theta = -\left(1 + \frac{1}{\eta}\right)\theta$
Выражение для конечной температуры через параметры линейной зависимости	$\theta = \frac{b}{1-a}$	$\theta = -\frac{b}{a}$	$\theta = -\frac{b}{a}$
Погрешность определения конечной температуры	$\Delta\theta = \theta \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{1-a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2}$	$\Delta\theta = \theta \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2}$	$\Delta\theta = \theta \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2}$
Выражение для определения отношения теплоемкостей	$\eta = -a$	$\eta = -a - 1$	$\eta = \frac{1}{a - 1}$
Погрешность определения отношения теплоемкостей	$\Delta\eta = \Delta a$	$\Delta\eta = \Delta a$	$\Delta\eta = \frac{\Delta a}{(a - 1)^2}$

Таблица 2. Результаты расчетов.

зависимость	1) $y(x) = t_2(t_1)$	2) $y(x) = \Delta t(t_1)$	3) $y(x) = \Delta t(t_2)$
Параметр $a (K/c)$	-0,339	1,339	3,94
Погрешность $\Delta a (K/c)$	0,012	0,012	0,10
Относительная погрешность	3,4%	0,9%	2,5%
Параметр $b, ^\circ C$	65,4	65,4	192,3
Погрешность $\Delta b, ^\circ C$	0,4	0,4	5,5
Относительная погрешность	0,6%	0,6%	3%
Конечная температура $\theta, ^\circ C$	48,85	48,85	48,83
Погрешность $\Delta \theta, ^\circ C$	0,52	0,52	1,9
Относительная погрешность	1%	1%	4%
Отношение теплоемкостей η	0,339	0,339	0,340
Погрешность $\Delta \eta$	0,012	0,012	0,012
Относительная погрешность	4%	4%	4%

Прекрасное соответствие результатов, полученных тремя методами! Как и ожидалось, наибольшая погрешность получилась в третьем методе («по горячей воде») – но и здесь погрешность не высока 3-4%.

Немного странно, что в первом методе относительная погрешность конечной температуры оказалась меньше чем, относительная погрешность расчета коэффициента наклона. Хотя в формулу (и в погрешность) входит $(1 - a)$, поэтому этот параметр не сильно влияет на конечный результат.

Итог: потерями теплоты в окружающую среду можно пренебречь. Конечная температура воды должна стать равной

$$\theta = (48,8 \pm 0,5)^\circ C;$$

отношение теплоемкостей воды в стакане и сосуда с горячей водой равно

$$\eta = 0,339 \pm 0,012.$$

Еще один парадокс: точность рассчитанного значения температуры выше точности термометра? Можно объяснить так: если у термометра есть приборная систематическая погрешность (сдвиг шкалы), то она вошла в конечный результат, но в дальнейшем надо использовать разности показаний, поэтому постоянный сдвиг не существенен; результат получен по усреднению большого числа данных со случайными ошибками (ошибка округления тоже случайная), поэтому результат усреднения может иметь более высокую точность, чем точность отдельного значения (или я не прав?).

Полученное значение конечной температуры позволяет построить временные зависимости температур (5)-(7) в логарифмическом масштабе – строим.

Получилось не плохо – если отбросить несколько первых точек, то остальные добросовестно ложатся на прямые; проводим их – замечательно, «на глаз» они параллельны!

А что покажут расчеты по МНК коэффициентов наклона:

- «по холодной воде»:

$$a = -(6,50 \pm 0,45) \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1};$$

- «по горячей воде»:

$$a = -(6,23 \pm 0,38) \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1};$$

- по разности температур:

$$a = -(6,43 \pm 0,36) \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}.$$

Результаты согласуются между собой (и погрешности близки), поэтому можно их усреднить и принять

$$a = -(6,4 \pm 0,2) \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1},$$

где погрешность примерно в $\sqrt{3}$ раз меньше погрешности одного результата¹. Наконец, рассчитываем коэффициент теплопередачи с помощью формулы (4):

$$K_2 = \frac{cm}{1+\eta} |a| = 3,05 \frac{Bm}{K},$$

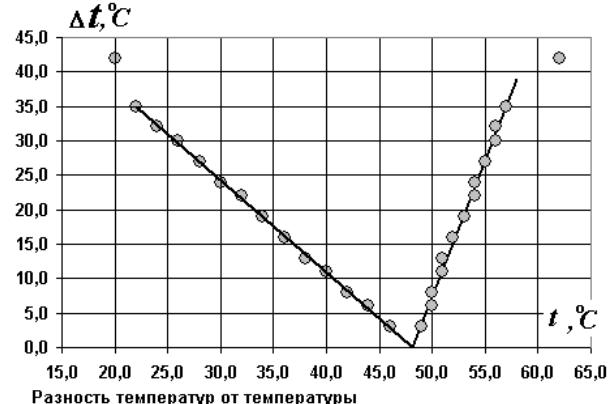
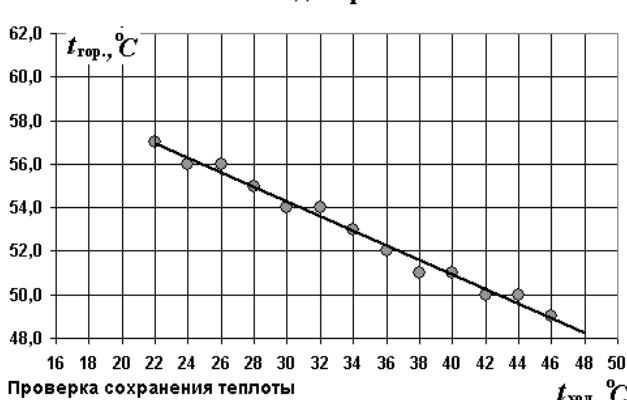
что в полтора раза отличается от полученного ранее. А погрешность:

$$\Delta K_2 = K_2 \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \eta}{1+\eta}\right)^2} \approx 0,1 \frac{Bm}{K},$$

что составляет всего 3%. Конечно, этому результату следует доверять гораздо больше.

Что провести расчеты для одинарного стаканчика достаточно в Excel загнать таблицу результатов измерений температур для него. Не буду выписывать все промежуточные выкладки, приведу только графики и конечный результат.

Одинарный стакан



Качественно, все то же самое, только разброс больше, особенно для начальных точек – их надо отбрасывать!

Расчет конечной температуры и отношения теплоемкостей приводит к стыкающимся результатам только с заметно большей погрешностью, которая минимальна для зависимости (2) – «по холодной воде»:

¹ Несущественная неточность – скорее надо делить на $\sqrt{2}$, так как независимых измерения только две серии.

- конечная температура $\theta = (48,2 \pm 1,3)^\circ\text{C}$;
- отношение теплоемкостей $\eta = (0,33 \pm 0,03)$ - как и следовало ожидать, совпадает с данными по двойному стаканчику.

Временные зависимости изменения температуры (в логарифмическом масштабе) также дают более заметный разброс. Здесь пришлось отбросить не только 6 начальных точек, но и одну последнюю — сильно далеко она выскакивала. Построенные по оставшимся точкам прямые получились примерно параллельными. Усредненное значение показателя экспоненты оказалось равным

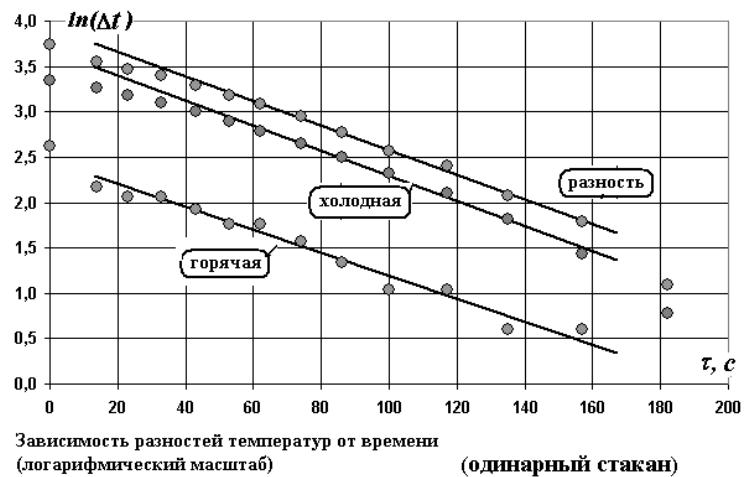
$$a = -(13,2 \pm 0,4) \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}.$$

Соответственно, значение коэффициента теплопередачи равно

$$K_1 = (6,3 \pm 0,2) \frac{Bm}{K},$$

с относительной погрешностью 3% (а не 15%, как было раньше). Таким образом, отношение полученных коэффициентов очень близко к двум (хотя и чуть-чуть выше, но в пределах погрешностей), поэтому нет необходимости приписывать нарушение здравого смысла (и физических законов, что почти одно и то же) пагубному влиянию воздуха!

Вот такая замечательная работа получилась — неожиданно. Конечно, выполнить ее в отведенное время, да еще вручную, на олимпиаде невозможно. Но не жаль потраченного времени. Если бы в условии дали формулы для временных зависимостей и подсказали, что с ними делать, то по одной из трех методик можно было бы и посчитать, особенно с компьютером! Ведь будут когда-нибудь на олимпиаде в качестве оборудования (и маленького сувенира) выдавать ноутбук, тогда на физической олимпиаде можно будет заниматься физикой, а не арифметикой²!



Зависимость разностей температур от времени
(логарифмический масштаб)
(одинарный стакан)

² И опять надо соглашаться с этой, увы, утопической идеей.



Задача 17. «Просто лампочка»

Приборы и оборудование: Лампочка накаливания 2,5 В; батарейка 4,5 В; реостат; проволочный резистор; амперметр школьный; мультиметр; ключ электрический; соединительные провода; термометр.

Часть 1. Сопротивление резистора.

1.1 Проверьте выполнимость закона Ома для проволочного резистора.

1.2 Определите с максимально возможной точностью сопротивление проволочного резистора.

Часть 2. Вольтамперная характеристика (ВАХ) лампочки накаливания.

Подсказка – рекомендация: В дальнейших измерениях не используйте амперметр, так как его точность не достаточна для получения надежных результатов.

2.1 Измерьте ВАХ лампочки накаливания. Постройте ее график.

2.2 Определите сопротивление нити накала лампочки при комнатной температуре с максимально возможной точностью.

2.3 Постройте график зависимости сопротивления нити накала от силы тока через лампочку.

2.4 Дайте качественное объяснение полученных зависимостей.

Часть 3. Механизмы теплоотдачи.

Подсказки:

1. Сопротивление металлических проводников R возрастает при возрастании температуры T по закону

$$R = R_0(1 + \alpha \Delta T), \quad (1)$$

где $\Delta T = T - T_0$ превышение температуры проводника над комнатной температурой T_0 ;

R_0 - сопротивление проводника при комнатной температуре; α - температурный коэффициент сопротивления.

Для вольфрама, из которого изготовлена нить накала, $\alpha = 4,50 \cdot 10^{-3} K^{-1}$.

2. Мощность теплового излучения нагретых металлов пропорциональная четвертой степени абсолютной температуры (закон Стефана – Больцмана³)

³ Строго говоря, этот закон справедлив для абсолютно черного тела. Металлы таковыми не являются, однако с хорошей точностью коэффициент поглощения металлов постоянен. Тела, обладающие таким свойством, называются серыми. Формула (2) справедлива и для них, но при этом коэффициент в законе Стефана – Больцмана отличается от постоянной Стефана – Больцмана.

$$P_{\text{рад.}} = aT^4, \quad (2)$$

где $P_{\text{рад.}}$ - энергия, испускаемая нагретым телом в единицу времени (далее называемая мощностью радиационных потерь); a - постоянный коэффициент, зависящий от размеров и материала металлического тела.

3. Передача теплоты (тепловые потери) от нити накала в окружающую среду осуществляется посредством различных механизмов.

3.1 Постройте график зависимости тепловых потерь нити накала от ее абсолютной температуры.

3.2 На основании экспериментальных данных определите, применим ли закон Стефана – Больцмана к излучению нити накала лампочки.

3.3 Определите, какая доля теплоты, отдаваемая лампочкой в окружающую среду, передается посредством излучения. Постройте график зависимости этой доли от температуры нити накала.

Комментарии к условию задачи.

1. Для выполнения данной задачи нужна высокая точность измерений. Поэтому необходимо использовать цифровой мультиметр, работающий в режиме вольтметра.
2. В работе используется стандартный проволочный резистор сопротивлением 1 Ом.
3. Термометр необходим только для измерения комнатной температуры (можно один на всех).
4. В качестве источника тока можно использовать и ЛИП.
5. В качестве реостата используется школьный переменный резистор сопротивление 6 Ом, к которому следует подключить третий вывод, что бы включать его по схеме реостата.

Размышления и решение.

Условие не очень длинное и понятное. Ожидаемые результаты очевидны. Для проволочного резистора закон Ома (для участка цепи – забыли?) выполняется – это мы еще на заре изучения физики проверяли. Для лампочки связь между силой тока и напряжением должна быть нелинейной: при увеличении силы тока нить будет разогреваться и ее сопротивление возрастать. Следовательно, сила тока будет возрастать медленнее. Очевидно, что когда лампочка начнет светиться, то основные потери теплоты будут (как это назвали?) радиационными, надо понимать – излучением. В чем это должно проявляться? Мощность общих потерь теплоты должна быть пропорциональна четвертой степени температуры. Проверить это элементарно – построить график зависимости мощности потерь от температуры в логарифмическом масштабе и убедится, что коэффициент его наклона примерно равен четырем! Кстати, а как найти мощность потерь? Энергию излучения измерить нечем! Да это же просто энергия, выделяющаяся на лампочке – ее мощность равна произведению силы тока на напряжение – куда еще этой энергии деваться! Интересно, а сопротивление равно отношению напряжения и силы тока. Красивая зависимость: произведения от частного.

Теперь о температуре. Термометр в лампочку не засунешь! Но температура входит в формулу для сопротивления: сопротивление рассчитаю, а затем с помощью формулы (1) найду температуру. Комнатная температура известна – сколько там на термометре? Как обычно - 20°C (один результат измерения уже есть!). Хорошо, фактически нужно поточнее измерить ВАХ - какую характеристику. А дальше все рассчитывается.

Последнее – как измерять? Понятно, что реостат нужен для того, чтобы изменять напряжение (молодцы – третий вывод подключили). Амперметр надо будет подключить последовательно, мультиметр (как вольтметр) – параллельно резистору, без фокусов. Для измерения вольтамперной характеристики лампочки настоятельно не рекомендуют использовать амперметр (и правильно – сколько можно пользоваться этим старьем). А как тогда измерять силу тока? Понятно теперь зачем нужна первая часть – включу проволочный резистор (так по внешнему виду сопротивление пара Ом) и лампочку последовательно и буду измерять напряжение на лампочке, так приказано, а на резисторе для измерения силы тока. Все понятно, осталось сделать.

Часть 1.

Собираем схему. Нет, сначала ее нарисуем.

Красивые ступеньки получились, и ключ на месте! Собираем, полярность приборов не попутать, включаем – ток есть, напряжение есть. На каком диапазоне лучше измерять – похоже, что 2000 mV. Двигаю движок реостата, сила тока изменяется, напряжение тоже – можно измерять.

Как обычно: буду подгонять стрелку амперметра к делению шкалы, а затем снимать показания вольтметра – так точнее. Результаты измерений (через каждое деление и весь диапазон) в таблицу 1.

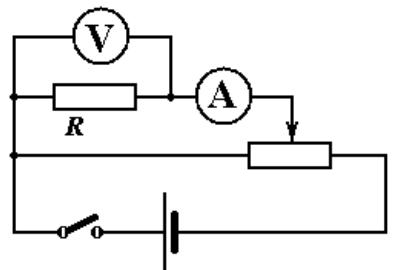
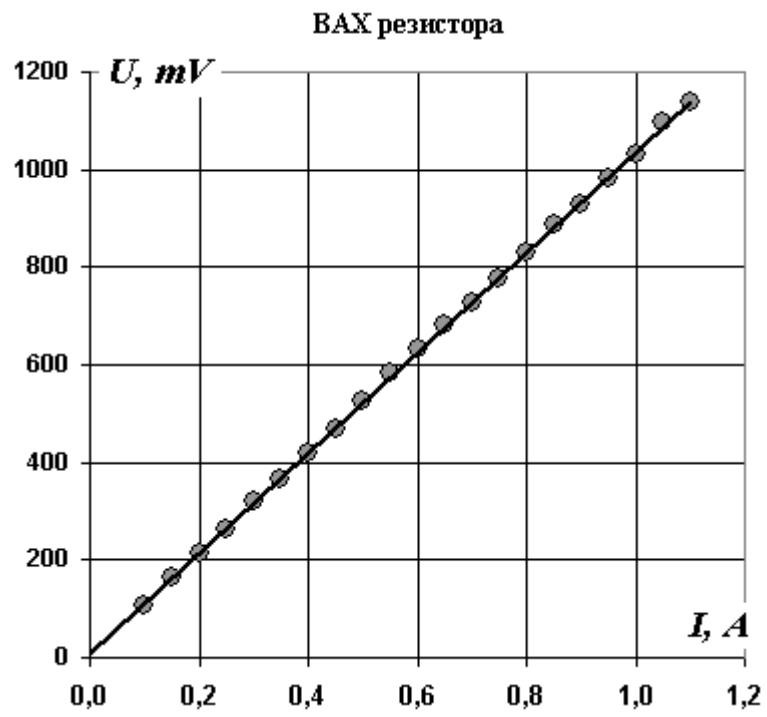


Таблица 1. Зависимость напряжения на резисторе от силы тока.

I, A	U, mV
0,10	106
0,15	165
0,20	215
0,25	264
0,30	322
0,35	367
0,40	420
0,45	470
0,50	527
0,55	585
0,60	633
0,65	682
0,70	726
0,75	777
0,80	831
0,85	886
0,90	929
0,95	982
1,00	1031
1,05	1096
1,10	1138



Строю график (так как измерял: напряжение от силы тока – это тоже ВАХ). Ну, что я говорил – практически идеальная прямая! Так как сопротивление надо определить с

максимально возможной точностью (и погрешность считать надо), то надо обрабатывать по МНК. Записываем

$$U = aI + b.$$

Очевидно, что здесь коэффициент a есть сопротивление резистора $a = R$ (хорошо, меньше считать), а b - должно быть равно нулю. Считаем, получаем:

$$R = (1,027 \pm 0,007) \text{ Ом}, \quad b = (10 \pm 5) \cdot 10^{-3} \text{ В}.$$

С сопротивлением просто замечательно – один Ом, поэтому напряжение на нем численно равно силе тока (можно будет и не делить!). Кроме того, очевидно, что вольтметр можно считать идеальным – его сопротивление намного больше сопротивления резистора, будем надеяться, что и лампочки.

А вот с b «неувязочка вышла» - не равно нулю. Чуть-чуть, но не нуль. Будем считать, что закон Ома выполняется, а шкала амперметра чуть сбита – вполне правдоподобно! Посмотрю – похоже, что стрелка не на нуле при выключенном цепи. Хотя это и не принципиально – все равно этот амперметр теперь можно выбросить!

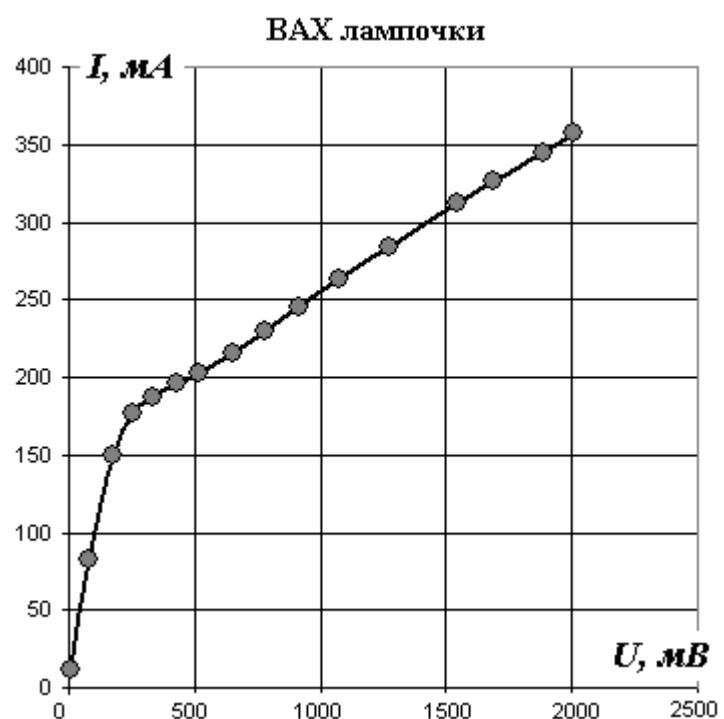
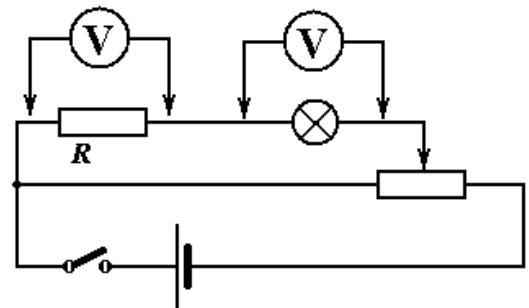
Часть 2.

Новую схему надо нарисовать: амперметр заменить на лампочку. Как это показать, что одним вольтметром измеряю два напряжения? Нарисую стрелочки в местах подключения (неужели жюри будет придираться?).

Проверяю, включаю – работает! Измеряю, результаты (сила тока I – в миллиамперах, то же, что напряжение на резисторе U в милливольтах; напряжение на лампочке, тоже в милливольтах) в Таблицу 2. Так, что мне еще надо будет строить? Сопротивление: $R = \frac{U}{I}$ («мили» сокращаются, получаются Омы).

Таблица 2. ВАХ лампочки.

I, mA	U, mV	R, Ω
11	10	0,909
82	80	0,976
150	178	1,187
177	256	1,446
187	331	1,770
196	429	2,189
203	515	2,537
216	653	3,023
230	779	3,387
245	914	3,731
263	1072	4,076
284	1273	4,482
312	1541	4,939
326	1691	5,187
344	1884	5,477
357	2010	5,630



Так, теперь строим график вольтамперной характеристики (пусть теперь будет физическим: сила тока от напряжения). Если бы подгонял, то нарисовал бы его более плавным – так он похож на два отрезка прямых. Кстати, излом как раз в том месте, где лампочка начинает светиться (при токе около 200 мА).

Интересно, какой получится график зависимости сопротивления от силы тока? Строю. Тоже наугад не угадаешь!

Качественное объяснение (я так понимаю, что без формул) очевидно: при малых токах температура нити приблизительно равна комнатной, когда нить начинает светиться, ее температура возрастает, поэтому возрастает ее сопротивление, как написано в формуле (1) и как видно на графике зависимости сопротивления от температуры.

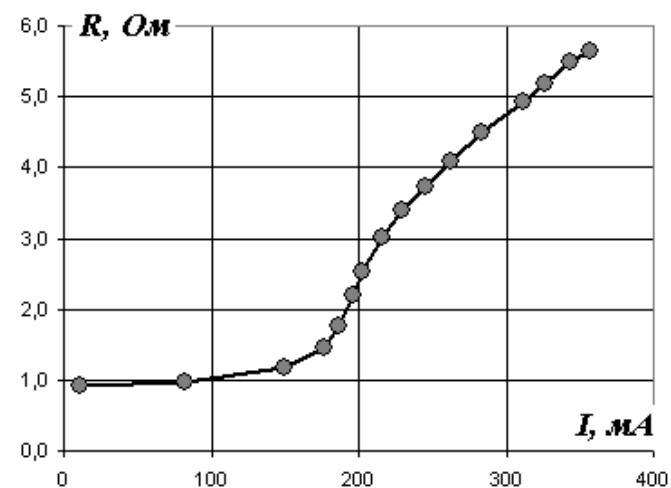
На вольтамперной характеристике лампочки зависимость тока от напряжения становится более пологой.

Вроде понятно, но эти изломы являются «какой-то характерной особенностью», в области которой густота точек должна быть больше (так учили!).

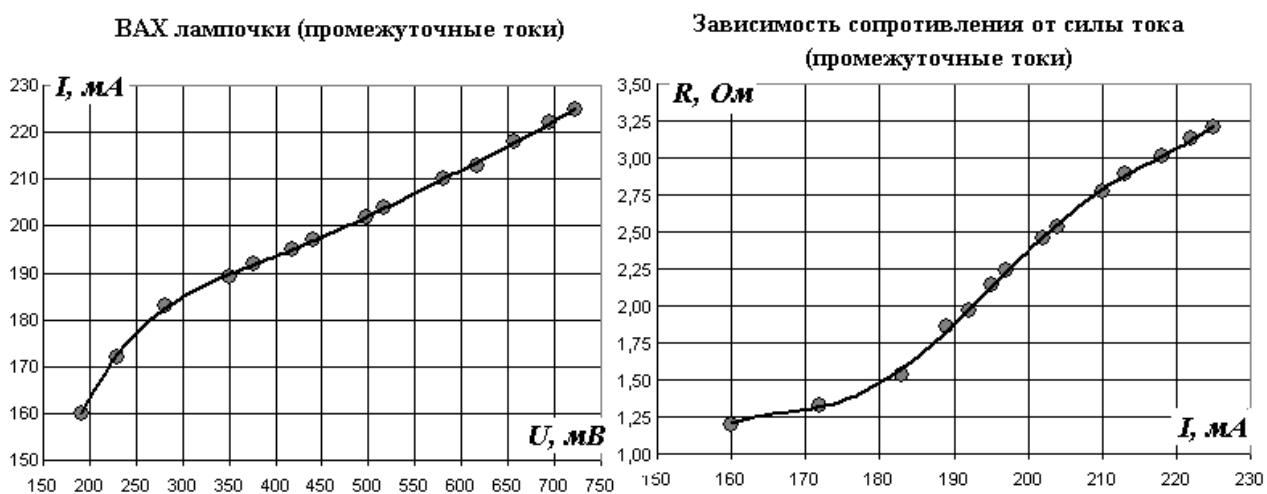
Хорошо, что дали одну задачу на 5 часов. Время есть – надо в области излома получить побольше точек (еще промерить, это не долго, а жюри не придерется⁴). Результаты в таблице 3 и на графиках.

Таблица 3. Дополнение Таблицы 2.

<i>I, мА</i>	160	172	183	189	192	195	197	202	204	210	213	218	222	225
<i>U, мВ</i>	192	229	281	351	377	418	441	497	517	581	616	656	694	722
<i>R, Ом</i>	1,20	1,33	1,54	1,86	1,96	2,14	2,24	2,46	2,53	2,77	2,89	3,01	3,13	3,21



Зависимость сопротивления лампочки от силы тока



Конечно, при таком малом интервале никаких изломов не видно, они превратились в изгибы, достаточно плавные переходы, что по-хорошему радует!

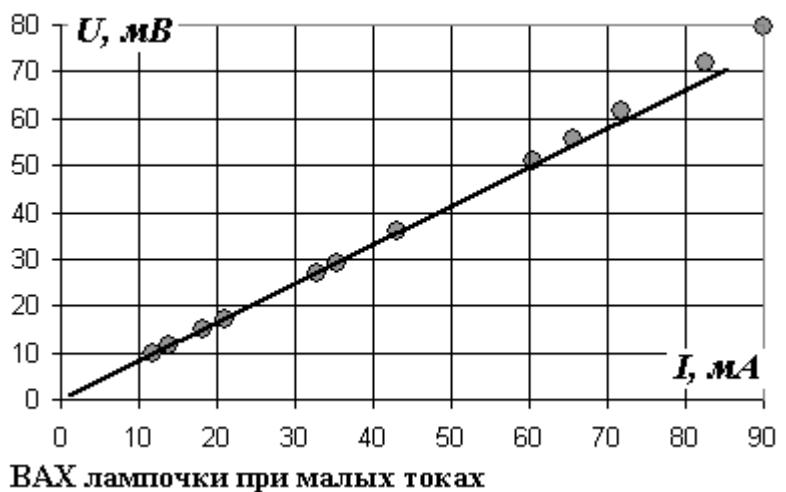
Похоже, что с первыми двумя частями управился и не плохо. Чуть не забыл, а сопротивление холодной нити? Может взять минимальное значение сопротивления из Таблицы 2? Нет, надо же «с максимально возможной точностью»! Лучше еще измерить в

⁴ Правильные рассуждения, правильный подход! Только в данном случае эти дополнительные измерения не обязательны (можно было добавить несколько точек на предыдущие графики), так как основной интерес представляют измерения в предельных областях малых и больших токов.

области малых токов⁵. Здесь можно прейти и в другой диапазон измерения напряжения 200 мВ, точнее будет. Вот только реостатом труднее регулировать малые токи. Тем не менее - результаты в очередной Таблице 4.

Таблица 4. ВАХ холодной лампочки.

I, mA	U, мВ
11,9	9,7
13,9	11,4
18,2	15,1
20,9	17,2
32,7	27,0
35,5	29,2
43,1	35,9
60,5	51,0
65,7	55,8
71,9	61,6
82,6	71,9
89,9	79,4



Рисуем график: оси, подписал, оцифровал, точки нанес. Вроде все на прямой. А если приложить линейку – заметно, что немного уходят вверх. И тут нить немного нагревается! Проведу через первые точки – сколько их легло на прямую? Шесть штук, по ним и рассчитаю (опять МНК), вот и результат:

$$R_0 = (0,826 \pm 0,008) \Omega \text{м}, \\ b = (-0,06 \pm 0,2) \text{ мВ}.$$

Замечательно, погрешность сопротивления меньше одного процента! И с b все в порядке – это нуль; во-первых, меньше погрешности расчета, во-вторых, на порядок меньше цены деления. Прав Георг Симон Ом, если пользоваться нормальным прибором!
Продолжаем.

Часть 3.

Сначала надо немного поразмыслить. Здесь надо искать зависимости мощностей от абсолютной температуры. С суммарной мощностью понятно: $P = UI$ (если и то и другое в «мили», то уже получится «мили в квадрате» - это «микро», но числа получаются слишком большие, поэтому перемножу, а потом в уме разделю на тысячу – получаться милливатты).

Радиационные потери надо считать по-другому. Хорошо бы найти коэффициент пропорциональности в формуле (2). Может по крайней точке – считать, что при максимальном токе вся теплота уходит от нити благодаря излучению? Тоже выход, на крайний случай. А если «Степа Больцманов» тут не применим? Надо же сначала это проверить. Температуру найдем: из формулы

$$R = R_0(1 + \alpha \Delta T)$$

следует, что абсолютную температуру нити надо рассчитывать по формуле

$$T = T_0 + \frac{R - R_0}{\alpha R_0},$$

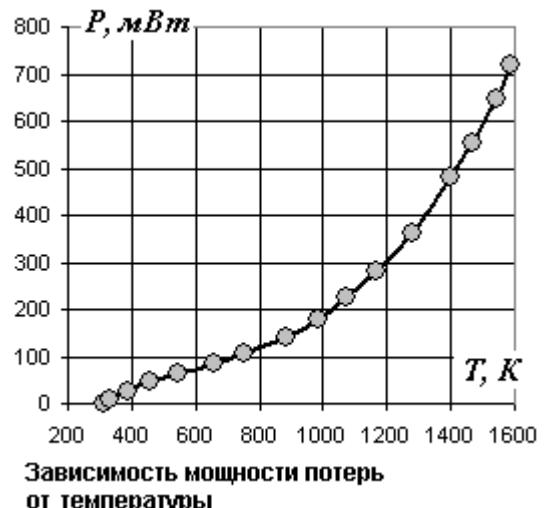
⁵ А вот эти измерения необходимы – значение сопротивления холодной нити нужно для дальнейших расчетов!

здесь $T_0 = 20^\circ\text{C} + 273^\circ\text{K} = 293^\circ\text{K}$ - абсолютная комнатная температура (плюс-минус градус, или пара градусов).

Напряглись: результаты расчетов в таблице 5.

Таблица 5. Расчет температуры и мощности.

I, mA	$U, \text{мВ}$	$R, \text{Ом}$	T, K	$P, \text{мВт}$
11	10	0,909	315	0,11
82	80	0,976	333	6,56
150	178	1,187	390	26,70
177	256	1,446	460	45,31
187	331	1,770	547	61,90
196	429	2,189	660	84,08
203	515	2,537	753	104,55
216	653	3,023	884	141,05
230	779	3,387	982	179,17
245	914	3,731	1074	223,93
263	1072	4,076	1167	281,94
284	1273	4,482	1277	361,53
312	1541	4,939	1400	480,79
326	1691	5,187	1466	551,27
344	1884	5,477	1544	648,10
357	2010	5,630	1586	717,57



Все как предсказано: мощность резко возрастает с ростом температуры. На степенную функцию очень похоже, но какой степени? Проверять формулу (2) «в лоб», построив зависимость мощности от четвертой степени температуры – работа для начинающих талантов! Я же сразу могу определить показатель степени в зависимости

$$P = CT^\gamma$$

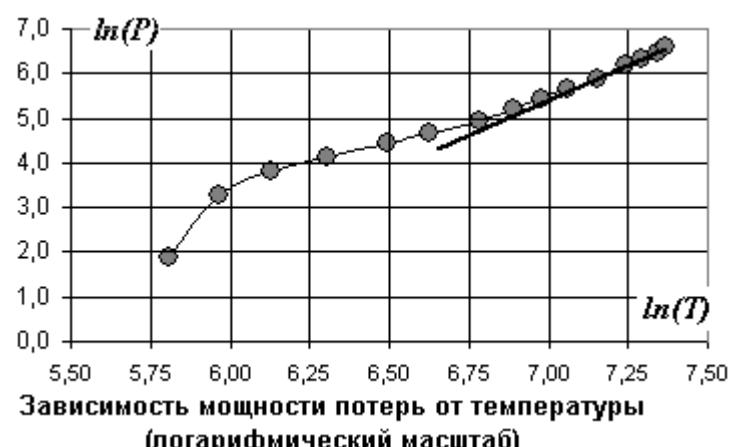
с помощью логарифмирования этой формулы. Быстренько (время поджимает) строю график в логарифмическом масштабе. Что-то далековато от линейной зависимости. Хотя через последние точек пять-шесть прямую провести можно. Считаю по МНК коэффициент наклона (он же показатель степени):

$$\gamma = 3,1 \pm 0,1.$$

Но это же, увы, сильно отличается от ожидаемой четверки!

Почему? Погрешности измерений? Но сопротивления были хорошо измерены, поэтому и температуры и мощности, должно быть, рассчитаны хорошо.

Закон Стефана-Больцмана здесь не применим? Сомнительный вывод. А что в условии подсказывали про него? Внимательно, пункт третий – разные механизмы теплопередачи! Действительно, сама лампочка нагревается, поэтому есть теплопередача в воздух (теплопроводность, конвекция). Она тоже зависит от температуры? Возможно, пропорционально температуре, или разности температур лампочки и воздуха? Не будем шарахаться от одной крайности в другую: все-таки, когда нить светится, основные потери должны быть за счет излучения. Поэтому остальные потери составляют небольшую



добавку, которую приближенно можно считать пропорциональной температуре (не очень даже важно в Кельвинах, или Цельсиях). Попробуем.

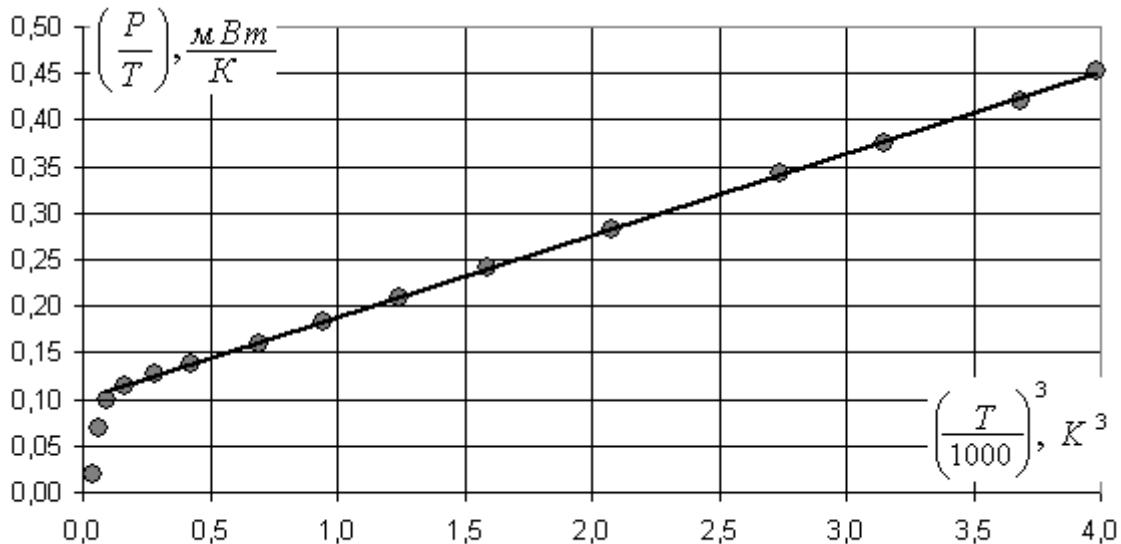
Итак, представим потери теплоты в виде суммы⁶ радиационных (пропорциональных четвертой степени температуры) и остальных (пропорциональных температуре):

$$P = aT^4 + bT.$$

Эту зависимость линеаризуем:

$$\frac{P}{T} = aT^3 + b.$$

Построим теперь график зависимости отношения мощности к температуре от куба температуры. Температура в кубе – слишком большое число, для упрощения будем делить температуру на тысячу (потом этот множитель учту). Расчеты закончены, строю график и ... ура!



Линеаризация зависимости мощности потерь от температуры

Получилось! Гораздо лучше, чем было! Несколько начальных точек (от них никто ничего хорошего не ждал) выпали, но оставшийся десяток то очень точно легли на прямую, параметры которой равны (опять по МНК):

$$a = (0,0876 \pm 0,015) \cdot 10^{-12} \frac{Bm}{K^4}, \quad b = (0,101 \pm 0,03) \cdot 10^{-3} \frac{Bm}{K}.$$

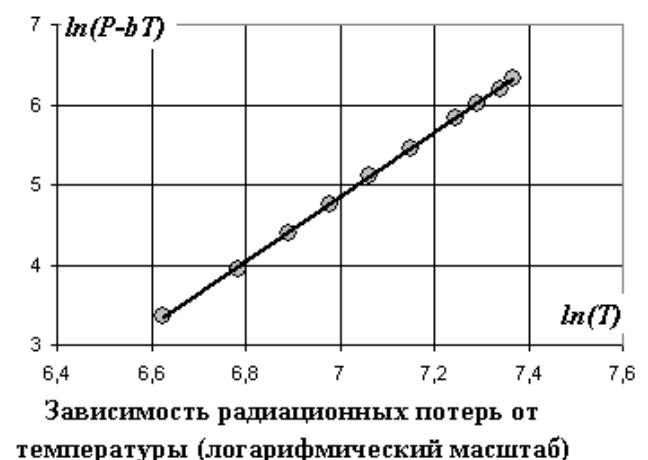
Проведу еще одну проверку. Построю зависимость мощности радиационных потерь от температуры в логарифмическом масштабе (для последних десяти точек) и определию показатель степени, в соответствии с формулами

$$P - bT = aT^4$$

$$\ln(P - bT) = \ln a + \gamma \ln T.$$

Здорово, почти идеально. А показатель степени? Считаю:

$$\gamma = 4,01 \pm 0,05.$$



Зависимость радиационных потерь от температуры (логарифмический масштаб)

⁶ Замечательная экспериментальная идея, не обоснованная, но вполне разумная. А обоснование может быть дано на основе полученных результатов. Но все-таки, предположение о разности температур лучше, хотя приводит к более громоздким расчетам.

Просто замечательно, и без подгонки! Молодцы Стефан с Больцманом – закон выполняется!

Теперь можно завершать, найти долю теплоты, уносимой радиацией. Теоретически (в рамках моих предположений) эта доля равна:

$$\eta = \frac{aT^4}{bT + aT^4} = \left(1 + \frac{b}{aT^3}\right)^{-1}.$$

Все известно (только, увы, опять считать надо!).

График: непрерывная кривая и экспериментальные точки – все рассчитывается по этой формуле!

Последний вывод: при максимальном (в данном эксперименте) накале излучение уносит около 80% теплоты, выделяющейся на нити при прохождении электрического тока.



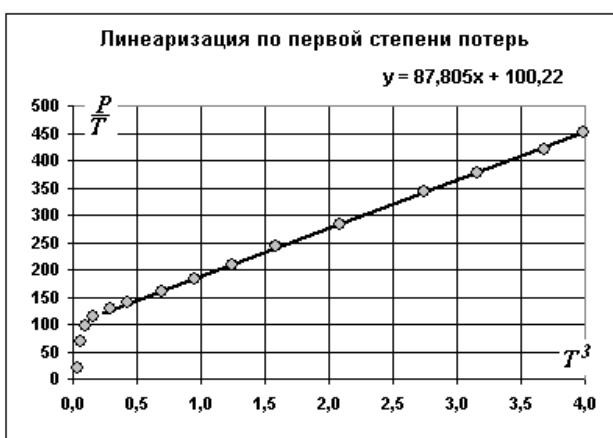
Все-таки математика – мощная наука, а метод наименьших квадратов – тонкий инструмент, позволяющий даже среди небольшого объема экспериментальных данных выявить физически важные следствия.

Домашняя работа.

В выполненной работе все получилось просто замечательно, что не может не вызывать сомнений. Самое странное, что ничем необоснованное предположение о том, что нерадиационные потери пропорциональны абсолютной температуре (просто ничего лучшего в голову не пришло!). Надо еще раз проверить в спокойной обстановке, без спешки, аккуратно, и последовательно. Прежде всего, о единицах измерения – чтобы не возиться с большими и малыми порядками буду все время измерять мощности в милливаттах, а температуру в тысячных долях градуса (и дальше никаких единиц – все «безразмерное»). Экспериментальные данные записываю в одну таблицу (и в компьютер); мне нужны температура T и суммарная мощность P , выделяющаяся на лампочке. Сомнений в определении этих величин нет. Все расчеты можно провести в этой же таблице: для линеаризации нужен куб температуры $T^3 = x$ и отношение мощности к температуре $P/T = y$.

T	P	T^3	P/T	$\ln T$	$\ln(P - bT)$	$P - aT^4$
0,333	6,56	0,0370	19,6849	-1,099	-	5,48
0,390	26,70	0,0593	68,4560	-0,942	-	24,67
0,460	45,31	0,0973	98,5280	-0,777	-	41,38
0,547	61,90	0,1637	113,1608	-0,603	1,957	54,04
0,660	84,08	0,2870	127,4708	-0,416	2,889	67,46
0,753	104,55	0,4275	138,7822	-0,283	3,369	76,27
0,884	141,05	0,6911	159,5371	-0,123	3,960	87,40
0,982	179,17	0,9469	182,4570	-0,018	4,391	97,52
1,074	223,93	1,2404	208,4156	0,072	4,756	106,91
1,167	281,94	1,5909	241,5131	0,155	5,106	118,87
1,277	361,53	2,0809	283,1780	0,244	5,454	128,26
1,400	480,79	2,7414	343,5296	0,336	5,830	143,90
1,466	551,27	3,1525	375,9599	0,383	6,002	145,39
1,544	648,10	3,6823	419,6945	0,435	6,201	148,82
1,586	717,57	3,9857	452,5805	0,461	6,326	162,70

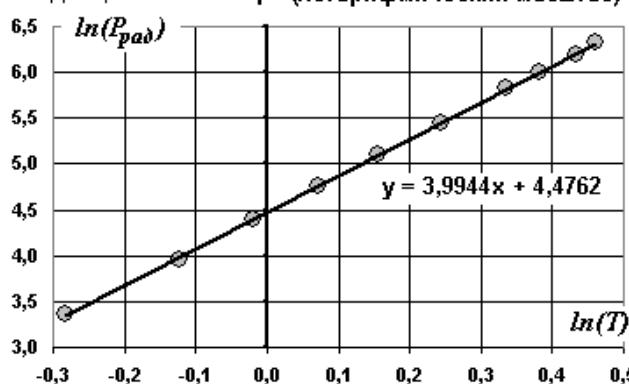
Теперь легко строим график линеаризованной зависимости: действительно десять точек ложатся на прямую. Пусть компьютер построит эту линию тренда и укажет ее параметры $y = ax + b$, просто замечательно - минутное дело!



Теперь можно вычесть нерадиационные потери, оставить только радиационные $P_{rad} = P - bT$ и построить график зависимости логарифма этой величины от логарифма температуры, и посмотреть на показатель степени, как и раньше несколько первых точек не лезут ни в какие ворота: зато остальные на прямой и коэффициент наклона – четыре (почти!). Теперь можно посмотреть и на остальные (назовем нерадиационные) потери $P_{np} = P - aT^4$ – действительно ли они

пропорциональны абсолютной температуре? График, параметры линейной зависимости – невероятно! Если отбросить начальные точки, то график прямая линия, да еще проходящая через нуль!

Радиационные потери (логарифмический масштаб)



Нерадиационные потери



Итак, никаких сомнений – все расчеты и выводы верны! Последний график подтверждает гипотезу о том, что нерадиационные потери пропорциональны абсолютной температуре.

Но как объяснить эту пропорциональность с точки зрения физических законов? Механизм радиационных потерь понятен – нагретая нить испускает свет (в том числе и в инфракрасной области), это излучение и уносит часть энергии, выделяющейся при прохождении тока. Для черных и серых тел суммарная мощность излучения пропорциональна четвертой степени абсолютной температуры – этот закон доказан экспериментально, выведен теоретически, что послужило одним из источников квантовой физики!

Какими могут быть другие механизмы передачи теплоты от нити накала к окружающей среде? Внутри лампочки находится газ (кажется, аргон), он тоже может переносить теплоту! Но скорость такого переноса должна быть пропорциональна разности температур! Может проверить и эту модель: есть радиационные потери, есть потери пропорциональные разности температур нити и окружающей среды. Провести разделение этих потоков можно аналогичным способом. Попробую! Немножко математики: записываю выражение для суммарного потока (кстати, можно учесть и обратный радиационный поток от воздуха к лампочке – мелочь, но пусть машина считает):

$$P = a(T^4 - T_0^4) + b(T - T_0).$$

Линеаризация понятна:

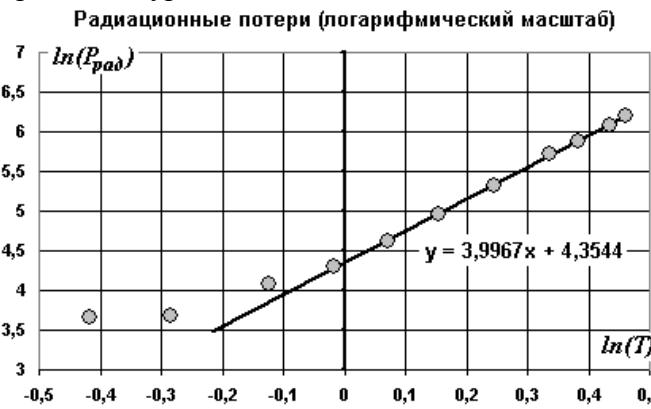
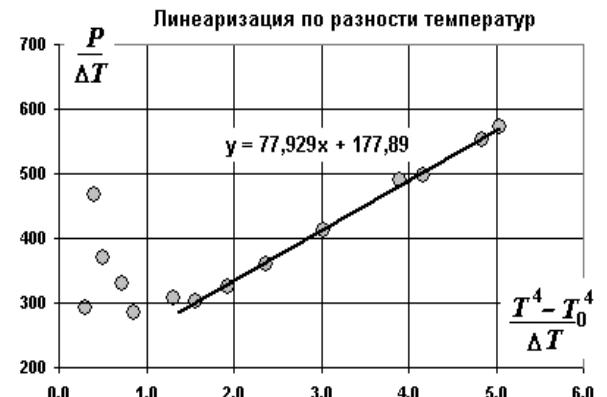
$$\frac{P}{(T-T_0)} = a \frac{T^4 - T_0^4}{T - T_0} + b,$$

да, вручную считать замаешься, но $x = \frac{T^4 - T_0^4}{T - T_0}$, $y = \frac{P}{(T - T_0)}$. Тогда $y = ax + b$.

Все остальные выкладки аналогичны предыдущим расчетам. Сначала большую таблицу с расчетами:

T	P	$(T - T_0)$	$x = \frac{T^4 - T_0^4}{T - T_0}$	$y = \frac{P}{(T - T_0)}$	$\ln T$	$\ln(P - b\Delta T)$	$P - aT^4$
0,460	45,31	0,097	0,404	467,0	-0,777	3,334	41,83
0,547	61,90	0,167	0,503	370,9	-0,603	3,472	54,92
0,660	84,08	0,254	0,724	331,1	-0,416	3,661	69,33
0,753	104,55	0,367	0,863	285,1	-0,283	3,672	79,45
0,884	141,05	0,460	1,315	306,4	-0,123	4,080	93,43
0,982	179,17	0,591	1,564	303,1	-0,018	4,304	106,71
1,074	223,93	0,689	1,926	325,0	0,072	4,619	120,07
1,167	281,94	0,781	2,369	360,8	0,155	4,962	137,21
1,277	361,53	0,874	3,032	413,5	0,244	5,328	154,49
1,400	480,79	0,984	3,895	488,8	0,336	5,723	181,79
1,466	551,27	1,107	4,172	498,2	0,383	5,870	191,03
1,544	648,10	1,173	4,842	552,4	0,435	6,085	204,97
1,586	717,57	1,251	5,046	573,5	0,461	6,205	225,10

Теперь график линеаризованной зависимости. Конечно, не прямая, но последние 8 точек вполне прилично себя повели – выстроились в шеренгу! Проводим линию тренда, определяем ее уравнение. Его параметры используем для того, чтобы построить зависимость радиационных потерь от температуры (естественно в логарифмическом масштабе); а остальных потерь от разности температур. Готово! Как и ранее, на несколько первых точек не обращаем внимание, а по остальным определяем уравнения линейных зависимостей.



Опять все сходится: радиационные потери пропорциональны четвертой степени температуры, остальные – пропорциональны разности температур нити и воздуха! Конечно, здорово, но как же эти результаты согласовать с предыдущими?

Сначала гляну на цифры: радует, что параметры уравнения для радиационных потерь очень близки: показатели степени одинаковы, свободные члены очень близки: 4,4762 в первом случае и 4,3544 – во втором. Различие меньше 3%! Хотя это же в логарифмической зависимости. А если привести к «человеческому виду»: это надо найти разность и вычислить экспоненту – получится отношение мощностей излучения в первой и второй модели: $\exp(4,4762 - 4,3544) \approx 1,13$. Уже 13%, но это не слишком принципиально. Похоже, что в первой модели больше точек подчиняются нужным законам, зато вторую модель легче обосновать физически!

Идея: кажется понял – небольшой математический фокус: когда лампочка светится, основные потери радиационные. Остальные малы, кроме того, в этой области и температура уже не маленькая. Поэтому можно подгонять эти потери как пропорциональной, так и смещенной линейной зависимостями. Но если так, то зачем мучаться? А что если остальные потери считать примерно постоянными, не зависящими от температуры? Попробую, тем более, что это минутное дело, когда компьютер под рукой! В этом случае линеаризация очевидна $y = P$, $x = T^4$. Табличку (первые ряды уже можно выбросить – все равно ни в какую зависимость не укладываются!) и график линеаризации:

T	P	T^4	$\ln(P - b)$	$P - aT^4$
0,753	104,55	0,322	2,27	72,80
0,884	141,05	0,611	3,83	80,82
0,982	179,17	0,930	4,43	87,50
1,074	223,93	1,333	4,86	92,55
1,167	281,94	1,857	5,23	98,86
1,277	361,53	2,657	5,59	99,63
1,400	480,79	3,837	5,96	102,56
1,466	551,27	4,623	6,12	95,58
1,544	648,10	5,686	6,32	87,55
1,586	717,57	6,319	6,43	94,61



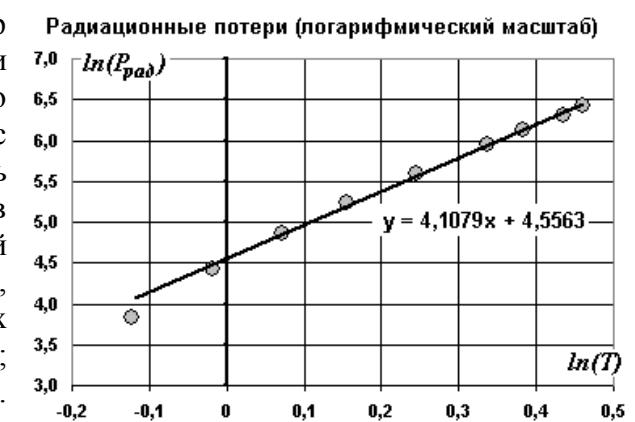
Как все знакомо – точки низких температур отклоняются, а при видимом накале нити ровненько укладываются на ожидаемую прямую, параметры которой рассчитываются с помощью двух клавиш! Какой показатель степени в радиационных потерях получается в этом приближении? Логарифмический масштаб, параметры линейной зависимости, готово! Показатель – чуть больше четырех (думаю в пределах погрешности – четыре); свободный член – близок к полученным ранее.

Значит, радиационные потери описываются практически той же функцией! А остальные?

Примерно постоянны!

С одной стороны эти результаты подтверждают (вроде?) рассуждения о малости нерадиационных потерь. А с другой – становится очень интересно!

Третья модель потерь – и во всех разумных результатах, хорошее соответствие экспериментальных данных с теоретическими рассуждениями. Это очень странно – привычнее, когда ничего не сходится, а тут все сходится?



Возникает странная и навязчивая мысль – а может и показатель степени в законе Стефана-Больцмана может быть другим? В конце концов, эту пресловутую четвертую степень я закладывал уже в методе линеаризации! А если заложить другую – например шестую! Надо попробовать обязательно. Итак, мощность излучения – пропорциональна шестой степени абсолютной температуры, а мощность остальных потерь пропорциональна первой степени (все-таки, в этом случае кривые были самыми прямыми): $P = aT^6 + bT$. Линеаризация: $y = \frac{P}{T}$, $x = T^5$. Таблицу опускаю, сразу графики:



Конечно, похуже – надо оставлять только 5 последних точек! Но показатель степени 6,16 – можно признать равным шести, при необходимости можно было бы и погрешность посчитать и закон в полтора Стефана-Больцмана обосновать!

А если совсем уж экзотическую степень придумать – например, π ! А что, мощность излучения пропорциональна абсолютной температуре в степени π – тоже красиво! А получится? Пробую:



Ничем не хуже предыдущих: есть линейные участки, показатель степени в законе для мощности излучения равен 3,16 – очень близко к числу π . Таким образом, доказано, что мощность теплового излучения пропорциональна абсолютной температуре в степени π ! А точнее – мощность теплового излучения пропорциональна абсолютной температуре в любой, нужной вам степени – необузданная демократия!

Все-таки математика в физике без физики – беспринципная служанка, а метод наименьших квадратов – грубая кувалда, позволяющая на основании экспериментальных данных обосновать любые теоретические измышления.

Нельзя полностью согласиться с окончательным выводом нашего героя! Хотя, в чем-то он прав – бездумное применение мощных математических методов ничего не обосновывает, а чаще просто запутывает, хорошо, если только членов жюри

олимпиады. В данном случае нашему школьнику-отличнику не повезло⁷ – он столкнулся еще с одной некорректной математической задачей. Фактически он разработал методику определения параметров зависимости вида

$$y = Ax^n + Bx^m.$$

Некорректность этой задачи заключается в том, что на относительно небольшом интервале изменения аргумента x , экспериментальные точки могут быть аппроксимированы функциями с различными наборами показателей степеней, причем погрешности такой аппроксимации могут быть совсем небольшими. В рассматриваемой методике изначально задавались показатели степеней, а далее методом наименьших квадратов подбирались значения коэффициентов. Громадная проделанная работа показала, неоднозначность выводов. Какие же возможны выходы из этой ситуации?

Во-первых, необходимо иметь гораздо больший объем экспериментальных данных; во-вторых, следует четко формулировать критерии оптимальности аппроксимации; в-третьих, использовать более совершенные математические методы⁸; наконец, самое главное – больше думать, тогда придется меньше считать. В заключение этого печального раздела, можно привести еще один аналогичный пример. Так, если убывающая функция является суммой двух экспонент

$$F(t) = A_1 \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) + A_2 \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right),$$

то определение двух времен затухания представляет очень сложную, а может и неразрешимую задачу, особенно если эти времена близки, а экспериментальные данные содержат значительные погрешности!

⁷ Скорее, наоборот, повезло: чужие ошибки дешевле обходятся, зато свои лучше усваиваются!

⁸ В настоящее время продолжает активно развиваться такой экзотический раздел математики, как «методы решения некорректных задач».

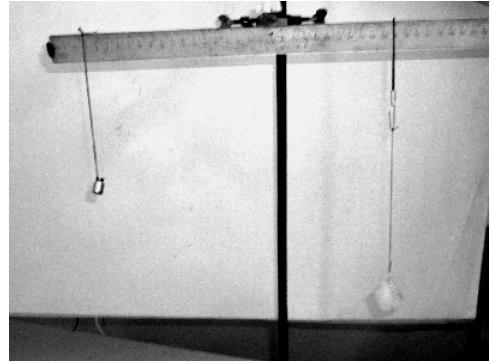


Задача 18. «Лед и воздух»

**Внимание: время проведения измерений – около одного часа!
Планируйте свою работу!**

Приборы и оборудование: штатив с лапкой; иголка или гвоздик; линейка 40 см с отверстием; секундомер; груз известной массы; нитки; 2 кусочка льда; кусочек пластилина; стакан.

Соберите экспериментальную установку, показанную на фотографии. Линейку с отверстием следует использовать как коромысло рычажных весов. В качестве оси используйте иголку или гвоздик, который закрепите горизонтально в лапке штатива. Используя кусочек пластилина, уравновесьте весы. К одному из концов линейки привяжите кусочек льда. С другого края с помощью петли, которая может передвигаться по линейке, прикрепите грузик.



Подвешенный кусочек льда будет медленно таять, при этом с него время от времени срываются капли. Капли должны попадать в стакан, а не на вашу тетрадь!

1. Наблюдая за плавлением льда, зафиксируйте (запишите!) моменты времени отрыва каждой капли. Постройте график этой зависимости, качественно объясните ее.
2. Исследуйте зависимость массы льда от времени. (*Измерять массу льда после отрыва каждой капли очень трудно – и не обязательно!*)
3. Постройте график зависимости массы льда от числа упавших капель. Определите среднюю массу капли. На основании ваших экспериментальных данных установите, можно ли считать размер капель постоянным, или он зависит от размера кусочка тающего льда.
4. Постройте зависимость времени образования капли τ от массы кусочка льда m . Предположим, что эта зависимость на отдельных временных участках имеет вид

$$\tau = Cm^\gamma,$$

где C, γ – постоянные величины.

Предложите теоретическую модель, в рамках которой укажите показатель степени γ .

Проверьте соответствие вашей модели полученным экспериментальным данным.

Примечания к условию задачи.

1. Желательно при замораживании кубиков льда в каждый из них вложить кусочек нитки, за которую потом очень удобно привязывать образовавшийся кусочек льда.
2. Масса грузика должна быть примерно равна массе кусочка льда – так маленький кусочек льда весит примерно 5-6 грамм.
3. Необходимо заранее просверлить небольшое отверстие в линейке на середине длины, но ближе к оцифрованной стороне, так, чтобы центр тяжести линейки находился чуть ниже отверстия.

Размышления и решение.

Спасибо авторам задач: во-первых, условие всего на одну страницу; во-вторых, полно подсказок, особая благодарность за то, что указано: «лед будет таять», а то сам бы не догадался; в-третьих, все знакомо – опять теплопередача, опять степенная функция!

Для расчетов понадобятся: времена отрыва капель, раз; масса кусочка льда в этот момент, два. Что еще? Конечно же, число капель (эта физическая величина измеряется точно, без погрешностей). Для измерения времени есть секундомер.

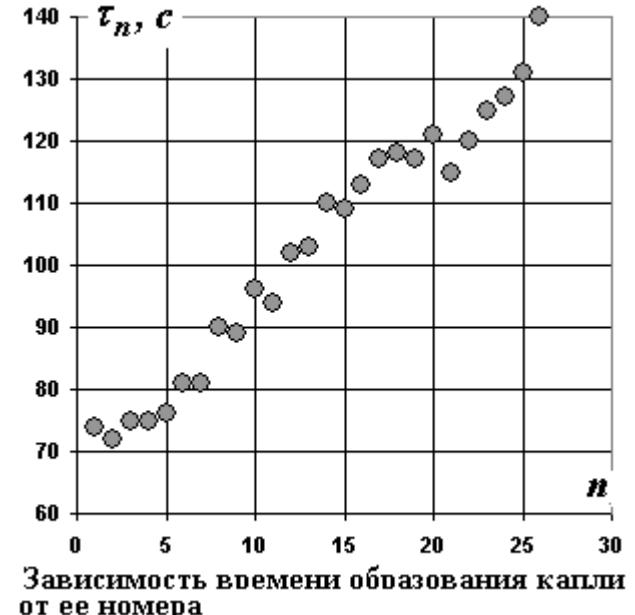
Измерение массы подвешенного груза с помощью уравновешенных весов не представляет труда: отношение масс обратно пропорционально отношению плеч. Масса грузика известна хорошо – это же пятиграммовая гирька.

Порядок расчетов почти очевиден: по измеренным данным нужно будет построить зависимость времени образования капли от массы кубика, а там посмотрим!

Теперь измерения. Результаты в таблицу: n - номер капли, t_n - время отрыва капли; $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ - время образования капли; m - масса льдинки после падения очередной капли. Рядом сразу пару графиков.

Таблица результатов измерений.

n	$t_n, \text{с}$	τ_n	m
0	0		4,61
1	74	74	4,50
2	146	72	4,36
3	221	75	
4	296	75	4,14
5	372	76	
6	453	81	
7	534	81	
8	624	90	3,92
9	713	89	
10	809	96	3,75
11	903	94	
12	1005	102	3,56
13	1108	103	
14	1218	110	3,37
15	1327	109	
16	1440	113	3,17
17	1557	117	
18	1675	118	2,92
19	1792	117	
20	1915	123	2,73
21	2026	111	
22	2148	122	2,51
23	2273	125	
24	2400	127	2,29
25	2531	131	
26	2671	140	2,06



Судя по первому графику, капли падают регулярно – красивая гладкая, но нелинейная функция. Второй график, мягко говоря, оставляет желать лучшего!

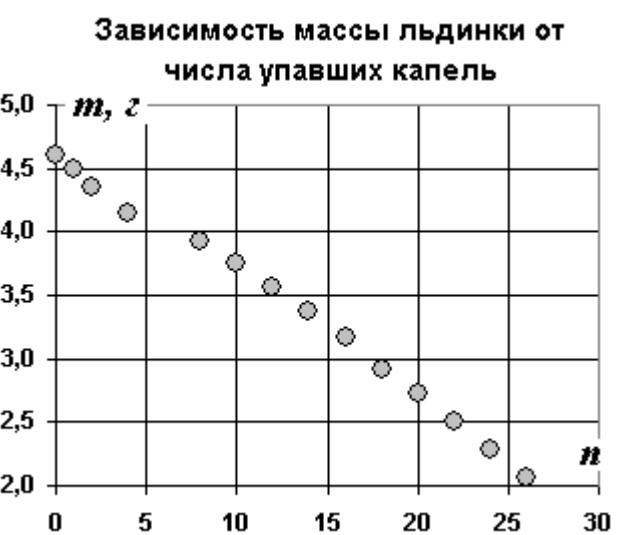
Очевидно, что зависимость времени образования капли от массы льдинки будет не лучше – попробую.

Понятно, что по этому графику можно сделать единственный обоснованный вывод – чем больше кусочек льда, тем быстрее образуется капля. С такими результатами я уже сталкивался и причина такой свистопляски уже понятна – время образования капли рассчитана как разность между измеренными значениями времен отрыва. По этому графику получить решение последнего (как я понимаю – основного) пункта задачи не удастся.

Не надо было сразу прыгать в конец задачи: пункты 2-3 вставлены не только для удлинения задачи. Теперь понятно – надо найти зависимость массы льдинки от числа упавших капель, аппроксимировать ее и дальше использовать массу льдинки, рассчитанную по этой усредненной зависимости⁹. Построю эту зависимость – масса льдинки от числа упавших капель.

Так природу не обманешь – после седьмой капли я отвлекся, при этом, наверно, ошибся в подсчете капель (вот тебе и без погрешностей). Но дальше – практически идеальная линейная зависимость. Что это означает? Все капли одинаковы! Заранее не очевидно, но правдоподобно – капля висит на своей шейке и ее размер практически не зависит от размера льдинки.

Поэтому первые семь измерений отброшу, и буду считать восьмую каплю первой. Надо перестроить график, и по методу наименьших квадратов определить параметры линейной зависимости.



⁹ Проделанная дома самостоятельная работа не прошла напрасно – стремление избежать использования разностей похвально!

Прекрасная зависимость (если бы все были такими). Параметры этой зависимости

$$m = m_0 - \mu n, \quad (1)$$

начальная масса льдинки $m_0 = (4,07 \pm 0,05)g$;

средняя масса капли $\mu = (0,104 \pm 0,004)g$.

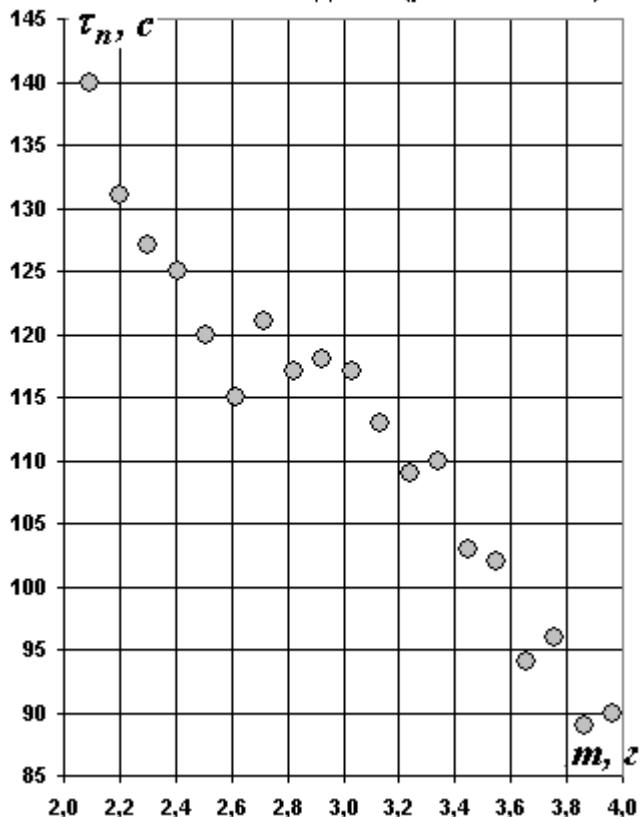
Кстати, вывод к п.3: так как зависимость массы льдинки от числа упавших капель линейна, то массы капель можно считать одинаковыми.

Теперь можно построить зависимость времени образования капли от массы льдинки, только сейчас использую рассчитанную по формуле (1) массу льдинки! Еще одно преимущество – будут использованы все измеренные времена отрыва капель. Как обычно – сначала табличку, рядом график.

Таблица 2.

n	t_n, c	τ_n	m (изм.)	m (расч.)
0	0			4,07
1	90	90	3,92	3,97
2	179	89		3,86
3	275	96	3,75	3,76
4	369	94		3,65
5	471	102	3,56	3,55
6	574	103		3,45
7	684	110	3,37	3,34
8	793	109		3,24
9	906	113	3,17	3,13
10	1023	117		3,03
11	1141	118	2,92	2,93
12	1258	117		2,82
13	1379	121	2,73	2,72
14	1494	115		2,61
15	1614	120	2,51	2,51
16	1739	125		2,41
17	1866	127	2,29	2,30
18	1997	131		2,20
19	2137	140	2,06	2,09

Зависимость времени образования капли от массы льдинки (рассчитанной)



Конечно, лучше, чем в первой попытке, но все же – не радует! Движемся дальше: если эта зависимость степенная $\tau = Cm^\gamma$, то для определения показателя степени ее нужно построить в логарифмическом масштабе

$$\ln \tau = \ln C + \gamma \ln m. \quad (2)$$

А кто теоретическую модель будет строить? Может и получится то, что надо – а что надо? Рассуждаю. Лед плавится потому, что поступает теплота от воздуха (а раньше все в воздух уходило; может здесь говорить о холодах, который уходит в воздух¹⁰). Поток теплоты пропорционален разности температур, но здесь она не изменяется! Еще от чего зависит этот поток? От площади соприкосновения, от площади поверхности льдинки. А как она зависит от массы, или проще от объема льдинки? Для кубика очень просто:

$$V = a^3, \quad S = 6a^2, \quad \Rightarrow \quad S = 6V^{2/3}.$$

Но при плавлении форма изменяется, почти до шарика. Найду связь между площадью поверхности и объемом шарика:

¹⁰ Явно – это шутка!

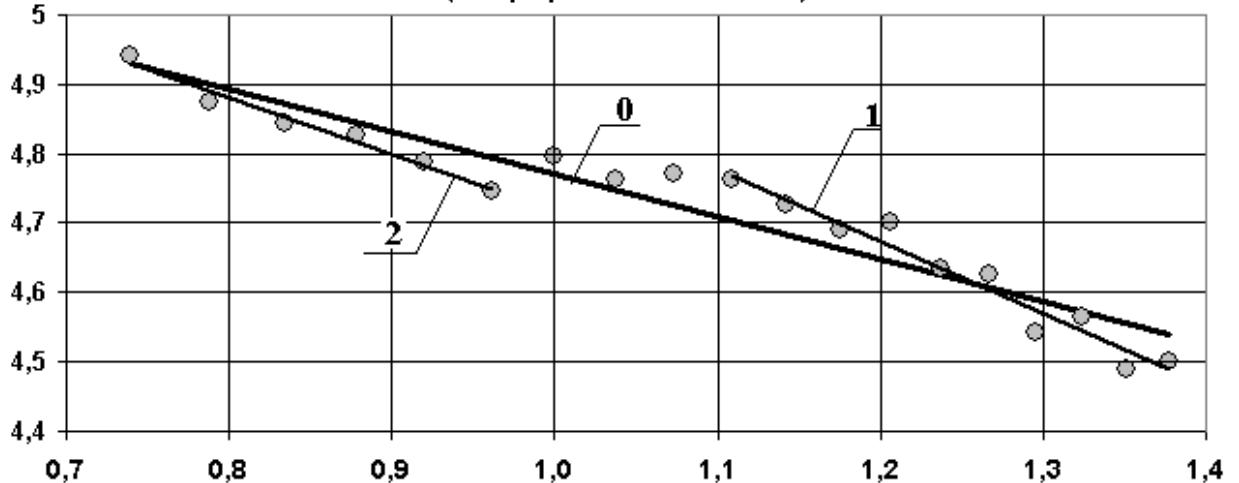
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad S = 4\pi R^2, \quad \Rightarrow \quad S = 4\pi \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 4,8V^{\frac{2}{3}}.$$

Очевидно, что для тела любой формы площадь поверхности пропорциональна объему в степени $\frac{2}{3}$, но коэффициент пропорциональности зависит от формы. Ладно, будем считать, что форма льдинки изменяется несущественно, поэтому будем считать, что площадь поверхности, следовательно, и поток теплоты от воздуха к льдинке пропорционален массе в степени $\frac{2}{3}$. Скажу, что я дальтоник – кубик от шарика не отличаю! Так как масса капелек остается постоянной, то на ее образование требуется одно и то же количество теплоты, поэтому время образования одной капли должно быть обратно пропорционально массе в степени $\frac{2}{3}$, то есть

$$\tau = Cm^{-\frac{2}{3}}.$$

Попробуем! Предыдущую зависимость перестроим в логарифмическом масштабе, и по МНК определим показатель степени.

**Зависимость времени образования капли от массы льдинки
(логарифмический масштаб)**



Не слишком прямая. Но если рассчитать коэффициент наклона (то есть показатель степени), то получим:

$$\gamma_0 = -(0,61 \pm 0,13).$$

Можно и обрадоваться – построенный диапазон накрыл ожидаемое значение -0,67, но погрешность великовата. Кроме того, график похож на ступеньку. Если провести прямую по последним точкам на графике (обозначу ее цифрой 1), то у нее наклон заметно больше и равен

$$\gamma_1 = -(1,0 \pm 0,2).$$

То есть в этой области время образования капли обратно пропорционально массе тающей льдинки! Можно еще добавить – провести прямую по первым точкам (номер 2 на графике), то у нее наклон равен

$$\gamma_2 = -(0,8 \pm 0,2).$$

Вывод? Еще ничего не ясно, но намеки обнадеживают!

Опять я упираюсь в неистребимое стремление работать с разностями! Если я избавился от разностей измеренных масс, то зачем оставлять разности времен! Надо обрабатывать зависимость массы льдинки от времени, тем более что все данные для этой зависимости уже есть в таблице 2! Эх, столько времени зря потерял!

Все это хорошо, но какая должна быть эта зависимость?

Сначала построю и посмотрю на нее. Красивая гладкая зависимость – картинка! И видно, что не линейная! Какой же функцией ее можно описать? Рассуждаю. Буду считать, что моя гипотеза о степени $\frac{2}{3}$ верна.

Тогда, чтобы найти зависимость массы от времени мне надо просуммировать времена образования нескольких капель: время образования n -ой капли $\tau_n = Cm^{-\frac{2}{3}} = C(m_0 - (n-1)\mu)^{-\frac{2}{3}}$. А как

их суммировать? Идея! Зачем суммировать? Поток теплоты пропорционален массе в степени $\frac{2}{3}$; значит, я могу записать скорость изменения массы льда:

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = -Am^{\frac{2}{3}}. \quad (3)$$

Отсюда, наверное, можно найти зависимость массы от времени (начальную массу я знаю). Но если решу это уравнение получу, что масса льдинки изменяется непрерывно, а у меня скачками? Ну и что – в эксперименте лед плавится тоже непрерывно, это капли срываются скачками, какая разница непрерывно убирать воду с льдинки, или она немножко повисит и сама сорвется – никакой! Поэтому уравнение (3) должно правильно описывать полученную экспериментальную зависимость. Осталось мелочь – решить уравнение (3). Надо угадать решение и доказать, что угадал правильно. Рассуждаю. Решение искать в виде степенной функции $m = Bt^\beta$? Не пойдет: во-первых, при $t = 0$ масса равна $m = m_0$; во-вторых, капля тает за какое-то время T – степенная функция этим условиям удовлетворить не может. А какая может? Линейная $m = m_0\left(1 - \frac{t}{T}\right)$ – красиво: при

$$\begin{aligned} \text{при } t = 0 & m = m_0 \\ \text{при } t = T & m = 0 \end{aligned},$$

только зависимость не должна быть линейной, потому что скорость плавления не постоянна. Выполнение граничных условий обеспечивает скобка, если я ее возведу в какую-нибудь степень, то эти условия все равно будут выполняться. Попробую

$$m = m_0\left(1 - \frac{t}{T}\right)^\beta. \quad (4)$$

Надо эту функцию подставить в уравнение (там же слева стоить производная – как будто я этого не знаю). Беру производную и подставляю:

$$\begin{aligned} m_0\beta\left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\beta-1}\left(-\frac{1}{T}\right) &= -A\left(m_0\left(1 - \frac{t}{T}\right)^\beta\right)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \\ \frac{m_0\beta}{T}\left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\beta-1} &= Am_0^{\frac{2}{3}}\left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\frac{2}{3}\beta} \end{aligned}$$

Теперь приравняю показатели степеней

$$\beta - 1 = \frac{2}{3}\beta \Rightarrow \beta = 3,$$

так просто, интересно!

Приравниваю коэффициенты при скобках и нахожу время плавления капли:

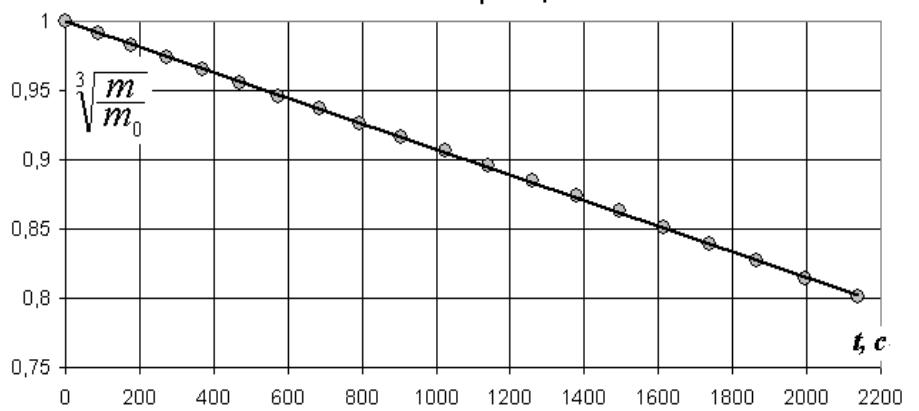
$$T = \frac{\beta}{A} \sqrt[3]{m_0},$$

то же интересно, но мне эта формула не нужна. Ура, уравнение (3) решено:

$$m = m_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)^3. \quad (5)$$

Как понять эту формулу? Корень кубический из массы линейно убывает со временем, но корень кубический из массы пропорционален радиусу шарика (или кубика). Так это сразу можно было сообразить: на малый участок поверхности попадает постоянный поток теплоты, пропорциональный ее площади, поэтому толщина расплавившегося слоя линейно убывает со временем. Которое у меня катастрофически убывает! Зачем было решать это уравнение, думать надо, а то повел себя как последний теоретик! Зато знаю, как проверить свою гипотезу: построить график зависимости корня кубического из массы от времени – если получится прямая линия, то все мои размышления верны. Все можно строить зависимость:

$$\sqrt[3]{\frac{m}{m_0}} = 1 - \frac{t}{T}.$$



Готово – это победа!

Никто не возразит, что это прямая линия!

Таким образом, экспериментально подтверждено, что поток теплоты, поступающий от воздуха к льдинке пропорционален площади ее поверхности, поэтому время образования капли пропорционально массе капли в степени $\gamma = \frac{2}{3}$.

Для скептиков, могу добавить. Обрабатывая линеаризованную зависимость по МНК, находим ее коэффициент ее наклона $\frac{1}{T} \approx 9,24 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$. Интересно, что время плавления льдинки $T \approx 1,08 \cdot 10^4 \text{ с} \approx 3 \text{ часа}$ – но, по-моему, она раньше растаяла – жаль, не посмотрел, но полчаса точно висела! Наконец, построю график зависимости массы капли от времени: теоретический, с нанесенными экспериментальными данными – любуйтесь!



Домашняя работа.

Конечно, получилось здорово. Правда возникает небольшое сомнение – в зависимость массы от времени я сразу заложил третью степень. А если там степень немного другая? Надо попробовать проанализировать результаты измерений при произвольном показателе этой степени, то есть заложить

$$m = m_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)^\beta. \quad (6)$$

Теперь надо разработать такую процедуру, что бы можно было этот показатель степени рассчитывать (или хотя бы оценивать). Линеаризация этой зависимости видна – логарифмический масштаб:

$$\ln \frac{m}{m_0} = \beta \ln \left(1 - \frac{t}{T}\right), \quad (7)$$

но построить эту линеаризованную зависимость я не могу, так как надо подгонять величину параметра T (понятно, что для наилучшей подгонки он должен зависеть от показателя β). Значит, сначала надо определять наилучшее значение этого параметра. Для этой цели замечательна такая линеаризация

$$\left(\frac{m}{m_0}\right)^{\frac{1}{\beta}} = 1 - \frac{t}{T}. \quad (8)$$

Но чтобы построить эту зависимость надо знать показатель степени β . Замкнутый круг. А как провести такую линеаризацию, чтобы по ней определить и показатель степени, и время таяния T не видно, похоже, что и невозможно.

Какой же выход? Остается последний – метод «научного тыка»: буду задавать различные степени (сам, методом подбора), затем по линеаризации (8) с помощью МНК определять значение параметра T (или $a = \frac{1}{T}$), и, наконец, смотреть насколько выбранное значение показателя степени соответствует экспериментальным данным, то есть сравнивать теоретическую зависимость (6) с экспериментальными данными. Только, пожалуй, лучше проводить сравнение по линеаризованной зависимости (7) – прямую от кривой отличить легче, чем кривую от прямой!

Теперь, все данные в Excel, в отдельной ячейке задать показатель степени, построить зависимость (8), ее график, определить параметр T , потом график зависимости (7) и посмотреть!

Начнем с простейшего случая – всякая неизвестная постоянная равна единице! Итак, $\beta = 1$, поэтому строю линейную

зависимость $\frac{m}{m_0}$ от времени t . Не

очень она и линейная, хорошо видна вогнутость функции. А зачем, я ее построил, она же и раньше была нарисована, только тогда я проводил касательную к начальному участку этой кривой. Но проверка тоже не помешает! Хотя, во время апелляции эта кривая и за прямую тоже может сойти!

Кстати о прямых – сколько можно сравнивать «на глаз», какая прямая прямее! Надо придумать что-нибудь более серьезное, какой-нибудь численный критерий сравнения. Порассуждаем: непосредственно измерялись времена отрыва капель t_n



($n = 1, 2, \dots, N$ - номер капли), следовательно, предпочтительнее сравнивать эти измеренные времена с теоретически рассчитанными \tilde{t}_n . Чем меньше они различаются, тем лучше. Но что означает «меньше различаются»? Рассматривать максимальную разницу – не очень хорошо, в этом случае одна неудачная экспериментальная точка может привести к такому отклонению, что на все остальные можно и не смотреть! Нужна общая суммарная характеристика:

- сумма всех отклонений? – плохо, так как одни отклонения положительны, а другие отрицательны, тогда и очень большие отклонения могут компенсировать друг друга;

- сумма модулей отклонений – лучше, но почему сумма модулей? Во всех формулах для расчета случайных погрешностей стоят суммы квадратов отклонений, почему здесь должно быть по-другому?

- конечно, сумма квадратов отклонений экспериментальных точек от теоретической зависимости – вот критерий сравнения:

$$S^2 = \sum_{n=1}^N (t_n - \tilde{t}_n)^2.$$

Замечательно, но для наглядности усреднить эту сумму (средний квадрат отклонения) и ... извлечь корень – среднеквадратичное отклонение, это же очень наглядная и понятная величина! Итак, критерием качества подгонки (красивое название!) может выступать среднеквадратичное отклонение¹¹

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (t_n - \tilde{t}_n)^2}{N}}. \quad (9)$$

Осталась мелочь: как рассчитать теоретические значения времен отрыва капель. Зависимость массы капли от времени давно получена: $m = m_0 - \mu n$, и даже параметры ее найдены, подставляем ее в выражение (8)

$$\left(\frac{m_0 - \mu n}{m_0} \right)^{\frac{1}{\beta}} = 1 - \frac{t}{T},$$

и записываем формулу для расчета времени отрыва

$$\tilde{t}_n = T \left(1 - \left(1 - \frac{\mu}{m_0} n \right)^{\frac{1}{\beta}} \right). \quad (10)$$

Вот теперь я вооружен по настоящему, порядок действий строго и понятен:

1) выбираю (почти наугад) значение параметра β ;

2) строю зависимость $\left(\frac{m}{m_0} \right)^{\frac{1}{\beta}}$ от времени t , смотрю, на сколько она линейна;

3) по МНК определяю параметры этой «линейной» зависимости (8), нахожу значение T ;

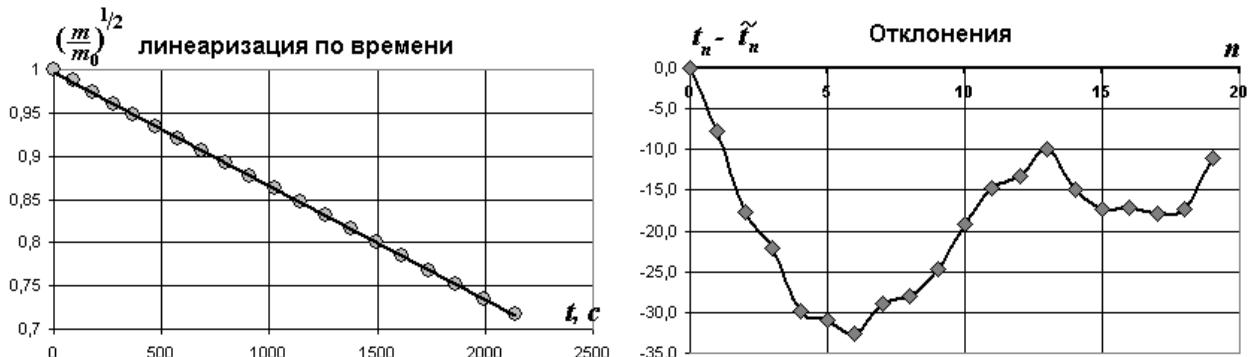
4) рассчитываю среднеквадратичное отклонение (9) экспериментальных точек от теоретических значений, рассчитанных по формуле (10);

5) выбираю такое значение показателя степени β , при котором s минимальна.

¹¹ Пройдя «простым логическим путем» наш юный экспериментатор построил замечательный критерий сравнения различных теоретических моделей. Отметим, что основной (и действительно обоснованной) идеей такого построения является сравнение величин непосредственно (прямо) измеренных с теоретическими значениями. В принципе, не слишком существенно, какую именно величину следует выбирать в качестве критерия сравнение, не намного хуже и среднее значение модулей отклонения. Однако, построенное среднеквадратичное отклонение фактически является оценкой случайной погрешности прямых измерений времен, поэтому чаще всего в серьезных экспериментах используется именно она!

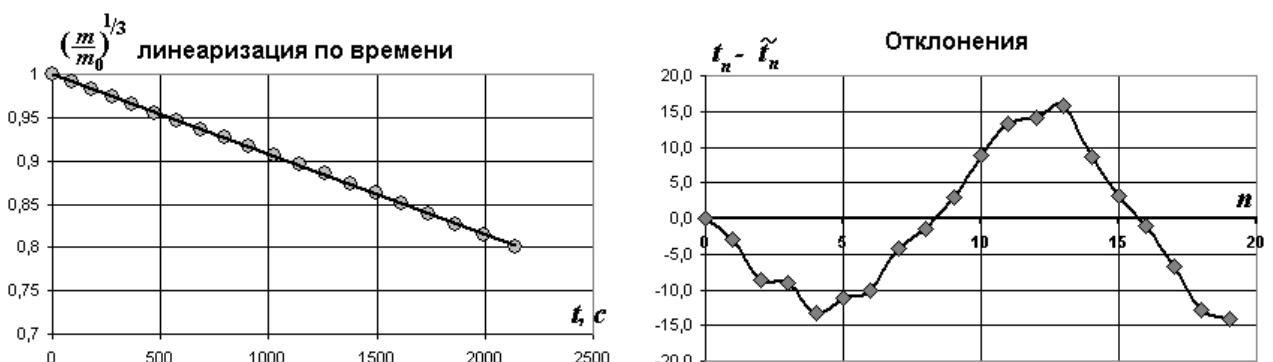
Не вредно также посмотреть на график зависимости отклонений $(t_n - \tilde{t}_n)$ от номера капли – по нему можно прикинуть, являются ли эти отклонения закономерными или случайными.

Теперь займемся подбором и его проверкой. Линейную зависимость $\beta = 1$ я уже рассмотрел и отбросил. Пойдем дальше: $\beta = 2$.



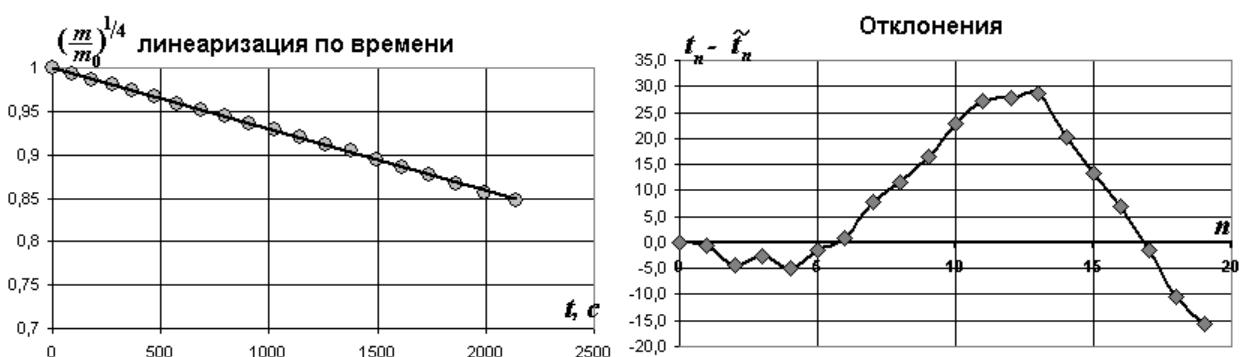
Красиво – «на глаз» линеаризованная зависимость массы от времени почти идеальна. Но на графике зависимости отклонений от номера капли видно, что все они в одну сторону. А численные параметры: время таяния $T = 7598\text{c} \approx 2\text{ часа}$, среднеквадратичное отклонение $s \approx 21\text{c}$ – не много, особенно на фоне 2000 с.

Пробуем $\beta = 3$.



«На глаз» линеаризация опять практически идеальна, зато отклонения, во-первых, меньше, во-вторых, имеют разные знаки! Численные характеристики: время таяния $T = 10800\text{c} \approx 3\text{ часа}$ (не существенно), среднеквадратичное отклонение $s \approx 9,7\text{c}$ – ну это же в два раза меньше!

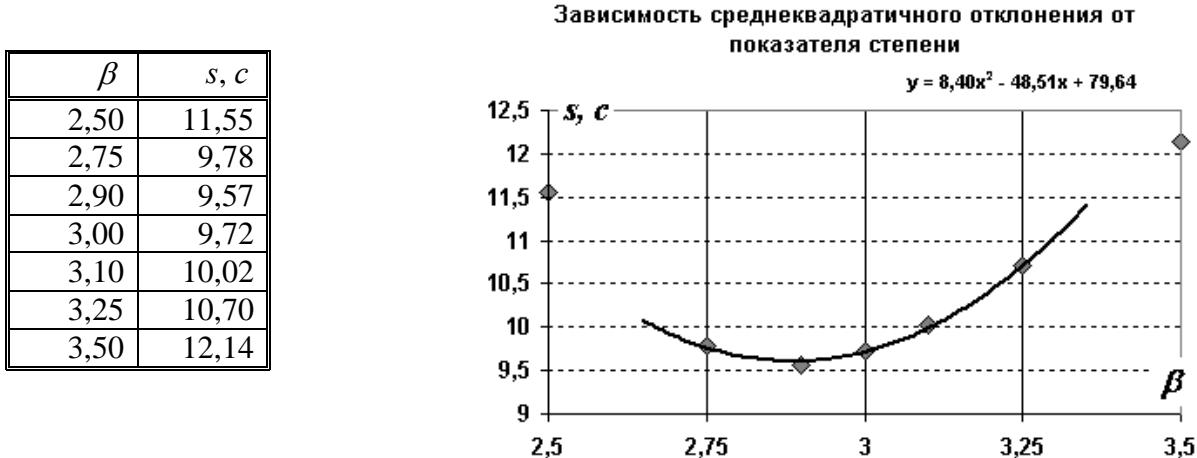
Еще одно значение $\beta = 4$:



Опять «линеаризация» почти идеальна, но отклонения ушли в другую сторону, да и среднеквадратичное отклонение возросло: $s \approx 15\text{c}$. Явно завышенное значение показателя степени!

На этом можно и остановиться – показано, показателе степени $\beta = 3$ теоретическая кривая лучше описывает экспериментальные данные, чем при $\beta = 2$ и $\beta = 4$. Однако, существуют и дробные показатели, почему бы не проверить и их? Тем более, что

компьютер позволяет провести эти расчеты практически мгновенно! Поэтому продолжим. Нет смысла приводить графические иллюстрации для показателей близких к трем, поэтому ограничимся табличкой, в которой представим значения среднеквадратичного отклонения для различных показателей, приближающихся к трем. Можно эти данные даже представить на графике.



А еще в Excel'е есть замечательная возможность построить аппроксимацию зависимости. В данном случае меня интересует положение минимума: при каком значении показателя степени среднеквадратичное отклонение минимально. Прошу построить квадратичную функцию и показать ее уравнение на диаграмме – готово. Теперь без труда определяю показатель степени, при котором рассматриваемая функция минимальна:

$$\beta^* = \frac{48,51}{2 \cdot 8,48} \approx 2,9.$$

Конечно, это не совсем три, но очень близко к нему (различие можно списать на погрешности измерения). Таким образом, теоретическая модель плавления, выражаяющаяся зависимостью массы льдинки от времени

$$m = m_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right)^3,$$

оказывается подтвержденной экспериментально. Следовательно, предположение о том, что поток теплоты из воздуха на льдинку пропорционален площади ее поверхности, подтвердилось.

P.S. И все-таки жаль, что нет возможности пользоваться компьютером во время экспериментального тура олимпиады – за отведенное время такие расчеты на калькуляторе не проведешь!

На этом мы расстаемся с нашим талантливым школьником, выполнившем (естественно, с нашей помощью) такой громадный объем работы и поднявшимся на новую ступень в умении решать сложные экспериментальные задачи!

3.9 Так, что же такое «хорошая экспериментальная задача»?

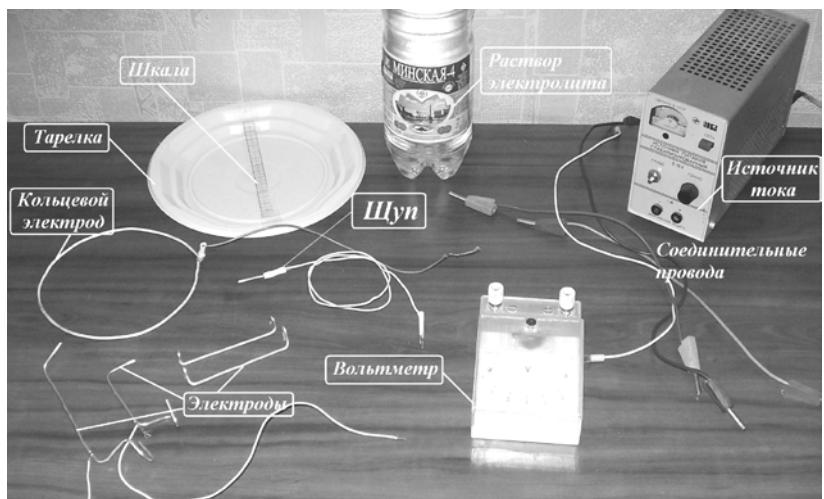
Еще в первой части данной книги были сформулированы общие требования, предъявляемые к экспериментальным заданиям олимпиад. Не все рассмотренные ранее задачи полностью удовлетворяют этим требованиям – одни слишком просты, другие требуют громоздкой математической обработки, третьи не допускают однозначного толкования полученных результатов. В заключение этой части мы подробно опишем задачу, которая, на наш взгляд, является одной из лучших, предлагавшихся на белорусских физических олимпиадах.

Задача 19. «Электрический ток в тарелке»

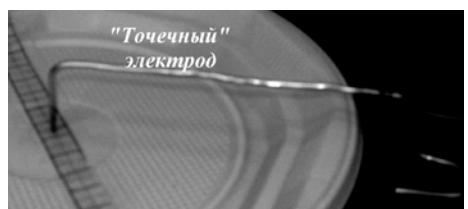


Оборудование:

источник тока напряжением 9,0 В (допустимо использовать две батарейки 4,5 В); вольтметр (мультиметр); соединительные провода; ключ электрический, алюминиевые электроды различной формы (кольцевой, два линейных, два «точечных»); алюминиевый щуп, штангенциркуль, тарелка с закрепленной шкалой, бутылка минеральной воды.



При протекании электрического тока в некоторой среде распределение токов (описываемое вектором плотности тока \vec{j}) совпадает с направлением вектора напряженности электрического поля \vec{E} , поэтому, изучая распределение токов, можно делать выводы о структуре электрического поля. В данном задании в качестве среды используется раствор электролита (минеральная вода).



В области контакта электролита с металлическим электродами образуется двойной ионный слой, обладающий заметным электрическим сопротивлением, поэтому в области этого слоя происходит заметный скачок потенциала. Величина этого скачка зависит от материала электродов, вида электролита и полярности электрода. В данной работе вам обязательно необходимо учитывать этот скачок, поэтому его следует экспериментально исследовать.

Во всех упражнениях вам предстоит исследовать пространственное распределение потенциала: зависимость потенциала от расстояния до положительного электрода.

Примем потенциал отрицательного электрода равным нулю.

Расстояния следует отсчитывать от положительного электрода.

0. Изобразите электрическую схему, позволяющую измерять зависимость электрического потенциала от расстояния до положительного электрода.

Часть 1. Параллельные электроды.

Расположите в тарелке два линейных электрода параллельно друг другу, залете их электролитом (электролит должен покрывать электроды, но не касаться места соединения алюминиевого электрода с соединительным проводом).

1.1 Исследуйте зависимость потенциала от расстояния до положительного электрода в области между электродами для двух различных расстояний между электродами. Постройте графики полученных зависимостей.

1.2 Используя полученные данные, определите скачки потенциала $\Delta\varphi_{(+)}$ и $\Delta\varphi_{(-)}$ на положительном и отрицательном электродах.

1.3 Покажите, что результаты измерений для разных расстояний между электродами согласуются друг с другом.

Часть 2. Радиальное растекание.

Расположите в тарелке кольцевой электрод, а в ее центре «точечный» электрод (он должен быть положительным).

2.1 Исследуйте зависимость потенциала от расстояния до центрального электрода. Постройте график полученной зависимости.

2.2 Покажите, что распределение потенциала при радиально симметричном распределении электрического тока может быть описано формулой.

$$\varphi(r) = A + B \ln\left(\frac{r}{r_0}\right). \quad (1)$$

где r_0 - эффективный радиус¹² центрального электрода.

Найдите значения постоянных коэффициентов A, B , используя данные, полученные в Части 1.

2.3 На основании результатов измерений проверьте справедливость формулы (1) в данном эксперименте. Определите экспериментальные значения коэффициентов.

2.4 Определите эффективный радиус электрода r_0 .

Часть 3. Два «точечных» источника.

Расположите два «точечных» электрода на линейке близко к ее краям.

3.1 Исследуйте распределение потенциала вдоль прямой, соединяющей центры электролов. Постройте график полученной зависимости.

3.2 Покажите, что в данном случае распределение потенциала может быть описано формулой

$$\varphi(r) = A + B \ln\left(\frac{l-r}{r}\right), \quad (2)$$

где r - расстояние до положительного электрода, l - расстояние между центрами электролов.

Найдите значения коэффициентов A, B в формуле (2), используя данные, полученные в Части 1 и 2.

¹² Из-за наличия области двойного слоя эффективный радиус незначительно превышает радиус самого электрода.

3.3 На основании проведенных измерений проверьте применимость формулы (2) в данном случае. Определите экспериментальные значения коэффициентов A, B в формуле (2).

Комментарии к условию задачи.

1. В качестве измерительного прибора предпочтительнее использовать электронный мультиметр. При использовании школьного вольтметра точность измерений не позволяет получить столь хорошее соответствие между экспериментальными и теоретическими результатами, хотя основной рассматриваемый эффект – появление скачка потенциала вблизи электродов, четко проявляется и в этом случае. *При использовании школьного вольтметра удобней измерять расстояние, на котором потенциал принимает определенное значение, фиксируемое вольтметром.*
2. Электроды различной формы следует изготовить из кусков алюминиевой проволоки, кольцевой электрод должен размещаться на дне тарелки вблизи его краев.
3. Шкалу на дне тарелки можно изготовить из полоски миллиметровой бумаги, прикрепив ее по диаметру тарелки с помощью скотча, который должен полностью закрывать шкалу, предохраняя ее от раствора.
4. Ток через раствор должен проходить только во время измерений, так как при длительном протекании тока из-за электролиза его электрические свойства изменяются. Также необходимо контролировать постоянство напряжения источника тока.

Обсуждение и решение.

В данной задаче исследуется протекание тока в протяженной среде, в отличии от традиционного изучения цепей со сосредоточенными параметрами. Электрические характеристики такой системы существенно зависят от формы токоподводящих электродов потому, что их форма определяет пространственное распределение токов. Именно пространственное распределение токов определяет распределение потенциала в среде, которое необходимо исследовать. Как сказано в условии, это распределение потенциала полностью совпадает с электростатическим (если электроды заменить на соответствующие постоянные заряды). Однако при протекании электрического тока через электролит вблизи электродов концентрации ионов резко изменяются, что и приводит к возникновению двойного электрического слоя с большим электрическим сопротивлением, что проявляется в возникновении заметного скачка потенциала¹³. Подчеркнем, что оба электрода одинаковы, поэтому никакой гальванической ЭДС между ними не возникает, и только при подключении источника электроды оказываются в неравных условиях – один положительный, второй отрицательный. Помимо возникновения скачков потенциала этот слой проявляется в некотором эффективном увеличении диаметра точечного электрода, этот эффект также должен быть обнаружен и учтен при обработке результатов измерений. Приступим к последовательному изложению результатов измерений и их обработки. В тексте решения комментарии выделены курсивом.

0. Принципиальная схема, предназначенная для измерения зависимости потенциала от расстояния до положительного электрода, показана на рис.1. Схема очевидна и не требует дополнительных пояснений.

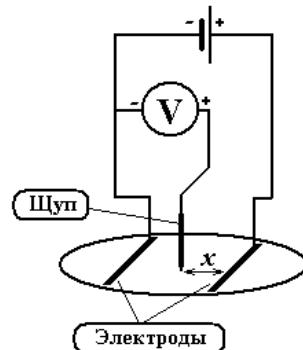


Рис. 1

¹³ Этот же эффект изучался в задаче 15 данной книги.

Часть 1. Параллельные электроды.

Результаты измерений зависимости потенциала $\varphi(x)$ от расстояния x до положительного электрода при двух различных расстояниях между электродами l представлены в Таблице 1.

Обратите внимание – измерения проведены во всем диапазоне изменения величины x , с малым шагом 0,5 см.

Таблица 1.

x , см	Распределение потенциала $\varphi(x)$	
	Расстояние между электродами $l = 9,0$ см	Расстояние между электродами $l = 7,0$ см
0,5	7,12	7,05
1	6,76	6,52
1,5	6,34	6,01
2	5,93	5,49
2,5	5,47	4,98
3	5,06	4,43
3,5	4,67	3,93
4	4,26	3,42
4,5	3,85	2,91
5	3,45	2,37
5,5	3,09	1,88
6	2,71	1,41
6,5	2,31	0,9
7	1,92	
7,5	1,55	
8	1,16	
8,5	0,75	

Графики полученных зависимостей показаны на Рис. 2.

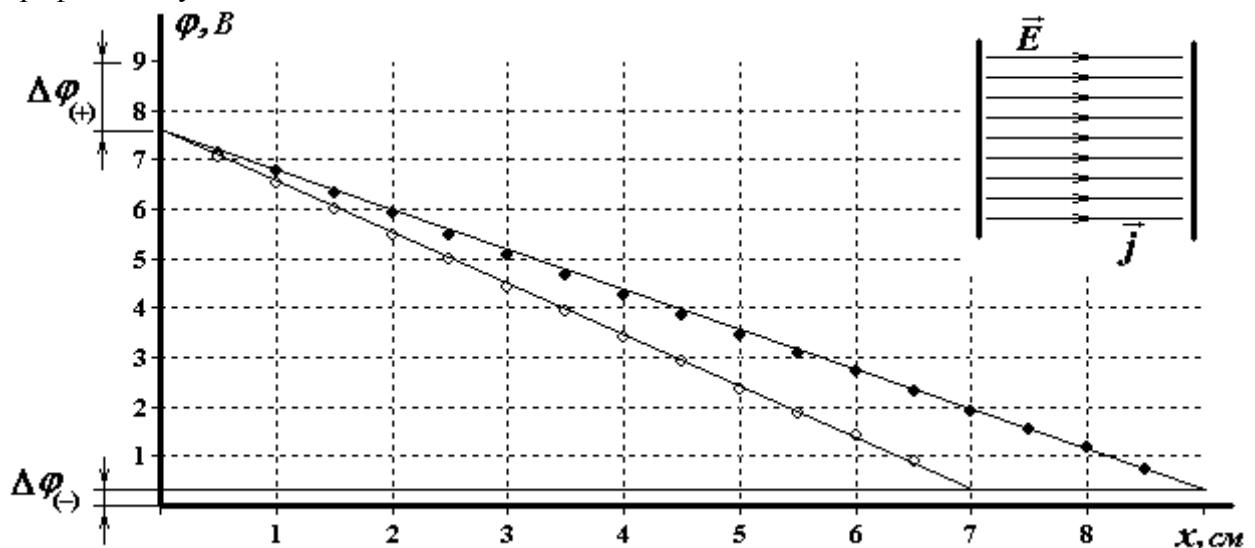


Рис. 2

Как и следовало ожидать, полученные зависимости являются линейными, так как линии тока в данном случае параллельны, что соответствует примерно постоянной напряженности электрического поля в пространстве между электродами.

1.2 Полученные зависимости являются линейными, описываемыми функциями

$$\varphi(x) = ax + b. \quad (1)$$

Коэффициенты этих зависимостей могут быть найдены различными способами, наиболее точный из которых – метод наименьших квадратов. Предельное значение $\varphi(x \rightarrow 0)$ отлично от напряжения источника U_0 , в чем проявляется наличие скачка потенциала вблизи положительного электрода. Поэтому величина этого скачка равна

$$\Delta\varphi_{(+)} = U_0 - \varphi(0) = U_0 - b. \quad (2)$$

Аналогично, предельное значение $\varphi(x \rightarrow l)$ отлично от нуля, в чем проявляется наличие скачка потенциала вблизи отрицательного электрода. Поэтому величина этого скачка равна

$$\Delta\varphi_{(-)} = \varphi(l) = al + b. \quad (3)$$

В Таблице 2 представлены расчеты по МНК параметров линейных зависимостей (1) и их погрешностей, а также величины скачков потенциалов (и их погрешности), найденные по формулам (2)-(3).

Таблица 2.

$l, \text{ см}$	$a, \frac{B}{\text{см}}$	b, B	$\Delta\varphi_{(+)}, B$	$\Delta\varphi_{(-)}, B$
9 см	$-0,80 \pm 0,02$	$7,49 \pm 0,05$	$1,51 \pm 0,06$	$0,30 \pm 0,05$
7 см	$-1,03 \pm 0,03$	$7,54 \pm 0,04$	$1,46 \pm 0,06$	$0,33 \pm 0,04$

1.3 Полученные для разных расстояний между электродами полностью согласуются друг с другом по следующим характеристикам:

- обе зависимости линейны;
- найденные значения скачков потенциала в пределах погрешности совпадают.

Часть 2. Радиальное растекание.

2.1 Радиус центрального электрода $r_0 = 1,2 \text{ мм}$, радиус кольцевого электрода $R = 6,5 \text{ см}$.

Результаты измерений зависимости потенциала от расстояния до центра центрального электрода представлены в Таблице 3 и на рис. 3.

Таблица 3.

$r, \text{ см}$	φ, B
0,5	5,43
1	3,87
1,5	3,01
2	2,41
2,5	1,99
3	1,65
3,5	1,37
4	1,14
4,5	0,92
5	0,73
5,5	0,56
6	0,41

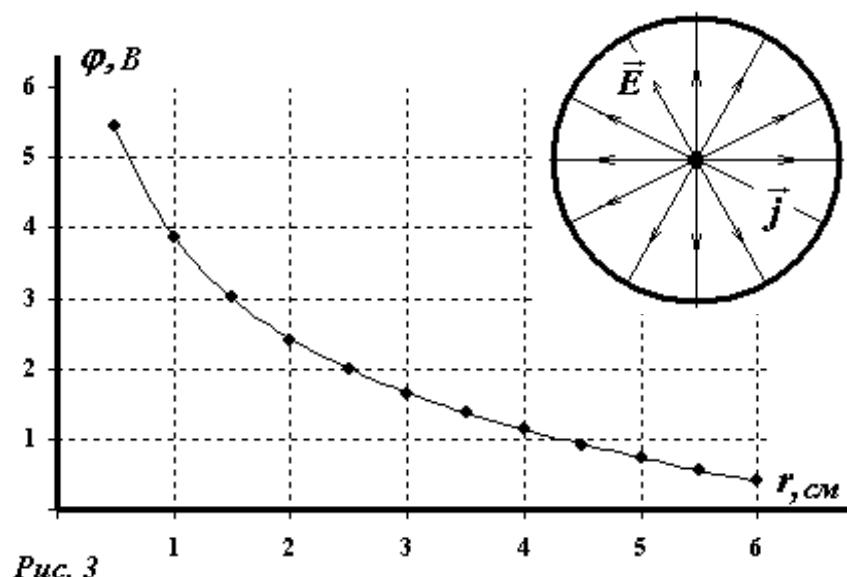


Рис. 3

2.2 Так как распределение токов является радиально симметричным, то зависимость плотности тока от расстояния до центральной точки будет обратно пропорциональной $j \propto \frac{a}{r}$. По закону Ома такой же будет зависимость напряженности поля от расстояния

$E = \frac{a}{r}$. Распределение потенциала можно найти, проинтегрировав выражение для напряженности по расстоянию

$$\Delta\varphi = - \int_{r_0}^r E dr = -a \ln \frac{r}{r_0},$$

то есть зависимость является логарифмической, приведенной в условии.

Параметры этой зависимости определяются граничными условиями:

- при $r = r_0$ (r_0 - радиус центрального электрода) потенциал равен $\varphi(r_0) = U_0 - \Delta\varphi_{(+)}$;
- при $r = R$ (R - радиус кольцевого электрода) потенциал равен $\varphi(R) = \Delta\varphi_{(-)}$.

Из этих условий следует, что исследуемая зависимость имеет вид

$$\varphi(r) = U_0 - \Delta\varphi_{(+)} - \frac{U_0 - \Delta\varphi_{(+)} - \Delta\varphi_{(-)}}{\ln \frac{R}{r_0}} \ln \frac{r}{r_0} \quad (4)$$

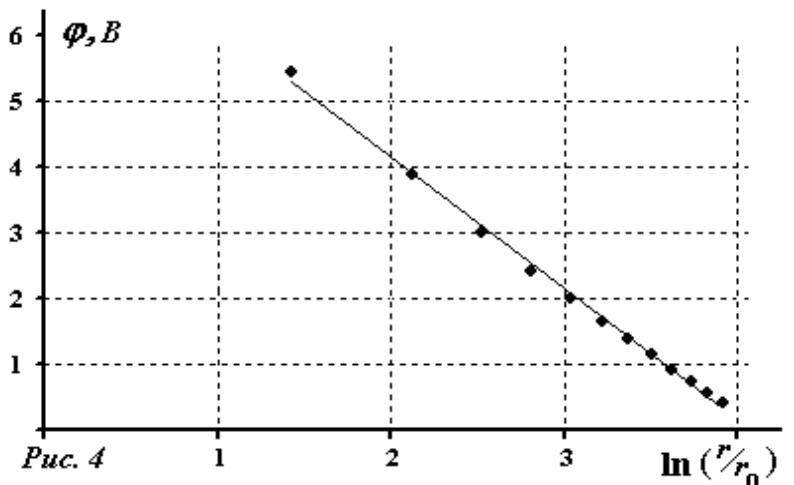
то есть параметры зависимости $\varphi(r) = A + B \ln \frac{r}{r_0}$ выражаются через характеристики системы следующим образом

$$A = U_0 - \Delta\varphi_{(+)}; \quad B = -\frac{U_0 - \Delta\varphi_{(+)} - \Delta\varphi_{(-)}}{\ln \frac{R}{r_0}}. \quad (5)$$

2.3 Построим зависимость потенциала φ от $\ln \frac{r}{r_0}$, где в качестве $r_0 = 0,12 \text{ см}$ возьмем радиус центрального электрода (то есть пренебрежем толщиной двойного слоя возле него). График этой зависимости показан на Рис. 4.

Таблица 4.

$r, \text{ см}$	$\ln(r/r_0)$	$U, \text{ В}$
0,5	1,427116	5,43
1	2,120264	3,87
1,5	2,525729	3,01
2	2,813411	2,41
2,5	3,036554	1,99
3	3,218876	1,65
3,5	3,373027	1,37
4	3,506558	1,14
4,5	3,624341	0,92
5	3,729701	0,73
5,5	3,825012	0,56
6	3,912023	0,41



Полученная зависимость оказалась линейной, что подтверждает справедливость приведенной в условии формулы (1).

Обработка данной зависимости методом наименьших квадратов приводит к следующим значениям коэффициентов

$$A = (8,1 \pm 0,2) B; \quad B = (-1,99 \pm 0,06) B$$

Найдем по этим данным скачки потенциалов на электродах:

$$\Delta\varphi_{(+)} = U_0 - \varphi(r_0) = U_0 - A = (0,9 \pm 0,2)B$$

$$\Delta\varphi_{(-)} = \varphi(R) = A + B \ln\left(\frac{R}{r_0}\right) = (0,1 \pm 0,4)B$$

Значение скачка потенциала на центральном положительном электроде достоверно отличается от полученного в Части 1. Это отличие связано с тем, что не учтена толщина эффективного слоя.

2.4 Отличие полученных значений скачков потенциала связано с пренебрежением толщиной двойного слоя. Заметим, что значительная погрешность определения скачка потенциала у отрицательного электрода не позволяет использовать это значение для дальнейших расчетов, поэтому для определения эффективного радиуса r'_0 центрального электрода следует можно использовать только значение скачка потенциала у центрального электрода. Заметим, что на значение коэффициента B точное значение эффективного радиуса оказывает несущественное влияние, так как $\ln R \gg \ln r'_0$.

Преобразуем аппроксимирующую формулу к виду

$$\varphi = A + B \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) = A + B \ln\left(\frac{r}{r'_0} \frac{r'_0}{r_0}\right) = A + B \ln\left(\frac{r}{r'_0}\right) + B \ln\left(\frac{r'_0}{r_0}\right),$$

приравняем ее к теоретической зависимости (4) (скакки потенциалов взяты из Части 1).

$$A + B \ln\left(\frac{r}{r'_0}\right) + B \ln\left(\frac{r'_0}{r_0}\right) = U_0 - \Delta\varphi_{(+)} - \frac{U_0 - \Delta\varphi_{(+)} - \Delta\varphi_{(-)}}{\ln \frac{R}{r'_0}} \ln \frac{r}{r'_0} \approx U_0 - \Delta\varphi_{(+)} - B \ln \frac{r}{r'_0}.$$

Из этого соотношения следует, что

$$\ln\left(\frac{r'_0}{r_0}\right) = \frac{U_0 - \Delta\varphi_{(+)} - A}{B} = \frac{9,0 - 1,5 - 8,1}{1,99} \approx 0,3,$$

или $r'_0 = r_0 \exp(0,3) \approx 1,65 \text{ мм.}$

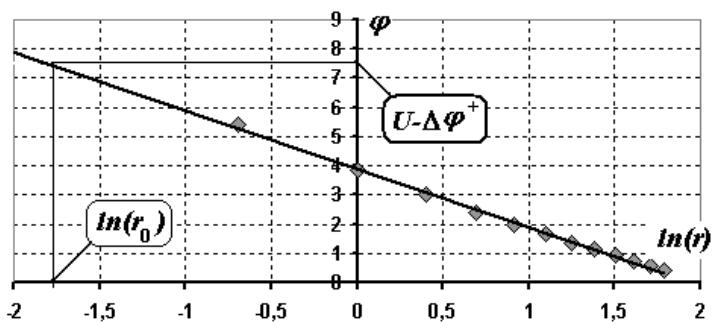
При таком значении эффективного радиуса электрода параметры экспериментальной зависимости равны

$$A = (7,5 \pm 0,2) B; \quad B = (-1,99 \pm 0,06) B.$$

Заметим, что коэффициент наклона практически не изменился. Зато измененное значение параметра приводит к значению скачка потенциала на положительном электроде равном $\Delta\varphi_{(+)} = U_0 - A \approx (1,5 \pm 0,2)B$, что согласуется с более точным значением, полученным в Части 1.

Если «не бояться» логарифмов размерных величин, то эффективный радиус электрода может быть определен графически. Для этого построим зависимость потенциала от логарифма расстояния до центра электрода (измеренного в см). Затем проводим горизонтальную прямую через значение потенциала

Графическое определение эффективного радиуса



на положительном электроде $(U_0 - \Delta\varphi_{(+)}) \approx 7,5B$, и определяем по графику, какому расстоянию r_0 соответствует это значение потенциала.

Часть 3. Два «точечных» источника.

3.1 Измерения проведены при расстоянии между электродами равным $l = 10 \text{ см}$.

Результаты измерений зависимости потенциала $\varphi(x)$ между двумя «точечными» электродами от расстояния до положительного электрода представлены в Таблице 5 и на рис. 5

Таблица 5.

$r, \text{ см}$	$\varphi, \text{ В}$
0,5	6,7
1	5,97
1,5	5,5
2	5,18
2,5	4,87
3	4,62
3,5	4,41
4	4,2
4,5	4,01
5	3,8
5,5	3,6
6	3,42
6,5	3,22
7	2,97
7,5	2,71
8	2,46
8,5	2,19
9	1,83
9,5	1,38

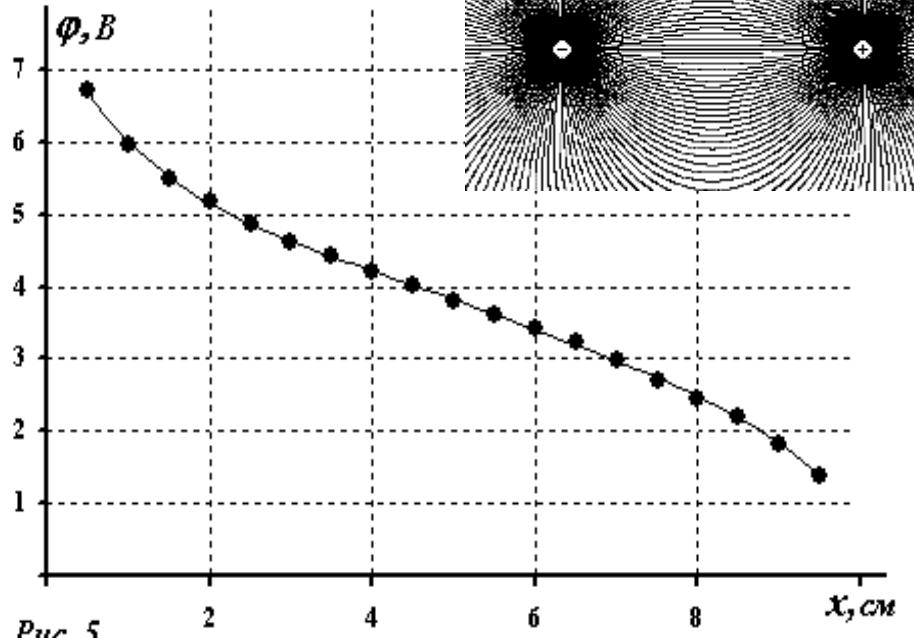


Рис. 5

3.2 В части 2 было показано, что распределение потенциала от одного точечного источника описывается логарифмической зависимостью. По принципу суперпозиции распределение потенциала при двух точечных источниках (один положительный, второй отрицательный) будет равно сумме потенциалов от каждого из этих источников, поэтому в этом случае

$$\Delta\varphi = -a \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + a \ln\left(\frac{l-r}{r_0}\right) = a \ln\left(\frac{l-r}{r}\right), \quad (6)$$

откуда и следует приведенная в условии формула (2).

Для определения параметров этой зависимости следует воспользоваться граничными условиями:

при $r = r_0$ значение потенциала $\varphi(r_0) = U_0 - \Delta\varphi_{(+)}$;

при $r = l - r_0$ значение потенциала $\varphi(l - r_0) = \Delta\varphi_{(-)}$.

Из этих условий следует, что теоретические значения коэффициентов равны

$$A = \frac{(U_0 - \Delta\varphi_{(+)}) + \Delta\varphi_{(-)}}{2}; \quad B = \frac{(U_0 - \Delta\varphi_{(+)}) - \Delta\varphi_{(-)}}{2} \cdot \frac{1}{\ln \frac{l-r_0}{r_0}}. \quad (7)$$

3.2 Для проверки представленной зависимости линеаризуем зависимость, построив график зависимости потенциала φ от величины $z = \ln \frac{l-r}{r}$ (Рис. 6).

Таблица 6.

$r, см$	z	$\varphi, В$
0,5	2,944439	6,70
1	2,197225	5,97
1,5	1,734601	5,50
2	1,386294	5,18
2,5	1,098612	4,87
3	0,847298	4,62
3,5	0,619039	4,41
4	0,405465	4,20
4,5	0,200671	4,01
5	0	3,80
5,5	-0,20067	3,60
6	-0,40547	3,42
6,5	-0,61904	3,22
7	-0,84723	2,97
7,5	-1,09861	2,71
8	-1,38629	2,46
8,5	-1,7346	2,19
9	-2,19722	1,83
9,5	-2,94444	1,38

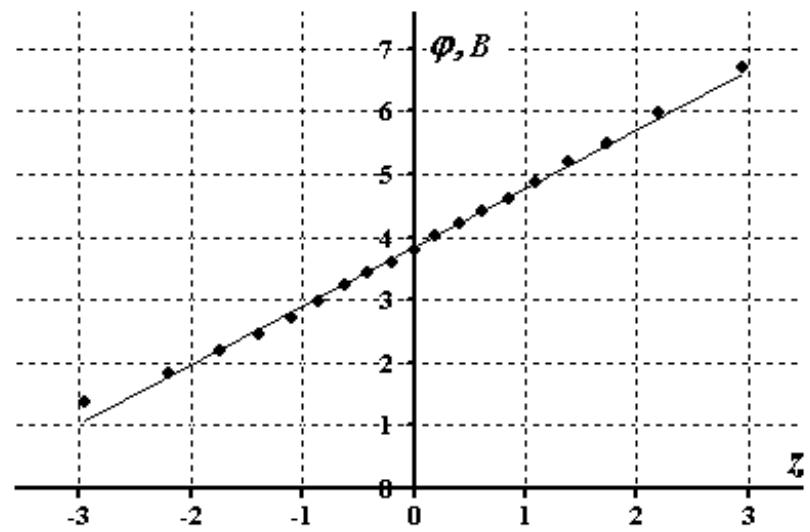


Рис. 5

Линейность полученной зависимости подтверждает применимость приведенной формулы.

Обработка по МНК приводит к следующим значениям коэффициентов зависимости
 $A = (3,82 \pm 0,02)B;$ $B = (0,95 \pm 0,02)B.$

Рассчитаем теоретические значения этих параметров по формулам (7), с использованием значений скачков потенциалов, найденных в Части 1:

$$\tilde{A} = (3,9 \pm 0,1)B; \quad \tilde{B} = 0,87 B.$$

Соответствие значений для параметра A полное, незначительное различие в значениях параметра B обусловлено низкой точностью определения эффективного радиуса электрода. Кроме того, возможно, что толщины двойных слоев различны для разных электродов.

Поэтому, в целом, соответствие следует признать удовлетворительным.

Для подтверждения правильности сделанных предположений и проведенных расчетов приведем график теоретической зависимости с параметрами, определенными по данным частей 1 (скачки потенциала) и 2 (эффективный радиус электродов), с нанесенными экспериментальными значениями части 3 (Рис. 6).

График демонстрирует лучшее, чем хорошее соответствие между этими данными.



Рис. 6

Часть 4. Далеко не полный сборник...

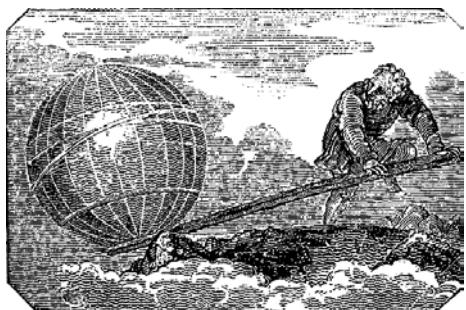


В этой части мы обращаемся к традиционному построению курса физики средней школы – задачи сгруппированы по его отдельным темам. Перечень этих тем не слишком велик, но именно они являются наиболее популярными на олимпиадах различного уровня.

Следует отметить, что отнесение задачи к тому или иному разделу в некоторой степени условно, так как при их выполнении часто необходимо использовать различные физические законы и математические методы. Основные подходы к выполнению экспериментальных работ и методам обработки результатов были достаточно подробно рассмотрены в предыдущих разделах, поэтому здесь мы имеем полное право, ограничиться более кратким изложением решения предлагаемых задач.

Наконец, чтобы предоставить читателям возможность самостоятельно подумать (или, что предпочтительнее, проделать предлагаемые работы), условия и методы решения задач¹ разделены, причем для некоторых задач приведены только краткие указания по их решению.

Условия задач.



4.1 Дайте мне точку опоры, или правило рычага.

Изучение законов равновесия, а также их использование для проведения измерений неизвестных сил очень популярно на олимпиадах различного уровня. Выполнение подобной работы, как правило, не требует сложного оборудования, измерения могут быть проведены с высокой точностью, обработка результатов не предполагает использования сложных математических методов, поэтому эти задачи можно предлагать для школьников, только начинающих изучать физику. К данной теме могут быть отнесены задачи 1 и 12 рассмотренные ранее.

¹ Те, кто даже бегло просмотрел предыдущие части данной книги, понимают, что экспериментальные задачи ответа не имеют.



Задача 20. «Задача Архимеда».

Оборудование: два карандаша, полоска миллиметровой бумаги, скрепки канцелярские 15 шт.

1. С помощью двух карандашей, полоски миллиметровой бумаги и канцелярских скрепок экспериментально докажите справедливость законов равновесия рычага.

2. Определите отношение масс карандаша и скрепки.

Комментарии к условию задачи.

1. Очевидно, что один карандаш следует использовать в качестве рычага, а второй – опоры. Медленно вращая карандаш опору на столе достаточно просто определить положение равновесия карандаша-рычага. Понятно, что вместо карандашей можно использовать другие стержни. Только необходимо, чтобы масса рычага была сравнима с общей массой скрепок.

2. Полоска миллиметровой бумаги используется в качестве линейки.

3. Самым интересным пунктом задачи является первый, так как для его выполнения требуется самостоятельно разработать методику эксперимента (по известной схеме: теоретическое описание, схема установки, проведение измерений, обработка результатов).



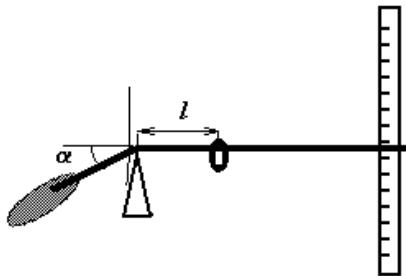
Задача 21. «Взвешивание воздуха».

Оборудование: Спица, гайка известной массы, пластилин, жестяная скоба, линейка, шарик резиновый, нитки, миллиметровая бумага, термометр, барометр комнатный.

Слегка изогнутая спица на остром твердом упоре в совокупности с вертикальной линейкой может служить в качестве чувствительных весов.

Изготовьте такие весы. Их удобно монтировать на краю крышки стола с помощью пластилина. Используйте в качестве противовеса пластилин. Добейтесь того, чтобы в свободном состоянии (без груза) плечо-стрелка располагалась горизонтально.

В качестве гири используйте небольшую гайку.



- Покажите, что “показаний” весов (отклонения от положения равновесия без нагрузки x) пропорциональны расстоянию l от точки опоры до положения груза и его массе m_0 :

$$x = Km_0l. \quad (1)$$

- Проверьте экспериментально полученную зависимость для двух значений угла изгиба спицы. Постройте графики полученных зависимостей.

- Измерьте «избыточную» массу воздуха в накачанном вами воздушном шарике. Оцените давление воздуха внутри шарика.

«Избыточной» массой названа разность между массой воздуха в шарике и массой воздуха того же объема, находящегося при атмосферном давлении.

Комментарии к условию задачи.

- При «фронтальном» выполнении данной задачи достаточно иметь один комнатный термометр и один барометр на аудиторию (они нужны только для определения атмосферного давления и комнатной температуры).
- Спица должна иметь длину порядка 30 см, так чтобы измерительное плечо имело длину не менее 20 см. Можно использовать кусок достаточно жесткой проволоки.
- Данная задача демонстрирует принцип работы рычажных весов, основной деталью которых является изогнутое коромысло. Прямой рычаг не может прийти в положение равновесия!
- При «взвешивании» воздуха необходимо быть предельно аккуратным и дожидаться установления равновесия, кроме того, даже слабые воздушные потоки приводят к большим колебаниям подвешенного шарика, поэтому желательно исключить сквозняки и хождения по классу.



4.2 Изучение закона движения.

Экспериментальное изучение закона движения интересно и самоценно, как решение основной задачи механики. Эта проблема была рассмотрена нами при анализе задачи 8. Но можно взглянуть на объявленную тему гораздо шире – рассматривать изучения закона движения как метод исследования физических законов, метод изучения необычных свойств веществ. Рассматриваемые в этом разделе задаче относятся именно к этому типу, в котором закон движения является ключом

к получению более глубоких физических закономерностей.

Основной проблемой при разработке таких задач является необходимость измерения времен, поэтому изучаемые процессы должны быть медленными, допускающими проведение измерений с помощью ручного секундомера. С другой стороны измерения и обработка их результатов должны выполняться за ограниченное время, отводимое на решение задачи, поэтому измерение скорости роста ногтей явно выпадает из возможного перечня экспериментальных заданий олимпиад.

Простейшей моделью движения является равномерное, поэтому мы начнем с задач, в которых движение является именно таким.

Если тело движется в вязкой среде, сила сопротивления которой зависит от скорости, то по прошествии некоторого времени движение тела становится равномерным. Изучение зависимости скорости тела от его параметров и характеристик среды позволяет делать определенные выводы об этих характеристиках. Эта идея эксплуатируется в следующей задаче, кроме того, она использовалась при формулировке задачи 14.

Задача 22. Вязкость жидкости.



Оборудование: Трубка стеклянная (длина - 60 см), исследуемая жидкость, весы с разновесом, нить, стакан с водой, пластилин, линейка, секундомер, штангенциркуль.

При движении тела в вязкой среде на него действует сила сопротивления, которая зависит от формы и размеров тела, свойств среды и скорости движения. Так сила сопротивления, действующая на шарик, движущийся в вязкой жидкости с небольшой скоростью, определяется формулой Стокса

$$F = 6\pi\eta r\nu,$$

где r - радиус шарика, ν - его скорость, η - вязкость жидкости (коэффициент, который определяется свойствами жидкости). Вам необходимо исследовать движение пластилиновых шариков (сделанных самостоятельно) в киселе.

- 1.** Покажите (теоретически), что падение шарика в вязкой среде после небольшого участка разгона становится равномерным. Найдите зависимость скорости этого установившегося движения от радиуса шарика.
- 2.** Проверьте экспериментально, можно ли считать падение шарика в киселе равномерным.
- 3.** Измерьте плотность вещества (пластилина), из которого изготавливаются шарики, падающие в жидкости.
- 4.** Измерьте плотность жидкости-киселя.
- 5.** Исследуйте зависимость скорости установившегося движения шарика в жидкости от его радиуса. Проверьте применимость формулы Стокса в данном случае.
Радиусы пластилиновых шариков должны изменяться от 1 мм до 5 мм.
- 5.** Определите вязкость предложенной Вами жидкости.

Плотность воды принять равной $\rho_0 = 1,00 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$.

Комментарии к условию задачи.

1. Для увеличения вязкости (следовательно, и времени падения) рекомендуется использовать крахмальный клейстер средней консистенции.
2. Вместо трубки можно использовать длинную мензурку.
3. Для повышения достоверности следует провести достаточно большое количество измерений. Поэтому для выполнения работы следует использовать не менее половины бруска пластилина.

На первый взгляд закон Ома для участка цепи противоречит второму закону Ньютона. Действительно, сила электрического тока пропорциональна средней скорости движения заряженных частиц, а напряжение пропорционально силе, действующей на эти частицы. Следовательно, закон Ома, утверждающий, что сила тока пропорциональна приложенному напряжению, фактически утверждает, что скорость движения заряженных частиц пропорциональна действующей на них силе со стороны электрического поля. И. Ньютон же установил, что силе пропорционально ускорение тела. Это кажущееся противоречие снимается, если учесть, что на носители тока также действует сила сопротивления со стороны проводника. Если среднее значение этой силы пропорционально средней скорости движения заряженных частиц, то их установившаяся скорость пропорциональна действующей электрической силе, что и соответствует закону Ома. В следующей задаче экспериментально проверяется это утверждение.

Задача 23. Движение ионов.



Оборудование: промокательная бумага, кусок полиэтиленовой пленки, раствор поваренной соли, раствор фенолфталеина, два куска проволоки для электродов, источник тока (батарейка 4,5 В), вольтметр, линейка, соединительные провода.

При прохождении электрического тока через растворы носителями тока являются ионы. Движение ионов можно сделать видимым. Как известно, гидроксильные ионы OH^- окрашивают раствор фенолфталеина в розовый цвет. Ионы OH^- образуются на отрицательном электроде при электролизе поваренной соли и движутся к положительному электроду. Если пропускать электрический ток через промокательную бумагу (или кусок ткани), пропитанную растворами поваренной соли и фенолфталеина, то вблизи отрицательного электрода появляется розовая полоска, которая медленно расширяется в сторону положительного электрода. Движение этой окрашенной границы соответствует границе распространения ионов OH^- .

Согласно классической теории средняя скорость движения ионов пропорциональна напряженности электрического поля

$$\langle v \rangle = bE, \quad (1)$$

коэффициент пропорциональности называется подвижностью ионов.

1. Исследуйте закон движения границы окрашенной полоски при протекании электрического тока через пропитанную промокательную бумагу. Определите, применима ли формула (1) в данном случае.
2. Определите подвижность гидроксильных ионов OH^- .

Движение границы является очень медленным, не затягивайте начало измерений!

Комментарии к условию задачи.

1. Вместо промокательной бумаги можно использовать кусок плотной ткани.
2. Концентрации растворов должна быть должны быть небольшими, порядка нескольких процентов. Можно сразу приготовить смешанный раствор.
3. На бумаге следует расположить параллельно два куска проволоки, желательно их прижать для лучшего контакта.
4. Вместо батарейки можно использовать и другие источники постоянного напряжения, например, ЛИП.

Еще одна сила торможения, пропорциональная скорости движения, возникает при движении проводников в магнитном поле. В движущем проводнике индуцируются токи Фуко, взаимодействие которых с породившим их магнитным полем приводит к появлению силы Ампера, которая тормозит движение проводника. Эти силы часто называют магнитной вязкостью и исследуются в следующей задаче.



Задача 24. «Магнитная вязкость»

Приборы и оборудование: штатив с лапкой, П-образный держатель, скоба для магнитов, алюминиевый «квадратный диск» на оси, набор кольцевых магнитов (2 пары), 2 груза известных масс, нить, мерная лента, секундомер.

На рисунке показана экспериментальная установка. Алюминиевая пластиинка, прикрепленная к оси, может вращаться в держателе под действием груза, прикрепленного на нити, второй конец которой намотан на ось пластиинки. В специальном держателе могут крепиться кольцевые магниты. Положение груза определяется с помощью вертикально расположенной мерной ленты. Если намотать нить на ось пластиинки, и отпустить привязанный груз, то нить начнет разматываться, раскручивая диск. Груз будет опускаться, пройдя нижнюю точку, он затем начнет подниматься. Обозначим высоту, с которой начинает опускаться груз h_0 , а высоту, на которую он поднимается после прохождения нижней точки - h_1 (высоты отсчитываются относительно нижней точки опускания груза при полностью размотанной нити).



Часть 1. Движение без магнитов.

- 1.1 Измерьте зависимости высоты подъема груза h_1 от высоты их начального подъема h_0 для двух различных грузов.
- 1.2 Постройте графики полученных зависимостей. Дайте им качественное объяснение.

Часть 2. Магнитное торможение.

Расположите в держателе пару одинаковых магнитов большего диаметра.

- 2.1 Измерьте зависимости высоты подъема груза h_1 от высоты их начального подъема h_0 для двух различных грузов.
- 2.2 Постройте графики полученных зависимостей. Дайте им качественное объяснение.

Часть 3. Индукция магнитного поля магнита.

- 3.1 Используя полученные ранее результаты, укажите в каких случаях движение груза можно считать равномерным. Подтвердите экспериментально сделанные предположения.
- 3.2 Используя имеющееся оборудование, ранее полученные данные, а, при необходимости, и дополнительные измерения определите отношение средних индуктивностей магнитных полей, создаваемых постоянными магнитами $B_1 : B_2 : B_{1+2}$, где B_1, B_2 - средние индуктивности полей, создаваемых первой и второй парой одинаковых магнитов, B_{1+2} - индуктивность поля созданного двумя парами магнитов соединенных вместе. Постарайтесь выбрать оптимальную методику решения этой задачи.

Комментарии к условию задачи.

1. Для проведения исследований по данной задаче необходимо самостоятельно изготовить оборудование. Дугу держателя можно согнуть из полосового железа. Отдельно следует вырезать полоску (можно из более тонкой жести) для закрепления магнитов. В качестве оси удобно использовать толстую иглу.
2. При выполнении последней части работы следует обязательно экспериментально проверить равномерность движения. Точнее, выбрать участок, на котором движение является равномерным, так в данном случае участок разгона хорошо заметен.

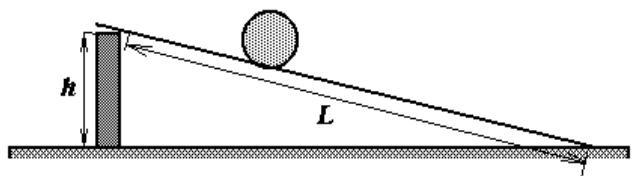
Равноускоренное движение следующая по сложности модель движения, изучаемая в средней школе, потому следующие задачи посвящены экспериментальному изучению такого движения.



Задача 25. «Задача Г. Галилея – скатывание по наклонной плоскости»

Оборудование: желоб для лабораторных работ, шарик пластмассовый, линейка с миллиметровыми делениями, секундомер, пластилин, миллиметровая бумага.

Целью данной работы является изучения качения небольшого шарика по наклонному желобу. В качестве подставки переменной высоты рекомендуем использовать кусок пластилина.



1. Исследуйте, является ли движение шарика по желобу равноускоренным.
2. Исследуйте зависимость ускорения шарика от высоты желоба h . Объясните полученную зависимость.
3. При скатывании шарика с вершины желоба, его потенциальная энергия ($W = mgh$) превращается в кинетическую энергию поступательного движения шарика ($W = \frac{mv^2}{2}$) и кинетическую энергию вращательного движения шарика. Определите экспериментально, какая доля энергии шарика превращается в энергию вращательного движения при различных высотах наклонной плоскости.

Комментарии к условию задачи.

1. В качестве желоба можно использовать деревянную доску с небольшой прорезью, обеспечивающей прямолинейность движения шарика. Хорошим желобом может служить металлический или пластиковый уголок, поставленный на ребро. В этом случае время движения увеличивается (правда, возрастает и влияние силы трения).
2. Шарик можно взять из набора для моделей кристаллов.
3. Отметим, что разделение кинетической энергии на энергию поступательного и вращательного движения является условным, зависящим от выбора метода описания плоскопараллельного движения, но используется достаточно часто.

Следующая задача похожа на предыдущую, но задания к ней отличаются.



Задача 26. «Трубка на наклонной плоскости»

Оборудование: Трибометр (деревянная доска), металлическая трубка длиной 4 см, секундомер, линейка, пластилин.

Исследуйте скатывание тонкостенной трубы по наклонной плоскости.

1. Исследуйте экспериментально, можно ли считать движение трубы равноускоренным.
2. Исследуйте зависимость времени скатывания от высоты наклонной плоскости. Постройте график полученной зависимости.
3. Используя полученные данные, определите ускорение свободного падения и оцените коэффициент трения трубы о доску.

Примечание. В данном случае речь идет о трении качения. Сила трения качения определяется по формуле:

$$F_{mp} = \frac{K}{R} N, \quad (1)$$

где N - сила нормальной реакции, R - радиус катящегося тела, K - коэффициент трения качения, который имеет размерность длины.

Комментарии к условию задачи.

1. В данной задаче нет необходимости «выковыривать» канавку в доске – цилиндр скатывается прямолинейно. Длина доски должна быть порядка 1 метра.
2. В принципе, можно исследовать и скатывание сплошного цилиндра, однако тонкостенная трубка движется с меньшим ускорением, поэтому относительная точность измерения времени выше.
3. Трубку можно выпилить из старой алюминиевой лыжной палки.

Главное достоинство следующей задачи – относительная простота проведения измерений и более высокая точность и надежность экспериментальных результатов. Это обусловлено большим временем раскручивания диска, так стандартная полиэтиленовая крышка на деревянной шашлычной палочке в качестве оси вращения опускается на полметра за несколько десятков секунд! Поэтому настоятельно рекомендуем выполнить эту задачу.



Задача 27. «Маятник Максвелла»

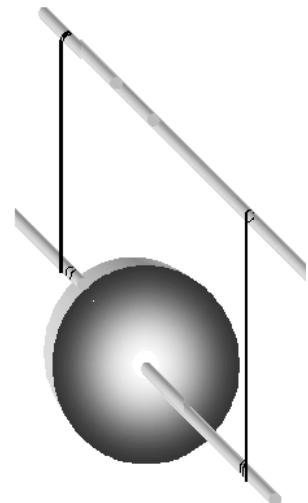
Оборудование: штатив с лапкой, секундомер, две палочки, нитки, скотч, шило, ножницы, линейка, картон, полиэтиленовая крышка, миллиметровая бумага.

Маятник Максвелла представляет собой диск, насаженный на тонкий стержень. На стержень с двух сторон наматываются нити, верхние концы которых закрепляются (удобно это сделать на другом стержне, который закрепляется в лапке штатива). Если маятник отпустить, то диск начинает раскручиваться, а его ось медленно опускается. Достигнув нижней точки, маятник начинает подниматься вверх, после чего процесс его колебаний повторяется. В качестве диска используйте полиэтиленовую крышку (задания 1, 2), а в качестве стержней палочки для шашлыков.

Диск можно также заменить на картонный квадрат, ось маятника в этом случае должна проходить через центр квадрата (задания 3, 4). Хорошо закрепляйте картон на оси с помощью скотча, старайтесь, чтобы его плоскость была перпендикулярна оси.

Для более устойчивого движения, старайтесь отцентрировать маятник, нити должны быть вертикальны, на стержнях их можно закрепить с помощью кусочка скотча.

В данном эксперименте вам необходимо исследовать движения таких маятников.



Задание 1.

Изготовьте маятник с использованием полиэтиленовой крышки в качестве диска.

1.1 Постройте график закона движения оси маятника, при его смещении на максимально возможную высоту.

1.2 Исследуйте, можно ли считать движение оси маятника равноускоренным на всем пути его движения.

1.3 Определите начальное и среднее за все время движения ускорение оси маятника.

Задание 2.

2.1 Исследуйте зависимость высоты подъема маятника h_k от числа колебаний k . Назовем коэффициентом восстановления отношение высот подъема в ходе двух последовательных колебаний $\eta = \frac{h_k}{h_{k-1}}$.

2.2 Проверьте, можно ли считать коэффициент восстановления величиной постоянной для данного маятника.

2.3 Определите среднее значение этого коэффициента.

Задание 3.

3.1 Проведите исследования, описанные в задании 1, для маятника с квадратной картонкой максимального размера.

Задание 4.

4.1 Исследуйте зависимость начального ускорения оси маятника с квадратной картонкой от длины стороны квадрата.

4.2 Попытайтесь установить вид этой зависимости. Качественно объясните полученную зависимость.

Комментарии к условию задачи.

1. Основная проблема при подготовке оборудования – тщательное центрирование диска маятника, поэтому данную работу следует проделать заранее. В качестве оси маятника можно использовать любые тонкие стержни, помимо палочек для шашлыков, можно использовать стержни для шариковых ручек, зубочистки. Металлические стержни достаточно тяжелы.

2. При изучении движения маятника с квадратной картонкой лучше заранее разметить картонку, нарисовав на ней несколько квадратов меньших размеров с общим центром. Затем закрепить картонку на оси (для этого можно использовать небольшой кусочек пластилина). В ходе работы можно отрезать небольшие полоски по краям картонки по разметке. Начальный размер картонки рекомендуется взять 15x15 см.

3. Длина нитей должна быть около 0,5 метра. Для удобства можно на равном расстоянии (через 5 см) нанести метки на одну из нитей.

В следующей задаче объединяются методы замедления движения, использованные в предыдущих задачах: во-первых, используется диск на тонкой оси, во-вторых, он скатывается по наклонной плоскости. Это делает движение настолько медленное, что с помощью ручного секундомера удается получать результаты с малой погрешностью. Поэтому приведено подробное решение данной задачи.



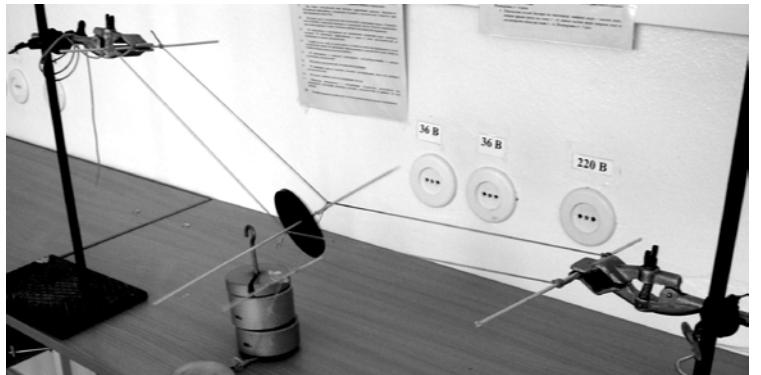
Задача 28. «Брахистохрона»

Не всегда кратчайший путь является самым быстрым – вам предстоит исследовать именно такую ситуацию!

Оборудование: пластмассовый диск на деревянном стержне, два штатива с лапками, резинка модельная, нитки, линейка 1 м, линейка 40 см, секундомер, груз 0,5 кг.

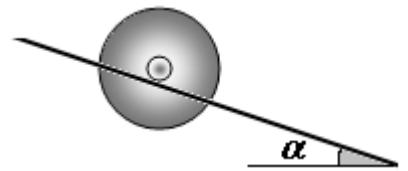
Соберите установку, показанную на рисунке. По двум параллельным натянутым резинкам, как по рельсам может катиться на стержне. С помощью подвижных лапок штатива и нитей, привязанных к серединам направляющих резинок, можно изменять профиль «дороги».

Не забывайте указывать геометрические характеристики этого пути в каждой части задачи.



Часть 1.

Экспериментально исследуйте качение диска по наклонным прямым (без прогиба) направляющим, составляющим угол α ($\operatorname{tg} \alpha = 0,2$) с горизонтом.



1.1 Измерьте зависимость времени скатывания без начальной скорости от длины пройденного пути.

1.2 Постройте график закона движения оси диска $S(t)$.

1.3 Проверьте, можно ли считать движение оси диска равноускоренным.

1.4 Определите среднее ускорение оси диска.

Часть 2.

В данной части вам необходимо изменять угол наклона направляющих, оставляя их по-прежнему прямыми. Горизонтальное расстояние между точками крепления резинок оставляйте при этом неизменным.

2.1 Измерьте зависимость времени скатывания (при фиксированном расстоянии между штативами) от разности высот точек крепления резинок.

2.2 Считая движение оси диска равноускоренным, постройте зависимость ускорения диска от синуса угла наклона направляющих. Покажите, что ускорение диска может быть описано формулой

$$a = \gamma g \sin \alpha, \quad (1)$$

где γ - безразмерный коэффициент, зависящий от радиусов диска и оси. Используя полученные экспериментальные данные, определите коэффициент γ .

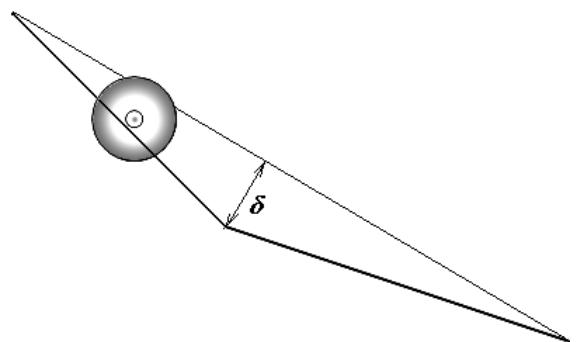
2.3 Постройте график зависимости времени скатывания от расстояния между точками крепления (пути, пройденного диском). Постройте теоретическую зависимость времени скатывания от пройденного пути, сравните ее с экспериментальной зависимостью.

$$\text{Ускорение свободно падения считайте равным } g = 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Часть 3.

Закрепите концы резинок и не изменяйте их положения в ходе дальнейших измерений. Разность высот и горизонтальных расстояний между начальной и конечной точками выберите самостоятельно.

С помощью нитей, прикрепленных к серединам резинок профиль траектории можно превратить в двухзвенную ломаную линию.



3.1 Измерьте зависимость времени скатывания

диска от стрелы прогиба резинок δ . Постройте график полученной зависимости.

3.2 Постройте график времени скатывания от длины пройденного пути от начальной до конечной точек.

Комментарии к условию задачи.

1. Проблемы изготовления маятника Максвелла рассмотрены в предыдущей задаче 27.
2. В качестве направляющих используется модельная резинка (можно купить в магазинах для рыбаков).
3. Использование резиновых жгутов в качестве направляющих имеет два преимущества: во-первых, высокий коэффициент трения, дающий возможность проводить измерения не только при малых углах; во-вторых, возможность легко изменять профиль траектории.
3. На выполнение этой задачи отводилось 5 часов.

Движение тел далеко не всегда описывается как равномерное, или равноускоренное. В следующих задачах экспериментально изучаются иные виды движения, на основании которых исследуются известные физические законы, но не изучаемые в средней школе.



Задача 29. «Эвангелиста Торричелли»

Обидно, если в дне стакана есть отверстия – но это повод для исследований.

Оборудование: пластиковый стакан 0,5 л со шкалой; банка стеклянная 0,5 л (или 1 л), часы, шило, штангенциркуль.

Проделайте в дне стакана маленькое отверстие. Заполните его водой (желательно, чтобы вытекающая из стакана вода попадала в стеклянную банку, а не на Вас), исследуйте процесс вытекания воды из стакана.

1. Постройте график зависимости высоты уровня воды в стакане от времени.
2. Постройте график зависимости скорости вытекающей воды от высоты уровня воды в стакане.
3. При определенных допущениях теоретически можно показать, что скорость v воды, вытекающей через отверстие в дне стакана, зависит от высоты уровня воды в стакане h по формуле

$$v = Ch^\gamma$$

где C - величина, не зависящая от h . Используя полученные экспериментальные данные, определите показатель степени γ .

Комментарии к условию задачи.

1. Предпочтительнее использовать пластиковый стакан, форма которого близка к цилиндрической.
2. Можно видоизменить условие задачи: вместо простой банки использовать мерный стакан (мензурку) с делениями и следовать не скорость уменьшения уровня в стакане, а скорость повышения уровня в мензурке.

Эта задача предлагалась на республиканской физической олимпиаде более 10 лет назад. Поле подробное исследование вытекания жидкости из бутылки и анализ применимости формулы Торричелли предлагается провести в следующей задаче.

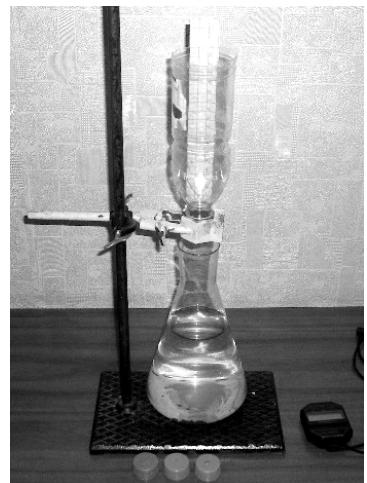


Задача 30. «Формула Торричелли»

Оборудование: бутылка пластиковая 0,5 л без дна, три пробки с дырками известных диаметров, полоска миллиметровой бумаги, скотч, секундомер, сосуд для воды (1 л), штатив с лапкой.

Для скорости вытекания воды из сосуда через небольшое отверстие Э. Торричелли установил формулу

$$V = \sqrt{2gh}, \quad (1)$$



где h - высота уровня жидкости над отверстием, $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ - ускорение свободного падения.

Вам предстоит проверить справедливость этой формулы для скорости вытекания воды из бутылки через отверстие в пробке. Соберите установку, как показано на рисунке. Прикрепите к боковой поверхности бутылки полоску миллиметровой бумаги.

Часть 1. Теоретическая.

1.1 Считая формулу Торричелли справедливой покажите, для высота уровня жидкости в вертикальном цилиндрическом сосуде при вытекании воды через отверстие в дне зависит от времени по закону

$$h = h_0(1 - bt)^2, \quad (2)$$

где h - высота уровня жидкости над уровнем отверстия, h_0 - начальная высота уровня жидкости, b - постоянный коэффициент, зависящий от размеров сосуда и отверстия.

1.2 Выразите коэффициент b в формуле (2) через параметры вашей установки и начальную высоту уровня жидкости в сосуде.

Часть 2. Закон вытекания.

2.1 Измерьте зависимость высоты уровня жидкости в сосуде от времени, при вытекании воды через отверстие минимального диаметра, постройте график полученной зависимости.

2.2 Проверьте выполнимость закона движения (2).

2.3 Определите при каком значении коэффициента b формула (2) наиболее точно описывает экспериментальные данные.

2.4 Сравните экспериментально определенное и рассчитанное значения этого коэффициента. Объясните причины возможных отклонений.

Часть 3. Другие отверстия.

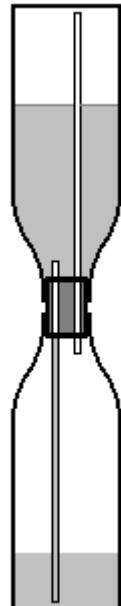
3.1 Измерьте зависимость времени полного вытекания воды из бутылки (при постоянном начальном уровне) от диаметра отверстия. Объясните полученные результаты, сравнив их с вашими расчетными значениями.



Задача 31. «Клепсидра»

Приборы и оборудование: две бутылки с пробками, две трубы для коктейлей, миллиметровая бумага, секундомер, скотч.

На фотографии показана простая установка для изучения течения жидкости по тонким трубкам: две бутылки 0,5 л соединены между собой склеенными пробками. Через пробки проходят две тонкие трубы, через которые жидкость (вода) может перетекать из верхней бутылки в нижнюю. На стенках бутылок прикреплены полоски миллиметровой бумаги, позволяющие измерять уровень жидкости в бутылке. Трубы вставлены так, чтобы жидкость могла перетекать из одной бутылки в другую, при этом бутылки можно постоянно переворачивать. Расположение трубок показано на схеме.



1. Расположите бутылки таким образом, чтобы верхняя была заполнена водой. Исследуйте зависимость уровня жидкости в нижней бутылке от времени. Постройте график полученной зависимости. Качественно объясните ее.
2. Измерьте зависимость скорости возрастания уровня жидкости в нижней бутылке от разности давлений на концах трубы. Постройте график полученной зависимости.
3. Закон Пуазейля утверждает, что объем жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы в единицу времени (расход жидкости), пропорционален разности давлений на концах трубы. Проверьте экспериментально выполнимость закона Пуазейля в данном случае. Определите коэффициент пропорциональности между расходом жидкости и разностью давлений на концах трубы.

Комментарии к условию задачи.

1. Для создания экспериментальной установки можно использовать и пластиковые полулитровые бутылки.
2. Для лучшей устойчивости эти водяные часы можно закреплять в штативе.
3. Еще одно достоинство данной задачи – простота выполнения, обусловленная тем, что время перетекания в данной установке около 10 минут!

Еще один пример экспериментального задания, которое можно выполнить и в домашних условиях: процесс протекает настолько медленно, что параллельно можно спокойно пить чай.



Задача 32. «Намокание ткани»

Приборы и оборудование: Полоска ткани, мешок полиэтиленовый, линейка, часы, крышка баночная, вода.

Внимание! *Данный эксперимент предполагает длительные измерения (порядка 1 часа), а ваше время ограничено!*

Опустите один конец сухой полоски ткани в крышку от банки, разложите аккуратно полоску на столе (не забудьте подстелить под нее полиэтиленовый пакет), налейте в крышку немного воды. Исследуйте распространение воды по полоске ткани. Постройте зависимость длины намокшей части ткани от времени.

Попытайтесь определить функциональный вид этой зависимости, оцените ее параметры. Качественно объясните полученную зависимость: обоснуйте ее теоретически.

Комментарии к условию задачи.

1. Приведенные здесь экспериментальные данные получены при использовании полоски из белой атласной ткани – граница намокшей части прослеживается очень четко.



4.3 Изучение колебаний.

Эта тема очень популярна у разработчиков экспериментальных заданий физических олимпиад различного уровня. Для их выполнения, как правило, не требуется сложного оборудования – подвесил груз на веревочке (можно просто на гвоздик), дал линейку, секундомер и ... длинное-длинное условие! Самое поразительное, что при этом удается получать достаточно точные и интересные результаты.

Помимо непосредственного исследования колебательного движения, экспериментальное изучение колебаний позволяет исследовать многие интересные физические явления - в дальнейшем мы используем этот подход для изучения силы взаимодействия магнитов, закона электромагнитной индукции, сил трения и сопротивления воздуха.

Кроме того, эти задачи позволяют разрабатывать и усваивать многие методы математической обработки результатов измерений, в чем вы могли убедиться на примерах рассмотренных задач по изучению колебаний математического маятника, колебаний подвешенного стержня, крутильных колебаний.

Вернемся к традиционной школьной лабораторной работе по изучению математического маятника (Задача 3).

Слегка модифицируем данную задачу и добавим один интересный пункт.



Задача 33. «Просто математический маятник»

Приборы и оборудование: металлический шарик на нити, секундомер, линейка.

Экспериментально исследуйте колебания тяжелого металлического шарика, подвешенного на нити.

Период малых колебаний математического маятника определяется формулой

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (1)$$

Выход этой формулы приведен в книге:

Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц Теоретическая физика. т. 1. Механика

1. Измерьте зависимость периода колебаний математического маятника от его длины.

Проверьте выполнимость формулы (1) в вашем случае. Считая, что $g = 9,81 \frac{m}{s^2}$,

определите экспериментально значение числа π .

2. Строго говоря, период колебаний математического маятника зависит от амплитуды его колебаний. Легко показать, что зависимость периода от амплитуды имеет вид

$$T = T_0(1 + \chi\varphi_0^2), \quad (2)$$

где T_0 - период малых колебаний, определяемый формулой (1); φ_0 - максимальный угол отклонения (амплитуда), измеренный в радианах; χ - постоянный коэффициент.

Проверьте экспериментально выполнимость формулы (2). Определите значение коэффициента χ .

Комментарии к условию задачи.

1. Первая часть задачи традиционная и ее выполнение никаких сложностей не вызывает.
2. Вторая часть задачи требует тщательности в проведении измерений. Период колебаний изменяется крайне незначительно, поэтому должен измеряться с высокой точностью. Не следует стремиться делать маятник слишком длинным – важен угол отклонения. Желательно использовать тяжелый груз (металлический шарик), чтобы уменьшить затухание.

Широко распространенным заблуждением является утверждение, что период колебаний любого тела подвешенного в поле тяжести земли может быть рассчитан по формуле математического маятника, если в качестве его длины l использовать расстояние от точки подвеса до центра масс маятника. Это утверждение уже опровергалось нами в задаче о колебаниях стержня (задача 5), где была получена и исследована не монотонная зависимость. Еще одним, возможно, более наглядным подтверждением обсуждаемого здесь тезиса является следующая простая экспериментальная задача.



Задача 34. «Двойной маятник»

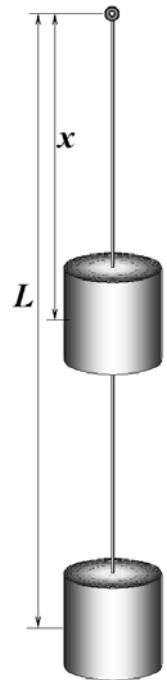
Маятник состоит из стержня с закрепленными на нем двумя одинаковыми грузами.

1. Покажите, что если считать грузы материальными точками и пренебречь массой стержня, то период колебаний такого маятника рассчитывается по формуле

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{x^2 + L^2}{g(x + L)}}, \quad (1)$$

где L - длина стержня.

2. Проверьте экспериментально эту формулу.



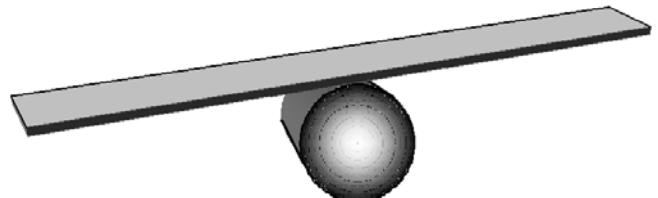
Комментарии к условию задачи.

1. Для успешного выполнения данной задачи масса стержня должна быть значительно меньше массы грузов, а его длина заметно превышать размеры грузов.

Механические колебаниям подвержены многие системы, и многие из них достойны изучения. Рассмотрим пример такой системы, колебания которой легко наблюдаются, имеют период измеримый с помощью ручного секундомера, описываются удобоваримыми формулами.



Задача 35. «Линейка на цилиндрах»



Деревянную линейку можно расположить на горизонтально лежащем цилиндре. Если слегка коснуться одного из концов линейки, то она начнет колебаться. Ваша задача – исследовать эти колебания. Не забывайте закреплять цилиндр на столе с помощью кусочка пластилина!

Приборы и оборудование:

Цилиндры металлические, картон, скотч, линейка деревянная 40 см, секундомер, штангенциркуль, ножницы, две металлических петли, кусок пластилина.

Задание 1. Измерение коэффициентов трения.

Измерьте значения коэффициентов трения (постарайтесь с максимальной точностью)

- дерева по металлической поверхности цилиндра;
- дерева по картону;
- дерева по неклейкой поверхности скотча.

В дальнейшем используйте колебания линейки по кусочку картона, закрепленному на цилиндрах.

Задание 2. Изучение зависимости периода колебаний от радиуса опоры.

2.1 Измерьте зависимость периода колебаний линейки от радиуса опоры. Постройте график полученной зависимости.

2.2 Теоретически зависимость периода колебаний $T(R)$ от радиуса опоры R приближенно выражается формулой

$$T = AR^\gamma. \quad (1)$$

где A , γ - некоторые постоянные. Определите экспериментально показатель степени γ .

Задание 3. Изучение зависимости периода колебаний от положения металлических петель.

Дальнейшие измерения проводите при неизменном радиусе опоры. Какой радиус опоры является оптимальным для таких измерений?

Насадите на концы линейки металлические проволочные петли. Петли можно передвигать по линейке. Во всех измерениях петли должны располагаться симметрично, на равных расстояниях x от концов линейки.

3.1 Измерьте зависимость периода колебаний $T(x)$ от расстояния петель до концов линейки x .

3.2 Обозначим T_0 - периода колебаний линейки без петель (при неизменном радиусе опоры). Теоретически связь между $T(x)$ и T_0 определяется формулой

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{1 + 24 \frac{m_1}{mL^2} \left(\frac{L}{2} - x\right)^2}. \quad (2)$$

где L - длина линейки, m - ее масса, m_1 - масса одной петли.

Проверьте экспериментально эту зависимость.

Определите отношение масс петли и линейки $\frac{m_1}{m}$.

Комментарии к условию задачи.

1. Следует подобрать не менее 5 цилиндров различного радиуса, можно использовать трубки, стержни, грузы из калориметрического набора, конденсаторы и т.д. При желании, можно поработать и на токарном станке. Радиусы этих цилиндров должны изменяться от 1 до 7 см.
2. Кусочек тонкого картона необходим, чтобы коэффициенты трения линейки были одинаковы для всех цилиндров. В радиус цилиндра необходимо включать и толщину картона.
3. Петли удобно сделать из куска толстой алюминиевой проволоки, обогнув ее вокруг линейки

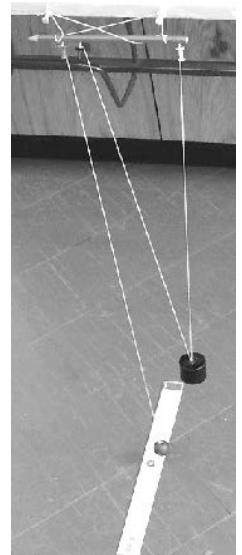
Если колебательные системы с одной степенью свободы столь разнообразны, то системы с несколькими степенями и различные эффекты в них трудно поддаются даже классификации. Поэтому предлагаем вашему вниманию всего одну задачу на заданную тему.

Задача 36. «Связанные одной нитью...»



Приборы и оборудование: стол, нитки, груз, легкие пластмассовые шарики, линейка, секундомер, карандаш, кнопки.

С помощью ниток подвесьте карандаш горизонтально на расстоянии 1 – 2 см от точек подвеса. К карандашу можно подвязывать маятники различной длины, движение этих маятников окажется взаимозависимым. Рекомендуем использовать, так называемый, бифилярный подвес, обеспечивающий колебания строго в одном направлении. Для измерения амплитуды колебаний расположите на полу, под маятниками измерительную линейку.



Часть 1. Резонанс.

В качестве груза одного маятника используйте тяжелый металлический цилиндр, а второго – легкий пластмассовый шарик. В этом случае можно считать, что движение легкого маятника не влияет на движение тяжелого – его можно рассматривать как источник переменной внешней вынуждающей силы. Длину легкого маятника l_0 оставляйте неизменной (не забудьте ее указать в вашей работе), а длину тяжелого маятника l_1 вам предстоит изменять. Для этого удобно наматывать нить карандаш. Страйтесь поддерживать угловую амплитуду колебаний тяжелого маятника постоянной (при необходимости его можно слегка подталкивать).

1.1 Измерьте зависимость амплитуды установившихся колебаний легкого маятника от длины тяжелого. Постройте график полученной зависимости и дайте ее теоретическое объяснение.

Примечания:

1. Понятно, что наиболее «интересным» является диапазон, в котором длины маятников близки. Однако попытайтесь провести исследования и в области, где частота колебаний тяжелого маятника приблизительно в два раза меньше частоты колебаний легкого.
2. В этих экспериментах также наблюдаются незначительные биения (медленное периодическое изменение амплитуды) легкого маятника, поэтому под амплитудой его колебаний будем понимать его максимальное отклонение от положения равновесия.

Часть 2. «Биения»

Привяжите к нити маятники с одинаковыми шариками. Если длины маятников отличаются незначительно, то наблюдается интересное явление – маятники попеременно начинают увеличивать и уменьшать амплитуду колебаний – это явление называется **биениями**.

Для его изучения удобно длину одного маятника l_0 оставлять неизменной, а второго - l_1 изменять.

2.1 Измерьте зависимость периода биений от длины второго маятника l_1 . Постройте график полученной зависимости.

2.2 Дайте теоретическое объяснение полученных результатов. Установите теоретический вид этой зависимости, проверьте ее применимость в рассматриваемой системе.

4.4 Силы сопротивления.

Сколько раз приходилось встречаться с фразами: «трения нет», «сопротивление воздуха не учитывать», «вязкостью жидкости пренебречь»! Эти условия постоянно оговариваются в условиях теоретических задач – иначе задачи «не решаются». При выполнении экспериментальных заданий нам также часто приходится делать определенные реверансы – «если пренебречь трением, то...», «скорость движения должна быть мала, чтобы не сказывалось сопротивление среды». Почему же эти высказывания встречаются так часто? Просто потому, что избавиться от этих сил невозможно, они присутствуют всегда! Настала пора не просто познакомиться с ними (теоретически уже все знакомы), не просто научиться их исследовать, а начать их досконально изучать. Это не простая наука, как может показаться на первый взгляд. Придуманы даже специальные термины: «трибология» - наука о сухом трении; «реология» - наука о вязкости.

Нельзя сказать, что данная тема блещет оригинальностью. Вспомните традиционные экспериментальные задачи.

Измерить коэффициент трения бруска о наклонную плоскость. Поднимаем доску (или трибометр, для солидности), измеряем угол наклона, при котором начинается скольжение, с трудом рассчитываем тангенс этого угла, который, как говорят, и есть коэффициент трения. Но это коэффициент трения покоя! Нужен коэффициент трения скольжения? Тянем равномерно (а как это сделать?) брусков по доске (или трибометру) и измеряем силу трения! Не в нашем стиле подробно разбирать эти лабораторные работы, мы займемся серьезными, действительно олимпиадными экспериментальными исследованиями!

Сила сухого трения описывается законом Кулона-Амонтона: модуль силы трения скольжения пропорционален модулю силы нормальной реакции

$$F_{mp} = \mu N,$$

только не надо ставить в этой формуле векторы, как это иногда встречается в пособиях для поступающих. Однако этот закон является приближенным, иногда легче указать условия, когда он выполняется, чем перечислить исключения из него. Поэтому исследование этой силы и проверка применимости этого закона остается непреходящей темой экспериментальных заданий. В следующей задаче предлагается исследовать силу, действующую на нить, намотанную на цилиндр. Особенностью данной задачи является тот факт, что сила нормальной реакции явно не видна, да еще и не является постоянной.

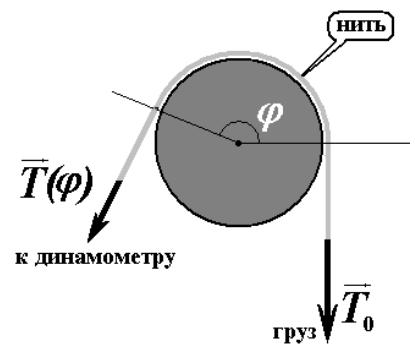
Задача 37. «Где нормальная реакция?»



Приборы и оборудование:

металлический стержень, нить, три груза массами 100 г, динамометр, штатив.

При скольжении нити, намотанной на стержень, на нее действует сила трения. Действие этой силы проявляется в том, что силы натяжения нити с разных сторон от стержня оказываются различными. В данной задаче вам необходимо исследовать изменение силы натяжения нити при ее скольжении по боковой поверхности цилиндра.



Закрепите стержень горизонтально в штативе. Нить с прикрепленным к ней грузом перебросьте через стержень. Ко второму концу нити прикрепите динамометр. С помощью динамометра вы можете измерять силу натяжения нити. Все измерения проводите при медленном поднятии и опускании груза, при его равномерном движении.

При скольжении нити сила ее натяжения зависит от угла намотки согласно формуле Л.Эйлера

$$T = T_0 \exp(-\mu\varphi). \quad (1)$$

1. Дайте качественное объяснение формулы Л. Эйлера.
2. Измерьте зависимости натяжения нити от угла намотки при подъеме груза. Измерения проведите для трех различных значений масс грузов. Постройте графики полученных зависимостей.
Измерения удобно проводить для углов намотки $\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, \dots$
3. Проверьте выполнимость формулы Л.Эйлера в данном случае. Определите значения коэффициента трения для каждой массы груза. Зависит ли коэффициент трения от силы нормальной реакции нити?
4. Измерьте зависимость силы натяжения нити от угла намотки при медленном опускании груза. Измерения проведите для одной массы груза. Выбор этой массы обоснуйте. Постройте график полученной зависимости. Сравните полученные данные с результатами измерений в п.1.

Комментарии к условию задачи.

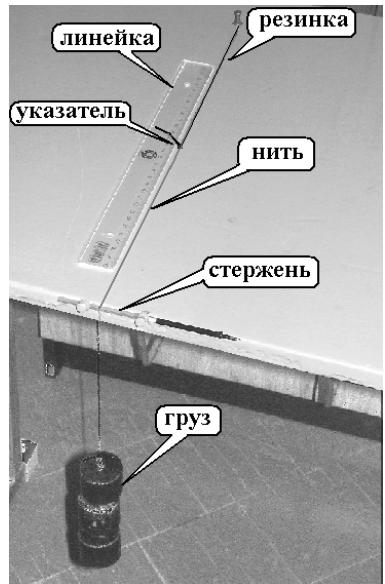
1. Для проведения эксперимента следует брать гладкую шелковую, или синтетическую нить и гладкий стержень, чтобы уменьшить коэффициент трения. В этом случае удается провести измерения при большем числе значений угла намотки.
2. Работа оказывается легко выполнимой для тех, кто знаком с логарифмической и обратной к ней показательной функцией.



Задача 38. «Явление застоя»

Приборы и оборудование: резиновый жгут, набор 6 грузов по 100 г, нитки, пластиковый стержень, кнопки канцелярские, линейка 40 см, горизонтальная поверхность стола.

Соберите установку, показанную на рисунке: закрепите на ребре стола круглый пластиковый стержень, закрепите на столе один конец резинового жгута, к его второму концу привяжите нить, перебросьте ее через пластиковый стержень, на свисающем конце нити сделайте петлю, к которой можно подвешивать грузы.

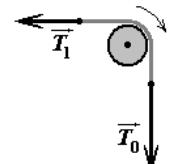


Теоретическая подсказка:

При скольжении нити по неподвижному стержню из-за наличия трения модули сил натяжения нити по разные стороны от стержня связаны соотношением

$$T_1 = \beta T_0, \quad (1)$$

Где β - постоянный коэффициент (очевидно, что $\beta < 1$), зависящий от коэффициента трения нити о стержень. Так как нить можно считать нерастяжимой, то положение груза полностью определяется деформацией резинового жгута x .



Часть 1. «Статика»

1.1 Определите экспериментально, при каких значениях деформации резинового жгута груз может находиться в состоянии покоя для различных масс подвешенных грузов.

1.2 Постройте графики зависимостей максимальной x_{\max} и минимальной x_{\min} деформации резинового жгута, при которых система может находиться в состоянии покоя, от массы подвешенного груза.

1.3 Укажите, при каких значениях деформации резинового жгута применим закон Гука

$$F_{\text{упр.}} = -kx. \quad (2)$$

1.4 Используя полученные данные, определите значения коэффициента β в формуле (1) и значения коэффициента упругости резины k (в области применимости закона Гука).

Часть 2. «Динамика»

Если груз вывести из зоны застоя (обозначим начальную координату x_0), то он начнет двигаться до остановки в некоторой точке с координатой x_1 .

2.1 Исследуйте экспериментально зависимости координаты точки остановки груза x_1 от его начальной координаты x_0 для грузов массы $m_1 = 200\text{г}$ и $m_2 = 300\text{г}$.

2.2 Постройте графики полученных зависимостей.

2.3 Объясните полученные зависимости, кратко описав характер движения груза.

2.4 Используя полученные данные, найдите определите значения коэффициента β в формуле (1) и значения коэффициента упругости резины k (в области применимости закона Гука). Объясните причины возможных различий со значениями, полученными в п. 1.4.

Комментарии к условию задачи.

1. В качестве исследуемого резинового жгута удобно использовать резиновую петлю с официальным названием «резинка банковская для денег», которая используется без денег. Продается в киосках, в одной коробке 500 штук (стоит копейки) – хватит и на проведение экспериментов и на упаковку денег.

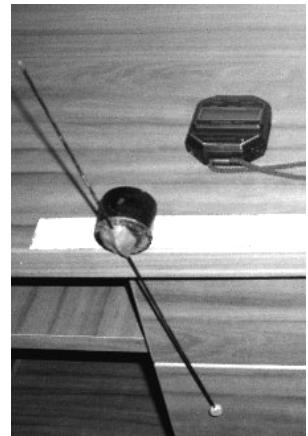
Трение качение не всегда входит в программу курса физики средней школы. Но это не значит, что в школе отсутствует эта сила. Кроме того, эта область науки не является секретной, поэтому рассмотрим задачу, в которой изучение силы трения осуществляется посредством изучения колебаний.

Задача 39. «Трение качения»



Оборудование: цилиндр металлический, линейка деревянная, секундомер, пластилин, спица вязальная.

С помощью пластилина прикрепите к боковой грани цилиндра деревянную палочку. Расположите цилиндр с закрепленной палочкой на линейке расположенной на краю стола. При этом цилиндр должен двигаться, вращаясь по линейке.



Часть 1. Период колебаний.

Если центр тяжести палочки расположен ниже точки крепления, то цилиндр совершает колебательное движение. В данной части работы колебания должны быть малыми.

1.1 Измерьте зависимость периода колебаний цилиндра от расстояния от оси цилиндра до центра масс палочки. Постройте график полученной зависимости.

1.2 Покажите (теоретически), что данная зависимость имеет степенной вид

$$T = Cz^\alpha. \quad (1)$$

1.3 Проверьте выполнимость данной формулы на основании ваших экспериментальных данных. Определите показатель степени α .

Часть 2. Затухание колебаний.

Колебания цилиндра являются затухающими из-за наличия трения качения. Сила трения качения описывается формулой

$$F = \frac{k}{R} N, \quad (2)$$

где N - сила нормальной реакции, R - радиус цилиндра, k - коэффициент трения качения, имеющий размерность длины. При изучении затухания рекомендуется исследовать колебания с большой амплитудой.

2.1 Измерьте зависимости отклонения от положения равновесия оси цилиндра (в точках остановки) от числа совершенных колебаний при двух положениях палочки.

2.2 Постройте графики зависимости энергии цилиндра (*подсказка – в точках остановки*) от пройденного пути. Рассчитайте по этим данным коэффициент трения качения цилиндра.

Комментарии к условию задачи.

1. В данной задаче вязальную можно заменить на любой тонкий стержень (кусок жесткой проволоки, деревянную палочку и т.д.).
2. Основная сложность в выполнении данной задачи – тщательная установка линейки. Она должна быть расположена горизонтально, цилиндр должен кататься по ней устойчиво и с небольшим затуханием.

В следующей задаче экспериментальное изучение затухания колебаний используется для исследования зависимости силы сопротивления от скорости движущегося тела.



Задача 40. «Потери энергии»

Оборудование: штатив с кольцевым держателем, шарик пластмассовый (шарик металлический), нитки, линейка, бумага миллиметровая, спички.

При движении тела в воздухе на него действует сила сопротивления воздуха, которая зависит от скорости движения тела. Вам необходимо исследовать силу сопротивления воздуха, действующую на маятник, представляющий собой шарик, подвешенный на длинной нити. При отклонении на угол меньший 30° колебания маятника можно считать малыми. Для измерения углов отклонения нити удобно использовать полоску миллиметровой бумаги, прикрепленную к торцу стола.

1. Если сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости ($F = -\beta_1 v$), то амплитуда колебаний маятника A_k после k полных колебаний убывает в геометрической прогрессии

$$A_k = A_0 \lambda^k, \quad (1)$$

где A_0 - начальное отклонение маятника.

Если же сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости ($F = -\beta_2 v^2$), то отклонение от положения равновесия A_k после k полных колебаний убывает по гиперболическому закону

$$\frac{1}{A_k} = \frac{1}{A_0} + \lambda k. \quad (2)$$

Определите экспериментально, какой закон (1) или (2) точнее описывает затухание маятника. Определите параметр λ для маятника длиной $l \approx 1 \div 2 \text{ м}$.

Комментарии к условию задачи.

1. Как и многие рассмотренные ранее задачи допускают неоднозначное решение: в зависимости от длины нити, массы шарика результат может быть различным – в одних случаях ближе к формуле (1), в других к формуле (2). Поэтому данную задачу можно использовать как тему для экспериментальных исследований.
2. Для повышения точности измерений можно измерять углы отклонения маятника по тени, отбрасываемой нитью.

В заключения данного раздела своеобразный гибрид, трибологическая задача, в которой необходимо учесть как силу сухого трения, так и силу сопротивления воздуха.

Задача 41. «Скольжение диска»



Приборы и оборудование: штатив с лапкой или кольцом, нитки, миллиметровая бумага, линейка с миллиметровыми делениями, скотч, компакт-диск (CD) с гладкой поверхностью, груз цилиндрический массой $M = 100\text{г}$ из стандартного набора.

В данной задаче Вам предстоит исследовать силу сопротивления, действующую на компакт-диск при его движении по миллиметровой бумаге.

При движении со скоростью v между CD массой m и бумагой действует как сила трения скольжения $F_{\text{скольж}} = \mu mg$, так и сила вязкого трения в воздушной прослойке между диском и бумагой $F_{\text{вязк}} = \beta v$. Если диску сообщить начальную скорость v_0 , то путь, пройденный до остановки, описывается формулой

$$s = \frac{mv_0}{\beta} \left[1 - \frac{\mu mg}{\beta v_0} \ln \left(1 + \frac{\beta v_0}{\mu mg} \right) \right], \quad (1)$$

которая упрощается при $\frac{\beta v_0}{\mu mg} < 0,75$:

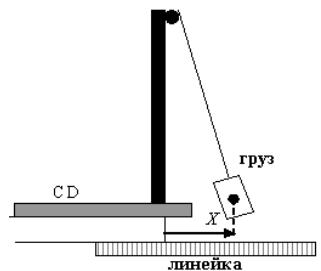
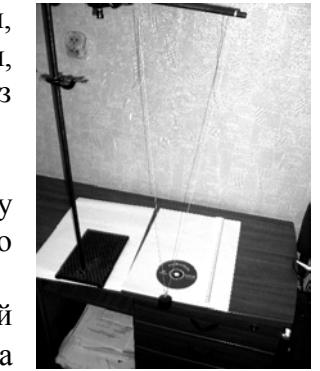
$$s = \frac{v_0^2}{2\mu g} - \frac{1}{3} \frac{\beta v_0^3}{m \mu^2 g^2}. \quad (2)$$

- Используя доступное оборудование, определите массу компакт-диска m .
- Тело массой M , движущееся со скоростью V врезается в неподвижное тело массой m . Удар центральный и абсолютно упругий. Покажите, что скорость, с которой начнет двигаться тело m , пропорциональна V : $v_0 = \alpha V$. Определите коэффициент пропорциональности α для груза, врезающегося в компакт-диск.

3. Закрепите груз на нити максимально возможной длины, прикрепленной к лапке, так, чтобы положение равновесия груза находилось прямо у края стола. Прикрепите лист миллиметровой бумаги к столу. Закрепите деревянную линейку с нижней стороны парты при помощи скотча. Положите компакт-диск на стол и сместите его на 10мм от края. Отклоняя груз на разные расстояния из положения равновесия по линейке, заставляйте его врезаться в компакт-диск, сообщая тем самым диску начальную скорость. Следите за тем, чтобы удар был центральным.

Измерьте зависимость пути s , проходимого диском по бумаге, от начального отклонения груза X . Постройте график этой зависимости. Измерения начинайте с таких значений отклонения груза, при которых компакт-диск проходит по бумаге не менее 10 мм . Постройте график зависимости пути, проходимого диском по бумаге от его начальной скорости.

Определите коэффициент трения скольжения μ и коэффициент вязкого трения β .



4.5 Силы упругости.

Экспериментальная проверка закона Гука открывает богатое поле для исследований, что обусловлено целым рядом причин: во-первых, этот закон прост; во-вторых, существует несколько видов деформаций; в-третьих, можно исследовать упругие свойства различных материалов; в-четвертых, далеко не всегда деформации пропорциональны приложенной нагрузке.

Закон Гука в простейшей «школьной» формулировке записывается в виде

$$F = -kx. \quad (1)$$

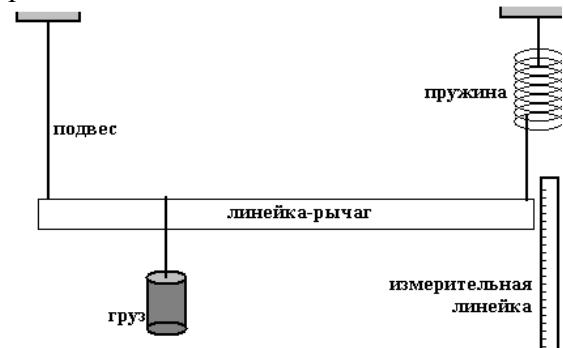
В такой форме он хорошо выполняется для пружинок. Но и в этом простейшем случае можно придумать интересную задачу, особенно, если пружинку спрятать.

Задача 43. «Белый цилиндр»



Широко известны задачи типа «черный ящик». В данном случае «черным ящиком» является белый бумажный цилиндр, внутри которого находится пружина, часть витков которой обвязана нитяной петлей.

Приборы и оборудование: Белый цилиндр, линейка 40 см с отверстиями и со стрелкой, линейка, нитки, груз массой 100 г, кнопки канцелярские.



Очевидная установка показана на схеме и собрана на торце вашего стола. Изменяя положение точки подвеса груза (x - расстояние от точки крепления линейки до точки подвеса груза) можно изменять силу, действующую на пружину.

1. Измерьте зависимость деформации пружины от действующей на нее силы. Постройте график полученной зависимости. Качественно ее объясните.
2. Определите коэффициент жесткости пружины. Оцените погрешность полученного значения.
3. Определите, какая часть витков пружины обмотана петлей.

Комментарии к условию задачи.

1. Основная сложность подготовки оборудования – подбор пружинки необходимой жесткости. Нами использовались пружинки из старой клавиатуры.
2. Конечно, данную установку можно собрать и на штативе, но не у всех они сохранились, поэтому и предлагаем ее крепить на торце стола.

Простейшие задачи можно усложнить, если «не додать» необходимого оборудования, как, например, в следующей задаче.

Задача 43. «Одна резинка, один грузик»



Оборудование: резиновый жгут, штатив с двумя лапками, линейка ученическая, груз массой $m = 100$ г.

Задание 1. Исследуйте зависимость силы упругости резинового жгута от его деформации.

Задание 2. Проверьте, выполняется ли при этом закон Гука.

Задание 3. Определите коэффициент жесткости резинового жгута при малых деформациях.

Комментарии к условию задачи.

1. Эта задача предлагалась на республиканской олимпиаде еще в прошлом веке (в 1999 году), тогда штативы еще не были «в дефиците». Сейчас можно рекомендовать монтировать установку на торце стола с помощью канцелярских кнопок.
2. Резинка должна быть достаточно жесткой (полоска резинового бинта шириной порядка 3 см) – в противном случае исследуемая зависимость может оказаться нелинейной.

Закон Гука является приближенным, выполняющимся при малых деформациях. Ответ на вопрос, что же такое малые деформации, требует отдельного исследования в каждом конкретном случае. Примером такого исследования является следующая задача.

Задача 44. «Пластичность»



Приборы и оборудование: Штатив с лапкой, набор грузов $6 \times 100\text{ г}$, две полиэтиленовых полоски, линейка, нитки.

1. Исследуйте зависимость деформации растяжения полиэтиленовых полосок от нагрузки при ее увеличении и затем при ее уменьшении (режим «нагрузка-разгрузка»). Объясните полученные зависимости.
2. Определите, какая энергия, и какая доля упругой деформации перешла во внутреннюю.

Комментарии к условию задачи.

1. Полиэтиленовые полоски можно вырезать любого продовольственного пакета, ширина узкой полоски должна быть порядка 5 мм, широкой около 10 мм. Отметим, что полоски должны быть «одноразовыми» - для каждого следующего эксперимента следует брать новые, не деформированные, так в данном эксперименте остаточные деформации велики, фактически именно изучение таких деформаций и составляет цель данной работы.

Невыполнение закона Гука может приводить и к неожиданным последствиям. Хорошо известны задачи (в том числе и экспериментальные) на использование формулы для периода колебаний пружинного маятника. Если заменить пружину на резиновый жгут, то, на первый взгляд, ничего принципиально не изменится. А если попробовать?



Задача 45. «Резиновый маятник»

Оборудование. Штатив с муфтой и лапкой, резиновый жгут шириной 6 мм, резиновый жгут шириной 3 мм, набор грузов по 100 г лабораторный, секундомер, линейка ученическая, миллиметровая бумага.

При деформации резины, в ней возникает сила упругости. Следовательно, если к резиновому жгуту подвесить груз и заставить его совершать вертикальные колебания, то это будут колебания маятника. Назовем такую систему резиновым маятником.

Часть 1. Колебания.

1.1 Измерьте зависимость периода колебаний грузов, подвешенных на резиновом жгуте, от их массы. Проверьте выполнимость формулы для периода колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} . \quad (1)$$

Определите коэффициент жесткости толстого резинового жгута.

1.2 Для узкого жгута формула (1) не подтверждается. Объясните возможные причины отклонений экспериментальных результатов от рассчитанных по этой формуле.

Если колебания являются малыми, то формулу (1) можно использовать, если в качестве жесткости использовать величину равную (так называемый дифференциальный коэффициент жесткости)

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta l} , \quad (2)$$

вычисленную в положении равновесия подвешенного груза.

1.3 Используя полученные экспериментальные данные постройте графики зависимости дифференциальной жесткости от массы подвешенного груза для обеих полосок.

Подсказка. Так колебания грузов на резиновом подвесе быстро затухают, то точные измерения периодов колебаний затруднительны. Советуем вам проводить измерения периодов вынужденных колебаний. Для этого маятник следует держать в руке и регулярно его «подкачивать» в так с его колебаниями.

Часть 2. Деформации.

2.1 Измерьте зависимости деформации резиновых полосок от приложенной нагрузки. Постройте графики полученных зависимостей.

2.2 на основании полученных в данной части результатов, постройте графики зависимости дифференциальной жесткости обеих полосок от приложенной нагрузки. Сравните эти данные с данными пункта 1.3.

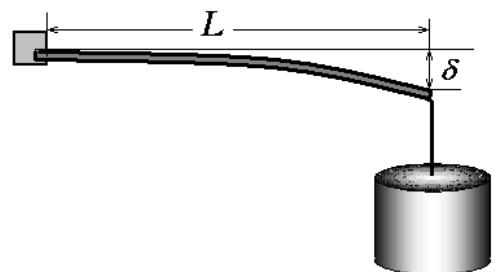
В обыденном сознании упругость чаще всего ассоциируется именно с резиной. Мы убедились, что свойства резины достаточно сложны. Оказывается, что некоторые «неупругие» материалы с большим основанием могут быть отнесены к «упругим». Например, древесина!



Задача 46. «Упругость линейки»

Оборудование. Линейка деревянная ученическая (40 см), набор грузов лабораторный 6 штук по 100 г, устройство для крепления линейки, линейка для измерения стрелы прогиба, нитки.

В данной работе необходимо исследовать деформацию изгиба деревянной линейки, жестко закрепленной с одного конца (в сопромате такой элемент называется консольной балкой²). В качестве величины деформации рассматривается стрела прогиба δ , которая зависит от материала линейки, ее размеров и момента внешних приложенных сил.



1. Исследуйте зависимость величины прогиба δ от массы подвешенного на свободный конец линейки груза. Длину свободной части линейки сохраняйте неизменной. Установите вид этой зависимости, определите ее параметры.

2. Исследуйте зависимость величины прогиба δ от длины свободной части линейки L , при постоянной массе подвешенного груза. Можно показать, что данная зависимость имеет степенной вид

$$\delta = CL^n. \quad (1)$$

На основании полученных экспериментальных данных определите показатель степени n в данной формуле.

3. Если груз вывести из положения равновесия, то он начнет совершать колебания в вертикальном направлении. Исследуйте зависимость периода этих колебаний от массы подвешенного груза (при неизменной длине свободной части L).

4. Получите (теоретически) формулу для периода вертикальных колебаний. Проверьте ее соответствие полученным экспериментальным данным.

5. Согласуются ли между собой экспериментальные данные, полученные в пунктах 1 и 2?

² Более подробно деформация изгиба будет рассмотрена в следующей задаче.

Комментарии к условию задачи.

1. Удобно крепить линейку к краю стола с помощью струбцины.
2. Первые два пункта задачи выполняются просто и быстро, поэтому эта часть работы может быть рекомендована не только вундеркиндам.

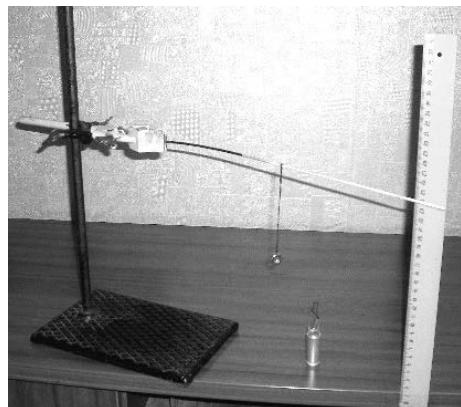
В заключение данного раздела задача с наиболее полными экспериментальными данными и комментарии – может быть, наконец-то станет понятно, о чём здесь шла речь.



Задача 47. «Как надо прогибаться»

Оборудование: Штатив с лапкой, линейка ученическая, два груза (малый – 5 г, большой -20 г), нитки, скотч, стержень для шариковой ручки, палочка деревянная для шашлыка.

Соберите установку, как показано на снимке. Вставьте палочку в стержень, который закрепите горизонтально в штативе. С помощью скотча закрепите вертикально линейку. Конец палочки должен находиться вблизи линейки.

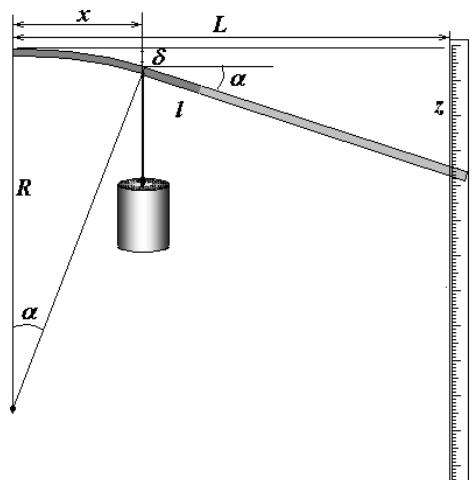


Внимание! Чтобы исключить влияние остаточной деформации стержня, перед каждым измерением разогните его до начального положения.

Теоретическое введение.

Обозначим длину стержня l , расстояние между точкой крепления стержня и линейкой L (то расстояние примерно равно суммарной длине стержня со вставленной в него палочкой). При малых деформациях профиль изогнутой части стержня можно считать дугой окружности (радиус которой обозначим R). Изгиб стержня характеризуется углом изгиба α (угол на который отклоняется незакрепленный конец стержня). Очевидно, что это угол также равен угловому размеру дуги, форму которой принимает стержень. Величина отклонения конца стержня от своего начального положения δ – называется *стрелкой прогиба*. Так как эта величина в данном эксперименте не велика и трудно поддается точному измерению, то в работе измеряется отклонение конца палочки z , прикрепленной к стержню, которое легко измеряется с помощью вертикально закрепленной линейки.

Из теории упругих деформаций известно, что угол изгиба участка стержня длиной x



$$\alpha = KM_0x, \quad (1)$$

где M_0 - момент внешних сил (рассчитываемый относительно точки крепления стержня), приложенных к изгибающему участку стержня.

В данной работе вам необходимо исследовать деформации стержня в зависимости от приложенных к нему сил. Для этого вам необходимо подвешивать к стержню или палочке различные грузы (к стержню большой, к палочке - малый). Положение точки подвеса задается с помощью расстояния x , отсчитываемого от точки крепления стержня.

Часть 1. Малый груз.

Расположите стержень со вставленной палочкой горизонтально. С помощью нити подвесьте малый груз к деревянной палочке.

1.1 Получите теоретическую зависимость величины отклонения конца стержня от расстояния до точки крепления груза $z(x)$.

1.2 Измерьте зависимость величины отклонения конца стержня от расстояния до точки крепления груза $z(x)$. Постройте график полученной зависимости. Сравните полученную экспериментальную зависимость с вашими теоретическими предсказаниями. Укажите возможные причины расхождений.

Часть 2. Большой груз.

С помощью нити прикрепите большой груз к стержню.

2.1 Измерьте зависимость величины смещения конца палочки от положения точки крепления груза к стержню $z(x)$. Постройте график полученной зависимости.

2.2 Используя полученные данные постройте график зависимости величины стрелки прогиба стержня в точке крепления нити от длины деформируемой части стержня $\delta(x)$.

2.3. Покажите теоретически, что если пренебречь весом палочки, то зависимость величины стрелки прогиба от координаты точки подвеса груза может быть представлена в степенной форме

$$\delta = Cx^\alpha \quad (2)$$

Рассчитайте значение показателя степени α , используя теоретическое введение.

2.4 Используя полученные экспериментальные данные, определите показатель степени в формуле (2). Укажите возможные причины различий между теоретической и экспериментальной зависимостями величины стрелки прогиба от координаты точки подвеса груза $\delta(x)$.

Теоретическое дополнение (необязательное, но любопытное).

Приведем вывод формулы, приведенной в условии.

Пусть к стержню длиной l приложен внешний изгибающий момент сил M_0 (он может включать как момент сил тяжести самого стержня, так и дополнительных грузов, подвешенных к стержню). Этот момент сил уравновешивается моментом сил, действующих на стержень в месте его крепления. Эти же силы равны по модулю силам упругости, возникающим в деформированном стержне. Так как изгиб стержня относительно мал, то можно считать, что его профиль имеет форму дуги окружности некоторого радиуса R , причем части расположенные выше средней линии растянуты, а расположенные ниже – сжаты. Рассмотрим предельно упрощенную модель изгибающегося стержня. Будем считать, что он состоит из двух одинаковых жестко скрепленных полосок, находящихся на расстоянии h друг от друга – при изгибе верхняя полоска растягивается, а нижняя сжимается. Угол изгиба связан с радиусом дуги изгиба и длиной стержня очевидным соотношением

$$l = R\alpha. \quad (1)$$

Тогда деформации полосок оказываются равными

$$l_1 = \left(R + \frac{h}{2} \right) \alpha, \quad l_2 = \left(R - \frac{h}{2} \right) \alpha. \quad (2)$$

Так как по закону Гука силы упругости пропорциональны относительной деформации³, то для них справедливы выражения

$$F_{1,2} = \gamma \frac{\Delta l_{1,2}}{l} = \pm \gamma \frac{h}{2R}, \quad (3)$$

где γ – коэффициент пропорциональности, зависящий от материала стержня и его поперечных размеров, но не зависящий от его длины.

Суммарный момент сил, уравновешивающих стержень, равен

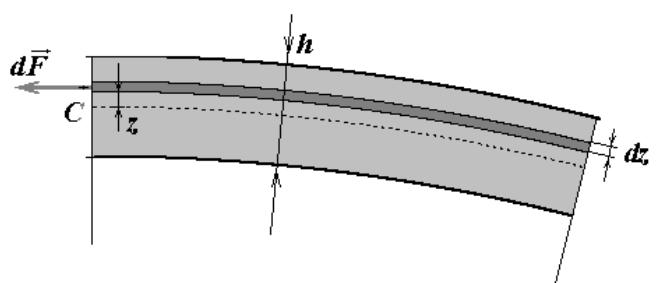
$$M = 2F \frac{h}{2} = \gamma \frac{h^2}{2R} = M_0. \quad (4)$$

Из формулы (1) выразим угол изгиба в зависимости от момента внешних сил, приложенных к стержню

$$\alpha = \frac{l}{R} = \frac{2}{\gamma h^2} M_0 l = K M_0 l, \quad (5)$$

что соответствует формуле, приведенной в условии задачи.

Приведем также для любопытных строгий вывод формул для характеристик изгиба сплошной прямоугольной в сечении балки длиной l , толщиной h , шириной a (за плоскость рисунка). Как и ранее момент внешних сил уравновешивается моментом сил упругости в месте закрепления балки. Выделим внутри балки очень тонкий слой толщиной dz , находящийся на расстоянии z от центрального продольного сечения



³ Мы действительно должны рассматривать относительные деформации, так как в обычном «школьном» выражении для закона Гука $F = -kx$, коэффициент упругости зависит от длины деформируемого тела.

балки. Эта переменная изменяется от $-\frac{h}{2}$ до $+\frac{h}{2}$. По-прежнему будем считать, что профиль изогнутой балки имеет форму дуги окружности пока неизвестного радиуса R , угол изгиба обозначим α . Длина центрального сечения остается неизменной при изгибе и равной $l = R\alpha$. Тогда длина выделенного слоя оказывается равной

$$l_z = (R + z)\alpha.$$

Следовательно, ее относительное удлинение равно

$$\varepsilon_z = \frac{l_z - l}{l} = \frac{z}{R}.$$

По закону Гука, механическое напряжение в этом слое определяется формулой

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где E - модуль Юнга материала балки.

Тогда сила упругости, действующая на место крепления равна

$$dF = \sigma dS = E \frac{z}{R} a dz,$$

а ее момент относительно точки C -

$$dM = z dF = zE \frac{z}{R} a dz.$$

Для вычисления суммарного момента сил, удерживающего балку, следует последнее выражение проинтегрировать по толщине балки

$$M_0 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dM = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{Ea}{R} z^2 dz = \frac{Ea}{R} \frac{h^3}{12}.$$

С точностью до несущественных для нашего рассмотрения коэффициентов эта формула, связывающая радиус изгиба с моментами внешних изгибающих сил совпадает с формулой (4), полученной в рамках простейшей модели.



4.6 Если у вас нету ртути...

Еще одним широко доступным и дешевым материалом для экспериментального изучения является воздух. Имея барометр можно измерить атмосферное давление. Если барометра нет, то можно его изготовить самостоятельно. Как известно, большинство открытий при изучении газов было сделано с помощью ртутного барометра, изобретенного Э.

Торричелли. Однако использование ртути в школьных лабораториях запрещено – ртуть токсична. Теоретически ртуть можно заменить любой другой жидкостью, например, водой. Правда, в этом случае высота барометра должна превышать 10 метров. А может, все-таки, попробуем? Сразу раскроем карты – если исследуемая порция воздуха соприкасается с водой, то этот воздух насыщается водяными парами, и тогда сложно установить, что вы изучаете – сухой воздух или водяной пар.



Задача 48. «Насыщенный пар»

Партия учит нас, что газы при нагревании расширяются.

A. Райкин

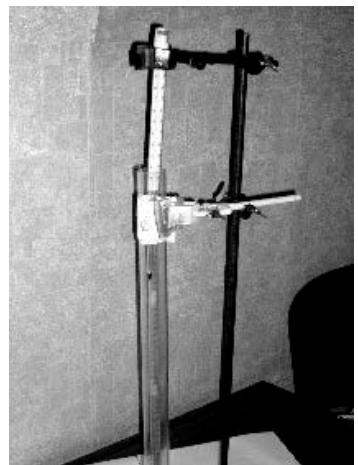
В данной работе вам предстоит исследовать зависимость давления насыщенного водяного пара от температуры. Напоминаем – эта зависимость не линейна, кроме того, давление водяного пара резко возрастает с ростом температуры.

Оборудование: Штатив с двумя лапками, две стеклянных трубки с миллиметровыми шкалами, термометр, трубка гибкая пластиковая, горячая и холодная вода.

Соберите установку, показанную на рисунке: в штативе закрепите трубку большего диаметра, внутри расположите трубку меньшего диаметра, закрытым концом вверх (проследите, чтобы вода могла заходить в трубку снизу), в другой лапке штатива укрепите термометр, так чтобы его измерительная часть была погружена между трубками.

Будьте предельно аккуратны, пожалуйста, не разбейте оборудование!

Обязательно! – сначала залейте в трубку горячую воду, при этом часть воздуха выйдет из тонкой внутренней трубки, в дальнейшем количество воздуха в этой трубке должно оставаться постоянным!



1. Измерьте зависимость высоты столба газа в трубке от температуры, постройте график этой зависимости.

В ходе измерений, вы можете доливать, сливать горячую и холодную воду в толстой трубке, рекомендуем для этого использовать гибкий шланг. Обязательно перемешиваете воду в толстой трубке, чтобы температура воды была одинакова по всей высоте. Для перемешивания используйте метод барбализации – пропускания через жидкость воздушных пузырьков, в качестве насоса используйте собственные легкие. Задно – помоете пол в аудитории.

Измерения при высокой температуре удобно проводить, просто дожидаясь остывания воды, для получения результатов при низких (близким к комнатным) температурах требуют долива холодной воды – уж больно медленно она остывает!

В ходе измерений фиксируйте также высоту уровня воды в широкой трубке – вдруг вам понадобится очень точное значение давления газа в узкой трубке! Значение атмосферного давления вам будет указано.

2. Допустим, что при низких температурах ($20^\circ - 30^\circ$) давлением паров воды можно пренебречь. В этом случае согласно уравнению состояния идеального газа объем газа линейно зависит от температуры и обратно пропорционален давлению. Проверьте это предположение, оцените на основании своих измерений значение абсолютного нуля температуры (в градусах Цельсия).

3. В соответствии с уравнением Клапейрона-Клаузиуса (знание этого уравнения от вас не требуется) давление насыщенных паров $P_{\text{нас.}}(T)$ связано с абсолютной температурой T соотношением

$$\ln \frac{P_{\text{нас.}}(T)}{P_{\text{нас.}}(T_0)} = -\frac{qM}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right), \quad (1)$$

где $M = 18 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$ – молярная масса воды, $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – универсальная газовая постоянная; q – удельная теплота испарения воды, $P_{\text{нас.}}(T_0)$ – давление насыщенного пара при температуре T_0 .

На основании проведенных измерений проверь выполнимость формулы (1).

Приведите формулу, с помощью которой вы рассчитывали давление насыщенного пара (то есть, как вы исключили давление сухого воздуха в трубке).

Определите значение удельной теплоты испарения воды.

Комментарии к условию задачи.

1. При выполнении работы учащиеся должны иметь в своем распоряжении, как холодную, так и горячую воду, чтобы можно было легко изменять температуру газа в трубке.
2. Для получения хороших результатов температура должна достигать не менее 80° .



4.7 Капиллярные явления.

При охлаждении насыщенного пара начинается конденсация – выпадает роса. Изучение капель и других капиллярных явлений задача достойная олимпиад самого высокого уровня.

Успешное изучение этих явлений возможно тогда, когда силы поверхностного натяжения не подавляются силой тяжести. Поэтому такие эксперименты приближаются к «микроскопическим» – маленькие капли, тонкие трубы, узкие щели.



Задача 49. «Изучение капель»

Оборудование: лампочка на подставке; соединительные провода; источник питания (батарея гальваническая 4,5 В); линза собирающая; экран; подставка для капли; пластиинка, покрытая воском, шприц одноразовый, вода; линейка; миллиметровая бумага, штатив с лапкой и муфтой.

Плотность воды принять равной $\rho_0 = 1,0 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

Часть 1. Используя имеющееся оборудование, определите фокусное расстояние линзы.

Часть 2. «Лежащая капля»

Вам необходимо исследовать форму капли, лежащей на горизонтальной не смачиваемой поверхности. Для этого с помощью лампочки и линзы добейтесь получения на экране четкого изображения капли, лежащей на пластинке. Для измерения размеров изображения разместите на экране кусочек миллиметровой бумаги.

2.1 Приведите оптическую схему вашей установки, обоснуйте выбор ее параметров, кратко опишите методику ее юстировки (настройки), рассчитайте ее увеличение.

2.2 Исследуйте зависимость высоты капли от ее диаметра.

Качественно объясните полученную зависимость.

Оцените поверхностное натяжение воды.

Постарайтесь, чтобы капли имели осесимметричную форму

Часть 3. «Висящая капля»

Получите на экране четкое изображение капли, свисающей из отверстия шприца, закрепленного вертикально с помощью штатива.

3.1 Опишите изменение формы капли при увеличении ее объема.

Приведите несколько примеров полученных вами изображение (увлекаться светотенями не следует).

3.2 Определите максимальный объем капли, способной удерживаться на шприце.

Определите по этим данным поверхностное натяжение воды.

Комментарии к условию задачи.

1. В качестве не смачиваемой поверхности можно использовать любую пластинку, покрытую воском или стеарином (можно накапать с горящей свечи).
2. Размер пластиинки должен быть небольшим, чтобы линзу можно было расположить близко к капле для получения увеличенного изображения.

Поверхностное натяжение жидкости очень сильно зависит от наличия примесей (особенно поверхностно активных веществ). В следующей задаче исследуется влияние этилового спирта на поверхностное натяжение воды.



Задача 50. «Исследование поверхностного натяжения спиртовых растворов»

Оборудование: Стеклянная трубка, пробирка, пипетка, линейка, вода, спирт.

Задание 1. Исследуйте зависимость поверхностного натяжения раствора спирта в воде от его концентрации.

Задание 2. Получите эмпирическую формулу этой зависимости.

Плотность спирта $\rho_c = 0,90 \frac{g}{cm^3}$, плотность воды $\rho_w = 1,00 \frac{g}{cm^3}$, поверхностное натяжение воды $\sigma = 70 \frac{mH}{m}$.

Примечание. Смачивание раствора считать полным.

Комментарии к условию задачи.

1. Внутренний диаметр трубки не должен превышать 1-2 мм.
2. Трубки должны быть тщательно вымыты.
3. Понятно, что много спирта учащимся выдавать не следует.



4.8 Электрические цепи.

Казалось бы, что может быть проще закона Ома?

Сила тока это, что показывает амперметр, а напряжение – то, что показывает вольтметр. Странно, но эти показания оказываются пропорциональны друг другу. В наш век сплошной электрификации это утверждение кажется очевидным. Задумаетесь, а как Георг Симон Ом установил этот закон, когда в квартирах не было розеток, не было школьных амперметров и вольтметров, а китайцы еще не завалили прилавки киосков цифровыми мультиметрами?

Мы уже встречались с задачами на эту тему, но она настолько благодатна для экспериментальных туров олимпиад: во-первых, не сложно подобрать оборудование, во-вторых, эти задачи можно предлагать даже самым младшим участникам, в-третьих, закон Ома и следствия из него не всегда выполняются строго!

Расчет простейших цепей электрического тока – традиционная задача для начинающих физиков. А пробовали вы проверить законы соединения проводников экспериментально?



Задача 51. «Параллельное соединение проводников»

Оборудование: реостат школьный, резистор сопротивлением 1,0 Ом, резистор неизвестного сопротивления, вольтметр школьный, источник питания (ЛИП, или батарейка 4,5 В), ключ электрический, соединительные провода, скотч, полоска миллиметровой бумаги.

В данном задании вам необходимо проверить справедливость закона параллельного соединения проводников, а затем, используя полученные данные, определить неизвестное сопротивление резистора.

Часть 1. Градуировка реостата.

Прикрепите с помощью скотча полоску миллиметровой бумаги к нижней части обмотки проволочного реостата, проследите, чтобы она не мешала движению контактов движка реостата.

Соедините последовательно источник питания, реостат, резистор сопротивлением 1,0 Ом, ключ.

1.1 Используя вольтметр измерьте зависимость сопротивления реостата от положения движка. Не забудьте нарисовать схему вашей цепи и объяснить, как вы измеряли сопротивление.

1.2 Постройте график полученной зависимости.

1.3 Рассчитайте электрическое сопротивление единицы длины проволоки реостата.

Часть 2. Неизвестное сопротивление.

Подключите к реостату параллельно резистор с неизвестным сопротивлением.

2.1 Измерьте зависимость общего сопротивления реостата с резистором от положения движка реостата.

2.2 На основании полученных экспериментальных данных проверьте выполнимость формулы для общего сопротивления при параллельном соединении резисторов.

2.3 Определите сопротивление неизвестного резистора.

*Все измерения проводите, отступив примерно на 2 см
от края обмотки реостата.*

Включайте цепь только во время проведения измерений!

Если задача авторам кажется слишком простой, то можно электрическую схему спрятать. Почему задача называется «желтый ящик»? Потому, что у ее автора нашлись желтые коробочки, и он не дальтоник – отличает «желтую коробку» от черного ящика!



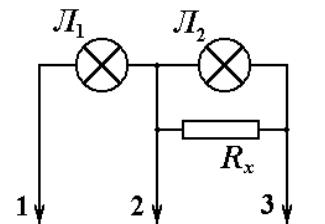
Задача 52. «Желтый ящик»

Внимание!

*В ходе проведения эксперимента батарейка может быстро разрядиться.
Подключайте батарейку к цепи только во время проведения измерений!*

Оборудование: коробка с двумя лампочками и резистором; вольтметры школьные, амперметр школьный, реостат, батарейка 4,5 В, соединительные провода, ключ электрический.

В выданном вам секретном желтом ящике находятся две одинаковые электрические лампочки L_1 и L_2 , соединенные последовательно, параллельно к одной из лампочек подключен резистор R_x , сопротивление которого вам предстоит определить. От схемы наружу сделано три вывода – от концов и середины схемы. На схеме они пронумерованы 1-2-3. На коробке выводы обозначены «А», «В», «С» (последовательность выводов может быть иной, чем показана на схеме).



Задание 1. Используя предоставленное оборудование, определите, какой из проводов какому выводу схемы соответствует. Иными словами, установите соответствие между номерами выводов на схеме «1», «2», «3» и обозначениями на коробке.

Ответ обоснуйте проведенными опытами.

Не забывайте – сопротивление лампочки зависит от силы протекающего тока!

Задание 2. Получите вольтамперные характеристики (то есть зависимости силы тока от напряжения) лампочки накаливания и резистора. Постройте графики полученных зависимостей. Приведите электрические схемы, использованные вами при проведении исследований.

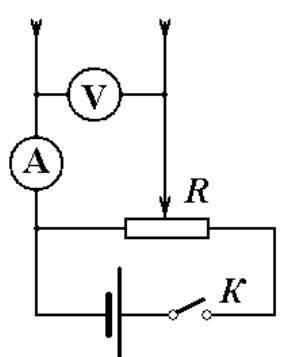
Обязательно укажите, между какими выводами «желтого ящика вы проводили измерения!

Определите сопротивление резистора (не забудьте указать погрешность этого значения).

На этом можно было бы и закончить формулировку условия, но мы решили вам помочь!

Вам необходимо измерить зависимость силы от приложенного напряжения – нет проблем! Можно собрать схему измерительного устройства, позволяющую изменять напряжение, измерять его и измерять силу тока. Но в нашем (следовательно, и в вашем) распоряжении имеется только школьный амперметр. Цена его деления 0,1 А. Силы измеряемых токов не превышают 0,2 А, то есть не более двух делений. Поэтому от использования амперметра пришлось отказаться!

Поэтому мы решили вам помочь!



Силу тока можно определить, измеряя напряжение на резисторе с известным сопротивлением, например, 1,0 Ом. Но и эти напряжения не велики, и школьный вольтметр (6,0 В с ценой деления 0,2 В).

Поэтому мы решили вам помочь!

Почему бы не измерять напряжения непосредственно на реостате? Дадим вам два вольтметра! Рекомендуем (но не настаиваем) использовать для измерений следующее измерительное устройство.

При замкнутом ключе K_1 измеренные значения напряжений U_1 и U_0 позволяют определить напряжение и силу тока в исследуемой цепи, при условии, что вам известны значения сопротивлений частей реостата R_1 и R_2 . Но, к сожалению, они не известны, *поэтому мы решили вам помочь!*

И предлагаем, не меняя положения движка реостата, разомкнуть ключ K_1 и еще раз измерить напряжения на вольтметрах U_{10} и U_{00} . Этих четырех значений достаточно, чтобы рассчитать силу тока и напряжение на исследуемой цепи!

Итак, соберите измерительную цепь, подключите к ней нужные вам выводы из «желтого ящика» (еще раз напоминаем – обязательно укажите, какие выводы вы подключаете!). Изменяя положения движка реостата, измерьте значения четырех напряжений, проведите расчеты сопротивлений R_1 и R_2 (запишите формулы, по которым вы проводите эти расчеты – полное сопротивление реостата R_0 указано на нем), рассчитайте значение силы тока I через исследуемую цепь (приведите формулу, по которой вы проводите расчет).

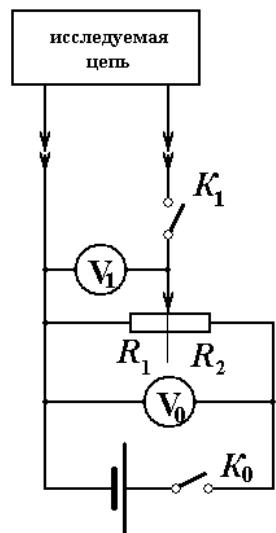
Результаты измерений предлагаем представлять в виде таблиц

U_1 , В	U_0 , В	U_{10} , В	U_{00} , В	R_1 , Ом	R_2 , Ом	I , А

И последнее, разрешаем, рекомендуем, настаиваем проводить измерения напряжений с точностью до четверти деления шкалы, хотя это не позволительно, согласно инструкциям!

Комментарии к условию задачи.

1. В работе используются лампочки с номинальным напряжением 2,5 В.
2. Сопротивление резистора внутри коробки 3-4 Ом.



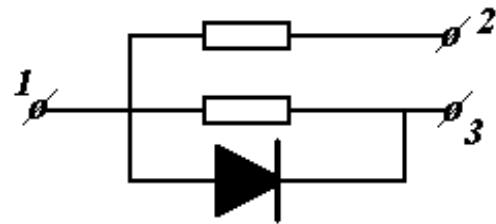
А автор этой задачи нашел красные коробки, и перекрашивать из в черный цвет не захотел!

Задача 53. «Красный ящик»



Оборудование: «красный ящик» с тремя выводами, вольтметр, амперметр, микроамперметр, источник питания, реостат, соединительные провода.

Внутри коробки («красного ящика») находятся два резистора и диод, соединенные по схеме, показанной на рисунке. Диод может быть включен в любом направлении. На коробке выводы обозначены «A», «B» и «C».



1. Поставьте им в соответствие точки 1,2, и 3 на приведенной схеме.
2. Определите сопротивления резисторов.
3. Постройте вольтамперную характеристику диода при напряжениях от 0 до 1,5 В в прямом направлении.

Внимание! Первоначально во всех измерениях используйте амперметр и только при необходимости используйте микроамперметр, иначе вы можете вывести микроамперметр из строя.

Комментарии к условию задачи.

1. Мы не приводим значения сопротивлений резисторов – их подбор зависит от используемого диода. Очевидно, что эти сопротивления должны быть сравнимы с сопротивлением диода в номинальном режиме.

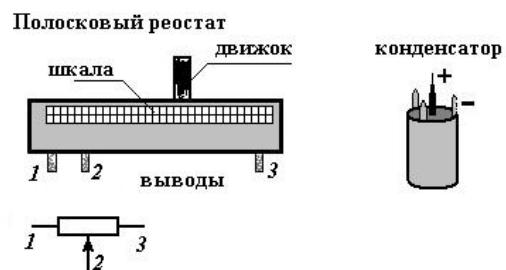
Приборы можно использовать не только по прямому назначению, так в данной работе предлагается использовать обычный школьный вольтметр в качестве измерителя прошедшего заряда – гальванометра.

Задача 54. «Вольтметр - гальванометр»



Оборудование: источник питания ЛИП, вольтметр, полосковый реостат со шкалой, конденсатор известной емкости, ключ – переключатель, соединительные провода, стержень металлический с проводом, часы, кусочек металлической фольги, скрепка.

Физические приборы можно использовать для измерения различных величин. В данной работе школьный лабораторный вольтметр используется для измерения ... электрического заряда. При протекании кратковременного импульса тока отброс стрелки вольтметра зависит от прошедшего через него электрического заряда. Прибор для измерения заряда таким способом называется баллистическим гальванометром.



Часть 1. Градуировка реостата.

Подключите реостат к источнику питания так, чтобы с его помощью легко можно было регулировать выходное напряжение.

1. Постройте график зависимости выходного напряжения на реостате от положения движка.
2. Подключите к выходу реостата конденсатор. Постройте график зависимости напряжения на конденсаторе от положения движка реостата.

Объясните полученные зависимости.

Часть 2. Градуировка баллистического гальванометра.

Соберите электрическую цепь, позволяющую заряжать конденсатор до известного напряжения и разряжать его через вольтметр.

1. Постройте график зависимости величины отброса стрелки вольтметра (работающего в качестве гальванометра) от заряда, прошедшего через него.

Часть 3. Измерения.

1. Зарядите конденсатор до максимального напряжения. Отключенный от цепи он все равно разряжается. Постройте зависимость напряжения на конденсаторе от времени разрядки. Определите электрическое сопротивление конденсатора.
2. Оцените время столкновения металлического стержня с поверхностью стола.
Можете держать стерженек в руке и постукивать им по столу.
Сопротивление вольтметра считайте равным $R_V = (4,3 \pm 0,2) \text{ к}\Omega$

Комментарии к условию задачи.

1. Полосковые реостаты используются в различных приборах – телевизорах, музыкальных центрах. Обращаем внимание, что часто его сопротивление нелинейно зависит от положения движка. Рекомендуем использовать реостат с максимальным сопротивлением в несколько кОм.
2. Конденсатор должен емкость не менее 10мкФ.
3. В данной работе используется обычный школьный вольтметр с относительно небольшим внутренним сопротивлением, в этом случае время разрядки оказывается небольшим (несколько миллисекунд), поэтому отклонение стрелки вольтметра и оказывается пропорциональным прошедшему заряду.
4. Для выполнения последней части нужен металлический стержень диаметром порядка 1 см и длиной около 5 см. Один из концов этого стержня следует слегка закруглить. Ко второму концу стержня нужно присоединить провод. Вместо кусочка фольги можно использовать металлическую пластинку. Но в любом случае, фольгу или пластинку следует располагать на твердой поверхности, чтобы удар стержня был достаточно упругим.

Дополнение.

Использовать вольтметр в качестве гальванометра можно и в других задачах. Например, при быстром извлечении магнита из катушки индуктивности в ней возникает кратковременная ЭДС. Можно замкнуть катушку на вольтметр и измерить прошедший заряд, который оказывается пропорциональным изменению магнитного потока через катушку. Такой эксперимент позволяет изучать характеристики магнитов, а также проверить закон электромагнитной индукции.



4.9 Производство электроэнергии

Энергетическая безопасность страны есть важнейшая составляющая ее всеобщей безопасности. В стране, которая бедна природными энергетическими ресурсами (за исключением болотного торфа), проблема поиска альтернативных источников энергии всегда будет актуальной. Для решения этой проблемы можно использовать практически все – как гидроэнергию малых речек (которых у нас достаточно), так и гальваническую энергию лимонов, которые у нас, к сожалению, могут произрастать только на подоконниках. Прежде чем создавать промышленные установки, необходимо разобраться в принципах их работы, создать экспериментальные образцы, провести их исследование, чем сейчас мы сейчас и займемся.



Задача 55. «Гальванический лимон»

Оборудование: медная и оцинкованная пластиинки, стальная игла, кусок медной проволоки, соединительные провода, ключ электрический, резистор с сопротивлением 1,0 Ом, мультиметр, набор цитрусовых, раствор лимонной кислоты.



Между двумя разными металлами, помещенными в электролит, возникает гальваническая ЭДС. В качестве электролита могут выступать и фруктовые соки. Изучение «фруктовых» гальванических элементов является основной целью данного экспериментального задания.

В данной работе мультиметр следует использовать только в качестве вольтметра, так как измерение с его помощью малых токов проводится с большой и неконтролируемой погрешностью.

Сопротивление мультиметра при измерении напряжения превышает 500 кОм.

Часть 1. «Фрукты»

Воткните стальную иглу и медную проволоку в кусок фрукта, при этом между этими электродами возникает гальваническая ЭДС.

Измерьте возникающую гальваническую ЭДС в лимоне, грейпфруте и мандарине (не забудьте оценить погрешность проведенных измерений).

Объясните полученные результаты.

Часть 2. «Лимон в стакане»

Для дальнейших экспериментов используйте «модифицированный лимонный элемент»: между двумя металлическими пластиинками (медной и оцинкованной) расположите марлевый тампон, смоченный раствором лимонной кислоты. Ваша задача – исследовать электрические характеристики этого элемента, при его разрядке через резистор известного сопротивления.

Внимание: электрические характеристики гальванического элемента зависят от электрического заряда, протекшего через него, поэтому сначала полностью соберите электрическую цепь, только после этого приступайте к измерениям силы тока.

2.1 Соберите электрическую цепь, позволяющую измерять зависимость силы тока и ЭДС источника от времени.

2.2 Проведите измерения зависимости силы тока, протекающего через резистор, и ЭДС источника от времени разрядки.

2.3 Постройте графики полученных зависимостей. Дайте их качественное объяснение.

2.3 Постройте зависимость внутреннего сопротивления «лимонного» элемента от заряда, прошедшего через источник. Предложите эмпирическую функцию, описывающую полученную зависимость, определите ее параметры.

Комментарии к условию задачи.

1. В данной работе вместо мультиметра использовать миллиамперметр.
2. Для изготовления гальванического элемента следует использовать пластинки площадью не менее 5 см^2 . Марлевый тампон сложен из 8-10 слоев марли и зажат между пластинками, которые можно обвязать ниткой.
3. Результаты измерений сильно варьируются для разных элементов, поэтому приведенные данные следует рассматривать как один из возможных примеров.

Основой большинства промышленных электрических энергетических установок является генератор, устройство которого принципиально совпадает с устройством электродвигателя, поэтому изучать их работу надо совместно.

Задача 56. «Двигатель и генератор»



Оборудование: модель электродвигателя; батарейка 4,5 В; амперметр; вольтметр; реостат; соединительные провода; секундомер; нитки, набор грузов, линейка.

Известно, что электрический двигатель и электрический генератор устроены одинаково. Если через обмотку двигателя пропускать электрический ток, то вал двигателя начинает вращаться, а если вращать вал двигателя, то в цепи обмотки может появиться электрический ток.

Часть первая. «Двигатель»

- Постройте зависимость силы тока через обмотку двигателя от приложенного напряжения при неработающем двигателе. Определите сопротивление обмотки и амперметра.

Будьте аккуратны – сопротивление обмотки мало!

Закрепите двигатель на краю стола, на вал двигателя намотайте нить, к которой нужно привязывать грузы различной массы.

- Постройте зависимость напряжения на работающем двигателе от силы протекающего через него электрического тока при фиксированной массе подвешенного груза.
- Измерьте зависимость силы тока, протекающего через двигатель при постоянном напряжении источника, от массы подвешенного груза.
- Измерьте зависимость механической мощности двигателя от приложенного к двигателю напряжения при постоянной массе подвешенного груза.
- Постройте график зависимости КПД двигателя от его мощности.

Часть вторая. «Генератор»

- Постройте график зависимости КПД генератора от приложенной механической мощности.

В качестве «полезной» мощности используйте мощность электрического тока, выделяемую на амперметре.

Комментарии к условию задачи.

- В работе можно использовать разборную модель электродвигателя, либо любой другой небольшой электродвигатель для детских игрушек.
- Набор грузов следует подобрать так, чтобы двигатель смог их поднимать. Эти же грузы используются и во второй части работы, как источник энергии генератора.

Нельзя разрабатывать энергетические установки, не зная закона электромагнитной индукции!

Задача 57. «Закон электромагнитной индукции»



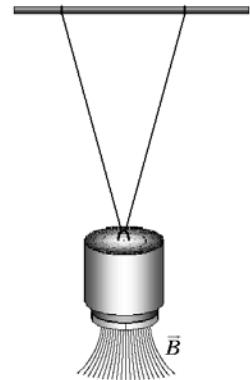
Оборудование: головной телефон, мультиметр, секундомер, конденсатор, диод полупроводниковый, магнит кольцевой, грузик, соединительные провода, штатив, нитки, линейка.

Емкость конденсатора $C = (50 \pm 1) \mu\Phi$.

Сопротивление катушки головного телефона $R = 1,2 \text{ к}\Omega$

Соберите установку, как показано на рисунке: железный груз подвесьте на двух нитях (бифилярный подвес), что бы колебания проходили в одной плоскости. К железному грузу прикрепите снизу магнит.

На подставке штатива закрепите с помощью кусочка пластилина головной телефон. Подвешенный груз с магнитом должен проходить точно над катушкой телефона. Длина маятника должна быть не менее 70 см.



Для измерения амплитуды колебаний прикрепите к основанию штатива линейку.

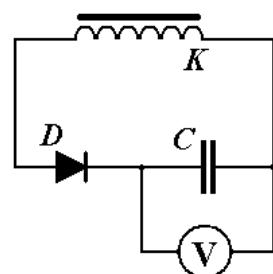


При раскачивании груза с магнитом в катушке телефона возникает ЭДС. Этот импульс не сложно увидеть на экране осциллографа, но очень сложно обеспечить всех участников олимпиады индивидуальными осциллографами.

Для экспериментального исследования явления вам предлагается использовать следующую электрическую схему. К катушке головного телефона **K** подсоедините последовательно диод **D** и конденсатор **C**, к последнему подключите мультиметр. Измерения следует проводить в диапазоне 2000 мВ.

Теперь, ЭДС индукции, возникающая в катушке, заряжает конденсатор, напряжение на котором легко измерить.

Соберите установку. Убедитесь в ее работоспособности. Добейтесь, чтобы напряжение на конденсаторе достигало не менее 500 мВ.



Основная цель вашей работы – экспериментальное изучение закона электромагнитной индукции.

1. Измерьте период колебаний вашего маятника.
2. Зарядите конденсатор и измерьте зависимость напряжения на нем от времени при разрядке только через мультиметр. Определите сопротивление мультиметра.
3. Зарядите конденсатор и измерьте зависимость напряжения на нем от времени при разрядке через вольтметр, диод и телефон.

4. Измерьте зависимость максимального напряжения на конденсаторе от амплитуды колебаний груза.
5. Теоретически опишите зависимость напряжения на конденсаторе от времени (можно и нужно сделать разумные допущения). Постройте примерный график этой зависимости. Получите приближенную формулу, описывающую зависимость максимального напряжения на конденсаторе от амплитуды колебаний маятника.
6. Проверьте, выполняется ли в данном эксперименте закон электромагнитной индукции Фарадея. Оцените максимальный магнитный поток, который создает магнит в катушке головного телефона.

Примечания и подсказки.

1. ЭДС индукции, возникающая в катушке головного телефона, очень сильно зависит от расстояния между магнитом и телефоном. Не стремитесь добиться максимальной ЭДС (нам удалось зарядить конденсатор почти до 2 В) – проводите измерения (в п. 4) при расстояниях между магнитом и телефоном порядка 1 см – в этом случае показания будут более стабильными.
2. Проведите разумные оценки времен разряда конденсатора через мультиметр и телефон и сравните их со временем прохождения магнита над телефоном.
3. Конденсатор заряжается до максимального напряжения далеко не сразу – нужно подождать не менее 10 прохождений магнита над катушкой! Никто не запрещает вам время от времени подталкивать маятник!
4. Заряжать конденсатор (для проведения измерений в п. 2 и 3) следует с помощью магнита, в этом случае расстояние между магнитом и телефоном можно уменьшить.

Комментарии к условию задачи.

1. Нами использовались головные телефоны ТОН-2. Можно попробовать использовать и другие типы наушников с магнитным сердечником.



4.10 Да будет свет!

Без преувеличения можно сказать, что изучение оптических явлений во многом определило развитие современной физики целиком. Теория относительности, квантовая физика выросли из оптических проблем, и это наиболее яркие примеры. В средние века именно оптика послужила полигоном, на котором начали отрабатываться методы математического описания физических процессов. И в настоящее время оптические методы являются одними из основных во всех естественных науках. Не можем и мы пройти мимо оптических задач, тем более что, в источниках света дефицита не наблюдается – даже еще недавно экзотические лазеры продаются в киосках, доступны светодиоды, не говоря уж об обычных лампочках накаливания. Посмотрим же внимательно на некоторые знакомые и привычные оптические явления, как источники интересных экспериментальных задач.

Знаете ли вы, что небольшое отверстие может формировать изображение. Это свойство было открыто еще в средние века, когда были сконструированы и построены первые камеры-обскуры.

Задача 58. «Свет и тени»



Оборудование: свеча, линза, матовый экран, экраны с отверстиями, линейка.

Вам необходимо изучить принципы действия простейших устройств, формирующих изображение: линзы и небольшого отверстия. В качестве источника света используется пламя свечи.

1. Измерьте с максимальной точностью фокусное расстояние линзы.
2. Получите формулу для расчета линейного увеличения изображения, формируемого линзой. Проверьте ее экспериментально. Определите вертикальный и горизонтальный размеры пламени.
3. Расположите между свечой и экраном темный экран со щелью. Опишите качественно распределение освещенности экрана. Исследуйте зависимость ширины светлой полоски на экране от расстояния между щелью и экраном. Проведите измерения для вертикального и горизонтального расположения свечи.
4. Получите изображение пламени свечи на экране, используя темный экран с круглым отверстием. Объясните механизм возникновения изображения в этом случае. Предложите численные характеристики, определяющие качество изображения, формируемого с помощью небольшого отверстия, исследуйте зависимость этих характеристик от взаимного расположения свечи, отверстия и экрана с изображением. Определите диаметр отверстия.

Комментарии к условию задачи.

1. Необходимо подготовить несколько экранов с отверстиями. Один - с узкой щелью шириной порядка 1 мм. Кроме того, 4-5 экранов, в которых просверлены отверстия диаметры которых увеличиваются от 0,5 до 3 мм. Экраны могут быть изготовлены из обычного картона.
2. Данную работу следует проводить в затемненном помещении – яркости изображений не велики.

Для наблюдения интерференции света необходимы специальные условия – когерентные и монохроматические источники, малые отверстия, большие расстояния и т.д. Если всего этого нет в наличии, то нужно осознать основную идею возникновения интерференционных полос – одна периодическая структура порождает другую периодическую структуру! Эта же идея лежит в описании полос муара (проверьте, рубашка на фото в мелкую полосочку), и математические описания весьма схожи!



Задача 59. «Интерференция на бумаге»

Оборудование: прозрачная пленка №1 с нанесенными прямыми параллельными линиями, прозрачная пленка №2 с нанесенными кольцами, набор из трех листов бумаги с нанесенными штрихами, кнопки канцелярские, картонная папка, линейка.

При наложении пленки с нанесенными штрихами на бумажные листы также с нанесенными штрихами возникают полосы муара, которые могут моделировать интерференцию волн.

Пусть пропускание пленки зависит от координат по некоторому закону

$$\tau = \frac{1}{2}(1 + \cos \varphi(x, y)), \quad (1)$$

Тогда пропускание двух наложенных пленок (или, что равносильно пленки и листа бумаги) равно

$$\begin{aligned} \tau &= \tau_1 \cdot \tau_2 = \frac{1}{4}(1 + \cos \varphi_1(x, y))(1 + \cos \varphi_2(x, y)) = \\ &= \frac{1}{4}(1 + \cos \varphi_1(x, y) + \cos \varphi_2(x, y) + \cos \varphi_1(x, y) \cdot \cos \varphi_2(x, y)) = \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + \cos \varphi_1(x, y) + \cos \varphi_2(x, y) + \frac{1}{2} \cos(\varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)) + \frac{1}{2} \cos(\varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y)) \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Если $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)$ являются быстроменяющимися функциями координат, то широкие (по сравнению со штрихами отдельных пленок) темные полосы и светлые полосы муара описываются последним слагаемым в выражении (1). Распределение этих полос определяется разностью функций $\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)$, которые могут служить аналогом фаз колебаний интерферирующих волн.

На пленках и листах нанесены шкалы – в качестве единиц измерения длины используйте единицы этих шкал.

1.1 Расположите пленку №1 на листе №1, на котором нанесены такие же штрихи, как и на пленке, так чтобы пленку можно было поворачивать вокруг оси, в качестве которой используйте кнопку, воткнутую в картонную папку. Эта ось отмечена на пленке и листе бумаги кружком в левой части листа.

Измерьте зависимость расстояния между полосами муара от угла между штрихами на бумаге и на пленке.

Постройте график полученной зависимости.

Получите теоретическую зависимость ширины полос муара от угла между штрихами. По данным, полученным в п 1.1 определите ширину полос, нанесенных на пленку и лист бумаги №1.

Приведите оптическую интерференционную схему, которую моделирует данный опыт с полосами муара.

2. Расположите пленку №1 на листе №2, период штрихов на которой отличается от периода штрихов на пленке.

Измерьте зависимость расстояния между полосами муара от угла между штрихами на бумаге и на пленке.

Постройте график полученной зависимости. Определите период штрихов на листе №2.

Приведите оптическую интерференционную схему, которую моделирует данный опыт с полосами муара.

3. Расположите пленку №2 на листе №3. При сдвиге пленки возникают параллельные полосы муара.

Измерьте зависимость ширины полосы от сдвига пленки.

Постройте график полученной зависимости.

Пропускание пленки (и распределение полос на листе бумаги) в этом эксперименте описывается функцией

$$\tau = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{x^2 + y^2}{D_0^2} \right) \right). \quad (3)$$

Приведите оптическую интерференционную схему, которую моделирует данный опыт с полосами муара. Получите теоретическую зависимость ширины полосы муара от сдвига пленки. Определите по полученным данным параметр D_0 .

Подсказка. Можно показать, что при наложении систем двух параллельных полос ширина полос муара D связана с периодами решеток d_1 и d_2 соотношением

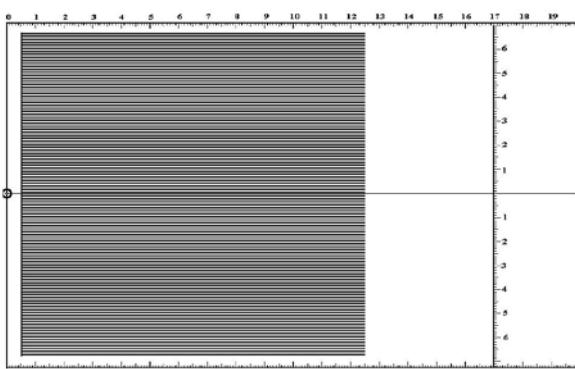
$$\frac{1}{D^2} = \frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2} - \frac{2}{d_1 d_2} \cos \alpha, \quad (4)$$

где α - угол между полосами.

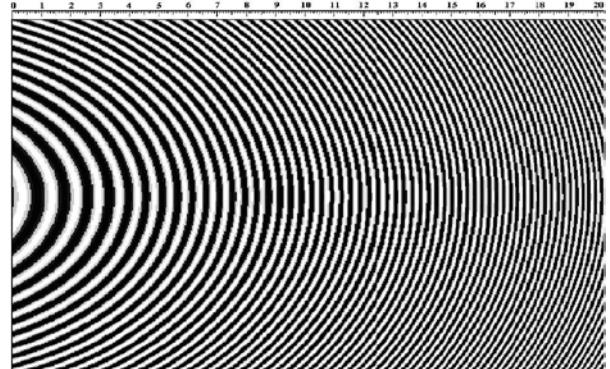
Комментарии к условию задачи.

1. Основная сложность подготовки данной задачи заключается в изготовлении необходимых пленок и листов бумаги с требуемым рисунком. Лучше всего это сделать с помощью компьютера и лазерного принтера. На пленке №1 нанесены параллельные штрихи с периодом менее 1 мм. Такой же рисунок наносится на лист №1. На листе №2 нанесены параллельные штрихи с другим периодом (увеличенном на 10-20%). На пленке №2 и листе №3 нанесена система колец, квадраты радиусов которых пропорциональны номеру кольца. Такая система носит названия колец Ньютона, потому, что она возникает в известной одноименной интерференционной схеме. Ниже приведены их изображения, для удобства на них нанесены и измерительные шкалы.

Пленка №1



Пленка №2



Сейчас можно найти много интересных блестящих предметов, достойных тщательного изучения. Очень интересными объектами является всевозможные широко рекламируемые отражатели. Помните: «Стань заметней в темноте!» Да они свет отражают хорошо, а если осветить их с противоположной стороны?

Задача 60. «Интерференция, дифракция, или...»



Оборудование: лазерная указка на подставке, линза собирающая, фликер-отражатель, кусочек CD- диска, экраны с миллиметровой бумагой, линейка.

При поведении оптических экспериментов главное – точность настройки!

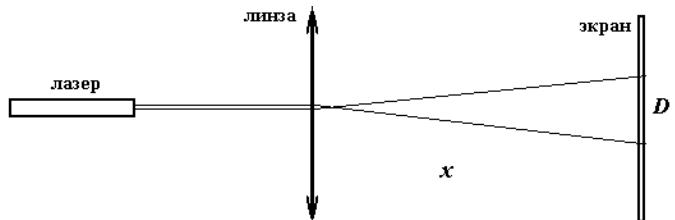
Экономьте батарейки лазерной указки (made in China!).

Не светите ею, когда не проводите измерения!

Задание 0. Определите длину волны излучения лазерной указки.

Задание 1. Используя имеющееся оборудование, измерьте с максимальной точностью фокусное расстояние линзы.

Задание 2. Расположите собирающую линзу перед лазерной указкой за ней расположите экран. Измерьте зависимость диаметра пятна на экране от расстояния между линзой и экраном. Постройте график этой зависимости. Оцените угловую расходимость лазерного луча.



Задание 3. Расположите перед лазерной указкой экран с отверстием, через который проходит лазерный луч. Перпендикулярно лучу расположите кусочек CD-диска, который является отражающей дифракционной решеткой. На экране вы можете увидеть три отражения. Измерьте зависимость расстояния между отражениями от расстояния между экраном и диском. Определите период решетки CD-диска.

Задание 4. Расположите между лазерной указкой и экраном кусочек фликера. При этом на экране вы увидите шесть ярких пятен. Предложите структуру фликера, которая бы объясняла данное явление. Понятно, что на флиkerе находится некоторая пространственно периодическая структура. Определите ее период.

Комментарии к условию задачи.

1. Используемый в данной работе отражатель можно купить в киоске. Для экономии средств один отражатель можно разрезать на несколько частей, для работы достаточно квадратный кусочек со стороной в пол сантиметра.

2. Данную работу следует проводить в затененном помещении, полной темноты не требуется, но яркий солнечный свет испортит все работу!

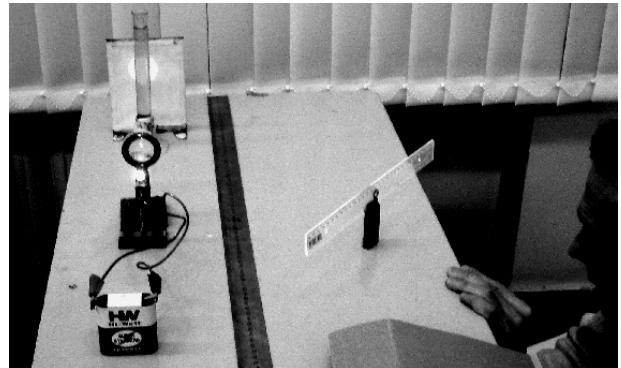
Радугу на небе видели все, а на столе?



Задача 61. «Радуга»

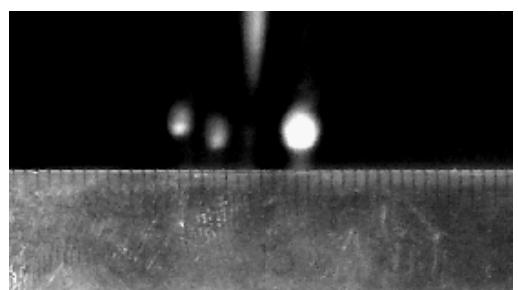
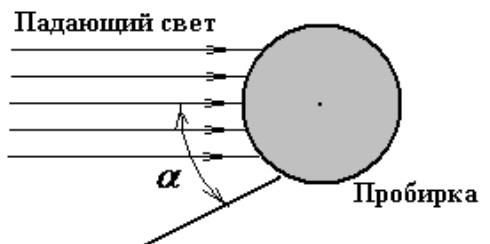
Оборудование:

1. Лампочка на подставке с питанием (батарейка, или ЛИП)
2. Линза собирающая
3. Экран
4. Линейка пластмассовая – прозрачная
5. Лист белой бумаги накрыть стол, на нем можно рисовать.
6. Пробирка на подставке.
7. Рулетка или мерная лента
8. Гель для мытья посуды
9. Кусок пластилина (как крепежный материал).



Задания.

1. Измерьте фокусное расстояние представленной вам линзы.
2. Определите показатель преломления воды (\bar{n} - средний для всех волн видимого диапазона).
Методику определения этой величины разработайте самостоятельно. Не забудьте ее описать в своей работе.
3. В направлении, образующем угол около $\alpha \approx 40^\circ$ к первоначальному направлению распространения света образуется достаточно яркая цветная полоса (это и есть радуга).
Измерьте с максимальной точностью этот угол. Нарисуйте ход лучей, образующих эту радугу. Докажите экспериментально справедливость вашего объяснения этой цветной полосы.
Не забудьте кратко (достаточно пол страницы) описать свои наблюдения и измерения.



После того, как вы нашли «радугу» экране, расположите на месте экрана свой глаз. При этом вблизи края пробирки вы увидите яркий цветной блик. Этот блик можно видеть и с большого расстояния. Для того, чтобы его видеть нужно также подбирать и высоту, на которой расположен ваш глаз.

Между пробиркой и местом расположения глаза расположите горизонтально прозрачную линейку, так чтобы блик был виден на фоне шкалы линейки (или чуть выше).

Комментарии к условию задачи.

1. Прежде всего, нужна тщательная юстировка – особенно при изменении малых изменений показателя преломления. Важно не сдвинуть с места ни лампочку, ни линзу, ни пробирку, ни прозрачную линейку.
2. В качестве подставок под пробирку и под линейку можно использовать пластилин – лучше запастись им – каждому по два куска!
3. Полное затемнение не нужно, но лучше когда в комнате сумрачно, тогда на экране лучше видна радуга. Наблюдать блик и измерять его положение можно и при дневном свете.
4. Прозрачную линейку лучше располагать на расстоянии порядка 50 см, а глаз за ней еще на сантиметров 25 дальше.

Радуга красивое и эффектное зрелище, теперь нам необходимо понять, почему небо голубое.

Задача 62. «Лучше быть рассеянным, чем отраженным!»



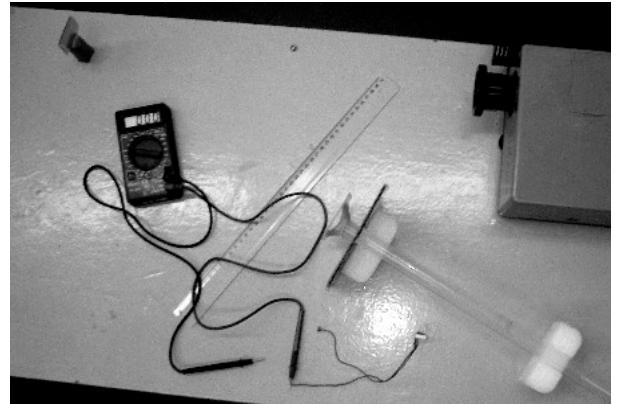
Оптические измерения требуют предельной тщательности и аккуратности, не жалейте времени на юстировку, каждый раз убеждайтесь, что свет идет вдоль оси трубы, используйте предоставленные куски картона, чтобы «убрать» лишний свет!

Приборы и оборудование: фотоэлемент, мультиметр, источник света (диапроектор), соединительные провода, дифракционная решетка на подставке, экран, стеклянная трубка с мутным раствором, линейка. Куски картона

Рекомендуемое расположение оборудования показано на фотографии.

Фотоэлемент подключается напрямую к мультиметру, переключатель поставьте на измерение напряжения, считайте, что зависимость показаний фотоэлемента от интенсивности падающего на него света прямо пропорциональна.

В качестве дифракционной решетки используется кусочек от лазерного диска, так как штрихи этой решетки изогнуты, то дифракционная картина на экране имеет форму сектора. Тем не менее, условия максимумов дифракции остаются справедливыми.



Направьте поток света сквозь трубку с раствором. Убедитесь, что рассеянное излучение хорошо видно через боковую поверхность трубы.

1.1 Пропустите через трубку белый свет, отраженный кусочком диска. Измерьте зависимость интенсивности рассеянного света от расстояния, пройденного светом через мутную среду. Постройте график полученной зависимости.

1.2 Измерьте зависимость интенсивности рассеянного света от расстояния пройденного светом через мутную среду. Измерения проведите для излучений нескольких 3- 4 длин волн (по возможности старайтесь, чтобы проходящий свет был близок к монохроматическому).

Не забудьте привести схему вашей установки с указанием расстояний между ее элементами.

Для монохроматического излучения интенсивность света, прошедшего через мутную среду, зависит от пройденного расстояния l по закону

$$I = I_0 e^{-\mu l}, \quad (1)$$

где μ - показатель рассеяния.

1.3 Постройте графики полученных зависимостей. Дайте их теоретическое описание, проведите сравнение с теоретической зависимостью.

1.4 Дайте качественное объяснение зависимости, полученной в п.1.1

Комментарии к условию задачи.

1. Одна из целей этой почти качественной задачи – дать совет, где можно найти простой и надежный фотоприемник. Калькуляторы сейчас подешевели настолько, что их уже могут давать как сдачу при покупке газет. Многие из них снабжены фотоэлементом, только проследите – иногда вместо фотоэлемента вставляют муляж (*made in China!*). Вскройте коробку и подключитесь к выводам этого фотоэлемента и вы получите надежный фотоэлемент, даже в корпусе.
2. Сложнее найти трубку, одна сторона ее может быть закрыта обычной пробкой, а вот вторая должна быть прозрачна. Сделать это не так уж просто – мы обращались к стеклодувам! Длина трубы должна быть не менее 40 см.
3. Мутный раствор – это обыкновенная вода с несколькими каплями молока – традиционная среда для изучения рассеяния света, в том числе и в атмосфере!
4. В качестве источника света лучше использовать достаточно мощный диапроектор, в этом случае получаются стабильные результаты.
5. Наконец, следует использовать дифракционную решетку, которую, в принципе можно заменить набором светофильтров.

4.11 Если у вас нет ускорителя.

Современная физика не мыслима без физики элементарных частиц. Конечно, мы не предлагаем исследовать свойства кварков в свободном состоянии, но познакомиться с методами исследования в этой области следует попытаться!

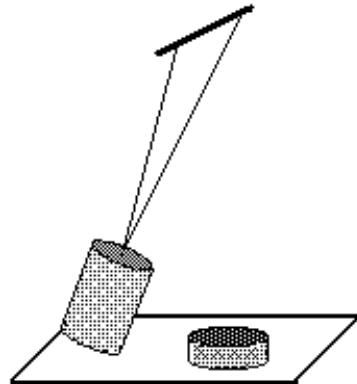
Задача 63. «Почти ядерная физика»



До настоящего времени основным экспериментальным методом исследования свойств микрочастиц является изучение характеристик столкновения частиц. На этом пути экспериментатор сталкивается со множеством проблем: поток частиц, как правило, имеет большой разброс значений энергии, вероятности некоторых процессов могут быть достаточно малыми, измерение некоторых характеристик частиц вызывает технические сложности, неизбежно присутствуют значительные флуктуации результатов, проведение эксперимента требует терпения, а также больших временных и материальных затрат.

Вам предстоит, частично познакомится с некоторыми из этих проблемами, в модельной системе: в качестве моделей частиц используются обыкновенные пластмассовые шашки, «ускорителем» частиц - металлический цилиндр, подвешенный на нити, тормозящей средой и регистрирующей системой - лист бумаги и, наконец, источником энергии, управляющей, контролирующей и анализирующей системой Вы сами.

Соберите установку для исследования соударений шашек между собой. Подвесьте металлический цилиндр на нитях так, чтобы в нижней своей точке он почти касался стола. Отклоняя нить на известный угол, и плавно отпуская, его можно использовать в качестве «ускорителя» частицы. После удара шашка должна скользить по бумаге, расстеленной на столе или на полу (где вам удобней).



Задание 1. Покажите, что мерой начальной кинетической энергии частицы (шашки) может служить путь, пройденный этой шашкой до остановки.

Задание 2. Постарайтесь добиться максимальной стабильности начальной энергии шашки сразу после удара. Оцените экспериментально относительную флуктуацию начальной энергии шашки. Какими методами вам удалось уменьшить разброс начальных энергий?

Относительной флуктуацией физической величины X называется отношение ее среднеквадратичного отклонения к среднему значению

$$\varepsilon = \frac{\sigma_X}{\langle X \rangle}; \quad \langle X \rangle = \frac{\sum X_k}{N}; \quad \sigma_X = \sqrt{\frac{\sum_k (X_k - \langle X \rangle)^2}{N}}.$$

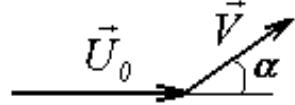
Задание 3. Исследуйте зависимость начальной энергии шашки при центральном ударе от угла отклонения нити φ . Проведите сравнение экспериментальной и теоретической зависимостей.

Задание 4. Считая удар металлического цилиндра о шашку абсолютно упругим, а массу цилиндра значительно больше массы шашки, определите коэффициент трения шашки о бумагу.

Какие систематические факторы, по вашему мнению, наиболее сильно влияют на ошибку определения коэффициента трения?

Задание 5. Исследуйте нецентральный удар цилиндра о шашку.

Покажите (теоретически), что скорость шашки после удара (в рамках описанных в п.4 приближений) пропорциональна $\cos \alpha$, где α угол между скоростями цилиндра до удара \vec{U}_0 и шашки после удара \vec{V} . Исследуйте экспериментально эту зависимость.



Задание 6. Определите коэффициент потерь η механической энергии при центральном ударе двух шашек, одна из которых первоначально покоялась.

$$\eta = \frac{E_0 - E}{E_0}, \text{ где } E_0 \text{ - механическая энергия шашек до удара, } E \text{ - энергия после удара.}$$

Задание 7. Исследуйте зависимость скорости шашек после столкновения (одна из которых покоялась) от угла α между скоростями шашки до и после удара.

Пункты 6. 7. Рекомендуем выполнять одновременно – произошел центральный удар – относите его к п. 6, если нецентральный, то к п.7, если столкновение не произошло – используйте результат для контроля начальной энергии.

Решения задач части 4.

Задача 20. «Задача Архимеда».



Одна из возможностей проведения эксперимента заключается в изучении зависимости длины x плеча рычага, к которому прикрепляются скрепки, от числа n скрепок, подвешенных на конец карандаша. Условия равновесия рычага в данном случае имеет вид

$$\frac{M}{2l}(l-x)^2 = \frac{M}{2l}x^2 + nm x, \quad (1)$$

где m, M - массы скрепки и карандаша, соответственно, $l = 168\text{мм}$ - длина карандаша. Из уравнения (1) следует выражение для длины x

$$x = \frac{l}{2\left(1+n\frac{m}{M}\right)}, \quad (2)$$

которое можно привести к линейному виду, удобному для проверки

$$\frac{l}{2x} = 1 + n\frac{m}{M}. \quad (3)$$

В таблице приведены измеренные значения длины плеча x , при различном числе подвешенных скрепок n .

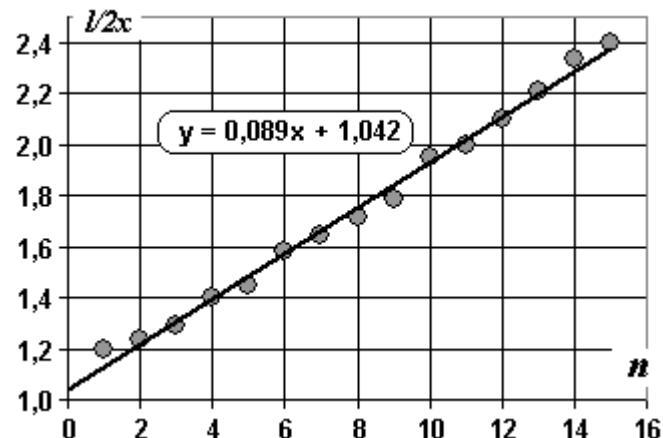
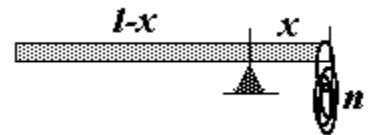
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$x, \text{мм}$	70	68	65	60	58	53	51	49	47	43	42	40	38	36	35

На рисунке показан график зависимости (3), на нем также приведено уравнение экспериментальной зависимости, полученное с помощью МНК. Этот линейный график подтверждает справедливость уравнения, а, следовательно, правильность правил равновесия рычага. Важно отметить, что свободный член линейной зависимости в пределах погрешности равен 1, в полном соответствии с теоретическим уравнением (3). Наклон графика равен отношению массы скрепки к массе карандаша. Рассчитанное значение этого отношения

$$\frac{m}{M} = (8,2 \pm 0,7) \cdot 10^{-2}$$

или один карандаш весит примерно 12 скрепок.

Обратите внимание, что экспериментальная проверка условия равновесия должна сводится к изучению зависимости, полученной теоретически. Наиболее удобным, наглядным и убедительным справедливости полученной зависимости является ее линеаризация.





Задача 21. «Взвешивание воздуха».

1. Рассмотрим условия равновесия весов.

В начальном положении равенство моментов сил, действующих на разные плечи весов, имеет вид

$$m_1 l_1 \cos \alpha = m_2 l_2, \quad (1)$$

где m_1, m_2 - массы плеч (с уравновешивающим грузом),

l_1, l_2 - расстояния от упора до центров масс плеч. После

того, как на горизонтальное плечо повесили гайку, массы m_0 на расстоянии l от упора, это плечо наклонится на некоторый угол β , который можно найти из условия равновесия в этом положении

$$m_1 l_1 \cos(\alpha - \beta) = m_2 l_2 \cos \beta + m_0 l \cos \beta. \quad (2)$$

Из этих уравнений находим

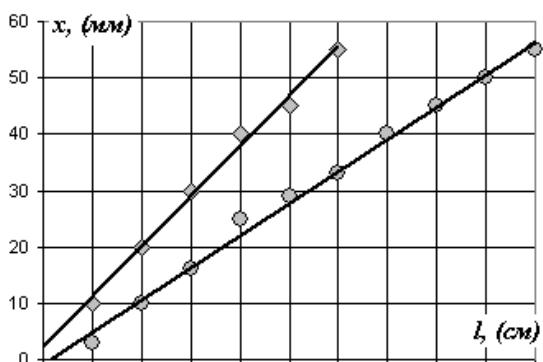
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{m_0 l}{m_1 l_1 \sin \alpha}. \quad (3)$$

Таким образом, тангенс угла наклона прямо пропорционален моменту приложенной силы, что делает данные весы линейными. Следовательно, в качестве показаний весов удобно использовать x -расстояние, которое “отсекает” стрелка на линейке. Если расстояние от упора до линейки обозначить L , то показания весов определяются формулой:

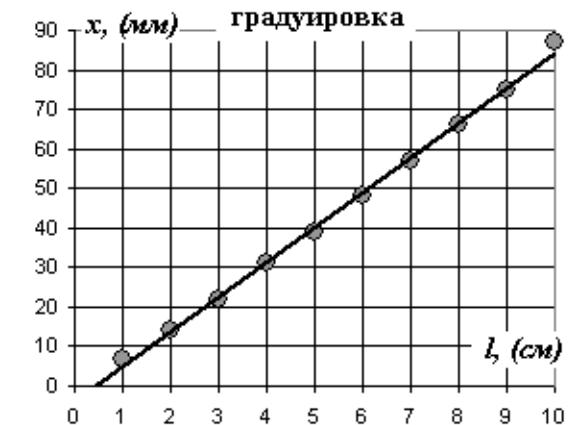
$$x = L \operatorname{tg} \beta = \frac{L}{m_1 l_1 \sin \alpha} m_0 l = K m_0 l, \quad (4)$$

где K - коэффициент пропорциональности (чувствительность), зависящий от геометрических свойств весов.

2. Для примера на рисунке приведены графики экспериментально полученных зависимостей при двух разных значениях угла α ($\alpha_1 \approx 20^\circ, \alpha_2 \approx 10^\circ$). Как видно из графиков, прямая пропорциональная зависимость $x(l)$ подтверждается экспериментально, причем, с уменьшением угла α чувствительность весов повышается.



3. Для измерения веса (здесь под весом понимается разность между силой тяжести и силой Архимеда) воздушного шарика закрепим не надутый шарик с помощью нитки на конце плеча рычага и с помощью пластилина уравновесим весы (установим измерительное плечо горизонтально). После этого проградуируем весы с помощью гайки, массу которой определим взвешиванием. Результаты измерений приведены на рисунке (градуировочный график). Здесь измерения следует провести с максимальной тщательностью.



Надуем воздушный шарик и прикрепим его на прежнее место, предварительно сняв гайку. Снимем показания наших весов x_0 . По градуировочному графику найдем значение l_0 , такое, чтобы гайка массы m_0 , находящаяся

на расстоянии l_0 , создавала такой же момент силы, как вес воздуха в шарике на расстоянии l_1 (расстояние от упора до точки подвеса шарика)

$$m_0 l_0 g = l_1 \tilde{m} g,$$

где \tilde{m} – “избыточная” масса воздуха. Отсюда следует, что $\tilde{m} = m_0 \frac{l_0}{l_1}$.

По нашим измерениям, $m_0 = (500 \pm 10) \cdot 10^{-6} \text{ кг}$, $l_0 = (4,5 \pm 0,2) \text{ см}$, $l_1 = (20,0 \pm 0,2) \text{ см}$, что соответствует $\tilde{m} \approx (0,112 \pm 0,006) \text{ г}$ с относительной погрешностью 5%.

Для определения давления воздуха в шарике следует воспользоваться уравнением состояния газа, причем для его использования следует оценить объем надутого шарика.

Отметим традиционную последовательность выполнения задания: получение теоретической зависимости, ее экспериментальная проверка, получение градуировочного графика, измерения, расчет окончательного результата и его погрешности.



Задача 22. Вязкость жидкости.

1. Теоретическое описание движения пластилинового шарика очевидно. При падении тела в вязкой среде (жидкости или газе) на него действуют: сила тяжести $m\vec{g}$, выталкивающая сила Архимеда $F_A = \rho g V$ и сила сопротивления Стокса $F = 6\pi\eta v$. Так как сила сопротивления возрастает с ростом скорости, то при некотором значении последней движение становится равномерным. Скорость установившегося движения можно определить из условия равновесия сил

$$mg - F_a - F_c = 0 \quad (1)$$

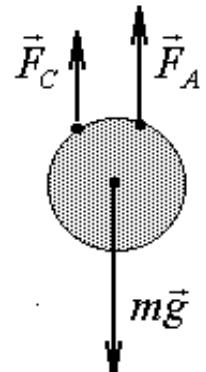
Для шарика радиуса R , падающего в жидкости уравнение (1) преобразуется к виду

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_m g - \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g - 6\pi\eta Rv = 0, \quad (2)$$

ρ_m – плотность вещества тела, ρ – плотность жидкости, в которой падает тело.

Из этого уравнения находим скорость установившегося движения

$$v = \frac{2R^2(\rho_m - \rho)g}{9\eta}. \quad (3)$$



2. Для проверки равномерности движения следует поступать традиционным способом – показать, что время падения пропорционально высоте падения. Эксперимент подтверждает это предположение.

3-4. Для измерения плотностей пластилина и жидкости (крахмального клейстера) можно воспользоваться методом гидростатического взвешивания: измерить вес куска пластилина в воздухе, в воде и киселе. Отметим, что плотность киселя практически не отличается от плотности воды.

5. На выполнении этого пункта остановимся подробнее.

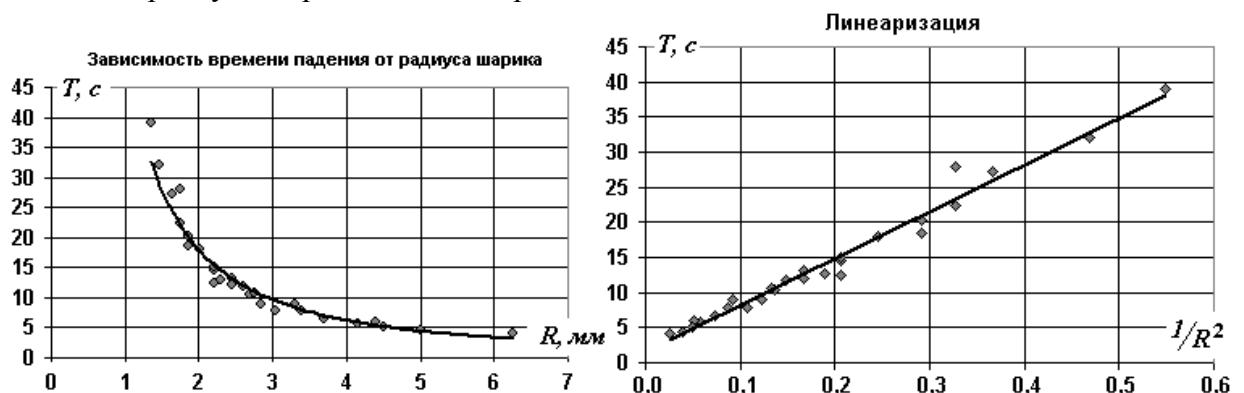
Проверить применимость формулы Стокса можно, исследуя зависимость времени опускания шарика на расстояние h (не следует начинать измерения с верхней точки –

следует начинать отсчет времени после некоторого 2-3 см участка разгона) от радиуса шарика. Из формулы (3) следует, что это время равно

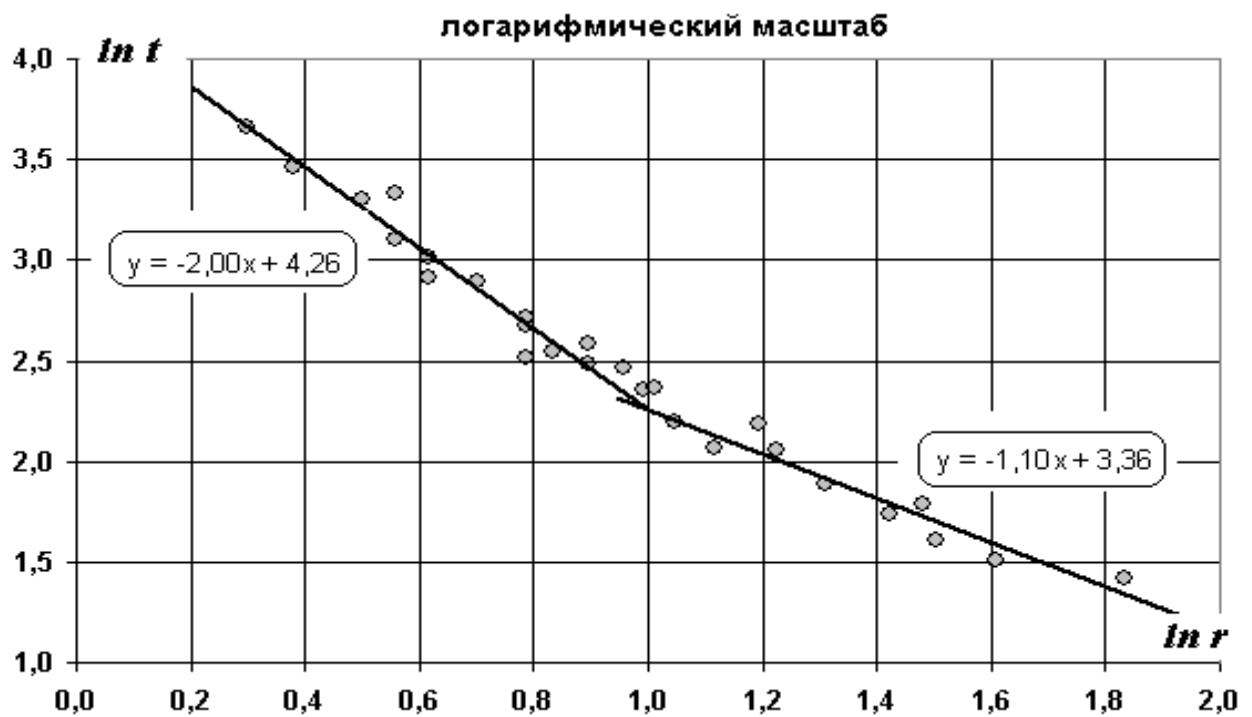
$$t = \frac{h}{v} = \frac{9\eta h}{2(\rho_u - \rho)g} \frac{1}{R^2} \quad (4)$$

Поскольку проводить измерения диаметра шарика достаточно сложно (шарики деформируются при сильном сдавливании штангенциркулем) и движение шарика в жидкости подвержено случайным влияниям (начинается вращение, трение о стенки) количество опытов должно быть достаточно велико.

Экспериментальным подтверждением справедливости проведенного теоретического анализа может служить линейность зависимости времени движения t от $\frac{1}{R^2}$. Ниже на графиках приведены экспериментально полученные графики зависимости времени падения от радиуса шарика и ее линеаризация.



На первый взгляд кажется, что в пределах погрешности экспериментальные данные подтверждают сделанные предположения, то есть линеаризация удалась!



Более тщательный анализ частично отвергает построенную теоретическую модель. Построим данную зависимость в логарифмическом масштабе. При выполнении формулы (4) коэффициент наклона графика зависимости $\ln t$ от $\ln R$ должен быть примерно равен

(– 2). Однако такой наклон графика получен только для шариков, радиусы которых не превышают примерно 2,5 мм. При больших радиусах формула Стокса оказывается не применимой! Поэтому дальнейшие расчеты вязкости клейстера должны проводится только по данным для малых шариков.

Задача 23. Движение ионов.



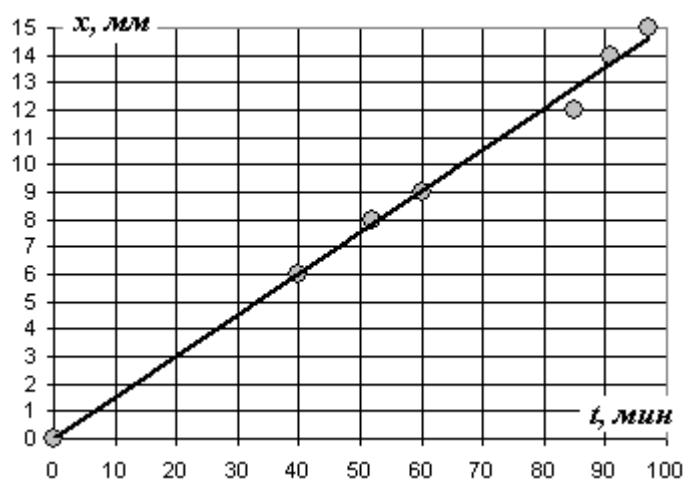
Кроме испытания терпения (время измерения составляет около полутора часов), выполнение данной задачи не вызывает особых сложностей. Зависимость смещения окрашенной границы от времени в пределах погрешность оказывается линейной. В нашем эксперименте напряжение между электродами равно $U = 4B$, расстояние между ними $l = 6,0\text{ см}$. Результаты измерений показаны на графике. Расчет по МНК приводит к следующим значениям параметров линейной зависимости $x = at + c$:

$$a = (0,15 \pm 0,10)\text{мм / мин};$$

$$c = (0,02 \pm 0,68)\text{мм}.$$

Значение подвижности ионов

$$b = (3,8 \pm 0,2) \cdot 10^{-8} \frac{\text{м}^2}{\text{В} \cdot \text{с}}; \text{ относительная погрешность найденного значения } \varepsilon \approx 7\%.$$





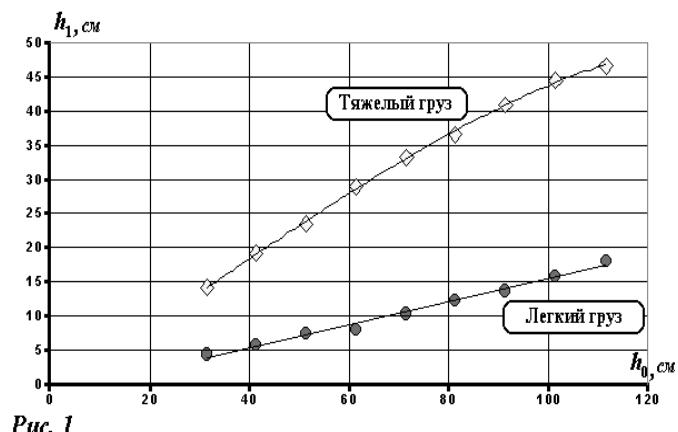
Задача 24. «Магнитная вязкость»

Часть 1. Движение без магнитов.

Результаты измерений зависимостей высоты подъема грузов h_1 от начальной высоты падения h_0 представлены в таблице 1. Внесенные средние значения высот подъема, полученные по трем измерениям.

Таблица 1.

$h_0, \text{см}$	$h_1, \text{см}$ (легкий)	$h_1, \text{см}$ (тяжелый)
111,5	18	46,75
101,5	15,75	44,5
91,5	13,75	41
81,5	12,25	36,5
71,5	10,25	33,25
61,5	8	29
51,5	7,5	23,5
41,5	5,75	19,25
31,5	4,25	14



Rис. 1

Графики, построенные по полученным данным, представлены на Рис. 1.

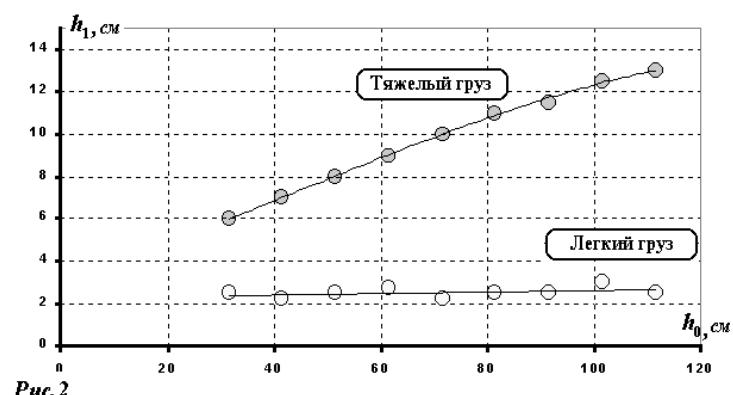
Результаты показывают, что потери механической энергии достаточно велики. Основными их причинами, по-видимому, является сила трения в оси блока и неупругость динамического удара при переходе груза через нижнюю точку. Почти строгая пропорциональность полученной зависимости для легкого груза говорит о возможности пренебрежения сопротивлением воздуха. Для тяжелого груза средняя скорость вращения больше, поэтому влияние силы сопротивления воздуха существенно, что подтверждается заметной нелинейностью графика, особенно при больших высотах падения.

Часть 2. Магнитное торможение.

Результаты аналогичных измерений, проведенные при закреплении в держателе двух больших кольцевых магнитов представлены в Таблице 2.

Таблица 2.

$h_0, \text{см}$	$h_1, \text{см}$	$h_1, \text{см}$
111,5	2,5	13
101,5	3	12,5
91,5	2,5	11,5
81,5	2,5	11
71,5	2,25	10
61,5	2,75	9
51,5	2,5	8
41,5	2,25	7
31,5	2,5	6



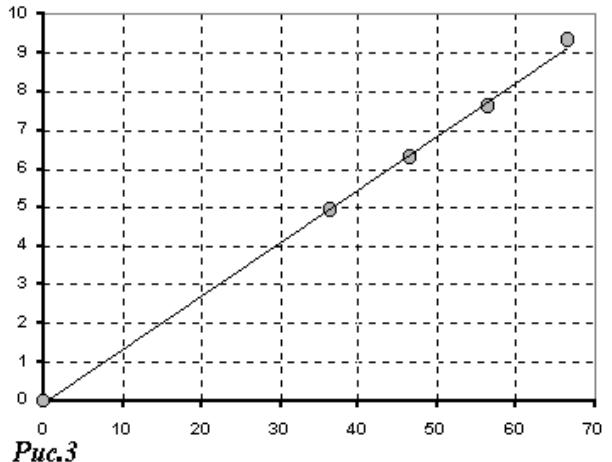
Rис. 2

Графики, построенные по полученным данным, представлены на Рис. 2.

Как следует из полученных результатов влияние магнитов на вращение пластиинки весьма существенно – величина вторичного подъема грузов уменьшилась более чем в три раза, а легкого груза более чем в шесть раз. Это факт говорит о том, что влияние «магнитной вязкости» на силы торможения является преобладающим. Особенно существенно ее влияние на движение легкого груза – время подъема в пределах погрешности не зависит от высоты, с которой опускается груз – следовательно, можно считать, что легкий груз практически весь путь проходит с постоянной скоростью.

Часть 3. Индукция магнитного поля магнита.

Для подтверждения гипотезы о равномерном движении можно провести следующий доказательный эксперимент. Расположить в держателе малые магниты (если при них движение будет равномерным, то при более сильных магнитах, тем более, движение будет равномерны) и провести измерения времени движения t малого груза, отпущеного со строго определенной высоты, в зависимости от длины последнего участка пути S . Результаты таких измерений представлены в Таблице 3 и на графике Рис.3. Результаты получены при начальной высоте груза равной 86 см.



Прямая пропорциональная зависимость между измеренными величинами однозначно свидетельствует о равномерности движения.

При движении проводника в магнитном поле в нем возникают индукционные токи Фуко, которые взаимодействуя с породившим их полем приводят к возникновению тормозящих сил, которые и называются силами вязкого трения. Величина этой силы (в нашем случае момента силы) пропорциональна квадрату индукции поля и скорости движения проводника. Следовательно, в установившемся режиме изучаемая пластика будет вращаться с угловой скоростью обратно пропорциональной квадрату индукции поля. Следовательно, время движения между двумя фиксированными точками пропорционально квадрату вектора индукции. Окончательно получаем, что измеряемая индукция магнитного поля пропорциональна квадратному корню из времени движения $B = C\sqrt{t}$.

В трех указанных случаях (по одной паре магнитов, и две пары магнитов средние времена движения оказались равными $t_1 = 9,4\text{с}$, $t_2 = 13,9\text{с}$, $t_3 = 25,3\text{с}$, что приводит к следующей пропорции между индукциями полей, создаваемых магнитами

$B_1 : B_2 : B_{1+2} \approx 3 : 3,7 : 5$. Как это ни странно на первый взгляд – принцип суперпозиции поле в данном случае не выполняется! Что связано, с тем, что при размещении двух пар магнитов изменяется расстояние между магнитами.



Задача 25. «Задача Г. Галилея – скатывание по наклонной плоскости»

1. Экспериментальное изучение закона скатывания шарика должно проводится традиционным методом – измеряется время скатывания из начального положения до фиксированного значения длины скатывания L . Так время движения мало (несколько секунд), то его измерение неизбежно приводит к существенным случайным погрешностям. Поэтому необходимо для каждой длины скатывания проводить несколько измерений времени движения¹. Результаты таких измерений приведены в таблице 1. В последних строках таблице приведены средние значения времен скатывания и погрешности их измерения при постоянной высоте наклонной плоскости $h = 2,0\text{ см}$. Для этих измерений выбрана малая высота, чтобы измеряемые времена были побольше.

Таблица 1. Зависимость времени скатывания от длины пройденного пути.

L (см)	10	20	30	40	50	60
t (с)	1,12	1,32	2,44	2,38	2,75	3,15
	1,34	1,38	1,94	2,56	2,93	3,80
	1,1	1,44	2,1	2,41	3,08	3,21
	1,12	1,42	1,91	2,37	2,93	3,08
	0,98	1,35	2,13	2,39	3,05	3,28
	1,12	1,38	2,15	2,42	2,91	3,20
	1,21	1,40	1,95	2,29	2,86	3,20
	1,05	1,52	2,12	2,34	2,92	3,21
	1,30	1,62	2,14	2,32	3,03	3,19
$\langle t \rangle, \text{с}$	1,15	1,43	2,09	2,39	2,94	3,26
$\Delta t, \text{с}$	0,23	0,19	0,34	0,15	0,20	0,42



Если предположить, что движение шарика является равноускоренным, то зависимость пройденного пути от времени описывается законом $L = \frac{at^2}{2}$. Для проверки этого закона следует построить график зависимости квадрата скорости от длины пути (именно так – во-первых, эта зависимость должна быть линейной, во-вторых, длина измеряется точнее, чем время движения):

$$t^2 = \frac{2}{a} L . \quad (1)$$

Построенный график этой зависимости показывает, что в пределах погрешностей измерения данная зависимость действительно может считаться линейной, поэтому модель равноускоренного движения в данном случае применима.

¹ В очередной раз обращаем внимание на методику измерений: фиксируется расстояние, затем измеряется время движения.

2. Для измерения ускорения можно измерять время движения по максимальной длине желоба, так как в этом случае это время будет максимально, поэтому погрешности измерений будут меньше.

Из закона движения следует, что ускорение рассчитывается по формуле

$$a = \frac{2L}{t^2}. \quad (2)$$

Результаты измерений времени скатывания ($L = 68\text{ см}$) от высоты наклонной плоскости h приведены в таблице 2. В ней же приведены рассчитанные значения ускорений, а также рассчитанные значения доли энергии вращательного движения.

Таблица 2. Зависимость времени скатывания от высоты наклонной плоскости. Расчет ускорения и доля энергии вращательного движения.

$h, \text{ см}$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$t, \text{ с}$	1,51	1,64	1,78	1,82	1,96	2,16	2,45	2,69	3,45	4,9
$a, \text{ м/с}^2$	0,60	0,51	0,43	0,41	0,35	0,29	0,23	0,19	0,11	0,057
η	0,59	0,61	0,63	0,59	0,59	0,60	0,61	0,57	0,60	0,61

График зависимости ускорения от высоты наклонной плоскости указывает, что величина ускорения примерно пропорциональна высоте наклонной плоскости.



Хорошо известно и легко доказуемо, что при движении тела по наклонной плоскости ускорение пропорционально синусу угла наклона к горизонту. В исследованном случае углы наклона малы, поэтому синус угла наклона примерно равен $\sin \alpha \approx \alpha = \frac{h}{L}$, что и объясняет полученную экспериментально зависимость.

3. В верхней точке шарик обладает потенциальной энергией $W = mgh$, которая переходит в кинетическую энергию, частично поступательного $\frac{mv^2}{2}$, частично вращательного движения. Получим формулу для расчета доли полной энергии, перешедшей в кинетическую энергию вращательного движения

$$\eta = 1 - \frac{\frac{mv^2}{2}}{mgh} = 1 - \frac{v^2}{2gh},$$

здесь v - мгновенная скорость шарика в нижней точке наклонного желоба, которая при равноускоренном движении с нулевой начальной скоростью в два раза превышает среднюю скорость движения $v = 2\langle v \rangle = 2\frac{S}{t}$. Таким образом, расчетная формула имеет вид

$$\eta = 1 - \frac{v^2}{2gh} = 1 - \frac{2S^2}{ght^2}. \quad (3)$$

Результаты расчетов по этой формуле приведены в последней строке таблицы 2. Расчеты показывают, что доля вращательной энергии не зависит от угла наклонной плоскости и равна $\eta \approx 0,60 \pm 0,03$

Необходимое теоретическое дополнение.

Теоретическое значение найденной доли энергии вращательного движения определяется по формуле

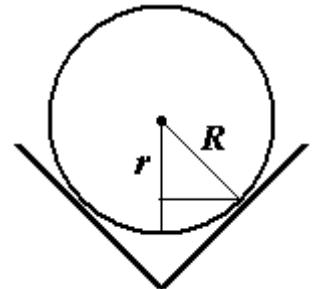
$$\eta = \frac{\frac{I\omega^2}{2}}{\frac{I\omega^2 + mv^2}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{mv^2}{I\omega^2}}, \quad (4)$$

где $I = \frac{2}{5}mR^2$ - момент инерции шарика. Если шарик катится по плоской поверхности, то $v = \omega R$, тогда

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{mv^2}{I\omega^2}} = \frac{2}{7} \approx 0,3.$$

В наших экспериментах шарик катился по прямоугольному желобу, поэтому скорость центра шарика связана с его угловой скоростью соотношением $v = \omega r = \omega \frac{R}{\sqrt{2}}$. В этом случае искомое отношение оказывается равным

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{mv^2}{I\omega^2}} = \frac{1}{1 + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{4}{9} \approx 0,44.$$



Вероятно, что отклонение экспериментального значения связано с влиянием силы трения, приводящим к увеличению времени движения.

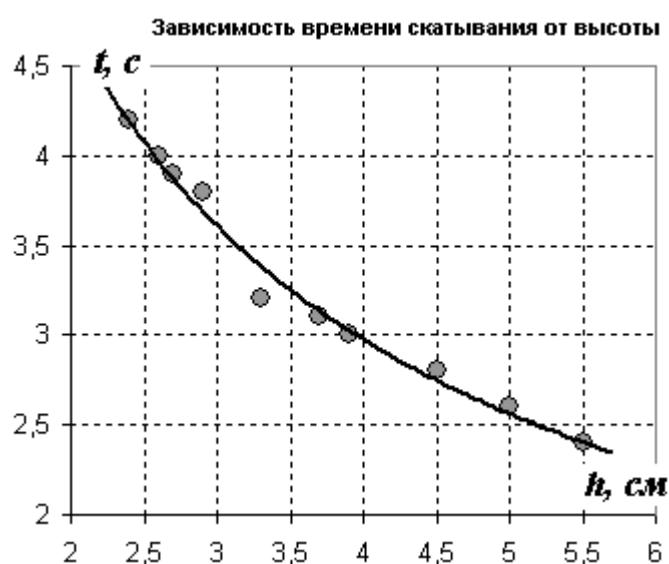


Задача 26. «Трубка на наклонной плоскости»

- Выполнение этого задания полностью аналогично пункту 1 в предыдущей задаче 25, поэтому здесь не рассматривается. Отметим, что скатывание цилиндра также может рассматриваться как равноускоренное движение.
- Результаты измерений зависимости времени t скатывания трубы с наклонной плоскости (постоянной длины $S = (80 \pm 1) \text{ см}$) от высоты наклонной плоскости h , приведены в таблице 1 и на графике.

Таблица 1.

$h, \text{ см}$	$t, \text{ с}$
2,4	4,2
2,6	4,0
2,7	3,9
2,9	3,8
3,3	3,2
3,7	3,1
3,9	3,0
4,5	2,8
5,0	2,6
5,5	2,4



- Для определения ускорения свободного падения и коэффициента трения необходимо получить теоретическую зависимость времени скатывания от высоты и линеаризовать ее. При скатывании трубы выполняется закон сохранения энергии.

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} + F_{mp} \cdot S. \quad (1)$$

Второе слагаемое $\frac{mv^2}{2}$ появляется, так как трубка участвует не только в поступательном, но и во вращательном движении. Таким образом:

$$mgh = mv^2 + F_{mp} \cdot S, \quad (2)$$

где v - конечная скорость трубы при скатывании по наклонной плоскости; Так как углы возвышения наклонной плоскости малы, то силу трения

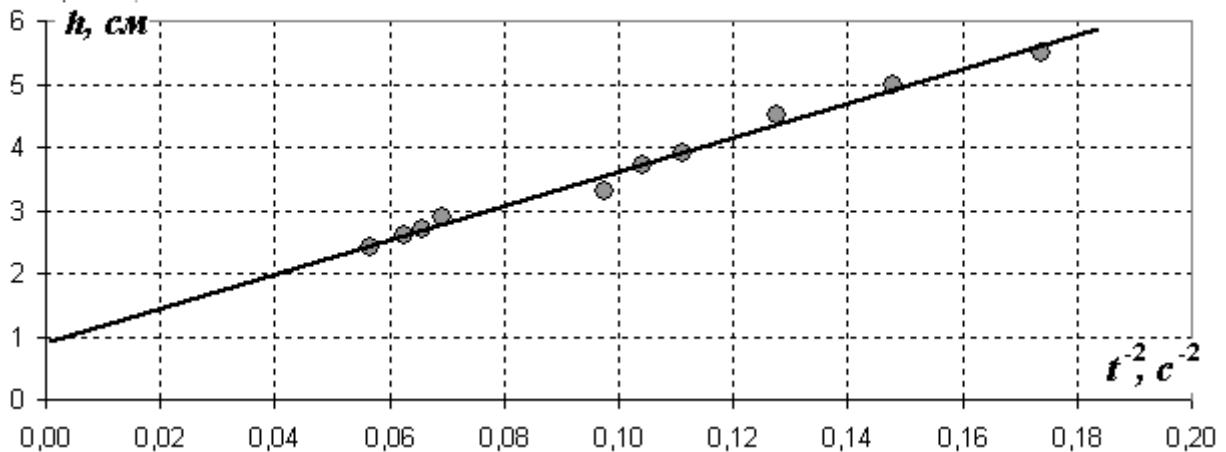
$$F_{mp} = \frac{K}{R} N = \frac{K}{R} mg \cos \alpha \approx \frac{K}{R} mg \quad (3)$$

можно читать постоянной при различных углах. Конечная скорость легко определяется из законов кинематики: $v^2 = \frac{4S^2}{t^2}$. Из уравнений (2)-(3) следует:

$$h = \frac{4S^2}{g} \frac{1}{t^2} + \frac{F_{mp} \cdot S}{mg} = \frac{4S^2}{g} \frac{1}{t^2} + \frac{KS}{R}. \quad (4)$$

Таким образом, линеаризация достигается, если рассмотреть зависимость высоты наклонной плоскости от величины обратной квадрату времени движения. График этой зависимости действительно оказывается линейным.

Линеаризация зависимости времени скользывания



Обработка зависимости $h = a \frac{1}{t^2} + b$ по МНК дает следующие значения параметров зависимости:

$$a = (27 \pm 2) \text{см} \cdot \text{с}^2, \quad b = (0,9 \pm 0,2) \text{см}.$$

Эти коэффициенты выражаются через искомые физические величины:

$$a = \frac{4S^2}{g}, \text{ поэтому } g = \frac{4S^2}{a} \approx \frac{4 \cdot 80^2}{27} \approx 948 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}, \quad \Delta g = g \frac{\Delta a}{a} \approx 70 \frac{\text{см}}{\text{с}^2};$$

$$b = \frac{KS}{R}, \text{ отсюда определяем } K = b \frac{R}{S} \approx 0,9 \cdot \frac{0,76}{80} \approx 9 \cdot 10^{-3} \text{см}, \quad \Delta K = K \frac{\Delta b}{b} \approx 2 \cdot 10^{-3} \text{см}.$$

Заметим, что относительные погрешности определения коэффициентов линеаризованной зависимости на порядок превышают погрешности измерения длины наклонной плоскости и радиуса трубы ($R = (0,76 \pm 0,05) \text{см}$), поэтому последние не учитывались при расчетах погрешностей ускорения свободного падения и коэффициента трения. Кроме того, как обычно, погрешность определения параметра b заметно больше погрешности определения коэффициента наклона прямой.

Итак, окончательные результаты следующие:

$$g = (9,5 \pm 0,7) \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \quad \varepsilon_g = 7\%; \quad K = (9 \pm 2) \cdot 10^{-5} \text{м}, \quad \varepsilon_K = 22\%.$$

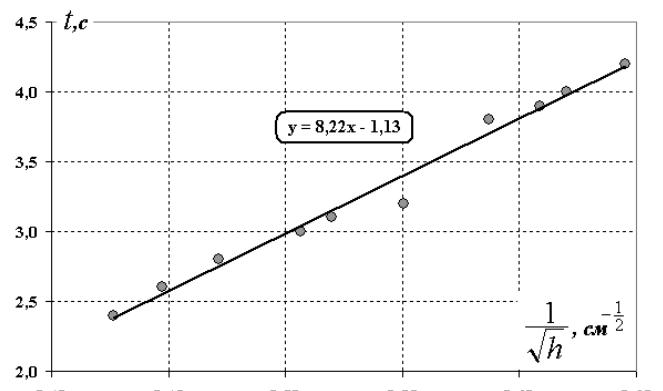
Небольшое дополнение.

Если не учитывать силу трения, то предпочтительнее анализировать зависимость (следующую из уравнения

$$(4)): \quad t = \frac{2S}{\sqrt{gh}}, \text{ так как погрешность}$$

измерения времени заметно превышает погрешность измерения высоты наклонной плоскости.

Данная зависимость также близка к линейной, но наличие заметного свободного члена в ее уравнении однозначно свидетельствует о влиянии силы трения на скатывание трубы.





Задача 27. «Маятник Максвелла»

Нет необходимости приводить все численные данные, полученные при проведении измерений, так как, во-первых, они могут достаточно заметно отличаться для различного оборудования, во-вторых, методика выполнения этого задания аналогична предыдущим заданиям, посвященных изучению закона движения, в-третьих, рекомендовано выполнить эту работу самостоятельно. Поэтому ограничимся краткими комментариями, посвященными теоретическому описанию и качественным результатам измерений.

Теоретическое описание².

Движение маятника (без учета сопротивления воздуха) описывается с помощью основного уравнения динамики вращательного движения, записанного относительно мгновенной оси вращения,

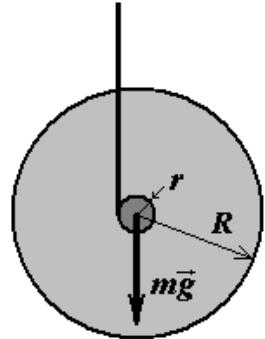
$$I\beta = mgr, \quad (1)$$

где $\beta = \frac{a}{r}$ - угловое ускорение вращения маятника, a - линейное

ускорение оси маятника, r - радиус оси, $I = \frac{mR^2}{2}$ - момент инерции

диска³. Из уравнения (1) следует, движение диска является равноускоренным с ускорением равным

$$a = 2g\left(\frac{r}{R}\right)^2. \quad (2)$$



Так радиус оси мал, по сравнению с радиусом диска, то ускорение оказывается малым, что дает возможность проводить измерения времени «вручную».

Для квадратной картонной пластинки момент инерции пропорционален квадрату длины стороны $I = \frac{1}{6}mb^2$. Поэтому его ускорение

$$a = 6g\left(\frac{r}{b}\right)^2, \quad (3)$$

обратно пропорционально квадрату длины стороны. Интересно отметить, что время движения маятника с квадратной пластинкой $t = \sqrt{\frac{2L}{a}}$ прямо пропорционально длины стороны (а для диска пропорционально его радиусу).

1. По нашим измерениям, движение оси диска можно считать равноускоренным при его смещении на высоту порядка 50 см. Оптимальным обоснованием такого утверждения является линейность зависимости квадрата времени движения от высоты.

² Разрабатывать это теоретическое описание от учащихся в ходе выполнения работы не требуется, здесь оно приводится, что бы прояснить основные характеристики рассматриваемого движения.

³ Считаем, что радиус оси значительно меньше радиуса диска. Более точное значение момента инерции

$$I = \frac{mR^2}{2} + mr^2.$$

2. Коэффициент восстановления можно считать величиной постоянной для данного маятника. Заметим, что коэффициент восстановления во многом определяется упругостью нитей подвеса.
3. Для маятника с картонными квадратами, уже на расстояниях порядка 15-20 см оказывается влияние сил сопротивления воздуха. Если построить зависимость квадрата времени движения от пройденного пути, то эта зависимость линейна только на этом участке. Поэтому дальнейшие измерения ускорения следует проводить⁴ на высотах порядка 10-15 см.
4. Для определения ускорения необходимо измерить время раскручивания на этапе равноускоренного движения. Оказывается, что начальное ускорение действительно обратно пропорционально квадрату длины стороны картонки.

⁴ Таким образом, экспериментальная проверка закона движения оказывается необходимой, для того, чтобы определить область применимости модели равноускоренного движения.



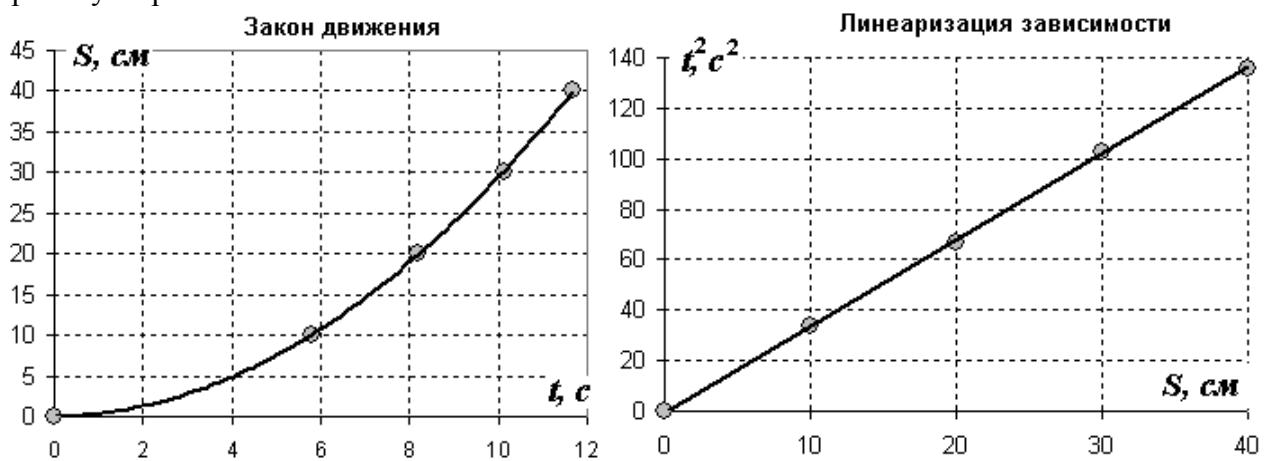
Задача 28. «Брахистохрона»

Часть 1. В таблице 1 приведены результаты измерения времени скатывания от пройденного пути.

Таблица 1.

$S, \text{ см}$	10	20	30	40
$t, \text{ с}$	5,79	8,17	10,15	11,66

График закона движения $S(t)$ и его традиционная линеаризация (для равноускоренного движения) $t^2 = \frac{2}{a}S$ однозначно свидетельствуют, что движение является равноускоренным.



Параметры линеаризованной зависимости $t^2 = kS + b$, рассчитанные по МНК, принимают значения:

параметр $b = (-0,4 \pm 3)c^2$ - обоснованно можно принять равным нулю (что свидетельствует о прямой пропорциональной зависимости);

значение коэффициента $k = (3,41 \pm 0,06) \frac{c^2}{\text{см}}$ позволяет найти ускорение оси диска

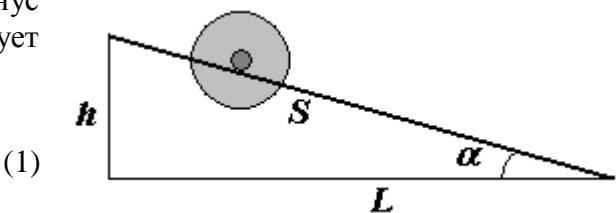
$a = \frac{2}{k} \approx 0,587 \frac{\text{см}}{c^2}$, $\Delta a = a \frac{\Delta k}{k} \approx 0,010 \frac{\text{см}}{c^2}$. Отметим малую погрешность определения ускорения в данном случае $\varepsilon = 2\%$.

Часть 2.

При изменении разности высот начальной и конечной точек h , изменяется и путь, проходимый диском. Этот путь, а также синус угла наклона направляющих следует рассчитывать по формулам

$$S = \sqrt{L^2 + h^2},$$

$$\sin \alpha = \frac{h}{S}$$

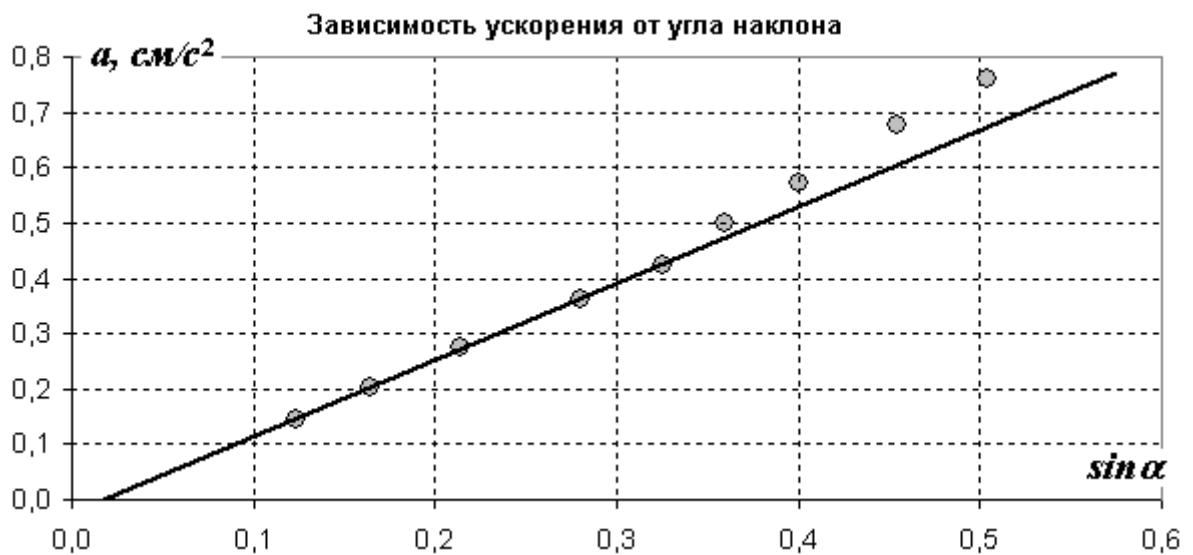


Результаты измерения времени скатывания при различных высотах h и фиксированном горизонтальном расстоянии между точками крепления $L = 48\text{ см}$, а также рассчитанные значения пути S , синуса угла наклона и ускорения $a = \frac{2S}{t^2}$, представлены в таблице 2.

Таблица 2.

$h, \text{ см}$	6,0	8,0	10,5	14,0	16,5	18,5	21,0	24,5	28,0	31,5
$t, \text{ с}$	25,83	21,99	18,90	16,64	15,47	14,36	13,53	12,63	12,10	11,15
$S, \text{ см}$	48,37	48,66	49,14	50,00	50,76	51,44	52,39	53,89	55,57	57,41
$\sin \alpha$	0,124	0,164	0,214	0,280	0,325	0,360	0,401	0,455	0,504	0,549
$a, \text{ см}/\text{с}^2$	0,145	0,201	0,275	0,361	0,424	0,499	0,572	0,676	0,759	0,924

График зависимости ускорения от синуса угла наклона направляющих показывает, что ускорение примерно пропорционально синусу угла наклона.



Объяснить полученную линейную зависимость не сложно. Рассмотрим вращение диска относительно оси вращения, проходящую через точку касания оси (это мгновенная ось вращения). Силой, момент которой отличен от нуля, является сила тяжести, плечо которой равно $d = r \sin \alpha$. Следовательно, угловое и линейное ускорение пропорционально синусу угла наклона направляющих.

Можно получить и точную формулу для ускорения оси диска. На основании основного уравнения динамики вращательного движения запишем:

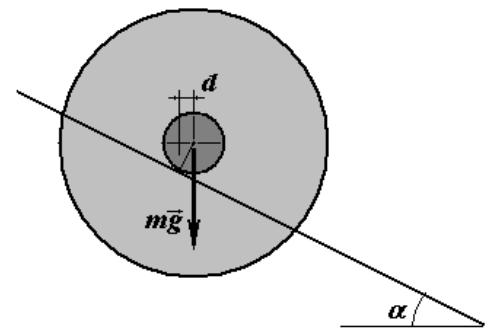
$$I \frac{a}{r} = mgr \sin \alpha .$$

Используя выражение для момента инерции диска (относительно мгновенной оси вращения)

$$I = \frac{mR^2}{2} + mr^2 \approx \frac{mR^2}{2},$$

получим выражение для ускорения

$$a = 2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 g \sin \alpha . \quad (3)$$



Внимательно посмотрим на экспериментальный график зависимости ускорения от синуса угла наклона – при увеличении угла наклона (когда синус превышает 0,35) точки начинают несколько отклоняться от прямо пропорциональной зависимости. Возможной причиной⁵ этого отклонения является незначительное проскальзывание оси по резиновым направляющим. Поэтому для определения коэффициента γ в формуле (1), приведенной в условии, в расчетах будем учитывать только первые пять точек. На рисунке проведена прямая именно по этим точкам. Расчет по МНК приводит к следующим значениям параметров зависимости $a = k \sin \alpha + b$:

$$b = (0,02 \pm 0,01) \frac{см}{с^2} - с некоторой натяжкой может быть принят равным нулю;$$

$$k = (1,39 \pm 0,04) \frac{см}{с^2} \text{ позволяет определить требуемый безразмерный коэффициент}$$

$$\gamma = \frac{k}{g} = \frac{1,39}{981} \approx 1,41 \cdot 10^{-3}, \quad \Delta\gamma = \gamma \frac{\Delta k}{k} \approx 3,6 \cdot 10^{-5}. \text{ Таким образом, окончательное значение}$$

искомого коэффициента равно

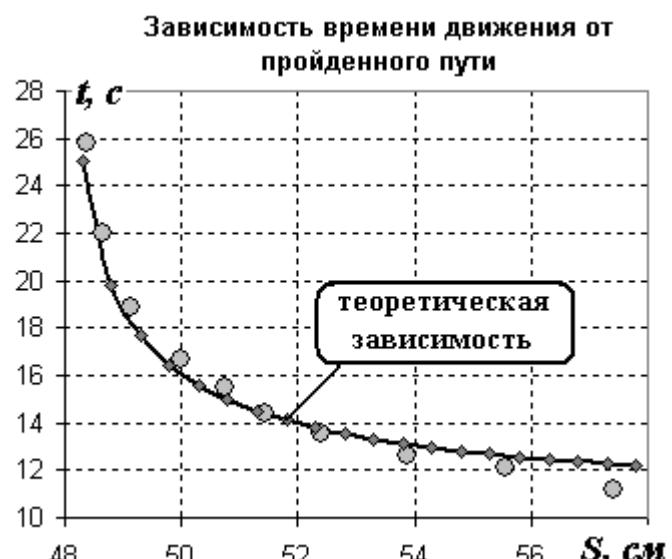
$$\gamma = (1,4 \pm 0,4) \cdot 10^{-3}.$$

Отметим, что полученное значение вполне разумно, и соответствует тому, что радиус диска примерно в тридцать пять раз превышает радиус оси.

График зависимости времени движения от длины пройденного пути не совсем обычен – увеличение пути приводит к уменьшению времени скатывания. Это связано с увеличением ускорения. Легко получить теоретическое выражение для этой зависимости. При равноускоренном движении время движения описывается формулой

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a}} = \sqrt{\frac{2S}{\gamma g \sin \alpha}} = \sqrt{\frac{2S^2}{\gamma gh}},$$

все параметры которой найдены. График этой функции построен на рисунке и демонстрирует хорошее соответствие экспериментальным данным.



Интересна зависимость времени движения от высоты h при фиксированном горизонтальном расстоянии L между начальной и конечной точками траектории

$$t = \sqrt{\frac{2S^2}{\gamma gh}} = \sqrt{\frac{2(h^2 + L^2)}{\gamma gh}} = \sqrt{\frac{2}{\gamma g} \left(h + \frac{L^2}{h} \right)}.$$

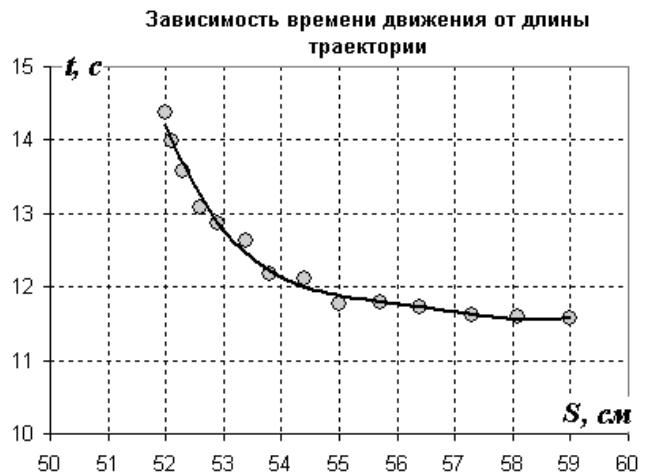
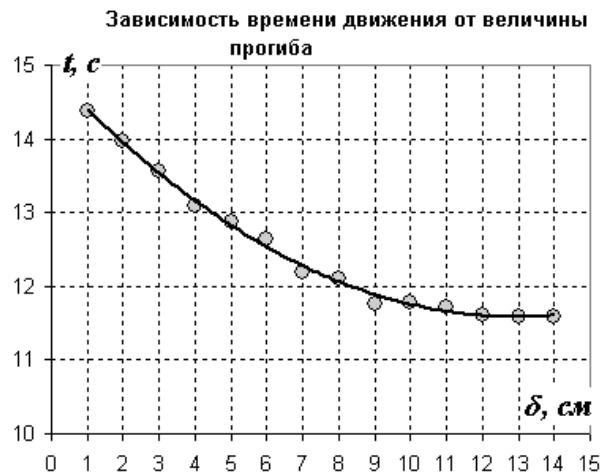
Эта функция имеет минимум при $h = L$, то есть при угле наклона в 45° к горизонту.

Часть 3.

В этой части также оказывается, что время скатывания уменьшается с увеличением прогиба (соответственно, и длины траектории). Основной причиной такого поведения является увеличение ускорения на первом участке траектории и как следствие увеличение

⁵ А, может, просто штатив упал, и его поставили на другое место. В любом случае, выбор диапазона для расчетов – прерогатива экспериментатора.

средней скорости на всем пути. Для примера приведем графики зависимостей времени движения от величины прогиба δ и длины траектории S , полученные при следующих значениях параметров установки $h = 18\text{ см}$, $L = 51\text{ см}$.





Задача 29. «Эвангелиста Торричелли»

Выполнение экспериментальной части задания не вызывает никаких сложностей – если отверстие мало, то время вытекания составляет несколько десятков секунд, поэтому закон опускания уровня дна легко измеряется. В результате получается нелинейная зависимость – с уменьшением высоты уровня скорость вытекания замедляется.

Для определения зависимости скорости вытекающей воды от высоты ее уровня в стакане необходимо использовать полученную зависимость высоты уровня от времени $h(t)$. Скорость вытекающей жидкости связана с изменением объема воды в стакане очевидным соотношением

$$vs_0\Delta t = -\Delta V = -S\Delta h, \quad (1)$$

где s_0 – площадь отверстия, S – площадь поперечного сечения сосуда на высоте h . Из уравнения (1) следует, что скорость воды может быть рассчитана по формуле

$$v = \frac{S}{s_0} \frac{\Delta h}{\Delta t}. \quad (2)$$

Методика таких расчетов подробно рассмотрена при обсуждении Задачи 16.

Показатель степени может быть определен либо методом подбора, либо (что, естественно, предпочтительнее) с помощью обработки полученной зависимости в двойном логарифмическом масштабе.

При правильном выполнении работы значение этого показателя примерно равно $\gamma \approx \frac{1}{2}$.

Необязательное теоретическое дополнение.

Согласно известной формуле Торричелли скорость жидкости вытекающей из отверстия в сосуде зависит от высоты по закону

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (3)$$

Из этого закона следует (как решение уравнения 2), что зависимость высоты уровня воды от времени может быть представлена в «красивом» линеаризованном виде

$$\sqrt{\frac{h}{h_0}} = 1 - \frac{s_0}{S} \sqrt{\frac{gt^2}{2h_0}}, \quad (4)$$

Эта формула допускает простую проверку.

Также достаточно интересно осуществить поиск показателя степени по анализу зависимости $h(t)$, без ее численного дифференцирования. Впрочем, об этом подробно говорилось при решении задач 16 и 18. Попробуйте разработать такую методику самостоятельно, или внимательно разберитесь (а еще лучше проделайте самостоятельно) со следующей задачей.



Задача 30. «Формула Торричелли»

Часть 1. Теоретическая.

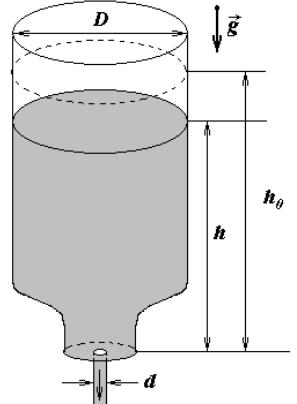
1.1 Пусть начальная высота жидкости в сосуде h_0 , внутренний диаметр сосуда D , диаметр отверстия d (рис.1). В момент, когда высота жидкости в сосуде равна h , скорость вытекания жидкости из сосуда, согласно формуле Торричелли $v(h) = \sqrt{2gh}$.

Соответственно, за малый промежуток времени Δt из отверстия вытечет вода объемом (считаем, что в течение этого малого промежутка времени скорость вытекания остается постоянной величиной)

$$\Delta V = \frac{\pi d^2}{4} v(h) \Delta t = \frac{\pi d^2}{4} \sqrt{2gh} \Delta t.$$

Это вызовет понижение уровня воды в сосуде на величину

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{S} = \frac{d^2}{D^2} \sqrt{2gh} \Delta t. \quad (1)$$



Используя выражение, приведенное в условии, вычислим приращение Δh как разность $h(t + \Delta t) - h(t)$ при условии $\Delta t \rightarrow 0$ (или просто вычислим производную):

$$\Delta h = h_0 ((1 - b(t + \Delta t))^2 - (1 - bt)^2) = 2h_0(1 - bt)b\Delta t. \quad (2)$$

Из формулы, приведенной в условии, найдем, что $(1 - bt) = \sqrt{\frac{h}{h_0}}$, с учетом чего (2) преобразуется к виду

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = 2h_0(1 - bt)b = 2h_0b\sqrt{\frac{h}{h_0}} = b\sqrt{\frac{2h_0}{g}}\sqrt{2gh} = \{(1)\} = \frac{d^2}{D^2}\sqrt{2gh}. \quad (3)$$

1.2 Из (3) следует выражение для коэффициента b через параметры установки

$$b = \frac{d^2}{D^2} \sqrt{\frac{g}{2h_0}}. \quad (4)$$

Из (4) следует важный вывод: для соблюдения постоянства коэффициента b следует проводить измерения только в цилиндрической части бутылки, т.е. до тех пор, пока вода не опустилась до сужающейся (нижней) части бутылки.

Обратите внимание, в данной задаче фактически предлагается исследовать закон движения – зависимость высоты уровня от времени, без последующих расчетов скорости! Тем самым удается избежать крайне неприятной и «незаконной» операции вычисления отношений малых величин $v = \frac{\Delta h}{\Delta t}$, приводящей к громадным погрешностям.

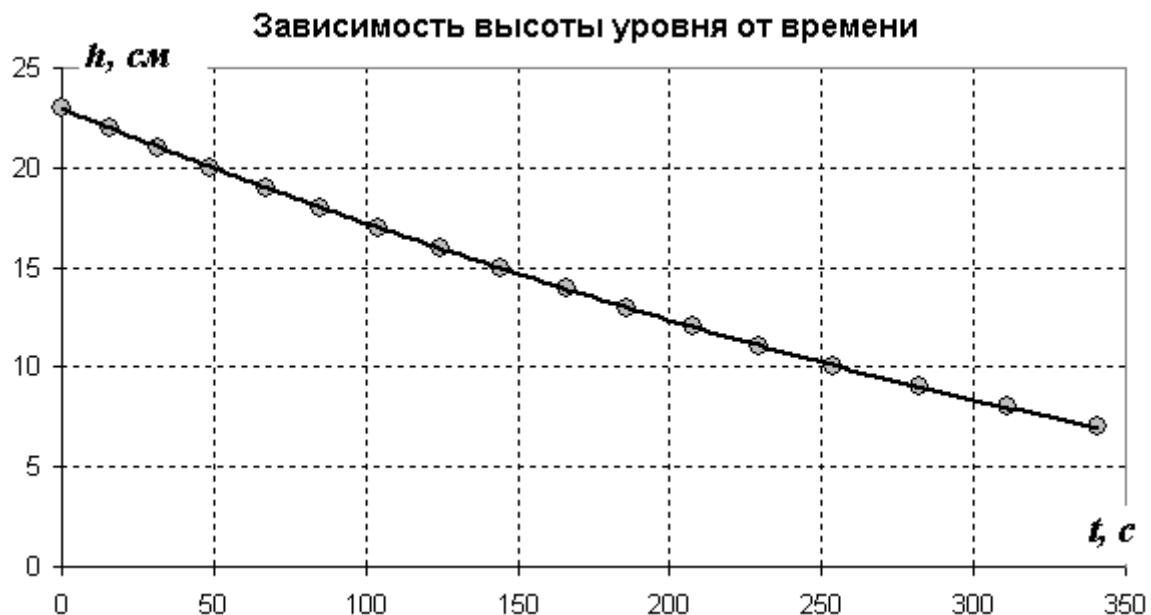
Часть 2. Закон вытекания.

2.1 В таблице приведены значения результатов трех измерений времен (а также их средние значения) вытекания данные для пластиковой бутылки объемом 1 литр при диаметре отверстия в пробке равном 1,6 мм.

Таблица 1.

$h, \text{ см}$	$t_1, \text{ с}$	$t_2, \text{ с}$	$t_3, \text{ с}$	$t_{cp}, \text{ с}$	$z = \sqrt{\frac{h}{h_0}}$
23	0			0	1,000
22	16	15	16	15,7	0,978
21	32	31	32	31,7	0,956
20	49	49	49	49,0	0,933
19	67	67	68	67,3	0,909
18	84	86	86	85,3	0,885
17	102	105	105	104,0	0,860
16	122	126	125	124,3	0,834
15	143	145	145	144,3	0,808
14	164	167	168	166,3	0,780
13	186	187	185	186,0	0,752
12	205	208	209	207,3	0,722
11	227	231	231	229,7	0,692
10	251	255	256	254,0	0,659
9	279	283	285	282,3	0,626
8	308	312	314	311,3	0,590
7	336	342	345	341,0	0,552

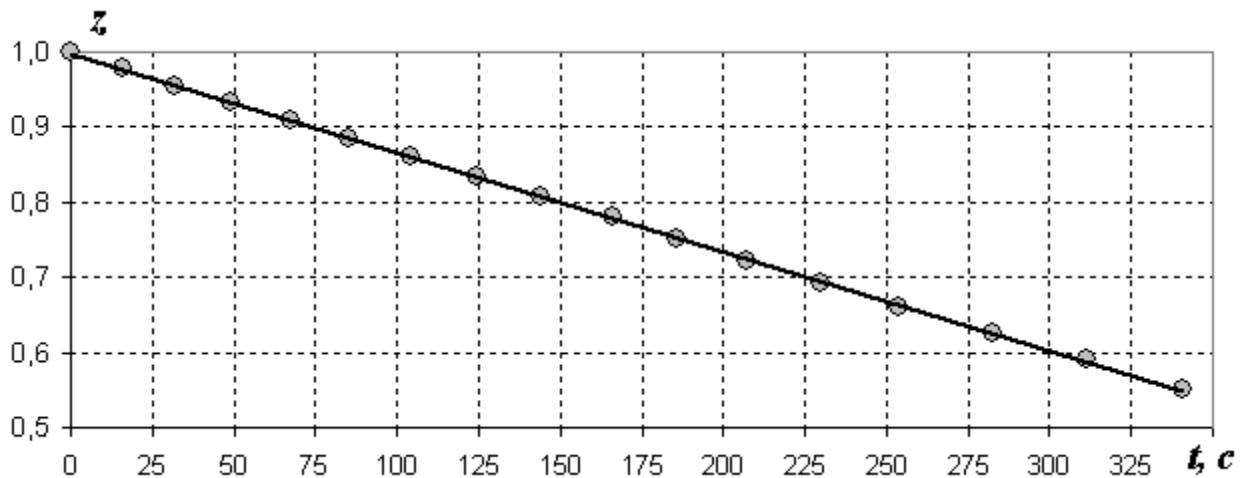
График полученной зависимости показан на рисунке.



2.2 Данная зависимость не линейна. Для проверки выполнимости формулы Торричелли ее следует линеаризовать. Как следует из формулы (2), приведенной в условии задачи,

зависимость параметра $z = \sqrt{\frac{h}{h_0}}$ от времени должна быть линейна $z = \sqrt{\frac{h}{h_0}} = 1 - bt$.

График этой линеаризованной зависимости показан на следующем рисунке.



2.3 Можно рассчитать параметры этой зависимости по МНК. Но, как уже отмечалось ранее, предпочтительнее обрабатывать обратную зависимость – времени вытекания t от параметра z , так как последний измеряется с более высокой точностью:

$$t = \frac{1-z}{b}. \quad (5)$$

Параметры этой зависимости ($t = az + c$), рассчитанные по МНК, принимают значения
 $a = -(759 \pm 5)c$, $c = (757 \pm 4)c$.

Заметим, что эти параметры равны в пределах погрешности измерений, и имеют смысл времени полного вытекания, при условии, что бутылка имеет строго цилиндрическую форму (без горлышка). Соответственно, значение параметра b , входящего в формулу (2) условия равно

$$b = -\frac{1}{a} = 1,32 \cdot 10^{-3} c^{-1}, \quad \Delta b = b \frac{\Delta a}{a} = 9 \cdot 10^{-6} c^{-1}.$$

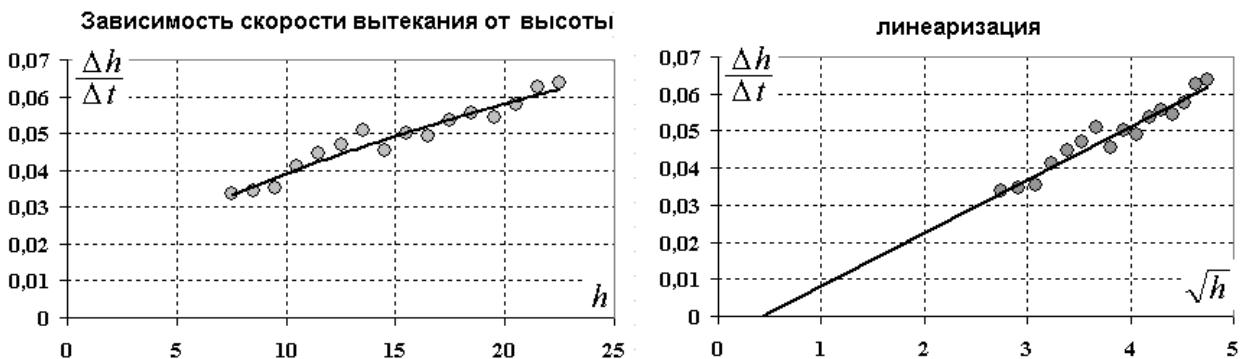
Теоретическое значение этого параметра равно (диаметр бутылки $D =$)

$$b = \frac{d^2}{D^2} \sqrt{\frac{g}{2h_0}} \approx 1,27 \cdot 10^{-3} c^{-1}$$

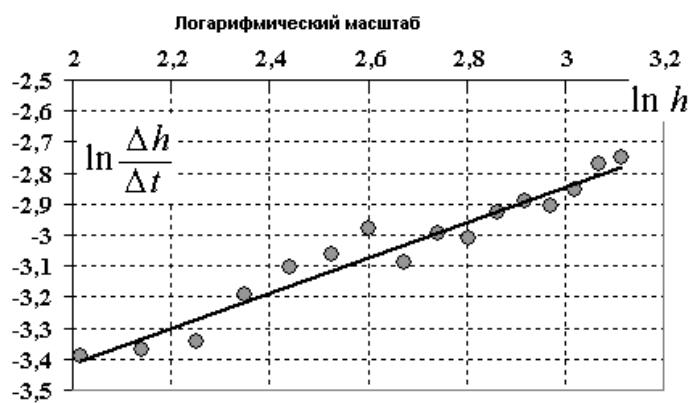
Таким образом, данный эксперимент подтверждает применимость формулы Торричелли не только качественно, но и количественно!

Ненужное дополнение.

Сравните результаты, полученные при обработке исходной экспериментальной зависимости, с графиками, полученными при вычислении скорости вытекания. Даже линеаризованная зависимость может считаться прямой только при наличии богатого воображения.



Мало помогает и обработка этой зависимости в логарифмическом масштабе – разброс точек очень велик. Правда, значение коэффициента наклона (равное показателю степени в исследуемой формуле) $\gamma = 0,57 \pm 0,07$ захватывает теоретическое значение $\gamma = \frac{1}{2}$



2.4. В качестве причин возможных отклонений следует назвать наличие у жидкости вязкости (внутреннего трения), возможное неламинарное течение (завихрений) при приближении уровня воды к отверстию, поверхностное натяжение жидкости.

Часть 3. Другие отверстия.

3.1 Как следует из полученных зависимостей, время τ вытекания обратно пропорционально значению коэффициента $b = \frac{d^2}{D^2} \sqrt{\frac{g}{2h_0}}$, который при прочих равных условиях прямо пропорционален квадрату диаметра отверстия. Отсюда следует, что

$$\tau \propto \frac{1}{d^2}.$$

Таким образом, отношение времен вытекания воды из бутылки при разных диаметрах отверстий определяется отношением обратных квадратов их радиусов

$$\tau_1 : \tau_2 : \tau_3 = \frac{1}{d_1^2} : \frac{1}{d_2^2} : \frac{1}{d_3^2}.$$

Соответственно, в нашем случае

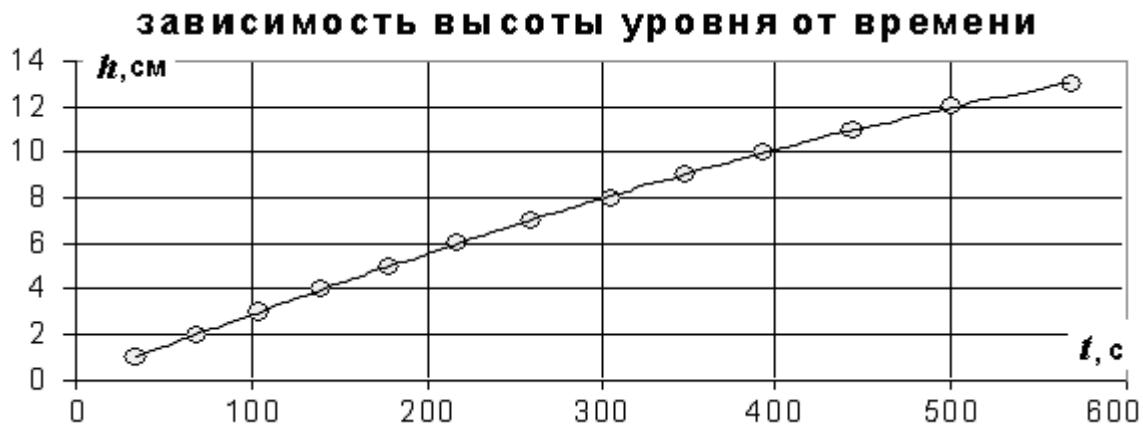
$$\tau_1 : \tau_2 : \tau_3 = \frac{1}{1} : \frac{1}{4} : \frac{1}{9} = 36 : 9 : 4.$$

С учетом погрешности эксперимент дает близкие значения.

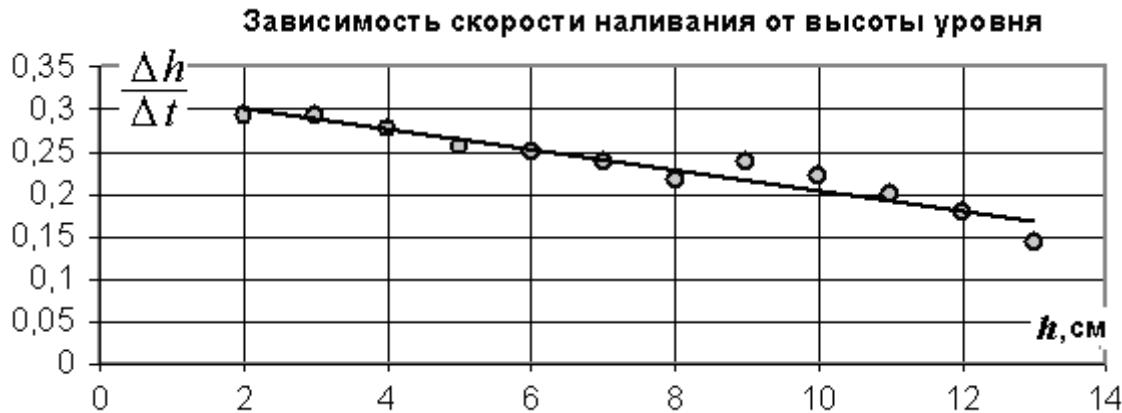


Задача 31. «Клепсидра»

На рисунке показан график зависимости высоты уровня воды в нижней бутылке от времени.



Как видно, эта зависимость не линейна – скорость изменения высоты уровня уменьшается. Эта зависимость может быть обработана по методике, описанной при выполнении задачи 16 - особенно обратите внимание на методику обработки всей зависимости «целиком» - без использования малых разностей.



Отметим, что в данном случае скорость изменения уровня примерно пропорциональна разности давлений на концах трубки, то есть линейно зависит от разности высот уровней в верхней и нижней бутылках⁶, что подтверждает следующий график.

⁶ Напомним, что при вытекании через отверстие скорость вытекания пропорциональна корню из высоты уровня.



Задача 32. «Намокание ткани»

Описание методики проведения эксперимента фактически дано в условии задачи, поэтому здесь на нем останавливаться не будем.

Отметим только, что в данной задаче удобней фиксировать время, в течение которого граница намокания достигает определенной отметки.

Результаты измерения длины намокшей части $S, \text{ см}$ в зависимости от времени $t, \text{ мин}$ представлены в таблице и на рис. 1.

$S, \text{ см}$	1	2	3	5	7	8	10	11	12	13	14
$t, \text{ мин}$	1,5	3,5	5	8	12	15	21	26	31	37	48

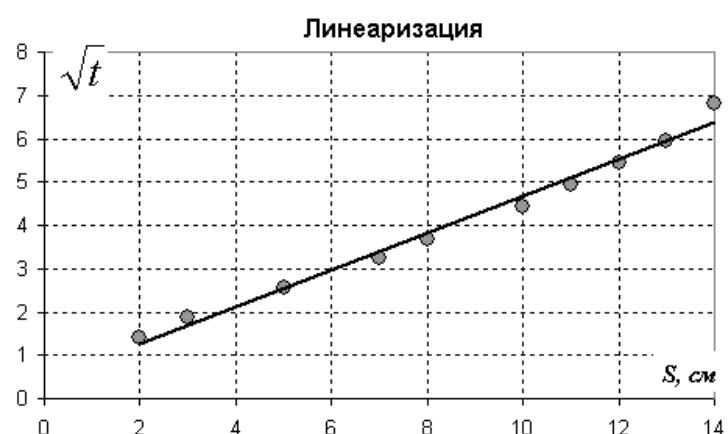
В очередной раз мы сталкиваемся с нелинейной зависимостью координаты от времени. Причем хорошо заметно, что скорость распространения границы намокшей части убывает с течением времени. Разумно предположить, что в данном случае закон движения – «коренной», то есть скорость намокания пропорциональна корню из времени.

Экспериментальным подтверждением данного предположения служит вид графика. Можно дать и теоретическое обоснование этой гипотезы. Намокание – есть распространение воды по тонким волокнам-капиллярам ткани. При движении жидкости по тонкой трубке ее скорость (в соответствии с формулой Пуазейля) обратно пропорциональна длине заполненной части капилляра:

$v = \frac{a}{\sqrt{S}}$. Из этого соотношения следует, что величина S пропорциональна корню из времени.

Для проверки сделанного предположения следует построить линеаризованную зависимость $\sqrt{t} = F(S)$. График этой зависимости близок к линейному, что подтверждает применимость высказанного предположения.

Более подробное исследование этого процесса предлагаем провести самостоятельно – поверьте можно найти много интересного!





Задача 33. «Просто математический маятник»

1. Конечно, этот пункт задачи можно принять за шутку, но ... измеряли же средневековые математики площадь круга с помощью весов и тем самым определяли значение числа π . Сейчас мы обрели большой опыт экспериментальных исследований, почему бы экспериментально не проверить точность вычислений знаменитых математиков?

Используя методику, изложенную в задаче 3, проведем измерения на более серьезном оборудовании: увеличим длину маятника и диапазон ее изменения, используем более тяжелый груз, увеличим число измерений для повышения точности, привлечем учебно-вспомогательный персонал.

Тонкий прочный шнур (длиной более 2 метров) с тяжелым металлическим шаром подвешен на обрезке металлической трубы. Наматывая шнур на трубу можно изменять длину маятника. Из приведенной в условии формулы следует

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} l = \frac{4\pi^2}{g} (l_0 - n\pi D) = \frac{4\pi^2 l_0}{g} - \frac{4\pi^3 D}{g} n, \quad (1)$$

где D - диаметр трубы, на которую наматывается шнур. Таким образом, квадрат периода линейно зависит от числа намотанных витков, а коэффициент наклона данной зависимости позволит рассчитать значение числа π .

Результаты измерений, полученные четырьмя начинающими физиками (Ф1-Ф4), усредненные значения периодов колебаний $\langle T \rangle$ и их квадратов приведены в таблице.



Таблица результатов измерений.

n	Время 20 колебаний (t_i, c)				$\langle T \rangle, c$	$\langle T \rangle^2, c^2$
	Ф1	Ф2	Ф3	Ф4		
0	63,04	62,74	62,78	63,24	3,1475	9,907
1	61,23	61,12	61,46	61,21	3,0628	9,381
2	59,08	58,69	59,41	59,12	2,9537	8,724
3	57,05	57,00	57,09	56,98	2,8515	8,131
4	54,84	54,82	55,03	54,66	2,7419	7,518
5	52,24	52,23	52,37	52,72	2,6194	6,861
6	50,12	50,31	50,39	50,41	2,5154	6,327
7	47,53	47,54	47,56	47,57	2,3775	5,653
8	44,93	45,18	45,23	45,18	2,2564	5,092
9	41,91	42,11	42,40	42,31	2,1091	4,448
10	39,01	39,00	39,57	39,18	1,9594	3,839
11	35,90	35,74	36,21	35,78	1,7954	3,223
12	32,25	32,37	32,38	32,33	1,6167	2,614
13	28,29	28,03	28,48	28,48	1,4159	2,005

Диаметр использованной трубы был измерен с помощью штангенциркуля и оказался равным $D = (50,0 \pm 0,05) \text{мм}$.

Построим график зависимости квадрата периода колебаний от числа намотанных витков. По МНК рассчитаем параметры этой линеаризованной зависимости

$T^2 = b - an$. полученные значения равны

$$a = (0,6111 \pm 0,0035)c^2$$

$$b = (9,952 \pm 0,026)c^2$$

Из функции (1) следует, что теоретическое значение коэффициента наклона равно

$$a = \frac{4\pi^3 D}{g}, \text{ следовательно,}$$

$\tilde{\pi} = \sqrt[3]{\frac{ag}{4D}}$, с погрешностью $\Delta\pi = \tilde{\pi} \sqrt{\left(\frac{1}{3} \frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{3} \frac{\Delta D}{D}\right)^2}$. Расчеты по этим формулам

приводят к результату

$$\tilde{\pi} = 3,106 \pm 0,012.$$

Как видите, математики достаточно точно сумели вычислить значение числа π , результаты их многовековых вычислений дали значение очень близкое к значению полученному экспериментально.

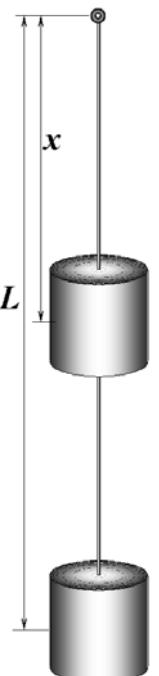
2. Здесь нам предстоит исправить ошибку великого Г. Галилея, который считал, что период колебаний математического маятника не зависит от амплитуды его колебаний. Правда, он изучал колебания подвесных светильников в соборе, а в качестве измерителя времени использовал собственный пульс. Жаль, что наше открытие не будет оригинальным - ошибку Галилея исправил еще в XVII веке Х. Гюйгенс, который не только получил правильный результат для математического маятника, но и изобрел циклоидальный маятник, период колебаний которого действительно не зависит от амплитуды. Но это уже тема для последующих экспериментальных задач.

Рекомендуем провести измерения зависимости периода колебаний математического маятника от амплитуды самостоятельно. Отметим, что теоретическое значение искомого коэффициента в формуле (2) условия равно $\chi = \frac{1}{16}$. Еще раз подчеркнем, что измерения необходимо проводить очень тщательно, так как период изменяется очень незначительно – например, при амплитуде колебаний в 90° он возрастает всего на 15%.





Задача 34. «Двойной маятник»



Если считать, что применима формула для периода колебаний математического маятника, то зависимость периода от положения центрального груза должна иметь вид:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{L+x}{2g}}, \quad (1)$$

здесь $l = \frac{L+x}{2}$ - расстояние от точки подвеса до центра масс системы.

Однако этот маятник является физическим, поэтому его период должен рассчитываться по формуле

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{m(L^2 + x^2)}{2mg \frac{L+x}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{L^2 + x^2}{g(L+x)}}, \quad (2)$$

где $J = m(L^2 + x^2)$ - момент инерции маятника.

Как и в случае колебаний стержня, зависимость (2) не является монотонной, а имеет точку минимума.

Проведение измерений не вызывает затруднений, результаты хорошо подтверждают справедливость формулы (2).



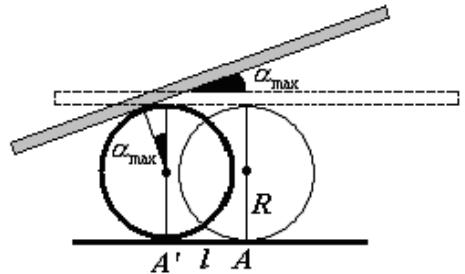
Задача 35. «Линейка на цилиндрах»

Задание 1. Измерение коэффициентов трения.

Предельный угол наклона линейки на боковой поверхности α_{\max} , при котором линейка еще остается в равновесии, удовлетворяет условию

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = \mu.$$

Для измерения этого угла удобно применить следующую методику. Расположить линейку на цилиндре в равновесии в горизонтальном положении, затем, медленно перекатывая цилиндр по горизонтальной поверхности, определить смещение его точки касания $|A'A| = l$ до того момента пока линейка не начнет скользить с цилиндра. Как следует из рисунка 1, максимальный угол наклона линейки равен $\alpha_{\max} = \frac{l}{R} = \frac{2l}{D}$, где D - диаметр цилиндра.



Задание 2. Изучение зависимости периода колебаний от радиуса опоры.

Теоретическое введение.

Вывод формулы для периода колебаний линейки на цилиндре является интересной теоретической задачей. Но эта книга посвящена экспериментальным исследованиям, поэтому ограничимся только конечным результатом – формулой для периода колебаний:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{L^2}{12} + \frac{h^2}{3}\right)}{g\left(R - \frac{h}{2}\right)}}, \quad (1)$$

где L - длина линейки, h - ее толщина, R - радиус цилиндра. Формула получена при условии, что движение линейки по цилинду проходит без проскальзывания, а колебания являются малыми. Заметьте, что колебания возможны, если толщина линейки не превышает диаметра цилиндра. Попробуйте заставить колебаться линейку на иголке!

Обычно толщина линейки значительно меньше ее длины $h \ll L$, поэтому формула (1) упрощается

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{L^2}{12} + \frac{h^2}{3}\right)}{g\left(R - \frac{h}{2}\right)}} \approx \frac{\pi L}{\sqrt{3g\left(R - \frac{h}{2}\right)}}. \quad (2)$$

Экспериментальная проверка этой формулы составляет содержания задания 2. Если же толщина линейки значительно меньше радиуса цилиндра, то допустимо дальнейшее упрощение

$$T = \frac{\pi L}{\sqrt{3g\left(R - \frac{h}{2}\right)}} \approx \frac{\pi L}{\sqrt{3gR}}. \quad (3)$$

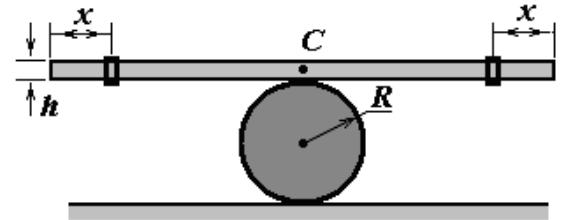
В этом случае период колебаний обратно пропорционален радиусу цилиндра, то есть искомый показатель степени равен $\gamma = -\frac{1}{2}$.

Проведение измерений не вызывает затруднений (периоды колебаний порядка 1 с, что легко измеримо), экспериментальное значение показателя степени оказывается близким к его теоретическому значению.

Задание 3. Изучение зависимости периода колебаний от положения металлических петель.

Теоретическое введение. Можно получить точную формулу для периода малых колебаний и в данной системе:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{mL^2}{12} + 2m_1\left(\frac{L}{2} - x\right)^2\right)}{(m + 2m_1)g\left(R - \frac{h}{2}\right)}}, \quad (4)$$



а его отношение к периоду колебаний без металлических петель будет равно (при разумных допущениях типа $m_1 < m$)

$$\frac{T}{T_0} \approx \sqrt{1 + 24 \frac{m_1}{mL^2} \left(\frac{L}{2} - x\right)^2}. \quad (5)$$

Экспериментальная проверка этой формулы проводится традиционными методами: проведение измерений, затем линеаризация полученной зависимости и ее обработка по МНК. Как ни удивительно, эта и формула подтверждается экспериментально.

Для измерений удобно выбирать цилиндр среднего размера, где колебания достаточно долго не затухают, а их период легко поддается измерениям.

Задача 36. «Связанные одной нитью...»



Часть 1. Резонанс.

Так как длина тяжелого маятника остается неизменной, то и частота его колебаний не изменяется. Изменение длины легкого маятника приводит к изменению собственной частоты его колебаний. При сближении частот вынуждающей силы (то есть частоты колебаний тяжелого маятника) и частоты собственных колебаний амплитуда вынужденных колебаний возрастает, возникает резонанс. В данной системе этот резонанс отчетливо наблюдается – требуемая зависимость имеет ярко выраженный максимум.

Вынуждены признать, что результаты носят качественный характер, провести численное сравнение с теоретической резонансной кривой затруднительно, велики погрешности измерений.

Обнаружить резонанс на частоте вынуждающей силы, равной половине собственной частоты, затруднительно, но возможно, особенно в спокойных домашних условиях!

Часть 2. «Биения»

Эта часть задачи может быть выполнена «до конца». Известно, что частота биений равна разности собственных частот колебаний связанных маятников. Этот факт позволяет получить теоретическую зависимость периода биений от длины одного маятника l_1 при фиксированной длине второго l_0 . Так частота колебаний математического маятника определяется формулой

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} ,$$

следовательно, частота биений равна

$$\nu_{биен.} = |\nu_0 - \nu_1| = \frac{\sqrt{g}}{2\pi} \left| \frac{1}{\sqrt{l_0}} - \frac{1}{\sqrt{l_1}} \right| = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l_0}} \left| 1 - \sqrt{\frac{l_0}{l_1}} \right| .$$

Наконец, измеряемый период биений описывается формулой

$$T_{биен.} = \frac{1}{\nu_{биен.}} = \frac{T_0}{\left| 1 - \sqrt{\frac{l_0}{l_1}} \right|} . \quad (1)$$

Формула слишком красива, что бы не подвергнуть ее экспериментальной проверке. Ее линеаризация также оригинальна: следует проверить зависимость в безразмерных параметрах:

$$\frac{T_0}{T_{биен.}} = \left| 1 - \sqrt{\frac{l_0}{l_1}} \right| . \quad (2)$$

Заметим, что и секундомер в данном эксперименте не обязателен, можно измерять период биений в периодах колебаний маятника неизменной длины.



Задача 37. «Где нормальная реакция?»

1. Сила натяжения нити направлена вдоль нити, поэтому в любой точке по касательной к поверхности цилиндра. Что бы «найти» силу нормальной реакции, необходимо рассмотреть силы, действующие на небольшой участок нити, видимый из центра под малым углом $\Delta\varphi$. Силы натяжения, действующие на концы этого выделенного участка, направлены под углом друг к другу и именно радиальные составляющие этих сил прижимают нить к поверхности, приводят к появлению силы нормальной реакции и, следовательно, к возникновению силы трения. С другой стороны, возникшая сила трения приводит к тому к уменьшению силы натяжения нити. Таким образом, возникает обратная связь – сила натяжения определяет силу трения, а та влияет на изменение силы натяжения. Причем уменьшение силы натяжения на малом участке пропорционально самой силе натяжения, что и приводит к экспоненциальному закону изменения силы натяжения от угла намотки.

Приведем строгий вывод формулы Эйлера (от школьников требовать этот вывод рановато)

Будем считать, что груз опускается. Пусть в начальной точке касания нити поверхности сила натяжения известна и равна T_0 (эта сила обусловлена подвешенным грузом). Угол намотки φ будем отсчитывать от этой точки. Введем систему координат, привязанную к выделенному участку нити, ось Oy направим радиально (нормально к участку), а ось Ox по касательной к нему. Так как мы считаем, что нить движется без ускорения (или можно пренебречь массой нити), то сумма сил, действующих на выделенный участок, равна нулю. Это условие равновесия позволяет записать два уравнения:

в проекции на ось Oy :

$$\Delta N = T(\varphi) \sin \frac{\Delta\varphi}{2} + T(\varphi + \Delta\varphi) \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \approx T(\varphi) \Delta\varphi, \quad (1)$$

здесь учтено, что угол $\Delta\varphi$ мал, поэтому его синус равен самому углу, кроме того, можно пренебречь в различиях сил натяжения на концах выделенного участка $T(\varphi) \approx T(\varphi + \Delta\varphi)$; в проекции на ось Ox :

$$T(\varphi) \cos \frac{\Delta\varphi}{2} - T(\varphi + \Delta\varphi) \cos \frac{\Delta\varphi}{2} = \mu \Delta N, \quad (2)$$

так как угол мал, его косинус следует считать равным 1. Из уравнений (1)-(2) следует уравнение для определения зависимости натяжения нити от угла намотки

$$T(\varphi + \Delta\varphi) - T(\varphi) = -\mu T(\varphi) \Delta\varphi,$$

или

$$\frac{dT}{d\varphi} = -\mu T \quad (3)$$

решением этого уравнения при оговоренном условии и является приведенная формула $T = T_0 \exp(-\mu\varphi)$.

2. Самое важное при выполнении данного задания понять, что сила натяжения больше, чем сила тяжести, поэтом теоретическая зависимость должна иметь вид

$$T = T_0 \exp(+\mu\varphi). \quad (4)$$

Точность измерений зависит от качества динамометра, но в результате получаются достаточно гладкие зависимости. При правильном подборе нити и стержня удается снять 6-7 точек (полтора – два оборота). Большее количество точек удается получить при меньшей массе подвешенного груза.

3. Для подтверждения справедливости приведенной формулы следует построить зависимость логарифма силы натяжения от угла намотки. Более того, зависимости $\ln \frac{T(\varphi)}{T_0}$

от φ оказываются практически одинаковыми для всех масс подвешенных грузов. Коэффициент наклона этих зависимостей равен коэффициенту трения нити о поверхность стержня. Типичные значения этого коэффициента порядка 0,1 и не зависят от массы повешенного груза.

4. При опускании груза нить движется в противоположном направлении. Поэтому в этом случае сила натяжения нити оказывается меньше силы тяжести из-за действия силы трения, в этом случае в показателе экспоненты следует брать знак минус. Больше число измерений удается провести при максимальной массе груза. И в этом случае приведенная формула подтверждается.



Задача 38. «Явление застоя»

Данная задача слишком оригинальна для того, чтобы ограничиться только краткими указаниями, поэтому обсудим ее выполнение подробно.

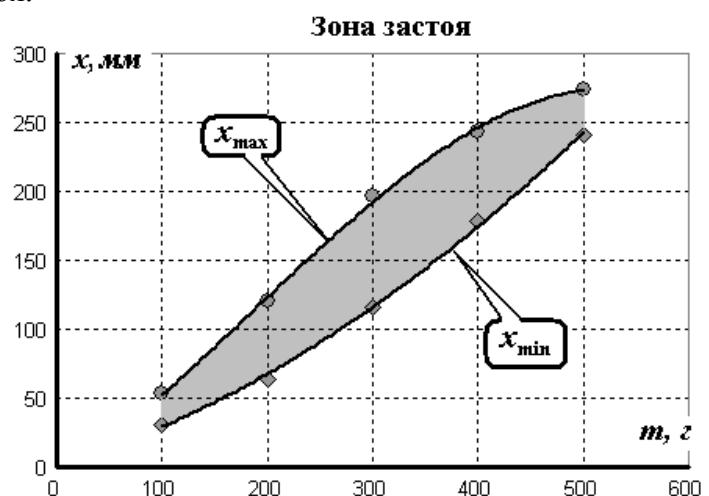
Часть 1. «Статика»

Начнем с результатов измерений, которые представлены в Таблице 1 и на графике, где x_{\min} и x_{\max} - минимальное и максимальное значение деформации резинки, при которых система остается в равновесии, при массе груза m .

На графике выделена зона застоя.

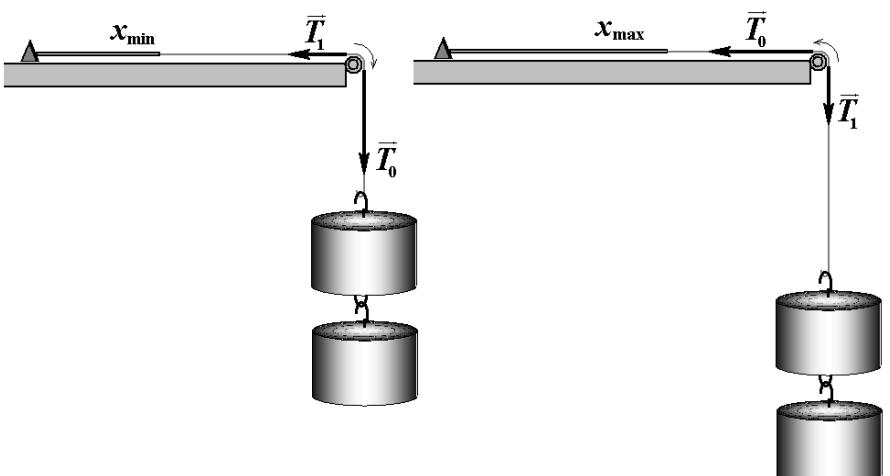
Таблица 1.

m , Г	x_{\min} , мм	x_{\max} , мм
100	31	53
200	64	120
300	116	197
400	178	243
500	241	243



Теперь нам необходимо математически описать условия равновесия груза.

Для определения минимального растяжения мы должны грузы медленно опускать. В этом случае сила трения покоя будет помогать удерживать грузы (уравновешивать силу тяжести). В положении равновесия сила натяжения вертикальной части нити равна силе тяжести $T_0 = mg$; а



уменьшенная трением сила натяжения горизонтального участка равна силе упругости (будем считать, что закон Гука справедлив): $T_1 = \beta T_0 = kx_{\min}$.

Из этих уравнений находим зависимость минимальной деформации резинки от массы подвешенного груза

$$x_{\min} = \beta \frac{mg}{k}. \quad (1)$$

Для определения максимальной деформации грузы медленно приподнимают, поэтому изменяется направление действия сил трения (сейчас эта сила помогает удерживать резинку в растянутом состоянии). Следовательно, сила натяжения

горизонтального участка уравновешивает силу натяжения максимально растянутой резинки $T_0 = kx_{\min}$, а уменьшенная трением сила натяжения вертикального участка уравновешивается силой тяжести, поэтому $T_1 = \beta T_0 = mg$. Следовательно, зависимость максимальной деформации резинки от массы подвешенного груза имеет вид

$$x_{\max} = \frac{1}{\beta} \frac{mg}{k}. \quad (2)$$

Таким образом, и минимальная и максимальная деформации резинки должны быть прямо пропорциональны массе подвешенного груза. Обратимся еще раз экспериментальному графику. Можно считать, что деформаций порядка 200 мм обе зависимости примерно линейны (или их можно так аппроксимировать). Построим эти зависимости и определим их параметры по МНК. Для минимального растяжения зависимость имеет вид

$$x_{\min} = a_1 m + b_1,$$

со следующими значениями коэффициентов

$$a_1 = (0,49 \pm 0,09) \frac{\text{мм}}{\text{г}}; \quad b_1 = (-26 \pm 25) \text{мм};$$

для максимального растяжения

$$x_{\max} = a_2 m + b_2,$$

с коэффициентами

$$a_2 = (0,72 \pm 0,06) \frac{\text{мм}}{\text{г}}; \quad b_2 = (-21 \pm 13) \text{мм}.$$

Точность не велика, потому что экспериментальных точек не много (четыре для первой и всего три для второй) - но не мы же виноваты, что в стандартный набор входит всего шесть грузов, а распиливать их не разрешают. Тем не менее, пусть и с погрешностью в 20% значения коэффициентов наклона мы получили. Свободные члены отличны от нуля (об их погрешности лучше не говорить), по-видимому, линейка оказалась сдвинута миллиметров на 20 - учтем далее, как поправку⁷ к деформации $\delta x = 22 \text{мм}$.

Коэффициент β выразим из явных выражений для коэффициентов наклона, следующих из формул (1) и (2):

$$\begin{cases} a_1 = \beta \frac{g}{k} \\ a_2 = \frac{1}{\beta} \frac{g}{k} \end{cases} \Rightarrow \beta = \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}. \quad (3)$$

Подсчет по этой формуле приводит к численному значению

$$\beta = 0,83 \pm 0,17 \quad (4)$$

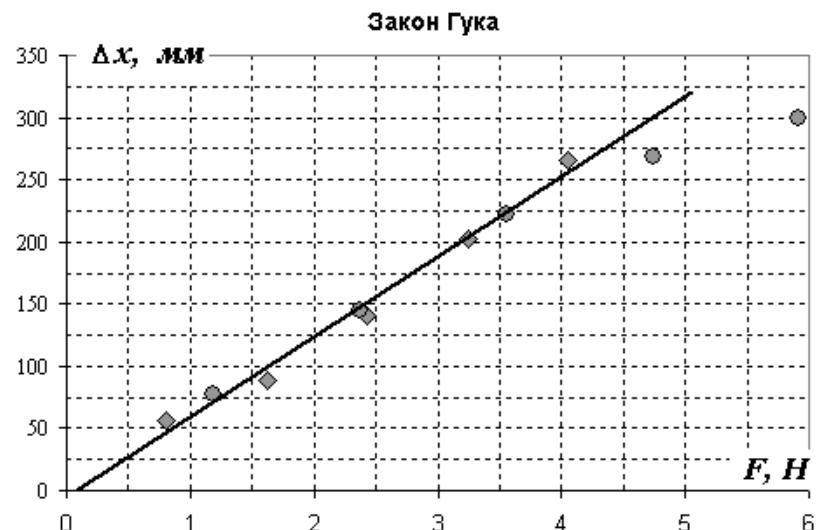
Отметим, что, используя формулу для этого параметра, исследованную в предыдущей задаче $\beta = \exp\left(-\frac{\pi}{2}\mu\right)$, можно определить коэффициент трения нити о стержень $\mu = -\frac{2}{\pi} \ln \beta \approx 0,12$.

⁷ Это значение найдено, как результат усреднения параметров b с учетом их различной погрешности.

Теперь, зная коэффициент β , можно рассчитать значения сил упругости при различных деформациях пружинки. Так, при измерениях минимальных растяжений сила упругости равнялась $F_{yupr.} = \beta mg$, а при максимальных - $F_{yupr.} = \frac{1}{\beta} mg$. Пересчитаем данные Таблицы 1 по этим формулам (Таблица 2) и построим «объединенный» график зависимости деформации от силы упругости.

Таблица 2.

	$F_{yupr.}$, Н	Δx , мм
$F_{yupr.} = \beta mg$, $\Delta x = x_{min} + \delta x$	0,81	53
	1,62	86
	2,43	138
	3,24	200
	4,05	263
$F_{yupr.} = \frac{1}{\beta} mg$, $\Delta x = x_{max} + \delta x$	1,18	75
	2,37	142
	3,55	219
	4,74	265
	5,92	296



Как видим, точки действительно легли на одну прямую (за исключением двух последних, для которых закон Гука – «не закон»).

Параметры этой зависимости $\Delta x = AF + B$, рассчитанные по МНК, равны

$$A = (64 \pm 6) \frac{\text{мм}}{\text{Н}}; \quad B = (-8 \pm 15) \text{мм}.$$

Так как точки легли на прямую прямой пропорциональности (значение сдвига B обосновано может быть принято равным нулю), то для деформаций резинки до 250 мм закон Гука выполняется. Жесткость резинки $k = \frac{1}{A}$, ее численное значение

$$k = (15,6 \pm 1,5) \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Заметьте, объединение точек позволило снизить погрешность определения жесткости до 10%.

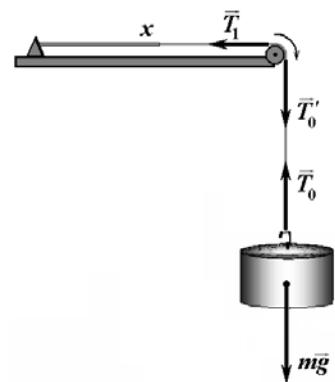
Часть 2. «Динамика»

Груз всегда останавливается в зоне застоя. При наличии достаточной энергии он может проскочить зону застоя и начать обратное движение. Этим объясняется наличие разрывов в графиках зависимостей конечного положения груза от его начальной координаты.

Решение этой части задачи начнем с теоретического анализа движения груза, которое описывается уравнением второго закона Ньютона (груз опускается):

$$ma = mg - T_0. \quad (5)$$

Силы натяжения с разных сторон блока связаны соотношением $T_1 = \beta T_0$, а натяжение горизонтальной части нити равно силе упругости резинки (полагаем, что закон Гука справедлив): $T_1 = kx$.



Таким образом, уравнения движения груза (5) приобретает вид

$$ma = mg - \frac{k}{\beta}x. \quad (6)$$

Но это есть уравнение гармонических колебаний

$$a = -\frac{k}{\beta m} \left(x - \beta \frac{mg}{k} \right) = -\frac{k}{\beta m} (x - x_{\min}). \quad (6)$$

с положением равновесия, смещенным на величину $\beta \frac{mg}{k} = x_{\min}$, совпадающую с минимальной границей зоны застоя.

Решением этого уравнения является гармоническая функция, которая нас, экспериментаторов не интересует, так как экспериментально исследуется толь зависимость конечного положения груза от начального. Важно, что точка первой остановки будет находиться на таком же расстоянии от положения равновесия, как и начальная точка, только с другой стороны.

Аналогично можно показать, что при движении груза вверх уравнение движения будет иметь вид

$$a = -\frac{\beta k}{m} \left(x - \frac{mg}{\beta k} \right) = -\frac{\beta k}{m} (x - x_{\max}). \quad (7)$$

Отметим, интересный факт – частоты колебаний различны для различных направлений движения.

При движении вверх расстояние между точкой первой остановки и верхней границей зоны застоя равно расстоянию от этой границы до начальной точки (которая, естественно должна находится за этой границей).

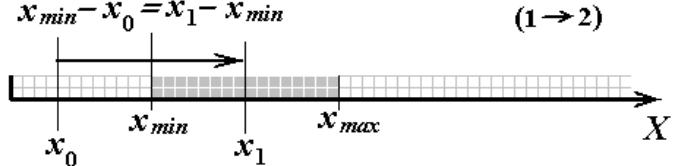
Теперь мы можем проанализировать искомую зависимость. Нам необходимо рассмотреть несколько участков начальной деформации резинки (или положения груза, что равносильно). Ниже построен итоговый график зависимости координаты конечного положения груза x_1 от координаты его начального положения x_0 . По ходу рассмотрения мы будем последовательно строить участки этого графика.

(1-2) Пусть начальная координата меньше координаты минимальной границы зоны застоя $x_0 < x_{\min}$. В этом случае сила тяжести превышает силу упругости (даже с учетом трения), поэтому груз начнет опускаться (резинка растягивается). Координата первой и окончательной⁸ остановки удовлетворяет оговоренному выше условию

$$x_1 - x_{\min} = x_{\min} - x_0,$$

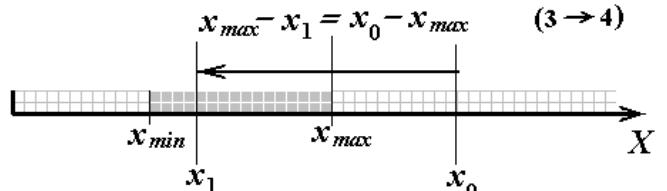
из которого следует, что

$$x_1 = 2x_{\min} - x_0. \quad (8)$$



(2-3) Если начальная точка находится в зоне застоя, то движение не начнется, поэтому конечное положение попросту будет совпадать с начальным.

(3-4) Когда начальная точка лежит за границей зоны застоя $x_0 > x_{\max}$, резинка начнет сжиматься, поднимая груз. В этом случае движение описывается



⁸ Мы рассматриваем случай, когда координата нижней границы меньше ширины зоны застоя $x_{\min} < x_{\max} - x_{\min}$. В этом случае первая остановка попадает в зону застоя. В том случае, когда $x_{\min} > x_{\max} - x_{\min}$, возможно, что система проскочит зону покоя. Но в наших экспериментах этот вариант не встретился, поэтому можете проанализировать его самостоятельно.

уравнением (7), а для координаты точки первой остановки справедливо соотношение

$$x_{\max} - x_1 = x_0 - x_{\max},$$

из которого находим

$$x_1 = 2x_{\max} - x_0. \quad (9)$$

Эта формула будет описывать конечное положение, если оно окажется в зоне застоя, то есть при

$$x_1 = 2x_{\max} - x_0 > x_{\min}, \Rightarrow x_0 < 2x_{\max} + x_{\min}.$$

(4-5) Если же начальное положение лежит за пределами этой области, то система проскочит зону застоя и начнет обратное движение. Координата первой остановки удовлетворяет формуле (9). Но, так как эта точка вышла из зоны застоя, то точка продолжит движение в обратном

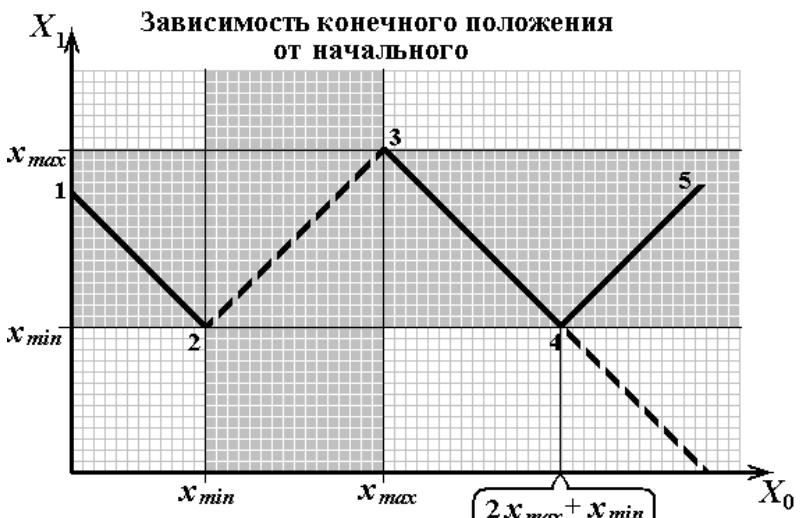
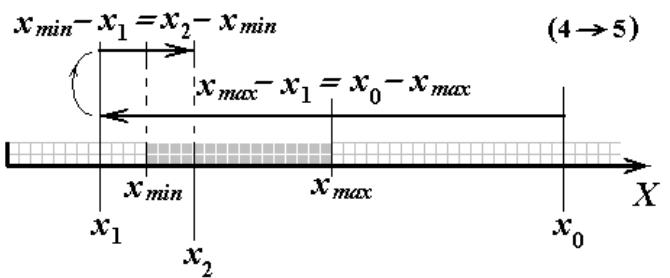
направлении, координата второй остановки удовлетворяет соотношению, аналогичному формуле (8): $x_2 = 2x_{\min} - x_1$. Подставляя из формулы (9) значение x_1 , получим выражение для координаты второй (надеемся окончательной) остановки:

$$x_2 = 2x_{\min} - x_1 = x_0 - 2(x_{\max} - x_{\min}). \quad (10)$$

На этом мы закончим теоретический анализ, не смотря на то, что еще не все варианты рассмотрены. Например, если координата первой остановки оказалась отрицательной, то, как будет реагировать на это резинка? Мы же считаем, что и в этом случае справедлив закон Гука, т. е. резинка начнет «толкаться».

Посмотрите на итоговый график и разрывную функцию, его описывающую (объединим все полученные выражения).

$$x_1 = \begin{cases} 2x_{\min} - x_0, & x_0 < x_{\min} \\ x_0, & x_{\min} < x_0 < x_{\max} \\ 2x_{\max} - x_0, & x_{\max} < x_0 < 2x_{\max} + x_{\min} \\ x_0 - 2(x_{\max} - x_{\min}), & 2x_{\max} + x_{\min} < x_0 < \dots \end{cases} \quad (11)$$



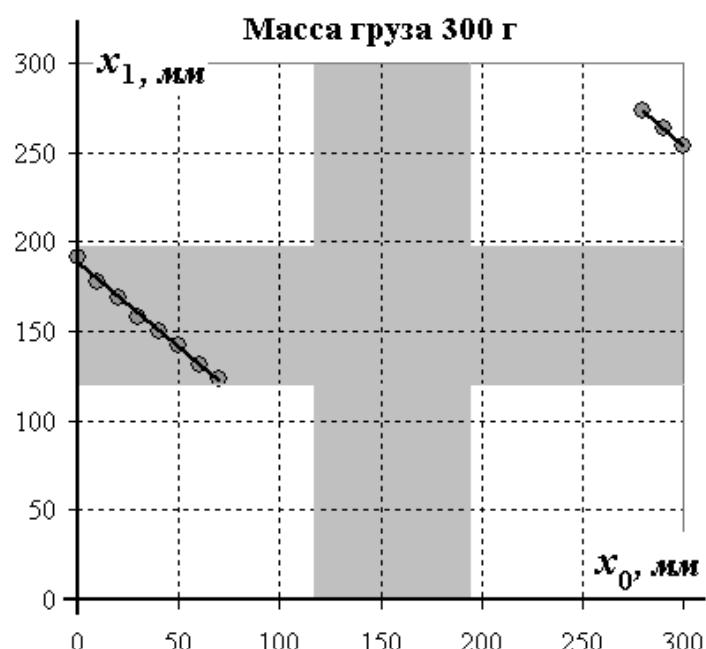
На графике выделена область застоя, как для начальной, так и конечной координаты.

Согласитесь, не традиционная зависимость для экспериментальной проверки! Посмотрим, что же получилось в эксперименте.

В Таблице 3 и на графике показаны экспериментальные значения координат начальной и конечной точек при массе груза 300 г. Координаты точек конечной остановки получены усреднением по 5 экспериментальным данным. Отметим, что разброс результатами отдельных измерений не превышал 3 мм. На диаграмме выделена область застоя, построенная по данным первой части (для данной массы груза $x_{\min} \approx 116$ мм, $x_{mfp} \approx 197$ мм).

Таблица 3.

x_0 , мм	x_1 , мм
0	191,3
10	177,3
20	168,3
30	158,3
40	149,7
50	141,7
60	131,7
70	123,0
80	117,0
90	113,7
100	110,0
300	253,3
290	263,3
280	273,7



Полученные результаты качественно согласуются с теоретическими предсказаниями – по меньшей мере, есть два четко разделенных между собой участка. Для первого из них (участок 1-2 по нашей теоретической нумерации) соответствие вполне удовлетворительное. Уравнение этого участка, найденное по МНК, имеет вид

$$x_1 = -0,95x_0 + 188.$$

Сравнивая с теоретическим выражением (9), отмечаем, что они соответствуют друг другу «в пределах погрешности измерений» – коэффициент наклона близок к -1, координата нижней границы зоны застоя $\tilde{x}_{\min} = \frac{188}{2} \approx 94$ мм, примерно совпадает с найденным в статических условиях значениюю $x_{\min} \approx 116$ мм. Со вторым участком дело обстоит значительно хуже – он даже не попал в ранее найденную зону застоя! Уравнение второго отрезка

$$x_1 = -1,0x_0 + 58.$$

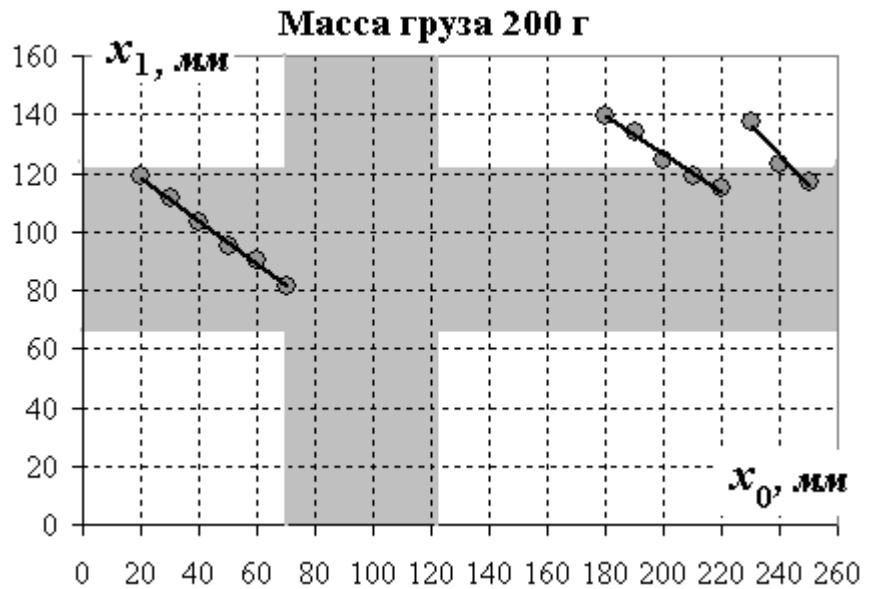
С наклоном все отлично – полное совпадение, а вот верхняя граница зоны застоя $\tilde{x}_{\max} = \frac{558}{2} = 280$ мм в полтора раза выше, чем в статическом случае $x_{\max} = 197$ мм.

Правда при этих деформациях не выполняется закон Гука, кроме того, коэффициент трения покоя отличается от коэффициента трения скольжения. А может этот коэффициент возрастает при увеличении скорости, нить «вгрызается» в пластик? Нужны дополнительные исследования!

Еще более удивительные результаты получены для груза массой 200 г. Они представлены в таблице 4 и на графике. Методика получения и представления аналогичны предыдущим.

Таблица 4.

x_0 , мм	x_1 , мм
20	118,8
30	111,6
40	103,2
50	95,2
60	90,0
70	81,2
190	134,0
180	139,8
200	124,4
210	119,2
220	114,6
230	137,2
240	123,0
250	117,2



Здесь даже первая ветвь не соответствует теоретически предсказания, ее коэффициент наклона значимо отличается от -1 (уравнение этого отрезка $x_1 = -0,75x_0 + 134$), поэтому ее нижний край не совпадает с границей зоны застоя. Хотя значение координаты этой границы $\tilde{x}_{\min} = \frac{134}{2} \approx 67 \text{мм}$ очень близко к полученному в первой части $x_{\min} \approx 64 \text{мм}$.

В чем причина уменьшения коэффициента наклона? Непонятно, может, стержень протерся? Но на других стержнях получены аналогичные результаты!

Уравнение второго отрезка $x_1 = -0,65x_0 + 257$, показывает еще большее отклонение от теоретического предсказания. Значение координаты верхней границы зоны застоя $\tilde{x}_{\max} = \frac{257}{2} \approx 130 \text{мм}$ близко к статическому $x_{\max} \approx 120 \text{мм}$, хотя также превышает его.

Самое удивительное произошло с третьим отрезком – у него наклон не в ту сторону! Поэтому обсуждать численные значения смысла не имеет! В чем причина такого радикального отклонения – возможно в этой области груз подпрыгивал выше уровня нерастянутой резинки?

Как видите, задача дает много поводов для дополнительных размышлений и самостоятельных экспериментальных исследований!



Задача 39. «Трение качения»

1.1 При колебательном движении механическая энергия системы складывается из кинетической и потенциальной энергий всех тел, образующих систему.

Будем считать, что кинетической энергией деревянной палочки и центрирующего кусочка пластилина на ее конце можно пренебречь в силу малости их массы ($m \approx 5\epsilon$) по сравнению с массой грузика ($M \approx 100\epsilon$).

Тогда кинетическая энергия системы будет определяться только кинетической энергией грузика (цилиндра), которая при качении может быть найдена как сумма его кинетических энергий поступательного и вращательного движений

$$E_K = \frac{Mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = \frac{M(R\omega)^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \omega^2 = \frac{3MR^2}{4} \omega^2, \quad (1)$$

где $v = \omega R$ - скорость поступательного движения грузика, ω - угловая скорость вращения грузика, M - его масса, $J = \frac{MR^2}{2}$ - момент инерции цилиндра относительно оси, проходящей через его центр масс.

Потенциальная энергия системы при отклонении от положения равновесия определяется только увеличением потенциальной энергии палочки, поскольку грузик движется по горизонтальной поверхности:

$$E_P = mgz(1 - \cos \varphi) \approx mgz \frac{\varphi^2}{2}, \quad (2)$$

где φ — угол отклонения палочки от вертикали в процессе малых ($\varphi \rightarrow 0$) кривильных колебаний, z - расстояние от оси цилиндра до центра масс палочки C . Пренебрегая трением запишем уравнение закона сохранения механической энергии

$$\frac{3MR^2}{4} \omega^2 + mgz \frac{\varphi^2}{2} = \text{const},$$

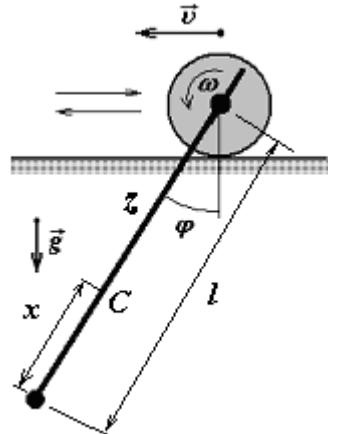
которое совпадает с уравнением гармонических колебаний. Из этого уравнения следует, что период колебаний равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3MR^2}{2mgz}} \quad (3)$$

Таким образом, период колебаний обратно пропорционален корню квадратному из z - расстояния от оси цилиндра до центра масс палочки.

1.2 Чтобы не определять экспериментально положение центра масс палочки (с прикрепленным грузом) измерим зависимость периода колебаний от длины части палочки l , расположенной ниже точки крепления. Расстояние от конца палочки до ее конца обозначим x . Значение этого параметра можно будет определить непосредственно из измерений зависимости периода колебаний от длины ее части l . Действительно, зависимость (3) может быть линеаризована следующим образом

$$\frac{1}{T^2} = \frac{2mg}{6\pi^2 MR^2} (l - x) \quad (4)$$



Получив график данной зависимости параметр x , легко определяется как координата точки пересечения графика с осью абсцисс.

Результаты измерений зависимости периода колебаний от длины l , а также результаты расчетов величины $\frac{1}{T^2}$ представлены в таблице. Рядом построен график полученной зависимости.

Таблица 1.

$l, \text{ см}$	$T, \text{ с}$	$1/T^2, \text{ с}^{-2}$
12	2,36	0,179
13	2,14	0,219
14	2,03	0,242
15	1,90	0,276
16	1,83	0,297
17	1,68	0,355
18	1,65	0,367
19	1,61	0,384

Зависимость периода колебаний от длины части стержня

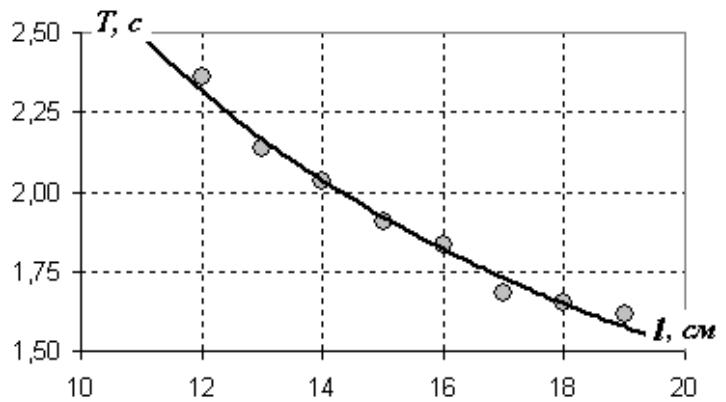
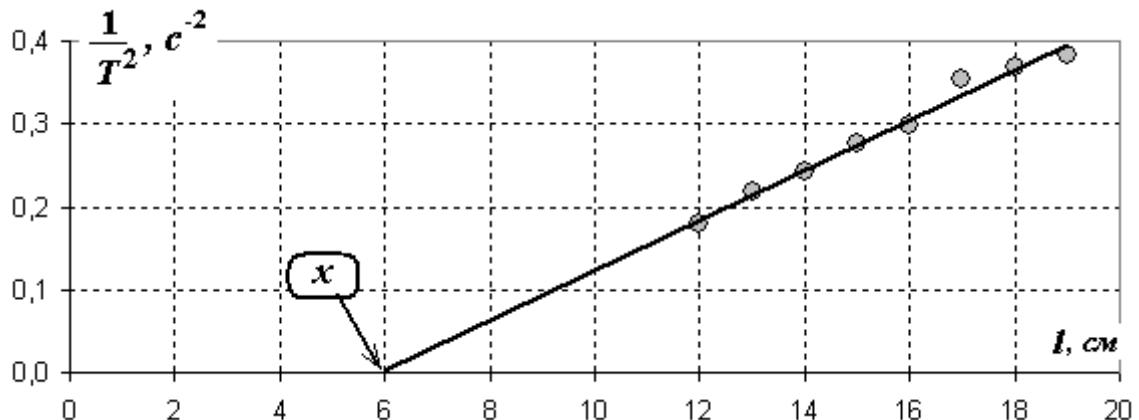


График линеаризованной зависимости (4) близок к прямой линии, что подтверждает полученную формулу для периода колебаний. Иными словами, показатель степени в формуле (1) равен $\alpha = \frac{1}{2}$.

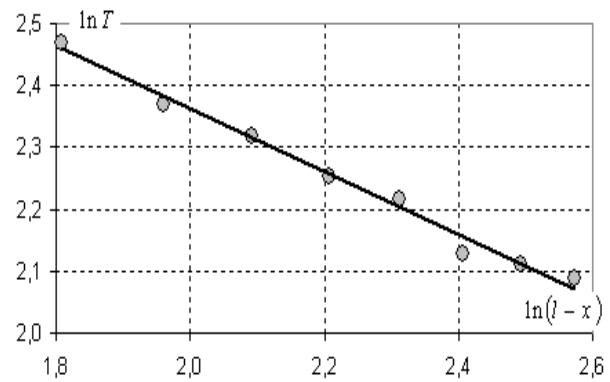
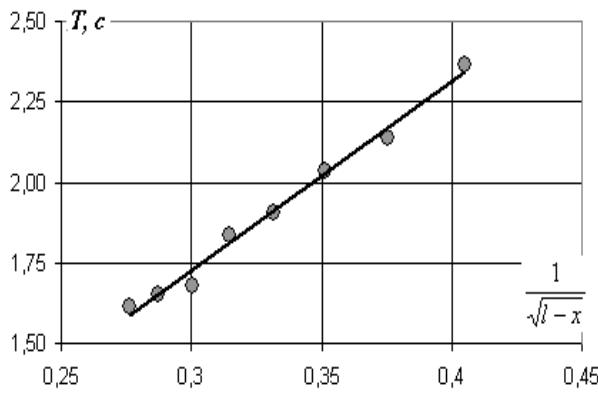


Рассчитанной по этой зависимости (или просто снятое с графика) значение параметра $x = 5,9 \text{ см}$.

Отметим, что положение центра масс (то есть значение найденного параметра x) можно было определить и экспериментально, например, уравновесив стержень на ребре линейки.

Знание этого параметра позволяет провести проверку формулы для периода колебаний и другими способами. Не сложно построить зависимость периода T от величины $\frac{1}{\sqrt{l-x}}$ и убедиться в ее линейности (даже прямой пропорциональности).

Можно также построить график в двойном логарифмическом масштабе: $\ln T$ от $\ln(l-x)$. Приведенные ниже рисунки также подтверждают вид найденный вид зависимости периода колебаний от расстояния до центра масс – формулу (3). Отметим, что значение показателя степени, найденное как коэффициент наклона графика в двойном логарифмическом масштабе равно $\alpha = 0,51 \pm 0,05$.



Часть 2. Затухание колебаний.

Выполнение этой части начнем с теоретического описания процесса затухания колебаний, которое происходит вследствие трения качения. Так как масса цилиндра значительно больше массы палочки, то можно считать, что сила трения качения равна

$$F_{mp.} = \frac{K}{R} Mg,$$

а ее работа $A_{mp.} = \frac{K}{R} MgS$, где S - путь, пройденный цилиндром. Работа силы трения равна убыли механической энергии системы. Измерить энергию можно только в точках остановки, в которых кинетическая энергия обращается в нуль, а потенциальная определяется формулой

$$U = -mgz \cos \varphi.$$

В ходе эксперимента следует измерить координаты точек остановок цилиндра y_k (удобно в ходе колебаний их просто отметить, а затем уже измерять их положение). Заметим, что в данной части колебания не обязаны быть малыми. Если движение происходит без проскальзывания, то угол отклонения палочки от вертикали определяется по формуле

$$\varphi_k = \frac{y_k}{R},$$

а путь до k -той остановки равен

$$S_k = |y_0| + |y_1 - y_0| + |y_2 - y_1| + \dots = S_{k-1} + |y_k - y_{k-1}|.$$

Таким образом, координаты точек остановки позволяют определить как энергию системы, так и пройденный путь.

Запишем уравнение закона сохранения механической энергии

$$U_0 - U_k = A_{mp.}$$

$$mgz(\cos \varphi_k - \cos \varphi_0) = \frac{K}{R} MgS_k.$$

Из этого уравнения получим зависимость, которая может быть получена экспериментально

$$-\cos \varphi_k = -\cos \varphi_0 - \frac{K}{R} \frac{M}{mz} S_k. \quad (5)$$

Отношение масс палочки и цилиндра может быть выражено из формулы для периода колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{3MR^2}{2mgz}} \Rightarrow \frac{M}{mz} = \frac{T^2 g}{6\pi^2 R^2}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (5), получим

$$-\cos \varphi_k = -\cos \varphi_0 - K \frac{T^2 g}{6\pi^2 R^3} S_k.$$

Экспериментально легче измерить длину окружности цилиндра $2\pi R = L$, обернув его полоской бумаги. Тем самым получим зависимость, которую можно измерить экспериментально и по которой можно определить коэффициент трения качения

$$-\cos 2\pi \frac{y_k}{L} = -\cos \varphi_0 - K \frac{4\pi T^2 g}{3L^3} S_k. \quad (6)$$

В таблице 2 представлены результаты измерений координат точек остановки цилиндра, для наглядности эти же результаты показаны на графике.

Таблица 2.

k	$y_k, \text{мм}$	$S, \text{мм}$	$-\cos \varphi_k$
0	47	0	0,886
1	-42	89	0,722
2	36	167	0,450
3	-32	235	0,238
4	30	297	0,127
5	-28	355	0,014
6	26	409	-0,099
7	-24	459	-0,211
8	22	505	-0,320
9	-21	548	-0,373
10	20	589	-0,425
11	-19	628	-0,475
12	17	664	-0,572

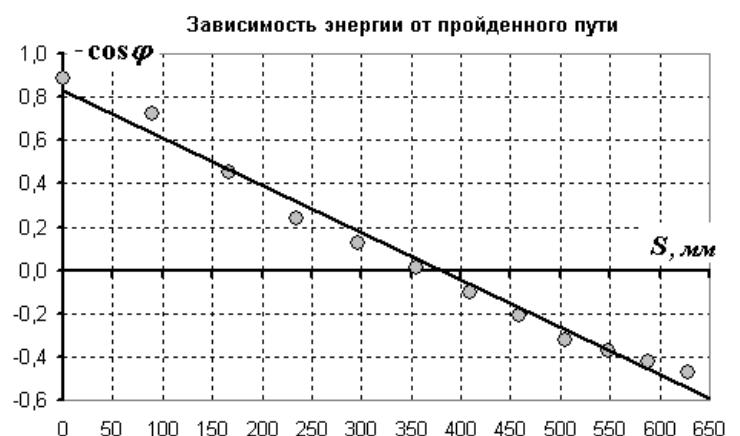


Построенный график зависимости (5) демонстрирует линейную (в пределах погрешности измерений) связь между переменными. Рассчитанный по МНК коэффициент наклона графика оказывается равным

$$a = \frac{\Delta(-\cos \varphi)}{\Delta S} = (-2,19 \pm 0,15) \cdot 10^{-3} \text{ мм}^{-1}$$

Значение этого параметра позволяет рассчитать коэффициент трения качения (в наших экспериментах $T = 1,9 \text{ с}$, $L = 111 \text{ мм}$)

$$a = -K \frac{4\pi T^2 g}{3L^3} \Rightarrow K = -a \frac{3L^3}{4\pi T^2 g} = 2,19 \cdot 10^{-3} \frac{3(111)^3}{4\pi(1,9)^2 \cdot 9,8} \approx 20 \text{ мм}$$





Задача 40. «Потери энергии»

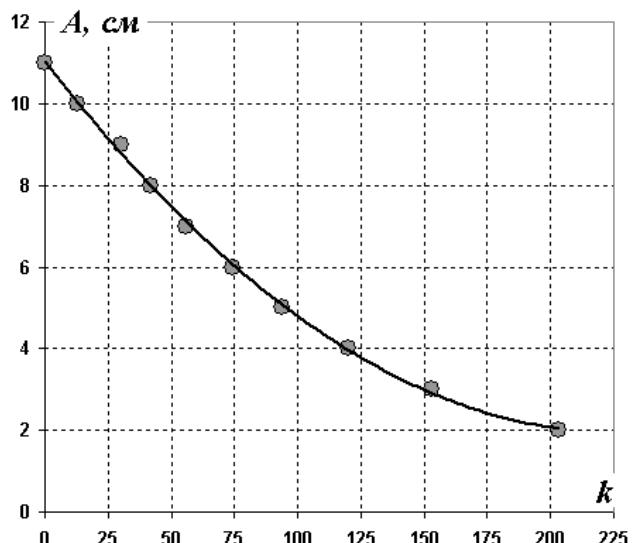
Как было отмечено в комментариях к условию, результаты экспериментов и окончательный вывод о виде зависимости силы сопротивления воздуха от скорости тела зависят от параметров установки – резкой границы между линейной и квадратичной зависимостями не существует. Поэтому при описании экспериментов необходимо точно описывать использованную экспериментальную установку. Здесь приведены данные, полученные с помощью оборудования, описанного ранее в задаче 33.

Для проведения измерений надо набраться терпения, для получения значимого результата затухание должно быть слабым, поэтому число подсчитанных колебаний должно быть большим. Так в описываемых экспериментах число колебаний более 200, учитывая, что период колебаний примерно равен 3 с, то общее время непрерывных наблюдений составляет около 10 минут. Очевидно, что в данном эксперименте следует фиксировать амплитуду колебаний и подсчитывать через сколько колебаний амплитуда уменьшится до выбранного значения. Результаты измерений числа этих колебаний k для монотонно убывающей амплитуды A представлены в таблице и на графике.

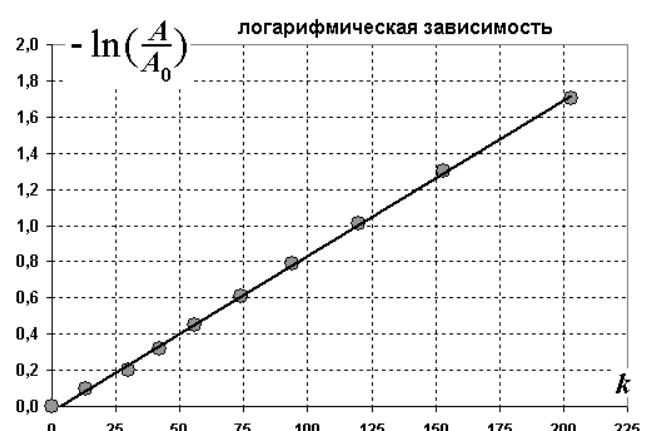
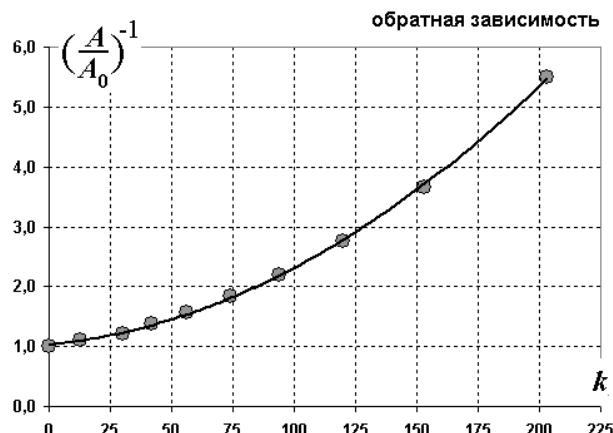


Таблица результатов измерений.

k	$A, \text{ см}$	$\frac{A_0}{A}$	$-\ln \frac{A}{A_0}$
0	11	1,000	0,000
13	10	1,100	0,095
30	9	1,222	0,201
42	8	1,375	0,318
56	7	1,571	0,452
74	6	1,833	0,606
94	5	2,200	0,788
120	4	2,750	1,012
153	3	3,667	1,299
203	2	5,500	1,705



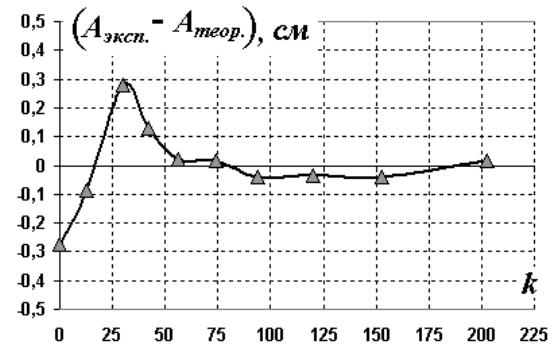
Как и следовало ожидать, амплитуда колебаний монотонно и нелинейно убывает, но по внешнему виду данной зависимости невозможно определить, какой из законов (1) или (2) более точно описывает полученные данные. Поэтому следует провести линеаризацию полученной зависимости, которая в данном случае также очевидна: в первом случае требуется построить график зависимости логарифма амплитуды от числа колебаний; во втором – величины обратной амплитуде колебаний, причем удобнее это сделать в нормированном виде.



Посмотрите на результаты расчетов – вывод однозначен: в данном эксперименте сила сопротивления пропорциональна скорости в первой степени. Коэффициент наклона данной зависимости (из формулы (1) следует, что $-\ln \frac{A}{A_0} = k \ln \lambda$) равен $-\ln \lambda$. Расчет данного коэффициента по МНК дает значение $-\ln \lambda \approx 8,57 \cdot 10^{-3}$, следовательно $\lambda \approx 0,99$.

Иными словами, за одно колебание амплитуда убывает всего на 1%.

Для подтверждения сделанного вывода можно сравнить результаты измерений и расчетов по формуле (1) с найденным значением параметра λ . На рисунке показан график зависимости разности этих значений от числа колебаний. Выводы: во-первых отклонения теоретических и экспериментальных значений малы (менее 3%), во-вторых, носят нерегулярный характер, то есть обусловлены случайными ошибками.





Задача 41. «Скольжение диска»

Теоретическое введение (необязательное для учащихся)

Если на тело действуют силы трения скольжения и вязкого трения, то по второму закону Ньютона оно приобретает ускорение

$$m \frac{dv}{dt} = -\mu mg - \beta v. \quad (1)$$

Чтобы найти зависимость пути, пройденного диском, от его начальной скорости избавимся от времени в этом уравнении

$$m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dS} \frac{dS}{dt} = mv \frac{dv}{dS}. \quad (2)$$

Такая замена позволяет разделить переменные в уравнении (1)

$$mv \frac{dv}{dS} = -\mu mg - \beta v \Rightarrow dS = -\frac{mv dv}{\mu mg + \beta v} \quad (3)$$

и проинтегрировать его

$$S = \int_0^{v_0} \frac{mv dv}{\mu mg + \beta v} = \frac{m}{\beta} v_0 \left(1 - \frac{\mu mg}{\beta v_0} \ln \left(1 + \frac{\beta v_0}{\mu mg} \right) \right). \quad (4)$$

При малых значениях параметра ξ справедлива приближенная формула

$$\ln(1 + \xi) \approx \xi - \frac{\xi^2}{2} + \frac{\xi^3}{3}. \quad (5)$$

Соответственно, при малых значениях $\frac{\beta v_0}{\mu mg}$ формула (4) превращается в

$$s \approx \frac{m}{\beta} v_0 \left(1 - \frac{\mu mg}{\beta v_0} \left(\frac{\beta v_0}{\mu mg} - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta v_0}{\mu mg} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\beta v_0}{\mu mg} \right)^3 \right) \right) = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{\mu g} - \frac{1}{3} \frac{\beta v_0^3}{\mu^2 mg^2} \quad (6)$$

Относительная погрешность использования формулы (8) на превышает 5% при $\xi < 0,7$.

Отметим, что первое слагаемое в данной формуле описывает пройденный путь без учета сопротивления воздуха, а второе – уменьшение пути из-за влияния воздуха.

Решение.

1. Для определения массы компакт диска можно воспользоваться «рычажным» методом, используя в качестве рычага линейку, и имея в своем распоряжении груз известной массы. В результате измерений получено, что масса CD равна $m = (15,3 \pm 0,7)\text{г}$

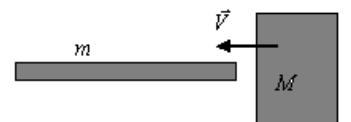
2. Рассмотрим соударение тел. Пусть скорости тел M и m после соударения равны V^* и v соответственно. Поскольку соударение абсолютно упругое, выполняются законы сохранения импульса и энергии

$$MV = MV^* + mv, \quad (7)$$

$$MV^2 = MV^{*2} + mv^2. \quad (8)$$

отсюда нетрудно получить для скорости тела m

$$v = \frac{2M}{M+m} V. \quad (9)$$



Для используемого компакт-диска и груза коэффициент $\alpha = \frac{2M}{M+m} = 1,73$. Относительная погрешность $\varepsilon_\alpha = \sqrt{\varepsilon_{2M}^2 + \varepsilon_{M+m}^2} \approx 0,01$. Абсолютная погрешность равна $\Delta\alpha = \alpha\varepsilon_a \approx 0,02$. Коэффициент передачи скорости равен $\alpha = 1,73 \pm 0,02$.

3. Расстояние X измеряется линейкой, прикрепленной к нижней стороне пяты скотчем. Для увеличения точности измерений X груз необходимо отпускать, когда он находится в вертикальном положении.

Измерения смещения компакт-диска по миллиметровой бумаге производятся при помощи самой миллиметровой бумаги.

Результаты измерений пройденного пути от начального отклонения груза X приведены в Таблице 1. По результатам измерений построен график $s(X)$.

При смещении груза из положения равновесия на расстояние X по горизонтали, он поднимается на высоту

$$H = R - \sqrt{R^2 - X^2}, \quad (10)$$

где R – расстояние от точки подвеса до центра масс груза. При подходе к диску его скорость можно найти из закона сохранения энергии

$$V = \sqrt{2gH} = \sqrt{2g(R - \sqrt{R^2 - X^2})}. \quad (11)$$

Начальная скорость движения компакт-диска

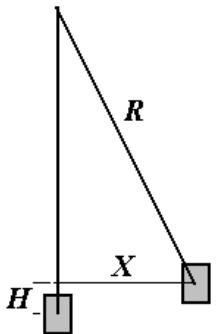
$$v_0 = \alpha V = \alpha \sqrt{2g(R - \sqrt{R^2 - X^2})}. \quad (12)$$

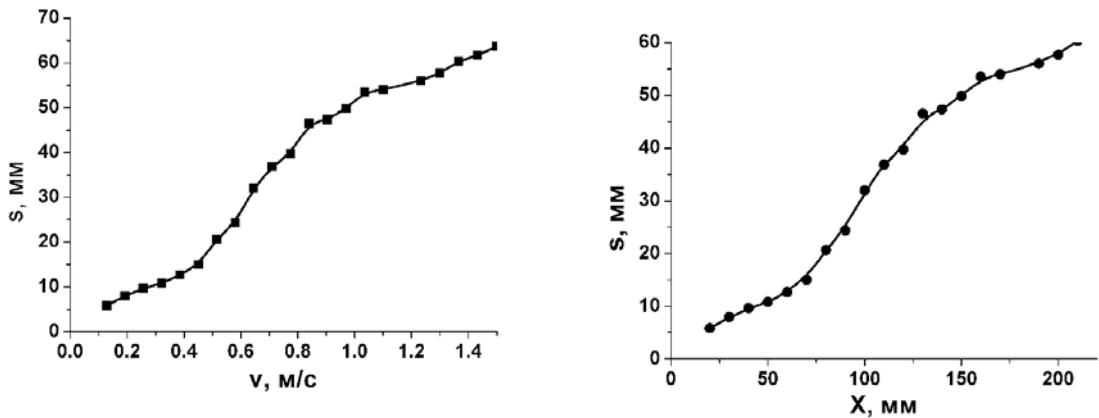
Расстояние от точки крепления нити к лапке штатива до центра масс грузика было равно $R = 710\text{мм}$.

По измеренным данным и формуле (17) необходимо определить начальную скорость диска v_0 .

Таблица 1

X , мм	v_0 , м/с	s , мм	s/v_0^2 , мм·с ² /м ²
20	0.074	6	1055
30	0.111	8	643
40	0.149	10	437
50	0.186	12	313
60	0.223	13	254
70	0.261	15	221
80	0.298	21	233
90	0.335	24	217
100	0.373	32	230
110	0.410	37	217
120	0.448	40	198
130	0.485	46	197
140	0.523	47	173
150	0.561	50	158
160	0.599	53	149
170	0.637	54	133
190	0.713	56	110
200	0.751	58	102
210	0.789	60	96.8
220	0.828	62	89.9
230	0.867	64	84.7





Зависимость пройденного пути от начальной скорости диска описывается формулой (6). Для определения коэффициента трения скольжения μ и вязкого трения β необходимо эту зависимость линеаризовать и построить график зависимости $\frac{s}{v_0^2}$ от v_0 (табл. 1).

Данная зависимость – убывающая линейная

$$\frac{s}{v_0^2} = A - Bv_0, \quad (13)$$

$$\text{где } A = \frac{1}{2\mu g}, \quad B = \frac{1}{3\mu^2 mg^2}.$$

Коэффициент A определяется по точке пересечения графика с вертикальной осью, а коэффициент B - по тангенсу угла наклона графика к горизонтальной оси. Альтернативный способ определения A и B - по МНК.

Поскольку и расстояние s , и X , и, соответственно, v_0 , определены с погрешностями, то при делении малых значений друг на друга, результат может получиться абсолютно неверным.

Именно поэтому при построении графика зависимости $\frac{s}{v_0^2}$ от v_0 и определении коэффициентов A и B необходимо брать лишь точки, соответствующие смещению диска больше 10 мм.

Коэффициент $A = 0,11 \text{ c}^2/\text{м}$, а $B = 0,057 \text{ c}^3/\text{м}^2$. Отсюда

$$\mu = \frac{1}{2gA} = 0,46, \quad (19)$$

$$\beta = 3\mu^2 mg^2 B = 0,053 \text{ кг/с}. \quad (20)$$

Формула (9) применима только для малых значений $\frac{\beta v_0}{\mu mg} < 0,7$, поэтому необходимо проверить малость этого выражения. Максимальное значение начальной скорости диска, для которой погрешность формулы не превышает 5%, равно $v_{\max} = 0,7\mu mg / \beta = 0,91 \text{ м/с}$. Как видно из таблицы 1, в эксперименте скорость диска не превышает этого значения. Иначе точки, соответствующие скоростям, большим максимально допустимой, необходимо было бы отбросить при определении коэффициентов A и B .



Задача 42. «Белый цилиндр»

1. На рисунке показана схема установки для проведения исследования зависимости деформации пружины от приложенной к ней силы. Из рисунка следует, что в положении равновесия сила упругости пружины определяется формулой

$$F_{\text{упр.}} = mg \frac{x}{L}, \quad (1)$$

где $L = 40 \text{ см}$ - длина линейки, $mg \approx 1,0 \text{ Н}$ - сила тяжести, действующая на груз.

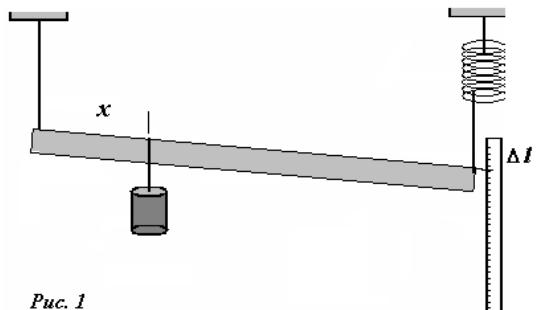


Рис. 1

Изменяя положение груза x , можно изменять силу, действующую на пружину. В Таблице 1 приведены результаты измерений деформации пружины $\Delta l, (\text{мм})$ от расстояния $x, (\text{см})$ между закрепленным краем линейки и точкой подвеса груза.

Таблица 1.

$x, (\text{см})$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Delta l, (\text{мм})$	2	5	9	12	15	17	21	24	27	30
$x, (\text{см})$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\Delta l, (\text{мм})$	33	36	38	41	42	45	47	49	52	54
$x, (\text{см})$	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\Delta l, (\text{мм})$	57	59	61	64	66	68	70	73	75	77
$x, (\text{см})$	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$\Delta l, (\text{мм})$	79	82	85	87	88	91	93	95	97	101

График этой зависимости представлен на рис. 2

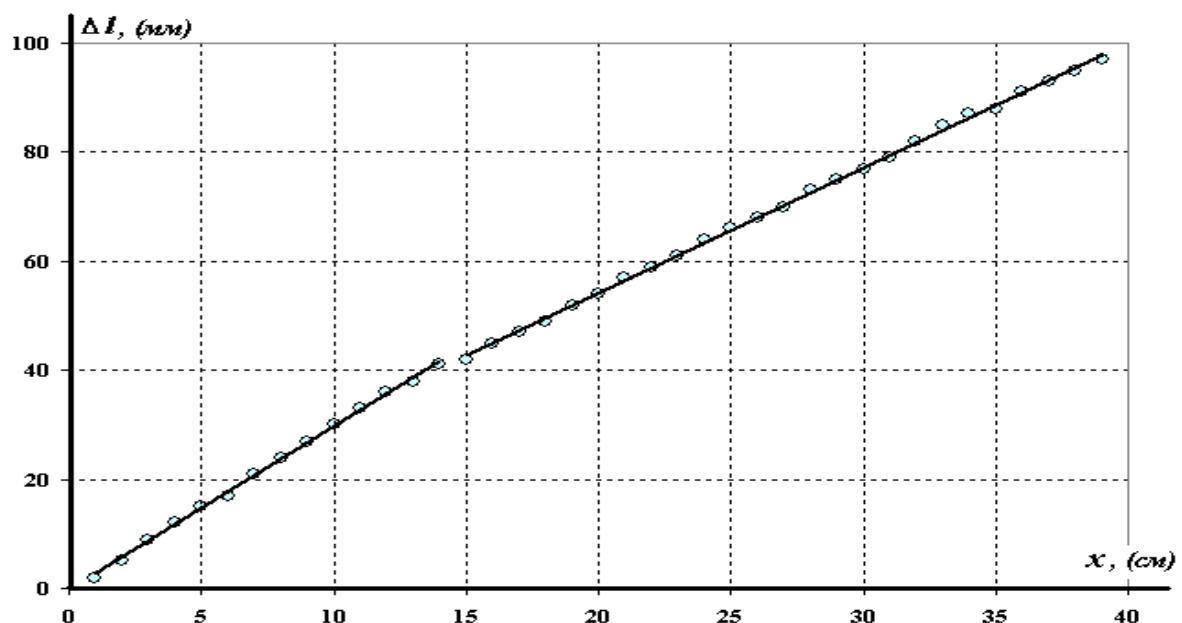


Рис. 2

Так как сила, приложенная к пружине, пропорциональна координате точке подвеса груза, то требуемый график зависимости деформации от приложенной силы будет иметь тот же вид, только необходимо провести иную градуировку оси абсцисс в соответствии с формулой (1).

Полученный график представляет собой ломанную, состоящую из двух прямолинейных отрезков. Объяснение такой зависимости очевидно: при малых нагрузках деформируется вся пружина, когда деформация пружины достигает значения $\Delta l \approx 40\text{мм}$ нить, связывающая часть витков пружины, натягивается и препятствует дальнейшей деформации этих витков, поэтому коэффициент упругости пружины возрастает.

2. В соответствии с законом Гука, сила упругости пропорциональна деформации пружины

$$F_{upr.} = k\Delta l, \quad (2)$$

где k - коэффициент жесткости пружины. Из формул (1) – (2) следует, что коэффициент жесткости пружины может быть рассчитан по формуле

$$k = \frac{mg}{L} \frac{x}{\Delta l}. \quad (3)$$

Для повышения точности следует воспользоваться полученной зависимостью, из которой следует определить коэффициент наклона первого отрезка

$$a_1 = \frac{\delta(\Delta l)}{\delta(x)} \approx 3,0 \frac{\text{мм}}{\text{см}} = 0,30. \quad (4)$$

Следовательно, коэффициент жесткости пружины равен

$$k = \frac{mg}{L} \frac{1}{a_1} \approx \frac{0,10\text{кг} \cdot 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{0,40\text{м} \cdot 0,30} \approx 8,2 \frac{\text{Н}}{\text{м}}. \quad (5)$$

3. Легко показать, что жесткость пружины обратно пропорциональна числу свободных витков, или пропорциональна коэффициенту наклона о графика зависимости деформации пружины от координаты груза. Если обозначить η - долю витков, обмотанных нитью, то доля свободных витков равна

$$1 - \eta = \frac{a_2}{a_1}, \quad (6)$$

где $a_2 = \frac{\delta(\Delta l)}{\delta(x)} \approx 2,3 \frac{\text{мм}}{\text{см}} = 0,23$ - коэффициент наклона второго отрезка на графике рис.2.

По формуле (6) находим

$$1 - \eta \approx \frac{0,23}{0,30} \approx 0,77. \quad (7)$$

Таким образом, обмотано примерно четвертая часть витков (точнее $\eta \approx 0,23$).

Задача 43. «Одна резинка, один грузик»



Одна из возможных схем проведения измерений заключается в следующем. Прикрепить к стержню горизонтально расположенного штатива резиновый жгут, степень растяжения которого можно изменять. Затем к середине жгута подвесить груз известной массы и измерить величину прогиба (провисания) жгута x .

Обозначим L - длина нерастянутого жгута, l_0 - расстояние между точками закрепления жгута на стойке штатива. Удлинение жгута рассчитывается по формуле

$$\Delta l = \sqrt{l_0^2 + 4x^2} - L \quad (1)$$

Сила упругости определяется из условия равновесия груза

$$N = \frac{mg}{2 \sin \alpha} = \frac{mg \sqrt{l_0^2 + 4x^2}}{4x}. \quad (2)$$

Изменяя расстояние между точками закрепления можно варьировать силу натяжения жгута и его деформацию.

Масса груза равна 100 г, следовательно $mg \approx 1,0 \text{ Н}$. Длина нерастянутой резинки в наших экспериментах $L = 15 \text{ см}$. Результаты измерений и расчетов представлены в таблице и на графике.

Таблица.

№	$l_0, \text{см}$	$x, \text{см}$	$\Delta l, \text{см}$	$N, \text{Н}$
1	15	4,0	2,0	2,1
2	17	3,3	3,2	2,8
3	20	2,8	5,8	3,7
4	23	2,5	8,5	4,7
5	25	2,3	10,4	5,5
6	28	2,2	13,3	6,4
7	30	2,1	15,3	7,2

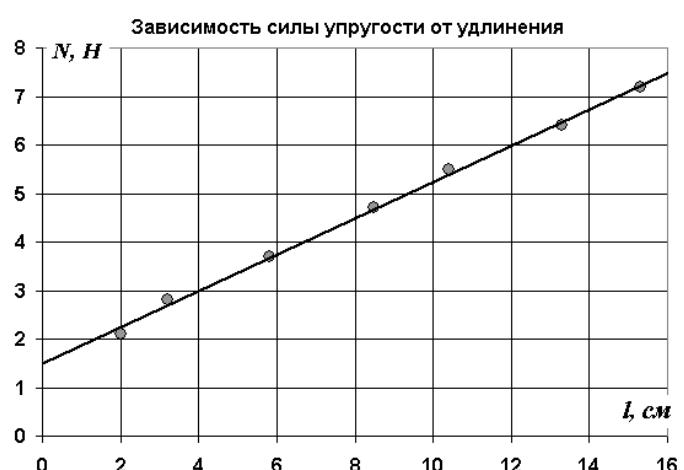
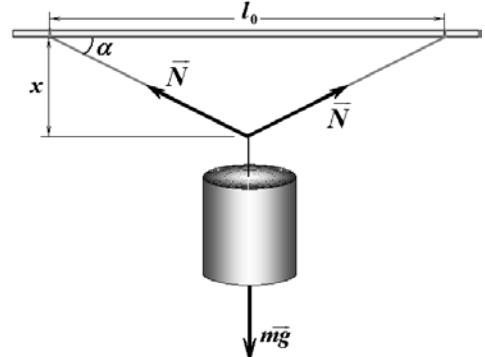


График является прямой линией, поэтому можно считать, что в данном случае закон Гука выполняется (правда он не проходит через начало координат). Коэффициент наклона графика равен жесткости резинки, которая в данном случае оказывается равной

$$k \approx 37 \frac{\text{Н}}{\text{м}}.$$

Задача 44. «Пластичность»



Результаты измерения деформации тонкой (ширина 5 мм) и широкой (ширина 10 мм) полосок при увеличении и уменьшении нагрузки приведены в таблице.

Сила F, H	Тонкая полоска		Широкая полоска	
	нагрузка	разгрузка	нагрузка	разгрузка
	$\Delta l, \text{мм}$	$\Delta l, \text{мм}$	$\Delta l, \text{мм}$	$\Delta l, \text{мм}$
0	0	2	0	0
1	2	4	1	1
2	3	5	2	2
3	4	6	3	3
4	7	7	4	4
5	9	11	6	5
6	13	13	7	7

Представим теперь полученные зависимости графически в зависимости деформации $\Delta l, \text{мм}$ от приложенной силы F, H . Для широкой полоски данный график показан на рис.1.

Как видно, в данном случае деформация полоски оказывается прямо пропорциональной приложенной силе, что свидетельствует о применимости закона Гука. То есть деформации являются упругими и обратимыми, поэтому потерь механической энергии не происходит.

Коэффициент упругости $k = \frac{\Delta F}{\Delta l}$ оказывается

близок к $1,0 \cdot 10^3 \frac{H}{m}$. Заметим, что при длине данной полоски в 205 мм ее максимальная относительная деформация составляет 3%.

Принципиально иная ситуация появляется при деформации тонкой полиэтиленовой полоски. График зависимости ее деформации от приложенной нагрузки показан на рис.2, где нижняя ветвь соответствует растяжению, а нижняя - сокращению. Во-первых, деформация оказывается не пропорциональной приложенной силе (переходит в область пластической деформации); во-вторых, деформации при нагрузке и разгрузке оказываются различными - имеет место остаточная деформация и гистерезис (необратимая деформация), что также свидетельствует о наличии пластичности.

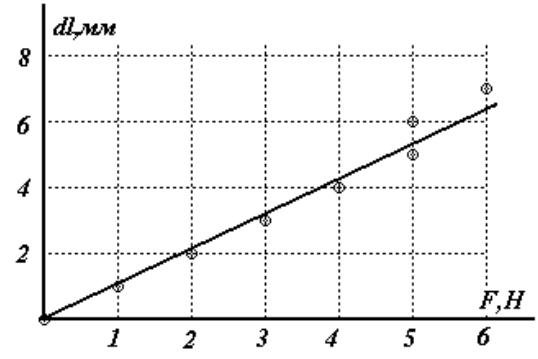
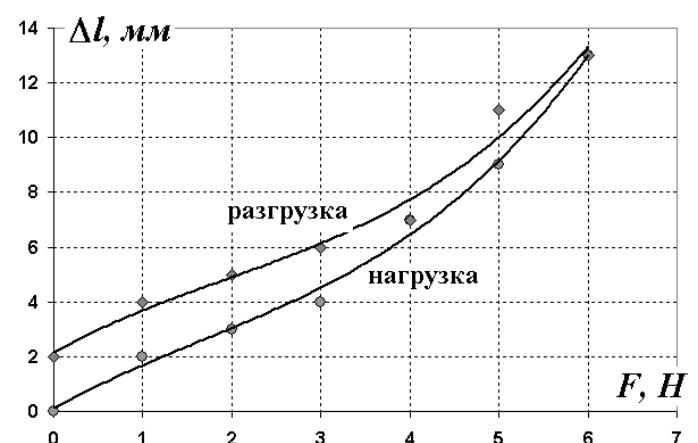


Рис.1



Сравним численные характеристики полученных зависимостей для разных полосок. Как следует приведенных в таблице и на графике данных пластическая деформация начинается при силе превышающей 3 Н (заметим, что относительные деформации в этой точке оказываются приблизительно одинаковыми). Если сравнивать силы, приходящиеся на единицу ширины, то видно, что для широкой полоски этап пластиичности должен наступить при силе превышающей 6 Н, поэтому эти данные не противоречат друг другу. Так же следует отметить, что в области упругой деформации коэффициент жесткости тонкой полоски оказывается приблизительно в два раза меньше, что также легко объяснимо - в области упругой деформации модули Юнга у обеих полосок одинаковы, также одинаковы толщины полосок, поэтому коэффициент жесткости пропорционален ширине полоски, что и получено в нашем эксперименте.

2. Легко показать, что потери упругой энергии равны площади полученной петли гистерезиса, которую можно подсчитать численно, с помощью построенного графика.



Задача 45. «Резиновый маятник»

Получим формулу для периода колебаний груза на резиновом подвесе.

На основании второго закона Ньютона запишем

$$ma = mg - F, \quad (1)$$

где $F = F(x)$ - сила упругости, которая сложным образом зависит от величины деформации резинового жгута.

При некоторой длине жгута x_0 груз находится в равновесии, то есть $F(x_0) = mg$. При небольшом отклонении от положения равновесия Δx зависимость силы упругости от деформации может быть аппроксимирована линейной функцией

$$F(x) \approx F(x_0) + k\Delta x, \quad (2)$$

где коэффициент наклона касательной равен производной от функции $F(x)$, взятой в точке x_0 : $k = \frac{dF}{dx} \Big|_{x=x_0}$. Так как положение равновесия зависит от массы подвешенного

груза, то и этот коэффициент также зависит от массы груза $k(m)$. В том же случае, когда сила упругости строго пропорциональна деформации, этот коэффициент остается постоянным.

Заметим, что этот коэффициент нельзя определять как отношение силы упругости к деформации.

Комбинация выражений (1) и (2) приводит к уравнению гармонических колебаний

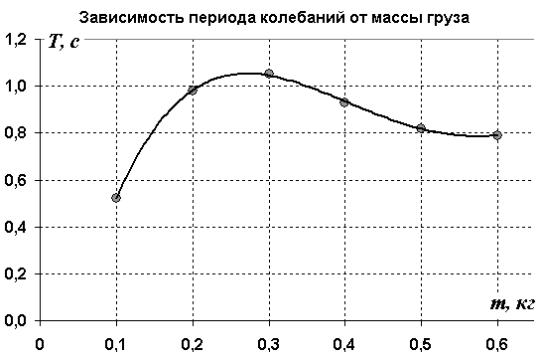
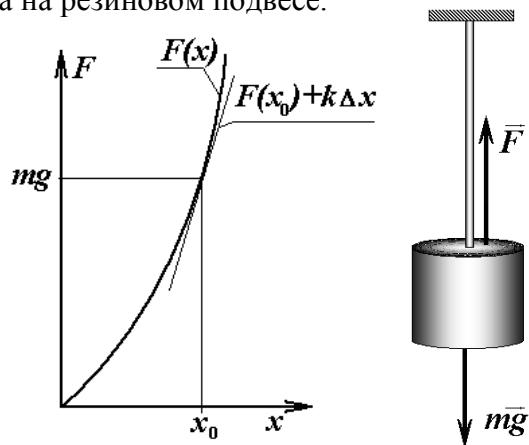
$$ma = -k\Delta x,$$

с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k(m)}}. \quad (3)$$

Таким образом, зависимость коэффициента упругости от нагрузки можно изучать по зависимости периода колебаний от нагрузки.

Результаты измерений зависят от используемых резиновых жгутов. Если использовать полоски резины, вырезанные из медицинского резинового бинта, то для широкой полоски (ширина более 5 мм) закон Гука выполняется в пределах погрешности измерений: деформация пропорциональна массе груза; период колебаний пропорционален корню квадратному из массы. Для более тонкого жгута деформации нелинейно зависят от нагрузки, для резины коэффициент жесткости возрастает с ростом деформации, поэтому период колебаний возрастает медленнее, возможна даже ситуация когда зависимость периода от массы является не монотонной: при небольших массах период возрастает, а затем начинает убывать вследствие более быстрого возрастания коэффициента жесткости резины. Пример такой зависимости показан на рисунке.





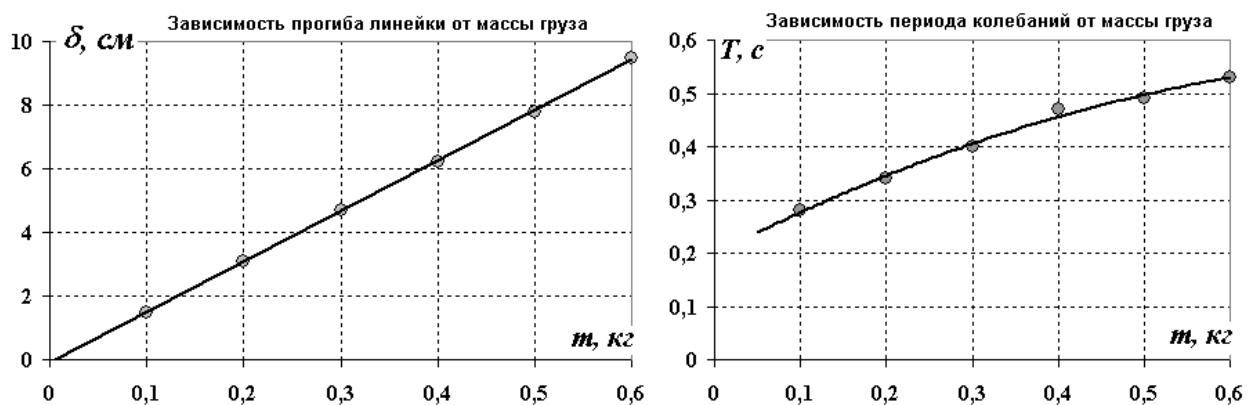
Задача 46. «Упругость линейки»

В таблице 1 приведены результаты измерений зависимости прогиба линейки и периода колебаний от массы подвешенного груза.

Таблица 1.

$m, \text{кг}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$\delta, \text{см}$	1,5	3,1	4,7	6,2	7,8	9,5
$T, \text{с}$	0,28	0,34	0,40	0,47	0,49	0,53

Ниже на графиках построены полученные экспериментальные зависимости.



Как следует из построенного графика, прогиб линейки линейно зависит от массы подвешенного груза. Обработка зависимости $\delta = am + b$ по МНК дает следующие значения параметров

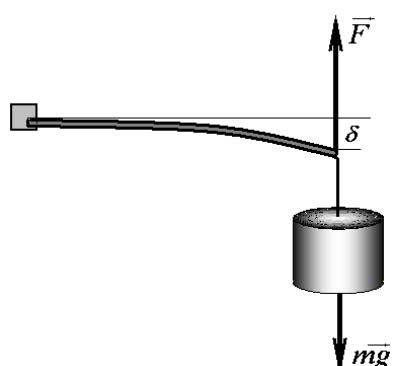
$$a = (15,9 \pm 0,3) \frac{\text{см}}{\text{кг}}, \quad b = (-0,09 \pm 0,10) \text{ см} \quad (1)$$

Так как $\Delta b > |b|$, то обосновано можно считать, что прогиб пропорционален массе подвешенного груза. Иными словами в данном случае выполняется закон Гука: возникающая вертикальная сила упругости пропорциональна деформации

$$F = k\delta, \quad (2)$$

где k - жесткость линейки, которая может быть выражена через коэффициент наклона построенного графика

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta \delta} = g \frac{\Delta m}{\Delta \delta} = \frac{g}{a} = \frac{9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}}{15,9 \cdot 10^{-2} \frac{\text{м}}{\text{кг}}} \approx 61,6 \frac{\text{Н}}{\text{м}}. \quad (3)$$



Рассчитаем также погрешность этой величины

$$\Delta k = k \frac{\Delta a}{a} \approx 1,2 \frac{\text{Н}}{\text{м}}. \quad (4)$$

Зависимость периода колебаний от массы груза явно не линейна. Теоретически установить этой зависимости можно на основании уравнения второго закона Ньютона для груза

$$ma = mg - k\delta, \quad (5)$$

которое является уравнением гармонических колебаний с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (6)$$

Для проверки этой зависимости построим график зависимости квадрата периода от массы груза. Действительно данная зависимость близка к линейной. Коэффициент наклона этого графика также определяются по МНК

$$a = (0,41 \pm 0,01) \frac{c^2}{kg}. \quad (7)$$

Из формулы (6) следует, что его теоретическое значение равно

$$a = \frac{4\pi^2}{k},$$

что дает возможность определить жесткость линейки (независимо, на основании результатов измерений периодов колебаний)

$$k \approx (96 \pm 3) \frac{H}{m}. \quad (7)$$

Это значение в полтора раза превышает жесткость, найденную в статическом случае, следовательно, полученные данные не согласуются друг с другом!

Попробуем проверить данный вывод еще одним способом, исключающим расчет жесткости. В положении равновесия сила тяжести уравновешивается силой упругости $mg = k\delta_0$, поэтому жесткость линейки выражается через прогиб в положении равновесия

$k = \frac{mg}{\delta_0}$. Подставляя это выражение в

формулу (6) получим

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{\delta_0}{g}}. \quad (8)$$

Теперь построим зависимость квадрата периода колебаний от прогиба. Зависимость линейна и ее параметры равны

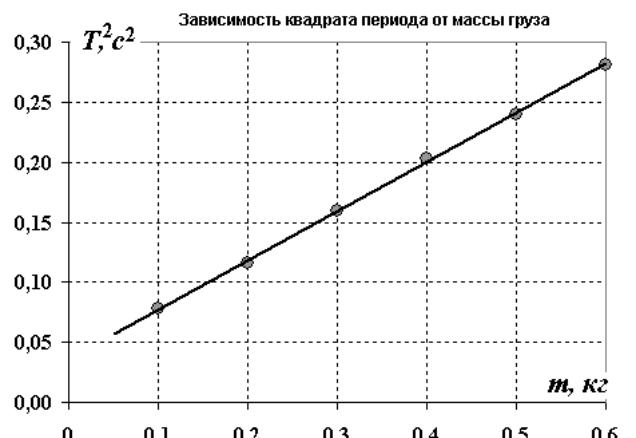
$$a = (2,57 \pm 0,08) \frac{c^2}{m}, \quad b = (0,392 \pm 0,005)c^2$$

Заметим, что в данном случае мы не можем считать зависимость пропорциональной, так как параметр b значимо отличен от нуля. Из формулы (8) найдем теоретическое значение коэффициента наклона

$$a_{meop.} = \frac{4\pi^2}{g} \approx 4 \frac{c^2}{m},$$

которое оказывается в полтора раза выше! Таким образом, данные и здесь не согласуются друг с другом.

В чем же причина такого несоответствия? Возможно, что колебания груза не являются строго гармоническими – на верхнем участке они «подпрыгивают». Этот отрицательный результат – тема для ваших самостоятельных исследований!

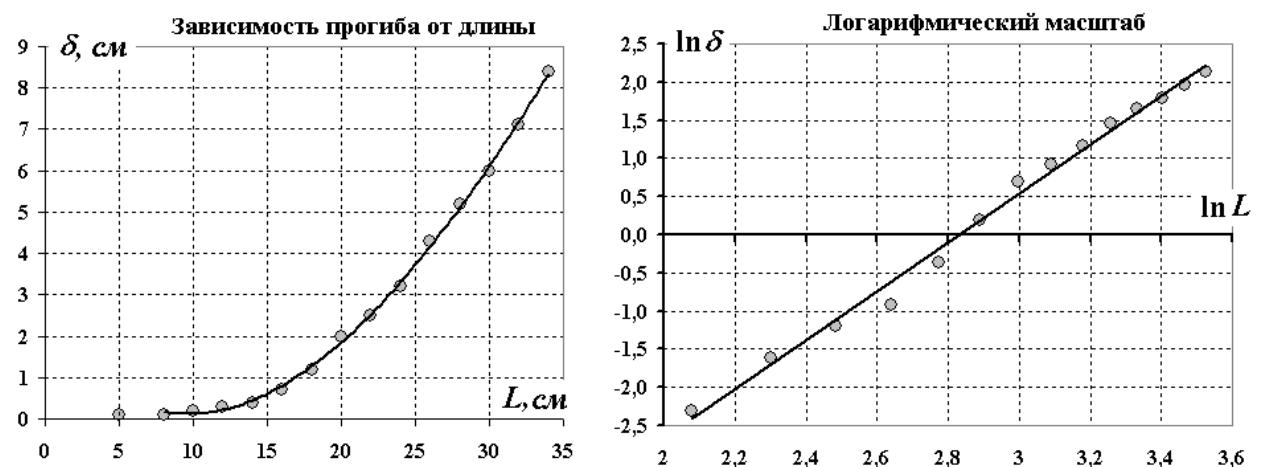


Зато выполнение пункта 2 данной задачи не вызывает никаких сложностей. Проводим измерения (Таблица 2).

Таблица 2.

$L, \text{см}$	5	8	10	12	14	16	18	20
$\delta, \text{см}$	0,1	0,1	0,2	0,3	0,4	0,7	1,2	2,0
$L, \text{см}$	22	24	26	28	30	32	34	
$L, \text{см}$	2,5	3,2	4,3	5,2	6,0	7,1	8,4	

Строим графики в «обычном» и логарифмическом масштабах.



Находим коэффициент наклона логарифмической зависимости, равный искомому показателю степени, убеждаемся, что он примерно равен 3, приводим этот результат и получаем максимальные оценки за правильное выполнение этого пункта!



Задача 47. «Как надо прогибаться»

Внимательное ознакомление с условием позволяет более четко уяснить смысл предложенных заданий. Понятно, что во всех пунктах следует пренебрегать деформацией деревянной палочки по сравнению с изгибом пластикового стержня. Поэтому в первой части работы исследуется зависимость деформации от приложенного к стержню момента сил. Можно ожидать, что величина прогиба будет пропорциональна этому моменту сил. Во второй части необходимо исследовать зависимость прогиба от длины деформируемой части. Фактически полное повторение предыдущей задачи!

Часть 1. Малый груз.

1.1 Понятно, что деформация деревянной палочки значительно меньше, чем деформация пластикового стержня, поэтому ею можно пренебречь.

Так как угол изгиба мал, то величина стрелки прогиба может быть представлена в виде (с учетом приближенной формулы $\cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$)

$$\delta = R - R \cos \alpha \approx R \frac{\alpha^2}{2}$$

При подвешивании груза к палочке изгибается весь стержень, поэтому в формуле (1) из условия задачи следует положить $x = l$. Тогда $R\alpha = l$, а величина стрелки прогиба

$$\delta = \frac{R\alpha^2}{2} = \frac{l\alpha}{2} = \frac{l}{2} KM_0 l = \frac{Kl^2}{2} M_0$$

Измеряемое отклонение конца стержня описывается формулой

$$z = \delta + (L - l)\alpha = \frac{l\alpha}{2} + (L - l)\alpha = \left(L - \frac{l}{2}\right)\alpha = \left(L - \frac{l}{2}\right)KM_0 l = K\left(L - \frac{l}{2}\right)l \cdot M_0$$

Момент сил, действующих на стержень, определяется силой тяжести груза массой m_1 и деревянной палочки

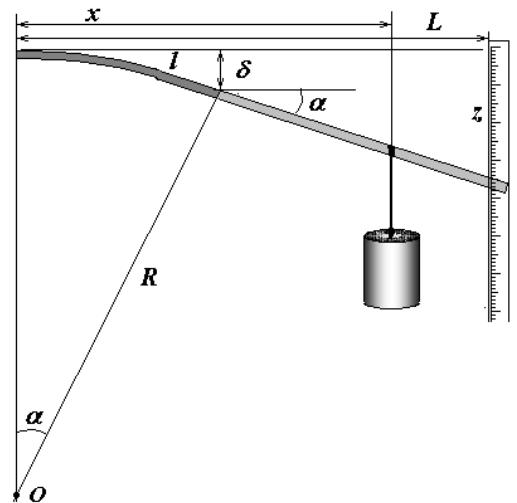
$$M_0 = m_1 g x + m_0 g a,$$

где a - координата центра масс палочки, m_0 - ее масса.

Таким образом, получаем формулу, подлежащую экспериментальной проверке

$$z = K\left(L - \frac{l}{2}\right)l \cdot M_0 = K\left(L - \frac{l}{2}\right)l m_1 g \left(x + \frac{m_0}{m_1} a\right) = C_1 \left(x + \frac{m_0}{m_1} a\right), \quad (1)$$

которая утверждает, что смещение палочки линейно зависит от координаты точки крепления груза.



1.2 В таблице 1 приведены результаты измерений зависимости смещения конца стержня от координаты точки крепления груза.

Таблица 1.

<i>x, см</i>	13	14	15	16	17	18	19	20	21
<i>z, мм</i>	19	22	25	27	30	33	36	39	42
<i>x, см</i>	22	23	24	25	26	27	28	29	30
<i>z, мм</i>	45	50	54	58	61	64	68	72	75

График этой зависимости показан ниже и показывает, что полученная зависимость близка к линейной. Возможные отклонения связаны с неточностью измерений и возможными остаточными деформациями.



Следует отметить, что прямая не проходит через начало координат. Из полученной формулы (1) следует, что при $x = 0$ (т. е. когда груз отсутствует) отклонение стержня должно быть положительным – экспериментальные данные противоречат этому выводу!

Обработка полученной зависимости по МНК дает следующие значения параметров линейной зависимости $z = ax + b$

$$a = (3,4 \pm 0,1) \cdot 10^{-1}, \quad b = (-27 \pm 3) \text{мм},$$

следовательно, не верный знак параметра b не может быть объяснен погрешностями измерений.

Возможное объяснение этого противоречия заключается в начальной деформации стержня! Действительно, при отсутствии груза стержень вместе с палочкой располагался горизонтально, хотя на него действовал момент силы тяжести палочки. Формула (1) не учитывает этой начальной деформации.

Часть 2. Большой груз.

В данном эксперименте можно считать, что изгибается только часть стержня – от точки крепления до точки подвеса груза. Прежде всего, получим формулу, позволяющую рассчитывать значение стрелки прогиба по измеряемым величинам x и z . Из рисунка следует, что

$$z = \delta + (L - x)\alpha. \quad (2)$$

Значение угла изгиба можно выразить через значение стрелки прогиба

$$\delta = \frac{R\alpha^2}{2} = \frac{x\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2\delta}{x}.$$

Подставляя это выражение в формулу (2), получим

$$z = \delta + (L - x)\alpha = \delta + (L - x)\frac{2\delta}{x} = \delta \frac{2L - x}{x}.$$

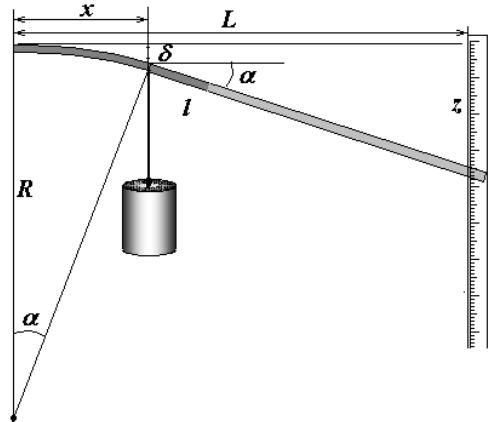
Отсюда получаем

$$\delta = \frac{zx}{2L - x}. \quad (3)$$

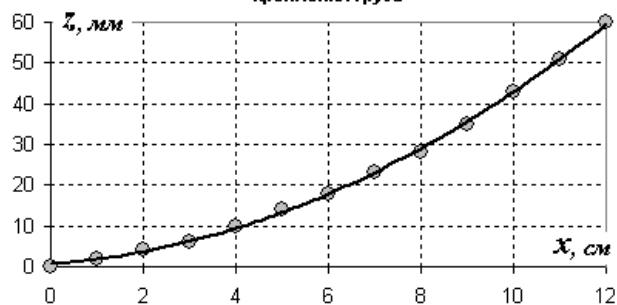
В таблице (2) представлены результаты измерений зависимости $z(x)$ и рассчитанные по формуле (3) значения стрелки прогиба (в нашей установке $L = 30\text{ см}$). Ниже приведены требуемые графики.

Таблица 2.

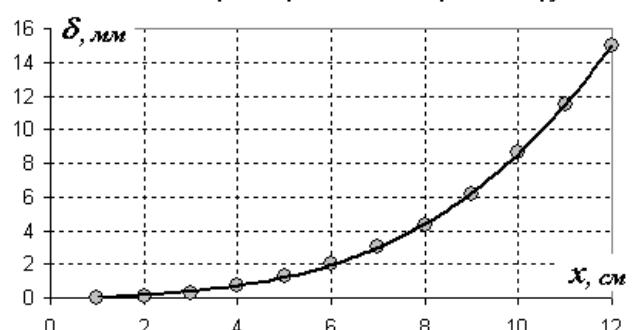
$x, \text{ см}$	$z, \text{ мм}$	$\delta, \text{мм}$
0	0	
1	2	0,034
2	4	0,14
3	6	0,32
4	10	0,71
5	14	1,27
6	18	2,00
7	23	3,04
8	28	4,31
9	35	6,18
10	43	8,60
11	51	11,45
12	60	15,00



Зависимость отклонения конца палочки от точки крепления груза



Зависимость стрелки прогиба от точки крепления груза



Полученные результаты свидетельствуют, что полученные зависимости не линейны и по виду похожи на степенные функции.

Получим теоретическую зависимость стрелки прогиба от точки крепления груза. Так как изгибаются только часть стержня длиной x , то величина стрелки прогиба рассчитывается по формуле

$$\delta = \frac{x\alpha}{2} = \frac{x}{2} KM_0 x = \frac{K}{2} M_0 x^2.$$

Силами, изгибающими стержень, являются силы тяжести груза и палочки, поэтому

$$\delta = \frac{K}{2} M_0 x^2 = \frac{K}{2} (m_2 gx + m_0 ga)x^2.$$

Если пренебречь моментом силы тяжести палочки, то получим требуемую степенную зависимость

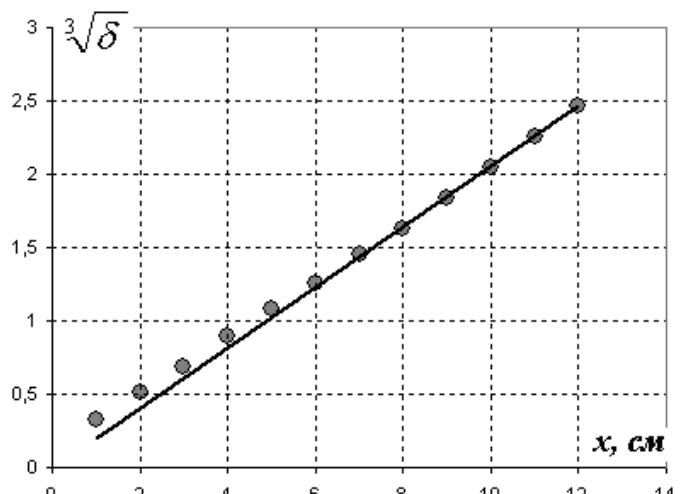
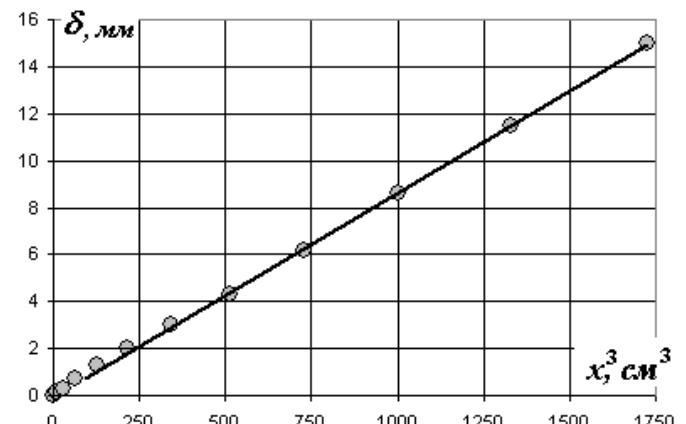
$$\delta = \frac{K}{2} (m_2 gx + m_0 ga)x^2 \approx \frac{Km_2 g}{2} x^3. \quad (4)$$

Таким образом, теоретическое значение показателя степени $\alpha = 3$.

Проверить справедливость полученной формулы (3) можно несколькими способами. Наиболее очевидной линеаризацией является зависимость стрелки прогиба от куба координаты точки подвеса груза $\delta(x^3)$. График данной зависимости очень близок к прямой. Отклонения от линейной зависимости хорошо заметны при малых значениях координаты точки подвеса. Это результат легко объясним: во-первых, при малых отклонениях точность измерений не велика; во-вторых, при малых значениях x более существенное влияние оказывает сила тяжести палочки. Следовательно, в этой области исследуемая зависимость должна отличаться от кубической.

Аналогичные выводы следуют и в том случае, если построить зависимость кубического корня из стрелки прогиба от координаты точки подвеса $\sqrt[3]{\delta}(x)$. Также при больших значениях координаты точки подвеса зависимость линейна, а при малых – хорошо видны отклонения от этой зависимости.

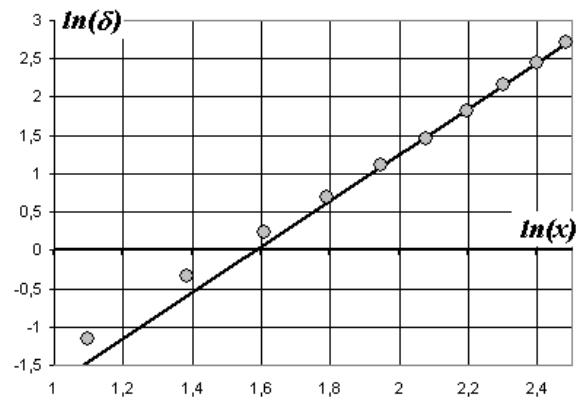
Отметим, что эта зависимость $\sqrt[3]{\delta}(x)$ более наглядна, здесь точки располагаются более равномерно. В зависимости $\delta(x^3)$ слишком велик диапазон изменения аргумента, а начальные точки тесно группируются вблизи нуля. Подчеркнем, что в обоих случаях построенные прямые в пределах погрешности проходят через начало координат.



Наконец, для определения показателя степенной зависимости является использование двойного логарифмического масштаба с последующей обработкой по МНК. В этой зависимости $\ln(\delta)$ от $\ln(x)$ наблюдаются уже отмеченные закономерности: линейность при больших значениях x и отклонения от нее при малых значениях. Коэффициент наклона прямой (он же показатель степени), построенной по 6 последним точкам оказывается равным

$$\alpha = 2,99 \pm 0,09.$$

Таким образом, кубическая зависимость величины стрелки прогиба от точки крепления груза подтверждается экспериментально.



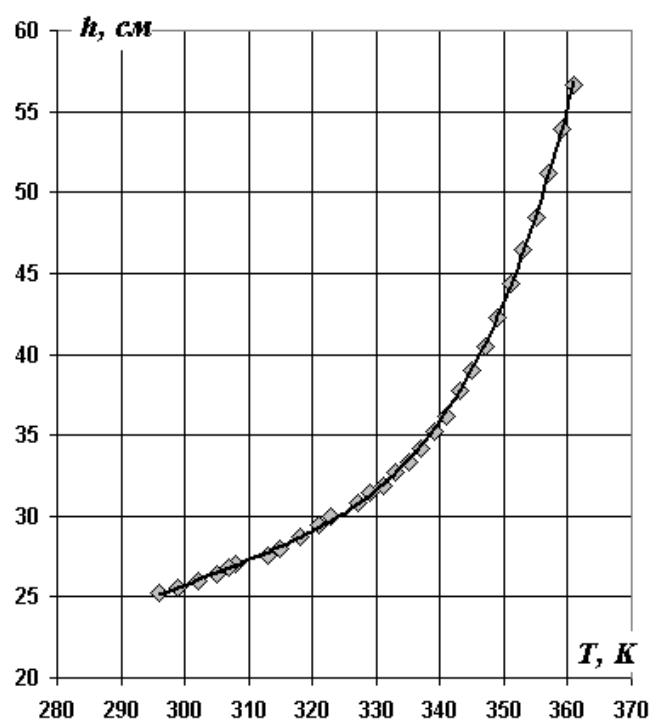


Задача 48. «Насыщенный пар»

Зависимость высоты столба газа в трубке от температуры представлена в таблице 1 и на графике (в последнем столбце даны значения высоты уровня воды в широкой трубке).

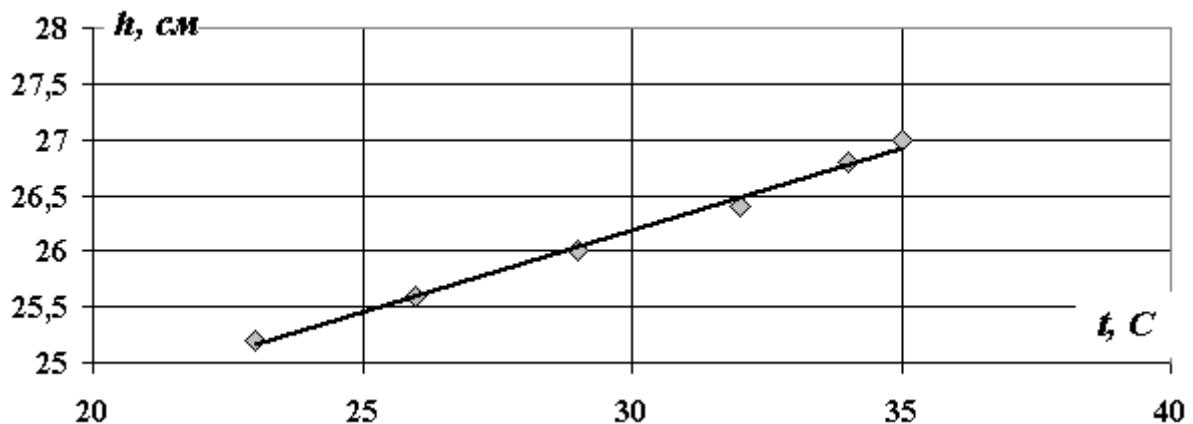
Таблица 1.

t, C	T, K	$h, см$	$H, см$
88	361	56,6	4,8
86	359	53,9	5
84	357	51,2	5,4
82	355	48,5	5,7
80	353	46,5	6,1
78	351	44,4	6,4
76	349	42,3	6,7
74	347	40,5	7
72	345	39	7,2
70	343	37,7	7,5
68	341	36,2	7,8
66	339	35,2	8
64	337	34,2	8,1
62	335	33,3	8,2
60	333	32,7	8,4
58	331	31,9	8,5
56	329	31,4	8,6
54	327	30,8	8,7
50	323	30	1,2
48	321	29,5	1,3
45	318	28,7	1,5
42	315	28	1,6
40	313	27,6	1,8
35	308	27	4,2
34	307	26,8	4,1
32	305	26,4	3,8
29	302	26	4,8
26	299	25,6	5,8
23	296	25,2	5,6



Прекрасно видно, что данная зависимость не линейна, следовательно, влияние давления насыщенных паров воды в трубке существенно. Заметим, что во всех случаях можно пренебречь гидростатическим давлением столба воды по сравнению с атмосферным давлением.

2. В указанном диапазоне «низких» температур данная зависимость близка к линейной.



Поэтому, если не учитывать влияние паров, то зависимость объема воздуха от температуры описывается уравнением

$$h = h_0(1 + \alpha t). \quad (1)$$

Тогда значение абсолютного нуля температур оценивается как $t_0 = -\alpha^{-1}$. По данным измерений это значение равно $t_0 = -\alpha^{-1} \approx -145^{\circ}C$, что весьма далеко от табличного значения. Следовательно, и в этом диапазоне давление паров воды существенно.

3. Для проверки справедливости уравнения Клапейрона-Клаузиуса необходимо из общего давления газов в трубке вычесть давление сухого воздуха. Сухой воздух подчиняется уравнению состояния идеального газа, поэтому для него можно записать

$$\frac{Ph}{T} = \frac{P_0 h_0}{T_0} \quad (2)$$

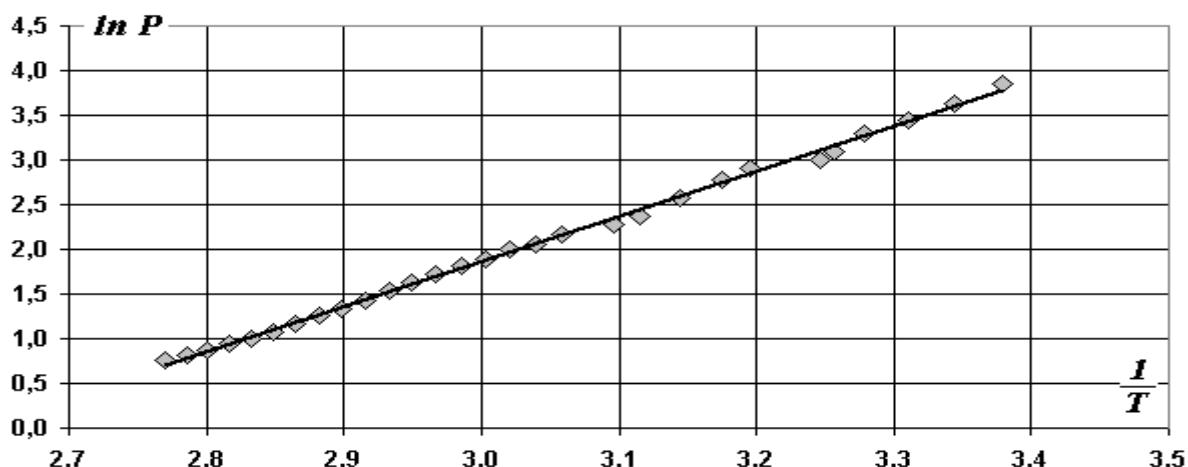
где h_0 высота столба, которого бы занимал сухой воздух при температуре T_0 . По прежнему, полагая атмосферное давление значительно большим гидростатического, можно записать

$$P_0 = P_0 \frac{h_0 T}{T_0 h} + P_{napa}, \quad (3)$$

Откуда следует, что давление водяного пара можно рассчитать по формуле

$$P_{napa} = P_0 \left(1 - \frac{h_0 T}{T_0 h} \right), \quad (4)$$

Расчет давления водяного пара по этой формуле приводит к следующему графику логарифма давления водяного пара от величины, обратной абсолютной температуре (что требует уравнение Клапейрона –Клаузиуса).



Этот график подтверждает справедливость данного уравнения и доказывает, что в данном эксперименте действительно основной вклад вносит давление насыщенного пара. Найденное по данной зависимости значение удельной теплоты испарения воды

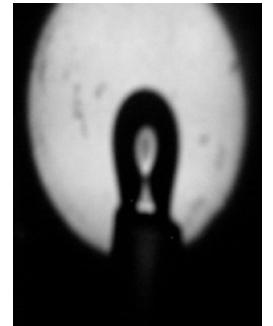
$$q = 2,3 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}},$$

очень близко к табличному значению.



Задача 49. «Изучение капель»

Часть 1. Определение фокусного расстояния линзы является традиционной задачей, к тому же рассмотренной нами ранее. Не вызывает сомнения также возможность получение четкого изображения капли с десятикратным увеличением с помощью собирающей линзы. Для примера, приведем пример такого изображения висящей капли (очевидно, что изображение перевернуто).



Вторая и третья части работы носят почти качественный характер. Получение точных зависимостей затруднительно, поэтому решением задачи следует считать получение зависимостей, правильно отражающих имеющиеся закономерности. Так высота капли лежащей на не смачиваемой поверхности при малых размерах капли практически равна ее диаметру, при увеличении размера капли ее высота стремится к предельному значению. Это предельное значение высоты капли \tilde{d} может быть оценено из условия равенства лапласовского и гидростатического давлений:

$$\frac{4\sigma}{\tilde{d}} \approx \rho g \tilde{d}, \Rightarrow \tilde{d} \approx \sqrt{\frac{4\sigma}{\rho g}} \approx 2,5 \text{мм} . \quad (1)$$

Эта же формула может применяться и для оценки поверхностного натяжения σ . Для определения поверхностного натяжения с помощью висящей капли следует получить и зарисовать ее изображение. Затем определить диаметр самой узкой части (перетяжки) D_{\min} , а также численно вычислить ее объем (по зарисованному профилю) V . Условие равенства силы тяжести и силы поверхностного натяжения на перетяжке позволяет оценить поверхностное натяжение

$$\pi D_{\min} \sigma = \rho V g \Rightarrow \sigma = \frac{\rho V g}{\pi D_{\min}} . \quad (2)$$



Задача 50. «Исследование поверхностного натяжения спиртовых растворов»

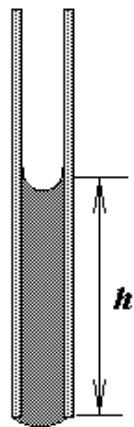
Для измерения поверхностного натяжения следует использовать капиллярную стеклянную трубку. Погружая ее исследуемый раствор, а затем вынимая, по высоте столбика жидкости, оставшейся в трубке можно определить коэффициент поверхностного натяжения σ .

Действительно, условие равновесия жидкости в трубке имеет вид

$$\frac{4\sigma}{r} = \rho gh, \quad (1)$$

где ρ - плотность жидкости; r - радиус капилляра. Из этого условия следует формула определения коэффициента поверхностного натяжения

$$\sigma = \frac{rg}{4} \rho h.$$



Строго говоря, эта формула не учитывает краевые углы, образуемые жидкостью с внутренними стенками трубы и с ее нижним основанием. Поэтому измерения зависимости поверхностного натяжения от концентрации следует проводить относительно чистой воды.

Обозначим ρ_0, σ_0 - плотность и коэффициент поверхностного натяжения чистой воды; h_0 - высоту уровня чистой воды в трубке, тогда коэффициент поверхностного натяжения раствора следует рассчитывать по формуле

$$\sigma = \sigma_0 \frac{\rho h}{\rho_0 h_0}. \quad (2)$$

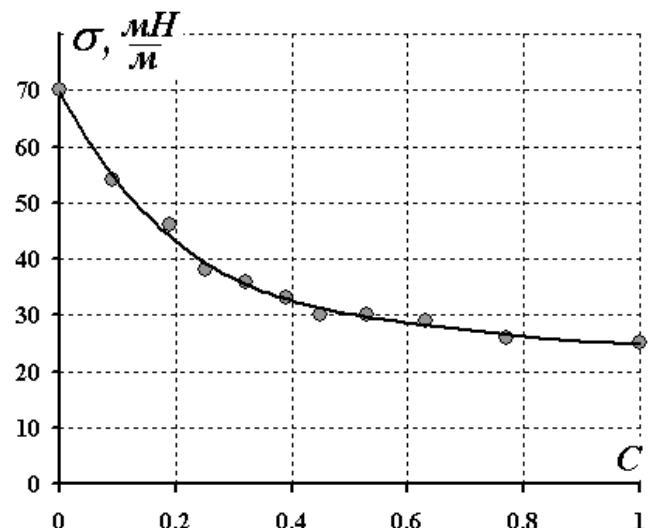
В ходе измерений следует учесть, что плотность раствора зависит от его концентрации. Приготовить раствор известной концентрации можно следующим образом: с помощью стеклянной трубы легко отмерять одинаковые объемы (капли) жидкостей. Если раствор приготовлен из n_0 капель воды и n_1 капель спирта, то объемная относительная концентрация спирта c и плотность раствора ρ определяются формулами

$$c = \frac{n_1}{n_0 + n_1}, \quad \rho = \frac{\rho_0 n_0 + \rho_1 n_1}{n_0 + n_1}. \quad (4)$$

Так как случайная погрешность измерения высоты столбика жидкости в капилляре существенна, то необходимо проводить эти измерения несколько раз. Результаты измерений представлены в таблице и на графике.

Таблица.

n_0	n_1	c	$\rho, \frac{g}{cm^3}$	h_1, mm	h_2, mm	h_3, mm	\bar{h}, mm	$\sigma, \frac{mH}{m}$
30	3	0,09	0,991	35	35	35	35	54
30	7	0,19	0,981	30	29	30	30	46
30	10	0,25	0,975	25	25	25	25	38
30	14	0,32	0,968	25	24	25	25	36
30	19	0,39	0,961	22	22	21	22	33
30	25	0,45	0,954	20	19	21	20	30
27	30	0,53	0,947	22	20	20	21	30
18	30	0,63	0,937	20	19	20	20	29
9	30	0,77	0,923	18	19	18	18	26
0	30	1,0	0,90	16	16	16	16	25



По данным таблицы построим график зависимости коэффициента поверхностного натяжения раствора от концентрации спирта.

Как видно, эта зависимость нелинейная, при малых концентрациях коэффициент поверхностного натяжения достаточно быстро падает, а при концентрациях больших 50% поверхностное натяжение изменяется гораздо медленнее.

Часть 2. Определение вида зависимости.

Экспериментатор подает теоретику экспериментальный график: «Не могли бы Вы объяснить полученную зависимость?»

Теоретик: «Ну... эта зависимость понятна, она может быть объяснена следующим образом ...»

Экспериментатор: «Извините, Вы держите график верх ногами!»

Теоретик (перевернув график): «Тогда это тем более понятно!»

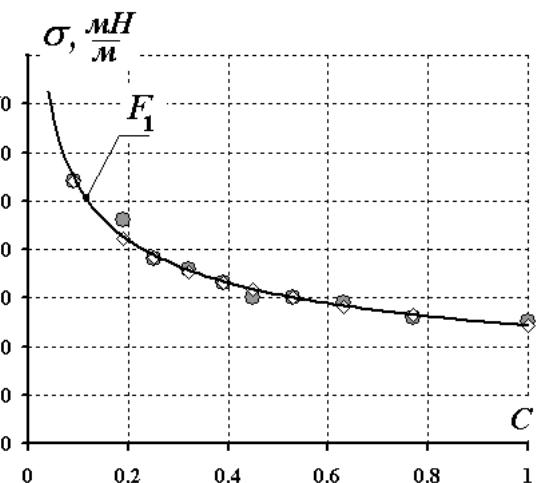
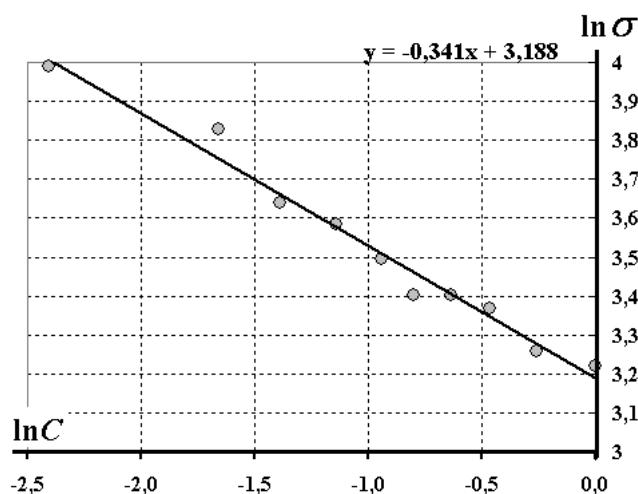
Научный фольклор.

Подбор эмпирической зависимости, как мы уже неоднократно убеждались, не совсем корректная операция, потому как она может быть построена различными способами. Покажем это еще один раз, еще раз «наступим на эти грабли».

Первое. Попробуем аппроксимировать полученную зависимость степенной функцией

$$\sigma = A \cdot c^\alpha. \quad (5)$$

Поступаем традиционным образом: строим график в логарифмическом масштабе и по МНК определяем его параметры.



Удивительно, но показатель степени оказывается равным $\alpha \approx -0,341$, что очень близко к $\alpha \approx -\frac{1}{3}$, иными словами, поверхностное натяжение обратно пропорционально кубическому корню из концентрации! Итак, первая аппроксимация имеет вид

$$\sigma = F_1(c) = \frac{A}{\sqrt[3]{c}}. \quad (6)$$

Возможно, кто-то из теоретиков сможет обосновать эту зависимость. Не смотря на то, что график этой функции проходит достаточно близко к экспериментальным точкам, у этой функции есть один существенный недостаток – при концентрации спирта стремящейся к нулю (то есть для чистой воды) поверхностное натяжение стремится к бесконечности!

Попробуем подобрать такую аппроксимирующую функцию, чтобы при $c = 0$ поверхностное натяжение было равно поверхностному натяжению воды $\sigma = \sigma_0$, а с ростом концентрации монотонно уменьшалось. Этим условиям удовлетворяет функция вида

$$\sigma = \frac{\sigma_0}{1 + B c^\beta}, \quad (7)$$

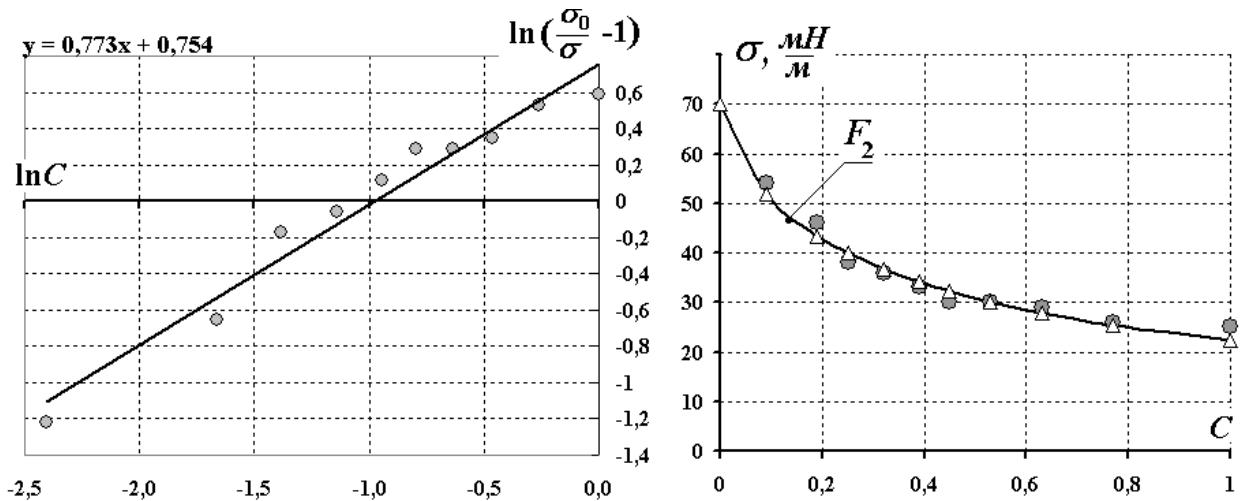
где B и β – параметры, подлежащие определению. Для их нахождения можно также воспользоваться МНК, линеаризовав функцию (7) следующим образом

$$\ln\left(\frac{\sigma_0}{\sigma} - 1\right) = \beta \ln c + \ln B.$$

Расчет параметров также приводит к «интересному» результату (достойному внимания теоретиков): показатель степени близок $\beta \approx 0,773 \approx \frac{3}{4}$. График полученной функции

$$\sigma = F_2(c) = \frac{\sigma_0}{1 + B \sqrt[4]{c^3}} \quad (8)$$

также неплохо описывает экспериментальные данные, особенно при $c = 0$, здесь он абсолютно точен!



А если попробовать подобрать функцию, которая при $c = 0$ (чистая вода) равна поверхностному натяжению воды σ_0 , а при $c = 1$ (чистый спирт) поверхностному натяжению спирта σ_1 ? Можно оставить функцию вида (7), в которой параметр B определить нужным образом:

$$\sigma = F_3(c) = \frac{\sigma_0}{1 + \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1} - 1\right)c^\gamma} \quad (9)$$

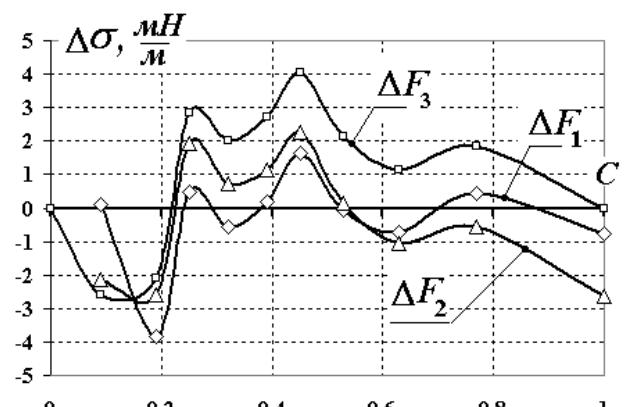
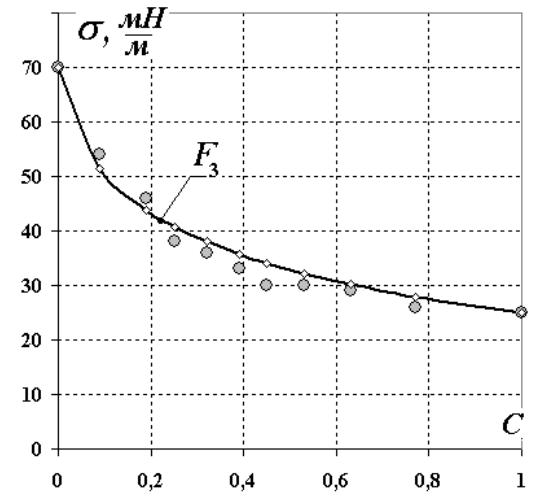
Теперь необходимо подобрать единственный параметр γ , так чтобы сумма квадратов отклонений теоретических и экспериментальных значений была минимальна. Поразительно, но и в этом случае показатель степени может удовлетворить теоретиков – оказывается примерно равным $\gamma \approx \frac{2}{3}$. Полученная функция также неплохо описывает экспериментальные данные.

Может, имеет смысл приписать величине $c^{\frac{2}{3}}$ смысл «поверхностной концентрации»? В этом случае формула (9) приобретает очень «теоретический» вид:

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{1 - c^{\frac{2}{3}}}{\sigma_0} + \frac{c^{\frac{2}{3}}}{\sigma_1}, \quad (10)$$

величина обратная поверхности натяжению раствора равна средневзвешенному от этих величин компонентов раствора, причем в качестве весов выступают «поверхностные концентрации». Вот уж действительно глубочайший кладезь теоретических моделей!

Поднимемся, однако, на твердую почву экспериментальных данных, и зададимся вопросом: какая из функций (6), (8), или (10) лучше описывает результаты измерений? Или следует придумать еще что-то? Построим графики зависимостей разности между теоретическими и экспериментальными значениями от концентрации раствора. Эти графики показывают, что, во-первых, для всех рассмотренных функций относительная погрешность не превышает 10%; во-вторых, поведение этих графиков примерно одинаково, что обусловлено погрешностями измерений, а не недостатками моделей. Поэтому ответ на поставленный вопрос очевиден: «Лучше та функция, которая вам больше нравится!»





Задача 51. «Параллельное соединение проводников»

Часть 1. Градуировка реостата.

Конечно, лучше было бы иметь и амперметр, но хороший вольтметр в паре с резистором известного сопротивления прекрасно его заменяет, особенно, если его сопротивление равно 1 Ому!

Принципиальная электрическая схема, предназначенная для градуировки реостата, показана на рис. 1. Попеременно подключая вольтметр к точкам *A* и *B* можно измерить напряжения U_0 на известном сопротивлении $R_0 = 9\text{ Ом}$ и U_x на реостате R_x при задаваемом значении положения движка реостата x . При этом сопротивление реостата рассчитывается по формуле

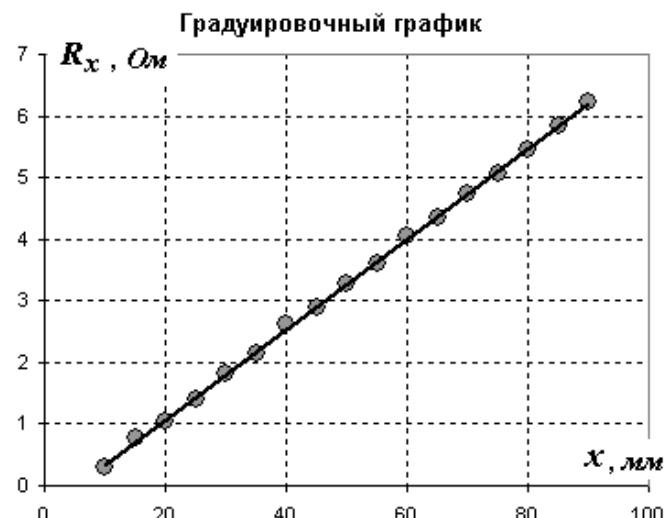
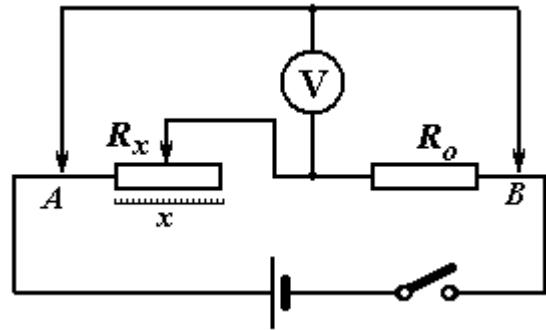
$$R_x = R_0 \frac{U_x}{U_0}. \quad (1)$$

Отметим, что при такой схеме нет необходимости в стабилизации напряжения источника.

Результаты измерений и рассчитанные значения сопротивления реостата даны в таблице 1. На рис. 2 показан градуировочный график: зависимость сопротивления реостата от положения движка.

Таблица 1.

$x, \text{мм}$	$U_x, \text{мВ}$	$U_0, \text{мВ}$	$R_x, \text{Ом}$
10	12	354	0,31
15	29	338	0,77
20	38	328	1,04
25	49	318	1,39
30	62	306	1,82
35	71	297	2,15
40	83	286	2,61
45	90	279	2,90
50	98	270	3,27
55	105	263	3,59
60	115	255	4,06
65	120	249	4,34
70	128	243	4,74
75	133	237	5,05
80	140	231	5,45
85	146	225	5,84
90	152	220	6,22



Как следует из полученных данных, зависимость линейная, но не прямо пропорциональная. Последнее связано с тем, что нуль шкалы не соответствует нулевому сопротивлению реостата. В дальнейшем для определения сопротивления реостата можно пользоваться этим градуировочным графиком, но предпочтительнее описать эту зависимость функционально. Так построенный график описывается линейной функцией

$$R_x = 0,073x - 0,37 \quad (2)$$

1.4 Коэффициент a в зависимости $R_x = ax + b$ является сопротивлением единицы длины обмотки реостата. С помощью полоски миллиметровой бумаги легко измерить длину части обмотки z , состоящей из n прилегающих витков, и длину одного витка l_0 .

Сопротивление этого участка реостата, рассчитанное по известной формуле для сопротивления проводника, равно

$$R = \rho \frac{nl_0}{\pi d^2/4} = \rho \frac{4nl_0}{\pi \left(\frac{z}{n}\right)^2}.$$

С другой стороны, это же сопротивление равно $R = az$. Приравнивая эти два выражения, получим расчетную формулу для удельного сопротивления

$$\rho \frac{4nl_0}{\pi \left(\frac{z}{n}\right)^2} = az \Rightarrow \rho = a \left(\frac{z}{n}\right)^3 \frac{\pi}{4nl_0} \quad (2)$$

Погрешность определения удельного сопротивления рассчитывается по формуле

$$\Delta\rho = \rho \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(3 \frac{\Delta z}{z}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l_0}{l_0}\right)^2} \quad (3)$$

По нашим измерениям:

$$a = (72,8 \pm 1,1) \frac{\Omega \cdot m}{m} \text{ (рассчитано по МНК, начиная с } x = 30 \text{ мм);}$$

Часть 2. Неизвестное сопротивление.

Измерение сопротивления параллельно соединенных реостата и резистора следует проводить по прежней методике. Результаты измерений напряжений U_0 , U_x , а также расчетов общего сопротивления реостата и неизвестного резистора $R_{ob.}$, сопротивления реостата R_x при различных положениях движка реостата x приведены в таблице 2.

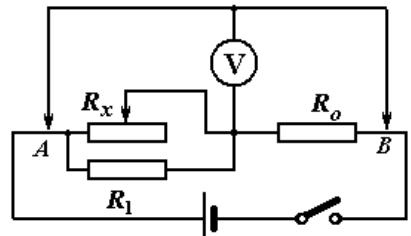


Таблица 2.

$x, \text{мм}$	$U_x, \text{мВ}$	$U_0, \text{мВ}$	$R_{ob.}, \text{Ом}$	$R_x, \text{Ом}$	$R_{ob.}^{-1}, \text{Ом}^{-1}$	$R_x^{-1}, \text{Ом}^{-1}$
30	58	298	1,752	1,818	0,571	0,550
35	67	289	2,087	2,183	0,479	0,458
40	75	282	2,394	2,547	0,418	0,393
45	83	275	2,716	2,912	0,368	0,343
50	89	269	2,978	3,276	0,336	0,305
55	96	263	3,285	3,641	0,304	0,275
60	101	257	3,537	4,005	0,283	0,250
65	108	251	3,873	4,370	0,258	0,229
70	113	247	4,117	4,734	0,243	0,211
75	118	243	4,370	5,099	0,229	0,196
80	123	238	4,651	5,463	0,215	0,183
85	128	234	4,923	5,828	0,203	0,172
90	132	230	5,165	6,192	0,194	0,161

График⁹ зависимости общего сопротивления пары (реостат - неизвестный резистор) от сопротивления реостата (рис. 4) не позволяет судить о справедливости формулы для общего сопротивления параллельно соединенных резисторов

$$\frac{1}{R_{об}} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_1}. \quad (4)$$

Поэтому для проверки применимости данной формулы следует построить зависимость величин, обратных сопротивлениям: $R_{об}^{-1}$ от R_x^{-1} . Расчет эти величин представлен в последних столбцах таблицы 2, а график показан на рис.5.

Практически строгая линейная зависимость, с коэффициентом наклона, близким к 1, подтверждает справедливость формулы (4).

Имеет смысл рассчитать коэффициенты этой зависимости по МНК:

$$A = 0,97 \pm 0,02;$$

$$B = (0,0385 \pm 0,0024) \text{ } \Omega^{-1}$$

Первый коэффициент действительно очень близок к единице, а второй в соответствии с формулой (4) равен R_1^{-1} . Поэтому неизвестное сопротивление равно

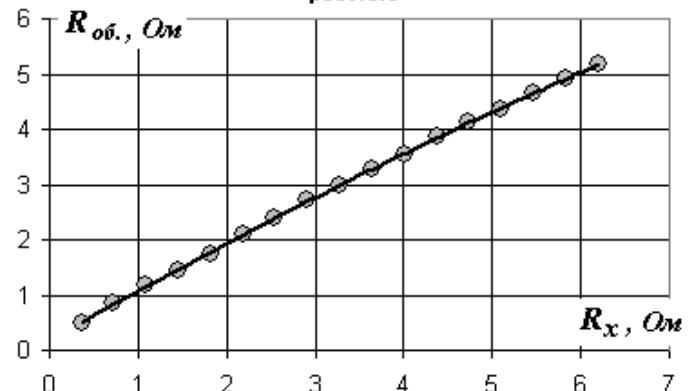
$$R_1 = B^{-1} = 25,97 \text{ } \Omega,$$

с погрешностью

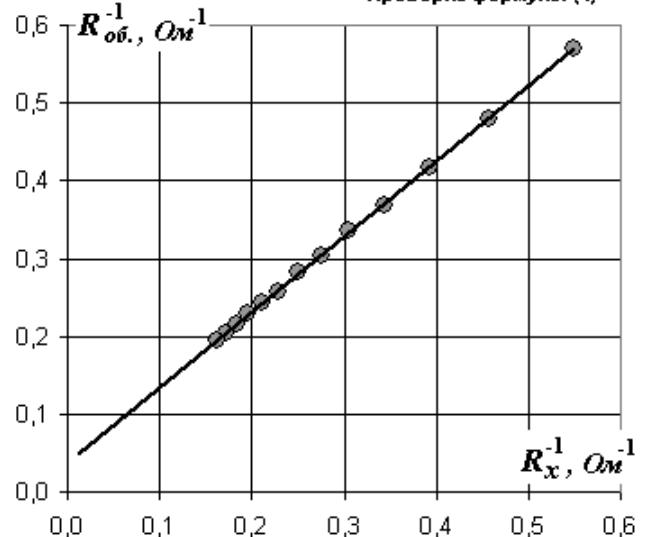
$$\Delta R_1 = R_1 \frac{\Delta B}{B} = 1,6 \text{ } \Omega.$$

Окончательно получаем $R_1 = (26,0 \pm 1,6) \text{ } \Omega$.

Зависимость сопротивления пары от сопротивления реостата



Проверка формулы (4)



⁹ По условию задачи его строить не требовалось!



Задача 52. «Желтый ящик»

1. Самое поразительное в данном ящике, что при подключении батарейки к любым двум выводам, горит только одна лампочка. При подключении к выводам 1-3 вторая лампочка не светится потому, что силы тока не хватает, чтобы раскалить ее спираль – она шунтируется резистором. Для определения соответствия между выводами необходимо объединять выводы и определять при каком подключении начинают светиться обе лампочки. Это произойдет, если батарейка подключена к выводам 2 и соединенным вместе 1 и 3. Таким образом, можно определить центральный вывод 2. Чтобы различить выводы 1 и 3 необходимо использовать амперметр – при подключении к батарейке выводов 2 и 3 сила тока будет больше, чем при подключении к выводам 1 и 2. Схема собрана таким образом, что «A»=2; «B»=1; «C»=3.

2. Реально провести измерения по предложенной схеме, только подключая к измерительному устройству выводы 2 и 3, в этом случае измеряется вольтамперная характеристика лампочки и параллельно подключенного резистора; а также 2 и соединенных выводов 1 и 3 – в этом случае измеряется вольтамперная характеристика параллельно соединенных двух лампочек и резистора. При подключении одной лампочки (выводы 1,2) изменения напряжения при размыкании ключа K_1 незначительны (не более одного деления). Расчеты необходимых величин проводятся по следующим формулам: Сопротивление части резистора, к которому подключается исследуемая цепь

$$R_1 = R_0 \frac{U_{10}}{U_{00}}, \quad (1)$$

сопротивление второй части

$$R_2 = R_0 - R_1. \quad (2)$$

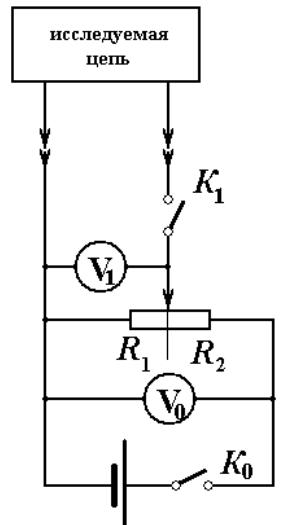
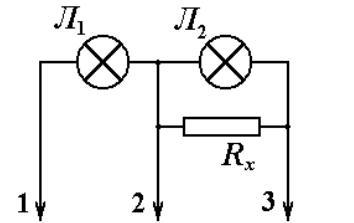
Сила тока в исследуемой цепи рассчитывается по формуле

$$I = \frac{V_0 - V_1}{R_2} - \frac{V_1}{R_1}. \quad (3)$$

Результаты измерений и расчетов при подключении выводов 2 и 3, приведены в таблице 1.

Таблица 1.

U_1, B	U_0, B	U_{10}, B	U_{00}, B	R_1, Ω	R_2, Ω	I, A
0,40	4,00	0,55	4,00	0,89	5,61	0,19
0,60	4,00	0,85	4,00	1,38	5,12	0,23
0,80	4,00	1,20	4,00	1,95	4,55	0,29
1,00	4,00	1,60	4,00	2,60	3,90	0,38
1,20	4,00	1,90	4,00	3,09	3,41	0,43
1,40	4,00	2,15	4,00	3,49	3,01	0,46
1,60	4,00	2,45	4,00	3,98	2,52	0,55
1,80	3,95	2,70	4,00	4,39	2,11	0,61
2,00	3,85	2,95	4,00	4,79	1,71	0,67
2,20	3,50	3,30	4,00	5,36	1,14	0,73



При подключении выводов 2 и соединенных 1 и 3 получаются следующие результаты.

Таблица 2.

U_1, B	U_0, B	U_{10}, B	U_{00}, B	$R_1, \Omega m$	$R_2, \Omega m$	I, A
0,40	4,00	0,60	4,00	0,98	5,53	0,24
0,60	4,00	0,95	4,00	1,54	4,96	0,30
0,80	4,00	1,35	4,00	2,19	4,31	0,38
1,00	4,00	1,70	4,00	2,76	3,74	0,44
1,20	4,00	2,00	4,00	3,25	3,25	0,49
1,40	3,95	2,30	4,00	3,74	2,76	0,55
1,60	3,95	2,60	4,00	4,23	2,28	0,65
1,80	3,85	2,85	4,00	4,63	1,87	0,71
2,00	3,25	3,35	4,00	5,44	1,06	0,82

При заданном напряжении на входе исследуемой цепи силы токов определяются по формулам:

в первом случае

$$I_1 = I_{\text{ламп.}} + I_R, \quad (4)$$

во втором

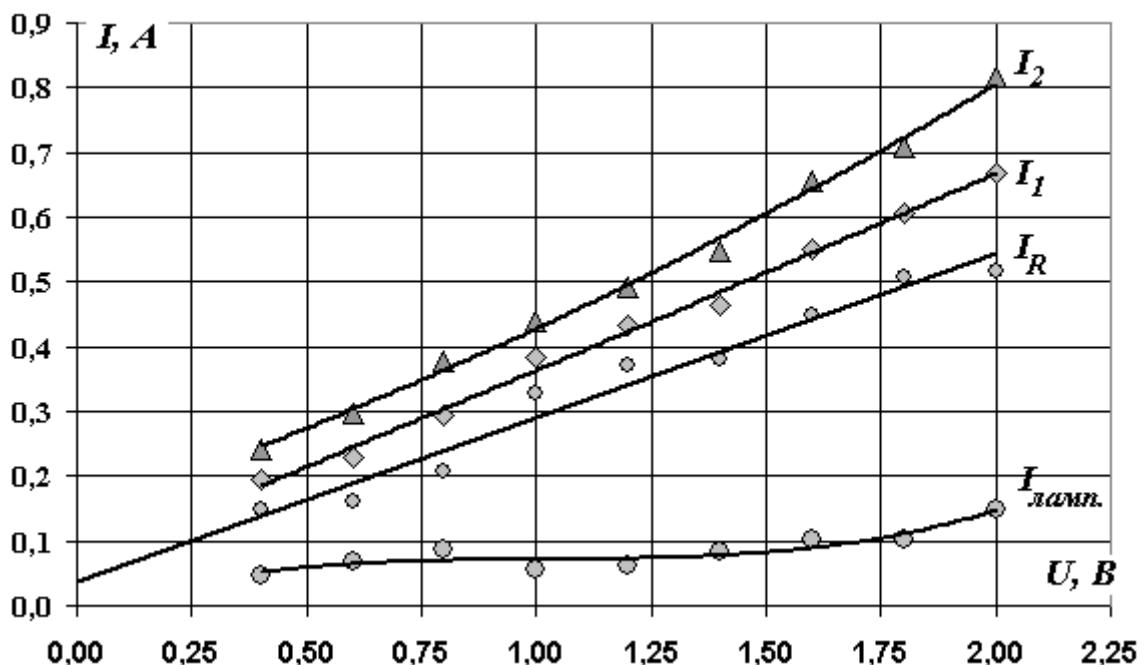
$$I_2 = 2I_{\text{ламп.}} + I_R, \quad (5)$$

Из этих формул следует, что силы токов через лампочку и резистор могут быть пересчитаны следующим образом:

$$\begin{aligned} I_{\text{ламп.}} &= I_2 - I_1 \\ I_R &= 2I_1 - I_2 \end{aligned} \quad (6)$$

Результаты расчетов приведены на графиках.

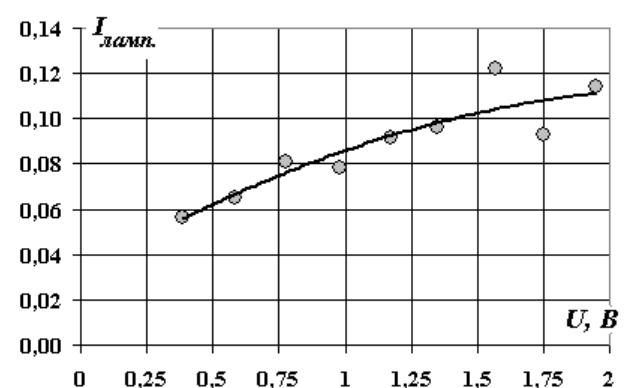
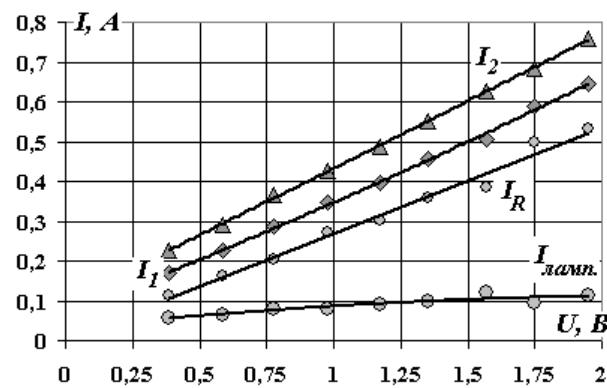
Вольтамперные характеристики



Как видно точность измерений не высока, но, тем не менее, зависимость между токами и напряжением на резисторе может быть признана пропорциональной. По наклону графика определяется сопротивление резистора $R = 3,9 \Omega m$. Отметим, что точное значения сопротивления равно $R = 3,6 \Omega m$.

Дополнение.

Точность измерений можно сделать существенно выше, используя для измерений числовой мультиметр. Графики, построенные по измерениям с помощью мультиметра, показаны ниже.





Задача 53. «Красный ящик»

Данная задача аналогична предыдущей. Сначала необходимо определить соответствие между выводами на схеме и на коробке. Для этого следует использовать свойство односторонней проводимости диода – если диод включается в цепь, то при изменении полярности источника изменяются значения силы тока. Затем стандартным методом измеряется сопротивление резистора между выводами 1 и 2. После этого следует получить вольтамперные характеристики между выводами 1 и 3, и, внимание, между выводом 1 и соединенными выводами 2-3. Эти две характеристики позволяют выделить и построить вольтамперную характеристику диода. Она получается более нелинейной, чем у лампочки накаливания.



Задача 54. «Вольтметр - гальванометр»

Первая часть задачи является традиционной (здесь вольтметр используется по своему прямому назначению). Отметим, что большинство полосковых реостатов имеют нелинейные характеристики – будьте внимательны.

В условии задачи оговорено, как проводить градуировку баллистического гальванометра (того же вольтметра). Заряжая конденсатор до известного напряжения (для этого была необходима первая часть работы) и разряжая его через вольтметр, можно построить зависимость отброса стрелки от заряда конденсатора. Данная зависимость оказывается близкой к линейной.

Первый вопрос третьей части, на первый взгляд кажется странным – конденсатор обладает емкостью, а не сопротивлением. Точнее, у идеального конденсатора сопротивление равно бесконечности. Но разве бывает реально, что-то идеальное? Заряженный конденсатор разряжается, следовательно, между его обкладками электрический ток все-таки протекает. Для выполнения данной части работы необходимо провести следующую серию экспериментов. Зарядить конденсатор до максимального напряжения и измерить его заряд (с помощью гальванометра) через известный промежуток времени. Затем повторить эти измерения для других промежутков времени. Тем самым можно построить зависимость заряда на конденсаторе от времени и по ней определить требуемое сопротивление, которое оказывается равным несколько десятков мОм.

В последней части работы между конденсатором и вольтметром следует подсоединить последовательно стержень и металлическую пластинку. В этом случае разряд конденсатора будет проходить только во время удара. Отметим, что за время удара утечкой заряда через конденсатор можно пренебречь. Вольтметр позволяет определить заряд, прошедший через него за время удара. Так как характеристики вольтметра и конденсатора известны, то на основании полученных данных не сложно оценить время удара.

Возможно и иная схема измерений – зарядить конденсатор, частично разрядить его, сделав несколько ударов, а затем измерить оставшийся заряд. Конечно, разброс значений достаточно велик, поэтому в условии ставится цель хотя бы оценить время удара. Проведенные измерения показывают, что время удара составляет величину меньшую, чем 1 миллисекунда.



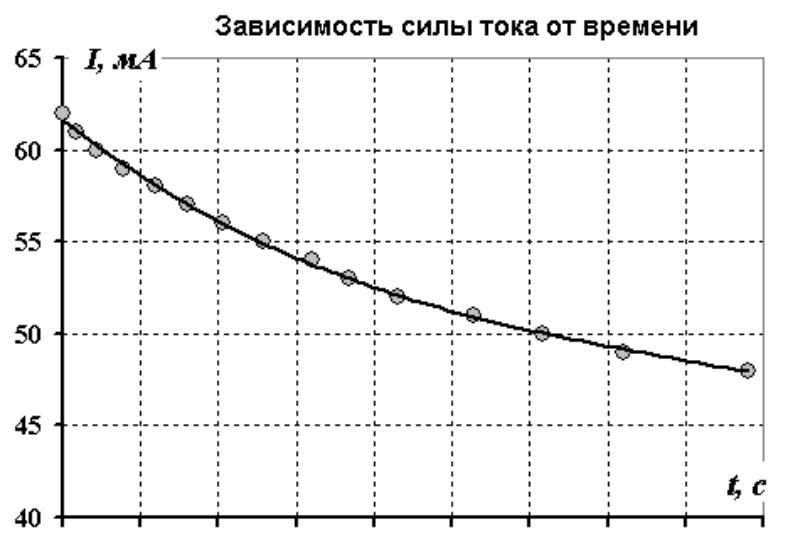
Задача 55. «Гальванический лимон»

Часть 1. Так как сопротивление мультиметра значительно превышает внутреннее сопротивление «фруктового» гальванического элемента, то для измерения ЭДС следует напрямую подключить мультиметр к элементу, напряжение на нем с высокой точностью совпадает с ЭДС источника. При использовании медной и цинковой пластиночек ЭДС оказывается равной примерно 1 В и практически не зависит от используемого фрукта. Известно, что ЭДС гальванического элемента определяется, главным образом, материалами электродов.

Часть 2. Для измерения силы тока нужно измерять напряжение на резисторе, который соединен последовательно с гальваническим элементом. Результаты зависимости силы тока I от времени t приведены в таблице 1 и на графике.

Таблица 1.

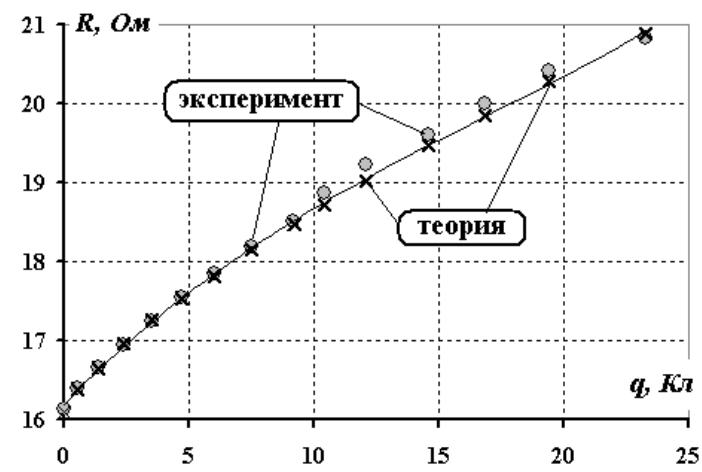
t, c	I, mA
0	62
9	61
22	60
39	59
59	58
80	57
103	56
129	55
160	54
184	53
215	52
264	51
308	50
360	49
440	48



Как и следовало ожидать – с течением времени сила тока уменьшается (к сожалению, наш лимонный элемент работает не более 10 минут). Возможными причинами этого является окисление электродов и уменьшение концентрации ионов электролита.

По этим данным можно найти зависимость сопротивления элемента ($R = \frac{U}{I}$) от электрического заряда, прошедшего через элемент. Для вычисления этого заряда необходимо численно проинтегрировать зависимость силы тока от времени. Результаты расчетов показаны на следующем графике. Внутреннее сопротивление элемента возрастает по мере увеличения срока службы элемента. Полученная зависимость монотонно возрастающая, но не линейная. Подбором эмпирических

Зависимость сопротивления от прошедшего заряда



зависимостей мы занимались неоднократно, поэтому приведем, например, вот такую «простую» зависимость

$$R = R_0 + B \left(\frac{q}{F} \right)^{\frac{3}{4}},$$

где $R_0 \approx 16 \text{ Ом}$ - начальное сопротивление, $F = 9,6 \cdot 10^4 \frac{\text{Кл}}{\text{моль}}$ - постоянная Фарадея,

$B \approx 2,5 \cdot 10^3 \text{ Ом}$, коэффициент найденный методом подбора. Сравните – неплохое соответствие!

Задача 56. «Двигатель и генератор»



Данная тема может быть предметом очень многих задач и темой для самостоятельной экспериментальной исследовательской работы. Результаты существенным образом зависят от используемого оборудования – вида двигателя, источника, механической системы.

Основные результаты кратко можно сформулировать следующим образом:

1. Сила тока при работающем двигателе практически полностью определяется массой подвешенного груза, то есть слабо зависит от приложенного напряжения и примерно пропорциональна массе поднимаемого груза.
2. Мощность двигателя можно определить, измеряя время подъема груза на заданную высоту. Тогда развиваемая полезная мощность равна произведению силы тяжести на скорость подъема. Затрачиваемая мощность равна произведению силы тока на приложенное напряжение.

Теоретической основой описания могут служить следующие уравнения:

Так как сила (или момент силы), развиваемая двигателем пропорциональна силе тока через обмотку (это следует из закона Ампера и постоянства магнитного поля статора), поэтому сила тока оказывается пропорциональной массе поднимаемого груза.

$$I = km . \quad (1)$$

Второе уравнение является уравнением закона сохранения энергии (записанное для мощностей)

$$. \quad IU = I^2 R + mgv , \quad (2)$$

здесь R - общее сопротивление цепи, v - скорость подъема груза.

Отметим, что кажущееся нарушения законов Ома в данном случае связано с появлением ЭДС индукции в обмотке двигателя при его работе.

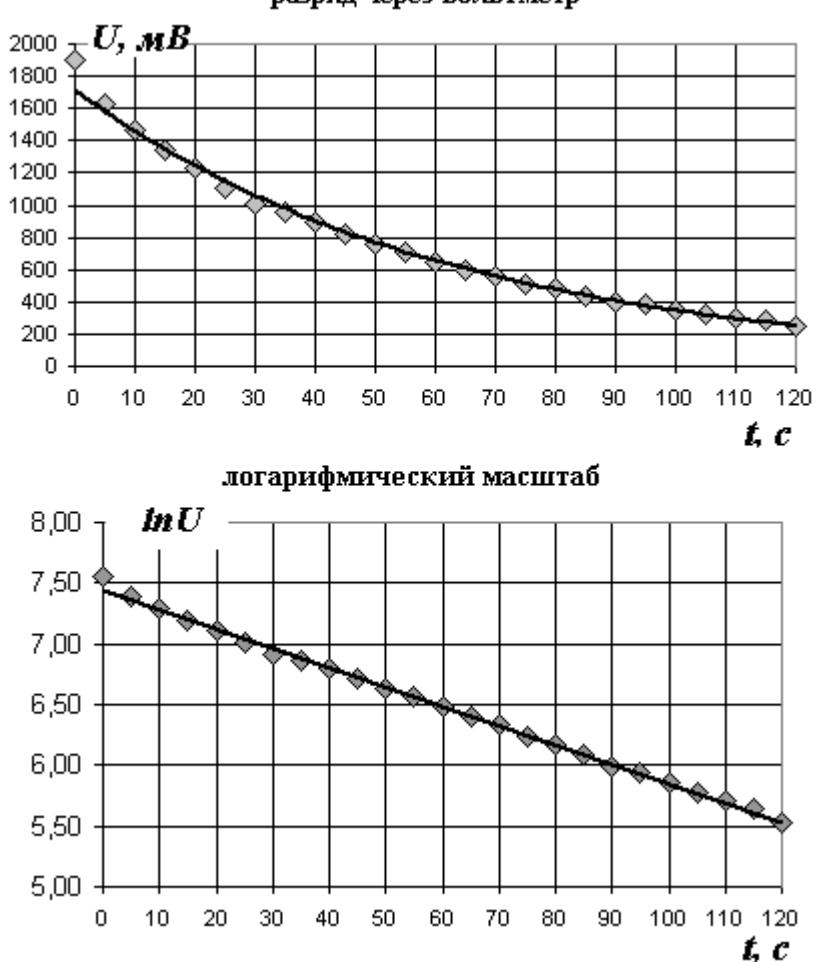


Задача 56. «Закон электромагнитной индукции»

1. Измерение периода колебаний проводится обычным способом и дает значение $T = 1,74 \text{ с}$.
2. Зарядив конденсатор, проводим измерения зависимости силы напряжения от времени. Результаты измерений представлены в таблице 1 и на графиках (второй в логарифмическом масштабе).

Таблица 1.

$t, \text{ с}$	$U, \text{ мВ}$	$\ln U$
0	1900	7,55
5	1630	7,40
10	1470	7,29
15	1340	7,20
20	1230	7,11
25	1100	7,00
30	1010	6,92
35	960	6,87
40	890	6,79
45	820	6,71
50	760	6,63
55	710	6,57
60	650	6,48
65	600	6,40
70	560	6,33
75	510	6,23
80	480	6,17
85	440	6,09
90	400	5,99
95	380	5,94
100	350	5,86
105	320	5,77
110	300	5,70
115	280	5,63
120	250	5,52



Определенное по методу наименьших квадратов значение времени разрядки равно

$$\tau = (62,4 \pm 1,5) \text{ с}. \quad (1)$$

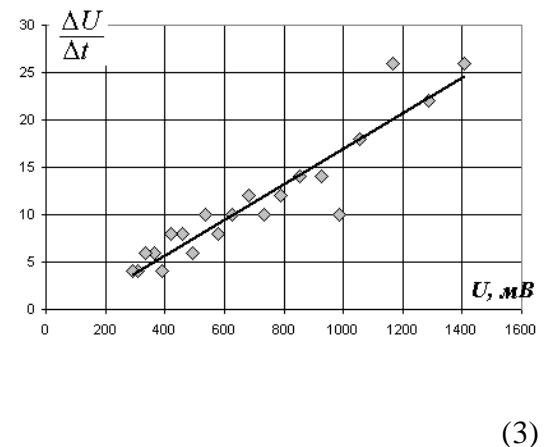
Сопротивление мультиметра рассчитывается по формуле

$$R_V = \frac{\tau}{C} = (1,25 \pm 0,05) M\Omega. \quad (2)$$

Примечание.

Время разрядки может быть определено и без использования логарифмического масштаба (все-таки 10 класс). Для этого можно построить зависимость скорости изменения напряжения $\frac{\Delta U}{\Delta t}$ от напряжения на конденсаторе. Эта зависимость описывается приближенным уравнением

$$\frac{\Delta U}{\Delta t} = -\frac{1}{\tau} U$$



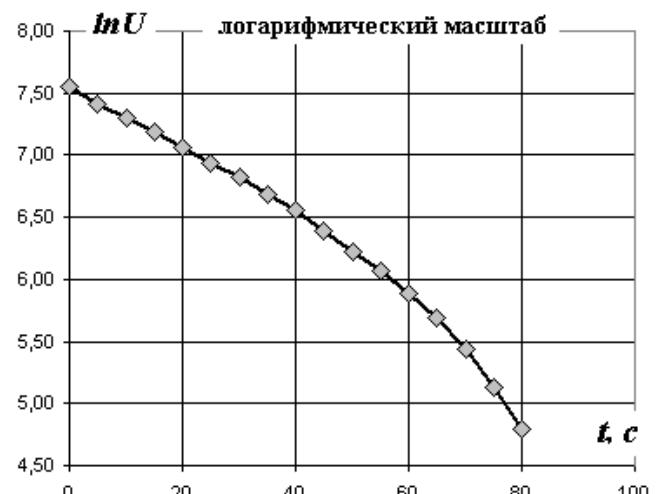
(3)

и является линейной. Значение времени, определенное по этой зависимости оказывается равным $\tau \approx 55\text{с}$ с существенно большей погрешностью.

3. Измерения временной зависимости напряжения на конденсаторе при его разрядке через диод и катушку телефона проводятся аналогично, результаты этих измерений приведены в таблице 2 и на графике.

Таблица 2.

<i>t, с</i>	<i>U, мВ</i>	<i>ln U</i>	$\tau, \text{с}$
0	1900	7,55	
5	1660	7,41	37,0
10	1470	7,29	41,1
15	1330	7,19	50,0
20	1170	7,06	39,0
25	1030	6,94	39,2
30	915	6,82	42,2
35	800	6,68	37,2
40	700	6,55	37,4
45	600	6,40	32,4
50	505	6,22	29,0
55	430	6,06	31,1
60	360	5,89	28,1
65	295	5,69	25,1
70	230	5,44	20,1
75	170	5,14	16,5
80	120	4,79	14,4

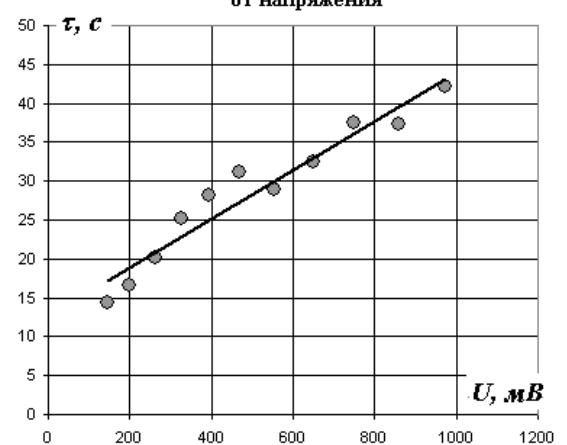


Хорошо заметно, что сопротивление диода (следовательно, и время разряда) не является постоянным, а зависит от приложенного напряжения. Поэтому следует построить зависимость времени разрядки от напряжения на конденсаторе. Эта зависимость может быть рассчитана на основании уравнения (3), из которого следует, что

$$\tau = -U \frac{\Delta t}{\Delta U}.$$

График этой зависимости показан на рисунке. Отметим, что и в этом случае время разрядки (около 30 с) значительно превышает период колебаний.

Зависимость времени разряда через диод от напряжения



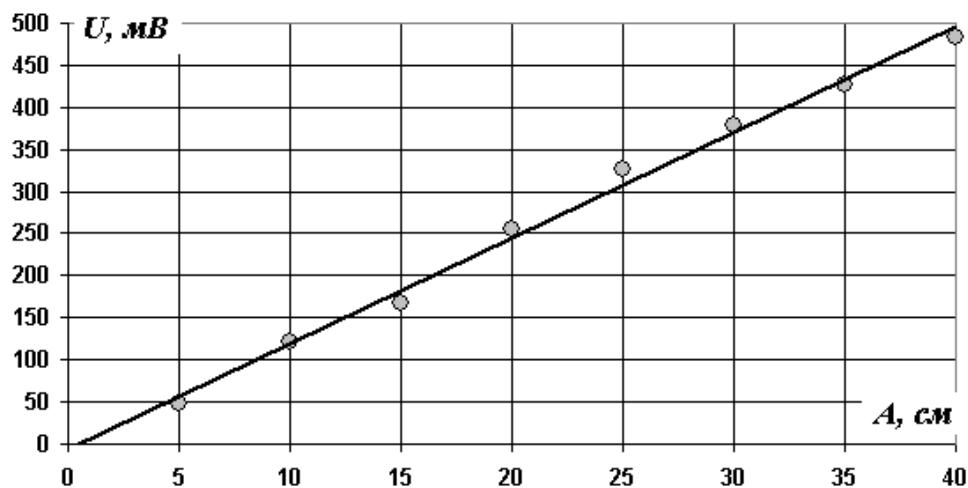
4. Результаты измерений зависимости максимального напряжения на конденсаторе от амплитуды колебаний приведены в таблице 3 и на графике.

Таблица 3.

<i>A, см</i>	40	35	30	25	20	15	10	5
<i>U</i> ₁ , мВ	480	430	381	325	261	167	119	45
<i>U</i> ₂ , мВ	485	427	380	326	252	164	123	49
<i>U</i> ₃ , мВ	482	424	373	329	254	169	120	53
<i>U</i> _{ср} , мВ	482,3	427,0	378,0	326,7	255,7	166,7	120,7	49,0

Полученная зависимость близка к линейной.

Зависимость напряжения на конденсаторе от амплитуды колебаний



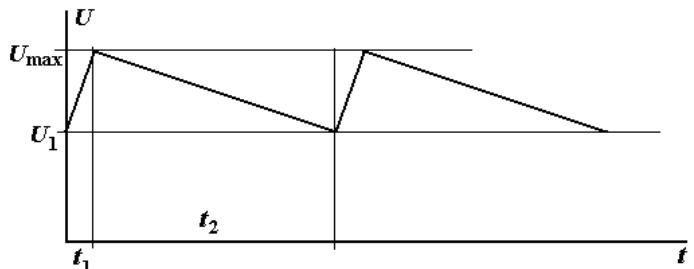
5. При прохождении магнита над катушкой в ней индуцируется ЭДС, величина которой определяется законом М. Фарадея

$$|E| = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \quad (4)$$

Эта ЭДС подзаряжает конденсатор, который разряжается в тот промежуток времени, когда магнит не проходит над катушкой.

Схематическая зависимость напряжения на конденсаторе от времени показана на рисунке. В течение промежутка времени t_1 (магнит проходит над катушкой) напряжение на конденсаторе возрастает от некоторого значения U_1 до максимального U_{\max} . Процесс зарядки описывается уравнением

$$C \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{E - U}{R} = \frac{1}{R} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} - \frac{U}{R}. \quad (5)$$



Учитывая малость времени t_1 по сравнению со временем разрядки, можно записать

$$U_{\max} = U_1 + \frac{\Phi_0}{R_0 C} - \frac{U_1}{R_0 C} t_1 \quad (6)$$

Здесь в качестве сопротивления цепи следует брать сопротивление катушки, так как во время зарядки диод открыт, и его сопротивлением можно пренебречь. Величина

$$R_0 C = 1,2 \cdot 10^3 \text{ Ом} \cdot 50 \cdot 10^{-6} \Phi = 6,0 \cdot 10^{-2} \text{ с}, \quad (7)$$

больше чем время прохождения магнита над катушкой (которое меньше, чем одна сотая периода колебаний).

За промежуток времени $t_2 \approx \frac{T}{2}$ примерно равный половине периода колебаний конденсатор разряжается через закрытый диод. Процесс разрядки описывается уравнением

$$C \frac{\Delta U}{\Delta t} = -\frac{U}{R}, \quad (8)$$

из которого можно получить приближенное соотношение

$$U_1 = U_{\max} \left(1 - \frac{t_2}{RC} \right). \quad (9)$$

Из формул (6)-(9) следует

$$U_{\max} = \frac{\Phi_0}{R_0 C} \left(\frac{t_1}{R_0 C} + \frac{t_2}{RC} \right)^{-1}. \quad (10)$$

Определим время прохождения магнита над катушкой (точнее над половиной катушки) из закона движения маятника. Так как размер катушки и магнита значительно меньше амплитуды колебаний, то это время оценивается формулой

$$t_1 = \frac{\Delta l}{v_{\max}}, \quad (11)$$

где Δl сумма диаметра магнита радиуса катушки (в наших экспериментах $\Delta l \approx 3 \text{ см}$), а максимальная скорость может быть найдена из закона сохранения энергии

$$\frac{v_{\max}^2}{2} = \frac{\omega^2 A^2}{2}, \quad (12)$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T}$ - круговая частота колебаний маятника. Таким образом, мы получаем,

$$t_1 = \frac{\Delta l}{v_{\max}} = \frac{T}{2\pi} \frac{\Delta l}{A}. \quad (13)$$

Оценим численные значения слагаемых в формуле (10)

$$\begin{aligned} \frac{t_1}{R_0 C} &\approx \frac{T}{2\pi} \frac{\Delta l}{A} \frac{1}{R_0 C} \approx 0,5, \\ \frac{t_2}{RC} &= \frac{T}{2RC} \approx 0,03. \end{aligned}$$

Второе слагаемое более чем на порядок меньше первого, поэтому в первом приближении им можно пренебречь. В итоге максимальное напряжение на конденсаторе примерно оказывается равным среднему значению ЭДС

$$U_{\max} \approx \frac{\Phi_0}{t_1} = \Phi_0 \frac{2\pi}{T \Delta l} A \quad (14)$$

и пропорциональным амплитуде колебаний, что неплохо подтверждается экспериментом. Коэффициент пропорциональности в формуле (14) может быть определен из наклона графика зависимости напряжения от амплитуды колебаний и равен

$$K = \frac{\Delta U_{\max}}{\Delta A} = 12,5 \cdot 10^{-3} \frac{B}{cm}.$$

Теперь с его помощью можно оценить максимальный магнитный поток, который создает магнит в катушке $\Phi_0 \approx K \frac{T \Delta l}{2\pi} \approx 1 \cdot 10^{-2} \text{ Вб.}$



Задача 58. «Свет и тени»

Первые два пункта задачи настолько традиционны, что даже входят в перечень обязательных лабораторных работ.

Пункт 3 достоин внимательного рассмотрения теней и бликов на экране, расположеннем за щелью. Фактически здесь рассматривается достаточно простая проблема теней и полутеней. Как известно, размеры полутеней определяются соотношением между размерами источника и размерами препятствия, отбрасывающего тень. То, что в данном случае рассматриваются не тени от непрозрачной полоски, а свет, прошедший через щель сути дела не меняет. Так как пламя свечи вытянуто вертикально, то при вертикальном расположении щели светлая полоска оказывается более резкой и с меньшим размеров полутени, чем при горизонтальном расположении щели.

Объяснение возникновения изображения, полученного с помощью малого отверстия, дается в рамках геометрической оптики – дифракция света в данном случае существенной рол не играет. Изображение получается тем более резким, чем меньше размер отверстия. Правда, в этом случае его яркость заметно меньше. Кроме того, видимая четкость изображения и его яркость ухудшаются при увеличении расстояния между отверстием и экраном.



Задача 59. «Интерференция на бумаге»

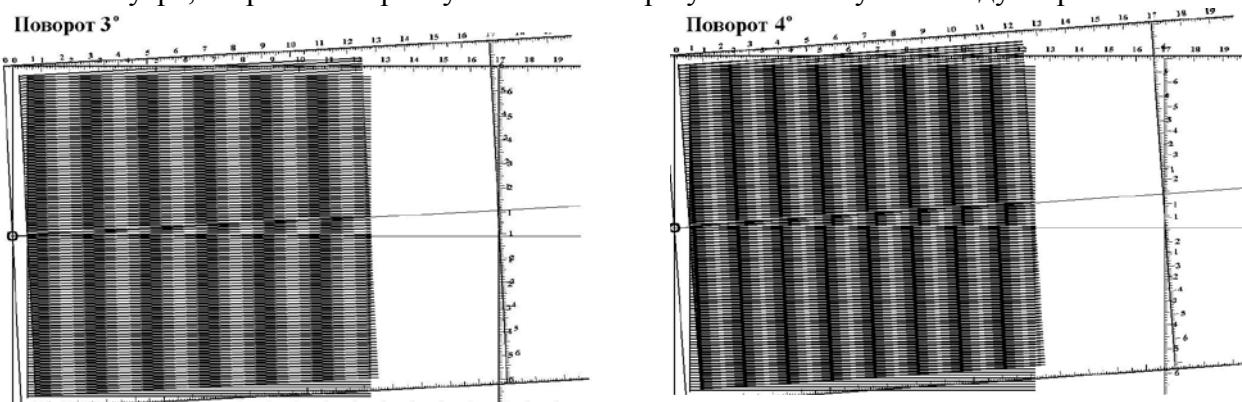
Прежде всего, поясним, почему полосы муара могут моделировать результат интерференции. Распределение интенсивности света в интерференционной картине определяется разностью фаз колебаний интерферирующих волн. Если нарисовать пленки, распределение пропускания которых описывается формулой (1), где $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ - фазы интерферирующих волн, то их наложение воспроизведет интерференционную картину, описываемую функцией

$$I = I_0(1 + \cos(\varphi_1(x, y) - \varphi_2(x, y)))^2.$$

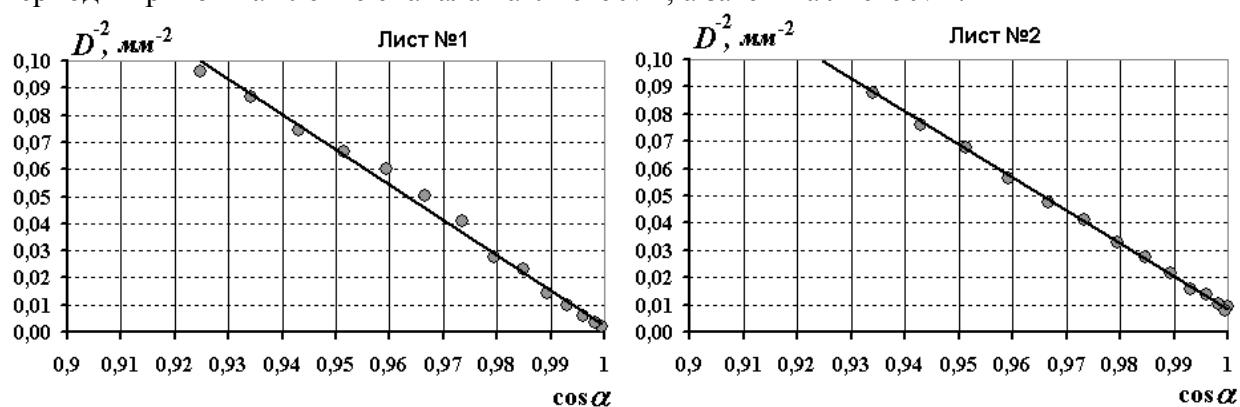
Эта функция качественно совпадает с формулой (2). Таким образом, чтобы «угадать» моделируемую интерференционную схему, необходимо определить какой волне соответствует пропускание соответствующих пленок.

Фаза изменяется с координатой по линейному закону для плоской волны, падающей под некоторым (обычно малым) углом на плоский экран. Поэтому наложение двух изображений с параллельными штрихами моделирует интерференцию двух плоских волн, падающих на экран под малыми углами. В этом случае возникает система параллельных интерференционных полос, расстояние между которыми уменьшается при увеличении угла между падающими волнами. Эта аналогия позволяет легко получить формулу (4), приведенную в условии.

При наложении пленки и листа с параллельными штрихами возникают параллельные полосы муара, ширина которых уменьшается при увеличении угла между штрихами.



Очевидная линеаризация зависимости расстояния между полосами от угла, соответствующая формуле (4) подтверждает ее справедливость и позволяет определить период штрихов на пленке сначала на листе №1, а затем на листе №2.



Распределению фаз, описываемому формулой (3), соответствует сферическая волна, падающая на плоский экран, то есть волна от точечного источника. Поэтому наложение двух систем колец Ньютона моделирует интерференцию волн, испущенных двумя точечными источниками, то есть схему Юнга. На основании формул (2) и (3) можно показать, что при сдвиге двух систем колец на расстояние δ , возникают прямые равноотстоящие полосы муара, расстояние между которыми описывается формулой

$$\Delta x = \frac{D_0^2}{2\delta}.$$

Ширина полос оказывается обратно пропорциональной величине сдвига.

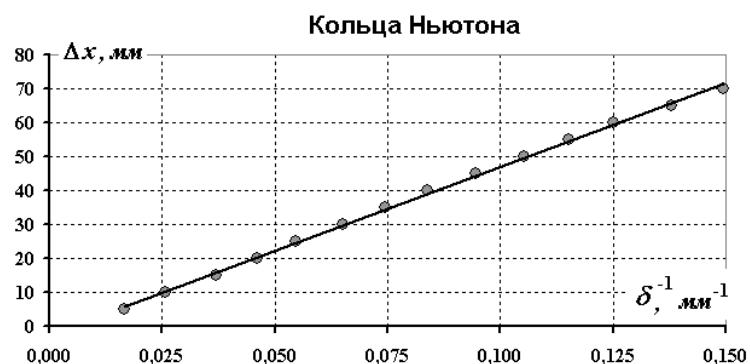
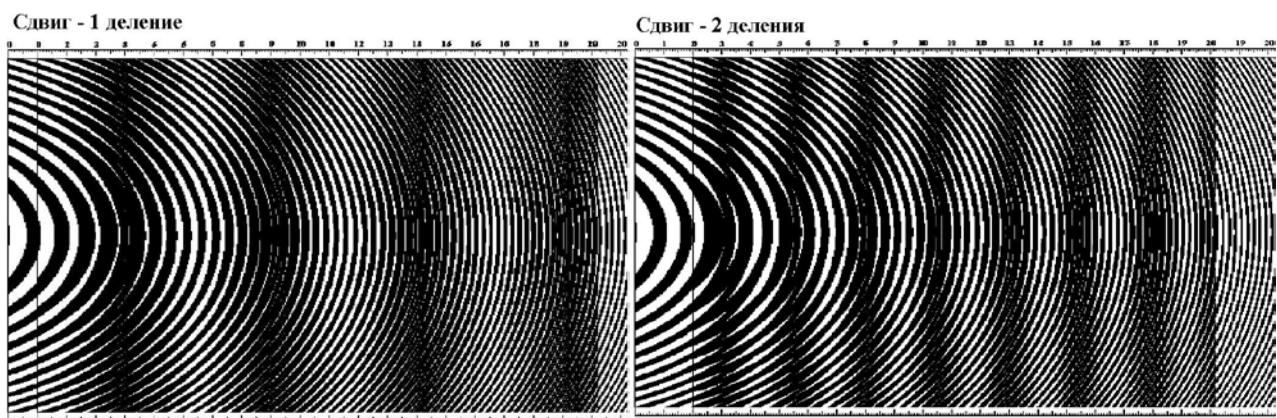
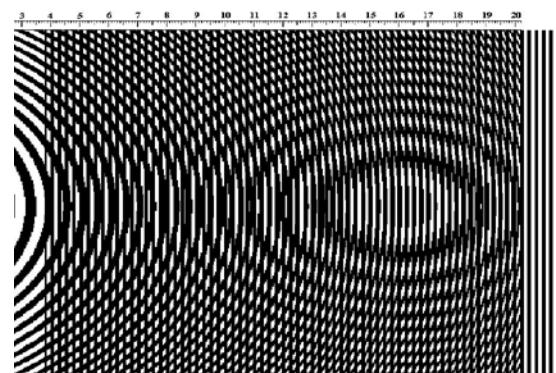


График зависимости ширины полосы муара Δx от величины обратной сдвигу оказывается линейным и позволяет определить требуемый параметр D_0 .

Интересное дополнение.

Хорошо известно, что в результате интерференции плоской и сферической волн возникает интерференционная картина, описываемая кольцами Ньютона. Наложить пленку с прямыми штрихами (плоская волна) на лист с кольцевыми штрихами (сферическая волна), то появляются полосы муара, иллюстрирующие этот эффект – наша теория полос муара похожа на правду!





Задача 60. «Интерференция, дифракция, или...»

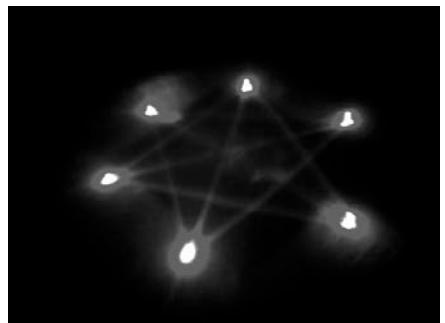
Задание 0. Длина волны излучения лазерной указки приведена на ее этикетке.

Задание 1. Без этого упражнения трудно обойтись, потому что значение фокусного расстояния понадобится в дальнейшем.

Задание 2. Обычная задача геометрической оптики – расходящийся пучок падает на собирающую линзу, собирается в фокусе и затем расходится. Диаметр пучка линейно зависит от расстояния до линзы. Теоретически легко получить формулу этой зависимости с учетом угла расходимости исходного пучка, а экспериментально ее измерить практически невозможно, уж больно она мала, неизбежные погрешности измерений полностью ее покрывают.

Задание 3. Кто из участников олимпиады не изучал дифракционную решетку? Кусочек диска таковой и является, только отражательной!

Задание 4. Действительно картинка получается очень занимательной – шесть ярких пятен, соединенных тонкими полосками света, настоящий кабалистический знак - звезда Давида! Но этот рисунок получается, если флиker осветить с обратной стороны, в обычном положении свет полностью отражается в обратном направлении. Такая картина легко объяснима, если предположить, что отражающими элементами является система углковых отражателей – треугольных призм. Поэтому возникновение таких изображений есть следствие преломления света.



Если же удалить экран на большее расстояние, то можно заметить, что каждое пятно пересечено темными полосами, а это есть результат интерференции лучей преломленных в одном направлении разными призмами. Изменение периода этих интерференционных полос позволяет рассчитать период структуры флиker'a, например с помощью формулы дифракционной решетки.

Задача 61. «Радуга»



1. Без комментариев!

2. Для измерения среднего показателя преломления проще всего измерить расстояние d от задней поверхности пробирки до экрана, на котором фокусируются лучи.

Рассмотрение хода луча в параксиальном приближении приводит к формуле

$$d = R \frac{2-n}{n-1}. \quad (1)$$

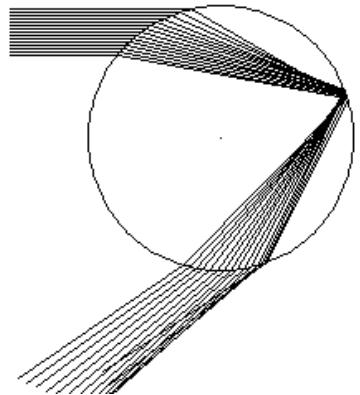
из которой легко определить n .

Отметим, что использование формулы тонкой линзы в данном случае не допустимо, пробирка с водой таковой не является!

3. Радуга образуется лучами, испытавшими два преломления на поверхности пробирки и одно отражение от внутренней поверхности. Важно отметить, что резкий блик возможен только из-за наличия максимума в зависимости угла отклонения α этого луча от точки попадания луча на поверхность пробирки.

Экспериментальное доказательство – перекрыть дальнюю половинку пробирки и радуга исчезает.

Численное значение угла $\alpha \approx 42^\circ$.



Зная среднее значение показателя преломления $n = 1,33$, формула, приведенная в условии, принимает вид

$$\delta\alpha = -2 \frac{\Delta n}{n} \sqrt{\frac{4-n^2}{n^2-1}} = -2,56\Delta n.$$

Угол $\delta\alpha$ измеряется легко. Необходимо расположить линейку перпендикулярно найденному направлению на блик на известном расстоянии от пробирки. В наших измерениях это расстояние равнялось $L = 520 \text{ мм}$. Если смещение блика на линейке равно δx , то изменение угла, очевидно равно $\delta\alpha = \frac{\delta x}{L}$. Таким образом, формула для расчета изменения показателя преломления имеет вид

$$\Delta n = \frac{\delta x}{2,56L}.$$

4. При изменении цвета блика от темно красного, до синего (виден плохо, сразу за зеленым) смещение блика оказалось равным примерно 15 мм, что соответствует изменению показателя преломления на $\Delta n = 1,1 \cdot 10^{-2}$ (что, кстати, примерно совпадает с табличными данными).

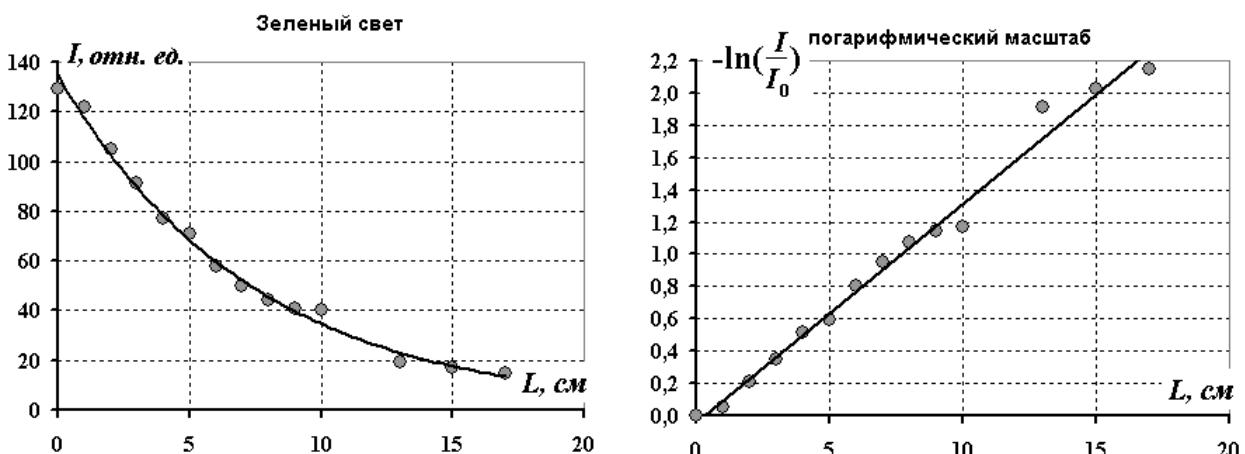
5. При добавлении геля в воду блик монотонно смещается в пределах до примерно $\delta x = -25 \div 30 \text{ мм}$. Следовательно, показатель преломления возрастает на величину порядка $\Delta n \approx 2,5 \cdot 10^{-2}$.



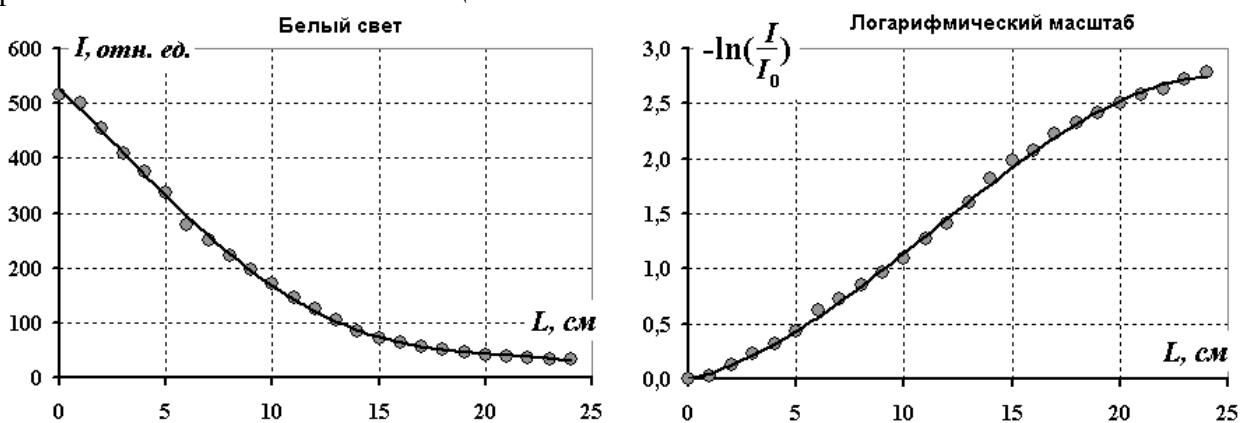
Задача 62. «Лучше быть рассеянным, чем отраженным!»

При правильной юстировке, когда белый свет проходит строго параллельно оси трубы, можно любоваться замечательным зрелищем. Цвет раствора плавно изменяется от голубого до почти красного. Объяснение этого феномена основывается на характеристиках рассеяния света (сбоку мы и наблюдаем рассеянный свет) – интенсивность рассеянного света обратно пропорциональна четвертой степени длины волны. Такая зависимость носит название закона Релея. Поэтому коротковолновое излучение (фиолетовое, синее, голубое) рассеивается на малом расстоянии от источника, более длинноволновое излучение (желтое, оранжевое, красное) проходит на большее расстояние. Это же явления рассеяния объясняет голубой цвет неба (рассеянный свет) и красный цвет Солнца на закате (прошедший свет из которого убранны цвета малых длин волн).

Таким образом, показатель рассеяния в формуле (1) зависит от длины волны (от цвета). Для монохроматического излучения данная зависимость выполняется достаточно хорошо, что подтверждается прямолинейностью графика в логарифмическом масштабе (для примера приведены полученные зависимости для зеленого света).



Для белого света зависимость интенсивности рассеянного света от пройденного расстояния не является экспоненциальной!



Объяснение этого факта математическое – сумма экспонент – экспонентой не является! Для теоретического описания полученной зависимости помимо закона рассеяния необходимо знать спектр излучения лампы и спектральную чувствительность фотоприемника. Расчет этой зависимости не входит в перечень заданий, достаточно не получить экспоненциальную зависимость.



Задача 63. «Почти ядерная физика»

Выполнение данного задания требует проведения большого числа измерений в каждом пункте, так как велик статистический разброс начальных скоростей шашек, существенное влияние также оказывает прицельный параметр, существенно влияющий на углы рассеяния.

1. При движении шашки по горизонтальной поверхности на нее действует постоянная по модулю сила трения скольжения $F_{mp} = \mu mg$, всегда направленная противоположно скорости. Поэтому работа силы трения равна произведению силы на пройденный путь $A_{mp} = \mu mgS$. Работа силы трения на всем пути до остановки по модулю равна начальной кинетической энергии $E_k = \frac{mv^2}{2}$. Так как сила тяжести и коэффициент трения остаются постоянными, то пройденный до остановки путь пропорционален начальной энергии шашки

$$S = \frac{v_0^2}{2\mu g}. \quad (1)$$

2. Для того чтобы уменьшить разброс начальных энергий шашки после удара цилиндра необходимо, прежде всего, точно задавать начальный угол отклонения нити. В наших экспериментах подвешенный груз «стартовал» от упора, в качестве которого использовалась ножка стула (свои эксперименты мы проводили на полу). Во всех измерениях длина нити подвеса оставалась неизменной и равной $L = 72 \text{ см}$. Рассчитывать погрешность этой величины нет смысла, так как она заведомо меньше погрешностей других измеряемых флюктуирующих величин (например «длины свободного пробега»).

После довольно продолжительных тренировок нам удалось достичь следующих результатов по стабилизации параметров удара.

Полученные значения дальности (в см) в серии из 17 измерений:

49, 49, 50, 53, 52, 50, 48, 50, 51, 51, 52, 52, 53, 54, 55, 51, 54.

$$\text{Среднее значение } \langle S \rangle = \frac{\sum S_k}{N} \approx 51 \text{ см}.$$

$$\text{Статистический разброс } \Delta S = \sqrt{\frac{\sum (S_k - \langle S \rangle)^2}{N}} \approx 2 \text{ см}.$$

$$\text{Относительная флюктуация } \varepsilon = \frac{\Delta S}{\langle S \rangle} \approx 4\%.$$

3. При начальном отклонении маятника на угол φ его скорость в нижней точке может быть найдена по формуле, которая следует из закона сохранения энергии:

$$V_0 = \sqrt{2gl(1 - \cos \varphi)}. \quad (2)$$

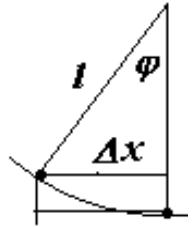
Легко показать, что при лобовом столкновении малого тела с гораздо более тяжелым, скорость малого тела изменяет знак на противоположный и увеличивается по модулю на величину $2V_0$. (для доказательства этого утверждения достаточно перейти в систему отсчета, связанную с массивным телом). Таким образом, при абсолютно упругом ударе цилиндра о шашку последняя приобретет скорость $v_0 = 2\sqrt{2gl(1 - \cos \varphi)}$. Согласно ранее доказанному, путь, пройденный до остановки, пропорционален квадрату скорости, следовательно, на основании формул (1) и (3) получим

$$S = \frac{4l}{\mu} (1 - \cos \varphi) . \quad (3)$$

Для проверки этого соотношения достаточно построить зависимость пройденного пути S от величины $(1 - \cos \varphi)$

Нами использовалась методика выполнения этого задания. Изменялось и измерялось расстояние Δx от нижней точки маятника до стартового упора. При известной величине длины подвеса вычислить косинус труда не представляет.

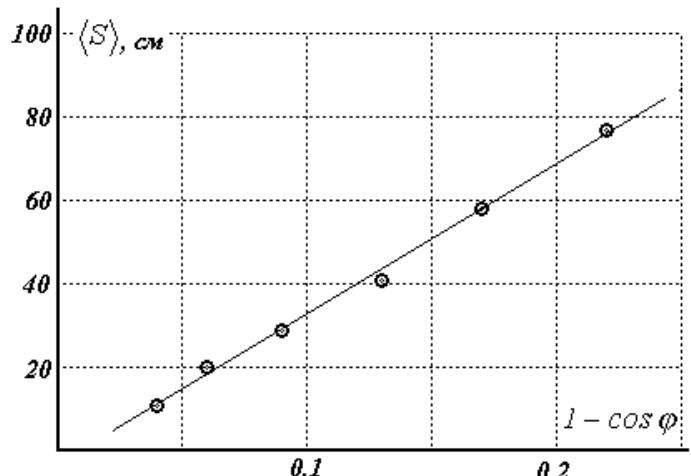
$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta x}{l}\right)^2} . \quad (4)$$



Для каждого значения Δx проводилось 10 измерений длины пути, причем «засчитывались» только центральные удары. По этим данным рассчитаны средние значения $\langle S \rangle$ и построен необходимый график. В результате проделанной работы оказалось, что построенная зависимость является линейной, что подтверждает справедливость проведенных рассуждений. (Таблица 1, график 1). Средние значения рассчитаны по 10 результатам измерений.

Таблица 1.

Δx см	$\langle S \rangle$
45	77
40	58
35	41
30	29
25	20
20	11



4. Как следует из формулы (3), коэффициент наклона (обозначим его A) этого графика равен $\frac{4l}{\mu}$. Определив этот коэффициент, можно найти и значения коэффициента трения

$\mu = \frac{4l}{A}$. По нашим экспериментальным данным получены следующие результаты (по МНК): $A = (360 \pm 21) \text{ см}$, и коэффициент трения

$$\mu = \frac{4l}{A} \approx 0,80 \quad \Delta \mu \approx 0,05$$

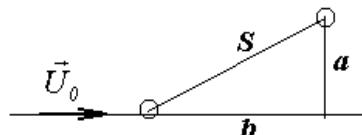
Мы получили явно завышенное значение коэффициента трения, основная причина этого - неупругость удара.

5. При нецентральном упругом ударе тяжелого тела о более легкое скорость последнего определяется формулой, которая следует из законов сохранения энергии и импульса

$$v_0 = 2V_0 \cos \alpha , \quad (5)$$

все обозначения остались прежними.

Для экспериментальной проверки этого уравнения представим его в виде $v_0^2 = 4V_0^2 \cos^2 \alpha$, так как квадрат скорости пропорционален пути до остановки, то достаточно проверить линейности зависимости



$$S \sim \cos^2 \varphi \quad (7)$$

После каждого удара на бумаге мы определяли положение шайбы после удара, измеряя величины a, b (смещения шайбы вдоль и поперек вектора скорости «ударника»), знание этих величин достаточно, для проверки зависимости (7). Так пройденный путь и квадрат косинуса определяются соотношениями

$$S = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{b^2}{a^2 + b^2}$$

Результаты измерения представлены в следующей на графике. Как видно разброс данных в данном эксперименте значителен, однако, четко видна тенденция увеличения пройденного пути с ростом косинуса угла.

6. – 7. Для исследования столкновения шашек мы использовали следующую схему эксперимента.

Первая шашка располагалась на прежнем месте под «ударником», а вторая на ее пути, на расстоянии h (в наших экспериментах $h = 16\text{ см}$). После столкновения шашек измерялись отклонения шашек a_1, b_1, a_2, b_2 . При центральном ударе первая шашка останавливалась практически на месте второй, а вторая смещалась на некоторое расстояние S_1 . По результатам таких экспериментов, возможно, определить коэффициент потерь механической энергии

$$\eta = \frac{\langle S_0 \rangle - h - \langle S_1 \rangle}{\langle S_0 \rangle - h} = 1 - \frac{\langle S_1 \rangle}{\langle S_0 \rangle - h},$$

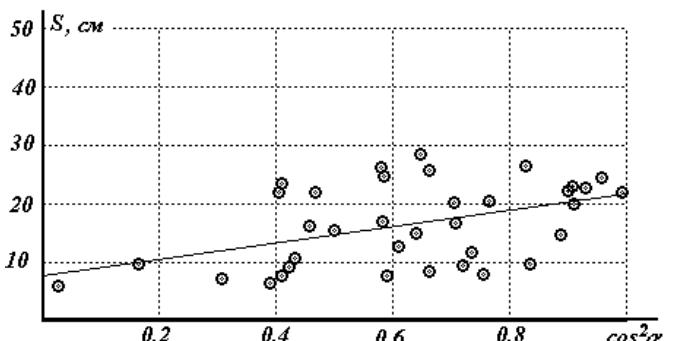
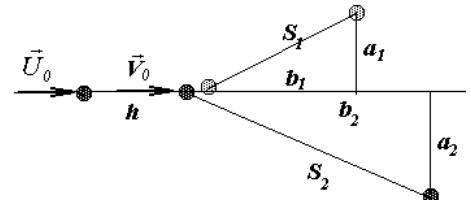
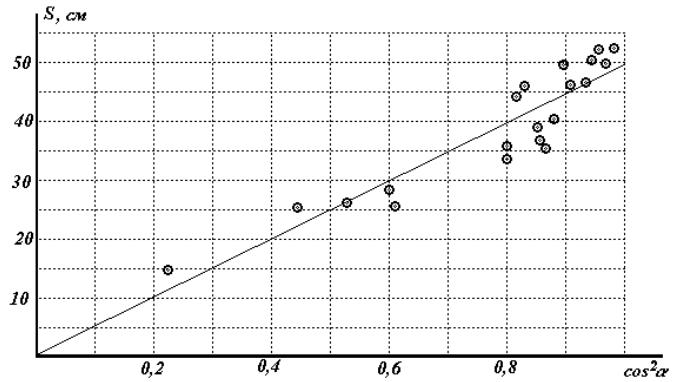
где $\langle S_0 \rangle - h$ средняя «энергия» шашек до удара, $\langle S_1 \rangle$ - после удара. В результате наших экспериментов получено следующее значение коэффициента потерь

$$\eta = 0,25 \pm 0,12.$$

Как следует из полученного результата, коэффициент потерь достаточно высок. Еще большее значение имеет этот коэффициент при столкновении с металлическим цилиндром, что подтверждает наш вывод о завышенном значении коэффициента трения.

При исследовании зависимости скорости шашки после удара от угла отклонения можно использовать значения углов и пройденных путей для обеих шашек, так как распределения скоростей для ударяющей и покоящейся шашек одинаковы. Нами проведены измерения для 25 ударов. Результаты обработки представлены на графике.

Делать какие-либо обоснованные выводы из этих данных затруднительно, как это часто и бывает в серьезных научных экспериментах.





Часть 5. А как у «них»?

Думается, что те, кто добрался до этой заключительной части уже готовы к успешному выступлению на международной физической олимпиаде. Поэтому не лишне привести пример экспериментального задания международной физической олимпиады. В

качестве такового выбрана задача олимпиады 2007 года, которая состоялась в иранском городе Исфахане. Мы приводим полный текст условия (без описания оборудования и листов ответов) и авторское решение задачи с подробными комментариями.

Попытайтесь сравнить ее стиль с рассмотренными ранее заданиями.



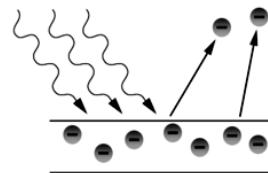
Определение энергии запрещенной зоны тонкой полупроводниковой пленки

Условие задачи.

I. Введение

Полупроводниками называют материалы, электрические свойства которых находятся между электрическими свойствами проводников и диэлектриков. Для изучения электрических свойств полупроводников рассмотрим хорошо известное явление *фотоэффекта*. Фотоэффект — явление испускания электронов с поверхности материала под действием падающего на его поверхность электромагнитного излучения (фотонов). Фотоэффект имеет место только в случае, если энергия падающего излучения (фотонов) превышает работу выхода электрона (работа выхода — минимально необходимая энергия для испускания электрона с поверхности материала). Таким образом, явление фотоэффекта могут вызвать только те падающие на материал фотоны, энергия $h\nu$ которых больше чем работа выхода электрона (h — постоянная Планка, ν — частота).

Рисунок 1. Иллюстрация испускания фотоэлектронов с поверхности металлической пластины.



В действительности понятие о работе выхода в фотоэлектрическом процессе аналогично понятию об энергетической ширине запрещенной зоны полупроводникового материала. В физике твердого тела ширина запрещенной зоны E_g определяется разницей энергий между верхней границей валентной зоны и нижней границей зоны проводимости. В случае, когда валентная зона полупроводника полностью заполнена электронами, а его зона проводимости пуста, электроны могут переходить из валентной зоны в зону проводимости при условии получения энергии, величина которой не меньше, чем ширина запрещенной зоны. Таким образом, проводимость полупроводника сильно зависит от ширины его запрещенной зоны.

Так называемый процесс инженеринга запрещенной зоны материала есть процесс изменения и контроля ширины запрещенной зоны материала путем создания (композиции) определенных полупроводниковых сплавов. На сегодняшний день показано, что изменениеnanoструктуры полупроводника позволяет управлять шириной его запрещенной зоны.

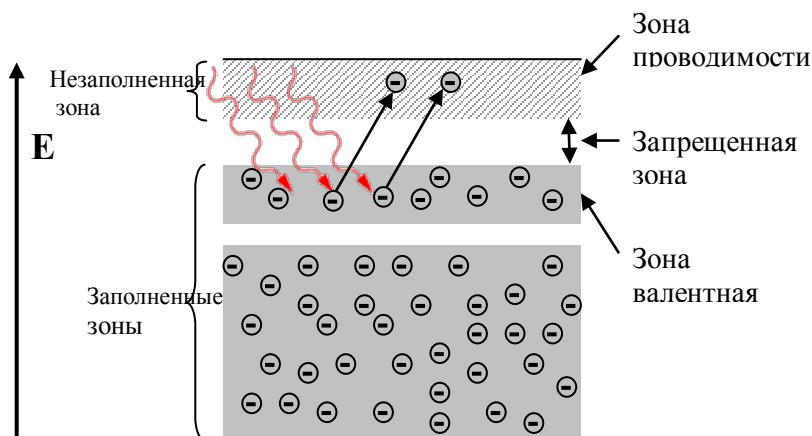


Рисунок 2. Схема энергетических зон полупроводника

В эксперименте, который Вам предстоит провести, необходимо, используя оптические методы, определить ширину запрещенной зоны полупроводниковой тонкой пленки содержащей в себе цепочки наночастиц оксида железа (Fe_2O_3). Для измерения ширины запрещенной зоны нужно, используя оптический спектр пропускания, изучить свойства оптического поглощения прозрачной пленки. Спектр поглощения испытывает резкое возрастание, если энергия падающего фотона равна ширине запрещенной зоны.

II. Экспериментальное оборудование

Вам предоставлено следующее оборудование, находящееся на Вашем рабочем столе:

1. Большой белый ящик, содержащий спектрометр и галогеновую лампу.
2. Маленький ящик, содержащий образец, стеклянную подложку, держатель образца, решетку и фоторезистор.
3. Мультиметр
4. Калькулятор
5. Линейка
6. Бумажная пластинка с отверстием в центре
7. Набор белой самоклеящейся бумаги

Предоставленный спектрометр содержит гониометр, точность измерения которого $5'$. Галогеновая лампа установлена на неподвижном плече (тубусе) спектрометра и служит источником излучения (более подробная информация представлена в описании аппаратуры)

Маленький ящик содержит:

1. Держатель образца с двумя окнами, в одном из которых расположена стеклянная подложка, покрытая пленкой Fe_2O_3 , а во втором — непокрытая стеклянная подложка.
2. Фоторезистор, закрепленный с помощью держателя, служит в качестве фотоприемника.
3. Прозрачная дифракционная решетка (600 линий/мм)

Схема экспериментальной установки изображена на рис.3

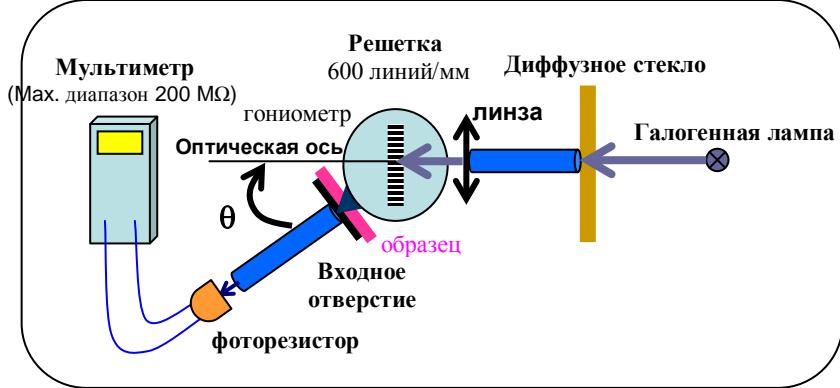


Рисунок 3: Схема экспериментальной установки

III. Теоретическое описание методов измерения.

Чтобы найти коэффициент пропускания пленки для каждой длины волны, $T_{film}(\lambda)$, используют следующую формулу:

$$T_{film}(\lambda) = \frac{I_{film}(\lambda)}{I_{glass}(\lambda)} \quad (1)$$

где I_{film} и I_{glass} интенсивности света, проходящего через стеклянную подложку, покрытую пленкой и света, проходящего через непокрытую стеклянную подложку, соответственно. Величина I может быть измерена при помощи фоторезистора, используемого в качестве фотоприемника. В фоторезисторе электрическое сопротивление уменьшается при увеличении интенсивности падающего света. Величина I может быть определена на основании следующего соотношения:

$$I(\lambda) = C(\lambda)R^{-1}, \quad (2)$$

где R — электрическое сопротивление фоторезистора, $C(\lambda)$ — зависящий от длины волны света коэффициент. Прозрачная дифракционная решетка спектрометра отклоняет свет различных длин волн на различные углы. Поэтому для исследования зависимости T от длины волны λ достаточно изменять угол фоторезистора (θ') относительно оптической оси (соответствующей направлению падающего на решетку светового пучка), как указано на рисунке 4. Из уравнения дифракционной решетки:

$$n\lambda = d[\sin(\theta' - \theta_0) + \sin \theta_0] \quad (3)$$

можно определить угол θ' , соответствующий определенной длине волны λ , n — целое число, обозначающее порядок дифракции. В данном соотношении

d — период решетки, а θ_0 — угол между вектором, перпендикулярным к поверхности решетки, и оптической осью (смотри рис.4). (Эксперимент предусматривает необходимость размещения решетки перпендикулярно к оптической оси, но поскольку желаемая точность размещения недостижима, то связанные с этим ошибки будут определяться при выполнении задания 1e).

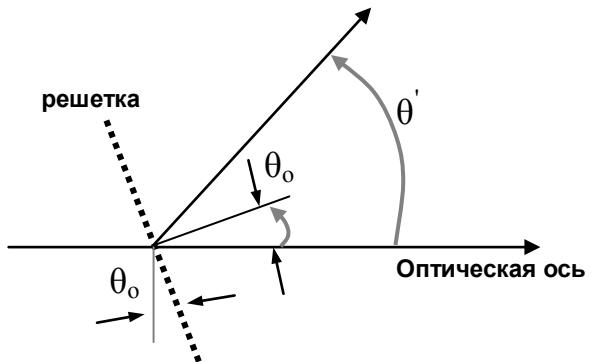


Рисунок 4: Определение углов, входящих в уравнение (3).

Экспериментально показано, что в случае, если энергия фотона немного больше чем энергия запрещенной зоны, справедливо следующее отношение:

$$\alpha h\nu = A(h\nu - E_g)^\eta \quad (4)$$

где α — коэффициент поглощения пленки, A — константа, зависящая от материала пленки, η — константа, которая определяется механизмом поглощения материала пленки и ее структурой. Пропускание описывается известным соотношением, содержащим величину α

$$T_{film} = \exp(-\alpha t) \quad (5)$$

где t — толщина пленки.

IV. Задания

0. Вашей установке и контейнеру с образцом (маленькая коробка, содержащая образец с держателем) присвоен номер. Запишите номер вашей установки и номер образца в соответствующие графы листа для ответов.

1. Настройки и измерения:

1-а	Рассмотрите нониусную шкалу гoniометра и запишите минимальную погрешность измерения ($\Delta\theta$) углов.	0.1 балла
-----	---	-----------

Первый этап:

Прежде чем начать эксперимент, включите галогеновую лампу для её прогрева. Во время эксперимента лампу лучше не выключать. Не прикасайтесь к лампе, поскольку во время эксперимента она сильно разогревается.

Отодвиньте лампу на максимальное расстояние от линзы. Это позволит вам получить параллельный пучок света.

Грубо (не используя фоторезистор) выставьте ноль гoniометра. Освободите фиксатор подвижного тубуса (18) и на глаз установите подвижный тубус вдоль оптической оси. Закрепите подвижный тубус винтом (18). Освободите нониус с помощью фиксатора (9) и вращением столика установите шкалу нониуса на ноль. Жестко закрепите нониус винтом (9) и винтом тонкой

настройки нониуса установите его на ноль. Вставьте дифракционную решетку в держатель, поместите его на столик гoniометра и поворачивайте его так, чтобы решетка оказалась примерно перпендикулярно к оптической оси системы. Далее поместите картонную пластинку с отверстием перед источником света так, чтобы пучок света попадал на решетку. Осторожно поворачивайте решетку до тех пор, пока отраженный от неё пучок не совпадет с падающим. Закрепите столик с помощью фиксирующего винта (12).

1-б	Измерив расстояние между картонной пластинкой с отверстием и решеткой, оцените точность этой регулировки ($\Delta\theta_0$).	<i>0.3 балла</i>
	Поворачивая подвижный тубус гoniометра, определите диапазон углов, в котором наблюдается первый порядок дифракции света (от синего до красного).	<i>0.2 балла</i>

Второй этап:

Теперь, закрепите фотодиод на конце подвижного тубуса. Для юстировки системы с использованием фотодиода, освободите винт (18) и слегка поворачивая подвижный тубус, добейтесь того, чтобы сопротивление фотодиода стало минимальным. Для повышения точности юстировки жестко закрепите винт (18) и используйте винт тонкой настройки вращающегося тубуса.

С помощью винта тонкой регулировки нониуса установите его на ноль.

1-с	Запишите в отчет минимальное значение ($R_{\min}^{(0)}$) измеренного сопротивления.	<i>0.1 балла</i>
	После настройки системы на минимум сопротивления, оцените точность ($\Delta\phi_o$) и запишите результат в листе ответов.	<i>0.1 балла</i>
	<i>Замечание: $\Delta\phi_o$ ошибка, связанная с невозможностью точного определения минимума сопротивления фотодиода.</i>	

- **Указание:** После выполнения этого задания зафиксируйте винты нониуса и держателя фотодиода и не трогайте их в дальнейшем.

Третий этап:

Поверните вращающийся тубус в область дифракции первого порядка. Найдите угол, при котором сопротивление фотодиода станет минимальным (что соответствует максимальной интенсивности света). Вы можете с помощью регулировочных винтов слегка изменять наклон столика (на котором закреплена решетка), так чтобы получить еще меньшее сопротивление фотодиода.

1-д	Запишите в соответствующую графу отчета полученное минимальное значение сопротивления ($R_{\min}^{(1)}$).	<i>0.1 балла</i>
------------	---	------------------

Теперь необходимо снова проверить перпендикулярность решетки для регулировки нуля прибора. Для этого вы должны использовать метод

совпадения отраженного пучка с падающим (примененный вами в первом опыте).

➤ **Внимание:** с этого момента проводите эксперимент в темноте (закрывайте крышку ящика при каждом измерении).

Измерения: До начала измерений осмотрите полупроводниковую плёнку (образец) и убедитесь в её целостности. Закрепите держатель с образцом на подвижном тубусе гoniометра. Поверните держатель образца так, чтобы образец оказался перед входным отверстием S_1 тубуса с фотоприемником, и позаботьтесь, чтобы равномерно покрытая часть образца прикрывала отверстие. Для уверенности, что вы каждый раз имеете дело с одной и той же частью образца, воспользуйтесь белыми наклейками. Закрепите их на держателе и подвижном тубусе и поставьте на них метки.

Внимание. При измерении больших сопротивлений необходимо давать фоторезистору время отрелаксировать. Для этого перед каждым снятием отсчета необходимо делать паузу в 3 – 4 минуты.

1-е	Измерьте сопротивления фоторезистора для стеклянной подложки без покрытия, а так же для стекленной подложки, покрытой полупроводниковым слоем как функции угла θ (угол θ измеряется с помощью гoniометра между оптической осью и направлением на фоторезистор). Заполните таблицу 1d. Вам необходимо не менее 20 точек в интервале, найденном вами в пункте 1b. Правильно выбирайте пределы измерений омметра.	2.0 балла
	<ul style="list-style-type: none"> • Оцените погрешность измерения каждой точки. Ваш ответ должен базироваться только на прямых показаниях омметра. 	1.0 балл

Четвертый этап.

Проведенная вами юстировка не является абсолютно точной, потому что невозможно абсолютно точно совместить оптическую ось с направлением на фоторезистор или установить решетку строго перпендикулярно к оптической оси. Поэтому следует определить асимметрию излучения, дифрагированного на решетке, проводя измерение при отклонении подвижного тубуса в обе стороны от оптической оси (эта асимметрия возникает из-за отклонения нормали к поверхности решетки от оптической оси(θ_o)).

Для определения этой асимметрии необходимо:

1-f	<ul style="list-style-type: none"> • измерьте T_{film} для $\theta = -20^\circ$, а затем измерьте значения T_{film} для нескольких углов в окрестности $\theta = +20^\circ$. Занесите полученные результаты в таблицу 1e. 	0.6 балла
	<ul style="list-style-type: none"> • Постройте график зависимости T_{film} от угла θ и проведите через нанесенные точки кривую. 	0.6 балла

С помощью этой кривой найдите угол γ , при котором функция T_{film} имеет то же значение, что и при угле $\theta = -20^\circ$ ($\gamma \equiv \theta|_{T_{film}=T_{film}(-20^\circ)}$). Обозначьте через δ разность данного угла с углом $\theta = +20^\circ$. Другими словами:

$$\delta = \gamma - 20^\circ \quad (6)$$

1-g	<ul style="list-style-type: none"> • Впишите значение δ в соответствующую таблицу. 	<i>0.2 балла</i>
------------	---	----------------------

Для первого порядка дифракции уравнение (3) можно привести к виду:

$$\lambda = d \sin(\theta - \delta/2) \quad (7)$$

где θ - угол отсчитанный по шкале гoniометра.

2. Обработка результатов

2-а	<ul style="list-style-type: none"> • Используя уравнение (7), выразите погрешность $\Delta\lambda$ через погрешности других параметров (считайте, что d погрешности не имеет). Используйте также уравнения (1), (2) и (5) для того, чтобы выразить ΔT_{film} через R и ΔR. 	<i>0.6 балла</i>
2-б	<ul style="list-style-type: none"> • Запишите погрешность $\Delta\lambda$ для области дифракции первого порядка. 	<i>0.3 балла</i>
2-с	<ul style="list-style-type: none"> • На основании измеренных параметров в части 1, заполните таблицу 2с для каждого угла θ. Внимание: длину волны вычисляйте при помощи уравнения (7). 	<i>2.4 балла</i>
2-д	<ul style="list-style-type: none"> • На одной диаграмме постройте графики зависимостей R_{glass}^{-1} и R_{film}^{-1} от длины волны. <i>Обратите внимание на то, что из уравнения (2) и вида зависимостей R_{glass}^{-1} и R_{film}^{-1} можно качественно представить вид зависимостей I_{glass} и I_{film} от длины волны.</i> 	<i>1.5 балла</i>
	<ul style="list-style-type: none"> • С помощью таблицы 2d найдите длины волн при которых R_{glass} и R_{film} достигают минимальных значений. 	<i>0.4 балла</i>
2-е	<ul style="list-style-type: none"> • Для полупроводникового слоя (образца) постройте график зависимости T_{film} от длины волны. 	<i>1.0 балл</i>

3. Анализ данных

Подставив $\eta = 1/2$ и $A = 0.071$ ((эВ) $^{1/2}$ /нм) в уравнение (4), можно найти значения E_g и t (в единицах эВ и нм, соответственно). Это удобно сделать, построив график в подходящих координатах $x - y$, и выбрав область в которой уравнение (4) выполняется.

3-а	<ul style="list-style-type: none"> Полагая $x = h\nu$ и $y = (\alpha t h\nu)^2$ и используя ваши измерения в части 1, заполните таблицу 3а для длин волн в окрестности 530 нм и выше. Запишите ваши результаты (x и y) с нужным числом значащих цифр, основываясь на оценке погрешности только в одной точке. <u>Обратите внимание на то, что энергию $h\nu$ следует вычислять в эВ, а длину волны в нм.</u> Единицы измерения всех переменных в таблице должны быть записаны в скобках в верхней строке таблицы. 	2.4 балла
3-б	<ul style="list-style-type: none"> Постройте график зависимости y от x. Проведите прямую через экспериментальные точки в той окрестности 530 нм, где график линеен. Определите область, где выполняется уравнение (4), запишите величины наименьшей и наибольшей координаты x для точек, через которые вы провели прямую линию. 	2.6 балла
3-с	<ul style="list-style-type: none"> Обозначим коэффициент наклона проведенной прямой линии символом m. Найдите выражение для толщины пленки (t), погрешность (Δt) ее определения через m и A (полагая, что A не имеет ошибки). 	0.5 балла
3-д	<ul style="list-style-type: none"> Вычислите величины E_g и t и их погрешности в единицах эВ и нм. Заполните таблицу 3д. 	3.0 балла

Описание оборудования для экономии места мы опустим (это еще 7 страниц), ограничимся фотографией и описанием основного использованного прибора. Вид прибора сверху показан на рис.2. Основные детали прибора пронумерованы.

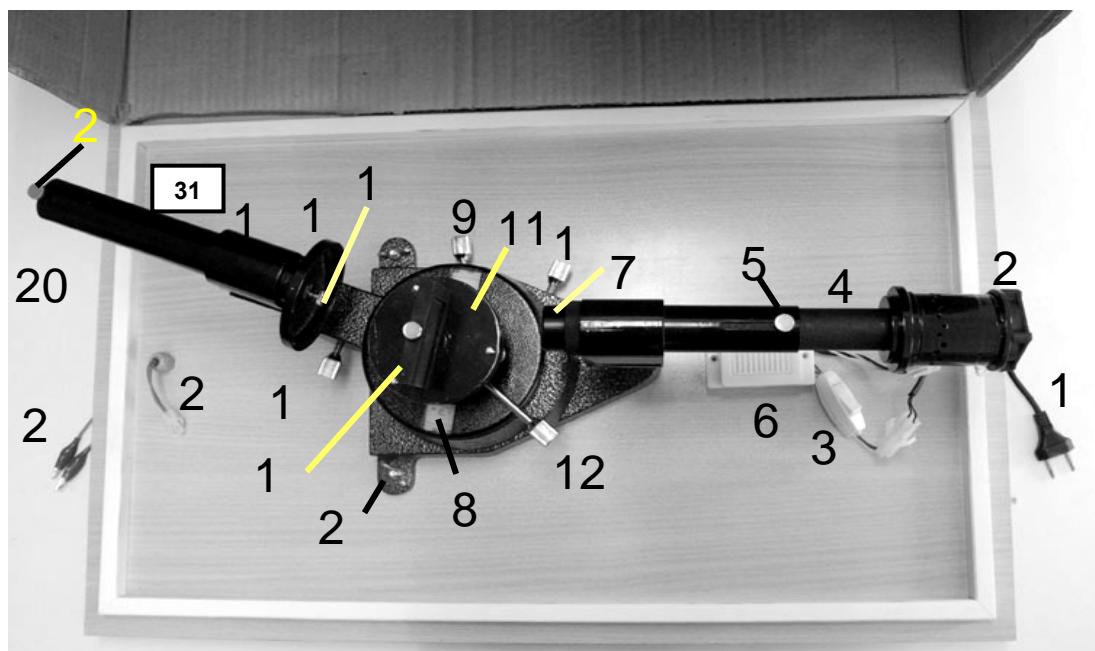


Рис.2 Вид прибора сверху.

- | | |
|---|--|
| 1. Сетевой шнур. | 14. Держатель решетки. |
| 2. Галогеновая лампа и охлаждающий вентилятор. | 15. Держатель образца. |
| 3. Выключатель. | 16. Крепежный винт держателя образца и стекла (показан отдельно на рис. 6) |
| 4. Неподвижный тубус гoniометра с регулируемой длиной. | 17. Подвижный тубус гoniометра. |
| 5. Регулировочный винт тубуса. | 18. Фиксатор подвижного тубуса (показан отдельно на рис. 4) |
| 6. Адаптер: 220 В - 12 В | 19. Винт точной регулировки подвижного тубуса. |
| 7. Линза | 20. Детектор. |
| 8. Нониусная шкала | 21. Крепежный винт детектора. |
| 9. Фиксатор нониусной шкалы | 22. Разъем для проводов от детектора. |
| 10. Винт точной регулировки нониусной шкалы | 23. Провода для подключения мультиметра. |
| 11. Вращающийся столик для дифракционной решетки. | 24. Крепежный винты станины гoniометра. |
| 12. Фиксатор вращающегося столика. | |
| 13. Регулировочные винты для установления горизонтального уровня верхнего стола решетки (показаны отдельно на рисунке 4). | |

*Номер, указанный в углу прибора означает **номер оборудования** (на рисунке – в верхнем левом углу)*

Решение заданий экспериментального тура.

Введение.

Первый взгляд на толщину стопки листов с условием задания экспериментального тура может привести в шоковое состояние. Еще больший ужас вызывает беглое знакомство с содержанием этой стопки: внутренний фотоэффект, зонная теория полупроводников, наночастицы, спектр поглощения, два ящика малознакомых приборов и т.д. Но не выбрасывать же сразу белый флаг!

Не стоит хвататься сразу за детали оборудования и пытаться собрать мозаику без плана, без идеи, без понимания цели.

Поэтому, повторим основную рекомендацию:

Лучше играть по плохому плану, чем вообще без плана!

Единственной альтернативой плохого плана, может служить только хороший план, основанной на понимании целей и методов исследования. Поэтому еще раз обратимся к условию, для того, чтобы четко уяснить смысл предложенного задания, понять каждый (или почти каждый) шаг работы, описанный в условии.

Так в данном случае основная цель указана в самом названии работы: определить ширину запрещенной зоны полупроводника. Для тех, кто не знает, что это такое, следует внимательно прочитать Введение. В нем упоминается фотоэффект, который хорошо знаком по школьному курсу физики: выбивание электронов из поверхности под действием света. Фотоэффект характеризуется наличием красной границы – минимальной энергии фотона, необходимой для того, чтобы выбить электрон с поверхности. Однако оказывается, что в данном случае электроны не вылетают из полупроводниковой пленки, а переходят из валентной в зону проводимости. К каким наблюдаемым эффектам могут привести такие переходы? Очевидно, что должна возрастать электрическая проводимость пленки. Но в данном случае не о каких электрических измерениях речи не идет – задача оптическая. Поэтому надо искать оптические характеристики, в которых проявляются переходы из одной зоны в другую. Понятно, что электроны в зоне проводимости обладают большей энергией, чем в валентной зоне – единственным источником этой дополнительной энергии может служить энергия света. Следовательно, переходы электронов возможны только при **поглощении** света. Хорошо известно, что в любой системе поглощение света приводит к переходу электрона из одного стационарного состояния в другое. Если эти стационарные состояния дискретны, как в отдельных атомах, то спектр поглощения состоит из отдельных тонких линий. В данном же случае энергетические состояния сливаются в широкие полосы, зоны. Поэтому возможны переходы из любого состояния в валентной зоне в любое состояние в зоне проводимости¹, то есть спектр поглощения должен быть сплошным. Но чтобы попасть в зону проводимости электрон должен преодолеть

¹ Переходы внутри валентной зоны невозможны, потому что все состояния в ней заполнены, а переход в занятое состояние запрещает принцип Паули. Переходы в зоне проводимости возможны, однако они маловероятны, потому что электронов в этой зоне крайне мало, а попавшие туда электроны быстро ее покидают, возвращаясь в более низкие состояния валентной зоны.

запрещенную зону. Минимальная энергия, которая необходима для этого и есть искомая энергетическая ширина запрещенной зоны E_g . Поэтому существует минимальная энергия кванта света, который может перевести электрон в зону проводимости E_g , который, следовательно, может поглотиться². Итак, если光子具有能量，小于禁带区的宽度，则它们不被吸收，而具有更大宽度的光子则被吸收。因此，光谱吸收应该表示为：在所需能量 E_g 之前为零，之后为一个单位。因此，为了确定禁带区的宽度，我们可以测量吸收光谱并确定光子的能量（可以测量波长并计算光子的能量），在哪个波长光子开始被吸收。这很简单。但是这对于理论学家来说是一个结果，因为在实验中很难进行突然跳跃的测量，通常会得到一个平滑的过渡，通过它我们可以推断出所需的吸收值。

Запомним: даже без обработки можно будет примерно оценить ширину зоны по спектру поглощения – энергия фотона, соответствующая резкому возрастанию поглощения³.

Теперь разберемся, как же авторы рекомендуют провести обработку спектра для более точного определения энергии E_g . Основой для решения этой задачи является эмпирическая формула (4), в которую входят экспериментально измеряемые величины: частота (выразим через длину волн) и коэффициент поглощения α , который выражается через непосредственно измеряемое значение пропускания T с помощью формулы (5). Дальнейший путь известен – нужно будет каким-то образом линеаризовать зависимость (4) и по этой параметрам этой линейной зависимости можно будет найти то, что требуется.

Подведем итог теоретического описания: нужно измерить зависимость коэффициента поглощения от длины волны падающего света.

Теперь разберемся, как провести эти измерения. Для изменения и измерения **длины волны** у нас имеется гoniометр, позволяющий измерять углы с высокой точностью, поэтому и настраивать его (то есть юстировать) нужно будет очень тщательно – причем сначала с помощью лучшего оптического прибора – собственного глаза. Процедура настройки описана очень подробно (вся первая часть набора заданий целых четырех этапа) – с ней лучше разбираться непосредственно с прибором. Кстати и баллы за это дают!

Осталось уяснить, как измерять коэффициент поглощения α . В качестве приемника используется фотодиод, сопротивление которого обратно пропорционально интенсивности падающего света – формула (2). Сопротивление резистора измеряется с помощью мультиметра, то есть напрямую. Но в этой формуле стоит неизвестный, да еще зависящий от длины волны коэффициент. Кроме того, источник света, галогеновая лампа, дает излучение, интенсивность которого также зависит от длины волны. Поэтому прямо измерять пропускание невозможно. Как и следовало ожидать – измерения относительные, как подсказывает формула (1) – отношение

² Эта минимальная энергия является полным аналогом знакомой красной границы фотоэффекта.

³ Даже без приборов ее можно очень грубо оценить «на глаз»: пленка на просвет имеет желто-коричневый свет, значит, она поглощает в сине-фиолетовой области. Поэтому искомая граница должна лежать где-то в зеленой области в диапазоне 500-600 нм.

интенсивности света, прошедшего через пленку, к интенсивности света, прошедшего через стеклянную подложку. При этом неизвестный коэффициент чувствительности фотодиода и неизвестная интенсивность падающего света сократится.

Можно подвести итог и обсуждения методики измерений:

- изменяя угол поворота подвижной трубы гониометра, изменяя длину волны света, проходящего через образцы (пластины с пленкой и чистой) и попадающего на фотодиод;

- измеряя угол поворота трубы, и по этому углу с помощью формулы (7) рассчитываем длину волны; какой-то угол δ нужно будет определить заранее, в ходе юстировки;

- для каждой длины волны на пути света выставляем один раз пластинку с пленкой, второй раз чистую пластинку, в обоих случаях измеряем сопротивление фотодиода (удручают указания – фотодиод инерционен, необходимо выждать 3-4 минуты)

Таким способом необходимо получить основную таблицу измерений 1d: угол, два значения сопротивления. Но там еще и погрешности – разберемся по ходу измерений. Это действительно основные измерения – не случайно за эту таблицу дают целых 3 балла.

Далее обработка результатов измерений – она подробно изложена в частях 2 и 3 раздела **Задания**.

Выполнение работы и результаты⁴.

1a. Погрешность измерения углов поворота прямо указана в условии, только читать надо внимательно - 5'. Можно перевести и в градусы: $\Delta\theta = 5' = 0.08^\circ$.

1b. Трудно описывать процесс оптической юстировки без прибора, поэтому ограничимся только краткими комментариями к условию. Юстировка традиционно начинается от источника: лампочка вставлена и зажжена, располагаем ее за линзой так, чтобы получить параллельный пучок света. Это пучок падает на пластинку с дифракционной решеткой. Решетка должна быть перпендикулярна падающему потоку. Для этого удобно использовать метод отраженного луча: луч отраженный должен совпадать с лучом падающим. Именно такой метод и предлагается в данном задании. Оптическая схема этого метода юстировки показана на рис. 1.

Как следует из рисунка, малый угол θ_0 может быть рассчитан по формуле

$$\theta_0 = \frac{r}{2a}.$$

Так как смещение отраженного луча r должно стремиться к нулю, то погрешность установки угла может быть рассчитана по формуле

$$\Delta\theta_0 = \frac{\Delta r}{2a}.$$

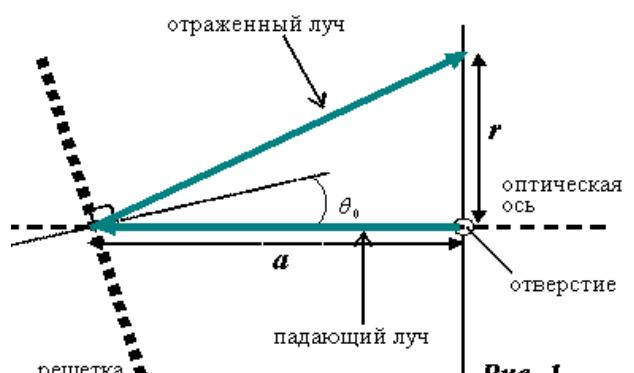


Рис. 1

⁴ Здесь мы основываемся на результатах, представленных авторами задач.

В качестве Δr можно взять радиус пучка, расстояние до решетки легко измеримо. Расчет приводит к результату:

$$\Delta r = 1 \text{ мм}, \quad a = (70 \pm 1) \text{ мм} \Rightarrow \theta_0 = \frac{\Delta r}{2a} \text{ радиан} = 0.007 \text{ радиан} = 0.4^\circ$$

Диапазон изменения угла поворота подвижного тубуса гoniометра лучше определить на глаз, заглядывая в трубу. При этом можно и подрегулировать трубу так, чтобы яркость луча была максимальна. По результатам авторов области первого порядка дифракции⁵ соответствует диапазон углов $13^\circ \leq \theta \leq 26^\circ$.

Это чрезвычайно важный результат для дальнейшего: именно в этом диапазоне следует проводить все дальнейшие измерения, поэтому необходимо убедиться в его правильности, по меньшей мере, дважды.

1с. Теперь окончательно заменяем глаз на фотодиод – тоже очень важная операция (хотя ее стоимость в баллах мала), от ее тщательного выполнения зависит возможность дальнейших основных измерений. Поэтому здесь следовало также немного повозиться, чтобы добиться минимально возможного значения сопротивления резистора. У авторов это значение оказалось равным

$$R_{\min}^{(0)} = (21,6 \pm 0,1) \text{ кОм}.$$

После того, как было найдено это положение, следовало зафиксировать нуль шкалы измерения углов.

Следующий вопрос сложный, но не слишком принципиальный: малый поворот тубуса не приводит к заметному изменению сопротивления (так световой луч и фотодиод имеют конечные размеры). Нужно было повернуть тубус (с помощью винта) в одну-другую сторону и оценить в каком диапазоне углов сопротивление фотодиода не изменяется. В оригинале получено значение $\Delta\phi_0 = 5' = 0,08^\circ$, что лежит в пределах погрешности измерения углов.

Поворачиваем тубус в область измерения (первый порядок дифракции) и определяем минимальное значение сопротивления в этой области. Это действие необходимо, чтобы правильно выбрать диапазон измерения сопротивления и иметь представление о численных значениях дальнейших основных результатов. Понятно, что полученное значение должно быть раз в десять больше, чем в нулевом максимуме. Авторами получено значение

$$R_{\min}^{(1)} = (192 \pm 1) \text{ кОм}.$$

Выполнена подготовительная работа. От ее тщательности зависит успех дальнейших измерений, поэтому можно не пожалеть и часа рабочего времени.

⁵ При наличии одной минуты этот диапазон можно проверить и теоретически – с помощью формулы дифракционной решетки.

1.д Результаты измерений.

θ°	$R_{\text{glass}}(\text{M}\Omega)$	$\Delta R_{\text{glass}}(\text{M}\Omega)$	$R_{\text{film}}(\text{M}\Omega)$	$\Delta R_{\text{film}}(\text{M}\Omega)$
15,00	3,77	0,03	183	3
15,50	2,58	0,02	132	2
16,00	1,88	0,01	87	1
16,50	1,19	0,01	51,5	0,5
17,00	0,89	0,01	33,4	0,3
17,50	0,68	0,01	19,4	0,1
18,00	0,486	0,005	10,4	0,1
18,50	0,365	0,005	5,40	0,03
19,00	0,274	0,003	2,66	0,02
19,50	0,225	0,002	1,42	0,01
20,00	0,200	0,002	0,880	0,005
20,50	0,227	0,002	0,822	0,005
21,00	0,368	0,003	1,123	0,007
21,50	0,600	0,005	1,61	0,01
22,00	0,775	0,005	1,85	0,01
22,50	0,83	0,01	1,87	0,01
23,00	0,88	0,01	1,93	0,02
23,50	1,01	0,01	2,14	0,02
24,00	1,21	0,01	2,58	0,02
24,50	1,54	0,01	3,27	0,02
25,00	1,91	0,01	4,13	0,02
16,25	1,38	0,01	66,5	0,5
16,75	1,00	0,01	40,0	0,3
17,25	0,72	0,01	23,4	0,2
17,75	0,535	0,005	12,8	0,1
18,25	0,391	0,003	6,83	0,05
18,75	0,293	0,003	3,46	0,02
19,25	0,235	0,003	1,76	0,01
19,75	0,195	0,002	0,988	0,005
20,25	0,201	0,002	0,776	0,005
20,75	0,273	0,003	0,89	0,01

Обратим внимание, что сначала измерения проводились с интервалом в полградуса, а затем в центральной области густота точек увеличена в два раза.

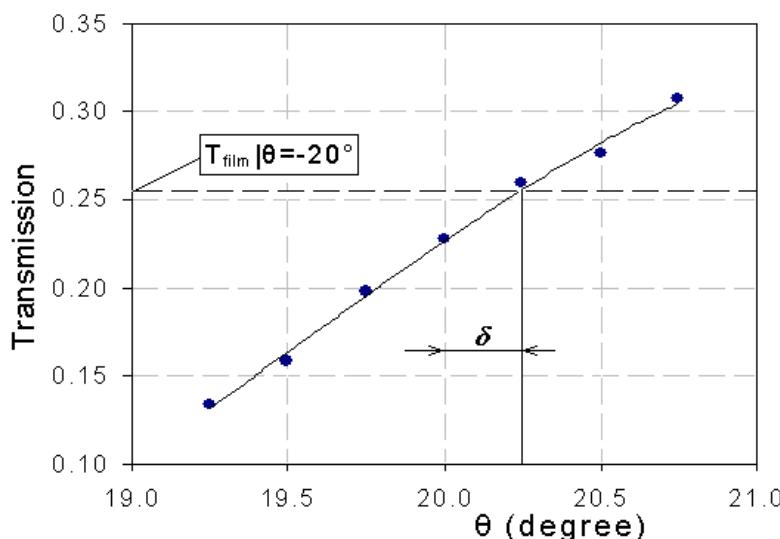
1.е Изначально не совсем понятный пункт. Речь идет о поправке к измерению углов, в очередной (и последний раз) необходимо уточнить положение нормали к решетке. Идея определения этой поправки заключается в использовании дифракции, как первого, так и минус первого порядка. При идеальной установке решетки значения интенсивности света должны быть одинаковы при отклонении на углы $+\theta$ и $-\theta$. Если решетка установлена не строго перпендикулярно, то измерение углов (по разные стороны от оптической оси), при которых интенсивности света одинаковы, позволяет найти необходимую поправку⁶ для определения длины волны света по формуле (7).

⁶ Доказательство этого метода – небольшое тригонометрическое упражнение, основанное на исходной формуле(3), можете провести самостоятельно.

Для более точного определения угла γ , при котором пропускание пленки такое же, как и при угле -20° , предлагается провести несколько измерений вблизи значения $+20^\circ$, и аппроксимировать полученную зависимость.

Эксперимент дал следующие значения пропускания пленки.

θ	T_{film}	θ	T_{film}
$\theta = -20^\circ$	0.255	19.25	0.134
		19.50	0.158
		19.75	0.197
		20.00	0.227
		20.25	0.259
		20.50	0.276
		20.75	0.307



погрешность отсчета гoniометра.

Эти результаты представлены на графике, из которого следует, что искомое значение угла равно

$$\delta = (0,25 \pm 0,08)^\circ.$$

Обратите внимание, что эта поправка является существенной, так как она превышает

2-а. Длина волны теперь должна рассчитываться по формуле (7), из нее следует, что погрешность ее определения должна рассчитываться по формуле

$$\Delta\lambda = d \cos\left(\theta - \frac{\delta}{2}\right) \sqrt{(\Delta\theta)^2 + \left(\frac{\Delta\delta}{2}\right)^2}. \quad (1)$$

Полагая $\Delta\theta \approx \Delta\delta \approx 5' \approx 1,5 \cdot 10^{-3}$, $d = \frac{1}{600} \text{мм} \approx 1,7 \cdot 10^{-7} \text{м}$, получим формулу для

оценки погрешности длины волны $\Delta\lambda \approx 2,5 \cos\theta (\text{нм})$.

Величина пропускания рассчитывается по формуле

$$T_{film} = \frac{R_{glass}}{R_{film}},$$

Поэтому ее погрешность оценивается по формуле

$$\Delta T = T_{film} \sqrt{\left(\frac{\Delta R_{film}}{R_{film}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R_{glass}}{R_{glass}}\right)^2}. \quad (2)$$

2-б. Для углов в нужном диапазоне $13^\circ \leq \theta \leq 26^\circ$ погрешность определения длины волны лежит в диапазоне $\Delta\lambda = (2,4 \div 2,2) \text{ нм}$.

2-с. Для заполнения таблицы 2.с необходимо использовать формулы

$$\lambda = d \sin(\theta - \delta/2), \quad T_{film}(\lambda) = \frac{R_{glass}(\lambda)}{R_{film}(\lambda)}, \quad \alpha t = \ln(T_{film}(\lambda)). \quad (3)$$

Результаты расчетов представлены в таблице.

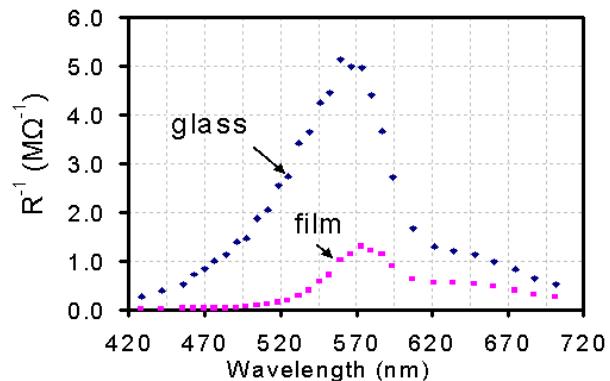
θ°	λ (нм)	$R_{glass}^{-1} (M\Omega)^{-1}$	$R_{film}^{-1} (M\Omega)^{-1}$	T_{film}	αt
15.0	428	0.265	0.00546	0.0206	3.88
15.5	442	0.388	0.00758	0.0195	3.94
16.0	456	0.532	0.0115	0.0216	3.83
16.25	463	0.725	0.0150	0.0208	3.88
16.5	470	0.840	0.0194	0.0231	3.77
16.75	477	1.00	0.0250	0.0250	3.69
17.0	484	1.12	0.0299	0.0266	3.63
17.25	491	1.39	0.0427	0.0308	3.48
17.5	498	1.47	0.0515	0.0351	3.35
17.75	505	1.87	0.0781	0.0418	3.17
18.0	512	2.06	0.096	0.0467	3.06
18.25	518	2.56	0.146	0.0572	2.86
18.5	525	2.74	0.185	0.0676	2.69
18.75	532	3.41	0.289	0.0847	2.47
19.0	539	3.65	0.376	0.103	2.27
19.25	546	4.26	0.568	0.134	2.01
19.5	553	4.44	0.704	0.158	1.84
19.75	560	5.13	1.01	0.197	1.62
20.0	567	5.00	1.14	0.227	1.48
20.25	573	4.98	1.29	0.259	1.35
20.5	580	4.41	1.22	0.276	1.29
20.75	587	3.66	1.12	0.307	1.18
21.0	594	2.72	0.890	0.328	1.12
21.5	607	1.67	0.621	0.373	0.99
22.0	621	1.29	0.541	0.419	0.87
22.5	634	1.20	0.535	0.444	0.81
23.0	648	1.14	0.518	0.456	0.79
23.5	661	0.99	0.467	0.472	0.75
24.0	675	0.826	0.388	0.469	0.76
24.5	688	0.649	0.306	0.471	0.75
25.0	701	0.524	0.242	0.462	0.77

2-д. Графики зависимости величин обратных сопротивлению фоторезистора от длины волны показаны на следующем рисунке.

Отметим, что эти графики приблизительно (с точностью до неизвестного множителя $C(\lambda)$) представляют интенсивности света, падающего на фотоприемник. Значения длин волн, при которых данные интенсивности максимальны равны:

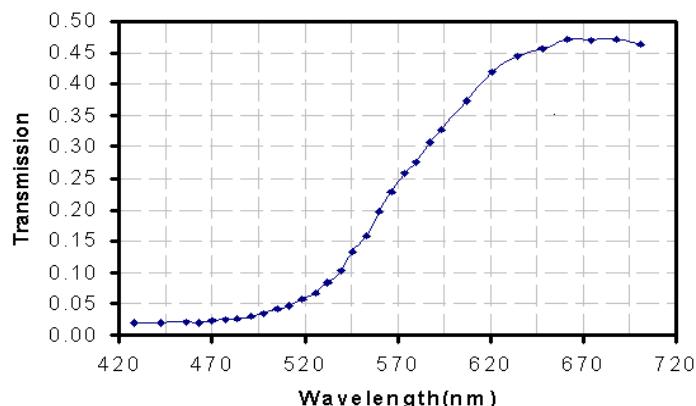
$$\lambda_{\max, \text{glass}} = (564 \pm 5) \text{ нм}$$

$$\lambda_{\max, \text{film}} = (573 \pm 5) \text{ нм}$$



2-е. График зависимости пропускания полупроводниковой пленки от длины волны.

Как и следовало ожидать, мы получили достаточно плавную кривую перехода от слабого к сильному поглощению. Действительно, определить по нему пороговое значение не возможно, но диапазон, в котором лежит это значение, угадан правильно.



3-а. В этом пункте явно подсказано, как линеаризовать приведенную зависимость

$$\alpha h\nu = A(h\nu - E_g)^\eta. \quad (4)$$

Так как $\eta = \frac{1}{2}$ (почему-то это значение приведено не после формулы (4), а

только в разделе заданий), то соотношение (4) необходимо умножить на t возвести в квадрат

$$(\alpha t h\nu)^2 = At^2(h\nu - E_g). \quad (5)$$

Наконец, проведем необходимый переход к указанным координатам:

$$x[\vartheta B] = \frac{h\nu}{e} = \frac{hc}{e} \frac{1}{\lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3,00 \cdot 10^8}{1,60 \cdot 10^{-19}} \cdot \frac{1}{\lambda_{(\text{нм})} \cdot 10^{-9}} = \frac{1243}{\lambda_{(\text{нм})}}, \quad (6)$$

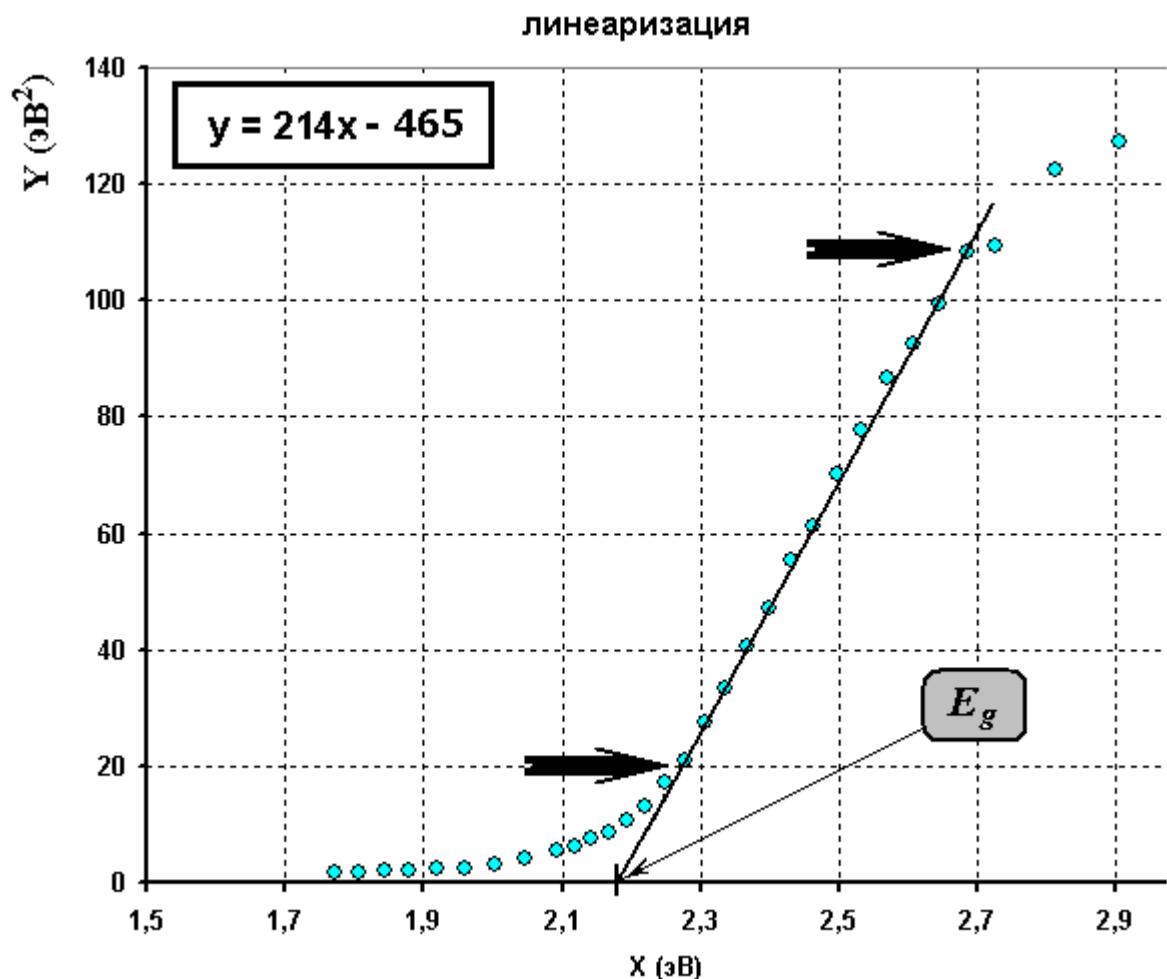
здесь $\lambda_{(\text{нм})}$ - длина волны в нанометрах;

$$y[\vartheta B^2] = \left(\alpha t \frac{h\nu}{e} \right)^2 = (x \cdot \alpha t)^2. \quad (7)$$

Результаты расчетов по этим формулам приведены в таблице:

θ°	$x (\text{eB})$	$y (\text{eB}^2)$
15.00	2.898	126.6
15.50	2.806	121.9
16.00	2.720	108.8
16.25	2.679	107.8
16.50	2.639	98.9
16.75	2.600	92.0
17.00	2.563	86.3
17.25	2.527	77.4
17.50	2.491	69.7
17.75	2.457	60.9
18.00	2.424	55.1
18.25	2.392	46.8
18.50	2.360	40.4
18.75	2.330	33.1
19.00	2.300	27.3
19.25	2.271	20.91
19.50	2.243	17.07
19.75	2.215	12.92
20.00	2.188	10.51
20.25	2.162	8.53
20.50	2.137	7.56
20.75	2.112	6.23
21.00	2.088	5.43
21.50	2.041	4.06
22.00	1.997	3.02
22.50	1.954	2.52
23.00	1.914	2.26
23.50	1.875	1.98
24.00	1.838	1.94
24.50	1.803	1.84
25.00	1.769	1.86

3-б. График, построенный по этим данным, позволяет четко выделить линейный участок в области $x_{\min} = 2.24$ (эВ), $x_{\max} = 2.68$ (эВ)



3-с. Запишем уравнение линейного участка функции (5) в виде

$$y = mx - b, \quad (8)$$

здесь

$$m = At^2, \quad b = mE_g. \quad (9)$$

Параметры этой линейной зависимости и их погрешности можно найти методом наименьших квадратов (или по графику). По приведенным данным эти параметры оказываются равными (по МНК)

$$m = (214 \pm 4)\text{эВ}, \quad b = (465 \pm 11)\text{эВ}^2$$

Из формул (9) следует, что искомые параметры пленки рассчитываются по формулам:

$$t = \frac{\sqrt{m}}{A} = 206,0 \text{ нм}, \quad E_g = \frac{b}{m} = 2,173 \text{ эВ}.$$

Погрешности этих величин оцениваются по формулам:

$$\Delta t = \frac{\Delta m}{2m} t \approx 1,9 \text{ нм}, \quad \Delta E_g = E_g \sqrt{\left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2 + \left(\frac{\Delta m}{bm}\right)^2} \approx 0,065 \text{ эВ}.$$

3-d. Таким образом, получаем окончательный результат:

$$t = (206 \pm 2) \text{ нм}, \quad E_g = (2,17 \pm 0,02) \text{ эВ}.$$

Заключительные замечания по заданию экспериментального тура.

1. Прежде всего, отметим тщательную и добросовестную разработку задания. Организаторы олимпиады затратили на ее два года, это задание было выбрано из 22 предложенных. Экспериментальное оборудование было специально заказано одной из иранских фирм. Была разработана специальная процедура тестирования, которое было проведено в ночь перед туром специально подобранный командой. Не случайным является Пункт 0 из заданий (жалко, что он не оценивался в баллах) – для каждого образца были проведены отдельные измерения с помощью более совершенного оборудования. Полученные значения толщины пленки и ширины запрещенной зоны (для каждого образца!) использовались при проверке работ участников (естественно, что они были сообщены и руководителям команд).
2. Главным достоинством задачи, по нашему мнению, высокая точность конечных результатов (погрешность порядка 1%), которая оправдывает жесткие требования к юстировке прибора. Подчеркнем, что эта процедура не слишком сложна, но требует аккуратности и определенных экспериментальных навыков.
3. Возможно, авторы задачи излишне увлеклись расчетом погрешностей⁷. Так, если оценка погрешности измерения длины волны может быть оправдана (она используется при правильной записи чисел в таблицах измерений), то формула для расчета погрешности пропускания далее нигде не используется. Аналогично, нигде не используются погрешности измерения сопротивления фотодиода, оценки погрешностей измерения углов. Единственное основание для этих расчетов – демонстрация того, что они не существенны для окончательных расчетов. Как оказалось, основной источник этой погрешности появляется при расчетах коэффициентов линеаризованной зависимости. Поэтому вполне можно было ограничиться оценкой погрешностей измерений в какой-либо одной точке.
4. Конечно, выполнение работы в отведенное время затрудняет инерционность фотодиода⁸, поэтому провести повторные измерения практически невозможно. С другой стороны, показания фотодиода более стабильны, чем других фотоприемников.
5. В работе требовалось провести громадное число арифметических расчетов. Участникам были подарены калькуляторы (без Excel'a) – но расчеты с их помощью напоминают игру виртуоза на пианино. Поэтому при подготовке школьников следует уделять внимание технике расчетов: прежде всего

⁷ В начальном варианте требовалось рассчитывать погрешности отдельно для каждой экспериментальной точки.

⁸ Напомним: время одного измерения 3 минуты, поэтому минимальное время основных измерений (если строго следовать инструкции) – минимум 20 точек, в каждой из которых 2 измерения – итого, $2 \times 20 \times 3 \text{ мин} = 2 \text{ часа}$.

тщательную подготовку расчетных формул, приведение их к виду наиболее удобному для вычислений.

5. На первый взгляд, излишним является построение графиков **2-д** (зависимость проводимости фоторезистора от длины волны) и **2-е** (зависимость пропускания пленки от длины волны) – они носят иллюстративный характер и не используются в конечных расчетах. Однако именно они дают возможность наглядно представить физическую сущность проведенных измерений.

6. Наконец, задания излишне детализированы: некоторые подсказки можно было опустить – дать подумать самим участникам.

7. И это задание необходимо было выполнить всего за 5 часов! Поразительно, что нашлись участники, которые смогли это сделать. Приятно отметить, что среди них оказался и один из участников команды Беларуси!

8. *Если же внимательно вдуматься, то ничего нового – ознакомление с условием и оборудованием, теоретическая модель, пробный эксперимент, измерения, обработка результатов, оформление работы и ... получение наград! Все это мы уже проходили!*

Приложение 1.

Приборные погрешности некоторых часто используемых приборов⁹.

Приборы и меры	Значения меры, диапазон измерения	Предельная приборная погрешность
Линейки -металлические	150, 300, 500 мм 1000 мм	0,1 мм 0,2 мм
- деревянные	400, 500, 750 мм	0,5 мм
- пластмассовые	200, 250, 300, 400 мм	1 мм
Мензурки 2-го класса	100, 200 см ³	5 см ³
Штангенциркули с ценой деления 0,1; 0,05 мм	0-155, 0- 250, 0-350 мм	0,1; 0,05 мм в соответствии с ценой деления нониуса
Весы лабораторные	5-100, 10-200 г	3 цены деления шкалы
Секундомеры механические	30-60 с	1,5 цены деления шкалы за один оборот секундной стрелки
Термометры стеклянные жидкостные	от -20 до 100 °C от -35 до 100 °C	1 цена деления, если она равна 1; 2; 5 K; 2 цены деления, если она равна 0,2; 0,5 K

Если вам не известна предельная приборная погрешность или класс точности прибора, то в качестве оценки можно брать половину цены деления шкалы!

⁹ По книге Г.С. Кембровский «Приближенные вычисления и методы обработки результатов измерений в физике»; Мн. «Университетское», 1990.

Приложение 2.

Расчет полной погрешности прямого измерения на микрокалькуляторе.

Для расчета погрешностей удобно пользоваться приготовленным бланком, в котором представлены как результаты измерений, так и расчетные формулы.

Результаты измерений	Расчетные формулы
X_1	$\langle X \rangle = \frac{\sum X_i}{N} =$
X_2	$\langle X^2 \rangle = \frac{\sum X_i^2}{N} =$
X_3	$\Delta X_{cl.} = 2\sqrt{\frac{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}{N-1}} =$
...	$\Delta X_{np.} =$
X_N	$\Delta X_{okp.} =$
	$\Delta X = \sqrt{(\Delta X_{cl.})^2 + (\Delta X_{np.})^2 + (\Delta X_{okp.})^2} =$

Не смотря на то, что порядок заполнения такой таблицы почти очевиден, позволим себе некоторые комментарии:

1. Первоначально занесите все результаты измерений в левый столбец.
2. Проведите вычисление среднего значения: для этого последовательно наберите результаты измерений и заносите их в ячейку памяти с суммированием (для этого обычно используется клавиша $[M+]$), после ввода всех значений извлеките содержимое ячейки памяти (с помощью клавиши $[MR]$ и разделите его на число измерений (надеемся, что подсчет числа измерений вы сможете провести без калькулятора) и сразу запишите результат. Не забудьте очистить ячейку памяти с помощью клавиши $[MC]$. *Проверьте полученный результат - среднее значение не сильно отличается от полу суммы крайних значений.*
3. Аналогично проведите вычисления среднего квадрата: для возведения в квадрат достаточно последовательно нажать клавиши $[\times] [=]$. Запишите полученный результат. *Проверьте полученный результат - среднее значение квадрата не сильно отличается от квадрата среднего значения, но всегда больше его.*
4. Вычислите случайную ошибку, приведенная формула допускает расчет без записей промежуточных результатов. *Проверьте полученный результат - случайная погрешность составляет примерно четверть от разности между максимальным и минимальным значениями.*
5. Запишите значения приборной погрешности и погрешности округления.
6. Вычислите полную погрешность, опять же используя ячейку памяти.

Если у вас есть более «круты» калькулятор, то время расчета можно уменьшить, но только путем длительных тренировок. Если вы хотите пользоваться набором статистических функций, то внимательно разберитесь, что именно считает ваш калькулятор!

Приложение 3. Приведение зависимости к линейному виду.

№	Исходная зависимость	Неизвестные параметры	Возможные преобразования и вид полученной зависимости	Комментарии
1	$y = ax^m$	a	1.1 $\begin{cases} Y = y \\ X = x^m \end{cases} \quad Y = aX$ 1.2 $\begin{cases} Y = y^{\frac{1}{m}} \\ X = x \end{cases} \quad Y = a^{\frac{1}{m}} X$	Выбор возможного преобразования определяется удобством вычислений, например, в квадрат возвести проще, чем извлекать корень.
2	$y = ax^m + b$	a, b	2.1 $\begin{cases} Y = y \\ X = x^m \end{cases} \quad Y = aX + b$	Преобразование очевидное и единственно возможное при двух неизвестных параметрах
3	$y = af(x) + b$	a, b	3.1 $\begin{cases} Y = y \\ X = f(x) \end{cases} \quad Y = aX + b$	Преобразование является очевидным обобщением предыдущего. Здесь $f(x)$ - произвольная функция, не содержащая неизвестных параметров.
4	$y = ax^m$	a, m	4.1 $\begin{cases} Y = \ln y \\ X = \ln x \end{cases} \quad Y = mX + \ln a$	Это преобразование необходимо для экспериментального определения неизвестного показателя степени. Преобразованная зависимость является логарифмической. (Называется логарифмический масштаб, или «log-log» scale)
5	$y = ae^{bx}$	a, b	5.1 $\begin{cases} Y = \ln y \\ X = x \end{cases} \quad Y = bX + \ln a$	Это преобразование служит для определения показателя экспоненты. (Называется полулогарифмический масштаб, или «semi-log» scale)

Приводимая таблица, конечно, не исчерпывает всех видов возможных преобразований, в ней приведены наиболее часто встречающиеся зависимости.

Приложение 4. Расчет параметров линейной зависимости методом наименьших квадратов с помощью микрокалькулятора.

Предлагаемая ниже методика предназначена для расчета параметров линейной зависимости $Y = aX + b$ по набору экспериментальных данных $(X_i, Y_i) i = 1, 2, \dots, N$.

Для ускорения расчетов и в этом случае удобно воспользоваться заранее подготовленным бланком, в который занесены экспериментальные данные и расчетные формулы. Расчет сводится к последовательному вычислению ряда величин: средних $\langle X \rangle, \langle Y \rangle$; дисперсий S_x^2, S_y^2 , коэффициента R_{XY} , на основании которых рассчитываются параметры a, b и их погрешности $\Delta a, \Delta b$. Формулы для расчета приведены в самом бланке, поэтому повторять их нет смысла. Методика проведения расчетов аналогична рассмотренной в Приложении 1, отметим только, что все расчеты могут быть проведены с помощью «базарного» калькулятора без записи промежуточных результатов (достаточно одной ячейки памяти). При определенном навыке (достигаемом в ходе тренировок) время расчета по приведенным формулам для 10 экспериментальных точек составляет 4-5 минут.

Результаты измерений		Расчетные формулы	
X_1	Y_1	$\langle X \rangle = \frac{\sum X_i}{N} =$	$S_x^2 = \frac{\sum X_i^2}{N} - \langle X \rangle^2 =$
X_2	Y_2	$\langle Y \rangle = \frac{\sum Y_i}{N} =$	$S_y^2 = \frac{\sum Y_i^2}{N} - \langle Y \rangle^2 =$
X_3	Y_3	$R_{XY} = \frac{\sum X_i Y_i}{N} - \langle X \rangle \cdot \langle Y \rangle =$	
...	...	$a = \frac{R_{XY}}{S_x^2} =$	$b = \langle Y \rangle - a \langle X \rangle =$
X_N	Y_N	$\Delta a = 2 \sqrt{\frac{1}{N-2} \left(\frac{S_y^2}{S_x^2} - a^2 \right)} =$	
		$\Delta b = \Delta a \sqrt{S_x^2 + \langle X \rangle^2} =$	

Если экспериментальные точки лежат очень близко к прямой, то, возможно, что при вычислении погрешностей под корнем появится отрицательная величина. Причина такого казуса чисто расчетная (теоретически величина, стоящая под корнем неотрицательна), скорее всего, промежуточные результаты были округлены слишком грубо, необходимо использовать большее число значащих цифр.

Запомните, что относительная погрешность параметра a , как правило, меньше погрешности параметра b , поэтому предпочтительнее выбирать такую схему эксперимента, в котором более важным является использование коэффициента наклона.

Заключение.

Затронутая тема неисчерпаема и я уверен в том, что книги, посвященные экспериментальным задачам, будут появляться и в дальнейшем.

При написании этой книги не ставилась цель дать полный сборник экспериментальных задач по всем разделам курса физики. Основная цель была иной – показать прелесть экспериментальной исследовательской работы, описать основные технические приемы ее выполнения, дать общие рекомендации по поиску подходов к решению экспериментальных задач, привести примеры решения (и его поиска) задач различного уровня сложности. Главное же – доказать необходимость постоянного осмыслиения условия, теоретического описания, методики измерения, полученных результатов и их обработки. Иными словами – думать и ... сомневаться!

Основу данной книги составили задачи белорусских физических олимпиад школьников с 1991 по 2008 год. Конечно, сформулировать все эти задачи, тщательно разработать условия, провести многочисленные предварительные измерения, обработать их в одиночку не возможно. В разные годы в разработке экспериментальных заданий принимали участие мои друзья и коллеги: А.П. Нечай, Г.С. Кембровский, В.О. Богомолов, Д.В. Богомолов, А.Г. Маркович, С.М. Мацукович, А.В. Андриевский, А.А. Мищук, и особенно Н.В. Козловский, за что выражаю им искреннюю признательность и благодарность.

Возможно, что некоторым читателям стиль изложения покажется излишне легкомысленным и не официальным. Что ж, я к этому и стремился! Эта книга не является обязательной, ее можно и не читать, но все же примите мои извинения.

С уважением

А.И. Слободянюк.

Содержание.

		Стр.
	Что такое хорошая экспериментальная задача?	2
Часть 1. Методика выполнения экспериментальных заданий.		4
1.1 Ознакомление с условием задания и предлагаемым оборудованием		4
1.2 Построение математической модели изучаемого явления (теоретическое описание).		5
1.3 Разработка схемы экспериментальной установки, ее реализация, проведение предварительных измерений.		6
1.4 Проведение измерений		7
1.5 Обработка результатов измерений.		8
1.6 Сравнение экспериментальных данных с теоретическими расчетами.		9
1.7 Оформление работы.		10
1.8 Получение наград		11
Часть 2. О некоторых простых, но необходимых вещах.		12
2.1 Таблицы.		13
2.2 Графики.		15
2.3 Запись численного результата		17
2.4 Действия с приближенными числами		18
2.5 Расчет погрешностей		19
2.6 Графическая обработка результатов		23
2.7 Метод наименьших квадратов		26
Часть 3. Основные приемы выполнения экспериментальных заданий.		29
3.1 Планирование эксперимента.		30
3.2 Изучай зависимости!		34
3.3 Обработка нелинейных зависимостей.		40
3.4 Экспериментальное определение вида зависимости.		56
3.5 Как измерить сопротивление с помощью секундомера?		81
3.6 Когда нужна градуировка.		108
3.7 Немного о поправках.		125
3.8 Не все так просто!		132
3.9 Так, что же такое «хорошая экспериментальная задача»?		179
Часть 4. Далеко не полный сборник...		188
4.1 Дайте мне точку опоры, или правило рычага.		188
4.2 Изучение закона движения		191
4.3 Изучение колебаний.		206
4.4 Силы сопротивления.		213
4.5 Силы упругости		221
4.6 Если у вас нету ртути		230
4.7 Капиллярные явления		232
4.8 Электрические цепи.		235
4.9 Производство электроэнергии		242
4.10 Да будет свет		248
4.11 Если у вас нет ускорителя.		258
Решение задач Части 4		
Часть 5 А как «у них»?		354

Приложение 1. Приборные погрешности некоторых часто используемых приборов	
Приложение 2. Расчет полной погрешности прямого измерения на микрокалькуляторе	
Приложение 3. Приведение зависимости к линейному виду.	
Приложение 4. Расчет параметров линейной зависимости методом наименьших квадратов с помощью микрокалькулятора.	
Заключение.	