

## Задача 10-1. Сечение рассеяния

### Часть 0. Подготовка

0.1. Пренебрегая влиянием поля тяжести, потенциальная энергия частицы до и после соударения постоянна, ее можно считать равной нулю. Так как условие гладкости поверхности говорит о сохранении механической энергии, постоянной окажется кинетическая энергия, откуда следует сохранение модуля полной скорости частицы до и после соударения.

Гладкость поверхности говорит об отсутствии каких-либо сил трения в момент соударения. Пренебрегая силой тяжести, единственная сила, действующая на частицу, – сила реакции со стороны поверхности – направлена по нормали к ней. Используя закон сохранения импульса в проекции на поверхность, приходим к выводу, что проекция скорости частицы на эту поверхность будет сохраняться.

Изобразим векторы скоростей частицы вместе с их проекциями на рисунке 1. Так как  $AO = OC$  и  $BO = OD$ , прямоугольные треугольники  $ABO$  и  $CDO$  равны, откуда следует равенство углов при вершинах  $A$  и  $C$ , то есть равенство углов падения  $\varphi$  и отражения  $\varphi'$ .

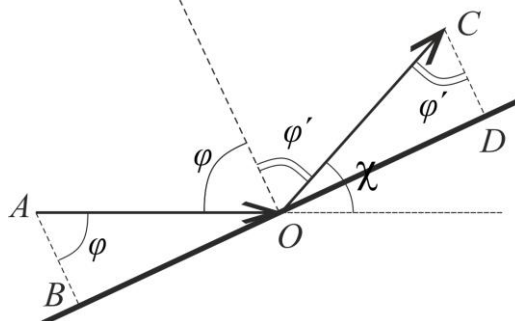


Рисунок 1

0.2. Из рисунка 1 легко получить результат  $\chi = \pi - 2\varphi$  в радианах либо  $\chi = 180^\circ - 2\varphi$  в градусах.

Важно правильно изобразить угол рассеяния  $\chi$  на рисунке с учетом того, что это угол между направлениями, но не угол между траекториями до и после соударения. Для того чтобы его безошибочно определить, можно изобразить векторы скоростей частицы до и после столкновения непосредственно в точке  $O$ . Угол  $\chi$  – это угол между указанными векторами. Наконец, подсказкой служит рисунок 1 в условии задачи.

### Часть 1. Шар закреплен

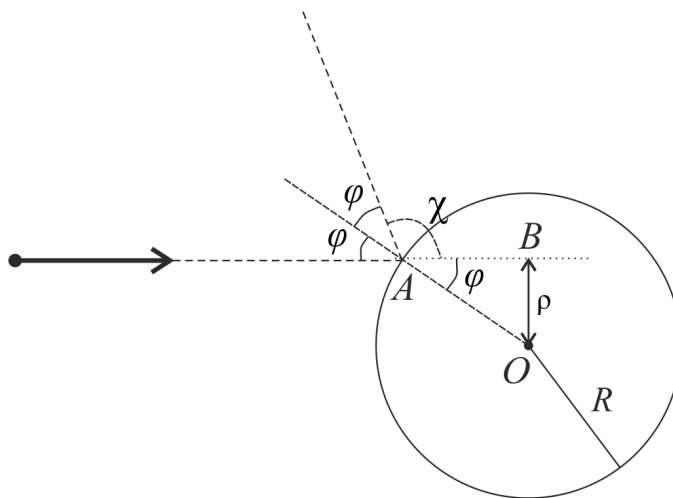


Рисунок 2

1.1. Из треугольника  $OAB$  на рисунке 2 видно, что прицельное расстояние  $\rho$  связано с углом падения  $\varphi$  следующим выражением:  $\rho = R \sin \varphi$ . Из результата пункта 0.2 получаем, что  $\varphi = (\pi - \chi)/2$ , откуда следует:

$$\rho = R \cos \chi/2$$

Можно получить и обратное выражение:

$$\chi = 2 \arccos \frac{\rho}{R}$$

Минимальное и максимальное значение прицельного расстояния  $\rho$  для того, чтобы произошло столкновение, равно 0 и  $R$ , соответственно. Полученная связь  $\chi$  и  $\rho$  является монотонной на этом интервале. Тогда, вычисляя угол рассеяния на границах интервала, делаем вывод, что он может принимать любое значение, то есть лежать в диапазоне от 0 до  $\pi$  ( $180^\circ$ ).

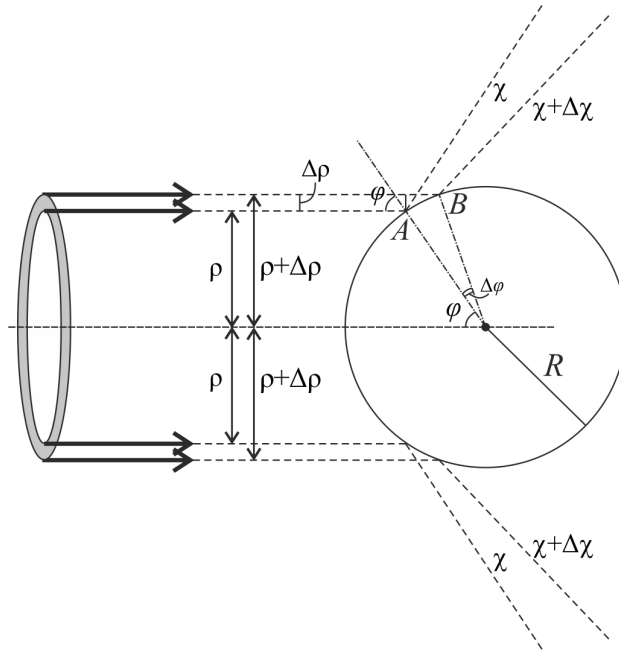


Рисунок 3

1.2. Из полученного выражения видим, что связь  $\rho$  и  $\chi$  однозначная, то есть каждому значению прицельного расстояния соответствует свое значение угла рассеяния. Тогда можно утверждать, что в малом диапазоне углов от  $\chi$  до  $\chi + \Delta\chi$  рассеются те частицы, которые попадут на шар в диапазоне прицельных расстояний от  $\rho$  до  $\rho + \Delta\rho$  (рисунок 3). Поперечное сечение потока таких частиц представляет собой тонкое кольцо радиусом  $\rho$  и толщиной  $\Delta\rho$ . Площадь такого кольца, учитывая малость  $\Delta\rho$ , равна  $\Delta S = 2\pi\rho\Delta\rho$ . Учитывая определение плотности потока частиц из условия задачи и результат пункта 1.1, получаем, что искомое число частиц, которые рассеиваются в единицу времени, равно:

$$\Delta N_\chi = 2\pi j R \cos \frac{\chi}{2} \Delta\rho$$

В данной формуле нам неизвестна величина  $\Delta\rho$ . Из рисунка 3 ее можно выразить как  $\Delta\rho = AB \cos \varphi$ . Учитывая малость  $\Delta\rho$  и, соответственно, хорды  $AB$ , последнюю можно примерно заменить дугой:  $AB = R\Delta\varphi$ . Наконец, из связи, полученной в пункте 0.2, легко получить:  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi - \chi_2}{2} - \frac{\pi - \chi_1}{2} = \frac{\chi_1 - \chi_2}{2} = -\frac{\Delta\chi}{2}$ . Знак «минус» здесь означает, что с ростом угла  $\varphi$  угол  $\chi$  уменьшается. Для наших расчетов длины отрезка  $\Delta\rho$  этот знак не нужен, поэтому мы будем брать выражение по модулю. Объединяя выражения, получаем:

$$\Delta\rho = \frac{R\Delta\chi}{2} \cos \varphi = \frac{R\Delta\chi}{2} \sin \frac{\chi}{2}$$

Откуда искомое число частиц, рассеивающихся в единицу времени, равно:

$$\Delta N_\chi = j\pi R^2 \Delta\chi \cos \frac{\chi}{2} \sin \frac{\chi}{2} = j \frac{\pi R^2}{2} \sin \chi \Delta\chi$$

1.3. Пусть на детектор малой площади  $\Delta S$ , расположенный на расстоянии  $l$  от шара, падают частицы, которые рассеиваются в диапазоне углов от  $\chi$  до  $\chi + \Delta\chi$ . На детектор попадет лишь часть таких частиц. В общем случае сечение потока всех таких частиц в некоторый момент времени будет представлять собой кольцо, вырезанное на поверхности сферы (рисунок 4), как и отмечено в условии. Найдем площадь этого кольца.

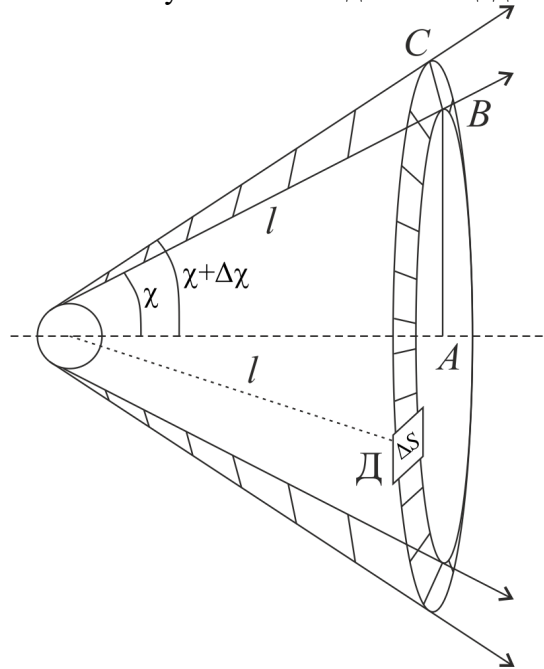


Рисунок 4

Внутренний радиус указанного кольца, как видно из рисунка 4, равен  $AB = l \sin \chi$ . Фигура вырезана на сфере и, вообще говоря, не лежит в плоскости, однако в силу малости величины  $\Delta S$ , а, следовательно, и  $\Delta\chi$  примерную площадь кольца можно легко рассчитать аналогично расчету в пункте 1.2. Учитывая, что толщина кольца равна  $BC = l \Delta\chi$ , его площадь будет определяться выражением:

$$\Delta S_\chi = 2\pi \cdot AB \cdot BC = 2\pi l^2 \sin \chi \Delta\chi$$

Полагая, что в указанном тонком кольце поток частиц можно считать примерно постоянным, количество частиц, попадающих в единицу времени на детектор, можно определить простой пропорцией:

$$\Delta N_S = \Delta N_\chi \frac{\Delta S}{\Delta S_\chi} = j \frac{R^2}{4} \frac{\Delta S}{l^2}$$

1.4. Подставив полученный результат в формулу  $\Delta\sigma = \frac{\Delta N}{j}$  и произведя замену  $\frac{\Delta S}{l^2}$  на  $\Delta\Omega$ , получаем:

$$\Delta\sigma = \frac{R^2}{4} \Delta\Omega$$

Полученный результат не зависит от угла рассеяния  $\chi$ . Это говорит о том, что в любом направлении будет рассеиваться одно и то же количество частиц. Иначе говоря, помещая детектор частиц на одном и том же расстоянии с разных сторон от шара, в единицу времени будет всегда фиксироваться одинаковое количество частиц. Такое рассеяние называют изотропным, то есть не зависящим от направления.

1.5. Формула, полученная в предыдущем пункте, определяет количество частиц, рассеивающихся на малый диапазон около некоторого выбранного угла  $\chi$ . Если мы хотим просуммировать частицы, вылетающие под всеми углами, постоянная величина  $R^2/4$  будет

выносятся за скобки как общий множитель. Сумма по всем малым телесным углам  $\Delta\Omega$  даст полный (развернутый) телесный угол, который, как сказано в условии задачи, равен  $4\pi$ . Получаем:

$$\sigma = \Delta\sigma_{\chi_1} + \Delta\sigma_{\chi_2} + \Delta\sigma_{\chi_3} + \dots = \frac{R^2}{4} 4\pi = \pi R^2$$

Данный результат легко объяснить, если от сечения рассеяния вернуться к количеству частиц, то есть умножить его на плотность потока  $j$ . По внешнему виду формулы  $j\pi R^2$ , можно сказать, что это количество частиц в падающем потоке, пролетающих через площадь поперечного сечения  $\pi R^2$ , то есть через окружность радиусом  $R$ . Но ведь именно столько частиц из падающего потока и попадают хоть в какую-нибудь точку шара (поперечное сечение шара как раз представляет собой окружность радиуса  $R$ ). Другими словами, просуммировав количество частиц, вылетающих во всех возможных направлениях, мы получили полное количество частиц, падающих на шар. Понимая, что ничего другого не должно было получиться (все падающие частицы должны отлететь от шара), мы подтвердили правильность полученных результатов.

В теории рассеяния величина  $\sigma$  называется полным сечением рассеяния и имеет смысл эффективной площади той области поперечного сечения падающего потока частиц, в которой происходит взаимодействие.

## Часть 2. Шар не закреплен

Прежде всего, отметим, что не стоит бояться большого количества шаров вместо одного. Это сделано лишь для того, чтобы по-прежнему большое количество частиц могло столкнуться с шаром (шарами). Ведь если бы шар был один, то после соударений с первой же частицей он отлетел, и, согласно условию, больше не столкнулся ни с одной частицей. С другой стороны, столкновение с любым из шаров, первоначально покоившихся, описывается формулами совершенно одинаково. Поэтому еще раз подчеркнем, не стоит опасаться большого количества шаров.

Далее отметим, что изменится в решении задачи по сравнению с первой частью. Конечно же, по-другому будет происходить столкновение частицы с шаром, ведь последний теперь не закреплен. В силу упругости поверхности механическая энергия системы по-прежнему сохраняется, однако часть кинетической энергии падающей частицы перейдет в кинетическую энергию отлетевшего шара. Следовательно, утверждение о сохранении модуля скорости частицы после столкновения уже не имеет место быть. Получаем, что теперь мы имеем дело с «неоптическим» случаем: угол падения не равен углу отражения! Поэтому в этой части задачи необходимо повторить все действия, сделанные в части 1, с самого начала для нового механизма взаимодействия.

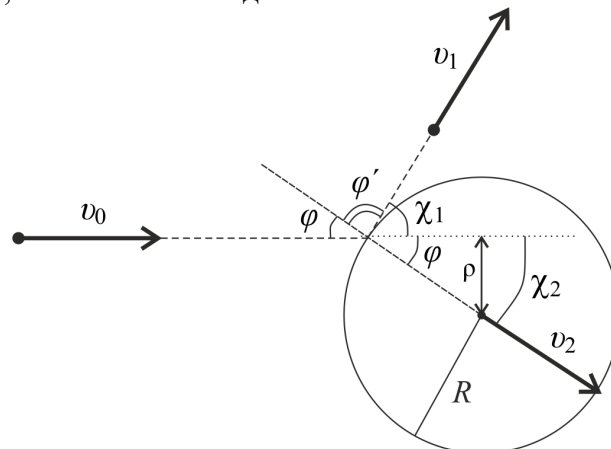


Рисунок 5

2.1 и 2.2. Поверхность шара, по-прежнему, гладкая, поэтому сила взаимодействия между шаром и частицей может быть направлена только по нормали к поверхности в точке соударения. Отсюда следует, что скорость большого шара может быть направлена только

вдоль нормали, то есть под углом падения  $\varphi$  к направлению падающей частицы (рисунок 5). Но ведь это и есть угол рассеяния  $\chi_2$  большого шара. Тогда можно проделать все операции, аналогично пунктам 1.1-1.4 для больших шаров. Первым шагом найдем связь прицельного расстояния падающей частицы  $\rho$  и углом рассеяния шара  $\chi_2$ .

$$\rho = R \sin \varphi = R \sin \chi_2$$

Прицельное расстояние может принимать значения от 0 до  $R$ . На этом интервале полученная связь является монотонной. Тогда угол рассеяния будет лежать в диапазоне от 0 до  $\pi/2$ . То есть ни один шар не отлетит под углом рассеяния, большим, чем  $\pi/2$ , что, в принципе, понятно из интуитивных соображений.

Аналогично пункту 1.2 можно найти количество шаров, отлетающих в некотором заданном диапазоне углов. Связь  $\rho$  и  $\chi_2$  здесь используется в том смысле, что на каждую падающую под прицельным расстоянием  $\rho$  частицу приходится один шар, отлетевший под углом  $\chi_2$ .

$$\Delta N_{\chi_2} = 2\pi j R \sin \chi_2 \Delta \rho = 2\pi j R \sin \chi_2 R \Delta \varphi \cos \varphi = j \pi R^2 \sin 2\chi_2 \Delta \chi_2$$

Вычисления, произведенные в пунктах 1.3 и 1.4 предыдущей части задачи, никак не связаны с характером взаимодействия – они универсальны для любой задачи рассеяния. Объединим их в одно выражение:

$$\Delta \sigma_2 = \frac{\Delta N_{2S}}{j} = \frac{\Delta N_{\chi_2}}{j} \frac{\Delta S}{2\pi l^2 \sin \chi_2 \Delta \chi_2} = \frac{\Delta N_{\chi_2} \Delta \Omega_2}{j 2\pi \sin \chi_2 \Delta \chi_2}$$

Наконец, подставляя результат первого выражения во второе, получаем ответ для пункта 2.2:

$$\Delta \sigma_2 = \begin{cases} R^2 \cos \chi_2 \Delta \Omega_2, & 0 \leq \chi_2 \leq \pi/2 \\ 0, & \chi_2 > \pi/2 \end{cases}$$

Вторая строка в этой записи несет смысл уже оговоренного факта, что ни один шар не отклонится на угол, больший, чем  $\pi/2$ .

Для того, чтобы найти угол рассеяния налетающих частиц, запишем закон сохранения энергии и закон сохранения импульса в проекциях. Ось  $x$  направим вдоль направления движения частицы до столкновения, ось  $y$  – перпендикулярно первой в плоскости рисунка.

$$\begin{cases} \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} \\ mv_0 = mv_1 \cos \chi_1 + mv_2 \cos \chi_2 \\ 0 = mv_1 \sin \chi_1 - mv_2 \sin \chi_2 \end{cases}$$

$m$  – масса частицы и шара (они равны друг другу по условию),  $v_0$  – скорость частицы до столкновения,  $v_1$  – скорость частицы после столкновения,  $v_2$  – скорость отлетающего шара. Учитывая равенство масс частицы и шара, выражение можно преобразовать к виду

$$\begin{cases} v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 \\ v_0 = v_1 \cos \chi_1 + v_2 \cos \chi_2 \\ 0 = v_1 \sin \chi_1 - v_2 \sin \chi_2 \end{cases}$$

Получить искомый угол рассеяния  $\chi_1$  из данной системы уравнений можно различными способами. Предлагаем возвести второе и третье уравнение в квадрат и сложить друг с другом:

$$\begin{cases} v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 \\ v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_1 v_2 (\cos \chi_1 \cos \chi_2 - \sin \chi_1 \sin \chi_2) \end{cases}$$

Вычитая одно из другого, получаем:

$$0 = v_1 v_2 \cos(\chi_1 + \chi_2)$$

Откуда следует, что  $\chi_1 + \chi_2 = \pi/2$ . Это известный результат для бильярдных шаров, имеющих равную массу: после столкновения они разлетаются под прямым углом друг к другу.

Понимая, что на каждый отлетевший под углом  $\chi_2$  шар приходится одна отклонившаяся на угол  $\chi_1 = \pi/2 - \chi_2$  частица, мы можем просто выразить один угол через другой в полученном выше выражении для  $\Delta N_{\chi_2}$  и получить количество рассеянных частиц  $\Delta N_{\chi_1}$ :

$$\Delta N_{\chi_1} = j\pi R^2 \sin(\pi - 2\chi_1) \Delta\chi_1 = j\pi R^2 \sin 2\chi_1 \Delta\chi_1$$

Здесь мы учли, что, в силу полученной между углами связи,  $\Delta\chi_1$  и  $\Delta\chi_2$  равны друг другу с точностью до знака. Также из связи следует, что угол рассеяния частиц  $\chi_1$  изменяется в том же диапазоне, что и  $\chi_2$ : от 0 до  $\pi/2$ . То есть ни одна частица после соударения с шаром не отлетит назад.

Как и для больших шаров, справедливо выражение:

$$\Delta\sigma_1 = \frac{\Delta N_{\chi_1} \Delta\Omega_1}{j2\pi \sin \chi_1 \Delta\chi_1}$$

Отсюда получаем дифференциальное сечение рассеяния для налетающих на шары частиц:

$$\Delta\sigma_1 = \begin{cases} R^2 \cos \chi_1 \Delta\Omega_1, & 0 \leq \chi_1 \leq \pi/2 \\ 0, & \chi_1 > \pi/2 \end{cases}$$

Мы получили интересный результат, что в результате описанных столкновений распределение отлетевших шаров и распределение частиц по углам рассеяния будет одинаковое. При этом количество частиц или шаров будет уменьшаться с увеличением угла  $\chi$ , под которым расположен детектор.