

А. И. СЛОБОДЯНЮК

**ФИЗИКА ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ**  
**Магнитостатика**  
**Электродинамика**  
**Теория колебаний**

*Пособие для учащихся учреждений  
общего среднего образования  
с русским языком обучения*

*Рекомендовано  
Научно-методическим учреждением  
«Национальный институт образования»  
Министерства образования Республики Беларусь*

Минск  
Белорусская ассоциация «Конкурс»  
2017

УДК 537.8(075.3)

ББК 22.334я721

C48

**Рецензенты:**

кафедра методики преподавания физики учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка» (доктор технических наук, заведующий кафедрой *И. М. Елисеева*);

учитель физики высшей категории учреждения образования «Могилевский государственный областной лицей № 1» *В. В. Барашков*

Книга издана за счет взносов участников конкурса

**Распространяется бесплатно**

**Слободянюк, А. И.**

C48      Физика для любознательных : Магнитостатика. Электродинамика. Теория колебаний : пособие для учащихся учреждений общего среднего образования с русским языком обучения / А. И. Слободянюк. – Минск : Белорус. ассоц. «Конкурс», 2017. – 592 с. : ил.

ISBN 978-985-557-145-3.

Книга посвящена подробному изложению магнитостатики, электродинамики и теории колебаний. Материал изложен на повышенном уровне, хотя и доступен пониманию учащихся, интересующихся физикой.

Книга может помочь при подготовке к физическим олимпиадам – от школьных до международных.

Данное пособие предназначено для учащихся учреждений общего среднего образования, а также может быть полезно учителям и родителям.

УДК 537.8(075.3)

ББК 22.334я721

**SBN 978-985-557-145-3**

© Слободянюк А. И., 2017

© Оформление. ОО «БА «Конкурс», 2017

# ГЛАВА 1. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

## § 1. Постоянное магнитное поле

### 1.1. Магнитные взаимодействия

От имени горы Магнезия, которая находится на территории современной Турции, происходят термины *магнит*, *магнитный*, *магнетизм* и т.д. Способность природного материала магнетита притягивать небольшие кусочки железа со времен Древней Греции считалась «таинственной». Кусочки железа, находящиеся рядом с природным магнитом, также приобретают слабые магнитные свойства, то есть способны намагничиваться. Изобретенный в Древнем Китае компас, намагниченная стрелка которого всегда указывала на север, позволил совершать дальние путешествия и во многом способствовал Великим географическим открытиям, которые послужили могучим толчком к развитию современной цивилизации. Магнитная стрелка компаса до настоящего времени служит инструментом и символом изучения магнитных явлений.

Первое действительно научное описание свойств магнитов и магнитных взаимодействий принадлежит придворному врачу английской королевы Елизаветы Д. Гильберту, который в 1600 году опубликовал книгу «О магнитах и большом магните Земля». В этой книге впервые последовательно были описаны и разделены электрические и магнитные явления, появились такие сохранив-

шиеся до настоящего времени термины, как «северный и южный полюса». На основании наблюдений и экспериментов Д. Гильберт доказал, что намагниченные тела могут как притягиваться, так и отталкиваться. Причем эти явления оказались, в некотором смысле, аналогичны электрическим: разноименные полюса магнита притягиваются, одноименные – отталкиваются\*.

Казалось, что изучение и описание магнитных взаимодействий пойдет по уже проторенной дороге – по аналогии с описанием гравитационных и электрических явлений.

Были предприняты многочисленные попытки найти магнитные заряды (которые, естественно, первоначально описывались в виде гипотетических магнитных жидкостей) и установить закон их взаимодействия, аналогичный закону всемирного тяготения И. Ньютона и закону электростатических взаимодействий О. Кулона. Однако до настоящего времени эти попытки не увенчались успехом. В отличие от положительных и отрицательных электрических зарядов, которые достаточно легко разделить, магнитные полюса неразделимы. Если намагниченный стержень распилить на две части, то вместо «изолированных» полюсов получится два магнита, каждый из которых имеет два собственных полюса (рис. 1).

---

\* Исторически сложилось, что северным полюсом магнитной стрелки называется тот, который указывает на географический Северный полюс Земли, следовательно, там, на севере, расположен магнитный южный полюс.

Более того, целый ряд элементарных частиц (электроны, протоны, нейтроны) участвует в магнитных взаимодействиях, но и в этом случае магнитные «поля» частиц неразделимы, то есть каждая такая частица представляет собой небольшой магнит с двумя полюсами – магнитный диполь\*.

Таким образом, **отсутствие в природе магнитных зарядов является в настоящее время экспериментально установленным фактом**. Отсутствие точечных источников магнитных взаимодействий не дает возможности построить теорию этих взаимодействий так, как это было сделано для гравитационных и электрических явлений.

Конечно, в принципе, можно построить теорию магнитных взаимодействий, определив некоторую физическую величину, характеризующую магнитные свойства тела (некий магнитный момент – по аналогии с электрическим дипольным



Рис. 1

---

\* В первой половине XX века английский физик П. Дирак предложил мысленный эксперимент: обычный магнит с двумя полюсами (магнитный диполь) сделать очень длинным, т.е. разнести полюса на очень большое расстояние. Тогда его полюса можно считать практически изолированными, то есть таким способом получить две слабо связанные частицы, каждая из которых несет отдельный магнитный полюс. Такая гипотетическая частица, несущая один полюс, получила название «монополь Дирака», однако, несмотря на многочисленные попытки, экспериментально, даже на самых современных ускорителях, обнаружить такую частицу не удалось.

моментом); ввести единицу ее измерения; экспериментально установить законы взаимодействия точечных диполей; установить принцип суперпозиции и так далее.

Однако природа оказалась проще и изящнее: магнитные взаимодействия все-таки тесно связаны с электрическими явлениями. Забегая вперед, укажем, что связь между электрическими и магнитными явлениями настолько тесная, что их нельзя разделять – следует всегда говорить о единых электромагнитных явлениях.

Первым шагом на пути установления этих связей явилось открытие датского физика Эрстеда, сделанное в 1777 году. Эрстед заметил, что при пропускании электрического тока по проволоке расположенная рядом магнитная стрелка, изначально ориентированная на север, поворачивается и занимает определенное положение, зависящее от ориентации проводника с током. По одной из легенд, это важнейшее открытие было сделано случайно. Во время одной из своих лекций по электричеству один из студентов Эрстеда обратил внимание, что при замыкании цепи магнитная стрелка вздрагивает. Несущественно, кто первый заметил реакцию стрелки, – главное, связь между электрическими и магнитными явлениями была обнаружена. Самым существенным в этом открытии было то, что магнит реагировал не просто на электрический заряд, а на движущийся электрический заряд, на электрический ток!

Опыт Эрстеда легко воспроизвести в школьной лаборатории (рис. 2). Для этого достаточно взять вертикальный проводник, вокруг него расположить на подставках

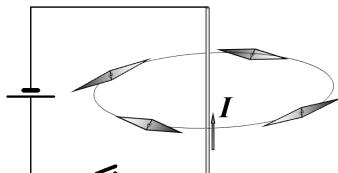


Рис. 2

несколько магнитных стрелок и пропустить по проводнику электрический ток. При отсутствии тока магнитные стрелки, как и положено, ориентируются в направлении «север-юг», при замыкании цепи и увеличении силы тока стрелки начинают ориентироваться по кругу, стремясь занять положение, перпендикулярное проводнику с током и отрезку, соединяющему стрелку с проводником. Такой полной ориентации, естественно, мешает влияние магнитных полюсов Земли\*.

Сообщение об открытии Эрстеда быстро распространилось по Европе и произвело на физиков того времени сильнейшее впечатление: действительно, между магнитными и электрическими явлениями, которые со времен Гильберта считались принципиально различными, была установлена такая простая связь.

Известие об этом открытии стало звездным часом для французского физика А. М. Ампера, который в течение двух месяцев фактически создал новую науку о магнитных взаимодействиях –

---

\* Заметим, что в настоящее время такие эксперименты используются для измерения характеристик магнитного поля Земли.

электродинамику (кстати, этот термин, как и многие другие, придумал А. М. Ампер). Гениальная догадка Ампера заключалась в том, что магнитные взаимодействия суть взаимодействия электрических токов.

Эту гипотезу А. М. Ампер сумел подтвердить многочисленными экспериментами.

Прежде всего, он экспериментально доказал, что два параллельных проводника, по которым протекают электрические токи, взаимодействуют между собой, причем если токи текут в одном направлении, то проводники притягиваются друг к другу, а если токи текут в противоположных направлениях, то проводники отталкиваются (рис. 3).

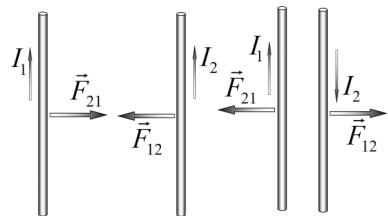


Рис. 3

Амперу удалось даже установить закон взаимодействия таких проводников, с которым мы познакомимся немного позднее.

Далее А. М. Ампер показал, что свободно подвешенная катушка с током (и даже один ее виток) ведет себя так же, как магнитная стрелка. При пропускании через катушку электрического тока ее ось ориентируется в направлении «север-юг» (рис. 4), а при изменении направления тока на противоположное катушка поворачивается вокруг вертикальной оси на  $180^\circ$ .

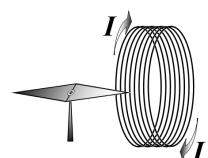


Рис. 4

Кроме того, взаимодействие двух витков с током полностью аналогично взаимодействию двух магнитных стрелок.

Таким образом, А.М. Ампер экспериментально доказал, что магнитные взаимодействия обусловлены взаимодействием электрических токов. Наконец А. М. Ампер выдвинул гипотезу о, так называемых атомных токах, которая получила свое подтверждение только после того, как было выяснено строение атомов. Согласно этой гипотезе, магнитные свойства каждого атома аналогичны свойствам небольшого витка с током. Действительно, электрон, врачающийся вокруг ядра, создает круговой ток, который и приводит к магнитным взаимодействиям. Поэтому намагничение образца объясняется ориентацией его атомов в одном направлении, благодаря чему магнитные эффекты могут быть заметны для всего тела целиком.

Мы не будем рассматривать подробно теорию А. М. Ампера, так как она представляет интерес для истории физики. А. М. Ампер так же, как и его великие соотечественники (О. Кулон, А. Пуассон, Био, Савар, П. С. Лаплас), являлся сторонником теории дальнодействия, которая допускала возможность действия одного тела на другое на расстоянии, без непосредственного контакта. Впрочем, мы об этом говорили достаточно при обсуждении понятия электрического поля. Поэтому сейчас можно просто сослаться на эти рассуждения и высказать точку зрения английских физиков М. Фарадея и Д. К. Максвелла, которая подтверж-

дена всем последующим развитием физики: переносчиком электрических и магнитных взаимодействий является электромагнитное поле. При изучении электростатики мы выяснили, что неподвижные электрические заряды создают электростатическое поле, которое действует на другие заряды. Основа современной теории магнитных взаимодействий заключается в следующем утверждении: **движущиеся электрические заряды создают магнитное поле, которое способно воздействовать на другие движущиеся электрические заряды.**

Эта точка зрения содержит, на первый взгляд, существенное внутренне противоречие. Как известно, всякое механическое движение относительно, то есть можно говорить только о движении одного тела относительно другого, или характер движения зависит от выбранной системы отсчета. Поэтому утверждение о том, что только движущийся заряд создает магнитное поле, справедливо только тогда, когда указана система отсчета, относительно которой данный заряд движется, следовательно, и наличие магнитного поля также зависит от выбора системы отсчета?! Допустим, что электрически заряженное тело находится в быстро летящем самолете. Создает ли оно магнитное поле? Ответ зависит от выбора системы отсчета: если в качестве таковой мы выберем Землю (относительно которой самолет и помещенное в него тело движутся), то следует утверждать, что движущийся заряд создает магнитное поле; если же рассматривать заряд

в системе отсчета, связанной с самолетом, то этот заряд неподвижен и, следовательно, никакого магнитного поля не создает. Так что же это за вид объективной реальности, само существование которого зависит от системы отсчета? Реально ли существует это самое магнитное поле, или это просто плод воображения ученых физиков? Ответы на эти вопросы давно даны: реально существует **единое электромагнитное поле**. При движении заряженных частиц между ними действуют как электрические, так и магнитные силы, поэтому имеет смысл говорить о единых электромагнитных взаимодействиях. Разделение этого единого поля на электрическое и магнитное возможно только в некоторых простейших ситуациях. Если в некоторой системе отсчета все заряды покоятся, то электромагнитное поле можно описывать как электростатическое. Описание этой же совокупности зарядов в другой (движущейся) системе отсчета требует рассмотрения и магнитных взаимодействий. Подчеркнем, что электрическое поле движущего заряда отличается от поля неподвижного заряда: действительно, и характеристики уже знакомого нам электрического поля зависят от выбора системы отсчета!

И в этом утверждении нет никакого противоречия здравому смыслу, если признать, что основным критерием истинности физической теории является эксперимент. Иными словами, нет таких приборов (как естественных, так и изобретенных человеком), которые бы изучали характеристики поля непосредственно, напрямую. Электромагнитное

поле всегда обнаруживается по его воздействию на заряженные частицы, а силы, действующие на заряженные частицы, зависят только от относительных скоростей движущихся заряженных частиц.

Продолжим рассмотрение электрического заряда, размещенного в движущемся самолете. Если прибор, регистрирующий магнитное поле\*, неподвижен относительно заряда, то он не зарегистрирует наличие магнитного поля. Если же он движется относительно заряда (или заряд движется относительно прибора), то магнитное поле будет обнаружено.

Рассмотрим еще один простейший пример: пусть в некоторой системе отсчета покоятся две заряженные частицы. Сила взаимодействия между частицами является электростатической и полностью описывается законом О. Кулона. В другой «движущейся» системе отсчета частицы будут находиться в движении, поэтому частицы будут создавать магнитное поле, благодаря которому появится их магнитное взаимодействие. Однако при этом изменится сила электрического взаимодействия так, что суммарная сила взаимодействия (электрического и магнитного) останется неизменной, поэтому уравнения механики, описывающие движения частиц, также останутся неизменными, инвариантными.

---

\* В настоящее время существуют простые приборы (например, датчики Холла), позволяющие измерять характеристики магнитного поля, но и в этих приборах поле обнаруживается по силам, действующим на заряженные частицы в веществе (в частности, на электроны).

Все физические величины, поддающиеся измерению (например, силы, действующие на частицы; энергия, импульс, переносимые полем), остаются неизменными при их описании в любой инерциальной системе отсчета. Иными словами, уравнения Дж. Максвелла, описывающие электромагнитное поле, инвариантны относительно выбора системы отсчета.

Ранее мы изучали, как изменяются координаты точек при переходе из одной системы отсчета в другую (так называемые преобразования Галилея) и показали, что уравнения динамики Ньютона инвариантны относительно этих преобразований. Однако оказалось, что уравнения Максвелла таким свойством не обладают. В начале XX века была создана теория относительности, в рамках которой были установлены иные, более точные, законы изменения координат при изменении системы отсчета (преобразования Лоренца). Оказалось, что уравнения Максвелла инвариантны относительно преобразований Лоренца – то есть теория электромагнитного поля Максвелла удовлетворяет теории относительности, несмотря на то что первая была разработана на полстолетия раньше. Более того, тщательное исследование свойств уравнений Максвелла во многом способствовало созданию теории относительности. Но эти проблемы более подробно мы будем рассматривать позднее.

Отметим, что взаимодействия между заряженными частицами, движущимися с малыми скоростями, с высокой степенью точности можно описы-

вать как электростатические, потому что магнитная составляющая сил взаимодействия существенна только при скоростях частиц, близких к скорости света. Во взаимодействии проводников, которые остаются электрически нейтральными, но по которым протекают электрические токи, электрическое взаимодействие отсутствует, поэтому магнитные силы проявляются «в чистом виде», что и позволяет их достаточно легко изучать и описывать.

Таким образом, наша задача заключается в изучении и описании магнитного поля, создаваемого постоянными токами (и постоянными магнитами, свойства которых, согласно гипотезе А. Ампера, также обусловлены постоянными токами), а также воздействия магнитного поля на движущиеся заряженные частицы, то есть на проводники, по которым протекают электрические токи\*.

Основные вехи построения теории магнитного поля аналогичны теории электрического поля:

- необходимо ввести физическую величину, характеризующую магнитное поле (таковой является вектор индукции магнитного поля);
- далее установить закон, позволяющий рассчитывать эту характеристику (в данном случае таковым является закон Био-Савара-Лапласа);

---

\* Подобно тому, как ранее мы договорились для краткости называть электрически заряженное тело просто «электрическим зарядом», далее вместо правильной, но длинной фразы «проводник, по которому протекает электрический ток», будем говорить просто «электрический ток» – например, «действие магнитного поля на электрический ток».

– наконец, получить основные теоремы, описывающие векторное магнитное поле (как и для любого векторного поля, таковыми являются теоремы о потоке и циркуляции вектора магнитной индукции).



Рис. 5

### Придворный лекарь английской королевы

**ГИЛЬБЕРТ Уильям** (Gilbert, Gylberde) [24 мая 1544, Колчестер – 10 декабря (30 ноября) 1603, Лондон], английский врач и естествоиспытатель, основоположник учения об электричестве и магнетизме (рис. 5).

Уильям Гильберт родился в семье главного судьи и члена городского совета города Колчестера в графстве Эссекс. В этом городе он окончил классическую школу и в мае 1558 поступил в колледж

святого Иоанна в Кембридже. Позже его обучение продолжалось в Оксфорде. В 1560 он получил степень бакалавра, а через 4 года стал «мастером искусств». К тому времени уже определился его выбор: он серьезно занялся изучением медицины, в 1569 получил степень доктора медицины, был избран старшим членом ученого общества колледжа святого Иоанна в Кембридже.

В 1560-е годы Гильберт как на континенте, так и в Англии «с большим успехом и одобрением практиковал в качестве врача». В 1573 он был избран членом Королевского колледжа врачей, где ему впоследствии было доверено много важных постов – инспектора, казначея, советника и (с 1600) – президента колледжа. Успехи Гильберта как врачевателя были так значительны, что королева Елизавета Тюдор сделала его своим лейб-медиком. Королева живо интересовалась и его научными занятиями и даже посетила

его лабораторию, где Гильберт продемонстрировал ей некоторые опыты.

Уильям Гильберт не только пользовался славой глубоко знающего свое дело врача, но был едва ли не самым выдающимся естествоиспытателем своего времени. Ученый затратил 18 лет жизни и почти все свое состояние на опыты по исследованию загадочных явлений магнетизма и сделал при этом немало открытий, прославивших его имя.

Результаты проведенных им многочисленных опытов с намагниченными телами он изложил в труде, напечатанном в лондонской типографии в 1600 г. В шести книгах своего сочинения он подробно рассказал о взаимодействии магнитных камней друг с другом и с железными предметами, об ориентации по меридиану намагниченных стальных пластинок и иголок, о поведении магнитов при их нагревании и о других проявлениях магнитных сил. Эти исследования столь обширны и многообразны, что у физиков были все основания назвать Гильbertа «отцом науки о магнитах».

Значительны в сочинении Гильберта сведения о земном магнетизме. Он описывает опыты по изучению магнитных сил вокруг железного шара, который намагнистили с помощью самого большого магнитного камня в Англии (Гильберт купил его за баснословную сумму). Определив на поверхности шара направление магнитных сил, он убедился, что в двух его точках эта сила направлена по радиусу шара, а по линии его поверхности, одинаково удаленной от указанных двух точек, магнитная сила направлена по касательной к шаровой поверхности.

Магнитами, хотя бы из-за прикладных целей мореплавления, уже немного интересовались и до Гильберта, но в исследовании электричества он, безусловно и безоговорочно, был первым. И здесь ему принадлежат важные достижения. Даже первый прибор – прообраз электроскопа (он назвал его «версором») – был придуман им. Гильберт установил, что электризация (тоже его термин) происходит при натирании не только янтаря, но также и многих тел другого состава, в том числе и стекла. Электризация трением до середины

XVIII века оставалась основным, если не единственным инструментом исследования электрических явлений. Гильберту удалось экспериментально обнаружить такие тонкие эффекты, как влияние пламени на заряженные тела.

Галилео Галилей, прочитав его книгу, счел необходимым привести из нее сведения о магнитах в своем знаменитом сочинении «Диалог о двух главнейших системах мира». Великий итальянский физик был восхищен произведением своего коллеги: «Воздаю хвалу, дивлюсь, завидую Гильберту. Он развил достойные удивления идеи о предмете, о котором трактовало столько гениальных людей, но который ни одним из них не был изучен внимательно».

Говоря о большом вкладе Уильяма Гильberta в развитие науки о магнетизме, нельзя не отметить встречающиеся в его книге мистические рассуждения и наивные выводы. Несостоительны, например, попытки Гильберта объяснить природу магнетизма. Они носят схоластический характер и сводятся в основном к тому, что у магнитов есть «душа». Конечно, «заблуждения» Гильберта могут найти свое объяснение в том, что он творил во времена мрачного средневековья, когда в европейских городах еще сжигали сотни «ведьм» и «колдунов». Джордано布鲁но был сожжен на костре инквизиции за то, что отстаивал систему мироздания Коперника.

Нужно отметить еще одну очень важную, имевшую большое значение для развития естествознания, заслугу Гильберта перед наукой: он до Френсиса Бэкона – философа, провозгласившего опыт первым критерием истины, – писал о значении опытных исследований, а главное – с помощью экспериментов проверял выдвигаемые им теоретические соображения. По словам английского поэта Джона Дрейдена, «Гильберт будет жить, пока магнит будет притягивать».

## Случайное открытие?

**Ханс Христиан Эрстед** (датск. Hans Christian Årsted) (рис. 6) родился в 1777 г. в семье бедного аптекаря, проживавшего в маленьком датском городке Рюдкобинг на острове



Рис. 6

Лангенланд. В семье катастрофически не хватало денег, так что братьям Хансу и Андерсу пришлось получать начальное образование где придется: парикмахер учил их немецкому языку, его жена – датскому, пастор познакомил с литературой и историей, грамматическими правилами, землемер научил арифметике, а заезжий студент рассказал удивительные истории о свойствах минералов...

В двенадцать лет Ханс был уже вынужден стоять за стойкой в отцовской аптеке.

Обладая немалыми знаниями, он, тем не менее, не знал, за что взяться серьезно. Теперь уже медицина пленила его, отодвинув химию, историю, литературу. Он поступает в Копенгагенский университет, где занимается практически всем. Золотая медаль университета 1797 года была присуждена ему за эссе «Границы поэзии и прозы». Высоко оценена была также его работа в области химии, она была посвящена свойствам щелочей. Диссертация же, за которую он получил звание доктора философии, была на медицинскую тему. Он разбррасывался и, казалось, заранее ставил крест на своей научной карьере, предпочитая разносторонность профессионализму.

Девятнадцатый век заявил о себе новым образом жизни и мыслей, новыми социальными и политическими идеями, новой философией, новым восприятием искусства и литературы.

Блестяще защитив диссертацию, он едет по направлению университета на стажировку во Францию, Германию, Голландию. Там Эрстед слушал лекции о возможностях исследований физических явлений с помощью поэзии, о связи физики с мифологией. Ему нравились лекции блиставших с трибун философов, но он никогда не смог бы согласиться с ними в отказе от экспериментального исследования физических явлений.

Его увлекли философские воззрения Гегеля, а потом и Шеллинга, идея которого о всеобщей связи и взаимообусловленности явлений объясняла и оправдывала кажущуюся разбросанность Эрстеда. Вот что он писал: «Моё твёрдое убеждение, что великое фундаментальное единство пронизывает природу. После того как мы убедились в этом, вдвойне необходимо обратить наше внимание на мир разнообразия, где эта истина найдёт своё единственное подтверждение. Если мы не сделаем этого, единство само по себе становится бесплодным и пустым рассуждением, ведущим к неправильным взглядам».

Затем Париж, где он слушает лекции учёных первой величины – физика Шарля, химика Бертолле, естествоиспытателя Кювье. Большое впечатление на молодого учёного производят студенческие лаборатории Парижской политехнической школы, ведь тогда в Дании таких не было.

В 1804 г. Эрстед возвращается в Данию. Но с работой в университете у него не всё ладилось. Он не мог рассчитывать на государственную оплачиваемую должность. Однако после того как Эрстеду было поручено ведать коллекцией физических и химических приборов, принадлежащих королю, он решается читать частные лекции по физике и химии. Именно этими лекциями Эрстед доказал администрации университета своё право на оплачиваемую штатную должность. В 1806 г. он становится профессором физики, в функции которого входила обязанность экзаменовать кандидатов по философии, а также преподавать физику и химию студентам-медикам и фармацевтам. «Отныне, – писал уже штатный профессор, – я получил привилегию основать физическую школу в Дании, для которой я надеюсь найти среди молодых студентов много талантливых людей». После этого назначения физика была признана полноправной дисциплиной в Копенгагенском университете. И через сто лет один из воспитанников этого университета – Нильс Бор – станет одним из создателей современной квантовой физики.

В 1812 Эрстед снова выезжает за границу\* – в Берлин и Париж. И там он пишет работу «Исследование идентичности электрических и химических сил». Эта работа свидетельствует о том, что автор продолжает руководствоваться своей философской концепцией.

История открытия, совершенного зимой 1819–1820 учебного года (в одних источниках – 15 февраля, в других – ещё в декабре), включает в себя два варианта событий.

Эрстед на лекции в университете демонстрировал нагрев проволоки электричеством от вольтова столба, для чего составил электрическую, или, как тогда говорили, гальваническую цепь. На демонстрационном столе находился морской компас, поверх стеклянной крышки которого проходил один из проводов. Вдруг кто-то из студентов (здесь показания свидетелей расходятся – говорят, это был аспирант, а то и вовсе университетский швейцар) случайно заметил, что, когда Эрстед замкнул цепь, магнитная стрелка компаса отклонилась в сторону. Однако существует мнение, что Эрстед заметил отклонение стрелки сам. В пользу стороннего наблюдателя говорит то, что, во-первых, сам Эрстед был занят манипуляциями скручивания проводов, к тому же, вряд ли бы он, много раз проводивший такой опыт, стал живо интересоваться его ходом.

Однако предыдущие исследования Эрстеда и его увлечённость концепцией Шеллинга говорят об обратном. В некоторых источниках даже указывается, что Эрстед якобы всюду носил с собой магнит, чтобы непрерывно думать о связи магнетизма и электричества. Возможно, это вымысел, призванный упрочить позицию Эрстеда как первооткрывателя. В самом деле, если он был так озабочен проблемой, почему не попытался раньше целенаправленно поставить опыт с электрической цепью и компасом? Ведь компас – одно из наиболее очевидных практических использований магнита. Тем не менее нельзя отрицать, что над проблемой связи

\* Обратите внимание на год: наполеоновская армия воюет в России!

электричества и магнетизма он задумывался, как, впрочем, и над проблемами связи других явлений, между которыми никакой связи не было.

Для начала Эрстед повторил условия своего лекционного опыта, а затем стал их менять. И обнаружил следующее: «Если расстояние от проволоки до стрелки не превосходит  $\frac{3}{4}$  дюйма, отклонение составляет  $45^\circ$ . Если расстояние увеличивать, то угол пропорционально уменьшается. Абсолютная величина отклонения изменяется в зависимости от мощности аппарата\*».

Экспериментатор решает проверить действие проводников из различных металлов на стрелку. Для этого берутся проволоки из платины, золота, серебра, латуни, свинца, железа. И, о чудо! Металлы, которые никогда не обнаруживали магнитных свойств, приобретали их, когда через них протекал электрический ток.

Эрстед стал экранировать стрелку от провода стеклом, деревом, смолой, гончарной глиной, камнями. Экранирование не состоялось. Стрелка упорно отклонялась. Отклонялась даже тогда, когда её поместили в сосуд с водой. Последовал вывод: «Такая передача действия сквозь различные вещества не наблюдалась у обычного электричества».

Случайно ли то, что именно Ханс Эрстед сделал открытие? Ведь счастливое сочетание нужных приборов, их взаимного расположения и «режимов работы» могло получиться в любой лаборатории? Да, это так. Но в данном случае случайность закономерна: Эрстед был в числе тогда еще немногих исследователей, изучающих связи между явлениями.

Однако стоит вернуться к сути открытия Эрстеда. Нужно сказать, что отклонение стрелки компаса в лекционном опыте было весьма небольшим. В июле 1820 года Эрстед снова повторил эксперимент, используя более мощные батареи

---

\* Используя данное сообщение, А. М. Ампер вскоре предложит на его принципе магнитоэлектрический гальванометр, роль которого в развитии электрической науки трудно переоценить.

источников тока. Теперь эффект стал значительно сильнее, причем тем сильнее, чем толще была проволока, которой он замыкал контакты батареи. Кроме того, он выяснил одну странную вещь, не укладывающуюся в ньютоновские представления о действии и противодействии. Сила, действующая между магнитом и проволокой, была направлена не по прямой, их соединяющей, а перпендикулярно к ней. Выражаясь словами Эрстеда, «магнитный эффект электрического тока имеет круговое движение вокруг него». Магнитная стрелка никогда не указывала на проволоку, но всегда была направлена по касательной к окружностям, эту проволоку опоясывающим. Как будто бы вокруг проволоки вихрились невидимые струи магнитных сил, влекущих легкую стрелку компаса. Вот чем поражен ученый. Вот почему в своем четырехстраничном «памфлете» он, опасаясь недоверия и насмешек, тщательно перечисляет свидетелей, не забывая упомянуть ни об одной из их научных заслуг.

Эрстед, дав, в общем, неправильное теоретическое толкование эксперименту, заронил глубокую мысль о вихревом характере электромагнитных явлений. Он писал: «Кроме того, из сделанных наблюдений можно заключить, что этот конфликт образует вихрь вокруг проволоки». Другими словами, магнитные силовые линии окружают проводник с током, или электрический ток является вихрем магнитного поля. Таково содержание первого основного закона электродинамики, и в этом суть открытия ученого. Опыт Эрстеда доказывал не только связь между электричеством и магнетизмом. То, что открылось ему, было новой тайной, не укладывающейся в рамки известных законов.

После своего открытия Эрстед стал всемирно признанным учёным. Он был избран членом многих наиболее авторитетных научных обществ: Лондонского Королевского общества и Парижской Академии. Англичане присудили ему медаль за научные достижения, а из Франции он получил премию в 3000 золотых франков, когда-то назначенную Наполеоном для авторов самых крупных открытий в области электричества. Он продолжил заниматься наукой – в 1822

независимо от Ж. Фурье открыл термоэлектрический эффект и создал первый термоэлемент. Изучал сжимаемость и упругость жидкостей и газов, изобрёл пьезометр (прибор для измерения изменения объёма веществ под воздействием гидростатического давления), пытался обнаружить электрические эффекты под действием звука. Занимался также молекулярной физикой.

Эрстед обладал не только научным, но и педагогическим талантом, вёл просветительскую деятельность: в 1824 создал Общество по распространению естествознания, в 1829 стал директором организованной по его инициативе Политехнической школы в Копенгагене.

Умер Эрстед в Копенгагене 9 марта 1851. Хоронили его ночью. Толпа из двухсот тысяч человек, освещая путь факелами, провожала его в последний путь. Звучали траурные мелодии, специально сочиненные в его память. Ученые, правительственные чиновники, члены королевской семьи, дипломаты, студенты, простые датчане ощущали его смерть как личную потерю. За многое они были благодарны ему. И не в последнюю очередь за то, что он подарил миру новые тайны.



**Андре Мари Ампер** (Andre Marie Ampere) родился 22 января 1775 в Лионе (рис. 7).

Предки Андре Мари Ампера были ремесленниками, жившими в окрестностях Лиона. Их профессиональный и культурный уровень быстро возрастал от поколения к поколению, и прадед ученого, Жан Жозеф, не только был опытным каменотесом, но и выполнял сложные строительные и реставрационные работы, а его сын Франсуа уже стал типичным просвещенным городским буржуа, представителем довольно зажиточного третьего сословия, и женился на дворянке.

Рис. 7

Отец Андре Мари, Жан Жак Ампер, получил хорошее образование, владел древними языками, составил себе прекрасную библиотеку, живо интересовался идеями просветителей. Его политическим идеалом была конституционная монархия.

Революция застала Жан Жака Ампера на купленной недалеко до этого должности королевского прокурора и королевского советника в Лионе. Падение Бастилии семья Амперов встретила с энтузиазмом. Но вскоре на нее обрушилась беда. Жан Жак придерживался умеренных взглядов и поплатился за это. В Лионе начал свирепствовать одержимый мистическими идеями лютый якобинец, который клеветал на них в чем неповинных людей и именем революции вместе со своими подручными обрушивал на них кары. Лионцы восстали против зверств якобинцев, восстание было подавлено, и жирондист Жан Жак Ампер (хотя его действия, фактически, были как раз продиктованы намерением спасти вожаков-якобинцев от ярости толпы) был гильотинирован 24 ноября 1793 г. Это было страшное потрясение для Андре Мари и всей его семьи.

Можно сказать, что спасли Андре Мари, вернули его к жизни книги. Читать он начал примерно с четырех лет, в 14 лет залпом прочитал все 20 томов «Энциклопедии» Дени Дидро и Жана Лерона Д'Аламбера. Чтобы читать труды Бернулли и Эйлера, в несколько недель изучил латинский язык. Чтение вообще было не только главным, но и единственным источником его знаний.

Других учителей у Ампера не было, он никогда не ходил в школу, не сдал за всю свою жизнь ни одного экзамена. Но он постоянно и много знаний черпал из книг. И Ампер не просто читал, он изучал, творчески усваивая прочитанное. Не случайно уже в 12–14 лет он начал представлять математические мемуары в Лионскую академию, писал научные труды по ботанике, изобретал новые конструкции воздушных змеев, трудился над созданием нового международного языка и даже совмещал всё это с сочинением эпической поэмы.

Перенесенные душевные травмы почти на два года вы-  
били Андре Мари из колеи. Только к 20 годам он вновь об-  
ретает тягу к книгам и знаниям. Но Ампер по-прежнему, на  
взгляд многих окружающих, ведет себя странно. Часто бро-  
дит в одиночестве, неуклюжий и неряшливо одетый, порой  
громко и размеренно скандируя латинские стихи или раз-  
говаривая сам с собой.

Наверное, одним из главных импульсов, вернувших  
Ампера к активной жизни, стала его встреча с золотоволо-  
сой Катрин Каррон. Ампер влюбился сразу и навсегда, но  
согласия на свадьбу удалось добиться только через три года.  
В августе 1800 г. родился сын Амперов, которого в честь  
деда назвали Жан Жаком.

Еще до женитьбы Андре Ампер начал преподавать, да-  
вая частные уроки по математике. Теперь же ему удалось  
выхлопотать место учителя в Центральной школе г. Бурга.  
Жалование было очень небольшим, ему приходилось ис-  
кать дополнительный заработок, давая еще уроки в частном  
пансионе.

Несмотря на большую педагогическую нагрузку, Ам-  
пер не оставляет научную работу. Именно в это время во  
вступительной лекции в Центральной школе в 1802, а еще  
раньше – на заседании Лионской академии, в присутствии  
Вольта, он впервые высказывает мысль, что магнитные и  
электрические явления могут быть объяснены, исходя из  
единых принципов.

Не ослабевают и его усилия в области математики.  
Здесь на первый план выходят исследования по теории веро-  
ятностей. Они были замечены в Академии наук, где, в част-  
ности, на них обратил внимание Пьер Симон Лаплас. Это  
явилось основанием для признания Ампера подходящим  
на должность преподавателя в открывавшемся тогда Лион-  
ском лицее. Его кандидатура была выдвинута Д'Аламбером.  
В апреле 1803 декретом Консульства Ампер был назначен  
на желанное для него место преподавателя лицея. Однако  
Ампер оставался в Лионе меньше двух лет. Уже в середине

октября 1804 он был зачислен на должность репетитора Политехнической школы в Париже и переехал туда.

Переезд в Париж произошел вскоре после того, как Ампер овдовел. Потеря обожаемой жены повергла его в отчаяние и религиозное смятение. Может быть, еще и поэтому Ампер, несмотря на мольбы его матери, поспешил оставить Lyon, чтобы начать в Париже преподавание в организованной десять лет назад Политехнической школе. Начав работать репетитором, Ампер уже в 1807 приступил к самостоятельным занятиям, а вскоре он стал профессором математического анализа. Вскоре в Политехнической школе появился 24-летний Араго, с которым Ампер проводил впоследствии важные совместные исследования. Отношение к Амперу коллег, среди которых было немало действительно крупных ученых, было вполне благожелательным, его работа шла успешно, но душевная рана, нанесенная потерей жены, была мучительной. Движимые лучшими чувствами, друзья Ампера познакомили его с семейством, в котором была дочь «на выданье», 26-летняя Жанна Франсуаза. Жертвой торгашеской алчности и грубого эгоизма этой женщины и всего ее семейства вскоре и стал доверчивый, простодушный и беззащитный в своей наивности Ампер, которого через некоторое время попросту выгнали из дома, и ему пришлось обрести временный кров в Министерстве внутренних дел.

Число профессиональных обязанностей Ампера тем временем возрастало. Он назначается на должность профессора математического анализа и экзаменатора по механике в первом отделении Политехнической школы, работает (до 1810) в Консультативном бюро искусств и ремесел и с осени 1808 – в должности главного инспектора университета. Эта последняя работа, взявшись за которую Ампера вынудили стесненные материальные обстоятельства, требовала постоянных разъездов, отнимала особенно много времени и сил. Он отдал этой изнурительной работе 28 лет, и последняя командировка закончилась на дороге в Марсель в 1836 г. его кончиной.

Загруженность работой и житейские невзгоды не могли не отразиться на научной продуктивности Ампера. Это особенно заметно на его исследованиях в области математики, хотя за ним сохранялось почетное право посещать заседания Академии наук и представлять мемуары.

Периодом резкого взлета научной активности, временем его главных достижений оказались годы после его избрания в 1814 в Академию наук. Ампер был избран в число членов Парижской Академии наук по секции геометрии 28 ноября 1814. Круг его научных и педагогических интересов к тому времени уже вполне определился, и ничто, казалось бы, не предвещало здесь заметных изменений. Но пора этих изменений уже приближалась, близилось второе десятилетие девятнадцатого века – время самых главных научных свершений Ампера.

21 июля 1820 года вышел в свет мемуар Ханса Эрстеда. Дальнейшие события развивались в весьма непривычном для неторопливой тогда науки темпе. Уже через несколько дней мемуар появился в Женеве, где в то время был с визитом Араго. Первое же знакомство с опытом Эрстеда доказало ему, что найдена разгадка задачи, над которой бился и он, и многие другие. Впечатление от опытов было столь велико, что один из присутствующих при демонстрации поднялся и с волнением произнес ставшую впоследствии знаменитой фразу: «Господа, происходит переворот!» Араго возвращается в Париж потрясенный. На первом же заседании Академии, на котором он присутствовал сразу по возвращении, 4 сентября 1820 года, он делает устное сообщение об опытах Ханса Эрстеда. Записи, сделанные в академическом журнале ленивой рукой протоколиста, свидетельствуют, что академики просили Араго уже на следующем заседании, 22 сентября, показать всем присутствующим опыт Эрстеда, что называется, «в натуральную величину».

Сообщение Араго с особым вниманием слушал академик Ампер. Он, может быть, почувствовал в тот момент, что пришла его пора перед лицом всего мира принять из рук Эр-

стеда эстафету открытия. Он долго ждал этого часа – около двадцати лет, как Араго и как Эрстед. И вот час пробил – 4 сентября 1820 года Ампер понял, что должен действовать. Вопреки своему обыкновению, он не только выступил здесь как теоретик, но занялся в маленькой комнатке своей скромной квартиры проведением опытов, для чего даже собственноручно изготовил столик; эта реликвия сохраниается поныне в Коллеж де Франс. Он отложил все остальные дела и 18 и 25 сентября 1820 сделал свои первые сообщения об электромагнетизме. Фактически за эти две недели Ампер пришел к своим самым главным научным результатам. Он высказал гениальную идею и сумел подтвердить ее экспериментально: все магнитные явления можно свести к электрическим. Многим тогда казалось, что между электричеством и магнетизмом – полный параллелизм: что есть электрические, а есть и магнитные заряды, и у мира электрических явлений есть во всем подобный ему мир явлений магнитных. Открытие Эрстеда многими толковалось тогда так, что под действием тока провод, по которому этот ток протекает, намагничивается, а потому и действует на магнитную стрелку. Ампер выдвинул принципиально новую, радикальную и даже, на первый взгляд, дерзкую идею: никаких магнитных зарядов в природе вообще не существует, есть только электрические заряды, и магнетизм возникает только из-за движения электрических зарядов, т. е. из-за электрических токов.

Прошло без малого двести лет с того момента, когда Ампер выступил с этой гипотезой, и, казалось бы, пора разобраться, был ли он прав (и тогда название «гипотеза» делается неуместным) или же от нее нужно отказаться. Первое впечатление: гипотезе Ампера противоречит даже сам факт существования постоянных магнитов, ведь никаких токов, ответственных за возникновение магнетизма, здесь вроде бы нет! Ампер возражает: магнетизм порождается огромным числом крошечных электрических атомных контуров тока (можно только поражаться, что такая глубочайшая

идея могла появиться в ту пору, когда не только еще не знали ничего об устройстве атомов, но даже еще не существовало и слово «электрон»!) Каждый такой контур выступает как «магнитный листок» – элементарный магнитный двухполюсник. Этим и объясняется, почему магнитные заряды одного знака – «магнитные монополи», – в отличие от монополей электрических, в природе не встречаются.

Почему же все-таки и поныне «гипотеза»? Ведь уже не раз казалось, что найдены «магниты», в которых электрических зарядов нет. Вот, к примеру, нейтрон. У этой частицы нулевой электрический заряд, но есть магнитный момент. Опять «момент», т. е. опять магнитный двухполюсник, и его появление вновь объясняется в нынешней теории элементарных частиц «микроскопическими» токами, только теперь уже не внутри атома, а внутри нейтрона. Так можно ли уверенно утверждать, что магнетизм всегда порождается движением электрических зарядов? Гипотеза Ампера в такой заостренной формулировке принимается не всеми теоретиками. Более того, некоторые варианты теории говорят о том, что магнитные монополи («однополюсники») должны проявляться, но только при огромных, недостижимых для нас сегодня энергиях.

Гипотеза Ампера явилась важным принципиальным шагом к утверждению идеи о единстве природы. Но она поставила перед исследователями ряд новых вопросов. В первую очередь, потребовалось дать полную и замкнутую теорию взаимодействия токов. Эту задачу с подлинным блеском, действуя, как теоретик и как экспериментатор, решил сам Ампер. Чтобы найти, как взаимодействуют токи в различных контурах, ему пришлось сформулировать законы магнитного взаимодействия отдельных элементов тока («закон Ампера») и воздействия токов на магниты («правило Ампера»). По существу, была создана новая наука об электричестве и магнетизме, и даже термин «электродинамика» был введен Андре Мари Ампером. Все основные идеи этой науки, по выражению Джеймса Максвелла, по сути

дела, «вышли из головы этого Ньютона электричества» за две недели.

Новые идеи Ампера были поняты далеко не всеми учеными. Не согласились с ними и некоторые из его именитых коллег. Современники рассказывали, что после первого доклада Ампера о взаимодействии проводников с током произошел следующий любопытный эпизод. «Что же, собственно, нового в том, что вы нам сообщили? – спросил Ампер один из его противников. – Само собою ясно, что если два тока оказывают действие на магнитную стрелку, то они оказывают действие и друг на друга». Ампер не сразу нашелся, что ответить на это возражение. Но тут на помощь ему пришел Араго. Он вынул из кармана два ключа и сказал: «Вот каждый из них тоже оказывает действие на стрелку, однако же они никак не действуют друг на друга, и потому ваше заключение ошибочно. Ампер открыл, по существу, новое явление, куда большего значения, чем открытие уважаемого мной профессора Эрстеда».

Слава Ампера быстро росла, особенно лестно ученые отзывались о его экспериментальных работах по электромагнетизму. Его посещали знаменитые физики, он получил ряд приглашений из других стран выступить с докладами о своих работах. Но здоровье его было подорвано, неустойчивым было и материальное положение. Его тяготила работа в Политехнической школе и инспекторские обязанности. Он по-прежнему мечтал читать курс физики, а не математики, и читать нетрадиционно, включив в курс новый раздел – электродинамику, творцом которой он сам являлся. Наиболее подходящим местом для этого было одно из старейших учебных заведений Франции – Коллеж де Франс. После многих неприятностей и интриг в 1824 году Ампер был избран на должность профессора Коллеж де Франс. Ему предоставили кафедру общей и экспериментальной физики.

Последние годы жизни Ампера были омрачены многими семейными и служебными неприятностями, тяжело от-

ражавшимися на его и без того слабом здоровье. Внешние признаки успеха не принесли материального благополучия. Он по-прежнему был вынужден уделять много времени чтению лекций в ущерб своим научным занятиям.

Ампер был большим мастером изобретать новые научные термины. Именно он ввел в обиход ученых такие слова, как «электростатика», «электродинамика», «соленоид». Ампер высказал мысль о том, что в будущем, вероятно, возникнет новая наука об общих закономерностях процессов управления. Он предложил именовать ее «кибернетикой». Предвидение Ампера оправдалось.

Ампер умер от воспаления легких 10 июля 1836 года в Марселе во время инспекционной поездки. Там же он и был похоронен.

## **1.2. Индукция магнитного поля**

Прежде чем дать строгое определение характеристик магнитного поля, нам необходимо сделать небольшое физико-математическое отступление, чтобы познакомиться с еще одной операцией над векторами – векторным произведением.

### **1.2.1. Вектор угловой скорости – векторное произведение**

Рассмотрим еще раз вращательное движение твердого тела. Чтобы однозначно задать кинематические характеристики такого движения, необходимо указать ось вращения и величину угловой скорости (рис. 8). Фактически, как и в случае поступательного движения, необходимо указать величину и направление, что удобно сделать в еди-

ной векторной форме. Определим<sup>\*</sup> угловую скорость как вектор, величина которого численно равна угловой скорости, направленный вдоль оси вращения, причем, если смотреть с конца этого вектора, то вращение направлено против часовой стрелки. Исторически сложилось<sup>\*\*</sup>, что положительным направлением вращения считается вращение «против часовой стрелки», хотя, конечно, выбор этого направления абсолютно условен.

Для определения направления вектора угловой скорости можно также воспользоваться «правилом буравчика» (которое также называется «правилом правого винта»): если направление движения ручки буравчика (или штопора) совместить с направлением вращения, то направление движения всего буравчика совпадет с направлением вектора угловой скорости.

Посмотрим, как можно теперь найти линейную скорость произвольной точки  $A$  вращающего-



Рис. 8

\* Именно дадим определение, потому что все физические величины «придуманы» человеком, реально же существует движущееся тело, а как мы его описываем – дело нашего воображения. Раньше мы обходились без векторного описания, да и векторное исчисление придумано значительно позже, чем была создана механика. Даже Дж. К. Максвелл «не знал» векторов!

\*\* Может, в те времена часы ходили в другую сторону?

ся тела, находящейся на расстоянии  $r'$  от оси вращения. Тогда модуль скорости точки  $A$  будет равен  $V_A = \omega r'$ . Направлен этот вектор перпендикулярно плоскости, проходящей через ось вращения и рассматриваемую точку.

Введем теперь систему координат, начало которой, точка  $O$ , находится на оси вращения (рис. 9). Тогда положение произвольной точки  $A$  задается радиус-вектором  $\vec{r}$ , соединяющим начало отсчета с выбранной точкой. Модуль скорости этой точки можно рассчитать по формуле

$$V = \omega r' = \omega r \sin \alpha, \quad (1)$$

где  $r' = r \sin \alpha$  – расстояние до оси вращения,  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{\omega}$  и  $\vec{r}$ . Направлен вектор скорости  $\vec{V}$  перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы  $\vec{\omega}$  и  $\vec{r}$ . Так давайте определим новую математическую операцию над векторами  $\vec{\omega}$  и  $\vec{r}$ , такую, чтобы ее результатом был вектор  $\vec{V}$ .

Естественно, что такая операция была придумана до нас, и называется она векторным произведением

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2)$$

**Определение.** Векторным произведением двух векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$  называется вектор  $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ , модуль которого равен

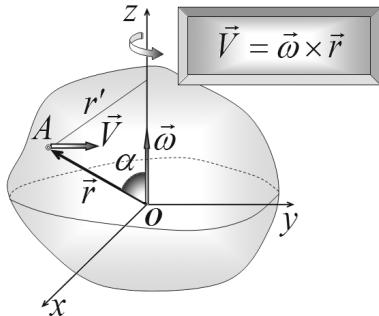


Рис. 9

$$|\vec{C}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \alpha, \quad (3)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами-сомножителями  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ , отсчитываемый от первого сомножителя ко второму; направлен вектор произведения перпендикулярно каждому из векторов-сомножителей в такую сторону, чтобы кратчайший поворот от первого сомножителя  $\vec{A}$  ко второму  $\vec{B}$  проходил против вращения часовой стрелки, если смотреть с конца вектора  $\vec{C}$ .

Отметим, что модуль векторного произведения численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах-сомножителях.

Для того чтобы найти результат векторного произведения  $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$  произвольных векторов  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ , по определению, необходимо проделать следующее (рис. 10):

1) построить плоскость, проходящую через векторы-сомножители  $\vec{A}$  и  $\vec{B}$ ;

2) восстановить перпендикуляр к этой плоскости (вектор произведения направлен вдоль этого перпендикуляра);

3) выбрать такое направление вектора  $\vec{C}$ , чтобы ближайший поворот от первого сомножителя  $\vec{A}$  ко второму  $\vec{B}$  проходил против часовой стрелки;

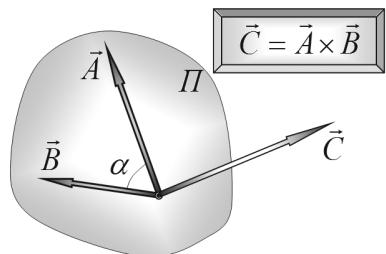


Рис. 10

4) рассчитать длину (модуль) вектора произведения по формуле (3).

Направление вектора произведения также можно определять по правилу правого винта: если вращать ручку буравчика от первого сомножителя ко второму, то направление его движения укажет направление вектора произведения.

**Задание для самостоятельной работы**

*Проверьте, пользуясь определением векторного произведения, справедливость формулы (2), связывающей линейную и угловую скорости точки.*

Укажем также некоторые свойства векторного произведения, которые легко доказать, исходя из определения.

1. При изменении порядка сомножителей направление произведения изменяется на противоположное  $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ .

Обратите на это свойство особое внимание: наверное, вы впервые встречаетесь с ситуацией, когда «от перемены мест сомножителей произведение... меняется!», поэтому при выполнении операций, включающих векторное произведение, необходимо тщательно следить за порядком следования сомножителей. Можно также сказать, что для векторного произведения не выполняется **коммутативный закон**.

2. Для векторного произведения справедлив **ассоциативный закон**

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}. \quad (4)$$

## 1.2.2. Вектор момента силы – векторное произведение

Рассмотрим теперь понятие вектора момента силы. Ранее мы определили момент силы как произведение модуля силы на ее плечо. Покажем, что момент силы может быть описан как вектор и представлен в виде векторного произведения. Пусть произвольное твердое тело может вращаться вокруг фиксированной оси, с которой совместим ось  $Oz$  декартовой системы координат (рис. 11). Пусть сила  $\vec{F}$  приложена к точке  $A$ , расположенной в плоскости  $xOy$ , на расстоянии  $r'$  от оси вращения (положение этой точки задается радиус-вектором  $\vec{r}'$ ) и направлена перпендикулярно плоскости  $xOy$  (следовательно, и перпендикулярно оси вращения). Действие этой силы приведет к вращению тела вокруг оси, которое может быть описано вектором угловой скорости  $\omega$ , направленным вдоль этой же оси. Разумно определить вектор момента силы так, чтобы он был направлен тоже вдоль оси вращения\*. В нашем случае модуль вектора момента

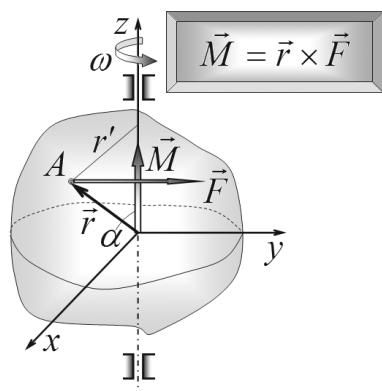


Рис. 11

\* Данное высказывание не совсем точно: более строго следует говорить, что вектор момента силы указывает направление изменения вектора угловой скорости, то есть совпадает

силы равен произведению  $M = r'F = rF \sin\alpha$ , можно заметить: «правильное» направление этого вектора будет задано, если определить его как векторное произведение

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (5)$$

Эта формула дает самое строгое определение вектора момента силы.

В общем случае, когда вектор приложенной силы  $\vec{F}$  не направлен перпендикулярно оси вращения, его можно разложить на три составляющие (рис. 12):

- радиальную  $\vec{F}_r$ , направленную вдоль прямой, соединяющей точку приложения силы с осью вращения;

- тангенциальную  $\vec{F}_\tau$ , направленную параллельно оси вращения;

- нормальную  $\vec{F}_n$ , направленную перпендикулярно плоскости, в которой лежит ось вращения и точка приложения силы.

Первые две составляющие не смогут раскрутить тело, так как они будут скомпенсированы силами реакции в опорах фиксированной оси, и только нормальная составляющая силы будет

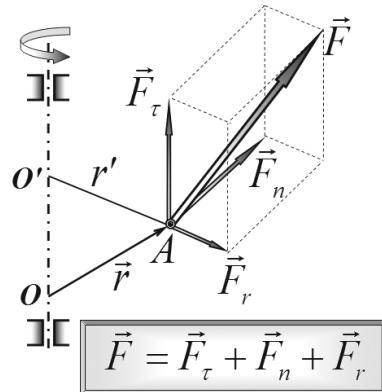


Рис. 12

---

с направлением вектора углового ускорения. Однако в рассматриваемом здесь случае все три вектора момента силы, угловой скорости и углового ускорения направлены вдоль одной оси – фиксированной оси вращения.

определять характеристики вращения (прежде всего – угловое ускорение). Именно поэтому эта составляющая входит в определение момента силы вдоль оси вращения.

Отметим, что если на тело действует несколько сил, приложенных в разных точках, то вращающее действие этих сил определяется суммой моментов всех действующих сил.

В общем случае момент силы рассчитывается относительно какой-либо точки и равен векторному произведению радиус-вектора точки приложения на вектор силы. Следовательно, вектор момента силы направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат радиус-вектор точки приложения и вектор силы (рис. 13).

Наконец, докажем, в простейшем частном случае, важное свойство суммы моментов сил. Пусть на стержень действует несколько сил, причем их векторная сумма равна нулю (рис. 14):

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = \vec{0}.$$

(6)

Суммарный момент сил, действующих на стержень относительно какой либо точки  $O$ , равен

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \dots \quad (7)$$

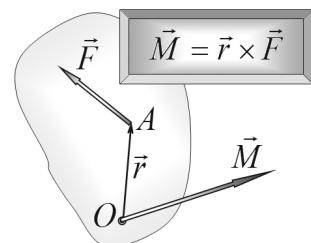


Рис. 13

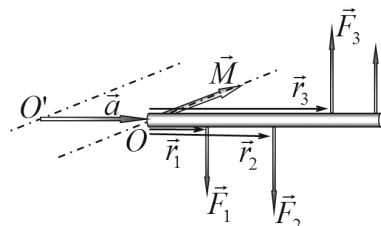


Рис. 14

Вычислим суммарный момент этих же сил относительно другой точки  $O'$  (можно говорить и «относительно другой оси»). Относительно этой оси радиус-векторы точек приложения сил будут отличаться на постоянный вектор сдвига между осями  $\vec{a}$ :  $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{a}$ . Поэтому момент сил относительно «новой» оси описывается выражением

$$\vec{M}' = (\vec{r}_1 + \vec{a}) \times \vec{F}_1 + (\vec{r}_2 + \vec{a}) \times \vec{F}_2 + (\vec{r}_3 + \vec{a}) \times \vec{F}_3 + \dots = \\ = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 + \dots + \vec{a} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots).$$

Так как сумма сил равна, то обращается в нуль и второе слагаемое, следовательно, в этом случае  $\vec{M}' = \vec{M}$ . Иными словами, если векторная сумма сил равна нулю, то суммарный момент этих сил не зависит от точки, относительно которой рассчитываются моменты этих сил.

Простейшим, но часто встречающимся примером такого воздействия на тело является **пара сил**: когда на тело действуют две силы, равные по величине, противоположные по направлению, но приложенные к разным точкам тела. Момент пары сил равен произведению модуля одной из сил на расстояние между прямыми, вдоль которых действуют силы\*. Вектор момента пары сил перпендикулярен плоскости, в которой

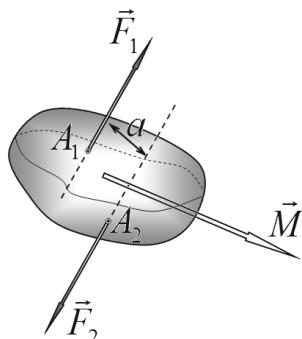


Рис. 15

---

\* Не путайте: именно расстояние между линиями действия сил, а не расстояние между точками приложения этих сил!

лежат векторы действующих сил (рис. 15), а его модуль равен:

$$M = aF. \quad (8)$$

### 1.2.3. Вектор индукции магнитного поля

Вспомним: электрическое поле действует с некоторой силой  $\vec{F}$  на неподвижный электрический заряд, величина этой силы пропорциональна величине заряда  $q$ , поэтому отношение силы, действующей на электрический заряд, к его величине, не зависит от свойств заряда, следовательно, является характеристикой электрического поля – его напряженностью  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ . В этом случае пробный заряд фактически выступает в роли прибора для обнаружения поля и измерения его характеристик.

Магнитное поле действует на движущиеся заряды, следовательно, и характеристика этого поля должна быть связана с этой силой. Но движущийся заряд описывается не только величиной заряда, но и вектором скорости, следовательно, и сила, действующая на этот заряд, также зависит от вектора его скорости. Поэтому движущийся пробный заряд, как прибор для обнаружения магнитного поля, не обладает сферической симметрией (как неподвижный точечный заряд), следовательно, характеристика магнитного поля не может быть определена так же просто, как напряженность электрического поля\*.

---

\* Хотя бы потому, что операция деления вектора на вектор не определена.

Практически более удобно в качестве «пробного» прибора для изучения магнитного поля использовать малый проводящий контур с электрическим током\*, поведение которого в магнитном поле аналогично поведению намагниченной стрелки.

Для создания постоянного тока в замкнутом контуре необходим источник ЭДС, тем не менее, можно реально создать малый контур с постоянным током. Для этого достаточно подвесить проводящую рамку на двух тонких проводах, подключенных к источнику (рис. 16). Так как в подводящих проводах токи текут в противоположных направлениях, то суммарный ток равен нулю.

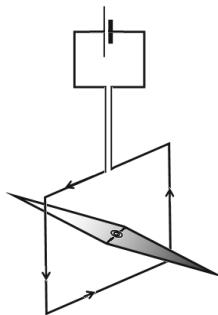


Рис. 16

Как было установлено Эрстедом и подтверждено А. Ампером, в магнитном поле контур с током стремится получить определенную ориентацию в пространстве, стремится повернуться, следовательно, со стороны магнитного поля на контур (как и на стрелку) действует врачающий момент сил. **Момент сил (а не сила, как в случае электрического поля), действующих на контур, служит для определения характеристики магнитного поля.**

Опыт показывает, что момент сил, действующих на контур, зависит от его ориентации в пространстве, следовательно, физическая величина,

\* Может быть, магнитная стрелка в качестве пробного прибора и более наглядна, но физические характеристики контура с током легче задать и определить.

описывающая магнитное поле, должна быть векторной. В общем случае этот вектор может изменяться от точки к точке, поэтому магнитное поле должно описываться математически как уже знакомое нам векторное поле.

Так как мы хотим определить «точечную» характеристику магнитного поля, то такой контур (или магнитную стрелку) следует считать бесконечно малым.\*

Чтобы избавиться от неоднозначности измеряемого момента сил, связанной с ориентацией контура, выберем такое положение контура, при котором модуль момента сил **максимален**  $M_{\max}$ . Наконец, учтем еще один экспериментальный факт: **момент сил, действующих на контур, пропорционален силе тока в контуре  $I$  и площади контура  $S$ .**

Следовательно, отношение момента сил к произведению силы тока в контуре на его площадь является величиной, не зависящей от свойств контура, поэтому является характеристикой поля, которая называется индукцией магнитного поля

$$B = \frac{M_{\max}}{IS}. \quad (8)$$

Теперь необходимо определиться с направлением вектора индукции магнитного поля. Наиболее

---

\* В очередной раз мы должны сделать традиционную оговорку: бесконечно малый контур физически нереализуем, так как даже провода имеют конечную толщину, поэтому переход к бесконечно малому контуру следует понимать в физическом смысле – мал настолько, что с математической точки зрения можно считать бесконечно малым, но реально реализуемым.

наглядно направление этого вектора в данной точке указывает северный полюс магнитной стрелки в состоянии устойчивого равновесия. Свяжем теперь это направление с ориентацией контура с током, который мы выбрали в качестве индикатора поля. Для этого введем еще одну характеристику контура – его магнитный момент\*.

**Магнитным моментом контура (рис. 17) называется вектор, направленный перпендикулярно плоскости контура, модуль которого равен произведению силы тока в контуре на его площадь  $p_m = IS$ .** Направление этого вектора определяется по правилу правого винта: если направление тока совпадает с направлением вращения винта, то направление движения последнего совпадает с направлением вектора магнитного момента. Если смотреть с конца вектора момента, то направление обхода контура по направлению тока положительное, то есть против часовой стрелки.

Таким образом, направление вектора индукции магнитного поля совпадает с направлением вектора магнитного момента контура, помещенного в данную точку поля и находящегося в положении устойчивого равновесия.

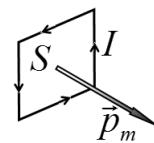


Рис. 17

---

\* В некотором смысле она аналогична дипольному моменту в электростатике. Магнитная стрелка компаса, некоторые атомы и молекулы, такие элементарные частицы, как электрон, протон, нейтрон, обладают собственными магнитными моментами, хотя об их площади или силе тока говорить не приходится.

Еще раз рассмотрим ориентации векторов, которые задействованы в определении вектора индукции магнитного поля. Пусть в некоторой области пространства магнитное поле можно считать однородным (то есть вектор индукции во всех точках постоянен, как по величине, так и по направлению). Будем также считать, что ось вращения контура перпендикулярна направлению вектора индукции магнитного поля (рис. 18 – показан вид сверху на рамку с током в магнитном поле). Вектор момента сил  $\vec{M}$  перпендикулярен вектору магнитной индукции  $\vec{B}$  и вектору магнитного момента контура  $\vec{p}_m$ . На контур будет действовать со стороны магнитного поля максимальный момент сил в том случае, когда эти векторы перпендикулярны (то есть вектор индукции поля лежит в плоскости контура), а в положении равновесия вектор индукции перпендикулярен плоскости контура.

Наконец, запишем общее выражение для момента силы, действующей на контур с током со стороны магнитного поля, воспользовавшись операцией векторного произведения:

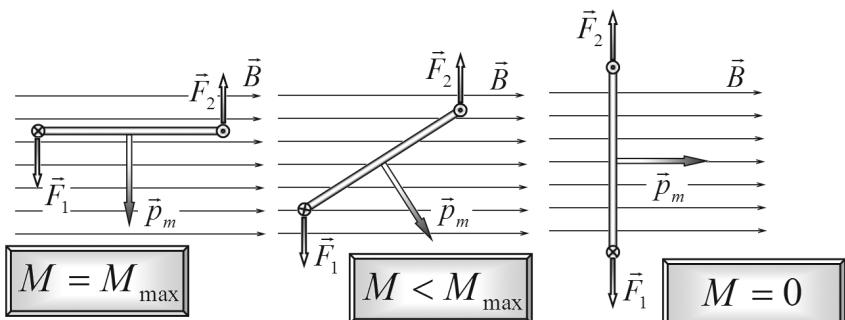


Рис. 18

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}. \quad (9)$$

Простота этой формулы оправдывает все наши долгие рассуждения по определению характеристики магнитного поля. Фактически, эта формула может рассматриваться как определение вектора индукции магнитного поля.

Сравните с выражением для силы, действующей со стороны электрического поля на точечный заряд,  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Похоже:  $q$  – характеристика индикатора электрического поля,  $\vec{p}_m$  – характеристика индикатора магнитного поля;  $\vec{E}$  – основная характеристика электрического поля,  $\vec{B}$  – основная характеристика магнитного поля;  $\vec{F}$  – результат воздействия электрического поля на точечный заряд,  $\vec{M}$  – результат воздействия магнитного поля на контур.

Индукция магнитного поля является размерной физической величиной. В системе СИ единицей измерения индукции является тесла (*сокращенно Тл*), названная в честь американского (югославского происхождения) физика и инженера Николы Тесла. Эта единица является производной, она может быть выражена через другие единицы с помощью формулы (8):

$$[B] = T \cdot l = \frac{[M]}{[I] \cdot [S]} = \frac{H \cdot m}{A \cdot m^2} = \frac{H}{A \cdot m} = \frac{\kappa g}{A \cdot c^2}. \quad (10)$$

### 1.3. Силовые линии магнитного поля

Как уже было отмечено выше, математически магнитное поле описывается с помощью такой ма-

тематической конструкции, как векторное поле: каждой точке в пространстве ставится в соответствие вектор (в данном случае – магнитной индукции):  $\vec{B}(\vec{r}) = \vec{B}(x, y, z)$ . Или, что равносильно, для полного описания магнитного поля необходимо задать три функции (компоненты вектора индукции  $B_x, B_y, B_z$ ), каждая из которых зависит от трех аргументов (координат точки  $x, y, z$ ).

Для наглядного представления этого поля (как и любого векторного поля) удобно использовать силовые линии (рис. 19).

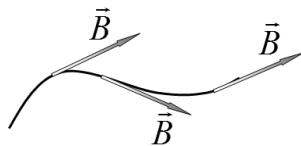


Рис. 19

**Силовыми линиями магнитного поля называются линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора магнитной индукции.**

С свойствами силовых линий, присущих магнитному полю, мы познакомимся позднее, сейчас только напомним свойства таких линий, общие для любых векторных полей:

1. Силовые линии магнитного поля не пересекаются.

2. Силовые линии магнитного поля не имеют изломов.

*Докажите эти свойства самостоятельно.*

По определению, направление вектора магнитной индукции совпадает с направлением магнитной стрелки, поэтому силовые линии можно «увидеть». Для этого надо взять много стрелок и

расположить их в исследуемой области. Их ориентация покажет структуру магнитного поля в данной области. В качестве таких стрелочек можно использовать железные опилки, которые выстраиваются вдоль силовых линий. Таким способом можно получить картины силовых линий магнитного поля, создаваемого различными источниками. Эти «картинки» часто (не слишком удачно) называют магнитными спектрами, некоторые из них показаны на рис. 20.

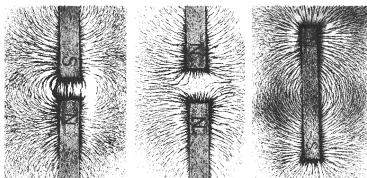


Рис. 20

## 1.4. Сила Ампера

Основное свойство магнитного поля (воздействие на движущиеся электрически заряженные частицы) использовано нами для определения векторной характеристики поля – вектора магнитной индукции. В основу определения этой физической величины мы положили механический момент, действующий на малый контур с током. Но поле действует с некоторой силой на каждую движущуюся заряженную частицу, на каждый участок проводника с током. Сейчас мы получим выражение для силы, действующей на небольшой участок проводника с током, которая называется силой А. М. Ампера.

Выделим на участке цепи, по которой протекает электрический ток силой  $I$ , малый прямом-

линейный участок длиной  $\Delta l$ . Далее нам будет удобно характеризовать этот участок **вектором элемента тока**  $I\vec{\Delta l}$ , направленным вдоль выделенного участка цепи.

Ранее мы подчеркивали, что создать такой единственный элемент тока невозможно, так постоянный ток может существовать только в замкнутой цепи. Поэтому проверить правильность выражения для силы, действующей на элемент тока, можно только по тем следствиям, которые следуют из формулы для силы. Фактически, мы так и поступим: запишем формулу для силы, а затем на ее основании получим выражения для момента силы, действующей на контур с током.

Опыты А. М. Ампера и его последователей свидетельствуют, что сила, действующая на проводник с током, во-первых, пропорциональна силе тока и длине проводника (что очевидно), во-вторых, перпендикулярна проводнику\*. Разумно предположить, что эта сила пропорциональна индукции магнитного поля. Наконец, опыт показывает, что на ток, текущий параллельно силовым линиям магнитного поля, никакая сила не действу-

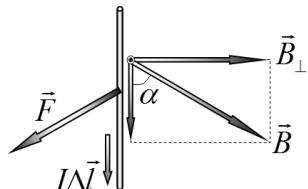


Рис. 21

---

\* Этот факт был воспринят его открывателями как чрезвычайно странный и удивительный. К началу XIX века физики привыкли к центральным силам, направленным вдоль линии, соединяющей малые тела, подобно гравитационным и электростатическим силам.

ет. Следовательно, величина силы должна быть пропорциональна компоненте поля, перпендикулярной направлению тока (рис. 21). Таким образом, мы приходим к формуле для вычисления модуля силы Ампера

$$F_A = I\Delta l B_{\perp} = I\Delta l B \sin\alpha, \quad (1)$$

где  $B_{\perp} = B \sin\alpha$  – компонента вектора индукции поля, перпендикулярная направлению тока,  $\alpha$  – угол между вектором индукции и направлением тока.

Обратим внимание, что вектор силы Ампера перпендикулярен векторам индукции поля и элемента тока, поэтому в векторной форме выражение для рассматриваемой силы можно представить в виде векторного произведения

$$\vec{F}_A = I\Delta \vec{l} \times \vec{B}. \quad (2)$$

Для правильного определения направления силы Ампера полезно запомнить, что векторы  $I\Delta \vec{l}$ ,  $\vec{B}_{\perp}$  и  $\vec{F}_A$  (именно в таком порядке) ориентированы так же, как оси декартовой системы координат  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  в традиционном изображении (рис. 22). Кстати, такая ориентация традиционно называется правой тройкой (а система координат – правой): поворот от первого вектора ко второму со стороны третьего происходит против часовой стрелки.

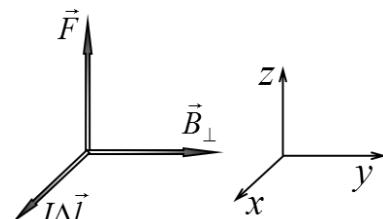


Рис. 22

Для тех, кто не в состоянии разобраться в операции векторного произведения, придумано правило левой руки\* (рис. 23).

Для определения направления силы Ампера необходимо расположить кисть левой руки так, чтобы силовые линии магнитного поля входили в ладонь, четыре пальца были направлены вдоль направления тока, тогда отставленный на  $90^\circ$  большой палец укажет направление силы Ампера.

Рассмотрим теперь силы, действующие на прямоугольный контур с током  $ABCD$ , длины сторон которого обозначим  $a$  и  $b$ . Для простоты будем считать, что вектор индукции

$\vec{B}$  однородного магнитного поля лежит в плоскости контура и перпендикулярен одной из сторон контура (рис. 24). На стороны контура  $BC$  и  $DA$  сила Ампера не действует, силы, действующие на стороны  $AB$  и  $CD$ , направлены перпендикулярно плоскости контура в противоположные стороны, их модули равны  $F = IBa$ . Эти силы образуют пару сил, момент которых не зависит от

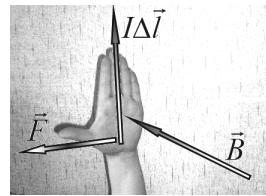


Рис. 23

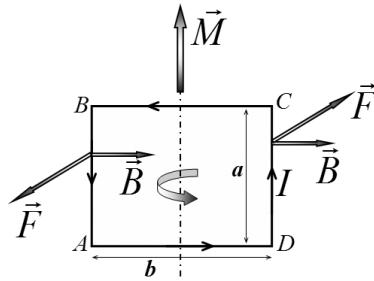


Рис. 24

\* Для того чтобы определить, какая рука левая, полезно следующее правило: расположите две руки на краю стола ладонями вниз и запомните, что на левой руке большой палец справа!

выбора оси вращения. Поэтому в качестве произвольной оси выберем прямую, параллельную сторонам  $AB$  и  $CD$  и проходящую через центр контура. Вектор момента силы ориентирован вдоль этой оси и по модулю равен

$$M = 2F \frac{b}{2} = IBab = IBS, \quad (3)$$

где  $S = ab$  – площадь контура. Полученное выражение для вектора момента силы, действующей со стороны магнитного поля, совпадает с выражением, использованным нами для определения вектора индукции поля, что доказывает справедливость формулы (12) для силы Ампера.

#### Задание для самостоятельной работы

*Докажите, что для произвольного контура и его произвольной ориентации выражение (2) для силы Ампера приводит к правильному выражению для момента силы, действующему на контур. Воспользуйтесь подсказкой, что произвольный контур можно представить в виде наложения прямоугольных контуров (рис. 25).*

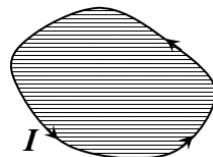


Рис. 25

В заключение данного раздела укажем, что способ получения формулы для силы Ампера нельзя считать математическим выводом. Фактически, это угадывание формулы, приводящей к правильному выражению для момента силы, действующей на контур, которое верно «по определению» – по определению вектора магнитной индукции. Конечно, здесь используются и экспериментально проверенные факты: пропорциональность силы Ампера силе тока и ее перпендикулярность направлению

тока – все остальное является следствием определения вектора индукции. Кроме того, при разложении вектора индукции на две составляющие мы неявно использовали принцип суперпозиции для индукции магнитного поля, о котором подробнее будет сказано ниже.

## 1.5. Сила Лоренца

Магнитное поле действует с некоторой силой на каждую движущуюся заряженную частицу, эта сила называется силой Лоренца (названа в честь голландского физика Генриха Антона Лоренца). Можно считать, что рассмотренная выше сила Ампера является суммой сил Лоренца, действующих на каждую заряженную частицу, направленное движение которых и образует электрический ток.

Чтобы получить формулу этой силы, представим выражение для элемента тока в виде (рис. 26)

$$I\Delta \vec{l} = \vec{j}S\Delta l = nq\vec{v}S\Delta l, \quad (1)$$

здесь  $S$  – площадь поперечного сечения проводника,  $\vec{j} = nq\vec{v}$  – вектор плотности тока\*,  $q$  – электриче-

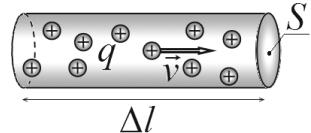


Рис. 26

---

\* Напомним, что за направление силы тока принято направление движения положительно заряженных частиц, поэтому излагаемые здесь правила для определения направления силы Лоренца справедливы для положительных зарядов. Для отрицательно заряженных частиц направление силы Лоренца противоположное.

ский заряд движущихся частиц,  $\vec{v}$  – их скорость,  $n$  – число частиц в единице объема (концентрация заряженных частиц). Подставим это выражение в формулу для силы Ампера

$$\vec{F}_A = I\Delta l \times \vec{B} = qnS\Delta l \vec{v} \times \vec{B} \quad (2)$$

и заметим, что величина  $nS\Delta l = N$  равна общему числу заряженных частиц в выделенном участке проводника. Поэтому сила, действующая на одну частицу (сила Лоренца), равна

$$\vec{F}_L = \frac{\vec{F}_A}{N} = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (3)$$

Модуль силы Лоренца рассчитывается по формуле

$$F_L = qvB \sin\alpha, \quad (4)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами скорости частицы и индукции магнитного поля (рис. 27). Сила Лоренца направлена перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы скорости частицы  $\vec{v}$  и индукции магнитного поля  $\vec{B}$ . Направление этой силы можно определить по правилу левой руки, аналогичному правилу для определения направления силы Ампера. Также можно говорить, что на заряженную частицу действует сила со стороны компоненты поля  $\vec{B}_\perp$ , перпендикулярной вектору скорости. Частица, движущаяся параллельно вектору индукции (то есть вдоль силовой линии магнитного поля), действия силы Лоренца не испытывает.

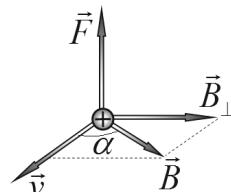


Рис. 27

В некоторых учебниках, особенно по теоретической физике, сначала дается формула для силы Лоренца как следствие определения вектора магнитной индукции и обобщения экспериментальных данных, а затем на ее основе выводится выражение для силы Ампера. То, что мы поступили наоборот, несущественно, так как обе эти силы имеют одинаковую природу – действие магнитного поля на движущийся заряд.

## 1.6. Закон Био-Савара

Как мы установили, магнитное поле действует с некоторой силой на движущиеся электрические заряды, но оно и создается движущимися зарядами. Сейчас нам предстоит получить основной закон магнитостатики, позволяющий рассчитывать характеристики магнитного поля, создаваемого произвольной конфигурацией постоянных электрических токов, – **закон Био-Савара**<sup>\*</sup>. Этот закон играет в магнитостатике роль, аналогичную закону Кулона в электростатике. Однако он с математической точки зрения является более сложным – не случайно его авторами являются трое французских ученых. Подчеркнем, что этот закон не может быть выведен на основании более общих законов, пото-

---

\* Этот закон был экспериментально открыт французскими физиками Ж. Био и Ф. Саваром в 1820 году, его окончательная математическая формулировка дана их соотечественником П.С. Лапласом, поэтому иногда его называют законом Био-Савара-Лапласа.

му что таковых не существует. Этот закон следует рассматривать как обобщение многочисленных экспериментальных данных. Поэтому мы рассмотрим только некоторые основные обоснования: как экспериментальные, так и общетеоретические.

В данном разделе мы рассмотрим магнитное поле в вакууме, то есть в отсутствии сред, подвергающихся воздействию магнитного поля. Влияние различных веществ на характеристики поля проявляется благодаря возникновению индуцированных токов намагничения (о которых речь пойдет позднее), эти токи создают магнитное поле так же, как и обычные токи проводимости.

В качестве элементарного источника поля мы выберем уже рассмотренный нами элемент тока  $I\Delta l$  – малый прямолинейный участок тонкого проводника с током. Если ранее такой элемент рассматривался нами как прибор для обнаружения и исследования магнитного поля, сейчас он будет играть роль источника.

Ситуация аналогична той, с которой мы встретились в электростатике, – там точечные заряды также выступали в разных ролях: как источник поля и как прибор для изучения самого поля (этот заряд мы называли пробным). Отметим также, что экспериментально можно проверить не сам закон (то есть распределение магнитного поля элемента тока), а только следствия из него – поля, создаваемые реализуемыми конфигурациями электрических токов.

Выбранный\* источник поля – прямолинейный элемент тока  $I\Delta l$  – обладает осевой симметрией\*\* (его свойства не изменяются при повороте на произвольный угол вокруг собственной оси), поэтому и магнитное поле, создаваемое этим элементом, должно также обладать той же симметрией. Имеется три принципиально различные конфигурации поля, обладающие требуемой симметрией: осесимметричное радиальное (рис. 28, а), продольное (рис. 28, б) и круговое поле (рис. 28, в).

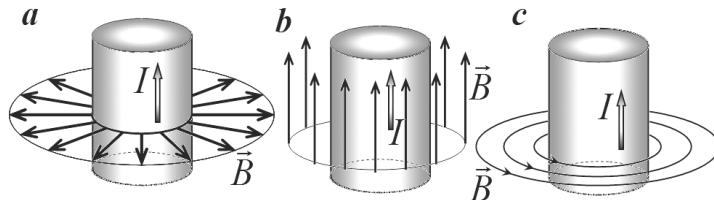


Рис. 28

Конечно, возможна и любая суперпозиция этих полей. Отдать предпочтение одной из этих конфигураций поля на основании только теоретических рассуждений невозможно\*\*\*. Поэтому необходимо

\* В качестве элементарного источника поля можно было выбрать и другие: например, контур с током, но из таких элементов тяжело конструировать произвольную систему токов; точечный движущийся заряд, но для движущегося заряда законы статики не применимы, так как с течением времени его положение изменяется.

\*\* Точечный источник обладает сферической симметрией, поэтому поле, создаваемое им, обязано быть радиально симметричным.

\*\*\* Позднее мы покажем, что невозможность радиальной компоненты поля связана с отсутствием в природе магнитных зарядов.

обратиться к результатам экспериментальных исследований. Эти результаты однозначно показывают, что изучаемое поле является круговым (рис. 28, с). Простейшее доказательство можно получить с помощью железных опилок, которые в поле прямого проводника с током выстраиваются вдоль концентрических окружностей, центры которых располагаются на оси проводника.

Рассмотрим еще раз один из опытов А. М. Ампера, в котором исследовалось взаимодействие двух длинных параллельных проводников, по которым протекают постоянные электрические токи  $I_1$  и  $I_2$  (рис. 29). Оказывается, что в этом случае проводники притягиваются друг к другу, то есть сила, действующая на проводник, направлена вдоль прямой, соединяющей проводники. Легко заметить, что при наличии радиальной составляющей магнитного поля имелась бы составляющая силы взаимодействия, направленная по касательной окружности с центром на втором проводнике\*.

Таким образом, силовые линии магнитного поля рассматриваемого элемента тока являются окружностями, то есть силовые линии замкнуты. Так как силовые линии элементарного источника не имеют ни начала, ни конца, то и **силовые линии любого магнитного поля обладают тем же**

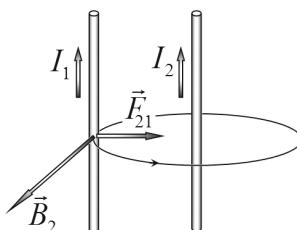


Рис. 29

\* Существование такой силы дает возможность создания «вечного двигателя» – подумайте об этом.

свойством – не имеют начала и конца, являются замкнутыми (в исключительных случаях идут из «бесконечности» на «бесконечность»). Это свойство магнитного поля также связано с отсутствием магнитных зарядов.

Отметим также: А. М. Ампер установил, что сила притяжения между проводниками обратно пропорциональна расстоянию между проводниками, этот факт мы используем ниже.

Таким образом, на основании экспериментальных данных мы обязаны заключить, что магнитное поле, создаваемое элементом тока, является круговым с осью симметрии, совпадающей с осью элемента тока (рис. 30), то есть вектор индукции этого поля  $\Delta\vec{B}$  в произвольной точке направлен перпендикулярно элементу тока  $I\Delta\vec{l}$  и вектору, соединяющему элемент тока с точкой наблюдения  $\vec{r}$ . Следовательно, направление вектора индукции можно выразить через векторное произведение этих векторов  $I\Delta\vec{l} \times \vec{r}$ .

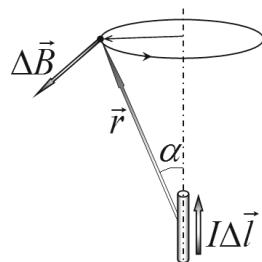


Рис. 30

Разумно предположить, что для магнитного поля справедлив принцип суперпозиции: вектор индукции магнитного поля, созданного системой токов, равен сумме векторов индукции полей, создаваемых каждым током в отдельности. Это свойство магнитного поля полностью подтверждается многочисленными экспериментами. Кроме

того, как-то нелогично признавать принцип суперпозиции для электрического поля и не принять его для магнитного поля.

Напомним, что математическим выражением принципа суперпозиции является линейная связь между характеристиками источника (в данном случае – элемент тока, характеризуемый его длиной и силой тока  $I\Delta l$ ) и следствием (магнитным полем и его индукцией  $\Delta \vec{B}$ ). Таким образом, из **принципа суперпозиции следует, вектор индукции пропорционален силе тока, порождающего данное поле, и длине элемента тока  $\Delta B \sim I\Delta l$ .**

Величина индукции поля может зависеть (и действительно зависит) от направления на точку наблюдения поля, то есть от угла  $\alpha$  между вектором элемента тока  $I\Delta l$  и направлением на точку наблюдения, определяемым вектором  $\vec{r}$ . Вид этой зависимости можно установить, воспользовавшись принципом суперпозиции и тем опытным фактом, что на оси элемента тока магнитное поле отсутствует. Поэтому разложим вектор элемента тока  $I\Delta l$  на две составляющие: параллельную  $(I\Delta l)_\parallel$ , направленную вдоль вектора  $\vec{r}$ , и перпендикулярную ей  $(I\Delta l)_\perp$  (рис. 31). Магнитное поле в рассматриваемой точке создается только перпендикулярной компонентой элемента тока, модуль которой равен  $I\Delta l \sin \alpha$ . Следовательно, индукция поля в этой точке пропорцио-

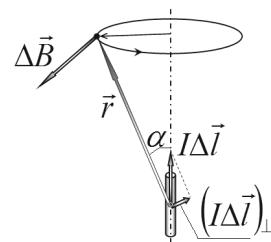


Рис. 31

нальна синусу угла  $\alpha$  между направлением тока и направлением на точку наблюдения.

Наконец, необходимо установить зависимость величины магнитной индукции поля от расстояния  $r$  между источником и точкой наблюдения поля\*. Конечно, вид этой зависимости может быть установлен только экспериментально. Но почему заранее не предположить, что **индукция поля обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника**  $\Delta\mathbf{B} \sim \frac{1}{r^2}$ , как это установлено для гравитационных и электростатических взаимодействий? Эксперимент однозначно подтверждает именно такую зависимость!

Согласно некоторым из современных теорий, эта зависимость (закон «обратных квадратов») однозначно связана с трехмерностью пространства, в котором мы живем. При других пространственных зависимостях не выполнялись бы такие замечательные теоремы о потоках и циркуляциях полей.

Объединяя все рассмотренные зависимости в одну формулу, получим, что вектор индукции магнитного поля, создаваемого элементом тока, равен

$$\Delta\vec{B} = K \frac{I \Delta\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}, \quad (1)$$

где  $K$  – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц измерения. В

---

\* Источник поля в данном случае не является точечным. Может возникнуть вопрос: до какой точки источника измеряется расстояние? Поэтому следует иметь в виду, что в любом случае подразумевается, что размер элемента тока значительно меньше расстояния до точки наблюдения.

системе единиц СИ этот коэффициент пропорциональности принято записывать в виде<sup>\*</sup>

$$K = \frac{\mu_0}{4\pi}. \quad (2)$$

С множителем  $\frac{1}{4\pi}$  в коэффициентах мы знакомы по закону Кулона: он вводится, чтобы упростить математические формулы, следующие из этого закона. Величина  $\mu_0$  называется **магнитной постоянной**, ее численное значение мы установим чуть позднее, потому что оно связано с определением основной электрической единицы системы СИ, единицей силы тока – ампером.

Заметим, что можно построить систему единиц измерения, в которой данный коэффициент пропорциональности отсутствует (то есть равен безразмерной единице), в этом случае по-другому определяются единицы силы тока, электрического заряда и другие электрические единицы. Такая система единиц (магнитостатическая) была создана и пользовалась определенной популярностью, пока ее не вытеснила международная система СИ.

---

\* Магнитная постоянная оказалась в числителе (в отличие от электрической постоянной в знаменателе закона Кулона), по-видимому, для того чтобы в магнитостатике все было наоборот: где в электростатике  $\epsilon_0$  в числителе, там же в магнитостатике  $\mu_0$  в знаменателе; если в электростатике что-нибудь «вдоль», то в магнитостатике нечто «поперек», где в электростатике поток, там же в магнитостатике циркуляция и т.д. – в остальном же магнитостатика аналогична электростатике.

Окончательно сформулируем основной закон электростатики, названный в честь французских ученых, его открывателей, – закон **Био-Савара**: **вектор индукции магнитного поля, создаваемого малым прямолинейным участком проводника с током, пропорционален длине участка проводника, силе тока в нем, синусу угла между элементом тока и направлением на точку наблюдения, обратно пропорционален квадрату расстояния до элемента тока и направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежит элемент тока и точка наблюдения, в сторону, определяемую правилом правого винта (если направление смещения винта совпадает с направлением тока, то направление его вращения совпадает с направлением вектора индукции).**

Проще эту формулировку выразить одной формулой

$$\Delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta \vec{l} \times \vec{r}}{r^3}. \quad (3)$$

Обратите внимание, что зависимость индукции поля от угла  $\alpha$  автоматически выражается в определении векторного произведения (еще раз поразимся удобству этой введенной математической операции). Несмотря на то что в знаменателе этой формулы стоит куб расстояния\*, данная зависимость удовлетворяет закону «обратных квадратов», так как в числителе стоит вектор  $\vec{r}$  и справедливо соотношение  $\left| \frac{\vec{r}}{r^3} \right| = \frac{1}{r^2}$ .

---

\* Сравните с векторной формулой закона Кулона!

Запишем выражение для модуля вектора магнитной индукции, определяемого формулой (3):

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\Delta l}{r^2} \sin\alpha \quad (4)$$

и проиллюстрируем правило правого винта (оно же буравчика и штопора) – рис. 32.

Интересно подсчитать, сколько пространственных переменных неявно фигурируют в формуле закона Био-Савара\*: три координаты, задающие положение элемента, два угла, задающие его направление, три координаты точки, в которой рассчитывается поле, – итого 8 (восьмь!) пространственных координат. Поэтому при использовании этого закона следует внимательно следить, по каким координатам проводится суммирование: иногда по источникам (при использовании принципа суперпозиции), иногда по точкам наблюдения (при вычислении потока и циркуляции поля), а иногда и по тем и по другим!

**Жан-Батист Био** (Jean-Baptiste Biot; 1774–1862) – знаменитый французский учёный, физик, геодезист и астроном (рис. 33). После блестящего окончания курса в коллегии Людовика Великого 19-летний Био поступил в военную службу и участвовал в действиях Северной армии. В сентябре 1794 года Конвентом был утвержден закон об организа-

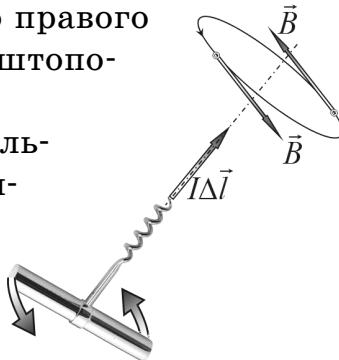


Рис. 32

\* В законе Кулона их всего шесть: три координаты заряда и три координаты точки наблюдения.



Рис. 33

ции школы, получившей впоследствии название Политехнической школы, во главе которой стоял, хотя и не считался президентом, известный геометр Монж. Био по возвращении из армии поступил в числе первых слушателей в эту школу. Политические страсти того неспокойного времени проникли и в Политехническую школу и мешали правильному ходу занятий. Ученики школы принимали участие 13 ван-

демиера IV года\* в протестах против правительства и были арестованы; в их числе находился и Батист. Ему угрожало по меньшей мере исключение, но заступничеством Монжа и эта опасность была устранена.

Вскоре, после успешного окончания курса наук, Батист был назначен профессором в Центральную школу в Бове, а в 1800 году занял кафедру математической физики в Коллеж де Франс и был выбран в члены-корреспонденты математического отделения Института; через три года после того он стал действительным членом этого учёного учреждения. Основаниями к его выбору послужили тринадцать мемуаров и два больших сочинения, посвященных механике Лапласа и математике. Вскоре он написал проникнутое республиканским духом сочинение, доставившее ему большую литературную известность. Когда Институт был приглашен участвовать в провозглашении Наполеона Бонапарта императором, Био смело протестовал против вмешательства учёного общества в чисто политические дела.

В августе 1804 г. Био с Гей-Люссаком поднимался на воздушном шаре, причём они достигли высоты 3 400 метров. В 1806 году поступил в число членов Бюро долгот. Био отправился в Испанию в сопровождении молодого тогда учёного Араго для окончания геодезических измерений дуги меридiana, проходящего через Францию и Балеарские острова.

\* По календарю Первой Французской Республики.

Эта работа, закончившаяся измерением большого треугольника, соединяющего острова Ибицу и Форментеру с берегом Испании, привела к созданию эталона единицы длины – метра, как миллионной доли четверти земного меридиана. В 1809 г. Био был назначен профессором астрономии.

Важные заключения, к которым привело его изучение всех данных, полученных им во время его многочисленных поездок, состояли в том, что действие земного притяжения неодинаково на одной и той же параллели и что оно изменяется неравномерно вдоль одного и того же меридиана. Эти результаты были изложены им в «Записке о фигуре Земли», представленной им Академии наук в 1827 году.

Био был замечателен и как физик, и в особенности заслуживают внимания его исследования некоторых случаев поляризации света. Первый его мемуар по этому предмету был издан в 1812 г. За этим мемуаром следовало до тридцати других, посвящённых изучению связи между частичным строением тел и свойствами света, проходящего через эти тела, названными поляризацией света. Важнейшие открытия Био по оптике: свойство турмалина раздваивать лучи света, поляризовать их и поглощать один из них; законы вращения плоскости поляризации кварцем и различными жидкостями. Это последнее послужило средством для открытия сахаристых веществ в соках различных растений и разделения сахара по оптическим свойствам на две разновидности. Вращение плоскости поляризации получило также применение в медицине для диагноза диабета. Био особенно дорожил этими изысканиями, написал историю своего открытия со всеми его последствиями и приложениями в мемуаре 1860 года. Био вместе с Саваром определил опытным путём закон действия проводника, по которому проходит гальванический ток, на магнитную стрелку. В отличие от Ампера, изучавшего магнитные поля опосредованно, путем измерения силы взаимодействия между парами проводников с током, Био и Савар предприняли прямые измерения магнитных полей, используя для этого множе-

ство легких магнитных стрелок компасов. Смысл их закона проще всего понять, если представить себе, что проводник с током разбит на крошечные отрезки – т. н. элементы тока. Такой подход предложил ученым их старший коллега Пьер Симон Лаплас, стоявший у истоков дифференциального и интегрального исчисления, который затем и обобщил полученные результаты.

Био обрабатывал различные части физики не только в специальных мемуарах, но и в написанных им курсах физики. Его курсы физики отличаются ясностью и глубокой обдуманностью изложения. Вряд ли можно найти другой курс, который мог бы сравниться с учебником Био в отношении самостоятельности разработки как плана, так и всех частей физики.

Трудно перечислить все двести пятьдесят или триста мемуаров, статей и заметок научных, литературных и биографических, написанных Био. Помимо физических и математических трудов, им написаны биографии – Декарта, Франклина, Галилея и Ньютона; отдельно изданы жизнеописания Лапласа, Флемстеда и др. Все его критические и биографические статьи и путешествия собраны в 3 тома, изданные в 1858 году. Последний по времени его труд (1861), касающийся астрономии у индийцев и китайцев, был им предпринят в память безвременно скончавшегося его сына Эдуарда Констанса, астронома и синолога. Разнообразие сочинений Био показывает, как много вопросов и предметов занимали его, и он был вправе сказать в старости: «Я любил многое в течение моей жизни». Радикальные взгляды его юности мало-помалу изменились и даже преобразовались до такой степени, что дали возможность графу Шамбору писать о Био на другой день после его смерти: «Он был первоклассным учёным, христианином первых времен и одним из самых преданных моих друзей».

## 1.7. Расчет индукции магнитного поля

Закон Био-Савара и принцип суперпозиции позволяют рассчитать индукцию магнитного поля  $\vec{B}$ , создаваемого произвольной системой электрических токов в произвольной точке пространства. Для этого необходимо разбить все токи на бесконечно малые участки  $(I\Delta\vec{l})_k$ , записать выражения для векторов индукции поля  $(\Delta\vec{B})_k$ , создаваемых этими элементами (пользуясь законом Био-Савара) и просуммировать полученные выражения (что позволяет применить принцип суперпозиции) для всех участков тока

$$\vec{B} = \sum_k (\Delta\vec{B})_k. \quad (1)$$

Рассмотрим еще раз участок проводника с током (рис. 34). Выражение для элемента тока  $I\Delta\vec{l}$  записывается также в виде  $I\Delta\vec{l} = jS\Delta l = j\Delta V$ .

В том случае, когда электрические токи являются не линейными, а пространственно распределенными (то есть текут не только по тонким проводам), выражение для элемента тока  $I\Delta\vec{l}$  следует заменить эквивалентным  $j\Delta V$  и провести суммирование по всем элементам объема, где протекают электрические токи.

Конечно, такое суммирование часто представляет собой громоздкую математическую задачу (в



Рис. 34

конце концов, для его выполнения можно воспользоваться компьютером), но, с физической точки зрения, изложенный метод дает полное решение задачи.

Рассмотрим несколько примеров расчета индукции магнитного поля по изложенной выше методике.

### 1.7.1. Магнитное поле кругового тока

Пусть постоянный электрический ток силой  $I$  протекает по плоскому круглому контуру радиуса  $R$ . Найдем индукцию поля в центре кольца в точке  $O$  (рис. 35). Мысленно разобьем кольцо на малые участки, которые можно считать прямолинейными, и применим закон Био-Савара-Лапласа для определения индукции поля, создаваемого этим элементом, в центре кольца. В данном случае вектор элемента тока  $(I\Delta l)_k$  и вектор  $\vec{r}_k$ , соединяющий данный элемент с точкой наблюдения (центр кольца), перпендикулярны, поэтому  $\sin\alpha = 1$ . Вектор индукции поля, созданного выделенным участком кольца, направлен вдоль оси кольца, а его модуль равен

$$\Delta B_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(I\Delta l)_k}{R^2}. \quad (1)$$

Для любого другого элемента кольца ситуация абсолютно аналогична – вектор индукции также

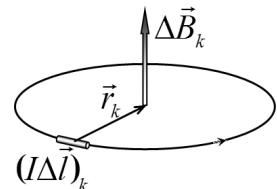


Рис. 35

направлен по оси кольца, а его модуль определяется формулой (1). Поэтому суммирование этих векторов выполняется элементарно и сводится к суммированию длин участков кольца

$$B = \sum_k \Delta B_k = \sum_k \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(I\Delta l)_k}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \sum_k \Delta l_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (2)$$

Усложним задачу: найдем индукцию поля в точке  $A$ , находящейся на оси кольца на расстоянии  $z$  от его центра (рис. 36). По-прежнему выделяем малый участок кольца  $(I\Delta l)_k$  и строим вектор индукции поля  $\Delta \vec{B}_k$ , созданного этим элементом, в рассматриваемой точке. Этот вектор перпендикулярен вектору  $\vec{r}_k$ , соединяющему выделенный участок с точкой наблюдения. Векторы  $(I\Delta l)_k$  и  $\vec{r}_k$ , как и ранее, перпендикулярны, поэтому  $\sin\alpha = 1$ . Так как кольцо обладает осевой симметрией, и суммарный вектор индукции поля в точке  $A$  должен быть направлен по оси кольца. К этому же выводу о направлении суммарного вектора индукции можно прийти, если заметить, что каждому выделенному участку кольца имеется симметричный ему с противоположной стороны, а сумма двух симметричных векторов направлена вдоль оси кольца. Таким образом, для того чтобы определить модуль суммарного вектора индукции, необходимо просуммировать проекции векторов на ось кольца.

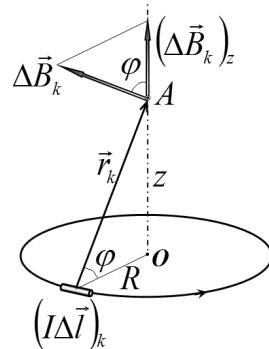


Рис. 36

Эта операция не представляет особой сложности, если учесть, что расстояния от всех точек кольца до точки наблюдения одинаковы  $r_k = \sqrt{R^2 + z^2}$ , а также одинаковы углы  $\varphi$  между векторами  $\Delta\vec{B}_k$  и осью кольца. Запишем выражение для модуля искомого суммарного вектора индукции

$$B = \sum_k \Delta B_{zk} = \sum_k \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(I\Delta l)_k}{r^2} \cos\varphi = \frac{\mu_0 I \cos\varphi}{4\pi r^2} \sum_k \Delta l_k = \\ = \frac{\mu_0 I \cos\varphi}{4\pi r^2} 2\pi R = \frac{\mu_0 IR}{2r^2} \cos\varphi.$$

Из рисунка следует, что  $\cos\varphi = \frac{R}{r}$ . С учетом выражения для расстояния  $r$  получим окончательное выражение для вектора индукции поля

$$B = \frac{\mu_0 IR}{2r^2} \cos\varphi = \frac{\mu_0 IR^2}{2r^3} = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3)$$

Как и следовало ожидать, в центре кольца (при  $z = 0$ ) формула (3) переходит в полученную ранее формулу (2).

#### Задания для самостоятельной работы

1. Постройте график зависимости индукции поля (3) от расстояния до центра кольца.

2. Сравните полученную зависимость (3) с выражением для модуля напряженности электрического поля, создаваемого равномерно заряженным кольцом (§9.6). Объясните возникшие принципиальные различия между этими зависимостями.

Используя общий рассматриваемый здесь метод, можно рассчитать индукцию поля в произвольной точке. Рассматриваемая система обладает осевой симметрией, поэтому достаточно найти рас-

пределение поля в плоскости, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр. Пусть кольцо лежит в плоскости  $xOy$  (рис. 37), а поле рассчитывается в плоскости  $yOz$ . Кольцо следует разбить на малые участки, видимые из центра под углом  $\Delta\phi$ , и просуммировать поля, создаваемые этими участками. Можно показать (*попробуйте проделать это самостоятельно*), что компоненты вектора магнитной индукции поля, созданного одним выделенным элементом тока, в точке с координатами  $(y, z)$  рассчитываются по формулам:

$$r_k = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xR\cos\varphi_k + 1};$$

$$\Delta B_{yk} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{z\cos\varphi_k}{r_k^3} \Delta\phi; \quad \Delta B_{zk} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1 - y\cos\varphi_k}{r_k^3} \Delta\phi. \quad (4)$$

Необходимое суммирование не может быть проведено аналитически, так как при переходе от одного участка к другому изменяются расстояния до точки суммирования. Поэтому «простейший» способ провести такое суммирование – использовать компьютер.

Если же известно значение вектора индукции (или хотя бы имеется алгоритм его расчета) в каждой точке, то можно построить картину силовых линий магнитного поля. Очевидно, что алгоритм построения силовых линий векторного поля не за-

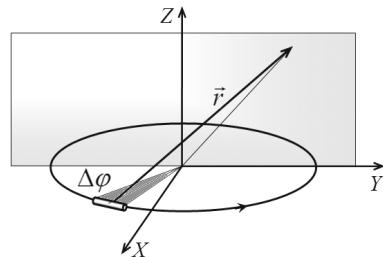


Рис. 37

висит от его физического содержания, а такой алгоритм был кратко рассмотрен нами при изучении электростатики.

На рис. 38 картина силовых линий рассчитана при разбиении кольца на 20 частей, этого оказалось вполне достаточно, так как и при 10 интервалах разбиения получался практически тот же рисунок.

Рассмотрим выражение для индукции поля на оси кольца на расстояниях, значительно больших радиуса кольца  $z \gg R$ . В этом случае формула (3) упрощается и приобретает вид

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{\pi R^2}{z^3} = \frac{\mu_0 p_m}{2\pi z^3}, \quad (5)$$

где  $I\pi R^2 = IS = p_m$  – произведение силы тока на площадь контура, то есть магнитный момент кольца. Эта формула совпадает (если, как обычно, заменить  $\mu_0$  в числителе на  $\epsilon_0$  в знаменателе) с выражением для напряженности электрического поля диполя на его оси.

Такое совпадение не случайно, более того, можно показать, что подобное соответствие справедливо для любой точки поля, находящейся на больших расстояниях от кольца. Фактически, малый контур с током является магнитным диполем (два одинаковых малых противоположно направленных элемента тока) – поэтому его поле совпадает с

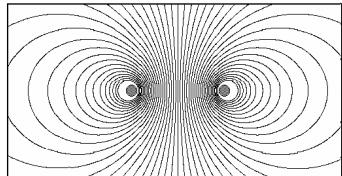


Рис. 38

полем электрического диполя. Чтобы ярче подчеркнуть этот факт, на рис. 39 приведена картина силовых линий магнитного поля кольца на больших расстояниях от него (сравните с аналогичной картиной для поля электрического диполя).

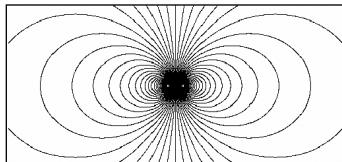


Рис. 39

### 1.7.2. Магнитное поле прямого тока

Рассчитаем индукцию магнитного поля, создаваемого бесконечным<sup>\*</sup> проводником, по которому протекает электрический ток силой  $I$  (рис. 40). Методика расчета остается прежней: мысленно разбиваем проводник на малые участки  $I\Delta\vec{l}_k$ . По закону Био-Савара, в произвольной точке  $A$ , находящейся на расстоянии  $R$  от проводника, произвольный элемент тока создает магнитное поле, вектор индукции которого  $\Delta\vec{B}_k$  направлен перпендикулярно плоскости, содержащей проводник и рассматриваемую точку (на рис. 40 – перпендикулярно плоскости рисунка), модуль этого вектора равен

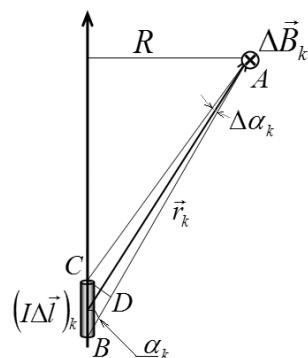


Рис. 40

\* Конечно, «бесконечно длинный» значит, что его длина значительно превышает расстояние до той точки, где изменяется поле.

$$\Delta B_k = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta l_k}{r_k^2} \sin \alpha_k, \quad (1)$$

где  $r_k$  – расстояние от выбранного участка проводника до точки наблюдения,  $\alpha_k$  – угол между проводником и направлением от элемента тока до точки наблюдения.

Договоримся о еще одном общепринятом соглашении. Достаточно часто приходится изображать векторы, перпендикулярные плоскости рисунка. В этом случае эти векторы изображаются в виде (рис. 41): небольшого кружка с точкой в центре, если вектор направлен «на нас» (видно «острие» вектора); кружка с перекрестием, если вектор направлен от нас (видно «оперение» вектора).

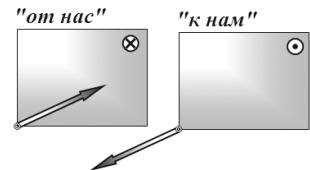


Рис. 41

Векторы полей, созданных всеми другими участками проводника, направлены так же, поэтому суммирование векторов в данном случае сводится к суммированию их модулей. Но даже вычислить сумму модулей непросто, так как для различных участков проводника расстояния  $r_k$  и  $\alpha_k$  различны. Тем не менее, такое суммирование выполнимо, его результат выражается формулой, определяющей величину индукции магнитного поля бесконечно-го прямого тока

$$B = \sum_k \Delta B_k = \sum_k \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \Delta l_k}{r_k^2} \sin \alpha_k = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_k \frac{\Delta l_k}{r_k^2} \sin \alpha_k = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}, \quad (2)$$

здесь не приведено вычисление последней суммы (которая равна  $\sum_k \frac{\Delta l_k}{r_k^2} \sin \alpha_k = \frac{2}{R}$ ), поверьте пока в спра-

ведливость полученного выражения хотя бы потому, что оно имеет богатый физический смысл. Во-первых, эта формула совпадает с выражением для напряженности электрического поля, создаваемого бесконечной прямой равномерно заряженной нитью; во-вторых, оно соответствует результату опытов А. М. Ампера по изучению взаимодействия параллельных токов. Действительно, если один проводник создает магнитное поле, индукция которого обратно пропорциональна расстоянию до проводника, то на второй проводник действует сила Ампера, пропорциональная индукции поля, то есть обратно пропорциональная расстоянию между проводниками.

Дадим теперь строгий вывод формулы для суммы, фигурирующей в выражении (2). Проще всего она выводится с помощью операции интегрирования, но здесь мы дадим ее геометрический вывод. Для начала с помощью рис. 40 преобразуем каждое слагаемое этой формулы  $\frac{\Delta l_k}{r_k^2} \sin \alpha_k$ . Заметим, что произведение  $\Delta l_k \sin \alpha_k$  равно длине отрезка  $CD$ , перпендикулярного вектору  $\vec{r}_k$ ,  $-\Delta l_k \sin \alpha_k = |CD|$ . Отношение же длины этого отрезка к расстоянию  $r_k$  для малых длин элементов тока равно малому углу  $\Delta \alpha_k$ , под которым виден выделенный участок проводника

$$\frac{\Delta l_k}{r_k} \sin \alpha_k = \frac{|CD|}{r_k} \approx \Delta \alpha_k \quad (3)$$

(точнее, это отношение равно тангенсу угла, который для малых углов равен самому углу, изме-

ренному в радианах). Из того же рисунка следует, что отношение  $\frac{r_k}{\sin \alpha_k} = R$  равно расстоянию от точки наблюдения до проводника и не зависит от выбора участка проводника. С учетом этого соотношения и формулы (2) получим

$$\frac{\Delta l_k}{r_k^2} \sin \alpha_k = \frac{\Delta \alpha_k}{r_k} = \frac{\Delta \alpha_k \sin \alpha_k}{R}.$$

Таким образом, вычисление суммы (2) сводится к вычислению суммы  $\sum_k \Delta \alpha_k \sin \alpha_k$ , в которой все углы являются малыми (поэтому число слагаемых велико), пусть углы  $\alpha_k$  изменяются от нуля до некоторого предельного значения  $\alpha_{\max}$ .

Для вычисления этой суммы применим искусственный прием (он встретится нам и в дальнейшем). Возьмем окружность (рис. 42) радиуса  $R$  и разобьем ее точками  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_N$  на малые участки, угловой размер каждого равен  $\Delta \alpha$ . Хорды, которые образованы точками разбиения, будем рассматривать как векторы  $\vec{a}_0 = \overrightarrow{C_0 C_1}, \vec{a}_1 = \overrightarrow{C_1 C_2}, \dots, \vec{a}_k = \overrightarrow{C_{k-1} C_k}, \dots$ . Сумма этих векторов очевидна – это вектор  $\vec{A}$ , соединяющий начальную и конечную точки разбиения окружности:

$$\sum_k \vec{a}_k = \overrightarrow{C_0 C_N} = \vec{A}. \quad (4)$$

Теперь, внимание, если справедливо векторное равенство, то справедливо аналогичное выраже-

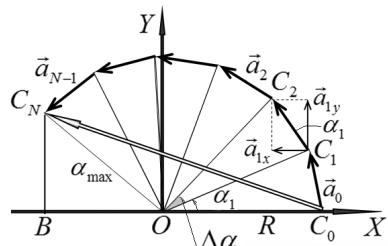


Рис. 42

ние для любой проекции этих векторов. Введем декартову систему координат с началом в центре окружности, ось  $Ox$  которой проходит через начальную точку. Длины построенных вписанных векторов равны  $|\bar{a}_k| = R\Delta\alpha_k$  (точнее, это длина дуги, но для малых углов длина стягивающей хорды стремится к длине дуги). Из рис. 42 следует, что проекции этого вектора на оси координат равны, соответственно,

$$a_{kx} = -R\Delta\alpha_k \sin\alpha_k; \quad a_{ky} = R\Delta\alpha_k \cos\alpha_k.$$

Проецируя равенство (4) на оси координат, получим

$$\begin{aligned} (\vec{A})_x &= (\overrightarrow{C_0 C_N})_x = -|C_0 B| = \sum_k a_{kx} = -\sum_k R \sin\alpha_k \Delta\alpha_k \\ (\vec{A})_y &= (\overrightarrow{C_0 C_N})_y = -|C_N B| = \sum_k a_{ky} = \sum_k R \cos\alpha_k \Delta\alpha_k . \end{aligned} \quad (5)$$

Проекции суммарного вектора  $\vec{A}$  на оси координат находятся просто:

$$\begin{aligned} (\vec{A})_x &= (\overrightarrow{C_0 C_N})_x = -|C_0 B| = -(R + R \cos(\pi - \alpha_{\max})) = R(1 - \cos\alpha_{\max}) \\ (\vec{A})_y &= (\overrightarrow{C_0 C_N})_y = |C_N B| = R \sin(\pi - \alpha_{\max}) = R \sin\alpha_{\max} . \end{aligned} \quad (6)$$

Сравнивая выражения (5) и (6), получим искомые формулы

$$\sum_k \sin\alpha_k \Delta\alpha_k = 1 - \cos\alpha_{\max}; \quad \sum_k \cos\alpha_k \Delta\alpha_k = \sin\alpha_{\max} . \quad (7)$$

Еще раз подчеркнем, что суммирование в этих формулах проводится в пределах изменения угла от нуля до предельного значения  $\alpha_{\max}$ .

Осталось принять во внимание, что бесконечный прямой проводник виден из любой точки вне его под углом  $\alpha_{\max} = \pi$ , поэтому искомая сумма выражается формулой

$$\sum_k \frac{\Delta l_k}{r_k^2} \sin \alpha_k = \sum_k \frac{\Delta \alpha_k \sin \alpha_k}{R} = \frac{1 - \cos \pi}{R} = \frac{2}{R},$$

что и требовалось доказать.

Оценим длину «бесконечного» в данном случае проводника: во сколько раз длина проводника должна быть больше расстояния до точки наблюдения, чтобы погрешность расчета индукции поля по формуле (2), примененной к проводнику конечной длины, была пренебрежимо малой?

Пусть длина прямого проводника равна  $l$ , а индукция поля рассчитывается в точке  $A$ , находящейся на расстоянии  $r$  (считаем, что  $r \ll l$ ) от центра проводника (рис. 43). С помощью полученных формул (7) можно получить точное выражение для индукции поля в рассматриваемой точке  $\bar{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \cdot 2 \cos \alpha_0$ , где  $\alpha_0$  — угол между проводником и направлением на точку наблюдения с конца проводника.

Если считать проводник бесконечно длинным, то индуктивность поля должна рассчитываться по формуле (которую в данном случае следует считать приближенной)  $\tilde{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ . Относительная погрешность этой формулы равна\*

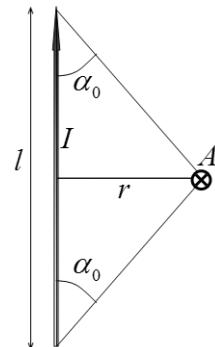


Рис. 43

---

\* Используя известную приближенную формулу  $(1 + x)^\beta \approx 1 + \beta x$  (в данном случае  $\beta = \frac{1}{2}$ ).

$$\varepsilon = \frac{\tilde{B} - \bar{B}}{\bar{B}} = \frac{1}{\cos \alpha_0} - 1 = \frac{\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + r^2}}{\frac{l}{2}} - 1 = \sqrt{1 + 4 \frac{r^2}{l^2}} - 1 \approx 2 \frac{r^2}{l^2}.$$

Такая ошибка будет допущена, если отношение длины проводника к расстоянию до точки наблюдения равно  $\frac{l}{r} = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$ . Так, для относительной ошибки  $\varepsilon = 1\%$  искомое отношение равно  $\frac{l}{r} \approx 15$ . Итак, в рассмотренном случае «бесконечность» равна 15.

## 1.8. Взаимодействие параллельных токов – закон Ампера

Теперь без труда можно получить формулу для вычисления силы взаимодействия двух параллельных токов.

Итак, по двум длинным прямым параллельным проводникам (рис. 44), находящимся на расстоянии  $R$  друг от друга (которое во много раз в 15, меньше длин проводников), протекают постоянные токи  $I_1, I_2$ .

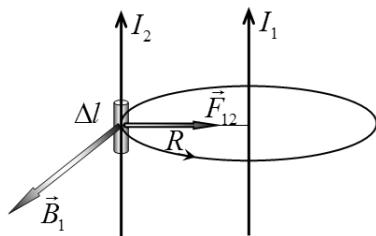


Рис. 44

В соответствии с полевой теорией взаимодействие проводников объясняется следующим образом: электрический ток в первом проводнике создает магнитное поле, которое взаимодействует с электрическим током во втором проводнике. Что-

бы объяснить возникновение силы, действующей на первый проводник, необходимо проводники «поменять ролями»: второй создает поле, которое действует на первый. Повращайте мысленно правый винт, покрутите левой рукой (или воспользуйтесь векторным произведением) и убедитесь, что при токах, текущих в одном направлении, проводники притягиваются, а при токах, текущих в противоположных направлениях, проводники отталкиваются\*.

Таким образом, сила, действующая на участок длиной  $\Delta l$  второго проводника, есть сила Ампера, она равна

$$F_2 = I_2 \Delta l B_1, \quad (1)$$

где  $B_1$  – индукция магнитного поля, созданного первым проводником. При записи этой формулы учтено, что вектор индукции  $\vec{B}_1$  перпендикулярен второму проводнику. Индукция поля, созданного прямым током в первом проводнике, в месте расположения второго, равна

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}. \quad (2)$$

Из формул (1), (2) следует, что сила, действующая на выделенный участок второго проводника, равна

$$F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} \Delta l. \quad (3)$$

Легко убедиться, что такая же по модулю сила действует на участок такой же длины первого про-

\* В электростатике, как всегда, наоборот: одноименные заряды отталкиваются, разноименные притягиваются!

водника. В этом можно убедиться, просто взглянув внимательно на полученный результат (3): силы токов входят в эту формулу симметрично. Таким образом, силы взаимодействия между проводниками удовлетворяют третьему закону Ньютона.

Можно наглядно проиллюстрировать взаимодействие проводников, построив картины силовых линий магнитных полей, создаваемых двумя параллельными проводниками. Если мы умеем рассчитывать поля, то по известному алгоритму можно построить эти силовые линии, затратив немного усилий. Вспомним также, что основоположник теории электромагнитного поля Майкл Фарадей воспринимал силовые линии (магнитного и электрического полей) как упругие трубы, благодаря натяжению которых и возникают силы взаимодействия. Ниже представлены точно рассчитанные картины силовых линий магнитных полей в плоскости, перпендикулярной двум длинным проводникам, по которым протекают постоянные электрические токи.

Так, на рис. 45 показаны силовые линии для токов, текущих в одном направлении, на рис. 45а силы токов равны, а на рис. 45б различны. Не правда ли – эти «упругие трубы» стягивают проводники?

На рис. 46 токи текут в противоположных на-

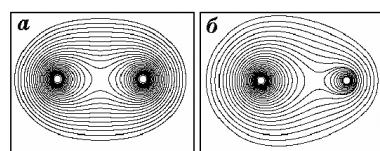


Рис. 45

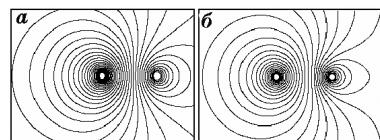


Рис. 46

правлениях, в обоих случаях силы токов различны. Здесь проводникам явно не нравится находиться рядом – они стремятся разойтись.

**Задание для самостоятельной работы**

*Задайте самостоятельно направления токов на рис. 40, 41 и укажите направления силовых линий на этих рисунках.*

### **1.9. Единица силы тока – ампер. Магнитная постоянная**

Полученная в предыдущем разделе формула для силы взаимодействия параллельных токов

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} \Delta l \quad (1)$$

является основой для определения ампера – единицы измерения силы тока, которая в международной системе единиц СИ является основной электрической единицей. Все остальные электрические единицы (кулон, вольт, фарад, ом, тесла и др.) являются производными и выражаются через единицу силы тока и основные механические единицы (метр, секунда, килограмм). На основании этой формулы построен и эталон единицы силы тока\*. Действительно, можно расположить длинные проводники на заданном расстоянии и, регулируя

\* На самом деле реальный эталон силы тока устроен несколько иначе: в этом приборе измеряются силы взаимодействия не длинных прямых проводников, а в более сложной конструкции. Этalon силы тока также называется токовыми весами, в нем регулируется сила взаимодействия катушек с током. Но это уже технические проблемы реализации эталона.

силу тока, добиться требуемого значения силы притяжения между проводниками. Чему же равно «требуемое значение» силы взаимодействия? Ответ дает международное определение ампера, в котором это значение силы является принятым, договорным:

**Один ампер – сила неизменяющегося тока, который, протекая по двум бесконечно длинным параллельным бесконечно тонким проводникам, расположенным на расстоянии 1 метр в вакуме, приводит к появлению силы взаимодействия, равной  $2 \cdot 10^{-7}$  (точно) ньютон на каждый метр длины проводника.** Определение ампера позволяет найти численное значение магнитной постоянной  $\mu_0$ . Для этого следует выразить эту константу из формулы (1) и подставить в нее значения сил токов (1 ампер), расстояния между проводниками (1 метр), длины участка проводника (1 метр) и силы взаимодействия ( $2 \cdot 10^{-7}$ Н):

$$\mu_0 = \frac{2\pi R}{I_1 I_2} \frac{F}{\Delta l} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{A^2} \text{ (точно).}$$

Особо подчеркнем, что магнитная постоянная является точной константой (по определению), для ее получения не требуется никаких измерений – эталонные измерения нужны для силы тока!

Первоначально эталон силы тока представлял собой токовые весы, в которых сила взаимодействия двух коаксиальных катушек уравновешивалась дополнительными грузами.

В 1992 г. в качестве государственного первичного эталона силы постоянного электрического

тока утвержден эталон, позволяющий значительно повысить точность воспроизведения и передачи размера единицы силы тока с использованием косвенных измерений силы тока на основе закона Ома, причем размер единицы электрического напряжения «вольт» воспроизводится с помощью квантового эффекта Джозефсона, а размер единицы электрического сопротивления «ом» – с помощью квантового эффекта Холла.

## 1.10. Электрические и магнитные силы – что больше?

Проведем численное сравнение электрических и магнитных сил в простом примере. Две длинные, параллельные, равномерно заряженные, с линейной плотностью заряда  $\lambda$  нити движутся с постоянными и одинаковыми скоростями, причем векторы скоростей  $\vec{v}$  направлены вдоль нитей (рис. 47). Расстояние между нитями обозначим  $R$ . Движущиеся заряженные нити создают постоянный электрический ток, силу которого можно найти по определению, как заряд, протекающий через поперечное сечение в единицу времени:

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\lambda \Delta l}{\Delta t} = \lambda v. \quad (1)$$

Силу, действующую на участок одной нити длиной  $\Delta l$  со стороны магнитного поля, рассчита-

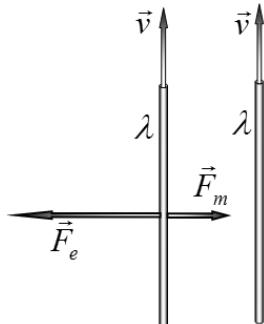


Рис. 47

ем по формуле для взаимодействия параллельных токов

$$F_m = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} \Delta l = \frac{\mu_0 \lambda^2}{2\pi R} \Delta l v^2. \quad (2)$$

Со стороны электрического поля на этот же участок действует сила

$$F_e = \Delta q E = \lambda E \Delta l, \quad (3)$$

где  $E$  – напряженность электрического поля, создаваемого другой нитью. Для расчета этого поля воспользуемся теоремой Гаусса: поток вектора напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность равен заряду, находящемуся внутри этой поверхности, деленному на электрическую постоянную. В качестве замкнутой поверхности выберем цилиндр длиной  $l$  радиуса  $R$ , соосный с нитью (рис. 48). На боковой поверхности вектор напряженности электрического поля постоянен по модулю и направлен нормально к поверхности (это следует из цилиндрической симметрии системы), поэтому поток через эту поверхность равен произведению модуля вектора напряженности на площадь боковой поверхности  $\Phi_E = E \cdot 2\pi R l$ . Поток через основания цилиндра равен нулю, так как в любой точке оснований векторы напряженности и нормали к поверхности перпендикулярны. Из теоремы Гаусса ( $\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$ ) следует равенство  $E \cdot 2\pi R l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$ ,

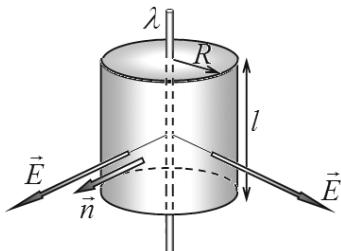


Рис. 48

$$E \cdot 2\pi R l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0},$$

где  $\lambda l$  – заряд, находящийся внутри цилиндра. Итак, искомая напряженность поля равна\*

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}.$$

Следовательно, сила, действующая на выделенный участок со стороны электрического поля, рассчитывается по формуле (очень похожей на формулу (2))

$$F_E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \lambda \Delta l = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 R} \Delta l. \quad (4)$$

Отношение этих сил магнитного и электрического взаимодействия равно

$$\frac{F_m}{F_e} = \frac{\left( \frac{\mu_0 \lambda^2}{2\pi R} \Delta l v^2 \right)}{\left( \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 R} \Delta l \right)} = \epsilon_0 \mu_0 v^2. \quad (5)$$

Мы получили удивительно простую формулу. Рассчитанная величина должна быть безразмерной, поэтому величина  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  должна иметь раз мерность скорости! (*Проверьте самостоятельно, что это действительно так!*) Вычислим ее:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} \approx 3,0 \cdot 10^8 \frac{m}{s}. \quad (6)$$

Полученное значение совпадает с экспериментально измеренной скоростью света в вакууме. Это совпадение не является случайным. Дж. К. Мак-свелл на основании своих уравнений показал, что электромагнитное поле может существовать в виде

---

\* Строго говоря, электрическое поле движущих зарядов отличается от поля неподвижных зарядов, однако при малых скоростях движения эти различия пренебрежимо малы.

волн, скорость которых определяется формулой\* (5). На основании этого результата он сделал пророческий вывод – свет является электромагнитной волной, – который впоследствии был надежно подтверждён экспериментально.

Теперь формулу (5) можно записать в виде

$$\frac{F_m}{F_e} = \epsilon_0 \mu_0 v^2 = \frac{v^2}{c^2}, \quad (7)$$

из которого наглядно видно, что при небольших (по сравнению с громадной скоростью света) скоростях магнитная сила является крайне незначительной добавкой. В начале наших рассуждений о магнитном поле мы рассматривали вопрос об относительности движения и ее влиянии на электрические и магнитные явления. Теперь мы можем дать численную оценку «магнитной добавки» к электрическому взаимодействию. Если рассмотренные нити движутся со скоростью звука  $v \approx 3,3 \cdot 10^2 \frac{m}{s}$  (то есть находятся на очень скоростном самолете), то отношение магнитной силы к электрической равно  $\frac{F_m}{F_e} = \frac{v^2}{c^2} \approx 10^{-12}$ , то есть пренебрежимо мало и не может быть обнаружено экспериментально. Итак, для зарядов, движущихся с «обычными» скоростями, с высокой степенью можно пользоваться формулами электростатики.

---

\* Будем честны: Дж. К. Максвелл пользовался другой системой единиц измерения, поэтому он не мог получить в точности именно эту формулу, он получил эквивалентное соотношение в другой системе единиц. Важно, что вычисленная им скорость электромагнитных волн совпадла со скоростью света!

Магнитные взаимодействия проявляются тогда, когда в системе отсутствуют электрические взаимодействия. Так, проводники, по которым текут электрические токи, являются электрически нейтральными, поэтому для них можно наблюдать магнитные эффекты «в чистом виде», а не на фоне мощных электрических явлений.

### 1. 11. Магнитный поток, теорема о магнитном потоке

Ранее мы убедились, насколько полезно и удобно понятие потока векторного поля. Не является исключением и описание магнитного поля: для него также определяется поток и формулируется теорема об этом потоке.

Поток вектора магнитной индукции (который также называется **магнитным потоком**) определяется традиционно\*. Пусть в некоторой малой области пространства существует магнитное поле, которое можно считать однородным, то есть в этой области вектор магнитной индукции постоянен как по величине, так и по направлению.

Выделим малую площадку площадью  $\Delta S$ , ориентация которой задается единичным вектором нормали  $\vec{n}$  (рис. 49). Магнитный поток через эту площадку  $\Delta\Phi_m$  определя-

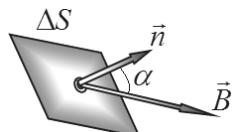


Рис. 49

\* Достаточно взять текст с определением потока вектора напряженности электрического поля и изменить обозначения (что здесь и сделано).

ется как произведение площади площадки на нормальную составляющую вектора индукции магнитного поля

$$\Delta\Phi_m = B \cos\alpha \Delta S = (\vec{B} \cdot \vec{n}) \Delta S = B_n \Delta S, \quad (1)$$

где  $(\vec{B} \cdot \vec{n}) = B \cos\alpha$  — скалярное произведение векторов  $\vec{B}$  и  $\vec{n}$ ;

$B_n$  — нормальная к площадке компонента вектора магнитной индукции.

В произвольном магнитном поле магнитный поток через произвольную поверхность определяется следующим образом (рис. 50):

- поверхность разбивается на малые площадки  $\Delta S_i$  (которые можно считать плоскими);
- определяется вектор индукции  $\vec{B}_i$  на этой площадке (который в пределах площадки можно считать постоянным);
- вычисляется сумма потоков через все площадки, на которые разбита поверхность

$$\Phi = \Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_2 + \Delta\Phi_3 + \dots = \sum_i \Delta\Phi_i = \sum_i B_i \cos\alpha_i \cdot \Delta S_i. \quad (2)$$

Эта сумма называется **потоком вектора индукции магнитного поля через заданную поверхность (или магнитным потоком)**.

Обратите внимание, что при вычислении потока суммирование проводится по точкам наблюдения поля, а не по источникам, как при использовании принципа суперпозиции. Поэтому магнитный поток является интегральной характеристикой

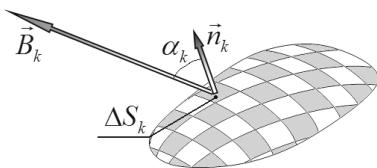


Рис. 50

поля, описывающей его усредненные свойства на всей рассматриваемой поверхности.

Трудно найти физический смысл магнитного потока. Но, как и для иных полей, это полезная вспомогательная физическая величина. Но, в отличие от других потоков, магнитный поток настолько часто встречается в приложениях, что в системе СИ удостоился «персональной» единицы измерения – вебер<sup>\*</sup>: **1 вебер – магнитный поток однородного магнитного поля индукции 1 Тл через площадку площадью 1 м<sup>2</sup>, ориентированную перпендикулярно вектору магнитной индукции.**

Теперь докажем простую, но чрезвычайно важную теорему о магнитном потоке через замкнутую поверхность.

Ранее мы установили, что силовые линии любого магнитного поля являются замкнутыми; уже из этого следует, что магнитный поток через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Тем не менее приведем более формальное доказательство этой теоремы.

Прежде всего отметим, что для магнитного потока справедлив принцип суперпозиции: если магнитное поле создано несколькими источниками, то для любой поверхности поток поля, созданного системой элементов тока, равен сумме потоков полей, созданных каждым элементом тока в отдельности. Это утверждение следует непосредственно из принципа суперпозиции для вектора индукции

---

\* Названа в честь немецкого физика (члена Петербургской академии наук) Вильгельма Эдуарда Вебера (1804 – 1891).

и прямо пропорциональной связи между магнитным потоком и вектором магнитной индукции. Следовательно, достаточно доказать теорему для поля, созданного элементом тока, индукция которого определяется по закону Био-Саварра-Лапласа. Здесь для нас важна структура поля, обладающего осевой круговой симметрией, значение модуля вектора индукции несущественно.

Выберем в качестве замкнутой поверхности поверхность бруска, вырезанного, как показано на рис. 51. Магнитный поток отличен от нуля только через его две боковые грани, но эти потоки имеют противоположные знаки. Вспомним, что для замкнутой поверхности выбирают внешнюю нормаль, поэтому на одной из указанных граней (передней) поток положительный, а на задней отрицательный. Причем модули этих потоков равны, так как распределение вектора индукции поля на этих гранях одинаково. Данный результат не зависит от положения рассмотренного бруска. Произвольное тело можно разбить на бесконечно малые части, каждая из которых подобна рассмотренному брускому.

Наконец, сформулируем еще одно важное свойство потока любого векторного поля. Пусть произвольная замкнутая поверхность ограничивает некоторое тело (рис. 52). Разобьем это тело

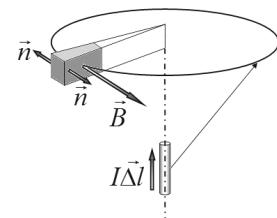


Рис. 51

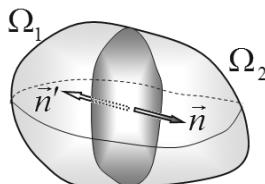


Рис. 52

на две части, ограниченные частями исходной поверхности  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , и замкнем их общей границей раздела тела. Сумма потоков через эти две замкнутые поверхности равна потоку через исходную поверхность! Действительно, сумма потоков через границу (один раз для одного тела, другой раз – для другого) равна нулю, так как в каждом случае надо брать разные, противоположные нормали (каждый раз внешнюю). Аналогично можно доказать утверждение для произвольного разбиения тела: если тело разбито на произвольное число частей, то поток через поверхность тела равен сумме потоков через поверхности всех частей разбиения тела. Это утверждение очевидно для потока жидкости.

Фактически, мы доказали, что если поток векторного поля равен нулю через некоторую поверхность, ограничивающую малый объем, то этот поток равен нулю через любую замкнутую поверхность.

**Итак, для любого магнитного поля справедлива теорема о магнитном потоке: магнитный поток через любую замкнутую поверхность равен нулю:  $\Phi_m = 0$ .**

Ранее мы рассматривали теоремы о потоке для поля скоростей жидкости и электростатического поля. В этих случаях поток через замкнутую поверхность полностью определялся точечными источниками поля (истоками и стоками жидкости, точечными зарядами). В общем случае наличие ненулевого потока через замкнутую поверхность свидетельствует о наличии точечных источников поля. Следовательно, физическим содержанием

**теоремы о магнитном потоке является утверждение об отсутствии магнитных зарядов.**

Если вы хорошо разобрались в данном вопросе и сумеете объяснить и отстоять свою точку зрения, то можете формулировать теорему о магнитном потоке и так: «Еще никто не нашел монополя Дирака».

Следует особо подчеркнуть, что, говоря об отсутствии источников поля, мы имеем виду именно точечные источники, подобные электрическим зарядам. Если провести аналогию с полем движущейся жидкости, электрические заряды подобны точкам, из которых вытекает (или втекает) жидкость, увеличивая или уменьшая ее количество. Возникновение магнитного поля, благодаря движению электрических зарядов, подобно движению тела в жидкости, которое приводит к появлению вихрей, не изменяющих общего количества жидкости.

Векторные поля, для которых поток через любую замкнутую поверхность равен нулю, получили красивое, экзотическое название – **соленоидальные**. Соленоидом называется проволочная катушка, по которой можно пропускать электрический ток. Такая катушка может создавать сильные магнитные поля, поэтому термин соленоидальный означает «подобный полю соленоида», хотя можно было назвать такие поля попроще – «магнитоподобные». Наконец, такие поля еще называют **вихревыми**, подобно полю скоростей жидкости, образующей в своем движении всевозможные турбулентные завихрения.

Теорема о магнитном потоке имеет большое значение, она часто используется при доказательстве различных свойств магнитных взаимодействий, с ней мы будем встречаться неоднократно. Так, например, теорема о магнитном потоке доказывает, что вектор индукции магнитного поля, создаваемого элементом, не может иметь радиальной составляющей (рис. 28а), иначе поток через цилиндрическую поверхность, коаксиальную с элементом тока, был бы отличен от нуля.

Теперь проиллюстрируем применение теоремы о магнитном потоке для расчета индукции магнитного поля. Пусть магнитное поле создается кольцом с током, которое характеризуется магнитным моментом  $p_m$ . Рассмотрим поле вблизи оси кольца на расстоянии  $z$  от центра, значительно большем радиуса кольца (рис. 53). Ранее мы получили формулу для индукции магнитного поля на оси для больших расстояний от центра кольца:

$$B_z = \frac{\mu_0 p_m}{2\pi z^3}. \quad (3)$$

Мы не допустим большой ошибки, если будем считать, что такое же значение имеет вертикальная (пусть ось кольца вертикальна) компонента поля в пределах небольшого кольца радиусом  $r$ , плоскость которого перпендикулярна оси кольца. Так как вертикальная компонента поля изменяется с изменением расстояния, то неизбежно

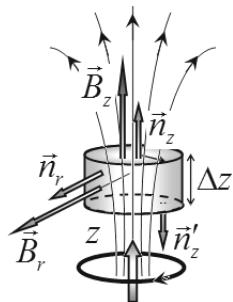


Рис. 53

должны присутствовать радиальные компоненты поля, иначе не будет выполняться теорема о магнитном потоке! Оказывается, этой теоремы и формулы (3) достаточно, чтобы найти эту радиальную компоненту. Выделим тонкий цилиндр толщиной  $\Delta z$  и радиуса  $r$ , нижнее основание которого находится на расстоянии  $z$  от центра кольца, соосный с кольцом, и применим теорему о магнитном потоке к поверхности этого цилиндра. Магнитный поток через нижнее основание равен (учтите, что векторы индукции и нормали здесь противоположны)

$$\Phi_1 = -B_z(z) \cdot \pi r^2,$$

где  $B_z(z)$  – значение вертикальной компоненты вектора индукции на высоте  $z$ ;

поток через верхнее основание равен

$$\Phi_2 = B_z(z + \Delta z) \cdot \pi r^2,$$

где  $B_z(z + \Delta z)$  – значение вертикальной компоненты вектора индукции на высоте  $z + \Delta z$ ;

поток через боковую поверхность (из осевой симметрии следует, что модуль радиальной составляющей вектора индукции  $B_r$  на этой поверхности постоянен):

$$\Phi_3 = B_r \cdot 2\pi r \Delta z.$$

По доказанной теореме, сумма этих потоков равна нулю, поэтому справедливо уравнение

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = -B_z(z) \cdot \pi r^2 + B_z(z + \Delta z) \cdot \pi r^2 + B_r \cdot 2\pi r \Delta z = 0,$$

из которого определим искомую величину

$$B_r = -\frac{r}{2} \cdot \frac{B_z(z + \Delta z) - B_z(z)}{\Delta z}. \quad (4)$$

Осталось использовать формулу (3) для вертикальной составляющей поля и провести необходимые вычисления\*:

$$B_r = -\frac{r}{2} \cdot \frac{B_z(z + \Delta z) - B_z(z)}{\Delta z} = -\frac{r}{2} \frac{\mu_0 p_m}{2\pi \Delta z} \left( \frac{1}{(z + \Delta z)^3} - \frac{1}{z^3} \right) = \\ = -r \frac{\mu_0 p_m}{4\pi z^3 \Delta z} \left( \left( 1 + \frac{\Delta z}{z} \right)^{-3} - 1 \right) \approx -r \frac{\mu_0 p_m}{4\pi z^3 \Delta z} \left( \left( 1 - 3 \frac{\Delta z}{z} \right) - 1 \right) = \frac{3\mu_0 p_m}{4\pi z^4} r. \quad (5)$$

Действительно, убывание вертикальной компоненты поля приводит к появлению горизонтальных компонент: уменьшение вытекания через основания приводит к «течі» через боковую поверхность.

Таким образом, мы доказали «криминальную теорему»: если через один конец трубы вытекает меньше, чем вливают в нее с другого конца, то где-то воруют через боковую поверхность.

## 1.12. Циркуляция вектора индукции. Теорема о циркуляции магнитного поля

Силовые линии магнитного поля являются замкнутыми кривыми, поэтому картины силовых линий магнитного поля напоминают линии тока жидкости, движущейся с завихрениями. Посмотрите еще раз на приведенные ранее картины силовых линий магнитного поля – сплошные вихри. На рис. 54 показаны еще два примера силовых ли-

---

\* Самые грамотные могут увидеть в последней дроби производную функции (3) и элементарно ее вычислить, нам же придется очередной раз воспользоваться приближенной формулой  $(1 + x)^\beta \approx 1 + \beta x$ .

ний магнитного поля, созданного длинными параллельными проводниками (на рис. 54а – их три, а на рис. 54б – пять), по которым протекают равные токи.

Для математического описания таких полей удобно использовать понятие циркуляции вектора.

Точнее следует сказать, что знание циркуляции необходимо для описания любого векторного поля: напомним, любое векторное поле определяется однозначно, если известны теорема о потоке и циркуляция векторов этого поля. Другое дело, что в электростатическом поле циркуляция вектора по любому контуру равна нулю, поэтому электростатическое поле является потенциальным и для него оказывается возможным ввести такую важную физическую характеристику, как потенциал поля. Для магнитного поля циркуляция не имеет явного физического смысла, а является весьма полезной вспомогательной математической величиной.

Определение циркуляции вектора магнитной индукции аналогично определению циркуляции любого векторного поля.

Рассмотрим произвольную замкнутую линию (необязательно, чтобы это была силовая линия). Выделим на этой линии малый участок, определяемый вектором  $\Delta \vec{l}$  (рис. 55). Пусть вектор ин-

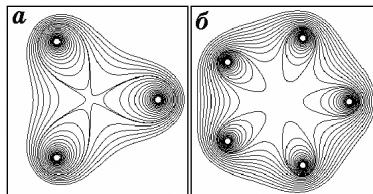


Рис. 54

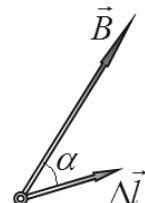


Рис. 55

дукции магнитного поля на этом участке равен  $\vec{B}$ , вычислим скалярное произведение этих векторов  $\Delta\Gamma_B = \vec{B} \cdot \vec{\Delta l} = B\Delta l \cos\alpha$ , где  $\alpha$  – угол между вектором индукции и касательным вектором к выбранной линии (он совпадает с выделенным малым участком  $\vec{\Delta l}$ ).

Далее разобьем всю замкнутую линию (рис. 56) на малые участки  $\vec{\Delta l}_i$ , на каждом из которых вычислим скалярное произведение  $\Delta\Gamma_{Bi} = \vec{B}_i \cdot \vec{\Delta l}_i = B_i \Delta l_i \cos\alpha_i$ , и просуммируем\* их по всем участкам замкнутой линии (контура):

$$\Gamma_B = B_1 \Delta l_1 \cos\alpha_1 + B_2 \Delta l_2 \cos\alpha_2 + B_3 \Delta l_3 \cos\alpha_3 + \dots = \sum_i B_i \Delta l_i \cos\alpha_i. \quad (1)$$

Построенная таким образом математическая конструкция называется **циркуляцией вектора магнитной индукции по заданному контуру  $L$** . Ее величина может быть как положительной, так и отрицательной, ее знак определяется произвольным выбором направления обхода контура, но, как обычно, положительным принимается направление обхода против часовой стрелки.

Понятно, что циркуляция магнитного поля может отличаться от нуля. Например, если в качестве произвольного контура выбрать замкнутую силовую линию, то при ее обходе на всех участках

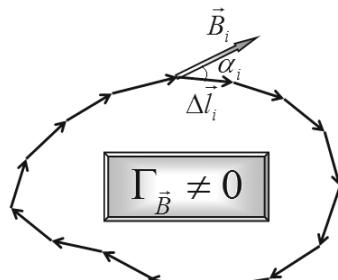


Рис. 56

---

\* Очевидно, но укажем, что суммирование проводится по точкам наблюдения.

вектор индукции будет совпадать по направлению с направлением касательной, как было сказано ранее, «все время будем плыть по течению».

Теперь нам необходимо установить теорему, позволяющую установить циркуляцию вектора индукции. Отметим, что эта теорема является прямым следствием закона Био-Саварра-Лапласа, можно сказать, иной математической формулировкой этого физического закона. Не будем заниматься строгим доказательством теоремы, а проиллюстрируем ее простым примером.

Пусть магнитное поле создается длинным прямым проводником, по которому протекает электрический ток силой  $I$ . Индукцию такого поля мы рассчитали: силовые линии являются концентрическими окружностями с центрами на проводнике (рис. 57). Легко подсчитать циркуляцию вектора индукции (1) по контуру, совпадающему с одной из силовых линий (например, радиуса  $r$ ). Действительно, на любом участке этого контура вектор индукции направлен по касательной (поэтому все  $\alpha_i = 0$ ), а модуль вектора индукции постоянен и равен  $B_i = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ , поэтому суммирование в формуле (1) сводится к вычислению длин малых отрезков окружности (после недолгих размышлений можно сообразить, что она равна длине окружности), поэтому для данного контура

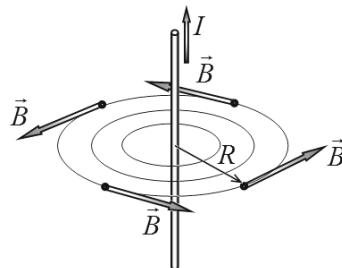


Рис. 57

$$\Gamma_B = \sum_i B_i \Delta l_i \cos \alpha_i = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sum_i \Delta l_i = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cdot 2\pi r = \mu_0 I . \quad (2)$$

Таким образом, циркуляция по выбранному контуру оказалась равной произведению силы тока на магнитную постоянную, причем независимо от радиуса выбранной окружности. Такой красивый результат не может быть случайным – доказано\*, что такое же значение циркуляции получится для любого контура, охватывающего проводник с током, причем необязательно прямой. А что будет в том случае, если контур не охватывает проводник с током? В этом случае циркуляция будет равна нулю. Очень просто это доказать для контура, показанного на рис. 58 (*проделайте это самостоятельно*).

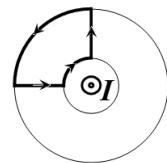


Рис. 58

Так как для вектора магнитной индукции справедлив принцип суперпозиции, а циркуляция линейно выражается через индукцию поля, то принцип суперпозиции также справедлив и для циркуляции магнитного поля.

Обобщая все эти положения, дадим окончательную формулировку теоремы о циркуляции: **циркуляция вектора магнитной индукции по любому контуру равна сумме токов, пересекающих контур, умноженной на магнитную постоянную**

$$\Gamma_B = \mu_0 I . \quad (3)$$

Сумма токов, пересекающих контур  $I = \sum_k I_k$ , понимается в алгебраическом смысле, то есть токи

\* Поверьте на слово, если не сможете доказать!

могут быть как положительными, так и отрицательными. Сила тока считается положительной, если его направление и направление обхода образуют правый винт (рис. 59). Так же, как и поток, циркуляция является интегральной (не точечной) характеристикой магнитного поля – из того, что циркуляция по какому-то контуру равна нулю, не следует, что магнитное поле отсутствует: может, контур не охватывает ни один ток или их сумма равна нулю. Токи, не пересекающие контур, также создают магнитное поле, но циркуляция этого поля по такому контуру равна нулю.

Наконец, уточним, что значит «ток пересекает контур», особенно если контур не является плоским. Контур – это замкнутая линия, поэтому приведенное выражение следует понимать, как «ток пересекает любую поверхность (рис. 60), опирающуюся на контур» (или еще говорят «поверхность, натянутую на контур»). Легко доказать, что эта сумма токов не зависит от выбора поверхности, натянутой на данный контур: из закона сохранения электрического заряда следует, что в статическом случае (когда все токи и все заряды не изменяются с течением времени) сумма

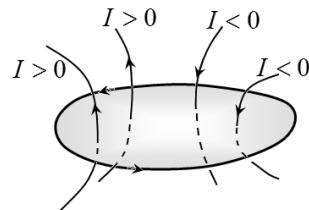


Рис. 59

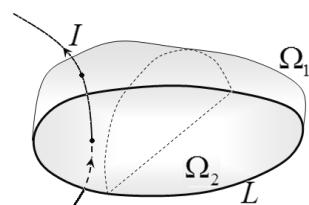


Рис. 60

токов, пересекающих любую замкнутую поверхность, равна нулю («сколько втекает, столько же вытекает»).

## 1.13. Применение теоремы о циркуляции к расчету магнитного поля

### 1.13.1. Поле цилиндрического проводника с током

Постоянный электрический ток силой  $I$  протекает по длинному цилиндрическому проводнику радиуса  $R$  (рис. 61). Найдем распределение индукции магнитного поля в пространстве как внутри цилиндра, так и вне его. Будем считать, что ток равномерно распределен по поперечному сечению цилиндра, то есть плотность тока является постоянной и равной

$$j = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi R^2}. \quad (1)$$

Это предположение выглядит логичным, однако необоснованным, на самом деле расчет распределения плотности тока является отдельной сложной задачей.

Можно повторить все рассуждения и экспериментальные обоснования, которые привели нас к

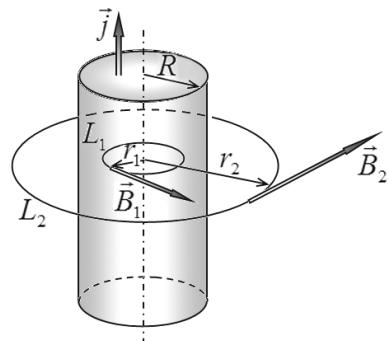


Рис. 61

выводу о том, что силовые линии магнитного поля прямого тока являются концентрическими окружностями. В данном случае симметрия задачи также осевая, поэтому и здесь силовые линии – окружности с центрами на оси цилиндра. Для расчета величины магнитной индукции, конечно, допустимо использовать закон Био-Савара и принцип суперпозиции. Но зачем идти таким длинным путем, если есть возможность воспользоваться теоремой о циркуляции вектора магнитной индукции? Сначала в качестве контура  $L_1$  выберем окружность радиуса  $r_1$ , совпадающую с одной из силовых линий, которая расположена внутри цилиндра. На этой окружности вектор индукции направлен по касательной к контуру (это же силовая линия) и постоянен по модулю, поэтому циркуляция вектора индукции равна произведению ее модуля на длину окружности  $\Gamma_B = B_1 \cdot 2\pi r_1$ . Сила тока, пересекающего контур, равна произведению плотности тока на площадь круга, ограниченного рассматриваемым контуром  $I_1 = j \cdot \pi r_1^2 = I \frac{r_1^2}{R^2}$ . По известной теореме, циркуляция вектора магнитной индукции равна электрическому току, пересекающему контур, умноженному на магнитную постоянную, поэтому справедливо равенство  $B_1 \cdot 2\pi r_1 = \mu_0 I \frac{r_1^2}{R^2}$ , из которого находим значение индукции поля

$$B_1 = \frac{\mu_0 I r_1}{2\pi R^2}, \quad (2)$$

которая возрастает пропорционально расстоянию до оси цилиндра.

Этот результат позволяет сделать еще один интересный вывод: внутри описанного цилиндра магнитное поле создается только теми токами, которые протекают внутри выбранного контура, внешние токи по отношению к контуру внутри магнитного поля не создают.

Если вычислить циркуляцию для кругового контура  $L_2$ , радиус  $r$  которого превышает радиус цилиндра, то она по-прежнему будет равна  $\Gamma_B = B_2 \cdot 2\pi r_2$ , но сила тока, пересекающего контур, будет равна  $I$  (весь ток пересекает контур), поэтому теорема о циркуляции для этого контура будет иметь вид  $B_2 \cdot 2\pi r_2 = \mu_0 I$ , из чего следует, что магнитное поле в рассматриваемом случае совпадает с полем прямого тока, индукция которого равна

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}, \quad (3)$$

и убывает обратно пропорционально расстоянию до оси цилиндра. На поверхности цилиндра (при  $r = R$ ) формулы (2) и (3) приводят к одному и тому же результату, здесь индукция поля максимальна  $B_{\max} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$ .

**Важно отметить, что распределение магнитного поля вне цилиндра не зависит от распределения плотности тока внутри цилиндра, если это распределение сохраняет осевую симметрию.** Поэтому, если поле создается электрическими токами, протекающими по тонким проводам, то нас не интересует распределение плотности тока в поперечном сечении.

График зависимости индукции поля от расстояния до оси цилиндра приведен на рис. 62.

### 1.13.2. Поле пластины с током

Электрический ток равномерно протекает по очень большой пластине (то есть будем считать ее бесконечной), линейная плотность тока равна  $i$  (рис. 63). Найдем индукцию магнитного поля, создаваемого таким распределением токов.

В том случае, когда электрический ток протекает по тонкой пластине, можно пренебречь толщиной пластины или распределением плотности тока по глубине, тогда распределение токов на поверхности удобно характеризовать линейной плотностью – отношением силы тока, пересекающего малый отрезок, перпендикулярный направлению тока, к длине этого отрезка

$$i = \frac{\Delta I}{\Delta l}. \quad (1)$$

Линейную плотность тока можно считать вектором, указывающим направление движения зарядов.

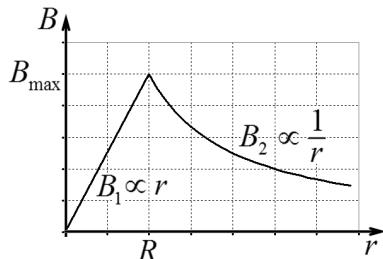


Рис. 62

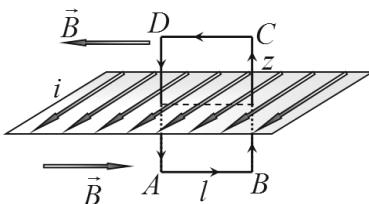


Рис. 63

Линейная плотность тока является некоторым аналогом поверхностной плотности заряда: когда можно пренебречь толщиной слоя, в котором находятся заряды, то все заряды находятся на поверхности и описывать их распределение можно поверхностной плотностью  $\sigma$ . Кстати, равномерное распределение поверхностных токов можно получить, если равномерно заряженную пластину (с постоянной плотностью заряда  $\sigma$ ) двигать с постоянной скоростью  $\vec{v}$ , направленной вдоль плоскости пластины (рис. 64). В этом случае линейная плотность электрического тока равна  $\bar{i} = \sigma \vec{v}$  (*докажите это самостоятельно*).

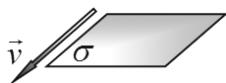


Рис. 64

Вернемся к расчету магнитного поля. Прежде всего, нам необходимо попытаться определить направление вектора индукции этого поля. Используя симметрию задачи, можно утверждать, что вектор индукции может зависеть только от расстояния до плоскости (если сместиться на некоторое расстояние вдоль плоскости, то распределение токов не изменится – почему должно измениться создаваемое вектором поле?) Поле под плоскостью совпадет с полем над плоскостью при его повороте на  $180^\circ$  (при таком повороте распределение токов на плоскости не изменяется).

Далее, вектор индукции такого поля не может иметь составляющую, перпендикулярную пластине, иначе не будет выполняться теорема о магнитном потоке.

Наконец, прямой электрический ток создает магнитное поле, вектор индукции которого перпендикулярен направлению тока – откуда в данной задаче взяться составляющей вектора индукции, параллельной току?

Таким образом, мы приходим к выводу, что **вектор индукции изучаемого поля и его силовые линии направлены параллельно пластине и перпендикулярны направлению тока** (рис. 63).

К этому же выводу можно прийти на основании принципа суперпозиции. Для этого следует разбить плоскость на ряд очень тонких полосок, параллельных направлению тока, которые можно рассматривать как линейные токи (рис. 65).

Затем следует просуммировать\* векторы индукции полей, создаваемых каждой полоской. Понятно, что на бесконечной плоскости каждой полоске  $I_1$  (за исключением  $I_0$ , той, которая находится непосредственно под точкой наблюдения  $A$ ) найдется симметричная ей  $I_2$ . Сумма векторов индукции полей, создаваемых симметричными полосками, направлена параллельно плоскости и перпендикулярно току (так же, как и вектор индукции центральной полоски  $I_0$ ). Следовательно, и

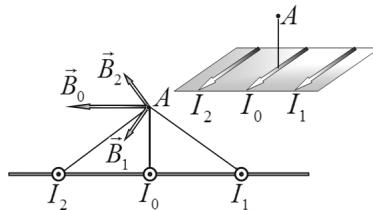


Рис. 65

\* Еще раз обратим внимание: здесь суммирование проводится по источникам, а точка наблюдения фиксирована.

сумма векторов индукции полей, создаваемых всеми полосками, направлена так же.

Все эти рассуждения нам необходимы, чтобы выбрать контур для подсчета циркуляции в виде прямоугольника  $ABCD$  (рис. 63), симметричного относительно пластины, плоскость которого перпендикулярна пластине и направлению тока, а две его стороны параллельны пластине (длины этих сторон обозначим  $l$ ). На сторонах  $BC$  и  $DA$  вектор индукции перпендикулярен им (поэтому здесь  $\vec{B} \cdot \Delta \vec{l} = 0$ ), а на сторонах, параллельных плоскости, вектор индукции постоянен и направлен вдоль контура (поэтому на каждой из этих сторон  $\sum_k \vec{B}_k \cdot \Delta \vec{l}_k = Bl$ ). Таким образом, циркуляция вектора индукции по данному контуру равна  $\Gamma_B = 2Bl$ . Используя теорему о циркуляции, запишем уравнение

$$\Gamma_B = 2Bl = \mu_0 I = \mu_0 il,$$

(где  $I = il$  – сила тока, пересекающего контур), из которого определим индукцию поля

$$B = \frac{\mu_0 i}{2}. \quad (2)$$

Во-первых, полученный результат говорит, что магнитное поле является однородным – его индукция постоянна (заранее мы не могли утверждать, что она не зависит от расстояния до пластины). Во-вторых, полученная формула удивительно похожа на формулу для напряженности поля равномерно заряженной пластины (если правильно поменять магнитную и электрическую постоянные); правда, вектор напряженности перпендикулярен пластине, а вектор индукции параллелен ей.

### 1.13.3. Поле соленоида

Соленоидом называется цилиндрическая катушка с проволочной обмоткой, по которой можно пропускать электрический ток (рис. 66). Такой прибор широко используется в различных приборах для создания магнитного поля и других целей.

Сейчас наша задача – рассчитать характеристики магнитного поля, созданного электрическим током, протекающим по обмотке. Будем считать, что все параметры катушки (соленоида) нам известны. Для этого, прежде всего, необходимо качественно обсудить структуру магнитного поля. Первое, самое очевидное: источник обладает осевой симметрией, поэтому создаваемое им поле также должно быть осесимметричным, поэтому достаточно рассмотреть структуру поля (например, его силовые линии).

Далее воспользуемся способом рассуждений Майкла Фарадея, который с каждым электрическим зарядом связывал определенное число силовых линий электрического поля, исходящих из заряда (свообразная трактовка теоремы Гаусса), а с каждым элементом тока – определенное число замкнутых силовых линий магнитного поля (теорема о циркуляции индукции магнитного поля).

Соленоид, поле которого мы изучали, является совокупностью параллельных, практически

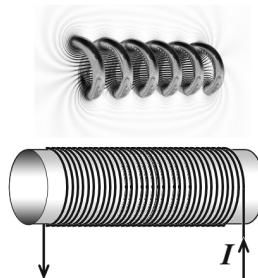


Рис. 66

плоских, круговых витков. Посмотрим еще раз на силовые линии поля одного витка (на рис. 67 показаны поля двух витков – каждое из которых часть рисунка 38). Силовые линии должны охватить проводник с током, поэтому они сгущаются внутри витка, а снаружи удаляются от него. Если сблизить два витка, то силовые линии начнут охватывать оба проводника (токи в них текут в одном направлении), что приведет к еще большему сгущению внутри витков и удалению от них снаружи. Добавление числа витков будет усиливать этот эффект. Поэтому следует ожидать, что для длинного соленоида с большим числом витков силовые линии внутри соленоида будут почти прямыми линиями с небольшими искривлениями при приближении к границам катушки (рис. 68), а снаружи от него будут замыкаться где-то очень далеко от катушки.

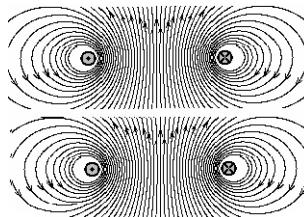


Рис. 67

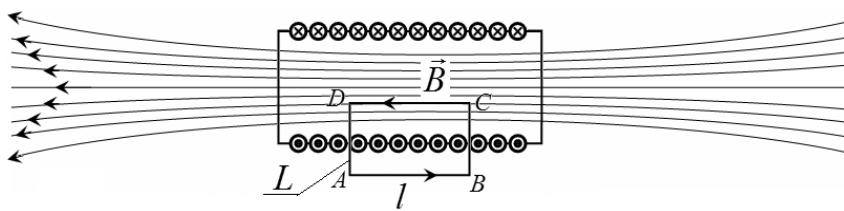


Рис. 68

Проведем еще одну цепочку рассуждений, приводящих к такому же выводу о структуре магнитного поля соленоида.

Сначала рассмотрим электрическое поле равномерно заряженной плоскости, которое является однородным с каждой стороны от плоскости и зеркально симметричным. А затем мысленно свернем часть плоскости в цилиндрическую трубку (рис. 69). Внутри векторы напряженности окажутся направленными противоположно друг другу, поэтому скомпенсируют друг друга – поле внутри равномерно заряженного цилиндра отсутствует, а снаружи будет радиальным (рис. 69).

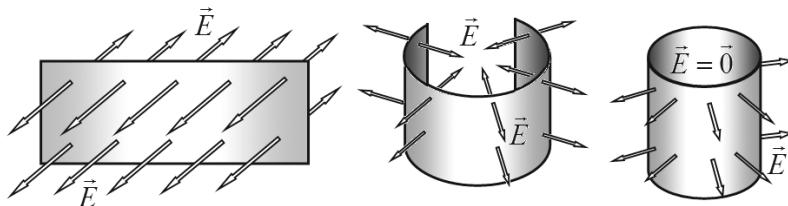


Рис. 69

Теперь «сделаем» соленоид из участка плоскости, по которой равномерно протекает электрический ток. В этом случае силовые линии внутри цилиндра сгущаются, а снаружи имеют возможность «разбежаться» (рис. 70).

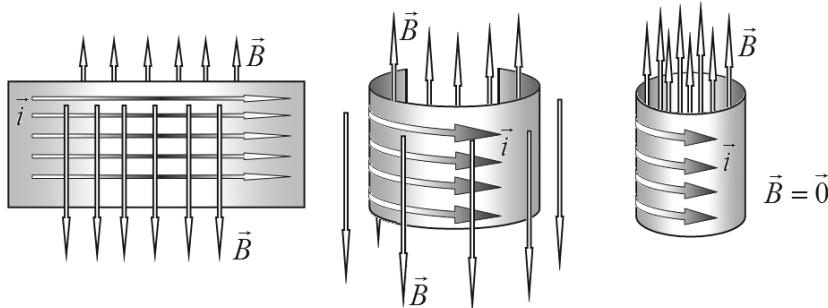


Рис. 70

Интересная конструкция получится, если расположить параллельно две плоские пластины, по которым токи текут в противоположных направлениях. В этом случае магнитное поле будет создаваться только между пластинами, так как снаружи поля пластин направлены противоположно и компенсируют друг друга. Не напоминает ли эта система плоский конденсатор? Мы использовали плоский конденсатор, чтобы получить выражение для энергии электрического поля. Для этого мы рассчитали работу, которую необходимо совершить, чтобы увеличить расстояние между пластинами. Эта работа равна увеличению энергии поля, которая увеличивается, так как увеличивается объем, занятый полем. Если применить эту же методику к расчету энергии магнитного поля, то приедем к удивительному парадоксу. Действительно, пластины, по которым токи текут в противоположных направлениях, отталкиваются! Поэтому, чтобы совершить положительную работу и тем самым увеличить энергию системы, внешняя сила должна уменьшить расстояние между пластинами, тем самым объем, занятый полем, также уменьшится. Таким образом, кажется, что положительная работа внешних сил приводит к уменьшению энергии системы?! Разрешение данного парадокса заклю-

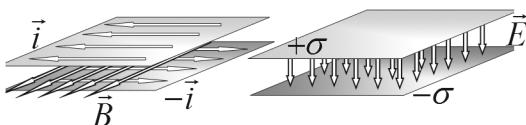


Рис. 71

чается в том, что при изменении расстояния между пластинами либо изменятся токи на пластинах, либо пластины должны быть подключены к источнику тока, который не окажется безучастным в процессах преобразования энергии. Подробно эти проблемы мы сможем обсудить после изучения свойств переменных электромагнитных полей.

### Задание для самостоятельной работы

«Сверните» мысленно из части плоскости, по которой течет постоянный электрический ток, цилиндр так, чтобы ток тек вдоль цилиндра (параллельно его оси). Установите структуру магнитного поля, создаваемого этим током.

В конце концов, для физиков основной критерий истины – эксперимент. Поэтому на рис. 72 показана фотография силовых линий магнитного поля соленоида с током, полученная с помощью металлических опилок, которая явно подтверждает наши рассуждения: внутри силовые линии магнитного поля близки к прямым, параллельным оси соленоида, а снаружи, вблизи него, магнитное поле практически отсутствует.

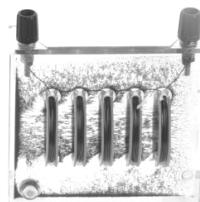


Рис. 72

После того как структура поля установлена, расчет величины индукции поля является «прimitивной задачкой». Выберем контур (см. рис. 68) для применения теоремы о циркуляции в виде прямоугольника  $ABCD$ , стороны которого  $AB$  и  $CD$  параллельны оси катушки. Подсчет циркуляции вектора индукции магнитного поля (то есть сум-

мы  $\Gamma_B = \sum_i \vec{B}_i \Delta \vec{l}_i$ ) в рассматриваемом случае прост: на стороне  $AB$  магнитное поле отсутствует; на сторонах  $BC$  и  $DA$  вектор индукции перпендикулярен контуру (поэтому соответствующие слагаемые также равны нулю); на стороне  $CD$  вектор индукции постоянен и параллелен этой стороне, поэтому здесь  $\sum_i \vec{B}_i \Delta \vec{l}_i = Bl$  ( $l$  – длина этой стороны контура). Таким образом, уравнение теоремы о циркуляции в данном случае имеет вид

$$Bl = \mu_0 N I, \quad (1)$$

где  $N$  – число витков обмотки, которые попали внутрь выбранного контура. Из этого уравнения находим индукцию магнитного поля внутри соленоида

$$B = \mu_0 n I, \quad (2)$$

где  $n = \frac{N}{l}$  – число витков обмотки на единицу длины соленоида, эта величина также называется плотностью намотки.

Из окончательной формулы (2) следует, что поле внутри длинного соленоида является однородным. При приближении к торцам соленоида начинают сказываться так называемые краевые эффекты: во-первых, поле перестает быть однородным, появляются радиальные составляющие вектора индукции (силовые линии изгибаются), во-вторых, величина индукции поля уменьшается.

#### Задание для самостоятельной работы

*Покажите, что в точке, находящейся в центре торца соленоида, индукция поля уменьшается в два раза по*

*сравнению с индукцией поля в точках, далеких от торцов.*  
*(Подсказка: мысленно присоедините к рассматриваемому торцу еще один такой же соленоид).*

## **1.14. Электростатика и магнитостатика: заключение**

При изложении теории постоянного магнитного поля мы постоянно обращались к теории электрического поля и во многих местах строили изложение по аналогии\*. Такое изложение возможно потому, что теория любого векторного поля строится таким же образом.

Несмотря на сказанное выше, электростатическое и магнитостатические поля различаются принципиально. С точки зрения физики, это разные материальные объекты: магнитное поле не действует на неподвижные электрические заряды, электрическое поле не действует на постоянные электрические токи. С точки зрения математики, магнитное поле является вихревым (соленоидальным), а электростатическое – потенциальным (физически – работа поля по перемещению заряда по замкнутому контуру равна нулю, математически – циркуляция равна нулю). Именно этим объясняются многочисленные ссылки, где подчеркивались различия типа «вдоль – поперек», «параллельно – перпендикулярно» и т.д.

В приведенной ниже таблице сведены основные положения и законы электростатики и магни-

---

\* К сожалению, «анalogии многое объясняют, но ничего не доказывают!»

тостатики в вакууме, еще раз обратите внимание, что общее в этих теориях и чем они отличаются.

	Электростатика	Магнитостатика
Детектор поля	Точечный (пробный) заряд $q'$	Точечный магнитный диполь (магнитная стрелка, контур с током) $p_m = IS$
Действие поля на детектор	Появление силы $\vec{F}$	Появление момента силы $\vec{M}$
Элементарный источник поля	Неподвижный точечный электрический заряд $q$	Малый элемент постоянного электрического тока $I\Delta\vec{l}$
Основной закон	Закон Кулона $\Delta\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^3} \vec{r}$	Закон Био-Савара-Лапласа $\Delta\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I\Delta\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$
Принцип суперпозиции	$\vec{E} = \sum_k \Delta\vec{E}_k =$ $\sum_k \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_k}{r_k^3} \vec{r}_k$	$\vec{B} = \sum_k \Delta\vec{B}_k =$ $= \sum_k \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{(I\Delta\vec{l})_k \times \vec{r}_k}{r_k^3}$
Теорема о потоке	Теорема Гаусса $\Phi_{\vec{E}} = \frac{Q}{\epsilon_0}$	Теорема о магнитном потоке $\Phi_{\vec{B}} = 0$
Теорема о циркуляции	$\Gamma_{\vec{E}} = 0$	$\Gamma_{\vec{B}} = \mu_0 I$

## **§ 2. Взаимодействие магнитного поля с веществом**

Гениальная гипотеза А. М. Ампера об атомных токах нашла свое подтверждение в теории строения атома, которая была разработана через сто лет после работ этого ученого. С точки зрения планетарной модели атома, электроны движутся вокруг ядра, создавая эти атомные токи Ампера. Движение электронов внутри атома чрезвычайно сложно и не описывается законами классической механики. В некоторых состояниях движение электронов в атоме приводит к появлению магнитного момента (который называется орбитальным). Кроме того, любой электрон обладает собственным механическим моментом (который называется спином) и связанным с ним магнитным моментом. Орбитальные и спиновые моменты электронов атома складываются достаточно сложным образом, в результате чего атом в целом может обладать собственным магнитным моментом. Если же атом в свободном состоянии не обладает собственным магнитным моментом, то под действием внешнего магнитного поля у атома появляется индуцированный (наведенный) магнитный момент.

Благодаря наличию магнитных моментов у атомов, любое вещество взаимодействует с магнитным полем, что приводит к намагничиванию вещества. Намагниченное вещество, в свою очередь, изменяет магнитное поле. Таким образом, мы опять сталкиваемся с «зацикленной» ситуацией, анало-

гичной описанию поведению вещества в электрическом поле: поле изменяет характеристики вещества, вследствие чего изменяется само поле.

Магнитные свойства различных веществ обладают громадным разнообразием. Имеется несколько классов веществ, принципиально различающихся по своим магнитным свойствам: некоторые ослабляют внешнее магнитное поле (подобно тому, как все диэлектрики ослабляют электрическое поле) – они называются **диамагнетиками**; некоторые усиливают его – они называются **парамагнетиками**. Такое распространенное вещество, с которого и началась история изучения и использования магнетизма, как железо, относится к особому классу, которому оно и дало название – **ферромагнетики**. Заметим, что вещества, взаимодействующие с магнитным полем, получили обобщающее название – **магнетики**\*.

Большинство эффектов, связанных с магнитными свойствами веществ, корректно может быть объяснено только в рамках квантовой физики.

## 2.1. Намагниченность вещества

Ранее мы ввели магнитную характеристику контура с электрическим током – его магнитный момент: вектор, модуль которого равен произведению силы тока на площадь контура  $p_m = IS$  и ко-

---

\* Все вещества, так или иначе, взаимодействуют с магнитным полем, поэтому введение этого дополнительного термина можно считать излишним.

торый направлен по нормали к контуру. Укажем еще одно свойство этой характеристики – ее аддитивность: если система состоит из нескольких контуров, то магнитный момент такой системы равен векторной сумме магнитных моментов отдельных контуров.

Это свойство очевидно, если наложить два геометрически одинаковых контура друг на друга. В этом случае сложение моментов обосновывается сложением сил токов, текущих в контурах (рис. 73).

Легко также проиллюстрировать свойство аддитивности для двух плоских прямоугольных контуров с одинаковыми силами токов, если эти контуры приставить друг к другу так, чтобы одна пара их сторон совпадала (рис. 74).

В этом случае площадь образованного контура будет равна сумме площадей исходных, а результирующая сила тока в совпадающих сторонах будет равна нулю, так как эти токи текут в противоположных направлениях.

В конце концов, любая физическая характеристика придумана человеком для описания тех или иных свойств. Поэтому математические свойства этих характеристик обосновываются свойствами физических явлений, для описания которых придуманы эти характеристики. В магнитостатике

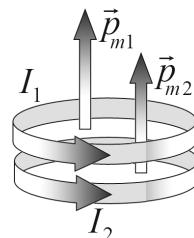


Рис. 73

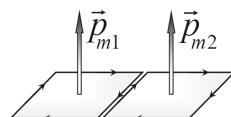


Рис. 74

малый контур с током играет двоякую роль: во-первых, он служит для обнаружения магнитного поля; во-вторых, он является источником поля.

Правило сложения магнитных моментов может быть обосновано правилом сложения механических моментов\*. Действительно, механический момент, действующий на контур в магнитном поле, пропорционален магнитному моменту контура. Поэтому для вычисления суммарного механического момента, действующего на систему, состоящую из нескольких контуров, можно сначала сложить магнитные моменты этих контуров.

Далее, контур с током создает магнитное поле, которое пропорционально магнитному моменту контура. Если поле создается системой из нескольких контуров, то для расчета суммарного поля по принципу суперпозиции необходимо просуммировать индукции полей, создаваемых каждым контуром, а можно сначала просуммировать магнитные моменты, а затем найти поле, созданное этим результатирующим магнитным моментом.

Наконец, электрические дипольные моменты мы тоже складывали.

Если в магнитном поле каждая молекула вещества приобретает магнитный момент, то и каждая часть объема вещества в целом приобретает некоторый магнитный момент, равный сумме магнит-

---

\* Очередной раз мы сталкиваемся с «терминологической бедностью»: одно слово «момент» описывает различные характеристики.

ных моментов молекул, находящихся в этой выделенной части.

Таким образом, можно ввести характеристику воздействия магнитного поля на вещество – намагниченность. **Намагниченностью (вектором намагниченности) вещества называется отношение суммарного магнитного момента выделенной части вещества к объему этой части**

$$\vec{J} = \frac{\sum_k \vec{p}_{mk}}{\Delta V}, \quad (1)$$

где  $\vec{p}_{mk}$  – магнитный момент  $k$ -той молекулы, находящейся внутри выделенной части объема  $\Delta V$ ; суммирование проводится по всем молекулам внутри этого объема.

Как обычно, чтобы сделать намагниченность точечной характеристикой, мы должны выделенную часть сделать бесконечно малой, или математически устремить ее объем к нулю  $\Delta V \rightarrow 0$ . С физической точки зрения, такой переход, строго говоря, невозможен, так как бессмысленно говорить о магнитном моменте выделенной части, если ее объем меньше объема молекулы. Поэтому, говоря об определении (1), мы подразумеваем достаточно малый объем, но содержащий достаточно много молекул.

Фактически, данное определение намагниченности подразумевает пространственное усреднение характеристик магнитного поля, созданного отдельными электронами, атомами, молекулами. Если мысленно заглянуть внутрь вещества, то рас-

сматриваемое магнитное поле резко изменяется в зависимости от расстояния до той или иной молекулы, кроме того, оно также является переменным во времени. Мы же рассматриваем некоторое поле, усредненное по объему, значительно превышающее объем отдельной молекулы, и по промежуткам времени, значительно превышающим периоды обращения электронов в атомах.

## **2.2. Описание магнитного поля в веществе. Магнитные характеристики вещества**

В общем случае описание влияния вещества на магнитное поле является очень сложной математической задачей. Магнитное поле приводит к намагничиванию вещества, то есть вектор намагченности вещества зависит от индукции магнитного поля, действующего на вещество  $\vec{J} = G(\vec{B})$ . Чрезвычайная сложность этой связи обусловлена целым рядом причин:

1. В данном выражении намагченность выделенного объема вещества зависит не только от магнитной индукции внешнего поля  $\vec{B}_0$ , которое может быть известно, но и поля  $\vec{B}'$ , возникающего благодаря намагничиванию других частей вещества, которое само подлежит определению.

2. Связь между намагченностью и индукцией поля часто бывает **нелинейной**, что связано с эффектами насыщения, о которых мы поговорим чуть позже.

3. Многие вещества обладают магнитной **анизотропией**<sup>\*</sup>, то есть величина намагниченности может зависеть от направления, поэтому векторы намагниченности и индукции поля в общем случае не параллельны.

4. Рассматриваемая связь может быть нефункциональной, так как в ферромагнетиках намагниченность определяется полем не только в данный момент времени, но и «предысторией», то есть вещество частично «запоминает», какое поле действовало раньше. Подобный эффект называется магнитным гистерезисом.

Для расчета поля в присутствии магнетиков необходимо уметь рассчитывать индукцию поля при заданном распределении намагниченности вещества, то есть  $\vec{B}' = F(\vec{J})$ . Во многих случаях эта задача может быть решена (что тоже непросто) с помощью закона Био-Савара и принципа суперпозиции.

Конечно, мы не имеем возможности изучить все методы решения рассматриваемой задачи о взаимодействии магнитного поля веществом, а ограничимся рассмотрением простейшего случая. Пусть длинный прямой круговой цилиндр, изготовленный из однородного изотропного магнетика, находится во внешнем однородном магнитном поле, постоянный вектор индукции  $\vec{B}_0$ , которого направлен вдоль оси цилиндра (рис. 75).

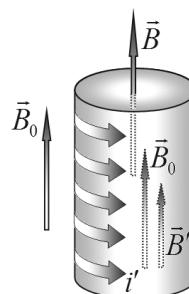


Рис. 75

\* Напомним: анизотропия – зависимость свойств вещества от направления в пространстве.

Под действием магнитного поля вещество цилиндра намагничивается однородно, то есть вектор намагченности  $\vec{J}$  оказывается постоянным как по величине, так и по направлению. Действительно, если вещество и поле однородны, то почему намагченность должна изменяться?

Представим атомы вещества цилиндра в виде одинаковых контуров, магнитные моменты которых ориентированы вдоль оси цилиндра. Стилизованный вид этих контуров в сечении, перпендикулярном оси цилиндра, показан на рис. 76. Такая упорядоченная структура молекулярных токов приводит к возникновению индуцированного тока, текущего по поверхности цилиндра (все токи внутри объема компенсируют друг друга). Такие токи, возникающие на поверхности намагниченного образца, называются токами намагничивания.

Обозначим высоту выделенной части цилиндра  $h$ . Тогда суммарная сила тока, текущего по поверхности этой части цилиндра, может быть представлена в виде  $I' = i'h$ , где  $i'$  – линейная плотность поверхностного тока. Следовательно, магнитный момент рассматриваемой части цилиндра равен произведению силы поверхностного тока на площадь поперечного сечения цилиндра  $P_m = I'S = i'hS$ . С другой стороны, по определению, он равен произведению намагченности вещества на объем выделенной

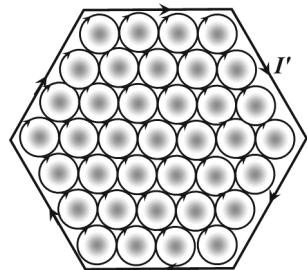


Рис. 76

части  $P_m = JV = JhS$ . Из сравнения этих двух выражений получаем важное соотношение: **поверхностная плотность тока намагничивания равна модулю вектора намагченности вещества**

$$i' = J. \quad (1)$$

Можно показать, что, когда вектор намагченности не параллелен поверхности образца, **плотность поверхностного тока равна тангенциальной составляющей вектора намагченности**

$$i' = J_r. \quad (2)$$

В случае неоднородной намагченности возможно возникновение токов намагченности и внутри объема магнетика.

Сравним данные рассуждения с описанием электрического поля в диэлектриках. Там под действием электрического поля каждая молекула приобретает электрический дипольный момент, суммарное действие которых приводит к возникновению поверхностных индуцированных (поляризационных) зарядов. Поверхностная плотность этих зарядов равна нормальной составляющей вектора поляризации. При неоднородной поляризации возможно возникновение поляризационных зарядов внутри объема диэлектрика.

Обратимся еще раз к рисунку 75. Магнитное поле внутри цилиндра теперь можно представить как суперпозицию внешнего поля индукции  $\vec{B}_0$  и поля, созданного током намагченности  $\vec{B}'$ . Последнее может быть выражено через вектор намагченности. Воспользуемся формулой для индукции магнитного поля внутри длинного соленоида

$$B = \mu_0 n I, \quad (3)$$

в которой произведение плотности намотки  $n$  на силу тока  $I$  фактически является силой тока, пересекающего единицу длины соленоида, то есть совпадает с поверхностной плотностью тока  $i = nI$ . Следовательно, и в случае намагниченного цилиндра индукция поля\*, созданного поверхностным током намагнченности, равна

$$B' = \mu_0 i' = \mu_0 J. \quad (4)$$

Итак, индукция суммарного поля внутри цилиндра равна

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{J}. \quad (5)$$

Теперь, казалось бы, следует выразить вектор намагнченности через индукцию поля внутри цилиндра  $\vec{J} = G(\vec{B})$  и получить уравнение для определения искомой индукции поля. Однако так уже исторически сложилось, что намагнченность вещества традиционно связывается с иной характеристикой\*\* магнитного поля в веществе. Поэтому в данном простейшем случае (когда все рассматрива-

---

\* Так и хочется сказать «индукция индуцированного поля», но это уже слишком...

\*\* Эта характеристика называется напряженностью магнитного поля. Она не имеет явного физического смысла, а является вспомогательной величиной, помогающей расчитывать поле в магнетиках. Заметим, что при описании электростатического поля в диэлектриках вводится вспомогательная величина – индукция электрического поля. Видите, все сделано для того, чтобы окончательно запутать несчастных учащихся! Ни индукцию электрического поля, ни напряженность магнитного поля в дальнейшем мы использовать не будем.

емые векторы параллельны друг другу и поверхности рассматриваемого тела) вектор намагченности выражается через индукцию внешнего (только внешнего, а не полного) поля, которую принято записывать в виде

$$\vec{J} = \chi \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}, \quad (6)$$

где коэффициент пропорциональности  $\chi$  является безразмерной характеристикой вещества и называется его магнитной восприимчивостью. Подставляя выражение (6) для намагченности в формулу (5), получаем

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' = \vec{B}_0 + \mu_0 \chi \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} = (1 + \chi) \vec{B}_0 = \mu \vec{B}_0, \quad (7)$$

где коэффициент  $\mu = 1 + \chi$  называется магнитной проницаемостью вещества. Эта величина показывает, во сколько раз вещество изменяет индукцию магнитного поля. Подчеркнем, что такая простая связь (7) между полем в веществе и полем в вакууме (разумеется, при одинаковых источниках внешнего поля) выполняется только в простейших частных случаях. Для ее применимости необходимо выполнение следующих условий:

1. Вещество должно быть однородным.
2. Везде на границах тел вектор индукции поля должен быть параллелен границе раздела.

Заметим, что для многих веществ магнитная восприимчивость зависит от индукции магнитного поля. В этом случае следует определить проницаемость немного иным способом. Магнитная восприимчивость определяется как отношение

изменения намагнченности к изменению индукции поля, умноженное на магнитную постоянную (впрочем, этот множитель обязан выбранной системе единиц)

$$\chi = \mu_0 \frac{\Delta J}{\Delta B_0}. \quad (8)$$

Если считать изменение индукции внешнего поля малой (точнее бесконечно малой) величиной, то магнитная восприимчивость, определяемая по формуле (8), является функцией индукции поля  $\chi(B_0)$ . Если же намагнченность пропорциональна индукции внешнего поля, то восприимчивость вещества постоянна и, в таком случае, формула (8) приводит к зависимости (6).

### 2.3. Типы магнетиков

В отличие от диэлектриков, которые всегда уменьшают напряженность электрического поля, магнетики могут как уменьшать индукцию внешнего магнитного поля (для этих веществ магнитная восприимчивость отрицательна  $\chi < 0$ , проницаемость меньше единицы  $\mu < 1$ ), так и увеличивать ее (для этих веществ  $\chi > 0$ , а  $\mu > 1$ ), причем в некоторых случаях весьма значительно (для них  $\mu \gg 1$ ).

Во всех случаях изменение магнитного поля обусловлено появлением токов намагнченности. Иными словами, принцип суперпозиции для магнитного поля остается справедливым: поле внутри магнетика является суперпозицией внешнего поля  $\vec{B}_0$  и поля  $\vec{B}'$  токов намагничивания  $i'$ , которые воз-

никают под действием внешнего поля. Если поле токов намагнченности направлено так же, как и внешнее поле, то индукция суммарного поля будет больше внешнего поля (рис. 77а) – в этом случае мы говорим, что вещество усиливает поле; если же поле токов намагнченности направлено противоположно внешнему полю, то суммарное поле будет меньше внешнего поля (рис. 77б) – именно в этом смысле мы говорим, что вещество ослабляет магнитное поле.

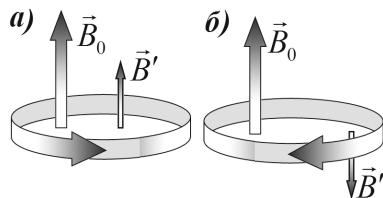


Рис. 77

Рассмотрим кратко основные классы магнетиков и механизмы их намагничивания.

### 2.3.1. Диамагнетики

**Диамагнетиками называются вещества, молекулы которых не обладают собственным магнитным моментом. Под действием внешнего магнитного поля в атомах и молекулах наводится (индуцируется) магнитный момент, направленный противоположно вектору индукции внешнего поля.** Такое направление индуцированного магнитного момента приводит к тому, что диамагнетики выталкиваются из магнитного поля. Как возникают силы, действующие на вещество со стороны магнитного поля, мы рассмотрим чуть позже.

Подчеркнем, что диамагнитный эффект присущ всем веществам без исключения, однако во

многих случаях он маскируется другими более сильными магнитными явлениями.

Детальный механизм возникновения магнитного момента несколько различен для различных видов веществ (атомов, многоатомных молекул, кристаллов) и корректно объясняется только в рамках квантовой теории строения вещества. Не претендуя на количественное соответствие результатов расчетов и экспериментальных данных, качественно понять механизм возникновения магнитного момента можно и в рамках классической физики.

Пусть в некотором атоме два электрона врачаются по одинаковым круговым орбитам в противоположные стороны (рис. 78). На электроны действует кулоновская сила со стороны ядра, которая и обеспечивает центростремительное ускорение электронов. Каждый из движущихся электронов представляет собой круговой ток, который обладает магнитным моментом.

Понятно, что в данной модели, так как электроны врачаются в противоположных направлениях, суммарный магнитный момент данной системы равен нулю. Если же этот атом поместить в магнитное поле (для простоты – перпендикулярное плоскости орбит), то на движущиеся электроны начнет действовать сила Лоренца (рис. 79), причем эта сила для одного электрона будет направлена к центру окружности, а для другого – от центра. Эти силы

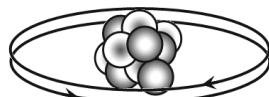


Рис. 78

изменят скорости движения электронов\*: скорость одного возрастет, а другого уменьшится, в результате чего магнитные моменты электронов изменятся, а атом в целом приобретет магнитный момент, направленный противоположно внешнему полю.

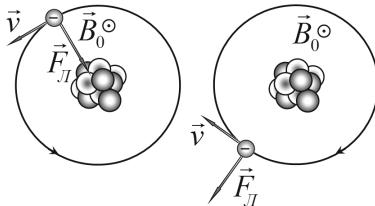


Рис. 79

### Задания для самостоятельной работы

1. Пусть в рамках рассмотренной модели при включении внешнего магнитного поля модули скорости электронов не изменились, а изменились только радиусы их орбит. Найдите величину индуцированного магнитного момента атома.

2. Допустим, что в данной модели при включении магнитного поля радиусы орбит электронов не изменились, а изменились скорости электронов. Найдите величину индуцированного магнитного момента атома в этом случае.

Самое важное – убедитесь, что вектор индуцированного момента направлен в сторону, противоположную внешнему полю. Параметры модели задайте самостоятельно.

Диамагнетиками с подобным механизмом намагничивания являются инертные газы, газообразный водород. Диамагнитный эффект для них чрезвычайно мал, их магнитная проницаемость отличается от 1 на величину порядка  $10^{-6}$ – $10^{-4}$  в зависимости от их концентрации.

Диамагнитными свойствами обладают также ряд молекулярных кристаллов. Заметная отрица-

\* Строго говоря, в рамках этой модели изменятся и траектории электронов.

тельная магнитная проницаемость наблюдается для ароматических соединений (например, бензол, нафталин). Причем для них существенна анизотропия магнитной восприимчивости. Этот эффект также качественно понятен: ароматические молекулы являются плоскими, поэтому индуцированный магнитный момент существенно зависит от того, как направлено внешнее магнитное поле: перпендикулярно плоскости молекулы (в этом случае он максимальен) или вдоль этой плоскости (когда индуцированный момент минимален).

Так, для кристалла нафталина, молекулы которого состоят из двух бензольных колец (рис. 80), магнитная восприимчивость изменяется в четыре раза при изменении направления магнитного поля:  $\chi_1 = -1,6 \cdot 10^{-4}$  для поля, перпендикулярного плоскости молекулы,  $\chi_2 = -0,4 \cdot 10^{-4}$  для поля, параллельного плоскости молекулы. Высокое значение магнитной восприимчивости этих молекул связано с тем, что часть электронов «обегают» периферию колец и описывают орбиты больших радиусов.

В некоторых твердых веществах, таких, как, например, графит, висмут, олово, также наблюдается сильно анизотропный диамагнитный эффект, связанный с возникновением в магнитном поле замкнутых электронных орбит, охватывающих много атомов. Например, для кристалла графита магнитная восприимчивость изменяется от  $\chi_1 = -6 \cdot 10^{-6}$  до  $\chi_2 = -2,6 \cdot 10^{-4}$ .

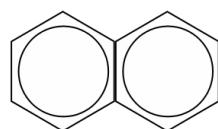


Рис. 80

Для большинства диамагнетиков намагченность пропорциональна индукции внешнего поля, то есть для них формула (6) выполняется с высокой точностью при  $\chi = \text{const}$ . Кроме того, их восприимчивость (и соответственно, магнитная проницаемость) практически не зависят от температуры.

**Задание для самостоятельной работы**

Ознакомьтесь со структурой кристалла графита. Укажите, при какой ориентации поля его магнитная восприимчивость максимальна, а при какой – минимальна.

Если продолжить нашу постоянную аналогию между магнетизмом и электричеством, то аналогом диамагнетиков являются неполярные диэлектрики. Молекулы этих диэлектриков не обладают собственным дипольным электрическим моментом, но под действием поля индуцируется электрический момент, направленный против внешнего поля, что и приводит к уменьшению последнего. Для этих веществ диэлектрические свойства также слабы. Правда, все диэлектрики, в том числе и неполярные, втягиваются в область более сильного электрического поля.

### 2.3.2. Парамагнетики

Парамагнетики – вещества, молекулы которых обладают собственным магнитным моментом. Во внешнем магнитном поле парамагнетики намагничиваются по направлению внешнего поля, что приводит к усилению последнего.

В отсутствие магнитного поля магнитные моменты атомов и молекул вследствие теплового движения ориентированы хаотически, поэтому их средняя намагниченность равна нулю (рис. 81). При наложении внешнего магнитного поля на атомы и молекулы начинает действовать момент сил, стремящийся повернуть их так, чтобы магнитный момент был ориентирован параллельно полю. Поведение контура с током в магнитном поле мы рассматривали ранее при определении вектора индукции поля. Ориентация молекул парамагнетика приводит к тому, что вещество намагничивается, то есть приобретает магнитный момент.

Таким образом, магнитное поле, создаваемое индуцированным магнитным моментом, направлено так же, как и внешнее поле. То есть парамагнетики усиливают внешнее поле. Позже мы покажем, что указанное намагничивание приводит к тому, что парамагнетики втягиваются в область более сильного магнитного поля.

Во всех веществах, помимо ориентации молекул, в магнитном поле индуцируется магнитный момент, направленный противоположно внешнему полю, то есть присутствует диамагнитный эффект. Однако намагниченность, возникающая благодаря ориентации, значительно превышает диамагнитный эффект.

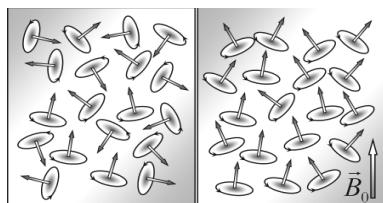


Рис. 81

Строго говоря, поведение молекул, обладающих собственным магнитным моментом, в магнитном поле значительно сложнее описанного выше. Дело в том, что такие атомы и молекулы в свободном состоянии обладают и собственным моментом импульса (механическим моментом)  $\vec{L}$ . Поэтому их поведение подобно поведению вращающегося волчка (для тех, кто не забыл детство, – юлы). Если на волчок действует момент внешних сил, то его ось начинает описывать конус, то есть прецессировать вокруг вектора индукции поля (рис. 82). Поэтому оси прецессии всех молекул совпадают. Именно такое движение молекул приводит к возникновению намагничивания вещества. Заметим, что прецессия молекул в магнитном поле называется прецессией Лармора, в честь французского ученого, впервые описавшего это явление.

Полной ориентации молекул в магнитном поле препятствует их тепловое движение, поэтому магнитная восприимчивость парамагнетиков зависит от температуры. Очевидно, что с ростом температуры магнитная восприимчивость парамагнетиков уменьшается.

В не слишком сильных магнитных полях доля ориентированных молекул, а следовательно, и намагниченность вещества  $\bar{J}$ , приблизительно пропорциональна индукции поля  $\bar{B}$ , то есть формула (6) выполняется. Если же индукция магнитного поля велика настолько, что практически все моле-



Рис. 82

кулы сориентированы, то дальнейшее увеличение индукции поля не приводит к возрастанию намагниченности – появляется эффект насыщения. В такой ситуации **магнитная восприимчивость является функцией от индукции поля и уменьшается при возрастании индукции внешнего поля.**

Описанный механизм намагничивания присущ ряду газов (например, кислород, азот), растворам некоторых солей (в которых парамагнетизм обусловлен наличием собственных магнитных моментов у ионов металлов, например, хром  $Cr^{3+}$ , медь  $Cu^{2+}$ , неодим  $Nd^{3+}$ ).

Несколько иной механизм намагничивания реализуется во многих металлах (например, литий, натрий, магний, алюминий и др.) Большинство физических свойств металлов (таких, как высокие теплопроводность и электропроводность, характерный металлический блеск) обусловлено наличием в кристаллах значительного числа свободных электронов. Как уже было отмечено, каждый электрон обладает собственным механическим моментом (который также называется спин) и связанным с ним собственным магнитным моментом. Парамагнетизм этих веществ объясняется ориентацией свободных электронов в магнитном поле. Характерные значения магнитной восприимчивости (положительной!) для металлов равны  $\chi \approx 10^{-5} - 10^{-4}$ .

Важно подчеркнуть, что магнитные свойства веществ в твердом состоянии зависят не только от их химического состава, но и от структуры кристаллической решетки. Ярким примером, под-

тврждающим это утверждение, является олово. Известны две модификации этого металла в твердом состоянии: белое олово является парамагнетиком, а серое – диамагнетиком.

Электрическим аналогом парамагнетиков являются полярные диэлектрики – вещества, молекулы которых обладают собственным дипольным электрическим моментом. Поляризация этих веществ обусловлена ориентацией молекул в электрическом поле. Однако и в этом случае не обошлось без принципиальных различий: полярные диэлектрики ослабляют внешнее электрическое поле, а парамагнетики – усиливают внешнее магнитное поле.

### **2.3.4. Ферромагнетики**

Открытие, первые исследования и применения магнетизма связаны с достаточно уникальными магнитными свойствами такого распространенного вещества, как металлическое железо. Само название этого класса магнитных материалов происходит от латинского имени железа – Ferrum. Главная особенность этих веществ заключается в способности сохранять намагниченность в отсутствие внешнего магнитного поля, все постоянные магниты относятся к классу ферромагнетиков. Кроме железа, ферромагнитными свойствами обладают его «соседи» по таблице Менделеева – кобальт и никель. Ферромагнетики находят широкое практическое применение в науке и технике,

поэтому разработано значительное число сплавов, обладающих различными ферромагнитными свойствами.

Обратите внимание: все приведенные примеры ферромагнетиков относятся к металлам переходной группы, электронная оболочка которых содержит несколько неспаренных электронов, что и приводит к тому, что эти атомы обладают значительным собственным магнитным моментом. В кристаллическом состоянии, благодаря взаимодействию\* между атомами, в кристаллах возникают **области самопроизвольной (спонтанной) намагниченности – домены**. Размеры этих доменов составляют десятые и сотые доли миллиметра ( $10^{-4} - 10^{-5}$  м), что значительно превышает размеры отдельного атома ( $10^{-4} - 10^{-5}$  м). В пределах одного домена магнитные моменты атомов ориентированы строго параллельно, ориентация магнитных моментов других доменов при отсутствии внешнего магнитного поля меняется произвольно (рис. 83). Таким

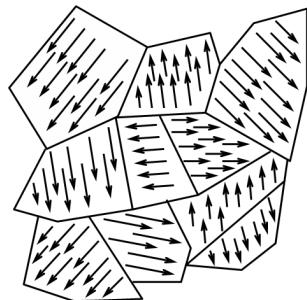


Рис. 83

\* Помимо магнитных взаимодействий, значительную роль в формировании магнитной структуры таких кристаллов играют особые, так называемые обменные взаимодействия, которые также играют существенную роль в возникновении химической ковалентной связи. Этот вид межатомных взаимодействий не может быть объяснен в рамках классической физики – его описание дается квантовой теорией.

образом, и в ненамагниченном состоянии внутри ферромагнетика существуют сильные магнитные поля, ориентация которых при переходе от одного домена к другому меняется случайным хаотическим образом. Эти внутренние поля обнаружены экспериментально. Отдельные домены можно увидеть с помощью микроскопа: если на полированную поверхность железа нанести незначительное количество мелкого железного порошка, то его частицы располагаются по границам доменов, что и делает их видимыми. Если размеры тела значительно превышают размеры отдельных доменов, то среднее магнитное поле, создаваемое доменами этого тела, практически отсутствует.

При помещении ферромагнетика во внешнее магнитное поле происходит ориентация магнитных моментов целых доменов (всех атомов одновременно), поэтому даже относительно слабые магнитные поля приводят к практически полной ориентации магнитных моментов всех атомов. Поэтому магнитная проницаемость ферромагнетиков достигает нескольких тысяч и десятков тысяч ( $\mu = 10^3 - 10^4$ ).

Как и для парамагнетиков, ориентации магнитных моментов препятствует тепловое движение, поэтому магнитные свойства ферромагнетиков сильно зависят от температуры. Более того, для каждого ферромагнетика существует значение температуры, при котором доменная структура полностью разрушается и ферромагнетик превращается в парамагнетик. Это значение температуры называется точкой Кюри. Так, для чистого железа

значение температуры Кюри приблизительно равно  $900^{\circ}\text{C}$ .

Процесс намагничивания ферромагнетиков существенно отличается от намагничивания диамагнетиков и парамагнетиков. Качественно опишем его.

Пусть изначально не намагнченный железный брусков помещается в магнитное поле, индукцию которого будем медленно изменять. На рис. 84 схематически показана зависимость его намагнченности  $J$  от индукции внешнего магнитного поля  $B$ . При включении магнитного поля и увеличении его индукции возрастает и намагнчен-

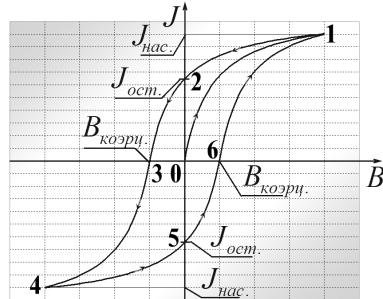


Рис. 84

ность образца (кривая 0-1 на рисунке). Даже для ненамагниченного образца и слабого магнитного поля зависимость намагченности от индукции поля является нелинейной. Сначала при возрастании индукции магнитная восприимчивость возрастает, достигает максимального значения, а затем спадает до нуля. Такой вид зависимости объясняется доменной структурой – при слабом внешнем поле переориентируются только домены малых размеров, в сильном поле все магнитные моменты оказываются полностью ориентированными, поэтому дальнейшее увеличение поля не приводит к возрастанию намагченности: намагченность

достигает предельного значения (**намагниченность насыщения**  $J_{\text{нас.}}$  – точка 1 на графике), а восприимчивость стремится к нулю. Если после достижения насыщения начать уменьшать индукцию внешнего поля, то намагниченность также начнет уменьшаться (участок 1-2 на графике). Однако зависимость  $J$  ( $B_0$ ) будет отличаться от этой же зависимости при намагничивании – при размагничивании будет проявляться «эффект запаздывания», магнитные моменты доменов частично сохраняют первоначальную ориентацию, намагниченность оказывается больше (кривая размагничивания 1-2 лежит выше кривой намагничивания 0-1). Даже при полном снятии внешнего поля образец остается частично намагниченным (точка 2), **намагниченность образца при выключенном внешнем поле называется остаточной**  $J_{\text{ост.}}$ . Именно наличие остаточной намагниченности ферромагнетиков делает возможным существование постоянных магнитов, которые являются ферромагнитными телами с остаточной намагниченностью, сохраняющейся в отсутствие внешних полей. Если к рассматриваемому образцу с остаточной намагниченностью приложить внешнее поле, вектор индукции которого направлен противоположно вектору намагниченности (на рисунке соответствующие значения индукции отрицательны), то намагниченность образца будет уменьшаться (участок 2-3). Значение индукции внешнего поля, при котором образец оказывается полностью размагниченным, называется **коэрцитивной силой**  $B_{\text{коэр.}}$  (точка 3). При

далнейшем увеличении модуля индукции поля процесс повторится – образец достигнет насыщения в противоположном направлении (точка 4), при изменении внешнего поля намагниченность образца будет описываться кривой 4-5-6-1.

Таким образом, для ферромагнетика намагниченность определяется не только намагничивающим полем, но предысторией образца. Это явление называется магнитным гистерезисом\*, а рассмотренная зависимость намагниченности от внешнего поля – петлей гистерезиса.

Вид кривой намагничивания (петли гистерезиса) существенно различается для различных ферромагнитных материалов, которые нашли очень широкое применение в научных и технических приложениях. Некоторые магнитные материалы имеют широкую петлю с высокими значениями остаточной намагниченности и коэрцитивной силы, они называются **магнитно-жесткими** и используются для изготовления постоянных магнитов. Для других ферромагнитных сплавов характерны малые значения коэрцитивной силы, эти материалы легко намагничиваются и перемагничиваются даже в слабых полях. Такие материалы называются **магнитно-мягкими** и используются в различных электротехнических приборах: реле, трансформаторах, магнитопроводах и др.

Помимо того, что магнитные свойства ферромагнетиков зависят от температуры, они также

---

\* В переводе с греческого этот термин означает *отставание*.

могут заметно изменяться под действием механических нагрузок. Для монокристаллических образцов магнитная восприимчивость зависит от направления магнитного поля (магнитная анизотропия).

Известны диэлектрики с очень высоким значением диэлектрической проницаемости, обусловленным большим значением дипольного момента молекул, – этот класс диэлектриков называется сегнетоэлектриками. Для них также характерно возникновение доменной структуры (областей с одинаково ориентированными электрическими дипольными моментами). Поведение этих веществ в электрическом поле аналогично поведению ферромагнетиков в магнитном поле, для них наблюдаются аналогичные эффекты: нелинейная зависимость поляризации от напряженности внешнего поля, наличие остаточной поляризации, петли гистерезиса. Для сегнетоэлектриков также существует точка Кюри – температура, при которой разрушается доменная структура и сегнетоэлектрик становится обычным полярным диэлектриком.

Также отметим, что явления гистерезиса (отставания, запаздывания) присущи не только электрическим (в сегнетоэлектриках) и магнитным (в ферромагнетиках) явлениям. Подобные явления существуют и в других областях физики, даже в механике. Типичным примером гистерезиса может служить зависимость деформации металлической проволоки от приложенной нагрузки (рис. 85). Если к проволоке подвешивать увеличивающиеся грузы, то ее деформация  $\Delta l$  сначала будет воз-

растать пропорционально приложенной силе, при дальнейшем увеличении нагрузки деформация будет возрастать медленнее (участок 0-1), при уменьшении нагрузки деформация будет уменьшаться по другому закону (участок 1-2) и при полном снятии нагрузки проволока останется частично деформированной (появится «остаточная» деформация – точка 2). В целом эта зависимость весьма напоминает вид петли магнитного гистерезиса.

Наконец, еще более простой пример гистерезиса: тело брошено вертикально вверх, зависимости модуля его скорости от высоты подъема будут различны при подъеме и при падении (при учете сопротивления воздуха, конечно).

Во всех приведенных примерах наличие гистерезиса свидетельствует о некоторых необратимых процессах, протекающих в рассматриваемой системе.

## 2.4. Постоянные магниты

Постоянные магниты широко используются в различных областях техники и приборостроении: в электроизмерительных приборах, в громкоговорителях, звукозаписывающих устройствах, электродвигателях и др.

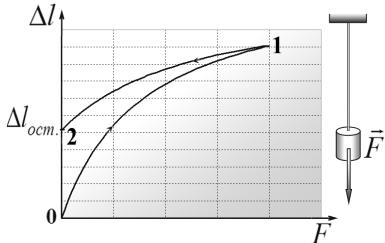


Рис. 85

Все постоянные магниты изготавливаются из магнитно-жестких ферромагнитных материалов, обладающих большим значением остаточной намагниченности.

Оценим возможные значения намагниченности материала и индукции создаваемого им поля.

Сразу оговоримся, что проведенные ниже расчеты носят оценочный характер, так как законы движения частиц в микромире существенно отличаются от законов классической физики. Тем не менее знакомые нам классические законы все же позволяют оценить порядок возможных значений оцениваемых параметров.

Начнем с оценки возможного значения магнитного момента атома водорода. Будем считать\*, что электрон вращается вокруг ядра по круговой орбите радиуса  $r$  (рис. 86). Этому движущемуся электрону можно поставить в соответствие электрический ток силой

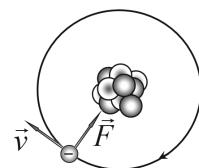


Рис. 86

$$I = \frac{e}{T} = e \frac{v}{2\pi r}, \quad (1)$$

где  $T = \frac{2\pi r}{v}$  – период вращения электрона,  $v$  – его скорость. Тогда магнитный момент этого кругового тока равен

$$p_m = IS = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{evr}{2}. \quad (2)$$

\* Еще раз подчеркнем, что движение электрона гораздо сложнее: вспомните электронные облака, которые вы рассматривали в курсе химии.

Движущийся электрон обладает также моментом импульса (механическим моментом), равным

$$L = mvr, \quad (3)$$

где  $m$  – масса электрона. Отношение магнитного момента к его механическому моменту

$$g = \frac{p_m}{L} = \frac{e}{2m} \quad (4)$$

является величиной, не зависящей от параметров орбиты, а зависит только от его заряда и массы. Эта величина играет важную роль во многих процессах, она называется **гиромагнитное отношение**<sup>\*</sup>. Полученное выражение для гиromагнитного отношения остается справедливым и в квантовой физике. Таким образом, для оценки магнитного момента следует найти соответствующий механический момент. Применим второй закон Ньютона для электрона, движущегося по круговой орбите вокруг положительно заряженного ядра: центростремительное ускорение электрона вызывается кулоновской силой его притяжения к ядру

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (5)$$

отсюда найдем скорость движения электрона

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 rm}}$$

и его момент импульса

$$L = mvr = \sqrt{\frac{e^2 mr}{4\pi\epsilon_0}}. \quad (6)$$

---

\* Отметим, что для любого равномерно заряженного однородного тела гиromагнитное отношение определяется формулой (4).

Для численной оценки примем диаметр атома равным 1 ангстрему (что близко к экспериментальным значениям), тогда

$$L = \sqrt{\frac{e^2 mr}{4\pi\epsilon_0}} \approx \sqrt{\frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 0,5 \cdot 10^{-10}}{4 \cdot 3,14 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}}} \approx 1 \cdot 10^{-34} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}. \quad (7)$$

Полученное значение очень близко к постоянной Планка  $\hbar = \frac{h}{2\pi} \approx 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$ , фундаментальной константе, фигурирующей практически во всех формулах квантовой механики. Такое совпадение не является случайным: законы квантовой механики приводят к выводу, что момент импульса, связанный с орбитальным движением электрона, составляет величину порядка постоянной Планка. Более того, эта константа служит единицей измерения момента импульса в атомной физике и физике элементарных частиц. Поэтому для дальнейших оценок характерное значение момента импульса атома будем считать равным постоянной Планка  $L = \hbar$ . Теперь с помощью соотношения (4) выразим магнитный момент атома

$$p_m = \frac{e}{2m} L = \frac{e\hbar}{2m}. \quad (8)$$

Полученная величина является единицей измерения магнитного момента в атомной физике, она называется **магнетоном Бора**  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \approx 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ А} \cdot \text{м}^2$ .

В дальнейшем мы будем использовать данное значение в качестве характерной величины магнитного момента атома, хотя для разных атомов их магнитные моменты, конечно, различаются.

Оценим, наконец, максимальное значение намагченности постоянного магнита. Согласно определению, намагченность равна магнитному моменту единицы объема вещества, поэтому при полном намагничивании, когда магнитные моменты всех атомов ориентированы в одну сторону, намагченность равна произведению магнитного момента атома на их концентрацию (число атомов в единице объема)

$$J = np_m = \frac{\rho N_A}{M} \mu_B, \quad (9)$$

здесь концентрация  $n$  выражена через плотность  $\rho$  и массу одного атома  $m_1 = \frac{M}{N_A}$  ( $M$  – молярная масса,  $N_A$  – число Авогадро). Подставляя численные значения для типичного ферромагнетика – железа ( $\rho = 7,9 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ ,  $M = 56 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ ), получаем значение намагченности

$$J = np_m = \frac{\rho N_A}{M} \mu_B \approx 8 \cdot 10^5 \frac{\text{А}}{\text{м}}.$$

Обратите внимание на полученное значение: полная намагченность приводит к возникновению поверхностного тока намагничивания плотностью порядка восьми тысяч ампер на сантиметр! Такая намагченность создает магнитное поле индукции  $B = \mu_0 J \approx 1 \text{ Тл}$ . Для изготовления постоянных магнитов используются материалы, у которых остаточная намагченность не намного меньше намагченности насыщения. Так, в магнитах, изготовленных из прессованного железного порошка, остаточная намагченность составляет

ляет величины порядка  $B_{ocm} \approx 0,4 - 0,5$  Тл, при этом их намагнченность приблизительно равна<sup>\*</sup>  $J = \frac{B}{\mu_0} \approx 4 \cdot 10^5 \frac{A}{m}$ . Интересно отметить, что для того же материала коэрцитивная сила составляет величину порядка  $5 \cdot 10^{-2}$  Тл, то есть для размагничивания магнита необходимо поле, индукция которого в сто раз меньше поля самого магнита.

## 2.5. Взаимодействие постоянных магнитов

Знание формы и намагнченности постоянного магнита позволяет для расчетов заменить его эквивалентной системой электрических токов намагничивания. Такая замена возможна как при расчете характеристик магнитного поля, так и при расчетах сил, действующих на магнит со стороны внешнего поля.

Для примера проведем расчет силы взаимодействия двух постоянных магнитов (рис. 87). Пусть магниты имеют форму тонкого цилиндра, их радиусы обозначим  $r_1$  и  $r_2$ , толщины  $h_1$ ,  $h_2$ , оси магнитов совпадают, расстоя-

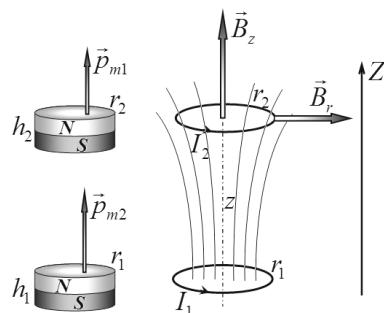


Рис. 87

\* Еще раз обратите внимание на полученные значения: когда вы держите небольшой круглый магнит толщиной 1 см, то вы держите в руках кольцевой ток силой в четыре тысячи ампер.

ние между магнитами обозначим  $z$ , будем считать, что оно значительно больше размеров магнитов.

Возникновение силы взаимодействия между магнитами объясняется традиционным способом: один магнит создает магнитное поле, которое воздействует на второй магнит. Для расчета силы взаимодействия мысленно заменим магниты с однородной намагниченностью  $J_1$  и  $J_2$  круговыми токами, текущими по боковой поверхности цилиндров. Силы этих токов выразим через намагниченности магнитов

$$I_{1,2} = J_{1,2} h_{1,2}, \quad (1)$$

а их радиусы будем считать равными радиусам магнитов. Разложим вектор индукции  $\vec{B}$  магнитного поля, созданного первым магнитом в месте расположения второго, на две составляющие: осевую  $\vec{B}_z$ , направленную вдоль оси магнита, и радиальную  $\vec{B}_r$  – перпендикулярную ей. Для вычисления суммарной силы, действующей на кольцо, необходимо мысленно разбить его на малые элементы  $I\Delta l$  и просуммировать силы Ампера, действующие на каждый такой элемент. Используя правило левой руки, легко показать, что осевая составляющая магнитного поля приводит к появлению сил Ампера, стремящихся растянуть (или сжать) кольцо – векторная сумма этих сил равна нулю. Наличие радиальной составляющей поля приводит к возникновению сил Ампера, направленных вдоль оси магнитов, то есть к их притяжению или отталкиванию.

### Задание для самостоятельной работы

Убедитесь, что магниты притягиваются, если электрические токи текут в одном направлении, и отталкиваются, если токи текут в противоположных направлениях. Свяжите направления токов намагничивания с полюсами магнитов (северным и южным) и убедитесь, что разноименные полюса притягиваются, а одноименные отталкиваются.

Так как рассматриваемая система обладает осевой симметрией, то модуль радиальной составляющей постоянен во всех точках кольцевого тока второго магнита. Следовательно, проекция силы, действующей на второй магнит, с учетом правила левой руки, определяется формулой

$$F = -I_2 B_r l = -I_2 B_r 2\pi r_2. \quad (2)$$

Положительное направление силы соответствует притяжению магнитов, положительное направление тока традиционно – против часовой стрелки.

Магнитное поле, создаваемое первым магнитом, эквивалентно полю кругового тока (см. §12.7.1). В рамках сделанных приближений ( $z \gg r, h$ ) осевая составляющая поля определяется формулой

$$B_z = \frac{\mu_0 p_{m1}}{2\pi z^3}, \quad (3)$$

где  $p_{m1} = I_1 S_1 = J_1 h_1 \pi r_1^2 = J_1 V_1$  – магнитный момент первого магнита ( $V_1$  – его объем).

Радиальную составляющую поля мы нашли с помощью теоремы о магнитном потоке. В месте расположения второго кругового контура она равна (см. §12.12)

$$B_r = -\frac{r_2}{2} \cdot \frac{\Delta B_z}{\Delta z} = \frac{3\mu_0 p_{m1}}{4\pi z^4} r_2. \quad (4)$$

Уменьшение осевой составляющей поля приводит к появлению положительной (направленной от оси) составляющей поля.

Важно подчеркнуть, что сила взаимодействия между магнитами определяется скоростью изменения\* осевой составляющей поля  $\frac{\Delta B_z}{\Delta z}$ : если бы поле, создаваемое первым магнитом, было однородным, то сила, действующая на второй магнит, была бы равна нулю.

Этот вывод можно обобщить на случай произвольного контура с током (следовательно, и на любой постоянный магнит). Действительно, сила Ампера, действующая на элемент тока  $I\vec{l}_k$ , равна  $\vec{F}_k = I\vec{l}_k \times \vec{B}$ ; для вычисления силы, действующей на контур, необходимо просуммировать эти выражения по всем элементам контура

$$\vec{F} = \sum_k \vec{F}_k = \sum_k I\vec{l}_k \times \vec{B} = I \left( \sum_k \vec{l}_k \right) \times \vec{B} = \vec{0}.$$

При выводе учтено, что в однородном поле вектор индукции постоянен, поэтому его можно вынести за знак суммы, а сумма элементов контура равна нулю, так как все эти векторы выстроены в замкнутую линию — конец последнего совпадает с началом первого. Следовательно, сила, действующая на любой постоянный магнит, находящийся во внешнем однородном поле, равна нулю. Аналогично, сила, действующая на электрический диполь со стороны однородного электрического поля,

---

\* Имеется в виду скорость изменения величины поля в пространстве, а не с течением времени.

также равна нулю, а в неоднородном поле эта сила пропорциональна скорости изменения поля  $\frac{\Delta E}{\Delta z}$ .

Подставляя выражение для радиальной составляющей поля, получим формулу для вычисления силы взаимодействия двух магнитов в рассматриваемом случае

$$F = -I_2 \cdot 2\pi r_2 \cdot B_r = -I_2 \cdot 2\pi r_2 \cdot \frac{3\mu_0 p_{m1}}{4\pi z^4} r_2 = \\ = -I_2 \cdot \pi r_2^2 \frac{3\mu_0 p_{m1}}{2\pi z^4} = -\frac{3\mu_0 p_{m1} p_{m2}}{2\pi z^4}, \quad (5)$$

где  $p_{m2} = I_2 S_2 = J_2 h_2 \pi r_2^2 = J_2 V_2$  – магнитный момент второго магнита. Так, например, для двух одинаковых магнитов с размерами  $h = r = 1$  см с намагниченностью  $J \approx 4 \cdot 10^5 \frac{A}{m}$ , находящихся на расстоянии  $z = 5$  см, сила взаимодействия приблизительно равна 0,15 Н.

Обратим внимание, что в формулу (5) в качестве характеристик магнитов входят только их магнитные моменты, поэтому эта формула может применяться для магнитов любой формы, важно только, чтобы расстояние между ними превышало их размеры и их магнитные моменты были параллельны. Также следует заметить, что сила взаимодействия между магнитами обратно пропорциональна четвертой степени расстояния между ними, что является следствием диполь-дипольного характера взаимодействия (для несуществующих точечных магнитных зарядов эта сила была бы, как обычно, обратно пропорциональна квадрату расстояния).

## 2.6. Взаимодействие магнетиков с постоянным магнитным полем

Под действием внешнего магнитного поля любое вещество намагничивается. Как мы показали, намагничивание тела может быть заменено эквивалентной системой токов. Поэтому расчет силы, действующей на произвольное тело со стороны внешнего магнитного поля, может быть проведен по методике, аналогичной расчету сил взаимодействия постоянных магнитов, которую следует дополнить расчетом индуцированного магнитного момента тела.

Проиллюстрируем эти расчеты на простейшем примере: в рассмотренной выше задаче заменим второй постоянный магнит цилиндром из первоначально не намагниченного материала (рис. 84). Если размеры этого тела малы, то при расчете его намагниченности можно пренебречь неоднородностью внешнего магнитного поля, создаваемого постоянным магнитом, то есть считать, что намагниченность полностью определяется осевой составляющей поля. Поэтому для неферромагнитных материалов<sup>\*</sup> намагниченность цилиндра равна

$$J = (\mu - 1) \frac{B_z}{\mu_0}, \quad (1)$$

здесь  $(\mu - 1) = \chi$  – магнитная восприимчивость вещества цилиндра, поэтому его индуцированный магнитный момент равен

---

\* Эти рассуждения применимы и для ферромагнетиков, намагниченность которых далека от насыщения.

$$p_m = JV_2 = (\mu - 1) \frac{B_z}{\mu_0} V_2. \quad (2)$$

Положительным направлением магнита здесь, как и ранее, принято направление магнитного момента постоянного магнита, или направление внешнего магнитного поля, в котором находится рассматриваемое тело. Формула (2) явно указывает, что парамагнетики ( $\mu > 1$ ) намагничиваются «по полю» – для них магнитный момент положительный, а диамагнетики ( $\mu < 1$ ) намагничиваются «против поля», их магнитный момент отрицательный. Используя формулы (1)-(4) из предыдущего раздела, получим выражение для силы, действующей на цилиндр:

$$F = -I_2 B_r 2\pi r = I_2 \frac{r}{2} \frac{\Delta B_z}{\Delta z} 2\pi r = p_{m2} \frac{\Delta B_z}{\Delta z} = (\mu - 1) \frac{B_z}{\mu_0} \frac{\Delta B_z}{\Delta z} V_2. \quad (3)$$

Эта формула справедлива для любого осесимметричного внешнего поля, так как мы нигде не использовали конкретных формул для индукции этого поля. Как и в случае постоянного магнита, сила, действующая на тело со стороны магнитного поля, зависит от скорости изменения этого поля  $\frac{\Delta B_z}{\Delta z}$ , следовательно, в однородном поле эта сила равна нулю. Преобразуем формулу (3) с учетом равенства, которое мы неоднократно использовали ранее,  $B_z \Delta B_z = \Delta \left( \frac{B_z^2}{2} \right)$ :

$$F = \frac{(\mu - 1) \Delta (B_z^2)}{2\mu_0 \Delta z} V_2. \quad (4)$$

Эта формула показывает, что направление силы, действующей на магнитик со стороны магнитного поля, определяется не направлением вектора индукции, а направлением изменения его квадрата, а модуль этой силы пропорционален скорости изменения квадрата индукции поля. Хорошо известно и легко показать, что северный полюс постоянного магнита притягивает кусочек ненамагниченного железа точно так же, как и его южный полюс. Таким образом, парамагнетики ( $\mu > 1$ ) втягиваются в ту область, где модуль напряженности больше, а диамагнетики ( $\mu < 1$ ) выталкиваются из области более сильного поля. Если необходимо увеличить силу, действующую на тело (как, например, в кранах с электромагнитом), необходимо не только увеличивать индукцию поля, но и стремиться сделать его более неоднородным.

Перепишем еще раз формулу (4), представив ее в виде

$$F = (\mu - 1) \frac{\Delta \left( \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right)}{\Delta z} V_2;$$

в дальнейшем мы покажем, что величина  $\frac{B_z^2}{2\mu_0}$  яв-

ляется плотностью энергии магнитного поля, поэтому направление силы определяется направлением изменения плотности энергии магнитного поля.

Закончим расчет силы взаимодействия постоянного магнита и ненамагниченного цилиндра,

для чего в формулу (3) подставим выражения для осевой и радиальной составляющих индукции поля постоянного магнита

$$\begin{aligned} F = & (\mu - 1) \frac{B_z}{\mu_0} \frac{\Delta B_z}{\Delta z} V_2 = -(\mu - 1) \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_0 p_{m1}}{2\pi z^3} \frac{3\mu_0 p_{m1}}{2\pi z^4} V_2 = \\ & = -(\mu - 1) \frac{3\mu_0 p_{m1}^2}{4\pi^2 z^7} V_2. \end{aligned} \quad (5)$$

В данном случае сила взаимодействия убывает очень резко с возрастанием расстояния между взаимодействующими телами – обратно пропорционально седьмой степени расстояния, то есть при увеличении расстояния в 2 раза сила взаимодействия уменьшается в 128 раз.

Напомним, что формула (5) применима в случае, когда расстояние между взаимодействующими телами значительно превышает их размеры. В общем случае расчет силы взаимодействия значительно усложняется, хотя основной качественный вывод остается справедливым: сила взаимодействия пропорциональна магнитной восприимчивости вещества и зависит не только от величины индукции поля, но и от скорости ее изменения в пространстве.

### § 3. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях

Электрические и магнитные поля действуют на движущиеся заряженные частицы с известной силой. Поэтому эти поля могут использоваться для управления движением заряженных частиц. Потоки движущихся заряженных частиц широко используются в различных приборах, принципы действия и применения некоторых из них мы рассмотрим в данном параграфе.

Описание движения заряженной частицы проводится на основании второго закона Ньютона, уравнение которого имеет вид

$$m\vec{a} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}, \quad (1)$$

где  $q\vec{E}$  – сила, действующая на частицу с электрическим зарядом  $q$  со стороны электрического поля;  $q\vec{v} \times \vec{B}$  – сила Лоренца, действующая на частицу со стороны магнитного поля. В общем случае напряженность электрического поля  $\vec{E}$  и индукция магнитного поля  $\vec{B}$  могут зависеть от координат (в неоднородных полях) и времени (в нестационарных полях). Для однозначного решения уравнения (1) его необходимо дополнить начальными условиями: положением частицы  $\vec{r}_0$  и скоростью  $\vec{v}_0$  в некоторый момент времени  $t_0$ .

При описании распространения потоков частиц в некоторых случаях необходимо также учитывать взаимодействия частиц между собой или

принимать во внимание зависимость характеристик полей от положения и скоростей других частиц. Наконец, при записи уравнения (1) принято, что частицы движутся в вакууме, где отсутствуют силы сопротивления среды. Движение частиц в средах, обладающих сопротивлением, описывается в рамках уравнений для электрического тока. При движении частиц в электромагнитном поле, как правило, пренебрегают действием силы тяжести, которая обычно значительно меньше электромагнитных сил.

Записанное уравнение движения справедливо для частиц, движущихся со скоростями, значительно меньшими скорости света. В противном случае необходимо использовать релятивистские уравнения движения теории относительности.

Рассмотрим некоторые частные простейшие случаи решения уравнения (1) для частиц, движущихся в стационарных полях.

### **3.1. Заряженная частица в электростатическом поле**

Уравнение движения частицы в электростатическом поле имеет вид

$$m\vec{a} = q\vec{E}(x, y, z). \quad (1)$$

Так как электростатическое поле является потенциальным, то для движущейся частицы выполняется закон сохранения энергии, на основании которого можно записать уравнение

$$\frac{mv^2}{2} + q\phi(x, y, z) = \text{const}, \quad (2)$$

где  $\phi(x, y, z)$  – потенциал электростатического поля. Это же уравнение часто формулируется в иной форме: изменение кинетической энергии частицы равно работе сил электростатического поля. Работа сил поля не зависит от формы траектории частицы (рис. 88) и равна произведению заряда частицы на разность потенциалов между начальной и конечной точкой траектории

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = q(\phi_1 - \phi_2). \quad (3)$$

Обратите внимание на расстановку индексов в этом уравнении: *увеличение* кинетической энергии частицы равно *уменьшению* ее потенциальной энергии!

### 3.1.1. Движение заряженной частицы в однородном электростатическом поле

В однородном электрическом поле сила, действующая на заряженную частицу, постоянна как по величине, так и по направлению. Поэтому движение такой частицы полностью аналогично движению тела в поле тяжести Земли без учета сопротивления воздуха. Траектория частицы в этом случае является плоской, лежит в плоскости, со-

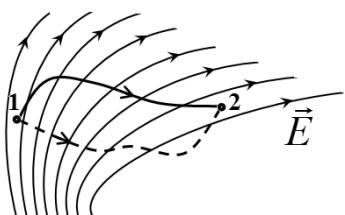


Рис. 88

держащей векторы начальной скорости частицы и напряженности электрического поля (рис. 89). Поэтому для описания положения частицы достаточно двух координат. Удобно одну из осей декартовых

координат направить вдоль направления вектора напряженности поля (тогда движение вдоль этой оси будет равноускоренным), а вторую – перпендикулярно вектору напряженности (движение вдоль этой оси – равномерное). Начало отсчета удобно совместить с начальным положением частицы.

Простейший пример: частица массы  $m$ , несущая электрический заряд  $q$ , движется в однородном электрическом поле напряженности  $\vec{E}$ , в начальный момент ее скорость равна  $\vec{v}_0$ . Направим ось  $Oy$  в сторону, противоположную направлению вектора  $\vec{E}$ , начало отсчета совместим с начальным положением частицы (рис. 90). Частица будет двигаться с постоянным ускорением  $g^* = \frac{qE}{m}$ , направленным «вертикально вниз», поэтому дальнейшее описание движения, со всеми его особенностями, можно переписать с решения задачи о движении тела в поле тяжести без учета сопротивления воздуха.

Опишем принцип работы электростатического отклоняющего устройства, используемого в ряде приборов (например, в некоторых типах осцил-

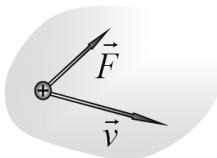


Рис. 89

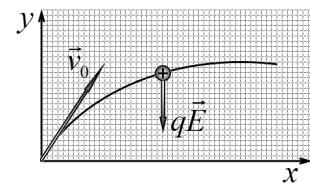


Рис. 90

лографов) для изменения направления движения потока электронов. Пучок электронов, имеющих скорость  $\vec{v}_0$ , влетает в пространство между двумя параллельными пластинами длиной  $h$ , между которыми создано постоянное электрическое поле напряженности  $\vec{E}$ . На расстоянии  $l$  от пластин расположен экран, на который попадает этот пучок электронов (рис. 91). Найдем зависимость отклонения пучка от напряженности приложенного поля.

Введем декартовую систему координат, как показано на рис. 91. При движении электронов между пластинами на них действует постоянная сила  $F = eE$  ( $e$  – заряд электрона,  $m$  – его масса), которая сообщает им ускорение  $a = \frac{e}{m}E$ , направленное вдоль оси  $Oz$ . Будем считать, что длина пластин такова, что электроны на нее не попадают, кроме того, пренебрежем краевыми эффектами, то есть будем считать, что поле между пластинами однородное, а вне пластин отсутствует. Так как проекция электрической силы на ось  $Ox$  равна нулю, то проекция скорости на эту ось не изменяется и остается равной  $v_0$ . За время пролета между пласти-

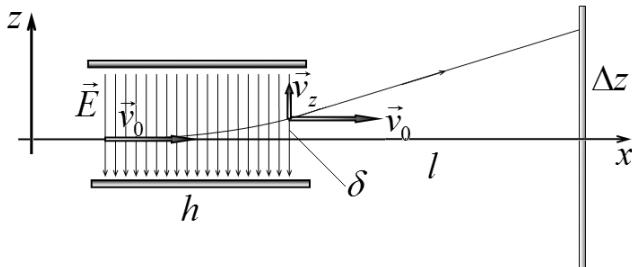


Рис. 91

нами  $t_1 = \frac{h}{v_0}$  электрон приобретет дополнительно компоненту скорости, направленную вдоль оси  $Oy$   $v_y = at_1 = \frac{eE}{m} \frac{h}{v_0}$ , и сместится на расстояние  $\delta_1 = \frac{1}{2} at_1^2 = \frac{eE}{2m} \left( \frac{h}{v_0} \right)^2$ . После вылета из области поля электрон будет двигаться равномерно, поэтому за время движения до экрана  $t_2 = \frac{l}{v_0}$  дополнительно сместится вдоль вертикальной оси на расстояние  $\delta_2 = v_y t_2 = \frac{eE}{m} \frac{h}{v_0} \frac{l}{v_0} = \frac{eE h l}{m v_0^2}$ . Суммарное вертикальное смещение потока будет равно

$$\Delta z = \delta_1 + \delta_2 = \frac{eEh}{mv_0^2} \left( \frac{h}{2} + l \right).$$

Из этой формулы следует, что смещение пропорционально напряженности поля, следовательно, и разности потенциалов между отклоняющими пластинами. Таким образом, изменяя напряжение между пластинами, можно изменять положение пучка электронов на экране.

### 3.1.2. Электронно-лучевая трубка с электростатическим отклонением

Электронно-лучевые трубы используются для получения изображения на экране. Принципиальная схема такой трубы показана на рис. 92.

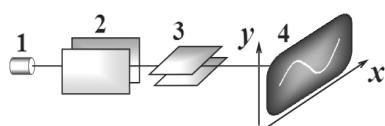


Рис. 92

Узкий пучок электронов, формируемых электронной пушкой 1, ускоряется под действием электрического поля, созданного между пушкой и экраном 4. На своем пути пучок электронов проходит через две пары отклоняющий пластин 2, 3. К пластинам прикладывается переменное напряжение, которое создает электрическое поле между пластинами, отклоняющее электроны в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Экран покрыт специальным слоем, который дает кратковременные вспышки света<sup>\*</sup> при попадании на него движущихся электронов. Все устройство находится в стеклянной колбе, из которой откачен воздух. Конечно, реально действующий прибор гораздо сложнее описанной здесь принципиальной схемы.

Изучаемый сигнал подается только на одну пару отклоняющих пластин, отклонение луча в перпендикулярном направлении необходимо, чтобы «развернуть» сигнал на экране, поэтому напряжение, подаваемое на горизонтально направляющие пластины, называется разверткой. Пусть на горизонтально отклоняющие пластины 2 подается напряжение, линейно возрастающее со временем  $U_x = bt$ , а на вертикально отклоняющие пластины 3 подается напряжение, зависимость от времени которого  $U(t)$  изучается. Так как отклонения луча на экране вдоль соответствующих направлений пропорциональны напряжениям, приложенным к

---

\* Эти вспышки называются сцинциляции, а такой экран сцинцилирующим.

отклоняющим пластинал, то его закон движения на экране описывается уравнениями

$$\begin{cases} x = K_x U_x = K_x b t \\ y = K_y U_y = K_y U(t) \end{cases}. \quad (1)$$

Уравнение траектории луча на экране можно получить в явном виде, избавившись от времени с помощью первого уравнения:

$$t = \frac{1}{K_x b} x; \Rightarrow y = K_y U\left(\frac{1}{K_x b} x\right). \quad (2)$$

Таким образом, траектория луча на экране совпадает\* с графиком функции  $U(t)$ , что позволяет ее визуально наблюдать. С другими, наиболее часто применяемыми, способами развертки мы познакомимся позднее, при изучении теории колебательных процессов.

### 3.2. Плоское движение заряженной частицы в однородном магнитном поле

При движении заряженной частицы в магнитном поле на нее действует сила Лоренца, которая, как известно, направлена перпендикулярно вектору скорости частицы, поэтому эта сила работы не совершает. Следовательно, **при движении частицы в любом стационарном магнитном поле кинетическая энергия и модуль скорости частицы сохраняются** – изменяется только направление вектора скорости частицы.

---

\* Из курса математики хорошо известно, что умножение аргумента и функции на константу приводит только к изменению масштабов осей графика.

Рассмотрим движение заряженной частицы в однородном магнитном поле, когда вектор скорости частицы направлен перпендикулярно вектору индукции магнитного поля (рис. 93). Так как модуль скорости частицы сохраняется, сила Лоренца перпендикулярна вектору индукции поля  $\vec{B}$ , то вектор скорости всегда будет перпендикулярен вектору индукции поля. Итак, модули векторов скорости и индукции постоянны, векторы перпендикулярны, следовательно, модуль силы Лоренца также будет оставаться постоянным и равным  $F_L = qvB$ . Сила Лоренца является центростремительной, она приводит к искривлению траектории, а так как ее модуль постоянен, то кривизна траектории частицы будет постоянна, то есть траекторией частицы будет окружность. Радиус этой окружности  $R$  можно найти на основании уравнения второго закона Ньютона

$$\frac{mv^2}{R} = qvB, \quad (1)$$

из которого находим

$$R = \frac{mv}{qB}. \quad (2)$$

Найдем период обращения частицы в магнитном поле

$$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \frac{m}{qB}. \quad (3)$$

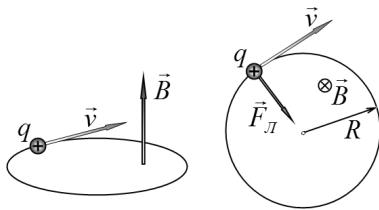


Рис. 93

Из этой формулы следует интересный и неожиданный вывод<sup>\*</sup>: **период вращения частицы в магнитном поле не зависит от ее скорости**. Частота вращения выражается формулой

$$v = \frac{1}{T} = \frac{q}{2\pi m} B \quad (4)$$

и называется **циклотронной частотой**.

### 3.2.1. Циклотрон

Постоянство частоты вращения частиц в магнитном поле используется в **циклотроне** – одном из типов ускорителей заряженных частиц – ионов.

Принципиальная схема ускорителя показана на рис. 94. Основная часть циклотрона – большой электромагнит **1** диаметром в несколько метров и весом в десятки и сотни тонн, между полюсами которого (верхняя часть электромагнита – второй его полюс – на рисунке не показана) находится вакуумная камера. Индукция магнитного поля, создаваемого в камере, составляет 1-2 Тл. В вакуумной камере расположены ускоряющие электроды (дуанты) **2**. Источник частиц **3** впрыскивает ионы внутрь камеры вблизи ее цен-

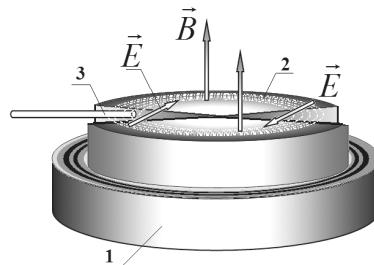


Рис. 94

<sup>\*</sup> Этот вывод справедлив только для скоростей, значительно меньших скорости света; если скорость частицы приближается к скорости света, то период вращения изменяется.

тра. Под действием постоянного магнитного поля ионы движутся по дугам окружностей. В зазоре электродов создается высокочастотное электрическое поле, частота которого в два раза превышает частоту вращения ионов, которая определяется формулой (4). Ускоряющая разность потенциалов между электродами обычно составляет несколько десятков киловольт. Благодаря этому полю, ионы, каждый раз проходя область в зазоре электродов-дуантов, ускоряются, поэтому радиус их орбиты возрастает (см. формулу (2)), а период вращения остается постоянным\*. Достигая периферийной области, ускоренные ионы выводятся из ускорителя и направляются на мишень и регистрирующие устройства.

Недостатком циклотрона является то, что зарженные частицы в нем не могут быть ускорены до больших энергий, так как при высоких скоростях начинает проявляться релятивистская зависимость периода обращения от скорости частиц. С ростом скорости этот период возрастает, и поэтому при каждом очередном попадании в ускоряющий зазор частицы начинают всё больше опаздывать, пока не оказываются в нем тогда, когда существующее в зазоре поле будет их тормозить. Поэтому

---

\* Как было отмечено, при приближении скорости частиц к скорости света период вращения возрастает. Этот фактор ограничивает максимальную энергию ускоряемых частиц. В более совершенных ускорителях учитывается это изменение периода посредством изменения индукции магнитного поля или изменения частоты электрического поля.

для получения частиц высоких энергий используют другие, более сложные ускорители, например, электронные синхрофазотроны.

Ускорители-циклотроны были разработаны и построены в 30-х годах XX века и сыграли (и продолжают играть) важную роль в развитии ядерной физики. Несмотря на простоту основных принципов работы ускорителя, циклотрон является очень сложным инженерным сооружением, включающим ( помимо описанных элементов) источники питания (электромагнитов, источников частиц, ускоряющей системы, системы регистрации и др.), вакуумную систему, блоки управления и регистрации и т.д.

Первая модель циклотрона впервые была построена в 1930 году американскими физиками Э. Лоуренсом и С. Ливингстоном. Диаметр циклотрона составил 25 сантиметров; энергии частиц в их экспериментах доходили до 1 МэВ.

В 1931 году этими же учеными была создана научная установка размером 69 см. Эта установка активно использовалась в экспериментах по исследованию ядерных реакций и искусственной радиоактивности. На фото – С. Ливингстоун и Э. Лоуренс у 27-дюймового циклотрона (рис. 95).

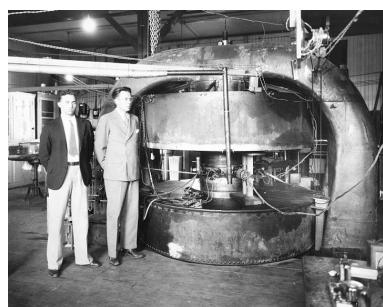


Рис. 95

### 3.2.2. Масс-спектроскопия

Характеристики движения частиц в магнитном поле (радиус траектории, время движения) зависят от их масс и зарядов. Изучение движения частиц в магнитных полях является основой **масс-спектроскопии** – метода исследования вещества по спектру\* масс атомов и молекул, входящих в его состав. Сущность метода состоит в том, что ионизованные атомы и молекулы, проходя через магнитное поле, пространственно разделяются и регистрируются в различных точках. Первоначальными задачами масс-спектроскопии были исследование изотопного состава элементов и прецизионное (точное) измерение масс атомов. В дальнейшем масс-спектроскопия выросла в универсальный аналитический метод, применяемый в экспериментальной физике, химии, биологии, геологии, технике. Приборы, позволяющие разделять и регистрировать частицы, называются **масс-спектрометрами**.

Принцип действия масс-спектрометра показан на рис. 96. Исследуемый образец специальными методами (испарением, электронным ударом) пе-

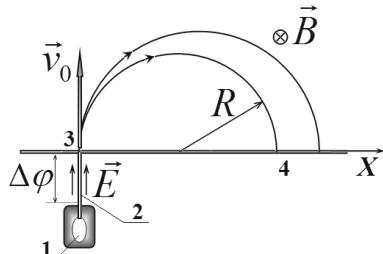


Рис. 96

\* Спектр – совокупность (набор) всех значений какой-либо физической величины, например, спектр частот, спектр энергий, спектр масс и т.д.

реводится в газообразное состояние, затем образовавшийся газ ионизируется в источнике **1**. Затем ионы ускоряются электрическим полем и формируются в узкий пучок в ускоряющем устройстве **2** и через узкую входную щель **3** попадают в камеру **4**, в которой создано однородное поперечное магнитное поле. В камере ионы движутся по дуге окружности и попадают на экран **5**, где регистрируется место их попадания. Методы регистрации могут быть различными – фотографические, электронные и т.д. Радиус траектории зависит от массы и заряда иона, поэтому разные ионы попадают на экран на различном расстоянии от источника, что и позволяет их разделять и анализировать состав образца.

Найдем координату точки попадания иона на экран в зависимости от его массы, заряда и параметров прибора. В ускоряющем устройстве, проходя разность потенциалов  $\Delta\varphi$ , ионы приобретают скорость  $v_0$ , которая может быть найдена из уравнения закона сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = q\Delta\varphi , \quad (1)$$

из которого следует

$$v_0 = \sqrt{2 \frac{q}{m} \Delta\varphi} . \quad (2)$$

Начальной скоростью ионов можно пренебречь, так как обычно она значительно меньше скорости после ускорения. Кроме того, в некоторых приборах применяют дополнительные устройства для выделения частиц, имеющих близкие значения

скоростей. В магнитном поле ионы движутся по окружности радиуса

$$R = \frac{mv_0}{qB} = \frac{m}{qB} \sqrt{2 \frac{q}{m} \Delta\varphi} = \sqrt{\frac{2\Delta\varphi m}{B^2 q}}, \quad (3)$$

который зависит от отношения массы к заряду частицы. Координата попадания иона на экран равна диаметру окружности

$$x_0 = 2R = 2 \sqrt{\frac{2\Delta\varphi m}{B^2 q}}. \quad (4)$$

В большинстве случаев ионы являются однозарядными (т.е. атомы и молекулы в процессе ионизации теряют один электрон), поэтому фактически прибор разделяет ионы по их массе, формируя масс-спектр исследуемого образца. Если в исходном образце присутствуют различные ионы, то на экране образуется несколько полос, координаты которых позволяют определить состав исходной смеси. Одной из важнейших характеристик масс-спектрометров является их **разрешающая способность** – характеристика, указывающая, при какой минимальной разности масс ионы могут быть различены. Разрешающая способность прибора ограничена, так как полосы на экране не являются абсолютно тонкими, они всегда несколько размыты, имеют некоторую ширину. Если разность координат полос, соответствующих ионам мало различающихся масс (например изотопам одного химического элемента), оказывается меньше ширины полос, то эти полосы сольются, что сделает невозможным разделение (разрешение) двух типов ионов. Кроме того, ширина образую-

щейся полосы  $\Delta x$  определяет погрешность определения массы иона.

Из формулы (4) следует, что масса иона рассчитывается по формуле

$$m = \frac{qB^2}{8\Delta\phi} x_0^2, \quad (5)$$

Если считать, что основную погрешность в определение массы вносит погрешность определения координаты полосы (то есть ее ширина)  $\Delta x$ , то погрешность определения массы следует рассчитывать по формуле

$$\Delta m = 2 \frac{qB^2}{8\Delta\phi} x_0 \Delta x, \quad (5)$$

а относительная погрешность равна

$$\varepsilon_m = \frac{\Delta m}{m} = 2 \frac{\Delta x}{x_0}. \quad (6)$$

Таким образом, уменьшение ширины образующейся полосы является одной из важнейших задач разработчиков масс-спектрометров.

К уширению полосы приводят целый ряд факторов (например, различие в начальных скоростях ионов, ширина входной щели), но одной из основных причин является различие в направлении вектора начальной скорости. Реально, ионы влетают в камеру не строго перпендикулярно экрану, а в пределах некоторого (пусть и небольшого) угла  $2\delta\alpha$  (рис. 97). Поэтому в масс-спектрометрах применяются специальные системы **фокусировки частиц**, предназначенные для того, чтобы частицы, вылетевшие из одной точки под

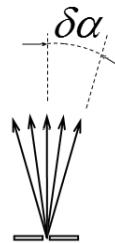


Рис. 97

разными углами, собирались (фокусировались) в некоторой малой области (в идеале – в точке).

Неслучайно в рассматриваемом приборе ионы пролетают половину окружности (их угол поворота равен  $\pi$ ) – в этом случае однородное поперечное поле частично фокусирует ионы на регистрирующем экране. Рис. 98 иллюстрирует фокусировку пучка частиц в однородном поперечном магнитном поле. В идеальном случае, когда все частицы вылетают строго в одном направлении, нет необходимости заставлять ионы пролетать половину окружности. В принципе, экран  $OB'$  можно расположить под произвольным углом  $\varphi$ . Однако, если ионы вылетают из щели  $A$  в пределах некоторого угла  $2\delta\alpha$ , то пучок ионов (на рис. 98 заштрихован) обладает некоторой шириной, причем его ширина минимальна именно при угле поворота ионов, равном  $\pi$ . Найдем эту минимальную ширину пучка, которая равна ширине полосы на экране  $AB$ .

Пусть ион влетает в область магнитного поля под углом  $\alpha$  к нормали (рис. 99) и затем движется по дуге окружности  $ACB$ . Для сравнения на рисунке изображена «идеальная» траектория  $AB_0$  частицы,

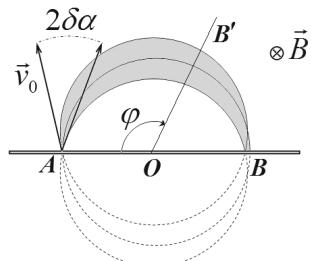


Рис. 98

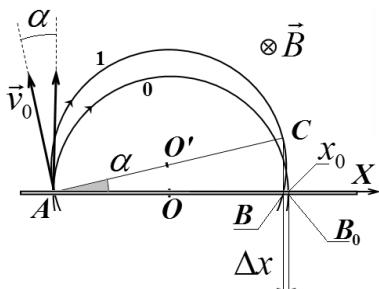


Рис. 99

влетевшей перпендикулярно экрану. Если вектор начальной скорости частицы  $\vec{v}_0$  повернут на угол  $\alpha$ , то на такой же угол относительно точки вылета повернута и вся траектория, в том числе и ее диаметр  $AO'C$ . Ион попадает на экран в точке  $B$ , причем угол  $\angle ABC$  – прямой, так как он вписан в окружность и опирается на диаметр. Следовательно, координата точки падения  $B$  равна

$$x = 2R \cos \alpha. \quad (7)$$

Эта координата максимальна для «идеальной» траектории  $\alpha = 0$  и уменьшается при увеличении угла отклонения вектора начальной скорости, причем независимо от того, в какую сторону. Если максимальный угол отклонения равен  $\delta\alpha$ , то ширина полосы равна

$$\Delta x = 2R(1 - \cos \delta\alpha), \quad (8)$$

при малом  $\delta\alpha$  следует воспользоваться приближенной формулой  $\cos \delta\alpha \approx 1 - \frac{(\delta\alpha)^2}{2}$  и рассчитать ширину полосы по формуле

$$\Delta x = 2R(1 - \cos \delta\alpha) \approx R(\delta\alpha)^2, \quad (9)$$

а относительное уширение полосы оказывается равным

$$\frac{\Delta x}{x_0} = \frac{\Delta x}{2R} = \frac{1}{2}(\delta\alpha)^2. \quad (10)$$

Как следует из полученного результата, уширение полосы является малой величиной более высокой степени (действительно  $(\delta\alpha)^2 < \delta\alpha$  при  $\delta\alpha < 1$ ), что и свидетельствует об эффекте фокусировки.

В настоящее время разработаны многочисленные типы масс-спектрометров, принципы работы которых отличаются от рассмотренных выше: с другими методами фокусировки частиц, с иной конфигурацией магнитного поля. Изготавливаются также динамические масс-спектрометры, в которых массы исследуемых ионов определяются по времени пролета от источника до регистрирующего устройства.

### 3.2.3. Магнитная отклоняющая система

Магнитное поле также используется для отклонения пучков частиц. Причем магнитные отклоняющие системы электронных пучков в телевизионных трубках (кинескопах) и осциллографах используются гораздо чаще электростатических. Магнитная отклоняющая система проста: состоит из двух электромагнитов **1-2**, в зазоре **3** которых проходит электронный пучок **4** (рис. 100).

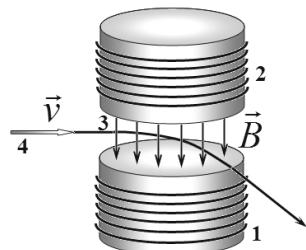


Рис. 100

Найдем угол отклонения электронного луча в этом случае. Пусть область, занятая однородным магнитным полем индукции  $\vec{B}$  (зазором между торцами магнитов, магнитным полем вне этой области можно пренебречь), имеет форму цилиндра радиуса  $r$  (рис. 101).

Для простоты будем считать, что пучок электронов движется по направлению к центру этой области и попадает в нее в точке  $A$ . Под действием магнитного поля пучок отклоняется и движется по дуге окружности  $AC$ , радиус которой равен

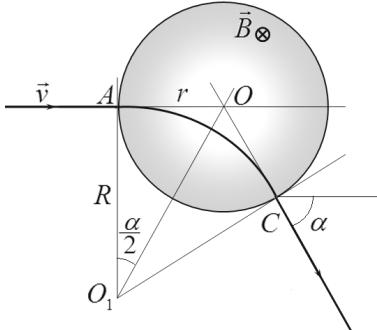


Рис. 101

$$R = \frac{mv}{eB}, \quad (1)$$

угол отклонения луча  $\alpha$  легко находится из рисунка. Из прямоугольного треугольника  $AO_1$  следует, что

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{R} = \frac{er}{mv} B, \quad (2)$$

$$\text{или } \alpha = 2 \arctg \left( \frac{er}{mv} B \right). \quad (3)$$

При малых углах (когда тангенс приблизительно равен самому углу) отклонение пропорционально индукции поля, которая в свою очередь пропорциональна силе тока электромагнита. Изменяя величину этого тока, можно регулировать направление пучка электронов.

### 3.3. Движение по винтовой линии в однородном магнитном поле

Рассмотрим теперь произвольный случай движения зарженной частицы в однородном магнитном поле.

Введем систему декартовых координат так, чтобы вектор индукции однородного магнитного поля  $\vec{B}$  был направлен вдоль оси  $Oz$  (рис. 102). Пусть вектор скорости  $\vec{v}_0$  частицы массы  $m$ , имеющей электрический заряд  $q$ , направлен под произвольным углом  $\alpha$  к вектору индукции поля. Разложим этот вектор на две составляющие:  $\vec{v}_1$  – параллельную вектору индукции и  $\vec{v}_2$  – перпендикулярную ему. Действующая на частицу сила Лоренца  $\vec{F}_L$  перпендикулярна векторам скорости и индукции, то есть лежит в плоскости  $xOy$ . Модуль этой силы равен

$$F_L = qv_0 B \sin \alpha = qv_2 B. \quad (1)$$

Если спроектировать уравнение второго закона Ньютона для частицы

$$m\vec{a} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (2)$$

на плоскость  $xOy$ , то получим уравнение, в которое входит только компонента скорости, перпендикулярная полю. Это уравнение описывает движение частицы, движущейся перпендикулярно вектору индукции, которое было подробно рассмотрено ранее. Оно представляет собой равномерное движение по окружности радиуса

$$R = \frac{mv_2}{qB} = \frac{mv_0 \sin \alpha}{qB}, \quad (3)$$

с периодом

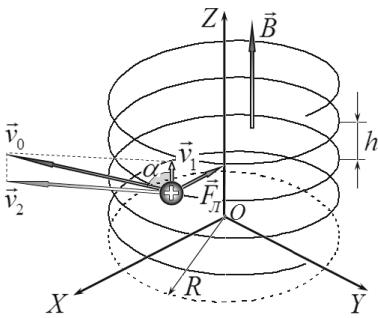


Рис. 102

$$T = \frac{2\pi R}{v_2} = 2\pi \frac{m}{qB}, \quad (4)$$

и угловой скоростью

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{q}{m} B, \quad (5)$$

не зависящими ни от модуля скорости частицы, ни от ее направления.

Проекция магнитной силы на ось  $Oz$  равна нулю, поэтому проекция скорости на эту ось остается постоянной. Следовательно, эта координата изменяется по линейному закону

$$z = z_0 + v_1 t = z_0 + v_1 t \cos \alpha. \quad (6)$$

Таким образом, движение частицы можно представить в виде суперпозиции равномерного движения вдоль оси  $Oz$  и равномерного движения по окружности в перпендикулярной плоскости. Траекторией этого движения является винтовая линия, радиус которой определяется формулой (3), а шаг рассчитывается по формуле

$$h = v_1 T = 2\pi \frac{mv_0}{qB} \cos \alpha. \quad (7)$$

Таким образом, заряженные частицы движутся по спиралям (точнее, винтовым линиям), навивающимся на силовые линии магнитного поля. Такой же характер движения сохраняется и в неоднородном магнитном поле: частицы движутся по спиралям, навивающимся на силовые линии поля, при этом радиус и шаг спирали плавно изменяются с изменением индукции поля. Направление смещения (дрейфа) частиц в магнитном поле определяется направлением начальной скорости частиц и не

зависит ни от знака заряда частицы, ни от направления вектора индукции поля, последние определяют только направление вращения вокруг силовой линии. Такое движение заряженных частиц позволяет конструировать различные «магнитные ловушки» для накопления заряженных частиц, управлять движением сильно ионизованного газа (плазмы). Аналогичный характер имеет движение заряженных частиц и в магнитном поле Земли.

### **3.4. Магнитное поле Земли, магнитные бури, северные сияния**

Земля, как и многие другие космические тела (звезды, планеты), обладает собственным магнитным полем. Это поле играет чрезвычайную важную роль в нашей жизни. Благодаря его наличию оказалось возможным использовать магнитную стрелку, как основной навигационный прибор в течение многих столетий. Магнитное поле также защищает все живое на Земле от смертельного воздействия космических лучей, состоящих из потоков высокоэнергетичных заряженных частиц.

Магнитное поле Земли слагается из постоянного, устойчивого поля, создаваемого магнетизмом самого земного шара, и переменного поля, обусловленного электрическими токами, текущими над земной поверхностью и в земной коре. Постоянное магнитное поле приближенно совпадает с полем магнитного диполя, или полем однородно намагниченного шара (на рис. 103 – результаты

компьютерного моделирования магнитного поля Земли).

Индукция магнитного поля непостоянна на поверхности Земли, изменяясь от наибольшего значения ( $\approx 7 \cdot 10^{-5}$  Тл) у полюсов, где вектор индукции направлен вертикально, до минимального значения ( $\approx 4 \cdot 10^{-5}$  Тл) вблизи экватора.

Здесь вектор индукции поля практически горизонтален. Суммарный магнитный момент Земли оценивается величиной порядка  $p_m \approx 8 \cdot 10^{22} A \cdot m^2$ . Если предположить, что такой момент создается электрическими токами, текущими по поверхности внешнего ядра земного шара (его радиус  $R_{яд.} \approx 3500$  км =  $3,5 \cdot 10^6$  м), то суммарная сила этого тока составляет величину порядка  $I \approx 2 \cdot 10^9$  А. Ось магнитного диполя наклонена под углом, близким к  $11,5^\circ$  к оси вращения Земли, поэтому географические и магнитные полюса Земли не совпадают. Кроме того, магнитные полюса медленно передвигаются по поверхности Земли, имеются надежные доказательства того, что в геологической истории Земли направление магнитной оси несколько раз изменялось на противоположное. Отклонения конфигурации поля от поля магнитного диполя обусловлены влиянием рудных месторождений, богатых ферромагнитными минералами (например, Курская магнитная аномалия).

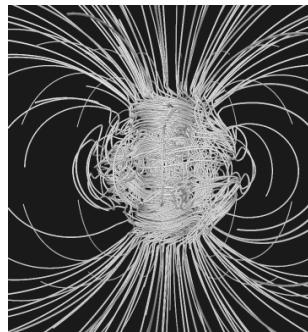


Рис. 103

До настоящего времени не существует общеизвестной теории земного магнетизма. Имеется целый ряд гипотез, пытающихся объяснить существование и свойства этого поля. По одной из этих теорий, теории «самовозбуждающегося динамо», электрические токи в ядре создаются в результате механических движений составляющего внешнее ядро жидкого вещества, обладающего высокой электропроводностью. Решение соответствующих магнитогидродинамических уравнений показывает принципиальную возможность существования таких движений, которые могут индуцировать наблюдаемое поле. Математические расчеты также показывают, что при некоторых условиях появляется неустойчивость системы, которая может объяснить обращение знака геомагнитного поля. Гипотеза самовозбуждающегося поля применяется также и для объяснения магнитного поля Солнца и других космических тел.

Земля постоянно подвергается воздействию потоков заряженных частиц (космических лучей). Наиболее мощным источником этих частиц является Солнце. Приближаясь к Земле, эти частицы захватываются магнитным полем и движутся по спиральным траекториям в области магнитных полюсов. Там они могут проникать в атмосферу Земли и вызывать ионизацию атмосферных газов. Для земных наблюдателей эти потоки и связанные с ними области ионизации проявляются как **северные сияния**.

Захват заряженных частиц магнитным полем также приводит к возникновению и постоянному обновлению **радиационных поясов**, существующих вокруг Земли на значительных расстояниях (до 5-6 радиусов Земли).

Большие возмущения магнитного поля (достигающие 1-2 % постоянного поля), или магнитные бури, вызываются приближением к Земле потоков частиц, выбрасываемых Солнцем во время солнечных вспышек. Громадные потоки заряженных частиц, захваченные магнитным полем, изменяют состояние верхних слоев атмосферы (главным образом ионосфера), приводят к генерации ионосферных электрических токов. Вызванные ими возмущения магнитного поля могут приводить к нарушению радиосвязи, сбоям в работе электронных приборов, потере управляемости искусственных спутников Земли.

Многие процессы в живых организмах (в том числе и человеческом) имеют электромагнитную природу, поэтому воздействие внешних магнитных полей может оказывать влияние на самочувствие человека. Так, магнитные бури могут приводить к ухудшению самочувствия некоторых чувствительных людей.

### **3.5. Магнетрон**

В качестве прибора, в котором электроны движутся одновременно в электрическом и магнитных

полях, рассмотрим **магнетрон**. Такие устройства используются в качестве источника высокочастотного электромагнитного излучения, в частности в бытовых СВЧ-печах.

Простейший магнетрон (рис. 104) представляет собой два коаксиальных цилиндра: катод 1 и анод 2, помещенных в баллон, из которого откачен воздух (на рисунке не изображен). Цилиндры располагаются внутри катушки соленоида 3, создающей при пропускании электрического тока внутри цилиндров однородное магнитное поле, направленное вдоль оси системы. К цилиндрам прикладывается электрическое напряжение, благодаря чему между ними возникает радиальное электрическое поле.

Внутренний цилиндр (катод) разогревается специальной нитью накаливания, находящейся внутри него, и испускает электроны. Под действием электрического поля электроны разгоняются по направлению к внешнему цилинду, а магнитное поле искривляет траектории электронов (рис. 105). Если индукция поля мала, то искривление траекторий незначительно и все испу-

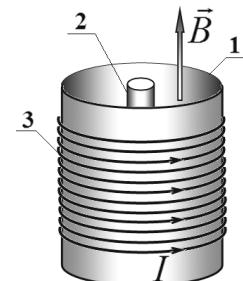


Рис. 104

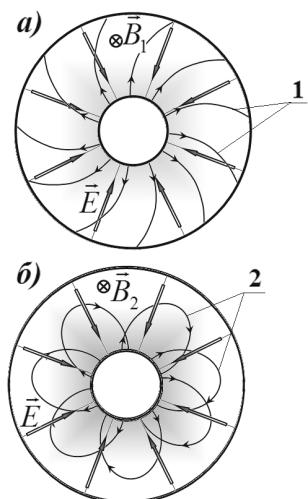


Рис. 105

щенные катодом электроны достигают анода (эти траектории обозначены цифрой 1 на рис. 105 а), благодаря чему между катодом и анодом протекает электрический ток. При возрастании индукции магнитного поля траектории искривляются сильнее. Если индукция магнитного поля превышает некоторое критическое значение, то траектории искривляются настолько, что электроны возвращаются к катоду, не достигая анода. Электрический ток между катодом и анодом при этом не протекает.

Найдем условия, при которых электрический ток между катодом и анодом прекращается.

Чтобы упростить математические расчеты, будем считать, что расстояние между цилиндрами значительно меньше их радиусов. В этом случае поверхности цилиндров в малой области можно считать параллельными плоскостями, а электрическое поле между ними однородным (рис. 106). Заметим, что данное приближение не искажает физической сущности протекающих процессов. Так, на рис. 105 показано изменение траекторий электронов при увеличении индукции магнитного поля: 0 – в отсутствии магнитного поля, далее, в порядке возрастания магнитной индукции, кривой 2 обозначена интересующая нас «критическая» траектория, касающаяся анода. Если индукция магнитного поля превышает критическое значение,

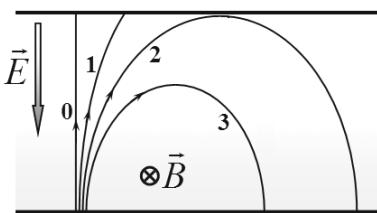


Рис. 106

соответствующее этой траектории, то электрический ток между катодом и анодом не протекает.

Для описания движения электрона введем декартову систему координат, как показано на рис. 107. Даже в рамках сдельного упрощения полностью решить уравнение движения электрона

$$m\vec{a} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1)$$

в этом случае достаточно сложно.

Тем не менее можно найти максимальное удаление электрона от катода, не рассчитывая закон движения электрона и его траекторию\*. Для решения этой задачи, помимо уравнения (1), необходимо использовать закон сохранения энергии для электрона:

$$\frac{mv^2}{2} = eEy, \quad (2)$$

здесь  $Ey$  – разность потенциалов между точкой, находящейся на расстоянии  $y$  от катода, и самим катодом;  $eEy$  – работа, которую совершает электрическое поле над электроном при его смещении вдоль оси  $Oy$  на расстояние  $y$ . Скоростью электрона в момент вылета из пластины пренебрегаем.

Запишем теперь уравнение движения (1) в проекции на ось  $Ox$ . Проекция силы, действующей на

\* Тем не менее укажем, что траекторией электрона в данном случае является циклоида.

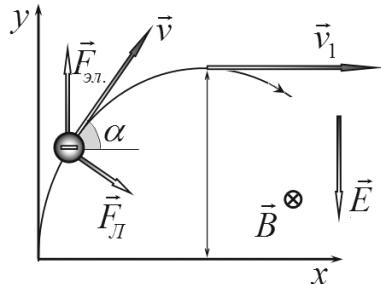


Рис. 107

электрон со стороны электрического поля, на эту ось равна нулю. Так как в любой точке траектории векторы скорости электрона и индукции магнитного поля перпендикулярны, то модуль силы Лоренца постоянен и равен  $F_L = evB$ . Проекция этой силы на ось  $Ox$  равна

$$F_{Lx} = evB \sin \alpha = eBv_y, \quad (3)$$

где  $\alpha$  – угол между вектором скорости и осью  $Ox$ ,  $v_y = v \sin \alpha$  – проекция скорости на ось  $Oy$ . Таким образом, требуемое уравнение имеет вид

$$ma_x = eBv_y. \quad (4)$$

Выразим соответствующие проекции ускорения и скорости через изменения скорости и координаты  $a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$ ;  $v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t}$  и подставим в уравнение (4)

$$m \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = eB \frac{\Delta y}{\Delta t}. \quad (5)$$

После сокращения на  $\Delta t$  следует заметить, что если соотношение (5) между изменениями скорости и координаты выполняется для любого малого промежутка времени, то оно будет выполнятьсь и для любого временного интервала. Учитывая, что в момент вылета выполняются условия  $y = 0$ ,  $v_x = 0$ , из уравнения (5) следует соотношение

$$mv_x = eBy. \quad (6)$$

Запишем теперь уравнения (2) и (6) для точки максимального удаления от катода  $h$ , в которой вектор скорости  $\vec{v}_1$  направлен параллельно оси  $Ox$ , поэтому здесь  $v_x = v_1$ :

$$\begin{cases} \frac{mv_1^2}{2} = eEh \\ mv_1 = eBh \end{cases}. \quad (7)$$

Из этой системы уравнений легко находим максимальное удаление электрона от катода

$$h = \frac{m}{e} \frac{E}{B^2}. \quad (8)$$

Из этого соотношения можно найти критическое значение индукции поля, при котором исчезает электрический ток, в этом случае максимальное удаление равно расстоянию между пластинами. При известных параметрах установки это же соотношение может быть использовано для экспериментального определения удельного заряда электрона.

Для получения высокочастотного электромагнитного излучения на электроды подается переменное электрическое поле, которое сначала разгоняет электроны к аноду, а затем тормозит их, не давая им вернуться на катод. В таком случае электроны быстро движутся по замысловатым траекториям в пространстве между электродами, излучая при этом электромагнитные волны. В более совершенных магнетронах анод имеет более сложную форму толстого цилиндра с несколькими полостями, что, естественно, изменяет структуру электрического поля. Мы не имеем возможности обсуждать подробно эти технические детали – важно, что в любом магнетроне совокупность магнитного и электрического полей заставляет электроны двигаться по периодическим траекториям, на которых происходит излучение электромагнитных волн требуемой частоты.

Термин «магнетрон» был предложен А. Халлом, который в 1921 году, впервые опубликовал результаты теоретических и экспериментальных исследований работы прибора в статическом режиме и предложил ряд конструкций магнетрона. Генерирование электромагнитных колебаний в дециметровом диапазоне волн посредством магнетрона открыл и запатентовал в 1924 чехословацкий физик А. Жачек. В 1936–1937 Н. Ф. Алексеевым и Д. Е. Маляровым под руководством М. А. Бонч-Бруевича была разработана конструкция многорезонаторного магнетрона, что позволило увеличить выходную мощность на 2 порядка. На рис. 108 показан такой магнетрон в разрезе.

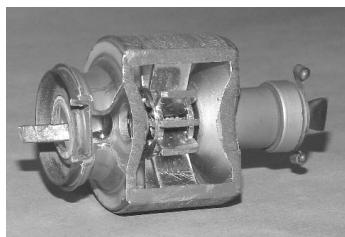


Рис. 108

Магнетроны, способные развивать огромную мощность в импульсе, нашли широкое применение в радиолокации. Начиная с 1960 года резко увеличился выпуск магнетронов, поскольку начали получать распространение СВЧ-печи для домашнего использования.

## § 4. Переменное электромагнитное поле

### 4.1. Явление электромагнитной индукции

#### 4.1.1. Открытие явления электромагнитной индукции М. Фарадеем

Открытие Х. К. Эрстедом в 1820 году магнитного действия тока доказало, что электрические и магнитные явления связаны между собой. Теория А. М. Ампера свела многочисленные исследованные им магнитные явления к взаимодействию электрических токов, то есть движущихся электрических зарядов. После открытия Эрстеда и работ Ампера английский ученый Майкл Фарадей пришел к мысли об обратном процессе – возбуждении электрического тока магнетизмом: если электрический ток порождает магнитное поле, то почему магнитное поле не может возбудить электрический ток? В 1822 году в рабочей тетради М. Фарадея появляется запись, в которой сформулирована задача: «Превратить магнетизм в электричество». На решение поставленной задачи М.Фарадею потребовалось почти десять лет упорных и многочисленных экспериментов, которые привели к открытию явления электромагнитной индукции 29 августа 1831 года\*.

В течение длительного времени М. Фарадей носил в кармане моток проволоки и постоянный

---

\* М. Фарадей аккуратно вел рабочие лабораторные тетради, поэтому его открытия можно точно датировать.

магнит, в любую свободную минуту стараясь придумать новое расположение проволоки и магнита, которое привело бы к появлению электрического тока. Как это часто бывало в истории, успех пришел неожиданно, правда, пришлось его ждать почти десять лет. Чтобы исключить непосредственное влияние магнита на прибор, регистрирующий ток (гальванометр), М. Фарадей располагал магниты и проводники (чаще катушки) в одной комнате, а гальванометр – в другой. Расположив очередной раз катушки и магниты, М. Фарадей переходил в другую комнату, чтобы убедиться в очередной раз, что электрический ток отсутствует. Наконец, одним из сотрудников было замечено: электрический ток возникает только в момент относительного движения проводника и магнита (рис. 109).

Сейчас в школьной лаборатории легко воспроизвести эксперименты М. Фарадея. Достаточно подключить проволочную катушку к гальванометру и внести внутрь катушки постоянный магнит (рис. 110). Когда магнит вдвигается в катушку, стрелка гальванометра отклоняется, показывая наличие тока в цепи.

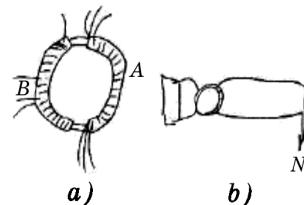


Рис. 109

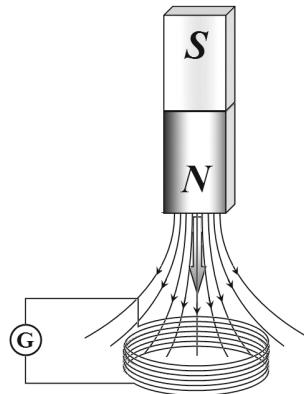


Рис. 110

Ток прекращается, когда магнит неподвижен. Если извлекать магнит из катушки, то опять гальванометр регистрирует наличие тока, только противоположного направления. Если изменить полярность магнита, то направление тока также изменяется. Величина тока зависит от скорости движения магнита: чем быстрее движется магнит, тем больше сила возникающего электрического тока. Аналогичные результаты получаются, если магнит неподвижен, а движется катушка. Иными словами, результат зависит только от относительного движения катушки и магнита.

Далее М. Фарадей показал, что в контуре появляется электрический ток и в том случае, когда он находится в изменяющемся во времени магнитном поле. Чтобы продемонстрировать это явление, можно в предыдущих экспериментах заменить постоянный магнит на катушку, подключенную к источнику постоянного тока (рис. 111). Гальванометр регистрирует ток в катушке 2 только в моменты включения и выключения источника тока через катушку 1. Обратите внимание, что катушки не соединены между собой, единственная связь между ними осуществляется посредством магнитного поля.

Таким образом, во всех случаях при изменении магнитного поля в замкнутом контуре появляется

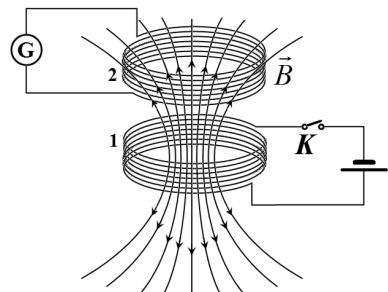


Рис. 111

электрический ток, что свидетельствует о появлении в нем электродвижущей силы. М.Фарадей свои рассуждения об электромагнитных явлениях связывал со свойствами силовых линий, которые он воспринимал как вполне реальные упругие нити и трубы. В таких рассуждениях электрический ток возникает, когда силовые линии магнитного поля движутся и пересекают контур, благодаря чему в контуре наводится (индуктируется) ЭДС.

Явление возникновения электрического тока в контуре при изменении магнитного поля М. Фарадей назвал **явлением электромагнитной индукции**.

Далее мы не будем строго следовать за рассуждениями и экспериментами М.Фарадея, потому что в его время природа электрических и магнитных явлений была абсолютно неизвестна: даже электрический ток не всегда связывался с движением электрических зарядов. Поэтому в нашем изложении мы будем использовать факты и идеи, которые стали известны значительно позднее.

#### **4.1.2. Движущийся проводник в магнитном поле**

Сегодня почти очевидно, что никакая конфигурация постоянного магнитного поля не может привести к возникновению постоянного электрического тока. Для поддержания тока в электрической цепи, как мы знаем, должен быть источник сторонних сил, который совершает работу по

преодолению сил сопротивления. Магнитное поле действует только на движущиеся заряды, причем сила, действующая на заряд (сила Лоренца), перпендикулярна вектору скорости частицы, поэтому она работы не совершает. Наконец, если бы стационарное магнитное поле могло поддерживать электрический ток, то это был бы прямой путь к созданию «вечного двигателя», то есть к «бесплатному» получению энергии. Действительно, если поле стационарно, то его энергия не изменяется, а гипотетический электрический ток обладает энергией и способен совершать работу. Следовательно, для возникновения ЭДС в контуре должен существовать внешний источник энергии. Энергия в контур может поступать благодаря работе внешних сил.

Рассмотрим группу простых мысленных экспериментов, допускающих простое теоретическое описание. Пусть цилиндрический проводник движется в постоянном магнитном поле, так что вектор скорости  $\vec{v}$  перпендикулярен оси цилиндра, а вектор индукции магнитного поля  $\vec{B}$  перпендикулярен как оси проводника, так и его скорости (рис. 112). Вместе с проводником движутся и свободные заряды, находящиеся внутри него. Со стороны магнитного поля на эти заряды будет действовать сила Лоренца, направленная, в соответствии с правилом левой руки, вдоль оси проводника.

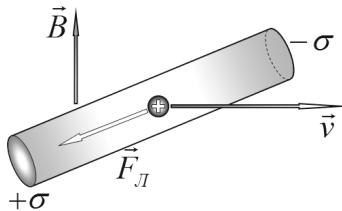


Рис. 112

Наиболее известными проводниками являются металлы, где свободными зарядами являются отрицательно заряженные частицы – электроны. Однако здесь и в дальнейшем мы будем рассматривать движение положительно заряженных частиц, потому что за направление тока принимают направление положительных частиц.

Как правило, свободные заряды движутся в проводнике хаотически равновероятно во все стороны, поэтому в неподвижном проводнике среднее значение вектора силы Лоренца равно нулю. При движении проводника на хаотическое тепловое движение свободных зарядов накладывается направленное движение проводника целиком, благодаря чему появляется отличная от нуля результирующая сила Лоренца, одинаковая для всех частиц. Именно эта постоянная сила приводит к возникновению электрического тока – направленного движения заряженных частиц. Это дает веские основания не принимать во внимание бурное, но хаотическое тепловое движение.

Под действием силы Лоренца свободные заряды начнут смещаться к торцам цилиндра, где будут индуцироваться электрические заряды, описываемые поверхностными плотностями  $\pm\sigma$ . В свою очередь, эти заряды начнут создавать электрическое поле, действие которого на заряженные частицы будет направлено в сторону, противоположную силе Лоренца. При постоянной скорости движения проводника установится равновесие, при котором движение зарядов прекратится, но в проводнике

будет существовать электрическое поле, созданное индуцированными зарядами. В установившемся режиме сила Лоренца  $F_L = qvB$ , действующая на частицу, будет уравновешена силой со стороны электрического поля  $F_{эл.} = qE$ . Приравнивая эти силы, определим напряженность электрического поля в проводнике:

$$E = vB. \quad (1)$$

Так, если сила Лоренца одинакова во всех точках проводника, то и электрическая сила также должна быть постоянна, то есть возникшее электрическое поле является однородным. Это электрическое поле можно также характеризовать разностью потенциалов между торцами цилиндра, которая равна

$$\Delta\phi = El = vBl, \quad (2)$$

где  $l$  – длина проводника.

Сила Лоренца, действующая на свободные заряды в проводнике, может являться сторонней силой, то есть может приводить к возникновению электрического тока в замкнутом контуре, если его подключить к движущемуся проводнику.

Пусть рассматриваемый проводник  $AC$  может скользить по двум параллельным шинам (рельсам), соединенным между собой (рис. 113). Вся система помещена в однородное магнитное поле, вектор индукции которого  $\vec{B}$  перпендикулярен плоскости шин. Для

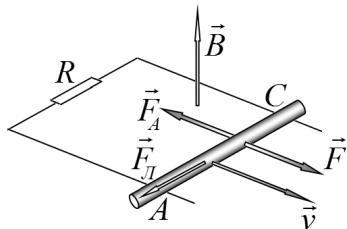


Рис. 113

упрощения будем считать, что сопротивления шин и движущегося проводника (перемычки) пренебрежимо малы по сравнению с сопротивлением соединяющего резистора  $R$ .

Если к подвижному проводнику приложить внешнюю силу  $\vec{F}$ , как показано на рисунке, то он придет в движение. Под действием силы Лоренца свободные заряды в проводнике придут в движение, создавая избыточные заряды на концах. Эти заряды создадут электрическое поле во всем контуре, образованном перемычкой, шинами и соединяющим резистором, поэтому в контуре возникнет электрический ток. Сила Лоренца, действующая на заряды движущегося проводника, будет играть роль сторонней, преодолевающей силы, действующей со стороны электрического поля. Работа этой силы по перемещению единичного заряда (то есть ЭДС) равна произведению силы Лоренца на расстояние между шинами

$$\epsilon = \frac{1}{q} F_{\perp} l = vBl. \quad (3)$$

Несмотря на то что это выражение для ЭДС полностью совпадает с формулой (2) для разности потенциалов, ее смысл принципиально иной. Разность потенциалов есть возможная работа сил электрического поля, в рассматриваемой цепи направление движения заряженных частиц противоположно направлению силы со стороны электрического поля. Сила Лоренца совершает работу против сил электрического поля, поэтому она и является сторонней. Электрическое поле совершает поло-

жительную работу, «проталкивая» заряженные частицы по шинам и соединяющему резистору (которые в данном случае образуют внешнюю цепь).

По закону Ома, сила возникшего в цепи электрического тока равна

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{vBl}{R}. \quad (4)$$

Так как по проводнику идет электрический ток, то на него со стороны магнитного поля действует сила Ампера, равная

$$F_A = IBl = \frac{B^2l^2v}{R}. \quad (5)$$

Направление этой силы также определяется «правилом левой руки», с помощью которого легко определить, что эта сила направлена в сторону, противоположную вектору скорости, поэтому формулу (5) можно записать в векторном виде

$$\vec{F}_A = -\frac{B^2l^2}{R}\vec{v}. \quad (6)$$

По своему характеру эта сила полностью совпадает с силой вязкого трения (пропорциональна скорости и направлена в противоположную сторону), поэтому ее часто называют силой магнитной вязкости.

Таким образом, на движущуюся перемычку, помимо постоянной внешней силы  $\vec{F}$ , действует сила магнитной вязкости, зависящая от скорости. Уравнение второго закона Ньютона для перемычки имеет вид (в проекции на направление вектора скорости):

$$ma = F - \frac{B^2l^2}{R}v. \quad (7)$$

Под действием этих сил сначала перемычка будет двигаться ускоренно, причем с увеличением скорости модуль ускорения будет уменьшаться, наконец, перемычка станет двигаться с постоянной скоростью, которая называется **скоростью установившегося движения**  $\bar{v}$ . Величину этой скорости можно найти из условия  $F = F_A$ , из которого следует

$$\bar{v} = \frac{FR}{B^2 l^2}. \quad (8)$$

Рассмотрим теперь преобразование энергии в данной системе в установившемся режиме движения. За промежуток времени  $\Delta t$  перемычка смещается на расстояние  $\Delta x = \bar{v}\Delta t$ , следовательно, внешняя сила при этом совершает работу

$$\Delta A = F\Delta x = F\bar{v}\Delta t = \frac{F^2 R}{B^2 l^2} \Delta t. \quad (9)$$

За это же время на резисторе выделится количество теплоты, равное

$$Q = I^2 R \Delta t = \left( \frac{\bar{v} Bl}{R} \right)^2 R \Delta t = \frac{B^2 l^2}{R} \left( \frac{FR}{B^2 l^2} \right)^2 \Delta t = \frac{F^2 R}{B^2 l^2} \Delta t. \quad (10)$$

Как и следовало ожидать, количество выделившейся теплоты в точности равно работе внешней силы. Поэтому источником энергии электрического тока в контуре является устройство, передвигающее перемычку (таким устройством может быть и ваша рука). Если прекратится действие этой силы, то и ток в контуре исчезнет.

#### Задания для самостоятельной работы

1. Объясните, почему при индукции магнитного поля, стремящейся к нулю, скорость перемычки, рассчитанная по формуле (8), стремится к бесконечности.

*2. Объясните, почему с ростом сопротивления резистора скорость перемычки возрастает.*

*3. Покажите, что в процессе разгона работа внешней силы равна сумме изменения кинетической энергии перемычки и количества теплоты, выделяющейся на перемычке.*

В данном случае магнитное поле играет роль своеобразного посредника, способствующего преобразованию энергии внешнего источника (создающего внешнюю силу) в энергию электрического тока, которая затем преобразуется в тепловую энергию. Само же внешнее магнитное поле при этом не изменяется.

Оговорка о внешнем поле в данном случае не случайна: индуцированный в контуре электрический ток создает свое собственное магнитное поле<sup>\*</sup>  $\vec{B}'$ . По правилу буравчика это поле направлено противоположно внешнему полю  $\vec{B}$  (рис. 114).

Изменим теперь направление внешней силы на противоположное. При этом изменятся направления движения перемычки, силы Лоренца, электрического тока в контуре и индукции магнитного

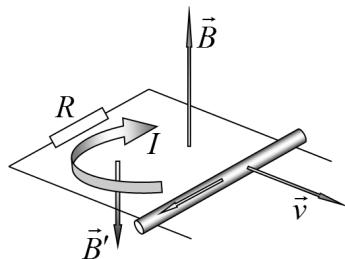


Рис. 114

\* Ток, возникающий в контуре, называется индуцированным (наведенным), поэтому и создаваемое им магнитное поле можно назвать индуцированным. Но как тогда назвать его характеристику – «индукция поля, индуцированного благодаря явлению электромагнитной индукции»?

поля этого тока (рис. 115). То есть в этом случае направление вектора индукции  $\vec{B}'$  будет совпадать с направлением внешнего поля  $\vec{B}$ . Таким образом, направление индуцированного поля определяется не только направлением внешнего поля, но и направлением движения перемычки.

*Подчеркнем: сила Ампера, играющая роль силы вязкости, и в этом (и во всех других) случае противоположна скорости движения перемычки.*

Попытаемся сформулировать общее правило, позволяющее определить направление индукционного тока. На рис. 116 еще раз изображены схемы рассматриваемых экспериментов, если посмотреть на них сверху. Независимо от направления движения перемычки, ЭДС индукции в контуре по модулю определяется формулой (3), которую мы преобразуем к виду

$$\varepsilon = Blv = \frac{Bl\Delta x}{\Delta t}, \quad (11)$$

где  $\Delta x = v\Delta t$  – расстояние, на которое смещается перемычка за промежуток времени  $\Delta t$ . Произведение, стоящее в числителе этого выражения, равно изменению магнитного потока через контур

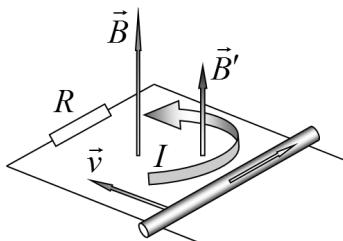


Рис. 115

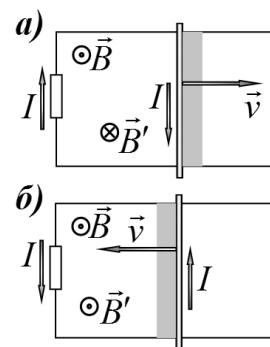


Рис. 116

$Bl\Delta x = \Delta\Phi$ , произошедшему вследствие изменения его площади. Теперь обратим внимание на *направление* этой ЭДС.

Конечно, электродвижущая сила, как работа сторонних сил, является скалярной величиной, поэтому говорить о ее направлении не совсем корректно.

Однако в данном случае речь идет о работе сторонних сил по контуру, для которого можно определить положительное направление обхода. Для этого следует сначала выбрать направление положительной нормали к контуру (очевидно, что выбор этого направления произволен). Как и ранее, примем за положительное направление – «против часовой стрелки», если смотреть с конца вектора положительной нормали, соответственно, направление «по часовой стрелке» будем считать отрицательным (рис. 117). В этом смысле можно говорить о знаке ЭДС: если при обходе в положительном направлении (т.е. «против часовой стрелки») сторонние силы совершают положительную работу, то и величину ЭДС будем считать положительной, и наоборот.

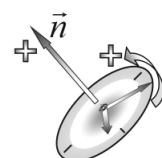


Рис. 117

В данном случае положительное направление нормали совместим с направлением вектора индукции внешнего поля. Очевидно, что направление индукционного тока совпадает с направлением ЭДС.

Согласно принятому определению, в случае *a)* индуцируемая ЭДС и ток в контуре отрицательны,

в случае б) – положительны. Можно обобщить: знак ЭДС противоположен знаку изменения магнитного потока через контур.

Таким образом, ЭДС индукции в контуре равна изменению магнитного потока через контур, взятому с противоположным знаком:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}. \quad (12)$$

Полученному правилу можно дать несколько иную интерпретацию. Обратим внимание на направление магнитного поля, созданного индукционным током: при увеличении магнитного потока через контур это поле противоположно индукции внешнего поля, при уменьшении магнитного потока – поле индукционного тока направлено так же, как внешнее поле. То есть **поле индукционного тока в контуре препятствует изменению магнитного потока через этот контур**. Это правило является универсальным для данного явления и носит название **правило Ленца**\*.

Это правило тесно связано с законом сохранения энергии. Действительно, предположим противоположное: пусть направление индукции магнитного поля, созданного током в контуре, усиливает изменение магнитного потока через контур. В этом случае мы получаем «саморазгоняющуюся» систему: если магнитный поток через контур случайно увеличится, то это приведет к появлению электрического тока, который еще больше увеличит поток

---

\* Названо в честь русского ученого Эмиля Ленца, установившего и обобщившего его.

через контур, что приведет к еще большему возрастанию тока, и т.д. Таким образом, получается, что без внешнего источника сила тока в контуре (и его энергия) неограниченно возрастает, что противоречит закону сохранения энергии.

Обратите внимание, что в данном рассуждении мы принимаем во внимание магнитный поток не только внешнего поля, но и поля, создаваемого индуцированным током. Это поле действительно надо учитывать: сила Лоренца, действующая на заряженные частицы, определяется полным магнитным полем в месте нахождения заряда, независимо от происхождения этого поля. Таким образом, посредством магнитного поля электрический ток способен воздействовать сам на себя – изменяющийся ток создает изменяющееся магнитное поле, которое влияет на электрический ток. Это явление называется **самоиндукцией**, более подробно мы познакомимся с ним позднее. Здесь же отметим, что во многих случаях этим явлением можно пренебречь, так как обычно индуцированные поля достаточно слабы.

Можно также показать, что с правилом Ленца связано и направление силы магнитной вязкости, которая всегда противоположна скорости движения проводника в магнитном поле.

Самое широкое обобщение правила Ленца «на все случаи жизни» звучит так: *следствие стремится уменьшить причину*. Попробуйте самостоятельно придумать примеры из различных разделов науки, когда это правило справедливо. Сложнее

(хотя и возможно) придумать примеры, когда это правило неприменимо.

Рассмотрим еще один пример возникновения ЭДС в проводящем контуре, движущемся в магнитном поле. Пусть поле создается цилиндрическим постоянным магнитом, а круговой контур  $L$  движется со скоростью  $\vec{v}$  вдоль оси этого магнита так, что плоскость контура остается все время перпендикулярной оси магнита (рис. 118).

В этом случае магнитное поле не является однородным, но обладает осевой симметрией. При движении проводника в этом поле на заряженные частицы действует сила Лоренца, направленная вдоль проводника, постоянная по модулю на всем контуре. В этом случае сила Лоренца опять выступает в качестве сторонней силы, приводящей к возникновению электрического тока в контуре. Работа этой силы по перемещению заряда по замкнутому контуру отлична от нуля, поэтому эта сила не является потенциальной. Вычислим ЭДС индукции, возникающей в контуре. На заряженную частицу действует сила, равная

$$F = qvB_r, \quad (13)$$

где  $B_r$  – компонента вектора индукции, перпендикулярная вектору скорости проводника, в данном случае она направлена радиально. Так как эта сила

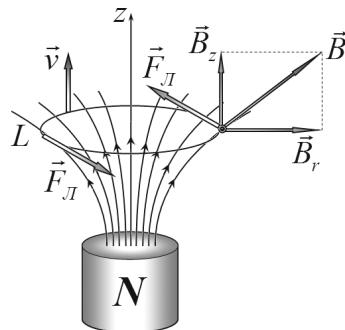


Рис. 118

во всем контуре направлена по касательной к контуру и постоянна по модулю, то ее работа по перемещению единичного заряда, то есть ЭДС, равна

$$\varepsilon = \frac{1}{q} F_{\perp} = v B_r L, \quad (14)$$

где  $L$  – длина контура. Чтобы найти выражение для радиальной составляющей вектора индукции, воспользуемся теоремой о магнитном потоке. В качестве замкнутой поверхности выберем тонкий цилиндр толщиной  $\Delta z = v\Delta t$ , ось которого совпадает с осью магнита, а радиус равен радиусу контура (рис. 119). Магнитный поток через эту поверхность представим в виде суммы потоков через нижнее основание  $\Phi_0$ , через верхнее основание  $\Phi_1$  и через боковую поверхность

$$\Phi_{бок.} = B_r L \Delta z = B_r L v \Delta t. \quad (15)$$

Сумма этих потоков равна нулю:

$$\Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_{бок.} = 0. \quad (16)$$

Теперь соотнесем эти поверхности с рассматриваемым контуром.

Боковая поверхность цилиндра есть поверхность, которую заметает рассматриваемый контур, поэтому мы связали высоту цилиндра со скоростью движения контура. Нижнее основание опирается на положение контура в некоторый момент времени  $t$ . По договоренности, положитель-

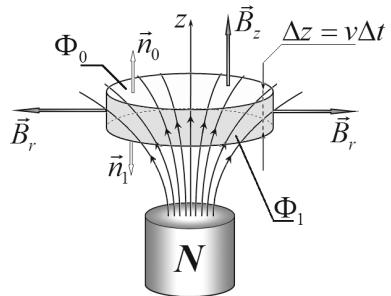


Рис. 119

ной нормалью для замкнутой поверхности считается внешняя нормаль (она изображена на рисунке как  $\vec{n}_0$  и  $\vec{n}_1$ ). При описании магнитного потока через контур<sup>\*</sup> мы договорились считать положительным направлением нормали направление «по полю». То есть поток через контур противоположен потоку через часть замкнутой поверхности. Поэтому в данном случае  $\Phi_0 = -\Phi(t)$ , поток через контур в момент времени  $t$ . Поток через верхнее основание есть поток через контур в момент времени  $t + \Delta t$ :  $\Phi_1 = \Phi(t + \Delta t)$ .

Еще один аргумент в пользу изменения знака в потоке через нижнее основание: если мы рассчитываем изменение потока, то должны же мы направление нормали сохранять неизменным.

Теперь соотношение (16) перепишем в виде

$$-\Phi(t) + \Phi(t + \Delta t) + B_r l v \Delta t = 0, \quad (17)$$

из которого выразим ЭДС индукции в контуре (определенной формулой (15)):

$$\varepsilon = B_r l v = -\frac{\Phi(t + \Delta t) - \Phi(t)}{\Delta t} = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}. \quad (18)$$

Мы получили ту же формулу для ЭДС индукции в контуре, что и в предыдущем примере.

В рассмотренном примере магнитный поток через контур уменьшается, так как при увеличении расстояния от магнита индукция поля уменьшается. Поэтому в соответствии с полученной формулой и правилом Ленца ЭДС индукции в контуре положительна, кроме того, индукционный ток создает

---

\* Напомним: точнее надо говорить о потоке через любую поверхность, натянутую (опирающуюся) на контур.

магнитное поле, направленное так же, как и поле постоянного магнита.

Обратите внимание, что в приведенном выводе мы не делали никаких предположений о зависимости вектора индукции поля от координат. Единственное предположение заключалось об осевой симметрии поля. Однако и его можно снять: для этого при вычислении ЭДС по контуру просто необходимо разбить последний на малые участки, а затем просуммировать работу силы Лоренца по всем участкам.

#### Задания для самостоятельной работы

1. Рассмотрите направление поля, созданного индуцированным током, в схеме на рис. 120, покажите, что правило Ленца выполняется.
2. Покажите, что в схеме, показанной на рис. 120, сила Ампера, действующая на контур с индуцированным током, направлена в сторону, противоположную его скорости.
3. Пусть произвольный контур за малый промежуток времени сместился из положения 1 в положение 2 в произвольном постоянном магнитном поле. Используя выражение для силы Лоренца и теорему о магнитном потоке, докажите в общем случае формулу (18) для ЭДС индукции в контуре.

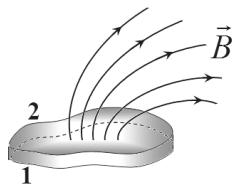


Рис. 120

### 4.1.3. «Движущееся» магнитное поле вблизи проводника

Рассмотрим теперь процессы, проходящие в проводнике, относительно которого движется ис-

точник магнитного поля. Причем несущественно, что представляет собой этот источник: им может быть как постоянный магнит, так и проводники с постоянным током. Пусть для определенности цилиндрический постоянный магнит движется относительно неподвижного проводящего кругового контура  $L$  (рис. 121). Результаты экспериментов М. Фарадея и его многочисленных последователей однозначно свидетельствуют, что в контуре возникает электрический ток, точно такой же, как и в случае движения контура. Иными словами, индукционный ток полностью определяется **относительным** движением контура и магнита, и никакими измерениями и исследованиями нельзя различить, что движется: проводник или магнит.

Эти и подобные эксперименты во многом способствовали тому, что принцип относительности Г. Галилея в механике был распространен сначала на электромагнитные, а затем и на все физические явления. В настоящее время принцип относительности является одним из фундаментальных физических принципов, справедливость которого подтверждена и постоянно подтверждается всем развитием естественных наук. Итак,

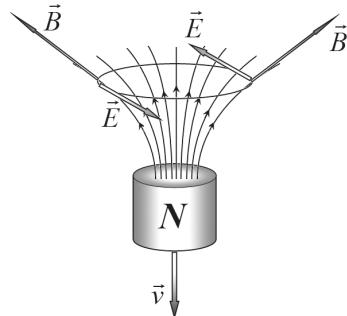


Рис. 121

**мы принимаем за физическую аксиому\* принцип относительности: никакие физические эксперименты не позволяют отличить состояние покоя от состояния равномерного и прямолинейного движения, или равносильно: все физические явления протекают одинаково во всех инерциальных системах отсчета.**

На этом можно и закончить изложение материала данного раздела, для чего следует перейти в систему отсчета, связанную с магнитом, и рассмотреть движение проводника в магнитном поле, что уже сделано ранее. Тем не менее имеет смысл дать физическую трактовку возникновения электрического тока в неподвижном проводнике, относительно которого движется магнит. В случае неподвижного проводника средняя скорость движения свободных заряженных частиц равна нулю, поэтому и среднее значение силы Лоренца также равно нулю. Но если в проводящем контуре, обладающем электрическим сопротивлением, существует электрический ток, то в контуре должны действовать сторонние силы! Следовательно, мы должны указать силы, действующие на свободные заряды и приводящие их в движение. Как было сказано, характеристики индукционного электрического тока в проводнике не зависят от того, движется проводник или магнит, результат действия поля на проводник не должен зависеть от выбранной системы отсчета, в которой прово-

---

\* Повторим, что аксиомы физики обосновываются экспериментальными данными, в отличие от аксиом математики.

дится описание. Так, например, если проводник нагрелся, то повышение его температуры одинаково во всех системах отсчета; если проводник расплавился или разорвался под действием поля, то с ним это произошло в любой системе отсчета. Более простой пример: сила, действующая на проводник со стороны поля, должна быть одинакова во всех инерциальных системах отсчета; наконец, сила, действующая на свободные заряды, также должна быть одинакова во всех системах отсчета.

В системе отсчета, связанной с магнитом (когда движется проводник), такой силой является сила Лоренца. В системе отсчета, связанной с проводником (где он покоится), на заряженные частицы должна действовать такая же сила. Сила Лоренца *пропорциональна заряду* частицы, сам же заряд является инвариантной физической величиной, не зависящей от системы отсчета. Следовательно, в системе отсчета, связанной с проводником, на заряженные частицы действует сила, *пропорциональная заряду* частицы. Сила, пропорциональная заряду, есть сила, действующая со стороны **электрического поля**.

По-видимому, можно было придумать какое-то другое название этой силе, но если эта сила пропорциональна электрическому заряду частицы, то нет даже принципиальной возможности отличить эту силу от силы, действующей со стороны электрического поля. Характеристикой этой силы также может служить отношение силы к величине заряда, то есть напряженность электрического поля. Так

стоит ли «придумывать» новые силы, новые явления, если все развитие физики идет по пути обобщения, сведения многочисленных явлений ко все меньшему количеству единых фундаментальных взаимодействий? Наконец, самое существенное: электрическое поле, которое создается движущимся магнитом, обладает теми же свойствами, что и «обычное» электрическое поле, создаваемое электрическими зарядами: оно воздействует на другие заряды, и, как мы покажем в дальнейшем, оно способно порождать магнитное поле.

Таким образом, мы должны признать, что в системе отсчета, в которой постоянный магнит движется, помимо магнитного поля, должно существовать электрическое поле. Или: **движущийся магнит создает электрическое поле.**

По существу, мы об этом уже говорили, когда рассматривали источники магнитного поля. Источниками магнитного поля являются движущиеся электрические заряды, но движущиеся относительно чего? Аналогичная ситуация рассматривается сейчас: движущийся магнит создает электрическое поле, движущийся относительно чего? Если механическое движение относительно, то относительно и электромагнитное поле. То есть реальностью является единое электромагнитное поле, которое в некоторых случаях, в некоторых системах отсчета можно описывать как электростатическое; в некоторых случаях, в некоторых системах отсчета – как магнитостатическое. Ответ на вопрос о разделении поля на электрическое

и магнитное зависит от выбора системы отсчета, в которой проводится описание.

Вернемся в систему отсчета, в которой проводник поконится, но в нем возникает электрический ток. Мы пришли к выводу, что в качестве сторонних сил в данном случае выступают силы со стороны электрического поля. Причем работа этих сил по замкнутому контуру не равна нулю. Следовательно, это электрическое поле **не является потенциальным**, в этом его главное отличие от электростатического поля, созданного неподвижными зарядами. В рассматриваемом примере (рис. 122) во всех точках проводящего контура электрическая сила направлена по касательной к контуру, следовательно, силовая линия этого поля является окружностью, то есть замкнутой кривой. Структура силовых линий такого поля совпадает со структурой линий магнитного поля прямого тока — набор концентрических окружностей (рис. 123). Конечно, в данном случае такая структура силовых линий однозначно связана с осевой симметрией его источника (магнита, вектор скорости которого направлен вдоль оси). В общем случае силовые линии этого поля отличаются от окружности, но являются замкнутыми, образуя набор «вихрей». Поэтому данное электрическое поле называется **вихревым**.

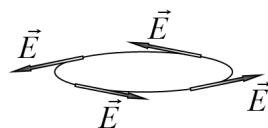


Рис. 122

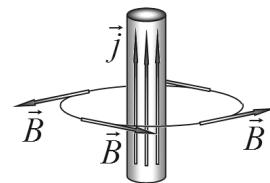


Рис. 123

Так как магнит в целом электрически нейтранален (его суммарный заряд равен нулю), то поток вектора напряженности рассматриваемого электрического поля через любую замкнутую поверхность равен нулю, поэтому можно вспомнить все наши рассуждения по поводу доказательства замкнутости магнитных силовых линий и повторить их здесь для вихревого электрического поля.

Возникновение вихревого электрического поля при движении магнита не зависит от того, находится ли в этом поле проводник. Рассматриваемый нами проводящий контур выступает в роли прибора, позволяющего зафиксировать существование электрического поля. Поэтому разумно вместо характеристик электрического тока в реальном кольце рассматривать характеристики индуцированного вихревого электрического поля. Мы установили формулу для ЭДС индукции, возникающей в контуре

$$\varepsilon = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}, \quad (1)$$

где  $\Phi(t)$  – изменяющийся магнитный поток через контур. Эта же величина равна работе, которую совершают вихревое электрическое поле по перемещению единичного положительного заряда, в данном осесимметричном случае – произведению напряженности электрического поля  $E$  на длину контура

$$\varepsilon = EL = 2\pi rE; \quad (2)$$

приравнивая эти выражения, получим значение модуля напряженности поля

$$E = \frac{1}{2\pi r} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \quad (3)$$

Как было показано ранее, формула (1) для ЭДС индукции в контуре справедлива для произвольного магнитного поля и произвольного контура.

Выразим ЭДС индукции, возникающей в контуре через напряженность электрического поля. Для этого мысленно разобьем контур на малые участки, каждый из которых задается малым вектором  $\Delta\vec{r}_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ), на каждом участке найдем вектор напряженности поля  $\vec{E}_k$ , образующий угол  $\alpha_k$  с вектором  $\Delta\vec{r}_k$  (рис. 124). Тогда работа по перемещению единичного заряда по контуру (то есть ЭДС) выразится суммой

$$\begin{aligned} \epsilon &= \vec{E}_1 \cdot \Delta\vec{r}_1 + \vec{E}_2 \cdot \Delta\vec{r}_2 + \dots + \vec{E}_k \cdot \Delta\vec{r}_k + \dots = \\ &= \sum_k \vec{E}_k \cdot \Delta\vec{r}_k = \sum_k E_k \Delta r_k \cos \alpha_k = \Gamma_E, \end{aligned} \quad (4)$$

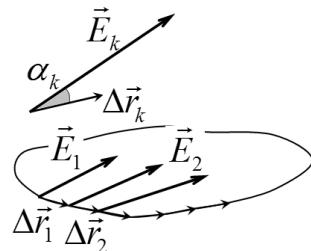


Рис. 124

которая представляет собой не что иное, как циркуляцию вектора напряженности электрического поля  $\Gamma_E$ . Таким образом, закон электромагнитной индукции можно выразить через характеристики полей, исключив реальный проводящий контур:

**циркуляция вектора напряженности электрического поля по любому контуру равна скорости изменения магнитного потока через этот контур, взятой с противоположным знаком**

$$\Gamma_E = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}. \quad (5)$$

Если под действием поля движущегося магнита в контуре возникает электрический ток, то этот ток может совершать работу (в простейшем случае – в контуре будет выделяться теплота), следовательно, он обладает энергией. Эта энергия не может появиться сама по себе: закон сохранения энергии незыблем и в этом случае. Дело в том, что индуцированный ток создает магнитное поле, которое воздействует на движущийся магнит. Поэтому, если мы хотим, чтобы скорость движения магнита не изменялась, то к нему нужно прикладывать внешнюю силу. Работа этой силы в точности равна энергии индуцированного тока.

#### **4.1.4. Изменяющееся магнитное поле**

Обсудим, наконец, последнюю группу экспериментов, связанных с «превращением магнетизма в электричество». В замкнутом проводнике, помещенном в переменное магнитное поле, также возникает электрический ток. Это явление может быть сведено к рассмотренным выше, если стать на точку зрения теории близкодействия. Напомним, в применении к электромагнитным явлениям эта теория утверждает, что переносчиком взаимодействий является реально существующее электромагнитное поле как объективная реальность, как вид материи. Два электрически заряженных тела непосредственно не взаимодействуют между собой: один заряд (как источник) создает электромагнитное поле, которое воздействует на

другой заряд (который выступает в роли прибора, регистрирующего наличие поля). То есть второй заряд-приемник «чувствует», воспринимает то поле, которое существует в той малой области пространства, где он непосредственно находится. Изменение положения или величины заряда-источника приведет к изменению силы, действующей на приемник не мгновенно, а через некоторый промежуток времени, который потребуется, чтобы изменение (возмущение) поля распространилось от одного заряда к другому. Аналогичные рассуждения можно провести и для магнитных взаимодействий. Иными словами, любой прибор, регистрирующий характеристики электромагнитного поля, воспринимает поле только в той области, где он находится. Причина этого заключается не в недостатках, несовершенстве приборов, а в самих свойствах электромагнитного поля – нет принципиальной возможности однозначно определить характеристики источников поля по изучению параметров поля в ограниченной области пространства в ограниченный промежуток времени. Простейший пример: в «черном ящике» находится источник магнитного поля. Изучая характеристики поля вне ящика, мы никакими методами не можем сказать, что находится в ящике: постоянный магнит или катушка, по которой протекает электрический ток.

Поэтическим выражением этого положения является известная строка «...как свет угасших звезд доходит». Наблюдая (исследуя любыми самыми

совершенными приборами) свет далекой звезды (то есть электромагнитное поле, испущенное много лет назад), мы не можем сказать, где эта звезда находится «сейчас», существует ли она «сейчас»\*.

Обобщая данные рассуждения, можно сформулировать один из основных принципов теории электромагнитного поля: **свойства электромагнитных полей проявляются локально**, например, изменяющееся в данной точке\*\* магнитное поле приводит к возникновению электрического поля в этой же точке.

Рассмотрим еще раз небольшую катушку, относительно которой движется постоянный магнит (рис. 125). ЭДС индукции и ее последствия (электрический ток, нагрев проводника и т.д.)

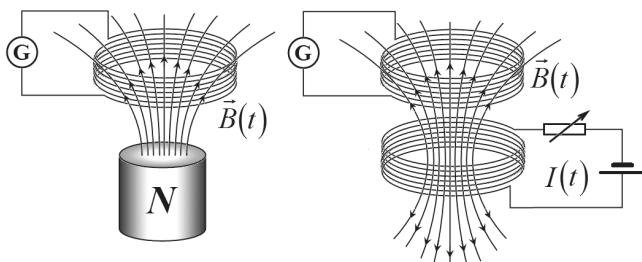


Рис. 125

---

\* С точки зрения науки чрезвычайно интересен вопрос, что такое «сейчас», какие события можно считать одновременными, что такое прошлое, настоящее и будущее. Эта философская проблема рассматривается в теории относительности, пока же мы употребляем эти термины в обыденном, житейском смысле.

\*\* Все-таки, наверное, лучше говорить не о пространственной точке, а малой пространственной области.

определяются вектором индукции поля в точках кольца и его зависимостью от времени  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ . Пространственная структура магнитного поля зависит от свойств постоянного магнита (его формы, размеров, намагниченности). Зависимость этого поля от времени в точках кольца определяется изменением положения магнита – его координатой как функцией времени  $z(t)$ . Пусть теперь магнитное поле создается электрическим током в неподвижной катушке. В принципе, возможно (законы физики этого не запрещают) создать такую катушку и так изменять силу тока в ней  $I(t)$ , чтобы во всех точках кольца магнитное поле изменялось так же, как и магнитное поле, созданное движущимся постоянным магнитом. Будут ли в этих двух различных случаях отличаться характеристики ЭДС и электрического тока в кольце? С точки зрения теории близкодействия – нет! Кольцо и содержащиеся в нем заряженные частицы «не могут знать», почему изменяется действующее на них электромагнитное поле: или из-за движения магнита, или из-за изменения силы в неподвижной катушке.

Таким образом, мы обязаны сделать вывод: изменяющееся магнитное поле создает вихревое электрическое поле, независимо от причины, вызывающей изменение магнитного поля. Причем характеристики вихревого электрического поля однозначно определяются законом изменения магнитного поля. Следовательно, и в этом случае остается справедливой прежняя формулировка закона электромагнитной индукции: ЭДС индукции

в контуре равна скорости изменения магнитного потока через контур.

С энергетической точки зрения и в этом случае всё обстоит «благополучно»: возникающий в контуре электрический ток создает магнитное поле, индуцирующее в первичной цепи ЭДС, направленную против ЭДС источника, заставляя тем самым его совершать большую работу. Строгий расчет показывает, что эта дополнительная работа в точности равна энергии индуцированного тока.

#### 4.1.5. Закон электромагнитной индукции Фарадея

Мы достаточно подробно рассмотрели три различных, на первый взгляд, варианта явления электромагнитной индукции – возникновения электрического тока в проводящем контуре под действием магнитного поля: при движении проводника в постоянном магнитном поле; при движении источника магнитного поля; при изменении во времени магнитного поля. Во всех этих случаях закон электромагнитной индукции одинаков: ЭДС электромагнитной индукции в контуре равна скорости изменения магнитного потока через контур, взятой с противоположным знаком

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \quad (1)$$

независимо от причин, приводящих к изменению этого потока.

Уточним некоторые детали приведенной формулировки.

**Первое.** Магнитный поток через контур может изменяться произвольным образом, то есть функция  $\Phi(t)$  не обязана всегда быть линейной, а может быть любой. Если магнитный поток изменяется по линейному закону, то ЭДС индукции в контуре постоянна, в этом случае величина интервала времени  $\Delta t$  может быть произвольной, значение отношения (1) в этом случае не зависит от величины этого интервала. Если же поток изменяется более сложным образом, то величина ЭДС не является постоянной, а зависит от времени. В этом случае рассматриваемый интервал времени следует считать бесконечно малым, тогда отношение (1) с математической точки зрения превращается в производную от функции магнитного потока по времени. Математически этот переход полностью аналогичен переходу от средней к мгновенной скорости в кинематике.

**Второе.** Понятие потока векторного поля применимо только к поверхности, поэтому необходимо уточнять, о какой поверхности идет речь в формулировке закона. Однако поток магнитного поля через любую замкнутую поверхность равен нулю. Поэтому для двух различных поверхностей, опирающихся на контур, магнитные потоки одинаковы. Представьте себе поток жидкости, вытекающий из отверстия. Какую бы вы ни выбрали поверхность, границей которой являются границы отверстия, потоки через них будут одинаковы. Здесь уместна еще одна аналогия: если работа силы по замкнутому контуру равна нулю, то работа этой силы не за-

висит от формы траектории, а определяется только ее начальной и конечной точками.

**Третье.** Знак минус в формулировке закона имеет глубокий физический смысл: фактически, он обеспечивает выполнение закона сохранения энергии в этих явлениях. Этот знак является выражением правила Ленца. Пожалуй, это единственный случай в физике, когда один знак удостоился собственного имени.

Как мы показали, во всех случаях физическая сущность явления электромагнитной индукции одинакова и кратко формулируется следующим образом: **переменное магнитное поле порождает вихревое электрическое поле**. С этой, полевой, точки зрения закон электромагнитной индукции выражается через характеристики электромагнитного поля: **циркуляция вектора напряженности электрического поля по любому контуру равна скорости изменения магнитного потока через этот контур**

$$\Gamma_E = -\frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t}. \quad (2)$$

В этой трактовке явления существенно, что вихревое электрическое поле возникает при изменении магнитного поля, независимо от того, имеется ли реальный замкнутый проводник (контур), в котором возникает ток, или нет. Этот реальный контур может играть роль прибора для обнаружения индуцированного поля.

Наконец, еще раз подчеркнем: электрические и магнитные поля относительны, то есть их ха-

рактеристики зависят от выбора системы отсчета, в которой дается их описание. Однако этот произвол в выборе системы отсчета, в выборе способа описания не приводит к каким-либо противоречиям. Измеряемые физические величины инвариантны, не зависят от выбора системы отсчета. Например, сила, действующая на заряженное тело со стороны электромагнитного поля, не зависит от выбора системы отсчета. Но при ее описании в одних системах она может трактоваться как сила Лоренца, в других к ней может «добавляться» электрическая сила. Аналогично (даже как следствие), ЭДС индукции в контуре (сила индуцированного тока, количество выделившейся теплоты, возможная деформация контура и т.д.) не зависит от выбора системы отсчета.

Как всегда, предоставляемой свободой выбора можно и необходимо пользоваться: всегда есть возможность выбрать тот метод описания, который вам больше нравится – как наиболее простой, наиболее наглядный, наиболее привычный и т.д.

## 4.2. Явление самоиндукции. Индуктивность

Как было показано ранее, любое переменное магнитное поле создает вихревое электрическое поле. Если в некоторой цепи (рис. 126) изменяется электрический ток, то этот ток создает изменяющееся магнитное поле  $\vec{B}$ , которое приводит к появлению вихревого электрического поля  $\vec{E}$ . Причем это поле появляется во всех точках пространства,

где изменяется поле магнитное, в том числе и проводниках, образующих электрическую цепь. Таким образом, изменяющийся ток посредством переменного магнитного поля оказывает воздействие на себя самого. **Явление возникновения ЭДС в цепи вследствие изменения силы тока в этой же цепи называется самоиндукцией.** Это явление является частным случаем электромагнитной индукции, поэтому формула для ЭДС самоиндукции  $\varepsilon_{si}$  остается прежней

$$\varepsilon_{si} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \quad (1)$$

где  $\Phi$  – магнитный поток поля, создаваемого током в контуре. В соответствии с правилом Ленца, возможный индукционный ток препятствует изменению магнитного потока через контур. Поэтому **ЭДС самоиндукции препятствует изменению тока в цепи.** Так, если ток в цепи возрастает, то возрастает и магнитный поток, поэтому направление индукционного тока противоположно исходному току. При уменьшении силы тока в цепи ЭДС индукции поддерживает затухающий ток.

#### Задание для самостоятельной работы

Используя правила для определения направления индукции поля и направления индуцированного электрического поля, определите направления векторов этих полей в случаях включения и выключения тока в схеме на рис. 126.

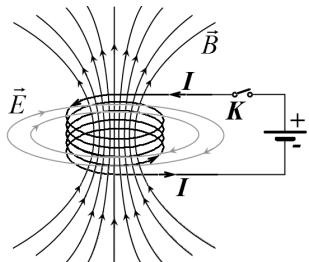


Рис. 126

Фигурирующий в формуле (1) магнитный поток всегда пропорционален силе тока в цепи  $I$ , так как он является потоком поля, созданного этим током

$$\Phi = LI, \quad (2)$$

коэффициент пропорциональности в этом выражении называется **индуктивностью** цепи. Используя это выражение для магнитного потока и закон электромагнитной индукции, легко получить формулу для ЭДС самоиндукции, возникающей в цепи при изменении электрического тока:

$$\varepsilon_{si} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}. \quad (3)$$

Величина индуктивности полностью определяется геометрическими размерами и формой цепи и магнитными свойствами среды, в которой расположена цепь. Часто индуктивность относят не ко всей цепи, а к некоторым ее элементам. Следует подчеркнуть, что любая электрическая цепь, любой ее элемент обладает индуктивностью. Однако во многих случаях явление самоиндукции оказывает настолько слабое влияние на ток в цепи, что часто им пренебрегают. Понятно, что это явление полностью отсутствует в цепях постоянного тока, когда токи и созданные ими магнитные поля не изменяются. В таких цепях явления самоиндукции могут играть заметную роль только в моменты включения и выключения тока, когда поля могут изменяться достаточно резко и приводить к появлению сильных индукционных токов.

Индуктивность является важной характеристикой элементов цепи, поэтому в Международной

системе единиц СИ введена специальная единица измерения – **генри** (сокращенно *Гн*), названная в честь американского физика Джозефа Генри (1797–1878). Индуктивностью в 1 генри обладает электрическая цепь (или элемент цепи), в которой при изменении тока на 1 ампер за 1 секунду возникает ЭДС самоиндукции, равная 1 вольту.

Наибольшей индуктивностью обладают катушки (соленоиды) с большим числом витков. В такой катушке ЭДС индукции возникает в каждом витке, поэтому ее суммарное значение может быть очень заметным. Рассчитаем индуктивность длинной цилиндрической катушки (соленоида) длиной  $l$ , содержащей  $N$  проволочных витков, плотно намотанных на сердечник радиуса  $r$ , изготовленный из материала с магнитной проницаемостью  $\mu$  (рис. 127). Если по обмотке соленоида протекает электрический ток силой  $I$ , то внутри него создается магнитное поле индуктивности  $\vec{B}$ , направленное вдоль оси, причем модуль этого вектора равен

$$B = \mu\mu_0 nI, \quad (4)$$

где  $n = \frac{N}{l}$  – плотность намотки, т.е. число витков на единицу длины.

Так как магнитное поле внутри соленоида однородное (если пренебречь краевыми эффектами), то магнитный поток через один виток равен  $\Phi_1 = BS$  ( $S = \pi r^2$  – площадь витка), а суммарный поток через все витки, т.е. поток через соленоид,  $\Phi = N\Phi_1$ .

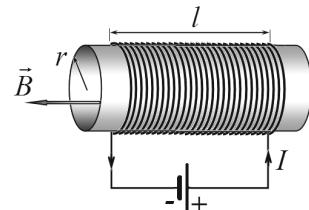


Рис. 127

Часто для суммарного потока через катушку употребляют специальный термин – потокосцепление  $\Psi = N\Phi_1$ , однако мы в дальнейшем будем говорить о потоке через катушку, так как, во-первых, данная величина нас интересует для вычисления ЭДС в катушке, которая, очевидно, равна сумме ЭДС во всех витках; во-вторых, легко вообразить винтовую поверхность, опирающуюся на спиралевидную обмотку (рис. 128), поток через которую и требуется подсчитать. К слову, эта поверхность называется геликоид.

Используя формулу (4) для индукции поля, запишем выражение для магнитного потока через обмотку

$$\Phi = NBS = N\mu_0 nIS = \mu_0 n^2 lSI = \mu_0 n^2 VI. \quad (5)$$

Как и следовало ожидать, этот поток пропорционален силе тока в соленоиде, коэффициент пропорциональности, т.е. индуктивность соленоида равна

$$L = \mu_0 n^2 V, \quad (6)$$

где  $V = lS$  – объем соленоида.

Как следует из полученной формулы, индуктивность соленоида пропорциональна магнитной проницаемости сердечника. Это и понятно: токи намагничивания могут существенно усилить магнитное поле, а индуцированное электрическое поле создается любым переменным магнитным полем, независимо от того, что является его источником: токи проводимости или токи намагничивания.

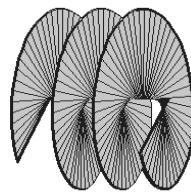


Рис. 128

Для изготовления катушек с большой индуктивностью используют сердечники, сделанные из ферромагнетиков с большой магнитной проницаемостью.

Используя формулу (6) для индуктивности катушки, выразим размерность магнитной постоянной  $[\mu_0] = \frac{[L]}{[n]^2 [V]} = \frac{\text{Гн}}{\text{м}^{-2} \cdot \text{м}^3} = \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$  – именно эта размерность приводится в различных справочниках.

### 4.3. Ток смещения

Если переменное магнитное поле создает поле электрическое, то разумно предположить существование и обратного процесса: изменяющееся электрическое поле порождает поле магнитное. Такое явление действительно существует и носит не совсем обычное название – **ток смещения**<sup>\*</sup>, его происхождение мы поясним в конце данного раздела.

Весьма интересна история открытия этого явления. Впервые предсказал существование такого процесса М. Фарадей вместе с открытием электромагнитной индукции. Последователь Фарадея, его соотечественник Дж. К. Максвелл, в 1873 году даже дал теоретическое описание этого явления, написав уравнения, которые позволяют рассчи-

---

\* Если возникновение электрического поля под действием переменного магнитного поля называется **электромагнитная индукция**, то обратный процесс разумно бы назвать **магнитоэлектрическая индукция**, однако такой термин не используется.

тать характеристики индуцированного магнитного поля. Экспериментально же это явление было открыто и исследовано значительно позднее.

Дж. К. Максвелл пришел к выводу этого закона из теоретических рассуждений, которые потребовали изменения теоремы о циркуляции вектора индукции магнитного поля в случае переменных полей.

Стационарные магнитные поля создаются постоянными электрическими токами (или, что равносильно, движущимися зарядами). Индукция стационарного магнитного поля рассчитывается по закону Био-Савара, который подтверждается многочисленными экспериментальными данными, поэтому сомнений в его справедливости не возникает. Эквивалентной формулировкой этого закона является теорема о циркуляции магнитного поля: циркуляция вектора индукции равна сумме токов, пересекающих любую поверхность, натянутую на контур, умноженной на магнитную постоянную:

$$\Gamma_B = \mu_0 I. \quad (1)$$

Распространение этой теоремы (соответственно, и закона Био-Савара) на изменяющиеся во времени поля приводит к серьезному противоречию.

Пусть к проводящему телу  $A$  подключены два провода, по которым протекают электрические токи (рис. 129). Выберем произвольный контур  $L$ , не пересекающий данное тело. Построим две поверхности,

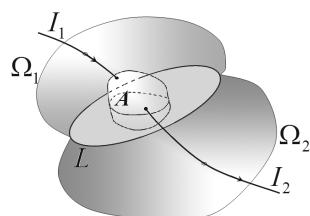


Рис. 129

опирающиеся на данный контур:  $\Omega_0$ , которую пересекает проводник с током  $I_0$ , и  $\Omega_1$ , которую пересекает проводник с током  $I_1$ . Из уравнения (7) следует, что для поверхности  $\Omega_0$  циркуляция равна  $\mu_0 I_0$ , а для поверхности  $\Omega_1$  —  $\mu_0 I_1$ . То есть обязательно должно выполняться условие  $I_0 = I_1$ . В стационарном режиме это равенство является выражением закона сохранения электрического заряда. Применение теоремы о циркуляции в такой форме «на все случаи жизни» приводит к парадоксальному выводу: *невозможно зарядить никакое тело?*!

В действительности электрический заряд может накапливаться на проводнике  $A$ , поэтому силы токов в проводниках могут различаться, в частности, ток  $I_1$  может вообще отсутствовать. Принципиальная особенность процесса зарядки (или разрядки) заключается в том, что изменяется электрический заряд тела и, как следствие, изменяется электрическое поле. Поэтому Дж. К. Максвелл высказал гипотезу, что изменяющееся электрическое поле создает магнитное поле.

Для установления связи между характеристиками этих полей рассмотрим процесс зарядки плоского конденсатора, образованного двумя круглыми параллельными пластинами, которые заряжаются посредством электрических токов, протекающих по прямым проводам, расположенным на оси конденсатора

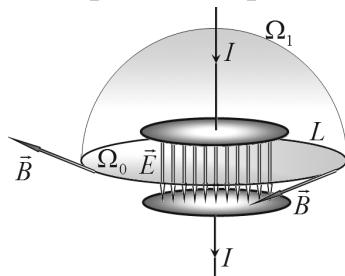


Рис. 130

(рис. 130). Выберем контур в виде окружности  $L$ , плоскость которой перпендикулярна оси системы, центр ее также находится на этой оси. Во всех точках этой окружности существует магнитное поле, которое создается, по крайней мере, электрическими токами в проводах. Это поле так же, как и вся система, обладает осевой симметрией, поэтому вектор индукции на рассматриваемом контуре постоянен по модулю и направлен по касательной к нему\*. Следовательно, циркуляция вектора индукции по этому контуру равна произведению модуля вектора индукции на длину контура

$$\Gamma_B = 2\pi rB.$$

Если в качестве поверхности, опирающейся на контур, выбрать полусферу  $\Omega_1$ , охватывающую пластину конденсатора, то ее пересекает проводник, по которому идет зарядка током силой  $I$ . Поэтому по теореме о циркуляции следует записать  $\Gamma_B = 2\pi rB = \mu_0 I$ , откуда следует, что величина индукции поля на рассматриваемом контуре равна  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$  и совпадает с индукцией поля прямого проводника.

Если же в качестве поверхности, опирающейся на контур, выбрать  $\Omega_0$  – круг, лежащий в плоскости, параллельной пластинам, то его электрический ток не пересекает, в этом случае следует признать, что магнитное поле на рассматриваемом

\* Отсутствие нормальной к контуру составляющей обосновывается теоремой о магнитном потоке. Эти рассуждения мы использовали при рассмотрении магнитного поля прямого тока.

контуре отсутствует. Чтобы избежать этого противоречия, Дж. К. Максвелл предложил дополнить выражение для циркуляции дополнительным слагаемым, зависящим от изменения электрического поля. На поверхности полусферы  $\Omega_1$  электрическое поле отсутствует, поэтому для нее формула (1) справедлива. Поверхность  $\Omega_0$  электрический ток не пересекает, но на этой поверхности существует электрическое поле. Вычислим поток вектора напряженности электрического поля. Если расстояние между пластинами значительно меньше их радиусов, то можно считать, что электрическое поле существует только между обкладками и является однородным. Напряженность этого поля равна  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ , где  $\sigma$  – поверхностная плотность заряда на пластине. Поток этого вектора через поверхность  $\Omega_0$  равен  $\Phi_E = ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0}$ , где  $q$  – изменяющийся заряд пластины,  $S$  – ее площадь. Максвелл заметил, что скорость изменения этого потока пропорциональна силе тока, заряжающего эту пластину:

$$\frac{\Delta\Phi_E}{\Delta t} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{1}{\epsilon_0} I.$$

Если предположить, что произведение скорости изменения электрического потока на электрическую постоянную  $\epsilon_0 \frac{\Delta\Phi_E}{\Delta t}$  эквивалентно силе обычного тока проводимости (в том смысле, что создает такое же магнитное поле), и обобщить теорему о магнитном потоке, включив в нее это слагаемое, то выявленные противоречия снимаются.

Величину  $\varepsilon_0 \frac{\Delta\Phi_E}{\Delta t}$  Дж. К. Максвелл назвал **сильой тока смещения**, а само явление возникновения магнитного поля при изменении электрического поля – **током смещения**.

Рассматривая процесс зарядки конденсатора, заполненного диэлектриком, Максвелл пришел к выводу, что изменяющаяся поляризация диэлектрика, вызванная смещением (в обычном механическом смысле) связанных зарядов, эквивалентна электрическому току. Затем этот термин был распространен и на изменяющееся поле в вакууме, где заряженные частицы отсутствуют, а их «смещение»\* осталось.

В итоге Дж. К. Максвелл сформулировал теорему о циркуляции в обобщенном виде: **циркуляция вектора магнитной индукции по любому контуру равна сумме токов проводимости и токов смещения, пересекающих данную поверхность, умноженной на магнитную постоянную**

$$\Gamma_B = \mu_0 \left( I + \varepsilon_0 \frac{\Delta\Phi_E}{\Delta t} \right). \quad (2)$$

Следует отметить, что приведенные рассуждения об обобщенной теореме о циркуляции ни в коем случае не являются ее выводом или доказательством. Реальное существование токов смещения (т.е. возникновение магнитного поля под

---

\* При описании электрического поля в диэлектриках вводят вспомогательную величину, частично обусловленную поляризацией диэлектрика, которая называется электрическим смещением, в вакууме она равна  $\varepsilon_0 \vec{E}$ .

действием поля электрического) подтверждается только результатами многочисленных экспериментов. Поэтому выводы Дж. К. Максвелла являются гениальными догадками и предсказаниями, экспериментально подтвержденными значительно позднее. Важнейшим доказательством существования рассматриваемого явления послужило открытие и исследование немецким физиком Г. Герцем в 1886–1889 годах электромагнитных волн, которые не могли бы существовать, если не существует токов смещения.

Покажем, что введение токов смещения приводит к уравнению, правильно описывающему изменение электрического заряда. Пусть произвольную замкнутую поверхность пересекают произвольные электрические токи. Выберем на этой поверхности замкнутую линию (контуру)  $L$ , который разбивает ее на две части  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$  (рис. 131). Применим теорему о циркуляции к выделенному на данной поверхности контуру. Положительным направлением обхода контура будем считать, как обычно, направление «против часовой стрелки». Для произвольной поверхности, опирающейся на контур, положительное направление нормалей к поверхности определяется правилом правого винта (две такие нормали  $\vec{n}_0$ ,  $\vec{n}_1$  показаны на рисунке). Применим теорему о цир-

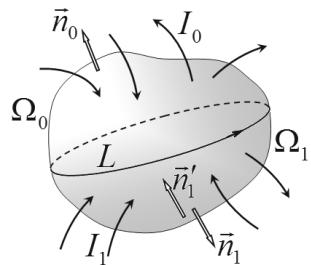


Рис. 131

куляции для контура  $L$  для двух введенных поверхностей, натянутых на этот контур

$$\begin{aligned}\Gamma_B &= \mu_0 \left( I_0 + \varepsilon_0 \frac{\Delta\Phi_{E0}}{\Delta t} \right), \\ \Gamma_B &= \mu_0 \left( I_1 + \varepsilon_0 \frac{\Delta\Phi_{E1}}{\Delta t} \right)\end{aligned}\quad (3)$$

здесь  $I_0, I_1$  – алгебраические суммы токов, пересекающих указанные поверхности,  $\Phi_{E0}, \Phi_{E1}$  – потоки векторов напряженности электрического поля через эти же поверхности. Положительное направление электрического тока (и потока вектора напряженности) на каждой поверхности указывает вектор положительной нормали. Изменим теперь правило знаков: положительным будем считать ток, вытекающий из данного объема, то есть будем считать положительным ток, направление которого совпадает с направлением внешней нормали к замкнутой поверхности ( $\Omega_0 + \Omega_1$ ). При таком определении сила токов, пересекающих поверхность  $\Omega_0$ , не изменится  $I'_0 = I_0$  (аналогично  $\Phi'_{E0} = \Phi_{E0}$ ). На поверхности  $\Omega_1$  сила токов изменится на противоположное направление нормали, поэтому изменятся знаки суммы электрических токов и потока вектора напряженности  $I'_1 = -I_0, \Phi'_{E1} = -\Phi_{E1}$ . С учетом указанной замены равенство циркуляций (3) выражается уравнением

$$I'_0 + \varepsilon_0 \frac{\Delta\Phi'_{E0}}{\Delta t} = - \left( I'_1 + \varepsilon_0 \frac{\Delta\Phi'_{E1}}{\Delta t} \right),$$

или

$$-(I'_0 + I'_1) = \varepsilon_0 \frac{\Delta(\Phi'_{E0} + \Phi'_{E1})}{\Delta t}. \quad (4)$$

В этом уравнении  $(I'_0 + I'_1) = I$  – сила тока, вытекающего из данной поверхности,  $(\Phi'_{E0} + \Phi'_{E1})$  – поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность, который по теореме Гаусса равен заряду внутри поверхности, деленному на электрическую постоянную  $(\Phi'_{E0} + \Phi'_{E1}) = \frac{q}{\epsilon_0}$ .

Таким образом, уравнение (4) приобретает простой вид  $\frac{\Delta q}{\Delta t} = -I$  и очевидный смысл: уменьшение заряда внутри замкнутой поверхности равно сумме электрических токов, вытекающих из этой поверхности.

#### 4.4. Электромагнитное поле движущегося заряда

Процесс возникновения магнитного поля под действием изменяющегося во времени электрического поля также логически следует из принципа относительности и полевой теории близкодействия. Неподвижный электрический заряд создает электростатическое поле; если же перейти в систему отсчета, в которой этот заряд движется равномерно, то в этой системе отсчета будет существовать и магнитное поле. Появление этого поля качественно можно истолковать следующим образом: пусть в некоторой точке  $A$  в некоторый момент времени заряд  $q$ , движущийся со скоростью  $\vec{v}$ , создает электрическое поле напряженности  $\vec{E}_0$  (рис. 132). При смещении заряда напряженность электрического

поля будет изменяться по величине и по направлению. Изменяющееся в рассматриваемой точке электрическое поле и создает в этой точке магнитное поле.

Связем между собой характеристики электрического и магнитного полей. Для этого воспользуемся законом Био-Савара.

Элемент тока  $I\Delta l$  в произвольной точке  $A$  создает магнитное поле, индукция которого равна

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\Delta l}{R^2} \sin \alpha,$$

где  $R$  – расстояние от элемента тока до точки  $A$ ,  $\alpha$  – угол между направлением элемента тока и направлением на точку  $A$  (рис. 133а). Направлен вектор индукции перпендикулярно элементу тока и отрезку, соединяющему его с точкой  $A$ . Характеристику элемента тока  $I\Delta l$  можно представить в виде

$$I\Delta l = q\vec{v},$$

где  $q$  – величина заряда, движущегося внутри выделенного элемента тока. Следовательно, можно утверждать, что заряд  $q$ , движущийся со скоростью  $\vec{v}$ , создает магнитное поле величиной

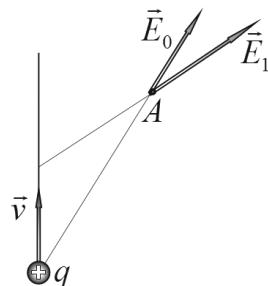


Рис. 132

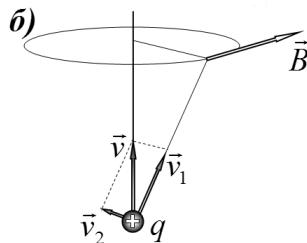
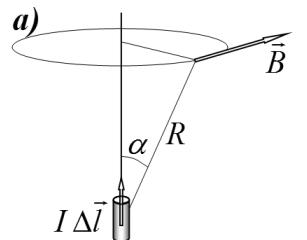


Рис. 133

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qv}{R^2} \sin\alpha . \quad (5)$$

Движущийся заряд создает также и электрическое поле, в отличие от элемента тока, в котором заряды одного знака движутся, а равные по величине заряды противоположного знака покоятся. Проведенная нами замена элемента тока на движущийся заряд законна, так как магнитное поле создается только движущимися зарядами.

Разложим вектор скорости  $\vec{v}$  заряженного тела на две составляющие (рис. 133б):  $\vec{v}_1$  – направленную вдоль отрезка, соединяющего заряд с точкой наблюдения, и  $\vec{v}_2$  – перпендикулярную этому отрезку. Как следует из закона Био-Савара, движущийся заряд не создает магнитного поля в точках, лежащих на прямой вдоль вектора скорости. Поэтому можно сказать, что магнитное поле в точке  $A$  создается благодаря перпендикулярной компоненте скорости  $\vec{v}_2$ . Это обстоятельство отражено и в формуле (3), где фигурирует произведение  $v \sin\alpha$ , равное модулю перпендикулярной компоненты скорости  $v_2$ . Таким образом, можно упростить рассматриваемую задачу, рассматривая поля в точках плоскости, проходящей через заряд и перпендикулярной вектору заряда (рис. 134).

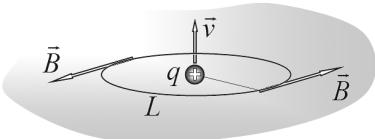


Рис. 134

По аналогии с законом электромагнитной индукции можно предположить, что циркуляция вектора индукции связана с изменением потока

вектора напряженности электрического поля, поэтому найдем эти величины и попытаемся найти связь между ними. Рассмотрим наиболее простой случай. На окружности  $L$ , центр которой совпадает с зарядом, вектор индукции направлен по касательной к этой окружности и постоянен по модулю. Поэтому циркуляция вектора индукции по этому контуру равна

$$\Gamma_B = B \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0 q v}{4\pi R^2} 2\pi R = \mu_0 \left( \frac{qv}{2R} \right). \quad (6)$$

Найдем изменение потока вектора напряженности электрического поля через рассматриваемый контур  $L$ . Как и в случае расчета магнитного «потока через контур», мы должны выбрать поверхность, опирающуюся на контур.

Пусть в рассматриваемый момент времени заряд находится в некоторой плоскости. В качестве поверхности, через которую рассчитывается поток, выберем полусферу  $\Omega_0$ , опирающуюся на окружность  $L$  (рис. 135). Через малый промежуток времени  $\Delta t$  заряд сместится на расстояние  $v\Delta t$ . Чтобы найти электрический поток в этот момент времени, дополним сместившуюся полусферу  $\Omega_1$  тонким цилиндрическим слоем, соединяющим край полусферы с окружностью  $L$  (на рис. 135 этот слой затенен). Понятно, что изменение потока через контур равно потоку через выделенную полоску. Так как полоска узкая, то можно

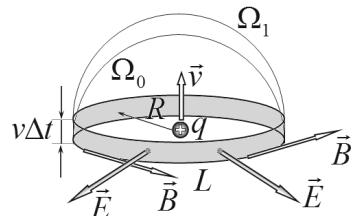


Рис. 135

считать, что во всех ее точках вектор напряженности электрического поля направлен по нормали к поверхности и постоянен по модулю, поэтому ис-  
комый поток равен

$$\Delta\Phi_E = ES = E \cdot 2\pi R \cdot v\Delta t = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot 2\pi R \cdot v\Delta t = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \frac{qv}{2R} \right) \Delta t , \quad (7)$$

где  $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$  – напряженность электрического поля точечного заряда,  $S = 2\pi R \cdot v\Delta t$  – площадь выделенной полоски. Сравнивая это выражение с формулой для циркуляции вектора магнитной индукции (6), мы видим, что наша гипотеза оправдалась: действительно, циркуляция вектора индукции пропорциональна изменению потока вектора напряженности электрического поля:

$$\Gamma_B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\Delta\Phi_E}{\Delta t} . \quad (8)$$

Тем самым мы пришли к той же формулировке закона, описывающего токи смещения.

В данном выводе сделано одно неявное допущение: мы приняли, что напряженность электрического поля движущегося заряда определяется так же, как и напряженность поля неподвижного заряда. Строго говоря, это условие выполняется только при скоростях движения зарядов, значительно меньших скорости света. Однако полученный закон, связывающий характеристики изменяющегося электрического поля и создаваемого им магнитного поля, справедлив при любых скоростях движущихся зарядов.

## 4.5. Уравнения Максвелла

Мы закончили изучение фундаментальных законов электромагнитных явлений. Основой нашего возврения на эти явления является концепция электромагнитного поля, суть которой можно кратко выразить следующим образом:

- некоторые частицы обладают электрическим зарядом, физической характеристикой, указывающей, что они участвуют в электромагнитных взаимодействиях;
- электрические заряды существуют двух типов (положительные и отрицательные), электрический заряд замкнутой системы сохраняется, величина электрического заряда инвариантна, то есть не зависит от скорости движения заряженного тела (или не зависит от выбора системы отсчета);
- электрические заряды создают электромагнитное поле и взаимодействуют с ним.

На рис. 136 практически полностью представлены все законы электродинамики. Эти четыре уравнения достойны восхищения: громадное многообразие электромагнитных явлений заключено в этих кратких выразительных формулах, если уметь ими пользоваться. Эта система уравнений впервые была записана в 1873 году великим английским физиком Джеймсом Клерком Максвеллом и носит его имя\*.

---

\* Сам Дж. К. Максвелл записывал эти уравнения в иной форме. В современном виде эту систему представил английский физик О. Хевисайд.

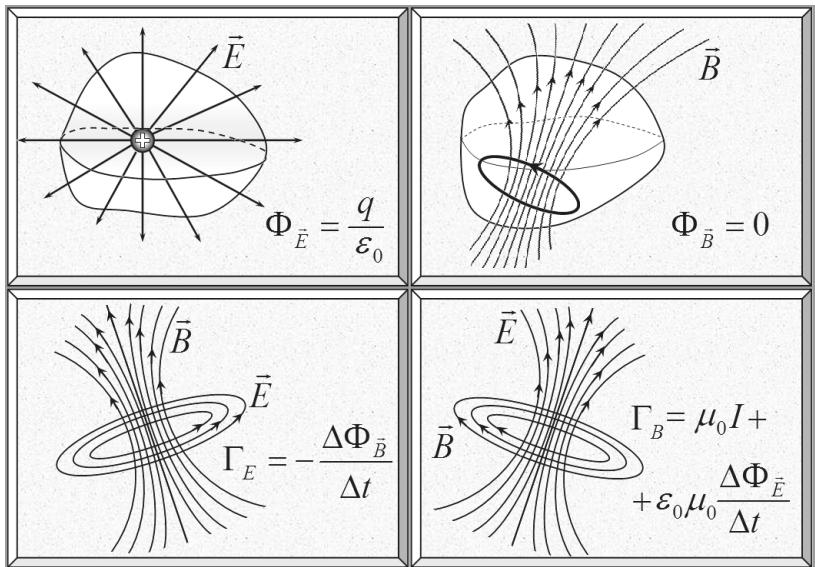


Рис. 136

Эти уравнения здесь записаны в так называемой интегральной форме, так как в них входят характеристики полей в некоторой области пространства. Эти же уравнения записываются и в локальной (дифференциальной форме), в которой связываются характеристики полей в одной-единственной пространственной точке. Две формы записи уравнений Максвелла полностью эквивалентны – из одной можно однозначно перейти к другой. Мы не рассматриваем дифференциальную форму записи, так для этого требуется более серьезный математический аппарат, изучение которого выходит далеко за рамки школьной программы.

Многие ученые разных стран внесли свой значительный вклад в создание теории электромаг-

нитного поля, многих из них мы упоминали в ходе изучения этого раздела физики. Однако именно Дж. К. Максвелл сумел обобщить многочисленные законы и представить теорию электромагнитного поля в предельно завершенном виде. После его работ электродинамику можно рассматривать и изучать как логически завершенную дедуктивную науку. Для этого необходимо рассматривать приведенные уравнения как набор исходных «аксиом», на основании которых с помощью математических преобразований можно получать «теоремы» – физические законы и уравнения, описывающие явления реального материального мира.

Рассмотрим еще раз физический смысл каждого из уравнений Максвелла. Порядок или нумерация уравнений, в отличие от законов механики Ньютона (каждый из которых имеет строго установленный номер), традиционно не устанавливается, поэтому в нынешнем обзоре мы будем следовать тому же порядку, в котором мы их изучали ранее.

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (1)$$

Уравнение (1) утверждает, что электрическое поле создается электрическими зарядами. Оно выражает теорему Гаусса – теорему о потоке вектора напряженности электрического поля. Эта теорема является следствием закона Кулона и ее равносильной формулировкой

$$\Phi_B = 0. \quad (2)$$

Второе уравнение есть математическое выражение теоремы о магнитном потоке, физический

смысл которой заключается в том, что в природе отсутствуют магнитные заряды, поэтому магнитное поле является соленоидальным, силовые линии магнитного поля замкнуты.

$$\Gamma_E = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}. \quad (3)$$

Третье уравнение выражает закон Фарадея, описывающий явление электромагнитной индукции, то есть возникновение вихревого электрического поля под действием переменного магнитного поля. Также в этом уравнении содержится утверждение о потенциальности электростатического поля, создаваемого неподвижными зарядами, так как в стационарном поле работа по перемещению заряда по любому контуру равна нулю.

$$\Gamma_B = \mu_0 \left( I + \epsilon_0 \frac{\Delta\Phi_E}{\Delta t} \right). \quad (4)$$

Наконец, четвертое уравнение описывает источники магнитного поля и создаваемые ими магнитные поля. В нем содержится два физических закона: Био-Савара, утверждающий, что магнитное поле создается движущимися зарядами (то есть электрическими токами), и закон Максвелла о возникновении магнитного поля под действием переменного электрического поля.

Таким образом, система уравнений Максвелла позволяет рассчитывать любые характеристики электромагнитных полей при заданных распределениях электрических зарядов и электрических токов. Последняя оговорка оказывается весьма существенной, потому что при взаимодействии элек-

тромагнитного поля с веществом возникают новые индуцированные заряды (в проводнике они возникают только на поверхности тела, а в диэлектриках они могут возникать как на поверхности, так и внутри его объема). При воздействии магнитного поля на вещество в нем возникают токи намагничивания. Как индуцированные заряды, так и токи намагничивания создают электромагнитные поля. Поэтому при описании полей в присутствии вещества рассмотренная система (1)-(4) не является полной: в уравнении (1)  $Q$  – все электрические заряды, находящиеся внутри рассматриваемой поверхности, в том числе и индуцированные; в уравнении (4)  $I$  – все электрические токи, пересекающие поверхность, натянутую на выбранный контур, в том числе и токи намагничивания. Эти величины являются функциями действующих полей, поэтому в уравнениях неизвестные характеристики полей (напряженность электрического и индукция магнитного) входят как в их правые, так и левые части. Чтобы получить полную систему уравнений, необходимо записать выражения, связывающие распределение индуцированных зарядов и напряженность электрического поля, распределение токов намагничивания и индукцию магнитного поля. Ранее мы показали, что такие связи удобнее искать с помощью дополнительных физических величин, описывающих реакцию вещества на действие электромагнитного поля. Так, отклик вещества на действие электрического

поля описывается поляризацией вещества, зависящей от напряженности поля

$$\vec{P} = F_1(\vec{E}), \quad (5)$$

результат воздействия магнитного поля описывается намагниченностью вещества, зависящей от индукции поля,

$$\vec{J} = F_2(\vec{B}). \quad (6)$$

Кроме того, под действием электрического поля в веществе могут появляться электрические токи, плотность которых зависит от величины электрического поля

$$\vec{j} = F_3(\vec{E}). \quad (7)$$

Поляризация вещества определяет распределение индуцированных зарядов, а намагниченность – токов намагниченности. В этой полной системе уравнения (1)-(4) называют «полевыми», а (5)-(7) – «материальными».

В простейших случаях (однородных веществ, взаимодействующих со слабыми полями) материальные уравнения (5)-(6) выражаются простыми зависимостями

$$\begin{aligned} \vec{P} &= \alpha \epsilon_0 \vec{E} \\ \vec{J} &= \chi \frac{\vec{B}}{\mu_0}, \end{aligned} \quad (8)$$

и законом Ома

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}. \quad (9)$$

Полученная таким образом полная система позволяет, в принципе, рассчитать характеристики полей и в присутствии вещества. Решение таких

задач, даже с использованием простейших связей (8)-(9), является очень сложной математической проблемой. В настоящее время для решения таких задач широко используются компьютеры.

Законы, описывающие взаимодействие вещества с полем, могут быть весьма сложными и, как правило, точно неизвестны. Иными словами, теория поля полностью построена, а теория взаимодействия полей с веществом продолжает бурно развиваться. Прогресс в электронике и в целом в технике во многом определяется созданием новых веществ и материалов, обладающих необходимыми свойствами. Отметим также, что электрические заряды и молекулярные токи могут возникать в веществе и под воздействием других факторов, например, механического давления, температуры, светового и других видов излучений. Таким образом, эта область физики способна предоставить громадное поле деятельности для исследователей.

Важнейшим следствием уравнений Максвелла является существование электромагнитных волн, экспериментально открытых Генрихом Герцем, свойства которых мы будем подробно изучать немного позднее. Для этого нам необходимо предварительно рассмотреть энергетические свойства электромагнитных полей и описание колебательных процессов.

**Майкл Фарадей (1791 – 1867)** – английский физик и химик, основоположник учения об электромагнитном поле (рис. 137).

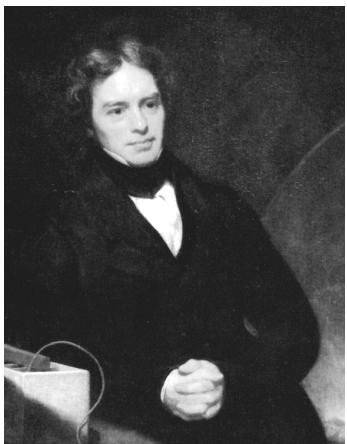


Рис. 137

Майкл Фарадей родился 22 сентября 1791 года в Ньюингтон-Баттсе (ныне Большой Лондон). Его отец был небогатым кузнецом из лондонского предместья. Кузнецом был и старший брат Роберт, всячески поощрявший тягу Майкла к знаниям и на первых порах поддерживавший его материально. Мать Фарадея, трудолюбивая, мудрая, хотя и необразованная женщина, дожила до времени, когда ее сын добился успехов и признания, и по праву гордилась им. Скромные доходы

семьи не позволили Майклу окончить даже среднюю школу, с тринадцати лет он начал работать как поставщик книг и газет, а затем в возрасте 14 лет пошел работать в книжную лавку, где обучался и переплетному ремеслу. Семь лет работы в мастерской стали для юноши и годами напряженного самообразования. Всё это время Фарадей упорно занимался: он с упоением читал все переплетаемые им научные труды по физике и химии, а также статьи из «Британской энциклопедии», повторял в устроенной им домашней лаборатории эксперименты, описанные в книгах, на самодельных электростатических приборах. Важным этапом в жизни Фарадея стали занятия в Городском философском обществе, где Майкл по вечерам слушал научно-популярные лекции по физике и астрономии и участвовал в диспутах. Деньги (по шиллингу на оплату каждой лекции) он получал от брата. На лекциях у Фарадея появились новые знакомые, которым он писал много писем, чтобы выработать ясный и лаконичный стиль изложения; он также старался овладеть приемами ораторского искусства.

Обратив внимание на тягу юноши к науке, в 1812 году один из посетителей переплетной мастерской, член Лон-

донского королевского общества Дено, подарил ему билет на цикл публичных лекций знаменитого физика и химика, первооткрывателя многих химических элементов Г. Дэви в Королевском институте. Майкл не только с интересом выслушал, но и подробно записал и переплел четыре лекции, которые послал вместе с письмом профессору Дэви с просьбой взять его на работу в Королевский институт. Этот «смелый и наивный шаг», по словам самого Фарадея, оказал на его судьбу решающее влияние. Профессор был удивлен обширными знаниями юноши, но в тот момент в институте не было вакантных мест, и просьба Майкла была удовлетворена лишь через несколько месяцев. В 1813 Дэви (не без некоторого колебания) пригласил Фарадея на освободившееся место лаборанта в химической лаборатории Королевского института, где он проработал много лет. В самом начале этой деятельности осенью того же года вместе с профессором и его женой он совершил длительное путешествие по научным центрам Европы (1813-1815 гг.). Это путешествие имело для Фарадея большое значение: он вместе с Дэви посетил ряд лабораторий, где познакомился со многими выдающимися учеными того времени, в том числе с А. Ампером, Ж. Л. Гей-Люссаком и А. Вольтой, которые в свою очередь обратили внимание на блестящие способности молодого англичанина.

После возвращения в 1815 в Королевский институт Фарадей приступил к интенсивной работе, в которой всё большее место занимали самостоятельные научные исследования. В 1816 он начал читать публичный курс лекций по физике и химии в Обществе для самообразования. В этом же году появляется и его первая печатная работа. В 1820 Фарадей провел несколько опытов по выплавке сталей, содержащих никель. Эта работа считается открытием нержавеющей стали, которое не заинтересовало в то время металлургов. В 1821 в жизни Фарадея произошло несколько важных событий. Он получил место надзирателя за зданием и лабораториями Королевского института (то есть технического смо-

трителя) и опубликовал две значительные научные работы (о вращениях тока вокруг магнита и магнита вокруг тока и о сжижении хлора). В период до 1821 Фарадей опубликовал около 40 научных работ, главным образом по химии. В 1824 ему первому удалось получить хлор в жидким состоянии.

Постепенно его экспериментальные исследования всё более переключались в область электромагнетизма. После открытия в 1820 Х. Эрстедом магнитного действия электрического тока Фарадея увлекла проблема связи между электричеством и магнетизмом. В 1822 в его лабораторном дневнике появилась запись: «Превратить магнетизм в электричество». В 1831 г. Фарадей экспериментально открыл явление электромагнитной индукции – возникновение электрического тока в проводнике, движущемся в магнитном поле.

В 1832 г. Фарадей открывает электрохимические законы, которые ложатся в основу нового раздела науки – электрохимии, имеющего сегодня огромное количество технологических приложений.

В 1824 Фарадей был избран членом Королевского общества, несмотря на активное противодействие Дэви, отношения с которым стали у Фарадея к тому времени довольно сложными, хотя Дэви любил повторять, что из всех его открытий самым значительным было «открытие Фарадея». Последний также воздавал должное Дэви, называя его «великим человеком». Спустя год после избрания в Королевское общество Фарадея назначают директором лаборатории Королевского института, а в 1827 он получает в этом институте профессорскую кафедру.

Постоянное огромное умственное напряжение подорвало здоровье Фарадея и вынудило его в 1840 прервать на пять лет научную работу. Вернувшись к ней вновь, Фарадей в 1848 открыл явление вращения плоскости поляризации света, распространяющегося в прозрачных веществах вдоль линий напряженности магнитного поля (Фарадея эффект). По-видимому, сам Фарадей (взволнованно написавший, что

он «намагнистил свет и осветил магнитную силовую линию») придавал этому открытию большое значение. И действительно, оно явилось первым указанием на существование связи между оптикой и электромагнетизмом. Убежденность в глубокой взаимосвязи электрических, магнитных, оптических и других физических и химических явлений стала основой всего научного миропонимания Фарадея.

Другие экспериментальные работы Фарадея этого времени посвящены исследованиям магнитных свойств различных сред. В частности, в 1845 им были открыты явления диамагнетизма и парамагнетизма.

В 1855 болезнь вновь заставила Фарадея прервать работу. Он значительно ослабел, стал катастрофически терять память. Ему приходилось записывать в лабораторный журнал всё, вплоть до того, куда и что он положил перед уходом из лаборатории, что он уже сделал и что собирался делать дальше. Чтобы продолжать работать, он должен был отказаться от многоного, в том числе и от посещения друзей; последнее, от чего он отказался, были лекции для детей.

Незадолго до смерти М. Фарадею за научные заслуги предложили принять титул лорда. Фарадей отказался со словами: «Зовите меня просто Майкл Фарадей».

**Максвелл      Джеймс      Клерк**  
(13.06.1831 – 05.11.1879) – английский ученый, великий физик-теоретик XIX века (рис. 138).

Максвелл родился в год, когда Фарадей открыл закон электромагнитной индукции, а умер в год, когда родился Эйнштейн. Жизнь и деятельность Максвелла как бы перекинула символический мостик между этими двумя великими физиками, так как именно Максвелл сумел выразить в сухих строчках математических уравнений великие прозрения Фарадея, а уравнения



Рис. 138

Максвелла стали затем основой для построения теории относительности.

Максвелл родился в г. Эдинбурге, в семье юриста и обладателя большого поместья в Шотландии. Мать Максвелла умерла, когда ребенку было девять лет, и его воспитанием занялись отец и тетя. Отец, высокообразованный человек, глубоко интересовавшийся проблемами естествознания, привил ребенку любовь к науке. В школе Максвелл увлекся математикой, и первой его научной работой, выполненной в пятнадцать лет, было открытие простого, но ранее неизвестного способа вычерчивания овальных фигур. За яркие математические способности Максвелла в школе прозвали «чокнутым». Однако Максвелл поражал не только выдающимися успехами в математике, но и постоянным любопытством по поводу того, как устроена и действует та или иная вещь.

В 1847 г. Максвелл поступил в Эдинбургский университет, а в 1850 г. перешел в Кембридж, который и закончил в 1854 г. вторым по классу математики. После окончания университета он согласился занять должность профессора в колледже г. Абердине в Шотландии, главным образом для того, чтобы быть поближе кльному отцу, который скончался, не дождавшись приезда сына. Проработав в Абердине четыре года, Максвелл переезжает в Лондон, где с 1860 по 1865 гг. работает в Королевском колледже. Затем он уходит в отставку и уезжает в свое фамильное поместье Гленлейр вблизи деревни Парсон в Шотландии, чтобы посвятить все время научным исследованиям.

В 1871 г. Максвелл соглашается вернуться к работе, чтобы заняться организацией первой физической лаборатории в Кембриджском университете. Эта лаборатория, получившая имя Кавендишской лаборатории, стала впоследствии одной из самых знаменитых физических лабораторий в мире. Максвелл становится первым ее директором.

Научная деятельность Максвелла охватывает проблемы электромагнетизма, кинетической теории газов, оптики, теории упругости и многое другое. Свою первую рабо-

ту «О черчении овалов и об овалах со многими фокусами» Д. К. Максвелл выполнил, когда ему еще не было 15 лет (1846, опубликована в 1851). Одними из первых его исследований были работы по физиологии и физике цветного зрения и колориметрии (1852–72). В 1861 Максвелл впервые демонстрировал цветное изображение, полученное от одновременного проецирования на экран красного, зеленого и синего диапозитивов, доказав этим справедливость трехкомпонентной теории цветного зрения и одновременно наметив пути создания цветной фотографии. Он создал один из первых приборов для количественного измерения цвета, получившего название диска Максвелла. В 1857–59 Максвелл провел теоретическое исследование устойчивости колец Сатурна и показал, что кольца Сатурна могут быть устойчивыми лишь в том случае, если они состоят из не связанных между собой твердых частиц.

В исследованиях по электричеству и магнетизму (статьи «О фарадеевых силовых линиях», 1855–56; «О физических силовых линиях», 1861–62; «Динамическая теория электромагнитного поля», 1864; двухтомный фундаментальный «Трактат об электричестве и магнетизме», 1873) Д. К. Максвелл математически развил воззрения М. Фарадея на роль промежуточной среды в электрических и магнитных взаимодействиях. Он попытался (вслед за Фарадеем) истолковать эту среду как всепроникающий мировой эфир, однако эти попытки не были успешны. Дальнейшее развитие физики показало, что носителем электромагнитных взаимодействий является электромагнитное поле, теорию которого (в классической физике) Максвелл и создал. В этой теории он обобщил все известные к тому времени факты макроскопической электродинамики и впервые ввел представление о токе смещения, порождающем магнитное поле подобно обычному току (току проводимости, перемещающимся электрическим зарядам). Максвелл выразил законы электромагнитного поля в виде системы 4 дифференциальных уравнений в частных производных. Генрих Герц как-то сказал об этих

уравнениях: «Кажется, будто они живут отдельной жизнью и обладают собственным разумом, будто они мудрее нас, даже мудрее того, кто их впервые написал...»

Общий и исчерпывающий характер этих уравнений проявился в том, что их анализ позволил предсказать многие неизвестные до того явления и закономерности. Так, из них следовало существование электромагнитных волн, впоследствии экспериментально открытых Г. Герцем. Исследуя эти уравнения, Максвелл пришел к выводу об электромагнитной природе света (1865) и показал, что скорость любых других электромагнитных волн в вакууме равна скорости света. Он измерил (с большей точностью, чем В. Вебер и Ф. Кольрауш в 1856) отношение электростатической единицы заряда к электромагнитной и подтвердил его равенство скорости света. Из теории Максвелла вытекало, что электромагнитные волны производят давление. Давление света было экспериментально установлено в 1899 П. Н. Лебедевым.

Теория электромагнетизма Максвелла получила полное опытное подтверждение и стала общепризнанной классической основой современной физики. Роль этой теории ярко охарактеризовал А. Эйнштейн: «... тут произошел великий перелом, который навсегда связан с именами Фарадея, Максвелла, Герца. Львиная доля в этой революции принадлежит Максвеллу... После Максвелла физическая реальность мыслилась в виде непрерывных, не поддающихся механическому объяснению полей... Это изменение понятия реальности является наиболее глубоким и плодотворным из тех, которые испытала физика со времен Ньютона».

В исследованиях по молекулярно-кинетической теории газов (статьи «Пояснения к динамической теории газов», 1860, и «Динамическая теория газов», 1866) Максвелл впервые решил статистическую задачу о распределении молекул идеального газа по скоростям, рассчитал зависимость вязкости газа от скорости и длины свободного пробега молекул

(1860), вычислив абсолютную величину последней, вывел ряд важных соотношений термодинамики (1860).

Дж. К. Максвелл был крупным популяризатором. Он написал ряд статей для Британской энциклопедии, популярные книги (такие, как «Теория теплоты» (1870), «Материя и движение» (1873), «Электричество в элементарном изложении» (1881), переведенные на русский язык). Важным вкладом в историю физики является опубликование Максвеллом рукописей работ Г. Кавендиша по электричеству (1879) с обширными комментариями.

Этот замечательный ученый был в то же время мягким, религиозным, самоотверженным человеком. Он обладал прекрасным чувством юмора. Однажды, готовясь к лекции о только что изобретенном телефоне, Максвелл так описал систему телефонной связи: «Она обладает идеальной симметрией: проволока посередине, две трубки по концам проволоки и два болтуна около каждой трубки».

Величие максвелловских уравнений не было сразу понято современниками. Теория Максвелла считалась сложной, недостаточно логически обоснованной, математически некорректной. Лишь после работ Г. Герца, обнаружившего электромагнитные волны, и П. Н. Лебедева, доказавшего существование светового давления, предсказанного теорией Максвелла, его уравнения завоевали всеобщее признание.

Максвелл прожил, к сожалению, недолгую жизнь и умер от рака в возрасте 48 лет.

## **§ 5. Превращение энергии в электрических и магнитных явлениях**

В многочисленных электротехнических устройствах происходят постоянные переходы энергии из одной формы в другую. В данном параграфе мы рассмотрим некоторые примеры таких превращений и покажем, что во всех случаях эти переходы связаны с преобразованиями электрических и магнитных полей. Конечно, и в этих процессах выполняется закон сохранения энергии – полная энергия (механическая, тепловая, электрического и магнитного полей ...) замкнутой системы сохраняется.

Закон сохранения энергии (и другие законы сохранения) ограничивает перечень возможных процессов в системе, но, во-первых, не может указать, что именно произойдет в данном конкретном случае, во-вторых, если процесс возможен с энергетической точки зрения, то это еще не значит, что такой процесс действительно произойдет! Поэтому при изучении реальных явлений мало убедиться в его энергетической возможности – надо выяснить условия, при которых данное явление может произойти.

Так, имея определенную сумму денег для интересующей вас покупки, вы должны знать, что нужный товар есть в магазине!

Переход энергии из одной формы в другую есть некоторый процесс, который подчиняется определенным физическим законам. Поэтому, прежде чем говорить о преобразовании энергии, необходимо рассмотреть (или хотя бы указать) реальный

процесс, благодаря которому произойдет это преобразование. Кинетическая энергия движущегося тела может перейти в тепловую благодаря сухому или вязкому трению, неупругой деформации, излучению и последующему поглощению волн различной природы и т.д.

Именно с таких позиций мы будем рассматривать процессы превращения энергии в данном параграфе.

## 5.1. Математическое введение\*

Многие физические величины математически описываются как функции, которые могут зависеть от времени, координат и т.д. Большинство физических законов формулируется в виде уравнений, описывающих скорости изменения этих функций. Например, уравнение второго закона Ньютона описывает изменение скорости тела под действием внешних сил. К удовольствию физиков, различные физические процессы могут описываться одинаковыми уравнениями. Понятно, что одинаковые уравнения имеют одинаковые решения, что позволяет решения, полученные в одной области физики, переносить на другие области. С математической точки зрения можно рассматривать решение этих уравнений, не оговаривая физи-

---

\* С этим разделом желательно разобраться: полученные здесь результаты будут неоднократно использованы в дальнейшем! С той же целью в этом разделе формулы нумеруются буквой «М» – математическая.

ческий смысл входящих в него величин и параметров\*. Сейчас мы познакомимся с одним из таких уравнений, очень часто встречающихся в различных областях физики.

Пусть скорость изменения некоторой физической величины, описываемой функцией  $X(t)$ , пропорциональна самой величине, то есть подчиняется уравнению

$$\frac{\Delta X}{\Delta t} = -aX, \quad (\text{M1})$$

где  $a$  – некоторая постоянная величина.

Параллельно с общим уравнением будем рассматривать конкретный физический пример. Пусть лодка массой  $m$  движется по поверхности воды, со стороны которой на лодку действует тормозящая сила, пропорциональная скорости лодки  $F = -\beta v$ . В этом случае на основании второго закона Ньютона можно записать уравнение

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\beta v, \quad \text{или} \quad \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{\beta}{m} v. \quad (1a)$$

Для однозначного определения функции  $X(t)$  уравнение (M1) необходимо дополнить начальным условием: значением функции  $X_0$  (для определенности будем считать, что  $X_0 > 0$ ) в момент времени  $t_0 = 0$ . Так, в рассматриваемом физическом примере следует задать начальную скорость  $v_0$ .

Качественно решение этого уравнения описывается следующим образом (рис. 139): при  $t = 0$  значение функции задается начальным условием

---

\* Мы же решаем квадратные уравнения, не задумываясь, что такое «икс»: метры, секунды или стулья!

$X_0$ , затем функция начинает убывать, причем сначала скорость убывания равна  $\left(\frac{\Delta X}{\Delta t}\right)_{t=0} = -aX_0$ , по мере уменьшения значения функции  $X$  скорость ее убывания падает. Поэтому графиком этой функции будет монотонно убывающая кривая. Характерное время убывания функции оценивается как время, за которое функция стала бы равной нулю, если скорость ее убывания остается такой же, как в начальный момент времени:

$$\tau = \frac{X_0}{\left| \left( \frac{\Delta X}{\Delta t} \right)_{t=0} \right|} = \frac{1}{a}. \quad (\text{M2})$$

Таким образом, величина, обратная коэффициенту пропорциональности в уравнении (1), имеет смысл *характерного времени затухания*, поэтому имеет смысл записать это уравнение в виде, явно включающем этот параметр:

$$\frac{\Delta X}{\Delta t} = -\frac{1}{\tau} X. \quad (\text{M3})$$

Теперь для определения характерного времени затухания  $\tau$  достаточно привести уравнение изменения к стандартному виду (М3), в котором коэффициент пропорциональности имеет смысл величины, обратной времени затухания.

Строго говоря, время, через которое функция  $X(t)$  станет равной нулю, равно бесконечности.

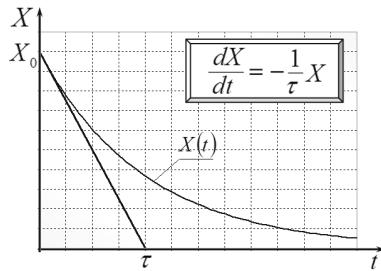


Рис. 139

Чтобы доказать это утверждение, будем считать, что функция  $X(t)$  изменяется скачками в равноотстоящие моменты времени  $t_k = k\Delta t$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), ее значения в эти моменты времени обозначим  $X_0, X_1, X_2, \dots$ . Если интервал времени  $\Delta t$  взять достаточно малым, то значения  $X_0, X_1, X_2, \dots$  будут мало отличаться от точного решения рассматриваемого уравнения (М3). В дискретном приближении уравнение (М1) заменяется следующим

$$\frac{X_k - X_{k-1}}{\Delta t} = -\frac{1}{\tau} X_k,$$

которое преобразуется к виду

$$X_k = \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) X_{k-1}.$$

Из этого выражения следует, что величины  $X_0, X_1, X_2, \dots$  образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию

$$X_k = X_0 \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right)^k, \quad (\text{M4})$$

члены которой только стремятся к нулю, но не достигают его. Можно получить и точное решение уравнения (М3). Для этого следует устремить  $\Delta t \rightarrow 0$ . Тогда текущее время может быть записано в виде  $t = k\Delta t$ . Геометрическая прогрессия в этом случае устремится\* к функции

\* Не пугайтесь и не сомневайтесь: математики строго доказали эту формулу и даже дали ей название «второй замечательный предел». Здесь  $e = 2,71828\dots$  – одна из основных математических констант. А полученная функция и есть «страшная» экспонента – фактически, та же геометрическая прогрессия, только при очень малом временном шаге!

$$X(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} X_0 \left( 1 - \frac{\Delta t}{\tau} \right)^{\frac{t}{\Delta t}} = X_0 e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (\text{M5})$$

Таким образом, точный смысл величины  $\tau$  следующий: за это время функция  $X$  убывает в  $e = 2,71828\dots$  раз, соответственно, за время  $2\tau$  она уменьшится в  $e^2 = 7,389\dots$  раз, за время  $3\tau$  – в  $e^3 = 20,0855\dots$  раз и т.д.

*Теперь нет необходимости каждый раз решать уравнения подобного типа или оценивать характерные времена – достаточно привести его к стандартному виду. Так, например, непосредственно из вида уравнения (1а) следует, что характерное время движения лодки до остановки равно  $\tau = \frac{m}{\beta}$ .*

Часто возникает необходимость в вычислении различных суммарных характеристик, описывающих весь процесс изменения  $X(t)$ . Вычислим некоторые из них.

Пусть в некоторый момент времени  $t_i$  значение рассматриваемой величины равно  $X_i$ , за последующий малый промежуток времени  $\Delta t_i$  величина  $X$  изменилась на малую величину  $\Delta X_i$  (рис. 140).

Во многих задачах необходимо уметь вычислять площадь под графиком зависимости  $X(t)$ , то

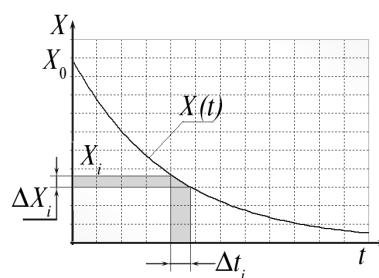


Рис. 140

есть сумму<sup>\*</sup>  $S_1 = \sum_i X_i \Delta t_i$  для промежутка времени, изменяющегося от 0 до некоторого  $t_1$ , при очень малом шаге  $\Delta t$ .

Для вычисления этой суммы выразим из уравнения (М3) значение функции через скорость ее изменения, после чего суммирование проводится элементарно:

$$\sum_i X_i \Delta t_i = \sum_i \left( -\tau \frac{\Delta X_i}{\Delta t_i} \right) \Delta t_i = -\tau \sum_i \Delta X_i = \tau (X_0 - X_1). \quad (\text{M6})$$

Здесь  $X_1$  значение функции в момент времени  $t_1$ .

Можно просуммировать и по бесконечному промежутку времени до  $t_1 \rightarrow \infty$ . Для этого достаточно в формуле (М6) положить  $X_1 = 0$ . В этом случае

$$S_1 = \sum_i^{\infty} X_i \Delta t = \tau X_0. \quad (7)$$

Полученная формула имеет наглядную геометрическую интерпретацию (рис. 141): площадь под кривой затухания равна площади прямоугольника со сторонами  $X_0$  и  $\tau$ .

Этот же результат можно получить, суммируя геометрическую прогрессию (5):

$$S_1 = \sum_{k=1}^{\infty} X_k \Delta t = \sum_{k=1}^{\infty} X_0 \left( 1 - \frac{\Delta t}{\tau} \right)^k \Delta t = X_0 \Delta t \frac{1}{1 - \left( 1 - \frac{\Delta t}{\tau} \right)} = X_0 \tau.$$

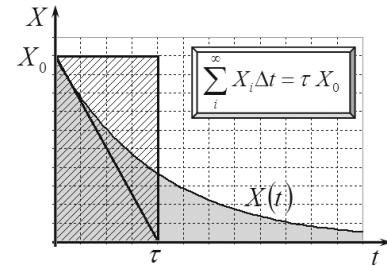


Рис. 141

---

\* А это уже интеграл!

*Применим полученную формулу к движению лодки, описываемому уравнением (1а). В этом случае формальная сумма (7) приобретает явный физический смысл: путь, пройденный лодкой до остановки  $S = \sum_i^{\infty} v_i \Delta t_i$ . Так, применяя формулу (7), сразу получаем, что этот путь равен*

$$\sum_i v_i \Delta t_i = \tau v_0 = \frac{mv_0}{\beta}. \quad (7a)$$

Иногда приходится вычислять сумму вида  $\sum_i X_i^2 \Delta t_i$ , поэтому найдем ее.

Выразим опять из уравнения (М4) значение функции через скорость ее изменения  $X_i = -\tau \frac{\Delta X_i}{\Delta t_i}$  и проведем суммирование:

$$\sum_i X_i^2 \Delta t_i = -\sum_i X_i \tau \frac{\Delta X_i}{\Delta t_i} \Delta t_i = -\tau \sum_i X_i \Delta X_i.$$

Остановимся отдельно на вычислении часто встречающейся суммы  $\sum_i X_i \Delta X_i$ . Ее можно преобразовать, используя соотношение, справедливое для малых изменений:

$$\Delta(X^2) = 2X \Delta X \Rightarrow \sum_i X_i \Delta X_i = \sum_i \Delta \left( \frac{X_i^2}{2} \right) = \frac{1}{2} (X_1^2 - X_0^2), \quad (M8)$$

где  $X_1$  – значения величины в конце рассматриваемого промежутка времени.

Этой же формуле можно дать простую геометрическую иллюстрацию (рис. 142). Построим график функции  $Y = X$ . Тогда площадь трапеции под графиком этой функции и будет выражаться суммой (М8), если, конечно, устремить  $\Delta X$  к нулю и

вспомнить, что площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

**Особо отметим, что эта формула применима независимо от того, по какому закону изменяется величина  $X$ .**

Эта формула уже неоднократно нам встречалась. Особенно часто она используется при расчете различных видов энергии:  $\frac{mv^2}{2}$ ,  $\frac{kx^2}{2}$ ,  $\frac{CU^2}{2}$ ,  $\frac{LI^2}{2}$ ....

Впрочем, с последней познакомимся позже.

Подставляя полученную формулу в исходную сумму, получим:

$$\begin{aligned} \sum_i X_i^2 \Delta t_i &= -\sum_i X_i \tau \frac{\Delta X_i}{\Delta t_i} \Delta t_i = -\tau \sum_i X_i \Delta X_i = \\ &= -\tau \sum_i \Delta \left( \frac{X_i^2}{2} \right) = -\frac{\tau}{2} (X_1^2 - X_0^2). \end{aligned} \quad (\text{M9})$$

Если суммирование проводится по всему процессу изменения величины  $X$ , то  $X_k = 0$  и тогда

$$\sum_i X_i^2 \Delta t_i = X_0^2 \frac{\tau}{2}. \quad (\text{M10})$$

Эту формулу можно легко получить, если воспользоваться точным выражением (M5) для функции  $X(t)$ . Тогда получим

$$X(t) = X_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \Rightarrow X^2(t) = X_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}.$$

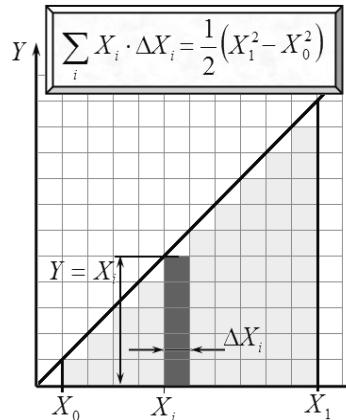


Рис. 142

Теперь можно воспользоваться формулой для суммы (М7).

Получите самостоятельно формулу (М10), используя приближенное решение уравнения в виде геометрической прогрессии (М4).

Покажем применение формулы для суммы (М8) для движения лодки. В этом случае она приобретает наглядный физический смысл. Действительно, вычислим работу сил сопротивления, действующих на лодку. За малый промежуток времени она равна  $\delta A = F\Delta x = -\beta v \cdot v \Delta t = -\beta v^2 \Delta t$ . Для вычисления этой работы за все время торможения следует воспользоваться полученной формулой (М9), тогда

$$A = -\sum_i \beta v_i^2 \Delta t_i = -\beta \sum_i v_i^2 \Delta t_i = -\beta v_0^2 \frac{\tau}{2} = -\frac{mv_0^2}{2}. \quad (8a)$$

Таким образом, ее модуль равен начальной кинетической энергии лодки, что является следствием закона сохранения энергии.

Обозначим скорость изменения функции  $X(t)$ :  $\frac{\Delta X}{\Delta t} = V$ . Рассмотрим, как изменяется эта величина.

Исходное уравнение (М3), с учетом введенного обозначения, имеет вид

$$V = -\frac{1}{\tau} X. \quad (M11)$$

Перейдем к уравнению для малых изменений  $\Delta V = -\frac{1}{\tau} \Delta X$  и разделим его на интервал времени  $\frac{\Delta V}{\Delta t} = -\frac{1}{\tau} \frac{\Delta X}{\Delta t}$ . Таким образом, мы получаем неожиданный результат: если некоторая величина  $X$  подчиняется уравнению (3), то скорость ее изменения подчиняется такому же уравнению

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = -\frac{1}{\tau} V . \quad (\text{M12})$$

Из этого уравнения выразим  $\Delta V = -\frac{1}{\tau} V \Delta t = -\frac{1}{\tau} \Delta X$  (здесь мы воспользовались определением скорости изменения функции  $\Delta X = V \Delta t$ ).

Обратите внимание: отношение изменения скорости к изменению самой величины есть величина постоянная

$$\frac{\Delta V}{\Delta X} = -\frac{1}{\tau} . \quad (13)$$

Очевидно, что решением этого уравнения является функция (M11), график которой показан на рис. 143.

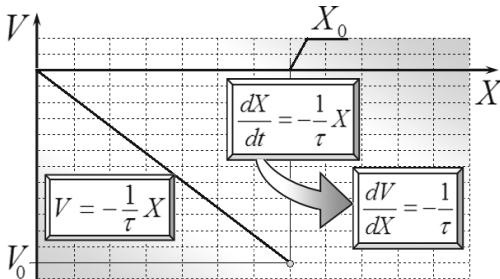


Рис. 143

Применим рассмотренные преобразования к уравнению (1а), описывающему движение лодки. Исходное уравнение имеет вид

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{\beta}{m} v .$$

В данном случае скорость изменения скорости  $\frac{\Delta v}{\Delta t} = a$  есть ее ускорение. Поэтому зависимость ускорения от времени описывается таким же уравнением:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = a . \quad (10a)$$

Но ничто не мешает сделать и обратный ход: так как скорость связана с изменением координаты лодки соотношением  $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ , то для изменения координаты справедливо такое же уравнение

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = -\frac{\beta}{m} x . \quad (10b)$$

Наконец, зависимость скорости от координаты описывается уравнением

$$\frac{\Delta v}{\Delta x} = -\frac{\beta}{m} , \quad (11a)$$

из которого следует, что скорость линейно убывает с ростом пройденного пути

$$v = v_0 - \frac{\beta}{m} x .$$

Последнему соотношению можно придать физический смысл. Из второго закона Ньютона следует, что изменение импульса тела равно импульсу действующей силы:

$$\Delta(mv) = F\Delta t = -\beta v\Delta t = -\beta\Delta x ,$$

(где учтено, что действующая сила определяется формулой  $F = -\beta v$ , а  $v\Delta t = \Delta x$ ). Отсюда и следует полученное ранее уравнение (11а).

В заключение рассмотрим поведение функции  $X(t)$ , изменение которой подчиняется уравнению

$$\frac{\Delta X}{\Delta t} = b - aX . \quad (M13)$$

Преобразуем это уравнение к виду

$$\frac{\Delta X}{\Delta t} = b - aX = -a\left(X - \frac{b}{a}\right) . \quad (M14)$$

Если функция  $X = \bar{X} - \frac{b}{a}$ , то скорость ее изменения равна нулю, поэтому это значение не будет изменяться с течением времени, оно является **стационарным**. Обозначим отклонение функции от ее стационарного значения  $\left(X - \frac{b}{a}\right) = Y$ . Для этого отклонения справедливо уравнение

$$\frac{\Delta Y}{\Delta t} = -aY,$$

только что изученное нами. Для него справедливы все полученные выводы. Таким образом, уравнение (M12) описывает переход к стационарному состоянию, в ходе которого скорость изменения функции пропорциональна ее отклонению от стационарного значения. Это уравнение (10б) лучше переписать в виде

$$\frac{\Delta X}{\Delta t} = -\frac{X - \bar{X}}{\tau}, \quad (14)$$

в котором все параметры имеют явный смысл:  $\bar{X} = \frac{b}{a}$  – стационарное (равновесное) значение функции, к которому стремится решение уравнения (M12) независимо от начального значения;  $\tau = \frac{1}{a}$  – характерное время перехода к стационарному значению.

Рисунок 144 иллюстрирует решение этого уравнения, кривая  $X_1(t)$  показывает выход к стационарному значению из нулевого начального значения.

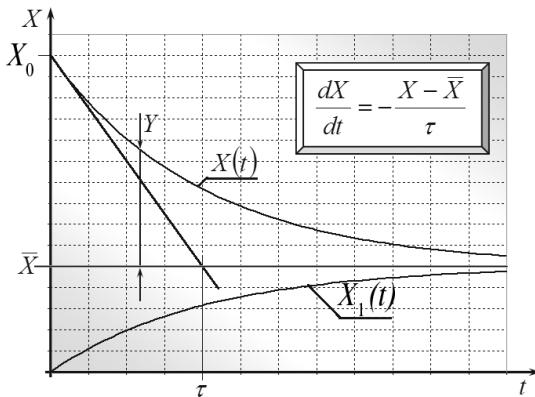


Рис. 144

### Задание для самостоятельной работы

Рассмотрите движение лодки под действием постоянной силы тяги и силы сопротивления, пропорциональной скорости. Покажите, что это движение описывается уравнением вида (М12), определите параметры этого уравнения. Качественно проанализируйте решение этого уравнения.

## 5.2. Превращения энергии при зарядке и разрядке конденсаторов

### 5.2.1. Напоминание\* и гидродинамическая аналогия

Емкостью конденсатора называется отношение его заряда\*\*  $q$  к разности потенциалов (напряжению) между обкладками

---

\* Эти вопросы подробно рассмотрены во второй части данной серии, поэтому здесь мы ограничиваемся краткими напоминаниями.

\*\* Напомним, зарядом конденсатора называется заряд одной из его обкладок.

$$C = \frac{q}{U}. \quad (1)$$

Емкость плоского конденсатора, состоящего из двух параллельных пластин площадью  $S$ , размеры которых значительно больше расстояния между ними  $h$ , и заполненного диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$ , определяется по формуле

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{h}. \quad (2)$$

Энергия конденсатора, заряженного до напряжения  $U$  и имеющего заряд  $q$ , определяется по одной из формул

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{qC}{2}. \quad (3)$$

Для плоского конденсатора эта энергия может быть выражена через напряженность поля  $E$  между обкладками

$$W = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} Sh. \quad (4)$$

Как известно, на заре изучения электрических явлений их пытались объяснить исходя из представлений о некоторой гипотетической электрической жидкости. В настоящее время напоминание об этой (или этих) жидкости остались только в устоявшейся терминологии: «электрический ток», «емкость конденсатора», «падение напряжения» и т.д. Несмотря на то что «анalogии ничего не доказывают», в данном разделе мы рассмотрим аналогии между электрическими и гидродинамическими явлениями в поле тяжести. Тем более, что такие аналогии использовались ранее при описании электрического тока.

Основой этих аналогий является совпадение математических формул, описывающих данные явления.

Итак, аналогом электрического заряда  $q$  будем считать объем некоторой реальной жидкости неизменной плотности  $\rho$ :  $q^* = V$  (все гидродинамические величины-аналоги будем обозначать тем же символом, что и соответствующие электрические величины, но «со звездочкой»). В качестве аналога электрического потенциала будем использовать давление жидкости.

Аналогом конденсатора нам будет служить вертикальный цилиндрический сосуд (рис. 145), основной характеристикой которого будет служить площадь его поперечного сечения  $S$ . Роль электростатического поля, действующего на заряды, в такой ситуации играет сила тяжести, действующая на жидкость. Аналогом напряжения в этом случае является разность давлений между верхней и нижней поверхностями жидкости, или гидростатическое давление на дно сосуда

$$U^* = \Delta\phi^* = p = \rho g H, \quad (5)$$

где  $H$  – высота уровня жидкости в сосуде. Иными словами, мы принимаем за нуль гидравлического потенциала давление на свободной поверхности жидкости. Важно также отметить, что гравитаци-

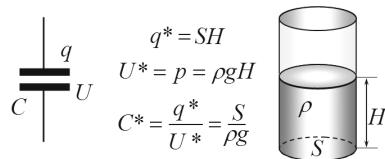


Рис. 145

онное поле, так же как и электростатическое, является потенциальным.

Обратите внимание, высоту самого сосуда мы не оговариваем и не ограничиваем: мы же считаем, что напряжение на конденсаторе может быть любым. Если вам нужно учесть, что при некотором напряжении наступает пробой конденсатора, то в рамках аналогии можете задать высоту самого сосуда — тогда «давление — напряжение» не превысит предельного, задаваемого высотой сосуда.

Заметим, что аналогия между электрическим напряжением и гидростатическим давлением (при использовании аналогии «электрический заряд — объем жидкости») является корректной. Так, работа по перемещению заряженного тела в электрическом поле равна произведению заряда тела на разность потенциалов между начальной и конечной точками траектории\*:

\* Здесь мы использовали новое обозначение для работы  $\delta A$ , совершенной по перемещению малой порции заряда  $\Delta q$ . Различие в обозначениях малых величин не случайно. По прежнему знак  $\Delta$  («дельта большое») означает изменение некоторой величины, то есть разность между конечным и начальным значением  $\Delta x = x_{\text{конечное}} - x_{\text{начальное}}$ . Знак  $\delta$  («дельта малое») здесь и в дальнейшем используется для обозначения характеристики процесса на малом его участке. Можно говорить об изменении энергии системы в указанном выше смысле  $\Delta W = W_{\text{конечное}} - W_{\text{начальное}}$ . Говорить об «изменении» работы или количества теплоты не имеет смысла, так как никакая физическая система не обладает ни работой, ни теплотой. Работа и теплота являются характеристиками процесса, при котором происходит изменение энергии, они могут быть представлены в виде разности каких-то физических величин, поэтому мы будем их обозначать  $\delta A$ ,  $\delta Q$ .

$$\delta A = q \Delta \phi. \quad (6)$$

Аналогичное соотношение справедливо и для работы силы тяжести:

$$\delta A^* = q^* \Delta \phi^* = V \cdot \rho g \Delta H. \quad (6^*)$$

Рассчитаем «емкость гидроконденсатора», используя аналогию с формулой (1)

$$C^* = \frac{q^*}{U^*} = \frac{V}{\rho g H} = \frac{SH}{\rho g H} = \frac{S}{\rho g}. \quad (1^*)$$

Важно, что, согласно данному определению, «емкость» не зависит от количества налитой в сосуд жидкости, так же как и емкость электрического конденсатора не зависит от накопленного в нем заряда.

Рассчитаем энергию жидкости в сосуде, которая равна произведению массы жидкости, ускорения свободного падения и высоты центра масс:

$$W = mg \frac{H}{2} = \rho SHg \frac{H}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{S}{\rho g} \right) \cdot (\rho g H)^2 = \frac{C^* (U^*)^2}{2}, \quad (3^*)$$

и здесь мы имеем полную аналогию.

Для описания движения жидкости по трубе (протекания электрического тока по проводнику) также введем величины, являющиеся явными аналогами электрических величин. Основной характеристикой электрического тока является сила тока – заряд, протекающий через поперечное сечение проводника за единицу времени

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}. \quad (7)$$

Аналогом этой величины служит расход жидкости  $J$  – объем, протекающий через поперечное сечение трубы за единицу времени

$$I^* = \frac{\Delta q^*}{\Delta t} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = J. \quad (7^*)$$

Отметим, что аналогом плотности тока является обычная скорость течения жидкости (рис. 146).

При ламинарном течении вязкой жидкости по трубе расход жидкости можно считать пропорциональным разности давлений на ее торцах (этот закон носит имя французского физика Пуазейля), что является полным аналогом закона Ома для участка цепи

$$I^* = \frac{U^*}{R^*} \Rightarrow J = \frac{\Delta p}{\beta}. \quad (8^*)$$

Здесь коэффициент пропорциональности  $\beta$  зависит от размеров трубы и вязкости жидкости.

При движении вязкой жидкости по трубе с постоянной скоростью кинетическая энергия не изменяется, поэтому работа сил вязкого трения равна количеству выделившейся теплоты. Определим ее. За малый промежуток времени количество выделившейся теплоты (или работа сил вязкого трения) равно

$$\delta Q = F_{comp.} v \Delta t, \quad (9)$$

где  $F_{comp.}$  – сила, действующая на жидкость со стороны стенок трубы,  $v$  – средняя скорость течения

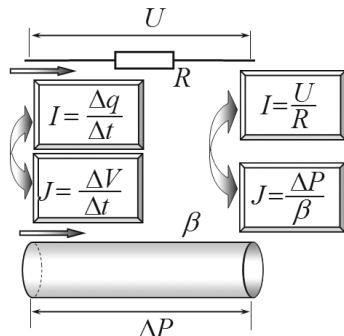


Рис. 146

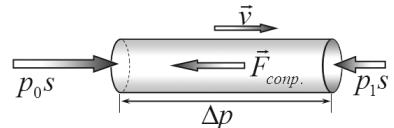


Рис. 147

жидкости по трубе\* (рис. 147). При равномерном движении  $F_{comp}$  по модулю равно разности сил давления с торцов трубы  $F_{comp} = s\Delta p$ , где  $s$  – площадь поперечного сечения трубы. Произведение площади поперечного сечения на среднюю скорость жидкости равен расходу  $sv = J$ . С учетом сказанного, формула (9) приобретает вид

$$\delta Q = F_{comp} v \Delta t = \Delta p s v \Delta t = \Delta p J \Delta t, \quad (9^*)$$

что является аналогом закона Джоуля-Ленца. Его можно записать в эквивалентных формах (используя закон Пуазейля):

$$\delta Q = J \Delta p \Delta t = \beta J^2 \Delta t = \frac{(\Delta p)^2}{\beta} \Delta t. \quad (10^*)$$

Для существования электрического тока необходим источник, характеризуемый ЭДС и внутренним сопротивлением. Не представляет труда сконструировать гидродинамический аналог такого элемента. Его можно представить в виде насоса, создающего постоянную разность давлений жидкости (аналог ЭДС  $\varepsilon^* = \Delta p$ ) между выходом и входом.

Для нашего дальнейшего изложения эту модель можно даже упростить: рассматривать поршневой цилиндрический насос, к поршню которого прикладывается постоянная сила, создающая постоянное давление в рабочем цилиндре  $p_0$  (аналог ЭДС) (рис. 148). При работе насоса жидкость,

---

\* Строго говоря, скорость течения жидкости неодинакова в поперечном сечении трубы (в центре больше, у стенок меньше). Учет этого обстоятельства серьезно усложняет математические выкладки, но приводит к тому же «очевидному» результату.

протекая через патрубок (выходную трубку), испытывает сопротивление из-за вязкого трения. Как и в случае закона Ома для участка цепи, будем считать, что из-за вязкого трения разность давлений падает на величину, пропорциональную расходу жидкости  $\Delta p' = \beta' J$ , где  $\beta'$  – коэффициент, являющийся аналогом внутреннего сопротивления источника.

Конечно, закон Пуазейля выполняется далеко не всегда – увеличение скорости течения, появление вихрей ... приводят к его нарушению, но и закон Ома справедлив не во всех случаях!

Второе возможное возражение против используемой аналогии – инерционность жидкости. Действительно, жидкость должна иметь массу, иначе на нее не будет действовать сила тяжести. Однако во всех случаях мы будем пренебрегать инерционностью течения жидкости, считая ее движение квазистационарным. Иными словами, считать жидкость очень вязкой... или считать ее столь же идеальной, как и жидкость электрическую! Наконец, наша цель – понять возможные пути преобразования энергии в электрических процессах, а «анalogии ничего не доказывают, но ... многое проясняют».

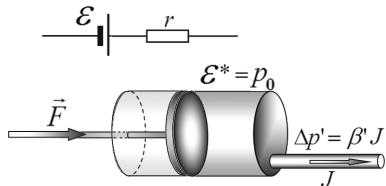


Рис. 148

### 5.2.2. Разрядка конденсатора

Если обкладки конденсатора, имеющие заряды  $\pm q_0$ , соединить проводником (сопротивление кото-

рого обозначим  $R$ ), то заряды начнут перетекать с одной обкладки на другую, в результате чего конденсатор будет разряжаться (рис. 149). Так как в рассматриваемом контуре нет источника сторонних сил, то сумма напряжений на конденсаторе и резисторе равна нулю (свойство потенциальности электростатического поля):  $U_C + U_R = 0$ . Напряжение на конденсаторе выразим, используя определение его емкости, а напряжение на резисторе выразим из закона Ома для участка цепи:

$$\frac{q}{C} + IR = 0. \quad (1)$$

Сила тока равна скорости изменения заряда конденсатора  $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ , откуда получаем уравнение, описывающее изменение заряда на конденсаторе с течением времени:

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = -\frac{1}{RC}q. \quad (2)$$

Это уравнение совпадает с уравнением (М3) нашего математического введения. Оно описывает очевидный результат: заряд конденсатора монотонно уменьшается, с характерным временем разрядки

$$\tau = RC. \quad (3)$$

*Проверьте самостоятельно, что по размерности произведение  $\text{Ом} \cdot \Phi$  дает секунду!*

Так как сила тока в цепи есть скорость изменения заряда, то для нее справедливо аналогичное уравнение

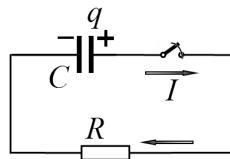


Рис. 149

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = -\frac{1}{RC} I . \quad (4)$$

Следовательно, сила тока в цепи изменяется по тому же временному закону. Что, впрочем, очевидно и без подробных математических выкладок: сила тока пропорциональна напряжению на конденсаторе, которое в свою очередь пропорционально величине заряда.

В данном случае значение силы тока в начальный момент времени определяется уравнением (1) и равно  $I_0 = \frac{q_0}{RC}$ , где  $q_0$  – начальный заряд конденсатора.

Для описания процессов преобразования энергии умножим уравнение (1) на малое изменение заряда  $\Delta q_i$  и просуммируем по всему процессу разрядки конденсатора (в котором заряд уменьшается от начального значения  $q_0$  до нуля):

$$\sum_i \frac{q_i}{C} \Delta q_i + \sum_i I_i R \Delta q_i = 0 . \quad (5)$$

В полученном выражении смысл каждого слагаемого очевиден:

$\sum_i \frac{q_i}{C} \Delta q_i = \frac{1}{2C} \Delta (q^2) = -\frac{q_0^2}{2C}$  – изменение энергии конденсатора, модуль которого равен его начальной энергии;

$\sum_i I_i R \Delta q_i = \sum_i I_i^2 R \Delta t$  – количество теплоты, выделившейся на резисторе.

Таким образом, энергия электрического поля, заключенная в конденсаторе, полностью превращается в тепловую энергию (рис. 150). При изуче-

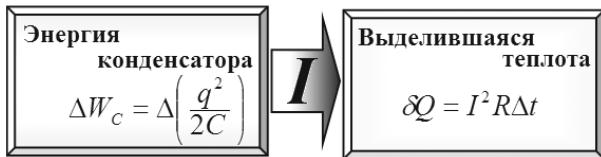


Рис. 150

нии энергетических превращений важно указать, что переход энергии\* электрического поля конденсатора в тепловую энергию происходит благодаря протеканию электрического тока.

Количество выделившейся теплоты можно подсчитать, применяя формулу (М8) для уравнения (4)

$$Q = \sum_i (I(t_i))^2 R \Delta t_i = \frac{1}{2} I_0^2 R t = \frac{1}{2} \left( \frac{q_0}{RC} \right)^2 R \cdot RC = \frac{q_0^2}{2C},$$

что в точности равно начальной энергии конденсатора и не зависит от сопротивления проводника, через который он разряжается.

Несмотря на то что мы получили очевидные результаты при описании разрядки конденсатора, обсудим, куда «выливается» энергия при вытекании жидкости из сосуда. Результат заранее изве-

\* При изучении переходов энергии из одной формы в другую важно указать процесс, посредством которого происходит превращение энергии. Наличие энергии еще не означает возможности ее преобразования! Например, при падении мяча его потенциальная энергия переходит сначала в кинетическую, а потом в тепловую. Попробуйте осуществить обратный процесс: чтобы спокойно лежащий мяч самопротивольно подпрыгнул за счет своей внутренней, тепловой энергии!

стен: потенциальная энергия жидкости в сосуде перейдет в тепловую. Тем не менее покажем это формально.

Будем считать, что жидкость вытекает из вертикального сосуда через тонкую горизонтальную трубку (рис. 151), причем скорость вытекания мала настолько, что можно пренебречь кинетической энергией движущейся жидкости. В этом случае суммарная сила, действующая на жидкость в трубке, равна нулю, что приводит к уравнению  $\Delta p + \beta J = 0$ . В рассматриваемом случае разность давлений равна гидростатическому давлению столба жидкости в сосуде  $\Delta p = \rho g H = \frac{\rho g}{S} V$ . Откуда следует уравнение

$$\frac{\rho g}{S} V + \beta J = 0. \quad (1^*)$$

По определению, расход жидкости равен  $J = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ , поэтому из уравнения (1<sup>\*</sup>) следует уравнение

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = -\frac{\rho g}{S\beta} V, \quad (2^*)$$

описывающее изменение объема жидкости в сосуде с течением времени, со всеми вытекающими последствиями: объем (следовательно, и высота уровня) монотонно убывает, причем характерное время вытекания равно

$$\tau = \frac{S\beta}{\rho g}. \quad (3^*)$$

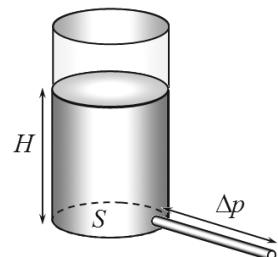


Рис. 151

Расход жидкости также меняется со временем, причем это изменение описывается тем же уравнением...

Для описания процессов преобразования энергии умножим уравнение (1\*) на малое изменение объема  $\Delta V_i$  и просуммируем по всему процессу разрядки конденсатора (в котором объем уменьшается от начального значения  $V_0$  до нуля):

$$\sum_i \frac{\rho g}{S} V_i \Delta V_i + \sum_i \beta J_i \Delta V_i = 0. \quad (5*)$$

В полученном выражении смысл каждого слагаемого очевиден:

$\sum_i \frac{\rho g}{S} V_i \Delta V_i = -\frac{1}{2} \frac{\rho g}{S} V_0^2 = -\rho g H S \frac{H}{2}$  – изменение потенциальной энергии жидкости, модуль которого равен его начальной энергии;

$\sum_i \beta J_i \Delta V_i = \sum_i \beta J_i^2 \Delta t_i$  – количество теплоты, выделившаяся в трубке.

Как видите, нам пришлось просто переписать текст, относящийся к разрядке конденсатора. Более того, во всех формулах той части можно было поставить «звездочки» над символами, перейдя к величинам-аналогам (рекомендуем проделать эту операцию самостоятельно).

Мы рассмотрели процесс медленного вытекания через тонкую трубку. А если взять большой сосуд, а трубку убрать? Течение станет не ламинарным, появятся струи, брызги, шум и плеск..! Но если разряжать конденсатор большой емкости не через резистор, а просто закоротив его обкладки?

Закон Ома выполняться не будет – появятся искры, шум и грохот, электромагнитные волны!..

### 5.2.3. Зарядка конденсатора от источника постоянной ЭДС

Рассмотренный ранее процесс зарядки конденсатора посредством перенесения заряда с одной обкладки на другую имеет исключительно теоретический интерес, как метод расчета энергии конденсатора. Реально конденсаторы заряжают, подключая их к источнику ЭДС, например, к гальванической батарее.

Пусть незаряженный конденсатор ( $q_0 = 0$ ) емкостью  $C$  подключают к источнику, ЭДС которого равна  $\varepsilon$  (рис. 152). Полное электрическое соединение цепи (включающее и внутреннее сопротивление источника) обозначим  $R$ . При замыкании ключа в цепи пойдет электрический ток, благодаря которому на обкладках конденсатора будет накапливаться электрический заряд. По закону Ома, сумма напряжений на конденсаторе  $U_c = \frac{q}{C}$  и резисторе  $U_R = IR$  равна ЭДС источника  $\varepsilon = U_c + U_R$ , что приводит к уравнению

$$IR = \varepsilon - \frac{q}{C}. \quad (1)$$

В этом уравнении заряд конденсатора и сила тока зависят от времени. Скорость изменения за-

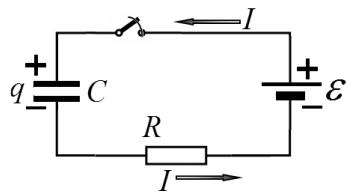


Рис. 152

ряда конденсатора, по определению, равна силе тока в цепи  $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ , что позволяет получить уравнение, описывающее изменение заряда конденсатора с течением времени

$$R \frac{\Delta q}{\Delta t} = \varepsilon - \frac{q}{C}. \quad (2)$$

С таким уравнением мы познакомились в математическом введении, оно совпадает с уравнением (М13). В соответствии с проведенным математическим анализом, преобразуем его к виду

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = -\frac{1}{RC}(q - \varepsilon C). \quad (3)$$

Из этого уравнения следует, что заряд конденсатора (и пропорциональное ему напряжение) плавно возрастает от начального нулевого до конечного стационарного значения

$$\bar{q} = C\varepsilon. \quad (4)$$

При этом напряжение на конденсаторе становится равным ЭДС источника. При достижении этого стационарного значения ток в цепи прекратится. Формула для характерного времени зарядки следует из уравнения (3):

$$\tau = RC. \quad (5)$$

Это время совпадает со временем разрядки конденсатора.

Можно также получить уравнение, непосредственно описывающее изменение силы тока в цепи с течением времени. Для этого на основании уравнения (4) запишем уравнение для малых изменений входящих величин

$$\Delta\varepsilon = \Delta(IR) + \Delta\left(\frac{q}{C}\right).$$

Так как ЭДС источника постоянна, то ее изменение равно нулю  $\Delta\varepsilon = 0$ . Сопротивление цепи и емкость конденсатора постоянны, поэтому их можно вынести из под знака изменения  $\Delta$ , поэтому полученное уравнение приобретает вид

$$R\Delta I = -\frac{1}{C}\Delta q.$$

Наконец, разделим его на промежуток времени, в течение которого произошли эти изменения, в результате получаем искомое уравнение (с учетом связи между силой тока и изменением заряда

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} :$$

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = -\frac{1}{RC}I. \quad (6)$$

Для однозначного решения этого уравнения необходимо задать начальное условие – значение силы тока в начальный момент времени  $I_0 = I(0)$ . В начальный момент времени, когда заряд конденсатора равен нулю, скорость возрастания заряда (то есть сила тока) максимальна и равна  $I_0 = \left(\frac{\Delta q}{\Delta t}\right)_0 = \frac{\varepsilon}{R}$ .

Очередной раз мы встречаемся с уравнением такого типа – переход к стационарному состоянию! Анализ решения мы проводили неоднократно, поэтому ограничимся графиками зависимости напряжения на конденсаторе и силы тока в цепи от времени, показанными на рис. 153.

Рассмотрим теперь превращения различных форм энергии в данном процессе. Понятно, что при-

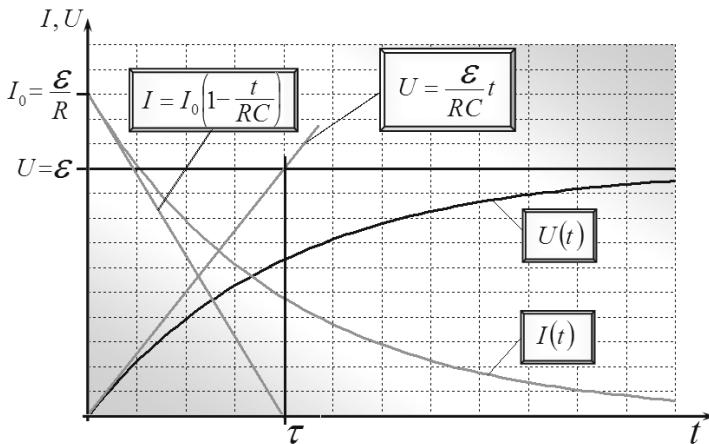


Рис. 153

чиной тока в цепи и, как следствие, зарядки конденсатора являются сторонние силы источника.

На первый взгляд, энергетический баланс включает определенное противоречие: если источник сообщил конденсатору заряд  $q$ , то сторонние силы совершили при этом работу  $A_0 = q\epsilon$ , при этом энергия конденсатора стала равной  $W = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\epsilon}{2}$ , что в два раза меньше работы, совершенной источником. Противоречие исчезает, если принять во внимание, что в процессе зарядки по цепи течет электрический ток, поэтому на резисторе выделяется некоторое количество теплоты, то есть часть энергии источника переходит в тепловую. Покажем, что качественные рассуждения верны и количественно.

Мысленно разобьем время зарядки на малые промежутки  $\Delta t_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots$ ). Перепишем уравнение (1) в виде

$$\varepsilon = IR + \frac{q}{C} \quad (7)$$

и умножим его на величину малой порции заряда, переносимого за малый промежуток времени  $\Delta t_i$ ,  $\Delta q_i = I_i \Delta t_i$ . В результате получим

$$\varepsilon \Delta q_i = I_i R \Delta q_i + \frac{q_i}{C} \Delta q_i . \quad (8)$$

Здесь обозначено  $q_i$  – заряд конденсатора перед перенесением рассматриваемой порции заряда. Каждый член полученного уравнения имеет явный физический смысл:

$\varepsilon \Delta q_i = \delta A$  – работа сторонних сил по перемещению порции заряда  $\Delta q_i$ ;

$$\frac{q_i}{C} \Delta q_i = \Delta \left( \frac{q^2}{2C} \right) = \Delta W_c \quad \text{– увеличение энергии конденсатора при увеличении его заряда на } \Delta q_i ;$$

$IR \Delta q_i = I^2 R \Delta t_i = \delta Q$  – количество теплоты, выделившееся на резисторе при протекании порции заряда  $\Delta q_i$ . Таким образом, закон сохранения энергии, выражаемый уравнением баланса (6) для малого промежутка времени, оказывается выполненным, следовательно, он будет выполнен и для всего процесса зарядки. Просуммируем слагаемые выражения (8) по всем промежуткам времени зарядки, в результате чего получим:

$\sum_i \varepsilon \Delta q_i = \varepsilon \bar{q} = A$  – полная работа сторонних сил по перенесению электрического заряда, равного стационарному заряду конденсатора;

$$\sum_i \frac{q_i}{C} \Delta q_i = \frac{\bar{q}^2}{2C} = \frac{\bar{q} \varepsilon}{2} = \frac{C \varepsilon^2}{2} \quad \text{– энергия заряженного конденсатора;}$$

наконец,  $\sum_i I_i R \Delta q_i = \sum_i I_i^2 R \Delta t_i$  – количество выделившейся на резисторе теплоты.

Принимая во внимание уравнение (6) и формулу (М10) из «математического введения», последнюю сумму можно выразить в виде

$$Q = R \sum_i I_i^2 \Delta t_i = R \frac{1}{2} I_0^2 \tau = R \frac{1}{2} \left( \frac{\epsilon}{R} \right)^2 \cdot RC = \frac{C \epsilon^2}{2}. \quad (9)$$

Эту же сумму можно вычислить и на основании физических законов. Количество выделившейся теплоты равно работе сил электрического поля по преодолению сопротивления резистора. Для малой порции протекающего заряда  $\Delta q$  эта работа равна  $\delta A = U_R \Delta q$ , где  $U_R = IR$  – напряжение на резисторе. Это напряжение не является постоянным в процессе зарядки, его изменение описывается уравнением (1). Построим график зависимости напряжения на резисторе от заряда конденсатора (рис. 154), который является прямой линией. Заметив, что

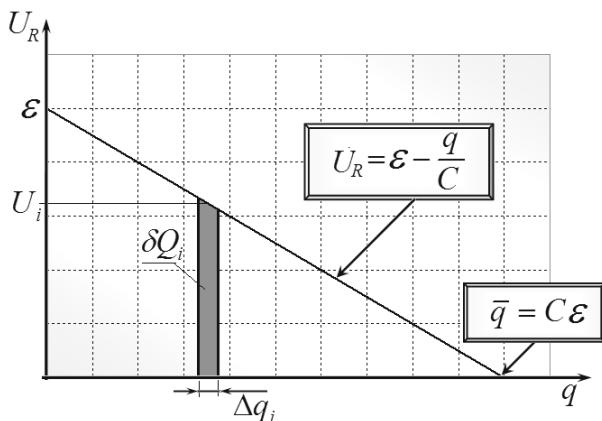


Рис. 154

площадь под графиком равна количеству выделившейся теплоты, получим, что

$$Q = \frac{1}{2} C \varepsilon \cdot \varepsilon = \frac{C \varepsilon^2}{2} = \frac{q_0^2}{2C}.$$

Таким образом, энергетический баланс полностью сходится и для всего процесса целиком: работа, совершенная источником, равна сумме энергии конденсатора и количества выделившейся теплоты  $A = W_c + Q$ . Схематически преобразование энергии в этом процессе показано на рис. 155.

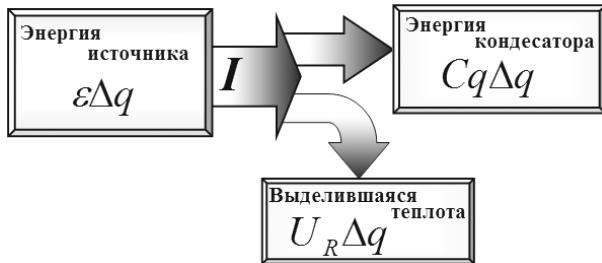


Рис. 155

Интересно заметить, что количество теплоты, выделяющееся при зарядке, не зависит от сопротивления цепи и в точности равно энергии конденсатора. То есть половина энергии источника переходит в энергию электрического поля, а вторая – в тепловую энергию, выделяющуюся в цепи: природа требует своеобразный пятидесятипроцентный налог в виде тепловых потерь, независимо от сопротивления цепи и емкости конденсатора\*.

Построим гидравлический аналог рассмотренного процесса зарядки конденсатора.

\* Но эти параметры цепи определяют время процесса.

Итак, нам необходимо закачать с помощью поршневого насоса вязкую жидкость в вертикальный цилиндрический сосуд (рис. 156).

Запишем уравнение, описывающее движение жидкости по трубке, соединяющей насос с сосудом:

$$p_0 - p = \beta J, \quad (1^*)$$

где  $p = \rho g H = \frac{\rho g}{S} V$  – гидростатическое давление столба жидкости в сосуде,  $V$  – объем жидкости, закачанной в сосуд. Если к этому уравнению добавить выражение для расхода жидкости  $J = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ , то ... на этом изложение можно закончить, так как опять придется переписать все слова и формулы, описывающие заряд конденсатора! Предлагаем это проделать в качестве упражнения для самостоятельной работы.

Рассмотрим только преобразование энергии в этом процессе:

– переписываем уравнение (1\*) в виде

$$p_0 = \frac{\rho g}{S} V + \beta J; \quad (7^*)$$

– мысленно разбиваем процесс на малые промежутки времени  $\Delta t_i$ ;

– умножаем уравнение (7\*) на малый объем жидкости  $\Delta V_i$  и суммируем:

$$\sum_i p_0 \Delta V_i = \sum_i \frac{\rho g}{S} V_i \Delta V_i + \sum_i \beta J_i \Delta V_i; \quad (8^*)$$

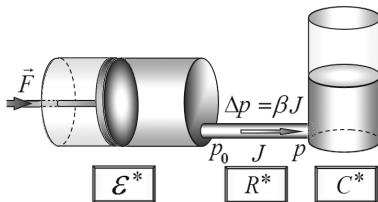


Рис. 156

– вычисляем суммы и даем им физическую интерпретацию ( $V$  – конечный объем жидкости в сосуде,  $H$  – высота уровня этой жидкости):

$$\sum_i p_0 \Delta V_i = p_0 V \text{ – работа, совершенная насосом;}$$

$\sum_i \frac{\rho g}{S} V_i \Delta V_i = \frac{\rho g}{2S} V^2 = \rho g S \frac{H^2}{2}$  – потенциальная энергия жидкости в сосуде;

$\sum_i \beta J_i \Delta V_i = \frac{\rho g}{2S} V^2$  – количество теплоты, выделившейся при протекании жидкости по соединительной трубке;

– делаем выводы: закон сохранения энергии выполняется, причем половина энергии, переданной насосом, запасается в сосуде, половина теряется в виде теплоты.

Видимо, основной результат решения задачи о заполнении сосуда жидкостью служит обоснованием финансовой политики многих государств. Покупая бензин на заправке, вы платите примерно в два раза больше, чем реальная стоимость бензина, вторая половина вашей платы – государственный налог!

#### 5.2.4. Перераспределение зарядов на конденсаторах

Рассмотрим еще один интересный и поучительный пример. Пусть конденсатор емкостью  $C$  (будем называть его первым), имеющий заряд  $q_0$ , подключается ко второму такому же конденсатору (рис. 157). После установления равновесия напряжения

на конденсаторах станут равными, поэтому электрические заряды распределяются между ними поровну. При этом суммарная энергия конденсаторов уменьшается. Действительно, начальная энергия заряженного конденсатора равна

$$W_0 = \frac{q_0^2}{2C}. \quad (1)$$

После перезарядки суммарная энергия конденсаторов станет равной

$$W_1 = 2 \cdot \frac{1}{2C} \left( \frac{q_0}{2} \right)^2 = \frac{q_0^2}{4C}, \quad (2)$$

то есть уменьшится в два раза. Понятно, что потери энергии электрического поля обусловлены выделением теплоты при протекании электрического тока в ходе перераспределения зарядов. Таким образом, количество выделившейся теплоты равно уменьшению энергии конденсаторов

$$Q = W_0 - W_1 = \frac{q_0^2}{4C},$$

что составляет ровно половину начальной энергии.

Отметим, что величина этих потерь не зависит от сопротивления цепи, соединяющей конденсаторы, – это сопротивление определяет длительность процесса перераспределения. Опять мы встречаемся с «обязательным» тепловым налогом, который и в рассмотренном случае также составляет 50%. При неравных емкостях конденсаторов процентная ставка налога будет иной.

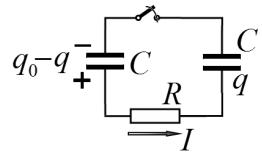


Рис. 157

Пусть по цепи протек заряд  $q$ , тогда, используя свойство потенциальности электрического поля (сумма напряжений на всех элементах замкнутого контура равна нулю, обход совершают против часовой стрелки, по направлению тока), запишем уравнение

$$-\frac{q_0 - q}{C} + IR + \frac{q}{C} = 0. \quad (3)$$

И представим его в виде

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = -\frac{2}{RC} \left( q - \frac{q_0}{2} \right). \quad (4)$$

На основании этого уравнения заключаем, что, во-первых, стационарное значение заряда на втором конденсаторе равно  $\bar{q} = \frac{q_0}{2}$  (т.е. исходный заряд поровну разделится между одинаковыми конденсаторами); во-вторых, характерное время переходного распределения зарядов равно\*  $\tau = \frac{1}{2} RC$ .

Дальнейшая процедура узнаваема:

– переписываем уравнение (3) в виде

$$\frac{q_0 - q}{C} = \frac{q}{C} + IR; \quad (5)$$

– разбиваем процесс на малые временные участки  $\Delta t_i$ , для каждого из них записываем уравнение (5), умножаем его на величину  $\Delta q_i$  и суммируем:

$$\sum_i \frac{q_0 - q_i}{C} \Delta q_i = \sum_i \frac{q_i}{C} \Delta q_i + \sum_i I_i R \Delta q_i; \quad (6)$$

\* Обратите внимание, что конденсаторы в цепи соединены последовательно, поэтому суммарная емкость цепи равна  $\frac{C}{2}$ . Следовательно, формула для характерного времени  $RC$  верна и в этом случае.

— указываем смысл каждой суммы: первая — энергия, отданная первым конденсатором; вторая — энергия, полученная вторым конденсатором; третья — теплота, выделившаяся на резисторе при протекании тока.

Уравнение (6) показывает выполнение закона сохранения энергии\*.

Для вычисления сумм в выражении (6) воспользуемся их геометрическими иллюстрациями. Построим графики зависимостей напряжений на первом и втором конденсаторах  $U_1 = \frac{q_0 - q}{C}$ ,  $U_2 = \frac{q}{C}$  от заряда, протекшего через резистор (рис. 158).

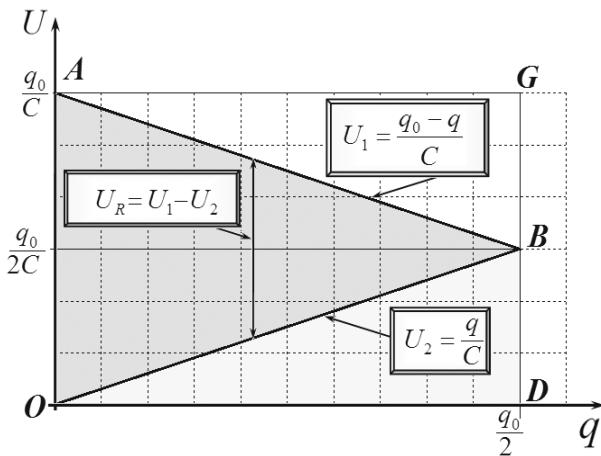


Рис. 158

---

\* Мы не сомневаемся в универсальной справедливости этого закона! Точнее надо сказать: уравнение (6) доказывает, что начальная энергия заряженного конденсатора частично перешла в энергию второго конденсатора, частично в тепловую, и никаких новых видов энергии, никаких иных каналов ее передачи в данной системе не существует!

Эти графики являются прямыми линиями, а площади под ними численно равны соответствующим суммам.

Таким образом, энергия, отданная первым конденсатором, численно равна площади трапеции  $OABD$ . Энергия, полученная вторым конденсатором, равна площади треугольника  $OBD$ . Теперь внимание! Разность между напряжениями на конденсаторах равна напряжению на резисторе. Следовательно, площадь треугольника  $OAB$  равна количеству теплоты, выделившейся на резисторе. Как следует из построенной диаграммы, количество выделившейся теплоты в два раза больше энергии, переданной второму конденсатору («тепловой налог» возрастает до 67%!).

Добавим, что площадь прямоугольника  $OAGD$  равна начальной энергии первого конденсатора, а площадь треугольника  $AGD$  – его конечной энергии. Таким образом, данная диаграмма количественно иллюстрирует баланс энергий в рассматриваемом процессе!

Может быть, длительное алгебраическое вычисление сумм было излишне, ведь для этого достаточно вспомнить формулу для площади треугольника.

Рассмотренная электрическая задача имеет очень простую гидростатическую аналогию. Пусть два одинаковых цилиндрических сосуда соединены в нижней части

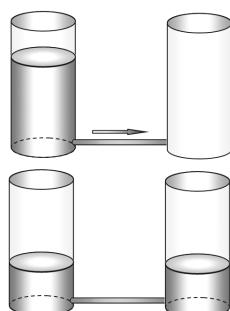


Рис. 159

трубкой (рис. 159). Первоначально в одном сосуде находится жидкость, высоту уровня которой обозначим  $h_0$ . Эта жидкость обладает потенциальной энергией в поле тяжести, равной

$$W_0 = mgh_c = v g \frac{h_0}{2},$$

где  $h_c = \frac{h_0}{2}$  – высота центра масс жидкости,  $m$  – ее масса. Если жидкость начнет перетекать во второй сосуд, то после установления равновесия уровни жидкости в сосудах сравняются на высоте  $\frac{h_0}{2}$ , следовательно, центр масс жидкости окажется на высоте  $h_{c1} = \frac{h_0}{4}$ . При этом потенциальная энергия

жидкости станет равной  $W_1 = mgh_{c1} = \frac{mg \cdot h_0}{4}$ , то есть уменьшится в два раза. Потери энергии и в данном случае связаны с выделением теплоты при перетекании жидкости, связанной с силами вязкого трения (опять «тепловой налог»!). Если бы эти силы полностью отсутствовали\*, то уровни жидкости колебались бы бесконечно долго.

Подумайте: а что будет с зарядом конденсаторов, если они изготовлены из сверхпроводников и соединены сверхпроводящими проводами?

#### Задания для самостоятельной работы

1. Найдите изменение энергии поля, если конденсаторы в рассмотренной задаче имеют различные емкости.

2. Постройте математическую модель, описывающую процесс перетекания жидкости из сосуда в сосуд.

---

\* А такая жидкость реально существует – жидкий гелий, обладающий свойством сверхтекучести.

### **5.2.5. Изменение энергии конденсатора при изменении его емкости**

Энергия конденсатора зависит от его емкости. Поэтому при изменении емкости заряженного конденсатора будет изменяться его энергия. Запишем цепочку формул, определяющих энергию конденсатора

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2}. \quad (1)$$

Попытаемся дать в общем виде ответ на вопрос: «Как зависит энергия конденсатора от его емкости?» Согласно первой формуле – прямо пропорционально, согласно второй – обратно пропорционально, согласно третьей – вообще не зависит?! Конечно, поставленный вопрос некорректен\*, потому что энергия конденсатора зависит еще и от его заряда, причем во всех случаях прямо пропорционально квадрату заряда. Говорить же об изменении энергии конденсатора при изменении его емкости следует только при других заданных условиях: остается ли постоянным заряд конденсатора, остается ли неизменным напряжение на конденсаторе?

Если изменение емкости происходит при неизменном заряде конденсатора (при этом изменяется

---

\* Аналогичный вопрос можно задать по поводу зависимости мощности теплоты, выделяющейся на участке цепи при протекании электрического тока. Закон Джоуля-Ленца можно представить в трех формах  $P = I^2R = \frac{U^2}{R} = IU$ , поэтому одинаково обоснованно можно утверждать, что эта мощность: а) пропорциональна сопротивлению участка; б) обратно пропорциональна сопротивлению; в) от сопротивления не зависит!

его напряжение), то для расчета энергии следует использовать формулу  $W = \frac{q^2}{2C}$ , которая указывает, что увеличение емкости приводит к уменьшению энергии и, наоборот, уменьшение емкости приводит к увеличению энергии.

Если же изменение емкости происходит при постоянном напряжении (например, когда конденсатор подключен к источнику постоянной ЭДС), то для расчета энергии и ее изменения нужно использовать выражение  $W = \frac{CU^2}{2}$ . В этом случае увеличение емкости приводит к увеличению энергии.

Рассмотрим теперь те процессы, при которых такие изменения могут происходить, и проанализируем баланс энергии в этих процессах. Для упрощения расчетов и наглядности изложения возьмем плоский воздушный конденсатор с параллельными пластинами площади  $S$ . Изменение емкости конденсатора будем проводить, изменяя расстояние между пластинами. При этом будем считать, что размеры пластин значительно превышают расстояние между ними, что позволяет пренебречь краевыми эффектами, то есть считать электрическое поле  $\vec{E}$  между пластинами однородным (рис. 160).

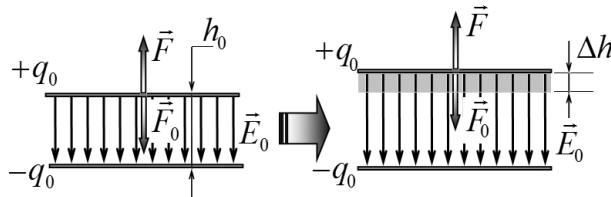


Рис. 160

Электрическая емкость такого конденсатора равна

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{h}, \quad (2)$$

где  $h$  – расстояние между пластинами. Из формулы (2) следует, что увеличение расстояния между пластинами приводит к уменьшению его емкости.

Сначала рассмотрим случай, когда заряд конденсатора остается неизменным, т.е. когда конденсатор зарядили и отключили от источника.

Итак, конденсатор заряжен, заряды каждой пластины одинаковы по модулю и равны  $q_0$  и противоположны по знаку. Мысленно раздвинем пластины. При этом емкость конденсатора уменьшилась, следовательно, его энергия возросла. Качественно итог понятен: пластины имеют заряды противоположного знака, следовательно, они притягиваются друг к другу. Чтобы раздвинуть пластины, необходимо приложить некоторую внешнюю силу  $\vec{F}$  и совершить работу. Эта работа и будет равна изменению энергии конденсатора.

Облачим теперь эти качественные рассуждения в строгие математические расчеты.

Пусть начальное расстояние между пластинами равно  $h_0$ . В этом случае энергия конденсатора равна

$$W_0 = \frac{q_0^2}{2C_0} = h_0 \frac{q_0^2}{2\epsilon_0 S}. \quad (3)$$

Найдем силу притяжения между пластинами. Сила, действующая на одну пластину, равна

$$F_0 = q_0 E', \quad (4)$$

где  $q_0$  – заряд этой пластины,  $E'$  – напряженность поля, создаваемого зарядами другой пластины. Понятно, что напряженность этого поля в два раза меньше напряженности суммарного поля  $E_0$  между пластинами, так как последнее создается зарядами обеих пластин. Пренебрегая краевыми эффектами (то есть считая пластину бесконечной), запишем выражение для напряженности поля

$$E' = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{q_0}{2\epsilon_0 S}, \quad (5)$$

где  $\sigma = \frac{q_0}{S}$  – поверхностная плотность заряда на каждой пластине. Таким образом, сила, действующая на одну пластину, равна

$$F_0 = \frac{q_0^2}{2\epsilon_0 S}. \quad (6)$$

Отметим, что в данном случае эта сила постоянна и от расстояния между пластинами не зависит\*.

Заметим, что формально эту формулу можно получить гораздо проще, используя выражение (1) и известную связь между силой и потенциальной энергией  $F = -W'$  (сила равна производной от потенциальной энергии, взятой с противоположным знаком).

\* К сожалению, иногда для вычисления силы взаимодействия между заряженными телами (нематериальными точками) применяют закон Кулона. Так, при его использовании в данном случае получают результат  $F = \frac{q_0^2}{4\pi\epsilon_0 h^2}$ , который даже качественно неверен, даже вид зависимости от расстояния не тот!

Впрочем, эту связь, правда, в обратном направлении мы использовали в одном из выводов формулы для энергии заряженного конденсатора.

Формуле (6) можно придать иной вид, если выразить силу через напряженность электрического поля  $E_0 = 2E'$  с помощью формулы (5)

$$F_0 = \frac{q_0^2}{2\epsilon_0 S} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} S . \quad (7)$$

Интересно отметить, что давление электрического поля на проводящую пластину в точности равно объемной плотности энергии поля

$$p = \frac{F}{S} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = w . \quad (8)$$

Причем этот вывод справедлив для проводника любой формы: давление электрического поля на проводник равно плотности энергии электрического поля вблизи поверхности проводника.

Еще один аргумент в пользу этого утверждения: давление и объемная плотность энергии имеют одинаковую размерность  $Pa = \frac{H}{m^2} = \frac{Дж}{м^3}$ . Только не надо измерять объемную плотность энергии в паскалях!

При перемещении пластины (увеличении расстояния) на величину  $\Delta h$  эта внешняя сила совершил положительную работу

$$A = F_0 \Delta h = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} S \Delta h = \frac{q_0^2}{2\epsilon_0 S} \Delta h . \quad (9)$$

Эта работа пойдет на увеличение энергии конденсатора (рис. 161), которая станет равной

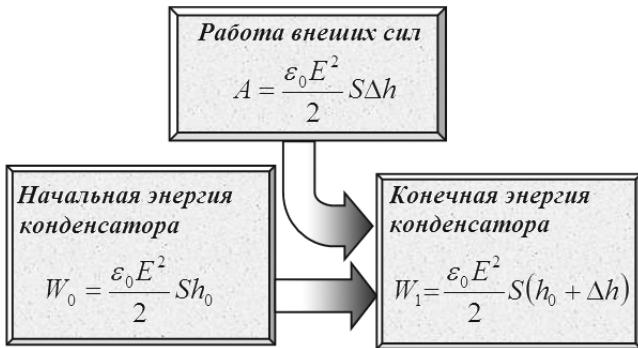


Рис. 161

$$W_1 = W_0 + A = (h_0 + \Delta h) \frac{q_0^2}{2\epsilon_0 S} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} S(h_0 + \Delta h). \quad (10)$$

Понятно, что увеличение энергии конденсатора равно увеличению энергии электрического поля – увеличился объем, занятый полем, поэтому работа также может быть представлена в виде  $A = \Delta W = w\Delta V$ .

Таким образом, мы показали, что и в этом случае энергетический баланс сходится.

Рассмотрим теперь этот же процесс при условии, что **обкладки конденсатора подключены к источнику постоянной ЭДС** (рис. 162).

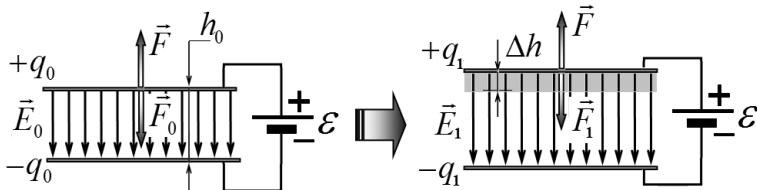


Рис. 162

Теперь при изменении расстояния между пластинами остается неизменным напряжение  $U = \epsilon$

между ними. Следовательно, для расчета энергии конденсатора следует пользоваться выражением

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{\epsilon_0 S U^2}{h} \frac{U^2}{2}. \quad (11)$$

Как и в рассмотренном ранее примере, увеличение расстояния между пластинами приводит к уменьшению емкости конденсатора и, как следствие, к **уменьшению** энергии конденсатора. В этом проявляется определенный парадокс: разноименно заряженные пластины **притягиваются**, при увеличении расстояния между ними внешняя сила совершают положительную работу, однако при этом энергия конденсатора не растет, а уменьшается! Действительно, изменение энергии конденсатора в этом случае равно

$$\Delta W_c = W_1 - W_0 = \frac{U^2}{2} \left( \frac{\epsilon_0 S}{h_1} - \frac{\epsilon_0 S}{h_0} \right) = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2} \left( \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_0} \right), \quad (12)$$

а так как  $h_1 > h_0$ , то  $\Delta W_c < 0$ .

Таким образом, данная проблема требует более тщательного анализа.

Сомнений в выполнимости закона сохранения энергии быть не должно, только надо его применять правильно! Энергия сохраняется в замкнутой системе, а конденсатор таковой не является: он же подключен к источнику ЭДС. При увеличении расстояния между пластинами емкость конденсатора уменьшается, поэтому уменьшается заряд на пластинах, которому некуда деться, кроме как вернуться назад, в источник. Их возвращению препятствуют сторонние силы (вспомните: сторонние силы источника стремятся «вытолкнуть» заряды

из источника), поэтому при возвращении зарядов энергия источника повышается. Таким образом, при раздвигании пластин конденсатора происходит подзарядка источника, а энергия, переданная посредством совершенной работы, переходит в энергию источника. Кроме того, энергия поля в конденсаторе также уменьшается, поэтому эта «потеря» энергии также переходит в источник. Иными словами, при перемещении пластины внешняя сила не только совершает работу по подзарядке источника, но и «заставляет» электрическое поле вернуть часть своей энергии. Схематически потоки энергии в этом процессе показаны на рис. 163.

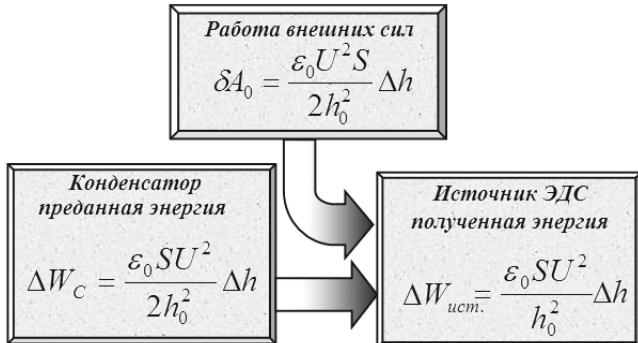


Рис. 163

Подтвердим проведенные рассуждения расчетами энергетического баланса и покажем, что он точно выполняется. Силу притяжения между пластинами выражим через постоянное напряжение между пластинами:

$$F = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} S = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{U}{h} \right)^2 S = \frac{\epsilon_0 U^2 S}{2 h^2}. \quad (13)$$

В данном случае эта сила зависит от расстояния между пластинами. Поэтому для расчета работы необходимо разбить процесс движения пластины на малые участки и затем просуммировать работы на этих участках. Чтобы избежать этой громоздкой математической процедуры, будем считать, что смещение  $\Delta h$  мало настолько, что можно пре-небречь изменением силы притяжения. В этом приближении работа внешней силы будет равна

$$\delta A_0 = F\Delta h = \frac{\epsilon_0 U^2 S}{2h_0^2} \Delta h. \quad (14)$$

Преобразуем также выражение для изменения энергии конденсатора с учетом малости смещения. Запишем  $h_1 = h_0 + \Delta h$  и подставим в формулу (12):

$$\begin{aligned} \Delta W_C &= W_1 - W_0 = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2} \left( \frac{1}{h_0 + \Delta h} - \frac{1}{h_0} \right) = \\ &= -\frac{\epsilon_0 S U^2}{2} \frac{\Delta h}{h_0 (h_0 + \Delta h)} \approx -\frac{\epsilon_0 S U^2}{2} \frac{\Delta h}{h_0^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

Наконец, найдем работу по зарядке источника, которая равна произведению «вернувшегося» заряда на ЭДС источника (которая равна напряжению конденсатора):

$$\begin{aligned} \Delta W_{ucm.} &= U(q_0 - q_1) = U(C_0 U - C_1 U) = U^2 \left( \frac{\epsilon_0 S}{h_0} - \frac{\epsilon_0 S}{h_0 + \Delta h} \right) = \\ &= \epsilon_0 S U^2 \left( \frac{1}{h_0} - \frac{1}{h_0 + \Delta h} \right) \approx \frac{\epsilon_0 S U^2 \Delta h}{h_0^2}. \end{aligned}$$

Итак, проведенный расчет полностью подтверждает сделанные ранее заключения: увеличение энергии источника (что равносильно – работа по его подзарядке) равно сумме работы внешней силы и уменьшения энергии поля конденсатора

$$\Delta W_{usm} = \delta A_0 + (-\Delta W_c).$$

Интересна роль внешней силы, раздвигающей пластины конденсатора: она и сама работу совершает, и заставляет работать конденсатор!

### Задание для самостоятельной работы

*Докажите, что в рассмотренном процессе энергетический баланс выполняется при любом (не малом) смещении пластины. В качестве подсказки: обратите внимание, что сила притяжения между пластинами в данном случае зависит от расстояния между ними так же, как в законе Кулона и законе всемирного тяготения!*

Для того чтобы построить гидродинамические аналогии рассмотренных процессов изменения емкости заряженных конденсаторов, нам необходимо сконструировать аналог переменного конденсатора. Все рассмотренные ранее «гидравлические конденсаторы» являлись вертикальными сосудами, причем их «емкость» была пропорциональна площади дна сосуда. Следовательно, аналогом переменного конденсатора может служить сосуд, одна из стенок которого подвижна.\* При уменьшении площади сосуда уменьшается его «емкость». В рассмотренных электростатических примерах, наоборот, уменьшению емкости конденсатора соответствует *увеличение* расстояния между его пластинами.

Пусть теперь в нашем сосуде находится некоторый объем жидкости, уровень которой равен  $h_0$

---

\* Придется заменить круговой цилиндр на параллелепипед – аквариум с подвижной стенкой, потому что у цилиндра трудно найти «одну из стенок»!

(рис. 164). Чтобы сместить подвижную стенку, к ней необходимо приложить некоторую внешнюю силу  $F$ . Если объем жидкости в сосуде сохраняется, то при смещении стенки ее уровень повышается, следовательно, увеличивается ее энергия.

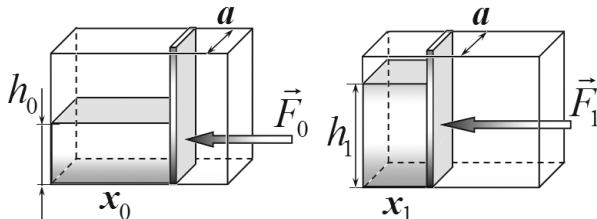


Рис. 164

Сравните: при неизменном объеме жидкости (*электрическом заряде*) уменьшение площади сосуда (*емкости конденсатора*) под действием внешней силы приводит к возрастанию уровня жидкости (*разности потенциалов*) и гидростатической энергии жидкости (*электростатической энергии поля*).

Можно ожидать, что увеличение потенциальной энергии жидкости равно работе внешней силы. Найдем зависимость этой силы от расстояния  $x$  между подвижной и неподвижной стенками. Эта сила равна произведению среднего давления жидкости на подвижную стенку  $\langle p \rangle = \frac{1}{2} \rho g h$ , на площадь соприкосновения ее с жидкостью  $ah$ . Кроме того, необходимо использовать условие постоянства объема жидкости  $hax = V \Rightarrow h = \frac{V}{xa}$ . В итоге, для силы получим следующее выражение:

$$F = ha \cdot \langle p \rangle = ha \rho g \frac{h}{2} = a \rho g \frac{1}{2} \left( \frac{V}{xa} \right)^2 = \frac{\rho g V^2}{2a} \frac{1}{x^2}. \quad (16)$$

Эта сила переменна, поэтому для вычисления работы необходимо либо рассматривать малые смещения, либо использовать аналогию с законом Кулона: ведь и здесь сила обратно пропорциональна расстоянию!

Рекомендуем провести расчет баланса энергий самостоятельно.

Если конденсатор подключен к источнику постоянной ЭДС, то напряжение между его обкладками поддерживается постоянным. В гидростатической аналогии необходимо в этом случае говорить о постоянной высоте уровня жидкости в сосуде. В качестве устройства, поддерживающего постоянный уровень, следует использовать наш гидравлический аналог ЭДС – насос, поддерживающий постоянное давление. При смещении подвижной стенки в этом случае внешняя сила также совершает положительную работу, но потенциальная энергия жидкости в сосуде уменьшается, так как уменьшается ее объем при неизменной высоте уровня. Под действием этой внешней силы часть жидкости из сосуда заталкивается в резиновую грушу, при этом энергия последней возрастает. Увеличение ее энергии равно сумме работы внешней силы и уменьшения потенциальной энергии жидкости в сосуде (рис. 165).

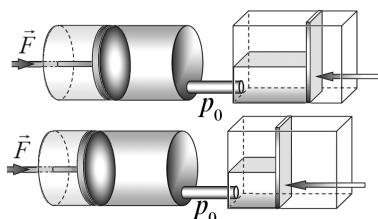


Рис. 165

Сравниваем: при постоянном уровне жидкости в сосуде (*напряжении конденсатора*) уменьшение площади дна (*емкости конденсатора*) под действием внешней силы приводит к возвращению части жидкости (*электрического заряда*) в резиновый сосуд, поддерживаемый при постоянном давлении (*источник постоянной ЭДС*). При этом увеличение энергии жидкости в резиновом сосуде постоянного давления (*источника ЭДС*) равно сумме работы внешней силы и уменьшения потенциальной энергии жидкости в сосуде (*энергии конденсатора*).

Также рекомендуем самостоятельно провести расчет баланса энергии в этом случае – он сходится! Это задание проще, так как в этом случае внешняя сила должна быть постоянной.

Электроемкость конденсатора зависит также от диэлектрической проницаемости вещества, находящегося между обкладками. Поэтому емкость конденсатора можно изменять, меняя вещество, находящееся между обкладками. Пусть, например, между обкладками плоского конденсатора находится диэлектрическая пластиинка. Если конденсатор заряжен, то для извлечения пластиинки необходимо приложить к ней внешнюю силу и совершить положительную работу. Механизм возникновения силы, действующей на пластиинку со стороны электрического поля, проиллюстрирован на рис. 166. При ее смещении изначально однородное распределение зарядов на

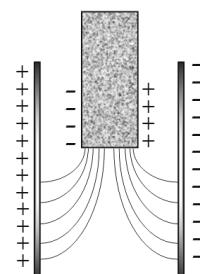


Рис. 166

обкладках конденсатора и поляризационных зарядов на пластинке искажается. Как следствие этого перераспределения зарядов, искажается и электрическое поле, поэтому возникают силы, стремящиеся втянуть пластинку внутрь конденсатора.

Расчет этих сил сложен, но энергетические характеристики происходящих процессов могут быть найдены без особого труда. С формальной точки зрения, не важно, чем вызваны изменения емкости конденсатора, поэтому можно воспользоваться всеми рассуждениями и выводами предыдущего раздела, как для случая изолированного конденсатора (при сохранении заряда), так и для конденсатора, подключенного к источнику постоянной ЭДС.

### **5.3. Энергия электрического тока. Энергия магнитного поля**

То, что электрический ток обладает энергией, не вызывает сомнений: он способен разогреть воду в чайнике, осветить улицы, двигать электропоезда и т.д. Настало время разобраться, что это за энергия и где она локализована.

Из-за чрезвычайно малой массы носителей электрического тока (например, электронов в металлах) и малой скорости их направленного движения энергия электрического тока не может быть связана с кинетической энергией носителей тока.

Нельзя также связать энергию тока с потенциальной энергией взаимодействия зарядов с элек-

трическим полем. Мы показали, что в цепи постоянного тока уменьшение этой энергии в точности равно количеству теплоты, выделяющейся в проводнике.

При изменении электрического тока изменяется создаваемое им магнитное поле, следовательно, изменяется и его энергия. Так как других видов энергии, участвующих в процессе протекания тока, нет, то следует предположить, что фактически энергия электрического тока есть энергия создаваемого им магнитного поля. Наше дальнейшее рассмотрение призвано доказать (или показать) справедливость этого предположения.

Рассмотрим с энергетической точки зрения переходные процессы установления тока. Пусть катушка, обладающая индуктивностью  $L$ , подключается к источнику тока, ЭДС которого равна  $\varepsilon$  (рис. 167). Полное электрическое сопротивление цепи обозначим  $R$ .

Строго говоря, индуктивностью обладают все элементы цепи (в том числе соединяющие провода и источник), поэтому под  $L$  следует понимать полную индуктивность цепи.

При замыкании цепи под действием источника тока в проводниках возникает электрическое поле, приводящее к появлению электрического тока. Этот ток создает магнитное поле. При изменении

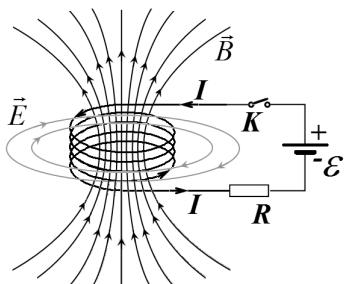


Рис. 167

силы электрического тока магнитное поле также изменяется, что приводит к появлению вихревого электрического поля, которое в свою очередь влияет на силу электрического тока в цепи, в соответствии с правилом Ленца, препятствуя нарастанию тока. Тем самым источник должен совершать дополнительную работу по преодолению сил со стороны вихревого электрического поля. Эта работа увеличивает энергию электромагнитного поля. Таким образом, изменяющийся электрический ток влияет на самого себя – мы очередной раз встречаемся с «зацикленной» математической задачей: «следствие» (магнитное поле) влияет на «причину» (электрический ток).

Для математического описания процессов в этой цепи можно воспользоваться законом Ома для полной цепи:

$$\varepsilon - L \frac{\Delta I}{\Delta t} = IR . \quad (1)$$

В этом уравнении учтено, что ЭДС в цепи создается не только источником, но и вихревым электрическим полем. Она выражена через индуктивность цепи.

Уравнение (1) позволяет получить зависимость силы тока в цепи от времени. Для этого запишем его в виде

$$L \frac{\Delta I}{\Delta t} = \varepsilon - IR . \quad (2)$$

С уравнением такого типа мы встречались неоднократно: оно описывает монотонный переход к стационарному режиму.

Для определения параметров этого перехода перепишем его в стандартной форме (М13)

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = -\frac{R}{L} \left( I - \frac{\varepsilon}{R} \right). \quad (3)$$

Из вида этого уравнения следует, что сила тока стремится к стационарному значению

$$\bar{I} = \frac{\varepsilon}{R}. \quad (4)$$

В стационарном режиме, когда сила тока постоянная, ЭДС самоиндукции равна нулю, в этом режиме соленоид не влияет на протекание тока в цепи, чем и объясняется формула (4). Характерное время перехода к стационарному режиму также определяется уравнением (3)

$$\tau = \frac{L}{R}. \quad (5)$$

Для рассмотрения процессов преобразования энергии в данной цепи перепишем уравнение (2) в виде

$$\varepsilon = IR + L \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

и умножим его на малую величину заряда  $\Delta q = I \Delta t$ , протекающего по цепи за малый промежуток времени  $\Delta t$ :

$$\varepsilon \Delta q = IR \Delta q + L \frac{\Delta I}{\Delta t} \Delta q. \quad (4)$$

В этом уравнении каждое слагаемое имеет явный физический смысл:

- произведение  $\varepsilon \Delta q = \delta A$  – работа, совершенная источником по перемещению рассматриваемой порции заряда;

$-IR\Delta q = I^2R\Delta t = \delta Q$  – количество теплоты, выделившейся в цепи при перемещении этого же заряда.

Последнее слагаемое отлично от нуля, только если сила тока и создаваемое им магнитное поле изменяются. Следовательно, именно оно описывает изменение энергии магнитного поля  $\Delta W_M$ ! В этом случае смысл уравнения (4) становится очевидным и показан на рис. 168: работа, совершенная источником  $A_{usm}$ , равна сумме энергии созданного магнитного поля  $W_M$  и количества выделившейся теплоты  $Q$ .

Преобразуем последнее слагаемое к виду (с учетом неоднократно использованного нами соотношения для малых изменений  $\Delta(x^2) = 2x\Delta x$ ):

$$\Delta W_M = L \frac{\Delta I}{\Delta t} \Delta q = LI\Delta I = \Delta \left( \frac{LI^2}{2} \right).$$

Таким образом, энергия магнитного поля, созданного током в цепи, описывается формулой

$$W_M = \frac{LI^2}{2}, \quad (5)$$

где  $L$  – полная индуктивность цепи. Полученная формула справедлива для магнитного поля электрического тока в любой электрической цепи.

Рассмотрим теперь ее частный случай: когда в цепь включен соленоид – длинная катушка (рис. 169). В этом случае можно считать, что маг-

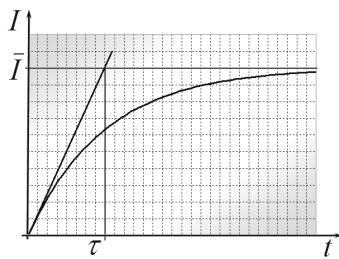


Рис. 168

нитное поле полностью локализовано внутри катушки и пренебречь индуктивностью остальных элементов цепи. Индуктивность такой катушки определяется формулой  $L = \mu_0 n^2 V$ , а индукция магнитного поля внутри нее равна  $B = \mu_0 n I$ . С учетом этих формул преобразуем выражение (5):

$$W_M = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu_0 n^2 VI^2}{2} = \frac{(\mu_0 n I)^2}{2\mu_0} V = \frac{B^2}{2\mu_0} V.$$

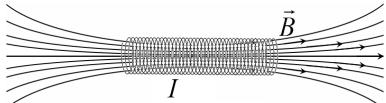


Рис. 169

Теперь энергия магнитного поля выражена через величину индукции и объем, занимаемый полем. В рассматриваемом случае магнитное поле является однородным, поэтому его энергия пропорциональна объему, следовательно, величина

$$w = \frac{W_M}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (6)$$

описывает энергию, приходящуюся на единицу объема, занимаемого однородным магнитным полем. Эта физическая величина называется **плотностью энергии магнитного поля**.

Если магнитное поле не является однородным, то под плотностью энергии следует понимать отношение энергии  $\Delta W$ , заключенной в малом объеме  $\Delta V$ , к величине этого объема

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta V}. \quad (7)$$

В этом случае плотность энергии можно рассматривать как «точечную» характеристику поля, определенную в каждой пространственной точ-

ке, со всеми оговорками, присущими подобным характеристикам, таким, как «обычная» плотность, плотность энергии электрического поля и т.д. При таком, более строгом, определении плотность энергии магнитного поля также определяется формулой (6).

Рассмотрим теперь процесс убывания электрического тока в соленоиде. Для этого представим следующую цепь (рис. 170). Пусть первоначально ключ замкнут в положении 1, после установления тока в цепи быстро перебросим ключ в положение 2, тем самым выключая источник ЭДС из контура. Ток в контуре не исчезнет мгновенно, так как не исчезнет мгновенно магнитное поле. При уменьшении индукции магнитного поля возникнет вихревое электрическое поле, ЭДС которого будет поддерживать в течение некоторого времени ток в контуре. Направление индукции магнитного поля не изменится при отключении источника, а направление вихревого электрического поля будет противоположно полю, возникающему при нарастании тока. Иными словами, при возрастании тока в цепи ЭДС самоиндукции препятствует нарастанию тока (направление поля – против направления тока), а при уменьшении тока ЭДС индукции препятствует уменьшению тока, поддерживает его (направления поля совпадает с на-

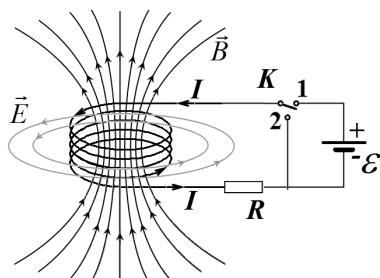


Рис. 170

при уменьшении индукции магнитного поля возникнет вихревое электрическое поле, ЭДС которого будет поддерживать в течение некоторого времени ток в контуре. Направление индукции магнитного поля не изменится при отключении источника, а направление вихревого электрического поля будет противоположно полю, возникающему при нарастании тока. Иными словами, при возрастании тока в цепи ЭДС самоиндукции препятствует нарастанию тока (направление поля – против направления тока), а при уменьшении тока ЭДС индукции препятствует уменьшению тока, поддерживает его (направления поля совпадает с на-

правлением тока). Для описания изменения тока в контуре запишем уравнение закона Ома для полной цепи  $\varepsilon_{si} = IR$  и выражение для ЭДС самоиндукции  $\varepsilon_{si} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$ . В результате получим уравнение, описывающее динамику изменения силы тока в контуре:

$$L \frac{\Delta I}{\Delta t} = -IR. \quad (8)$$

Мы получили уже неоднократно изученное нами уравнение затухания, в котором скорость изменения тока пропорциональна силе тока. В этом случае сила тока монотонно убывает от начального значения до нуля с характерным временем затухания

$$\tau = \frac{L}{R}, \quad (9)$$

которое совпадает со временем установления тока в этой же цепи.

Чтобы описать энергетические характеристики процесса, умножим уравнение (8) на величину малого заряда  $\Delta q_i$ , протекающего по цепи за малый промежуток времени  $\Delta t_i$ ,

$$L \frac{\Delta I_i}{\Delta t_i} \Delta q_i = -I_i R \Delta q_i \quad (10)$$

и просуммируем по всему времени исчезновения тока. Рассмотрим смысл получающихся сумм, для чего преобразуем их следующим образом: выражение в левой части

$$\sum_i L \frac{\Delta I_i}{\Delta t_i} \Delta q_i = \sum_i L \frac{\Delta q_i}{\Delta t_i} \Delta I_i = \sum_i L I_i \Delta I_i = L \sum_i \Delta \left( \frac{I_i^2}{2} \right) = -\frac{LI_0^2}{2}$$

есть изменение энергии магнитного поля. При вычислении последней суммы учтено, что началь-

ное значение силы тока равно  $I_0$ , а конечное равно нулю. Сумма в правой части уравнения (10) есть количество выделившейся теплоты, которое равно

$$\sum_i I_i R \Delta q_i = \sum_i I_i^2 R \Delta t_i = \frac{1}{2} I_0^2 R \tau = \frac{LI_0^2}{2},$$

что совпадает с начальной энергией магнитного поля. Таким образом, при исчезновении электрического тока энергия магнитного поля полностью выделяется в виде теплоты (переходит в тепловую энергию окружающей среды).

Если просто разомкнуть цепь, показанную на рис. 170, то исчезновение магнитного поля будет сопровождаться излучением электромагнитных волн, которые «унесут» энергию поля. Строго говоря, в любом случае при изменении тока происходит излучение электромагнитных волн, однако при медленном изменении энергия электромагнитных волн незначительна и ей можно пренебречь, как это было сделано при описании исчезновения и возникновения тока в цепи в рассмотренных примерах.

#### 5.4. Давление магнитного поля

Найдем силы, действующие на обмотку длинного соленоида с плотной намоткой, для которого можно пренебречь краевыми эффектами. Магнитное поле внутри такого соленоида является однородным, вектор индукции направлен вдоль оси соленоида, а его модуль равен

$$B_0 = \mu_0 n I, \quad (1)$$

где  $n = \frac{N}{l}$  – плотность намотки, равная числу витков на единицу длины соленоида,  $I$  – сила тока в обмотке. Вне соленоида магнитное поле отсутствует (рис. 171).

Выделим на поверхности соленоида малую площадку площадью  $\Delta S = ab$  (рис. 172а). Сила Ампера, действующая на участки витков обмотки, находящихся на выделенной площадке, направлена перпендикулярно направлению тока и вектору индукции поля. Модуль этой силы рассчитывается по формуле

$$F = IN_1 B_1 b, \quad (2)$$

где  $N_1 = na$  – число витков, лежащих на площадке,  $B_1$  – индукция магнитного поля, создаваемого всеми элементами соленоида, кроме лежащих на площадке.

Вспомните расчет силы, действующей на зарженную пластину конденсатора со стороны электрического поля. При выводе формулы для этой силы мы также учитывали напряженность поля, создаваемого всеми зарядами, кроме зарядов, находящихся на площадке. Мы показали, что напряженность этого поля в два раза меньше напряженности суммарного поля.

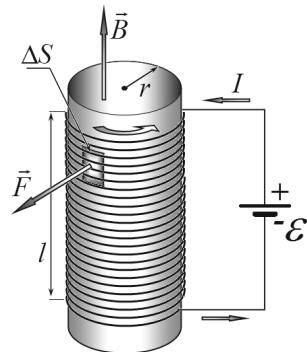


Рис. 171

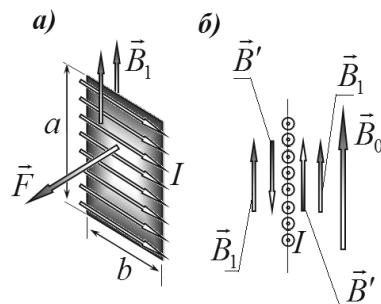


Рис. 172

Чтобы определить требуемую индукцию поля, представим суммарное поле в виде суммы полей:  $\vec{B}'$  – создаваемого током площадки и  $\vec{B}_1$  – создаваемого всеми остальными участками обмотки (рис. 172б). Внутри соленоида эти векторы направлены одинаково, и их сумма равна индукции суммарного поля  $B' + B_1 = B_0$ . Вне соленоида эти векторы направлены противоположно, и их сумма равна нулю  $B' - B_1 = 0$ . Из этих соотношений следует, что индукция поля, действующего на выделенную площадку, в два раза меньше индукции суммарного поля внутри соленоида  $B_1 = \frac{B_0}{2}$ . Таким образом, на выделенную площадку действует сила, которая рассчитывается по формулам

$$F = IN_1 B_1 b = In \frac{B_0}{2} b = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} ab = \frac{(\mu_0 nI)^2}{2\mu_0} ab = \frac{B_0^2}{2\mu_0} ab. \quad (3)$$

Найденная сила пропорциональна площади выделенной площадки и направлена перпендикулярно ей, поэтому можно говорить о давлении магнитного поля на поверхность соленоида. Существенно, что величина этого давления равна плотности энергии магнитного поля вблизи площадки

$$p = \frac{F}{\Delta S} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} = w_M, \quad (4)$$

аналогично тому, что давление электрического поля на поверхность проводника со стороны электрического поля равно плотности энергии этого поля.

## **5.5. Превращения энергии при изменении индуктивности цепи**

Энергия магнитного поля соленоида зависит от индуктивности последнего. Поэтому при изменении размеров соленоида или изменении материала сердечника в цепи происходят процессы, приводящие к изменению энергии магнитного поля. Для поддержания постоянного электрического тока в цепи, содержащей соленоид, присутствие источника ЭДС обязательно. Следовательно, нам необходимо принимать во внимание не только изменения магнитного поля соленоида, но и процессы, протекающие на других участках цепи, в том числе и источнике.

Рассмотрим подробно превращения энергии при изменении радиуса соленоида. Для наглядности можно считать, что обмотка соленоида изготовлена из упругой проволоки, способной растягиваться. Прежде всего обратим внимание, что на обмотку соленоида действуют силы со стороны магнитного поля, создаваемого электрическим током в самой обмотке.

Продолжим сравнение действия электрического поля в плоском конденсаторе и магнитного поля в соленоиде. Самое существенное отличие заключается в направлении действия силы (рис. 173). На обкладки конденсатора действует сила, направленная внутрь, в сторону части пространства, занятого полем. Если предоставить пластинам возможность двигаться, то сила их взаимодействия приведет

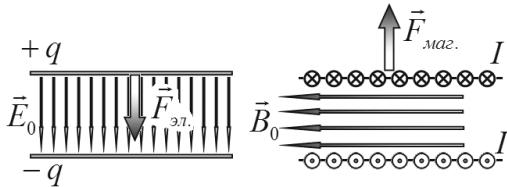


Рис. 173

к уменьшению расстояния между пластинаами, уменьшению объема, занятого полем, уменьшению суммарной энергии поля (при неизменном заряде на пластинах). При этом энергия электрического поля переходит в кинетическую энергию движущихся пластин.

На обмотку соленоида со стороны магнитного поля действует сила, направленная наружу, в сторону, противоположную части пространства, занятого полем. Если обмотка соленоида способна расширяться, то силы взаимодействия приведут к увеличению радиуса обмотки, увеличению объема, занятого полем, увеличению его суммарной энергии (при неизменной силе тока в обмотке). Таким образом, мы приходим к парадоксальному выводу: магнитное поле совершает работу, и при этом его энергия увеличивается – отсюда уже недалеко до «вечного двигателя»! Не стоит обольщаться этим «гениальным изобретением», достаточно вспомнить, что для поддержания тока в цепи в ней должен быть *источник*, обладающий энергией и отдающий ее в цепь. Кроме того, при движении заряженной пластины в электрическом поле распределение зарядов и их величина могут оставаться

*неизменными.* При движении проводника в магнитном поле распределение электрических токов и их величина *изменяются* вследствие явления электромагнитной индукции.

Рассмотрим, какие же изменения произойдут в рассматриваемой системе, показанной на рис. 171, при увеличении радиуса обмотки на малую величину  $\Delta r$  (то есть при увеличении площади сечения на величину  $\Delta S$  – рис. 174). Изменение силы тока в цепи описывается уравнением закона Ома для полной цепи

$$\varepsilon + \varepsilon_{ind} = IR, \quad (5)$$

где  $R$  – полное сопротивление цепи,  $\varepsilon_{ind}$  – ЭДС индукции, возникающей в соленоиде, которая определяется законом Фарадея

$$\varepsilon_{ind} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \quad (6)$$

где  $\Phi = NSB = nlS(\mu_0 nI) = \mu_0 n^2 lSI$  – магнитный поток через все  $N$  витков катушки ( $l$  – длина обмотки). На основании этих законов запишем уравнение

$$\varepsilon = IR + \frac{\Delta\Phi}{\Delta t},$$

которое, как обычно, умножим на малую величину заряда  $\Delta q$ , протекающего по цепи за малый промежуток времени  $\Delta t$ , в результате получим соотношение

$$\varepsilon\Delta q = IR\Delta q + \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\Delta q = IR\Delta q + I\Delta\Phi. \quad (7)$$

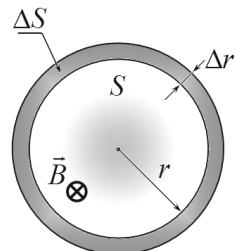


Рис. 174

В данном случае поток через соленоид может изменяться по двум причинам\*: изменение силы тока и изменение площади поперечного сечения соленоида. Пусть в некоторый момент времени сила тока в обмотке равнялась  $I$ , а площадь сечения  $S$ , затем за малый промежуток времени  $\Delta t$  сила тока изменилась на  $\Delta I$ , а площадь – на  $\Delta S$ . Тогда изменения магнитного потока можно представить в виде

$$\Delta\Phi = \mu_0 n^2 l (IS) = \mu_0 n^2 l ((I + \Delta I)(S + \Delta S) - IS) = \\ = \mu_0 n^2 l (S\Delta I + I\Delta S),$$

на последнем шаге преобразований мы пренебрегли произведением малых величин  $\Delta I \Delta S$ . Подставим полученное выражение в уравнение (7):

$$\epsilon\Delta q = IR\Delta q + I\Delta\Phi = IR\Delta q + I\mu_0 n^2 l (S\Delta I + I\Delta S) = \\ = IR\Delta q + \mu_0 n^2 l S I \Delta I + \mu_0 n^2 I^2 l \Delta S. \quad (8)$$

Выясним теперь смысл каждого члена этого уравнения, тем более, что некоторые из них уже встречались нам ранее:

$\epsilon\Delta q$  – работа источника ЭДС по перемещению заряда  $\Delta q$ ;

$IR\Delta q = I^2 R \Delta t$  – количество теплоты, выделившееся в цепи при прохождении заряда  $\Delta q$ ;

$$\mu_0 n^2 l S I \Delta I = \mu_0 n^2 \Delta \left( \frac{I^2}{2} \right) S L = \Delta \left( \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} \right) S L = \Delta \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) S L -$$

(здесь  $B = \mu_0 n I$  – индукция магнитного поля вну-

\* Мы опускаем технические детали: почему изменилась сила тока, почему увеличился радиус? Такие изменения могут произойти по разным причинам: изменилась ЭДС источника, изменилось сопротивление цепи (самый простой способ регулировки), перестали удерживать обмотку, предоставив ей возможность расширяться, и т.д. Конечно, в последнем случае сила установившегося тока останется неизменной.

три соленоида) изменение энергии магнитного поля вследствие изменения силы тока в соленоиде (изменение энергии поля в первоначальном объеме соленоида);

наконец, последнее слагаемое преобразуется к виду  $\mu_0 n^2 I^2 l \Delta S = 2 \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \Delta V$  и равно удвоенной (?) энергии магнитного поля в части приращенного объема соленоида  $\Delta V$ . Смысл половины этого слагаемого, то есть  $\left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \Delta V$ , понятен: это увеличение энергии поля вследствие увеличения его объема, осталось найти смысл оставшейся величины  $\left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \Delta V$ . Мы не случайно начали рассуждения данного раздела с рассмотрения сил, действующих на обмотку: эти силы увеличивают размер соленоида, следовательно, совершают работу. В результате совершения этой работы увеличивается механическая энергия обмотки – если она упругая и деформируемая, то увеличивается энергия ее упругой деформации; возможно, что часть этой энергии идет на увеличение кинетической энергии расширяющихся витков. Выяснение этих деталей требует более конкретного описания механических свойств обмотки. Не будем их конкретизировать, покажем, что оставшееся слагаемое действительно равно работе сил поля над расширяющейся обмоткой. Еще раз взглянем на выделенную на боковой поверхности соленоида площадку (рис. 171, 172) со сторонами  $a$  и

*b*: на нее действует сила  $pab$  ( $p$  – давление поля). При смещении этой площадки на расстояние  $\Delta r$  в направлении действия силы магнитное поле совершает работу  $\delta A = F\Delta r = pab\Delta r = p\Delta V_{ab}$ , где  $\Delta V_{ab}$  – изменение объема соленоида при смещении рассматриваемой площадки. Так как давление на все точки поверхности соленоида одинаково, то суммарная работа поля по смещению всех участков его поверхности будет равна  $A = p\Delta V$ , где  $\Delta V$  – полное изменение объема соленоида. Используя формулу (4) для давления магнитного поля, получим, что работа по расширению соленоида равна

$$A = \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \Delta V.$$

Таким образом, энергетический баланс и в этом случае сходится: работа, совершенная источником ЭДС по перемещению заряда  $\varepsilon\Delta q$ , расходуется на:

- преодоление сил сопротивления (в результате чего выделяется теплота  $\delta Q = IR\Delta q$ );
- увеличение энергии поля, как вследствие изменения его индукции (и плотности энергии)

$\Delta W_B = \Delta \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) V$ , так и вследствие изменения объема,

занятого полем  $\Delta W_V = \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \Delta V$ ;

- увеличение механической энергии обмотки, которая возрастает благодаря работе поля

$\Delta W_{обм.} = A = \left( \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \Delta V$  (рис. 175).

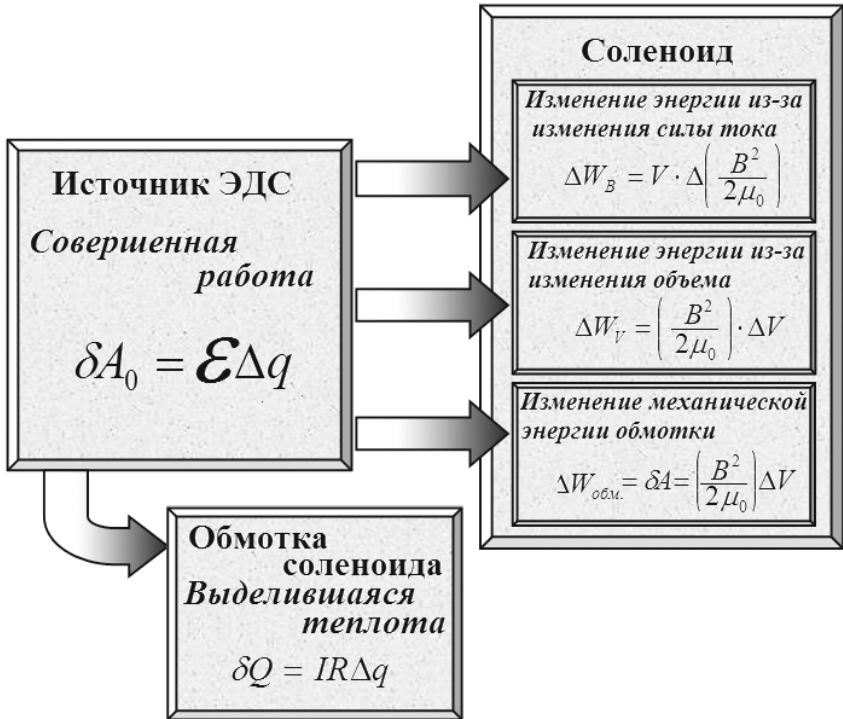


Рис. 175

## 5.6. Сверхпроводники в магнитном поле

При изучении различных типов проводимости мы упоминали о сверхпроводниках – веществах, электрическое сопротивление которых в определенных условиях строго равно нулю. В электрических цепях, состоящих из сверхпроводников, наложенный электрический ток может существовать сколь угодно долго даже при отсутствии источников ЭДС. Сейчас нас по-прежнему интересует, главным образом, превращение энергии в электро-

магнитных явлениях, поэтому с помощью сверхпроводящих цепей мы можем обсудить эти процессы в цепях без источника энергии.

Сначала рассмотрим поведение обычной, не сверхпроводящей короткозамкнутой катушки-соленоида во внешнем переменном магнитном поле (рис. 176). Обозначим  $L$  – индуктивность соленоида;  $R$  – полное электрическое сопротивление контура, состоящего из соленоида и проводника, соединяющего его концы. Пусть эта катушка помещена во внешнее магнитное поле  $\vec{B}_0$ , изменяющееся со временем.

При изменении этого поля возникнет вихревое электрическое поле, которое приведет к появлению электрического тока в рассматриваемой цепи. ЭДС индукции, возникающей при изменении внешнего поля, определяется законом Фарадея

$$\epsilon_0 = -\frac{\Delta\Phi_0}{\Delta t}, \quad (1)$$

где  $\Phi_0$  – магнитный поток<sup>\*</sup> внешнего поля  $\vec{B}_0$  через соленоид. Возникающий индуцированный ток создаст собственное магнитное поле, которое также будет переменным, поэтому его изменение также будет создавать в цепи ЭДС, которую мы назовем ЭДС самоиндукции, ее величина равна

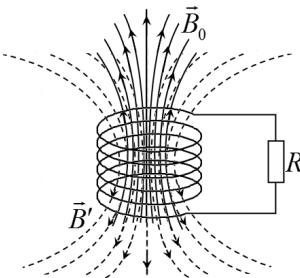


Рис. 176

---

\* Напомним, что этот поток надо рассматривать как поток через все витки соленоида.

$$\varepsilon_{si} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}, \quad (2)$$

где  $I$  – сила тока в цепи.

Строго говоря, разделение на ЭДС индукции и ЭДС самоиндукции является достаточно условным, так как возникновение ЭДС в контуре обусловлено одной и той же причиной: изменяющееся суммарное магнитное поле порождает суммарное вихревое электрическое поле. Но так как для электрических и магнитных полей справедлив принцип суперпозиции, то наше разделение допустимо и удобно для теоретического описания.

Используя закон Ома для полной цепи, запишем уравнение, описывающее изменение силы электрического тока в рассматриваемой цепи

$$-\frac{\Delta \Phi_0}{\Delta t} - L \frac{\Delta I}{\Delta t} = IR. \quad (3)$$

При заданном законе изменения потока внешнего поля  $\Phi_0(t)$  это уравнение (3) (и, конечно, начальное значение тока  $I_0$ ) позволяет найти закон изменения силы тока в цепи  $I(t)$ .

Направление ЭДС самоиндукции определяется правилом Ленца, которое в данном случае утверждает, что магнитный поток поля  $\vec{B}'$ , созданного током в цепи, препятствует изменению магнитного потока внешнего поля, или ЭДС самоиндукции препятствует изменению ЭДС индукции внешнего поля. Так, например, при возрастании потока внешнего поля  $\Phi_0$  поле индуцированного тока  $\vec{B}'$  будет направлено противоположно внешнему полю, а ЭДС самоиндукции противоположна ЭДС

индукции. Согласно уравнению (3), разность между модулями ЭДС индукции и ЭДС самоиндукции будет определять направление возникающего электрического тока, а величина этой разности равна электрическому напряжению в цепи  $IR$ .

Допустим теперь, что весь контур (обмотка соленоида и соединяющий проводник) переведен в сверхпроводящее состояние, при котором электрическое сопротивление равно нулю\*. Формально, в этом случае уравнение (3) упрощается и приобретает вид

$$-\frac{\Delta\Phi_0}{\Delta t} - L \frac{\Delta I}{\Delta t} = 0. \quad (4)$$

Это уравнение допускает интересную интерпретацию. Вспомним, что, по определению индуктивности, величина  $LI = \Phi'$  равна магнитному потоку через контур поля, созданного электрическим током в самом контуре. Тогда из уравнения (4) следует

$$\frac{\Delta(\Phi_0 + LI)}{\Delta t} = 0,$$

то есть изменение суммарного магнитного потока через контур равно нулю, следовательно, суммарный магнитный поток через сверхпроводящий контур сохраняется:

$$\Phi_0 + LI = \text{const}. \quad (5)$$

\* Подчеркнем, что сопротивление сверхпроводника равно нулю строго в математическом смысле, а не просто стало пренебрежимо малым. В сверхпроводящем состоянии отсутствуют процессы, приводящие к тепловым потерям энергии тока.

Это правило широко используется при решении различных задач. Например, такой: *Сверхпроводящий контур, площадью  $S$  и индуктивностью  $L$ , помещают в однородное магнитное поле индукции  $B$ , силовые линии которого перпендикулярны плоскости контура. Чему равна сила индуцированного тока в контуре, если до помещения контура в поле ток в нем отсутствовал?*

Решение этой задачи элементарно: так как магнитный поток через контур остается неизменным и первоначально был равен нулю, то справедливо соотношение  $SB + LI = 0$ , из которого находим

$$I = -\frac{SB}{L}. \quad (6)$$

Несмотря на постоянное использование этого правила, оно не является строгим. Более того, оно является внутренне противоречивым: действительно, если магнитный поток остается постоянным, то в контуре не может появиться ЭДС, почему же тогда в нем возникает электрический ток? Если переменное внешнее поле создает электрическое поле и переменное поле электрического тока (непонятно, откуда появившегося) создает противоположно направленное, такое же по модулю поле, то какая сила заставит двигаться электроны? Логично допустить, что все-таки ЭДС индукции должна быть чуть-чуть больше ЭДС самоиндукции  $|\varepsilon_{ind}| - |\varepsilon_{si}| > 0$ . В обычном контуре причина такой разности понятна: наличие электрического сопротивления (см. уравнение (4)). В случае сверхпроводящего контура эта причина

отсутствует, однако в случае сверхпроводников само уравнение (4), строго говоря, неприменимо. Напомним, что закон Ома описывает установившийся режим протекания электрического тока, когда сила, действующая на зарженные частицы со стороны электрического поля, уравновешивается силой сопротивления, пропорциональной скорости движения частиц. Если же силы сопротивления отсутствуют, то и установившегося режима движения нет! Поэтому в этом случае для описания движения электронов необходимо пользоваться уравнением, описывающим нестационарный, переходной процесс движения. Воспользуемся уравнением второго закона Ньютона для движения электрона<sup>\*</sup>

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = eE_{ind} - eE_{si}, \quad (7)$$

где  $\varepsilon_{ind}$ ,  $\varepsilon_{si}$  — напряженности электрических полей, созданных изменяющимися внешним магнитным полем и полем электрического тока (индукции и самоиндукции). Как следует из этого уравнения, напряженность поля индукции превышает напряженность поля самоиндукции на величину, пропорциональную массе электрона. Таким образом, мы нашли физическую причину различия этих полей — инертность носителей тока. Учет этого фак-

\* Движение электрона в проводнике (а тем более сверхпроводнике) описывается уравнениями квантовой механики, однако наиболее существенные детали их поведения качественно могут быть объяснены и в рамках классической физики.

тора приводит к появлению некоторой поправки к решению подобных задач. В большинстве практически значимых случаев эта поправка крайне мала (что обусловлено малой массой электронов) и в расчетах ей можно пренебречь. Однако именно этот фактор определяет само существование описываемых процессов, иными словами, *в рамках этого приближения решить задачу можно, но объяснить процесс нельзя.*

Пояснив смысл и рамки применимости установленного правила (5), мы в дальнейшем будем им постоянно пользоваться.

Вернемся к описанию превращений энергии в сверхпроводящем контуре при изменении его размеров. Чтобы упростить теоретическое описание и выделить наиболее существенные стороны этого описания, заменим соленоид длинным сверхпроводящим круговым цилиндром радиуса  $r_0$  и длиной  $l$ , по поверхности которого протекает однородный электрический ток с линейной плотностью  $i_0$  (рис. 177).

Интересно, а как можно возбудить электрический ток по поверхности такого цилиндра?

Понятно, что для этого необходимо использовать переменное магнитное поле. Если сверхпроводник внести в магнитное поле, то в нем индуцируются электрические токи, однако если отключить внешнее поле, то электрические токи

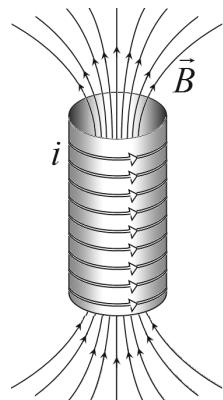


Рис. 177

исчезнут: посмотрите еще раз на уравнение (5) – значение силы тока однозначно определяется значением магнитного потока внешнего поля. Тем не менее создать незатухающий ток в проводнике в отсутствие внешнего поля возможно. Для этого необходимо поместить вещество, не находящееся в сверхпроводящем состоянии, в магнитное поле. При этом благодаря электрическому сопротивлению индуцированные токи быстро затухнут. После этого проводник необходимо перевести в сверхпроводящее состояние (охлаждая его), когда он находится в постоянном поле (при этом токи также не возникнут, так как магнитное поле постоянно). Наконец, после этого можно отключить магнитное поле (или просто вынести тело из области поля), при этом уменьшающееся поле возбудит незатухающий электрический ток в сверхпроводнике.

Постоянный электрический ток, текущий по боковой поверхности, создает внутри цилиндра однородное магнитное поле (краевыми эффектами по-прежнему пренебрегаем), индукция которого равна

$$B_0 = \mu_0 i_0. \quad (8)$$

Это магнитное поле взаимодействует с токами на поверхности, со стороны поля на поверхность действует давление, равное плотности энергии магнитного поля

$$p = \frac{B^2}{2\mu_0}, \quad (9)$$

где  $B$  – индукция поля внутри цилиндра.

Пусть под действием этого давления цилиндр расширился так, что его радиус увеличился и стал равным  $r_1$  (рис. 178). Так как поверхность сверхпроводящего ци-

линдра при расширении двигалась в магнитном поле, то сила текущего тока изменилась. Величину тока и индукцию создаваемого им магнитного поля можно найти на основании установленного правила о постоянстве магнитного потока, которое в данном случае приводит к соотношению

$$\pi r_0^2 B_0 = \pi r_1^2 B_1, \quad (10)$$

из которого определим индукцию поля после расширения

$$B_1 = B_0 \frac{r_0^2}{r_1^2}. \quad (11)$$

Так как индукция поля, созданного током, пропорциональна линейной плотности тока (8), то аналогичное соотношение справедливо и для сил токов

$$i_1 = i_0 \frac{r_0^2}{r_1^2}. \quad (12)$$

Как и следовало ожидать, сила тока по поверхности и индукция поля при расширении цилиндра уменьшаются. Найдем изменение энергии поля (с учетом уменьшения плотности энергии, но увеличения занятого им объема):

$$\Delta W = W_1 - W_0 = \frac{B_1^2}{2\mu_0} V_1 - \frac{B_0^2}{2\mu_0} V_0 =$$

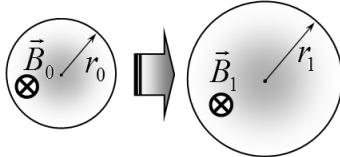


Рис. 178

$$= \frac{B_0^2}{2\mu_0} V_0 \left( \left( \frac{r_0^2}{r_1^2} \right)^2 \frac{r_1^2}{r_0^2} - 1 \right) = \frac{B_0^2}{2\mu_0} V_0 \left( \frac{r_0^2}{r_1^2} - 1 \right). \quad (13)$$

Проведенный расчет показывает, что энергия магнитного поля уменьшилась. Уменьшение энергии поля связано с работой, совершенной полем по растяжению цилиндра. При изменении радиуса цилиндра изменяется давление поля на его стеки, поэтому будем считать изменение радиуса  $\Delta r$  настолько малым ( $\Delta r \ll r_0$ ), что изменением давления при этом можно пренебречь. В таком приближении работа поля будет равна

$$\delta A = p_0 \Delta V = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \pi l \left( (r_0 + \Delta r)^2 - r_0^2 \right) \approx \frac{B_0^2}{2\mu_0} 2\pi l r_0 \Delta r, \quad (14)$$

при выводе мы пренебрегли малой величиной  $(\Delta r)^2$ . С таким же приближением найдем изменение энергии поля (13):

$$\begin{aligned} \Delta W &= \frac{B_0^2}{2\mu_0} \pi l r_0^2 \left( \frac{r_0^2}{(r_0 + \Delta r)^2} - 1 \right) = \\ &= \frac{B_0^2}{2\mu_0} \pi l r_0^2 \left( \left( 1 + \frac{\Delta r}{r_0} \right)^{-2} - 1 \right) \approx -\frac{B_0^2}{2\mu_0} \pi l r_0^2 2 \frac{\Delta r}{r_0}, \end{aligned} \quad (15)$$

здесь использована приближенная формула  $(1 + \xi)^{-2} \approx 1 - 2\xi$ , справедливая при малых  $\xi$ .

Мы доказали, что уменьшение энергии поля равно работе по расширению цилиндра, которая в свою очередь равна увеличению его потенциальной энергии деформации. Таким образом, закон сохранения энергии выполняется и в этом случае.

Можно строго доказать, что этот вывод справедлив и при произвольном, а не только малом уве-

личении радиуса цилиндра, только в этом случае для прямого расчета работы необходимо выполнить операцию интегрирования.

Рассмотрим аналогичную электростатическую систему: равномерно заряженный цилиндр расширяется под действием сил электростатического отталкивания (рис. 179). В этом случае элекtri-

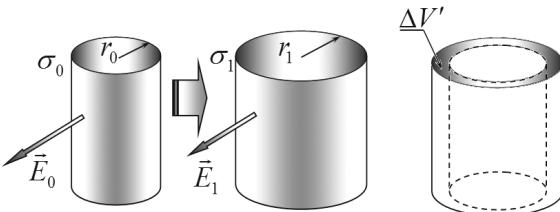


Рис. 179

ческое поле расположено вне цилиндра, внутри него отсутствует. При расширении цилиндра часть электрического поля исчезает в том объеме  $\Delta V'$ , на который возрос объем цилиндра при малом увеличении радиуса от  $r_0$  до  $r_1$ . Вне этого пространства структура поля и его величина не изменяется. Поэтому изменение энергии поля при расширении цилиндра просто равно энергии, заключенной в этом «исчезнувшем» объеме между исходным и конечным положением поверхности цилиндра, то есть  $\Delta W = -w \Delta V$ , где  $w$  – объемная плотность энергии в этой части пространства. Работа, совершенная полем по расширению цилиндра, равна произведению давления поля на изменение объема цилиндра  $\delta A = p \Delta V$ . Так как давление равно плотности энергии, то эта работа в точности равна уменьшению

энергии поля. Итак, мы пришли к тому же выводу: часть энергии<sup>\*</sup>  $p = w$  поля перешла в энергию деформации цилиндра. Только в этом случае расчет гораздо проще и легко может быть обобщен на произвольное заряженное проводящее тело при его произвольной деформации.

## 5.7. Перенос энергии в электромагнитном поле

Мы рассмотрели ряд примеров превращения различных форм энергии в электрических и магнитных явлениях и показали, что собственная энергия поля играет существенную роль в этих процессах. Если электрические и магнитные поля изменяются со временем, то неизбежно должна происходить передача энергии посредством самого электромагнитного поля. Иными словами, мы должны предположить, что электромагнитное поле не только *обладает* энергией, но и способно ее *переносить* и передавать другим телам, в которых она может преобразовываться в другие формы: тепловую, механическую и т.д. Для подтверждения этой гипотезы необходимо выразить количество передаваемой энергии через характеристики полей (напряженность электрического поля и индукцию магнитного поля). В данном разделе мы рассмотрим серию примеров такого описания переноса энергии.

---

\* К слову, эти рассуждения могут служить доказательством того, что давление поля равно объемной плотности энергии!

### 5.7.1. Возрастание энергии магнитного поля

Рассмотрим механизм передачи энергии изменяющемуся магнитному полю. Для этого в очередной раз возьмем длинный соленоид радиуса  $r$  и длиной  $l$ , подключенный к источнику ЭДС (рис. 180). Внутри соленоида магнитное поле является однородным и его индукция равна

$$B = \mu_0 n I, \quad (1)$$

где  $I$  – сила тока в обмотке соленоида,  $n$  – плотность ее намотки. При изменении силы тока будет изменяться индукция магнитного поля и, следовательно, его энергия. Энергию поля  $W$  представим как произведение плотности энергии  $w = \frac{B^2}{2\mu_0}$  на объем соленоида

$$W = wV = \frac{B^2}{2\mu_0} \pi r^2 l. \quad (2)$$

Теперь изменение энергии поля можно выразить через изменение индукции поля

$$\Delta W = \pi r^2 l \frac{1}{2\mu_0} \Delta(B^2) = \pi r^2 l \frac{1}{\mu_0} B \Delta B, \quad (3)$$

где использована формула  $\Delta(B^2) = 2B\Delta B$ .

Теперь попытаемся выразить это изменение энергии через характеристики полей, существующих внутри соленоида. Вспомним, что при из-

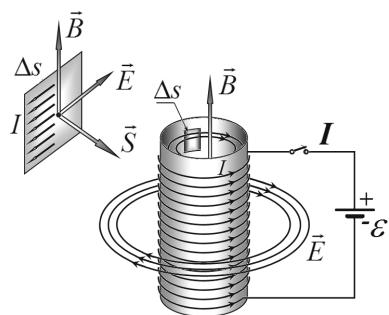


Рис. 180

менении магнитного поля возникает вихревое электрическое поле (явление электромагнитной индукции). Для определенности, направления векторов напряженности электрического поля на рисунках соответствуют возрастанию индукции магнитного поля. Согласно закону Фарадея, циркуляция вектора напряженности электрического поля по любому контуру равна скорости изменения магнитного потока через этот контур:

$$\Gamma_E = -\frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t}. \quad (4)$$

Так как магнитное поле является однородным и осесимметричным, то силовые линии электрического поля являются окружностями с центральными на оси соленоида. Поэтому в качестве контура, к которому применим уравнение (4), возьмем окружность радиуса  $r$ , непосредственно примыкающую к внутренней поверхности соленоида. На этой окружности вектор напряженности электрического поля  $\vec{E}$  постоянен по модулю и направлен по касательной, поэтому его циркуляция равна произведению модуля вектора на длину этой окружности  $\Gamma_E = 2\pi r E$ . Вектор индукции магнитного поля постоянен и направлен перпендикулярно плоскости выбранного контура, поэтому магнитный поток равен произведению модуля вектора на площадь круга, ограниченного выбранной окружностью,  $\Phi_B = \pi r^2 B$  (рис. 181). Таким образом, уравнение (4) позволяет

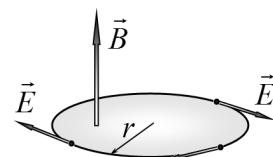


Рис. 181

связать напряженность электрического поля и скорость изменения магнитной индукции:

$$2\pi rE = -\pi r^2 \frac{\Delta B}{\Delta t}. \quad (5)$$

Знак минус в этом уравнении говорит, что обход контура по направлению вектора  $\vec{E}$  осуществляется по часовой стрелке<sup>\*</sup>; так как нас интересуют модули векторов (их направления мы изобразили на рисунках), то этот знак минус опустим.

Напряженность электрического поля пропорциональна скорости изменения магнитной индукции. Если считать, что сила тока и индукция магнитного поля изменяются не слишком быстро, то изменением напряженности электрического поля можно пренебречь, то есть считать его постоянным. Это замечание является строгим, если сила тока в соленоиде возрастает по линейному закону.

Из уравнения (5) выразим

$$\pi r^2 \Delta B = 2\pi r E \Delta t \quad (5)$$

и подставим в формулу (3) для изменения энергии поля

$$\Delta W = \pi r^2 l \frac{1}{\mu_0} B \Delta B = \frac{EB}{\mu_0} \cdot 2\pi r l \cdot \Delta t. \quad (6)$$

Теперь изменение энергии магнитного поля внутри объема соленоида оказалось выраженным через характеристики полей в точках, находящихся непосредственно на границе рассматриваемой области. Обратим внимание, что на этой границе

\* Вспомните, что положительным направлением обхода условились считать движение «против часовой стрелки».

(внутренней поверхности соленоида) векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  (рис. 181) взаимно перпендикулярны и направлены касательно к этой поверхности.

Введем вектор (пока как математическое обозначение\*)

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}, \quad (7)$$

пропорциональный векторному произведению векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ . Во всех точках внутренней поверхности соленоида этот вектор направлен по нормали и внутрь рассматриваемого объема (рис. 181). В формуле (6) явным образом присутствует модуль этого вектора; далее, величина  $s_{бок.} = 2\pi rl$  равна площади внутренней поверхности, поэтому изменение энергии магнитного поля в (6) представлено через поток введенного вектора  $\vec{S}$  через поверхность, ограничивающую рассматриваемый объем поля, то есть

$$\Delta W = \frac{EB}{\mu_0} \cdot 2\pi rl \cdot \Delta t = S \cdot s_{бок.} \Delta t. \quad (8)$$

На основаниях цилиндра, ограничивающего выделенный объем, вектор  $\vec{S}$  не имеет нормальной составляющей, поэтому здесь его поток равен нулю.

Теперь вектор  $\vec{S}$  приобретает наглядный физический смысл: его модуль равен количеству энергии, перетекающей через площадку единич-

\* К сожалению, такое обозначение этого вектора является традиционным и общепринятым, поэтому в дальнейшем для обозначения площади мы будем использовать  $s$  — «эс малое».

ной площади, перпендикулярную этому вектору, в единицу времени, а его направление указывает направление переноса энергии электромагнитного поля

$$S = \frac{\Delta W}{\Delta s \Delta t}.$$

Этот вектор получил название **вектор Пойтинга**, в честь английского ученого А. Пойтинга, который и ввел его в науку. Также этот вектор называют **вектором плотности потока энергии**.

Теперь наша идея о переносе энергии поля симмом полем получила математическое воплощение: **скорость изменения энергии магнитного поля в некотором объеме равна потоку<sup>\*</sup> вектора Пойтинга через поверхность, ограничивающую этот объем**. В данном случае положительным считается поток, направленный внутрь поверхности.

При уменьшении тока в соленоиде направление вектора  $\vec{B}$  не изменяется, а направление вектора  $\vec{E}$  изменяется на противоположное. Поэтому направление вектора плотности потока энергии  $\vec{S}$  также изменяется на противоположное – теперь он будет направлен наружу от рассматриваемого объема. Такое изменение логично: энергия поля уменьшается, поэтому она «вытекает» из выделенного объема.

---

\* Лучше было бы сказать: равна потоку (в смысле математической операции) вектора плотности потока (а это имя вектора), но эта фраза звучит не очень хорошо...

## 5.7.2. Возрастание энергии электрического поля

Рассмотрим теперь механизм передачи энергии изменяющемуся электрическому полю.

Для этого возьмем плоский конденсатор с круглыми параллельными пластинами радиуса  $r$ , находящимися на малом расстоянии  $h$  друг от друга (рис. 182). Электрическое поле между пластинами можно считать однородным, вектор его напряженности  $\vec{E}$  перпендикулярен пластинам, его модуль равен

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (1)$$

где  $\sigma$  – поверхностная плотность заряда на пластинах. Полная энергия электрического поля в конденсаторе равна произведению плотности энергии  $w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$  на объем конденсатора  $V = \pi r^2 h$ :

$$W = wV = \pi r^2 h \frac{\epsilon_0 E^2}{2}. \quad (2)$$

При изменении зарядов на пластинах (опять для определенности будем считать, что заряды возрастают) напряженность электрического поля и его энергия изменяются. Изменение этой энергии описывается формулой

$$\Delta W = \pi r^2 h \frac{\epsilon_0}{2} \Delta(E^2) = \pi r^2 h \epsilon_0 E \Delta E. \quad (3)$$

Выразим это изменение через характеристики полей на границе выделенного объема (в данном

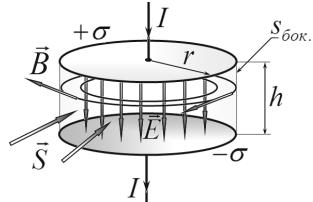


Рис. 182

случае на цилиндрической боковой поверхности, ограничивающей внутреннее пространство между обкладками).

При изменении со временем электрического поля возникает поле магнитное (это явление мы назвали токами смещения). Для определения его индукции воспользуемся уравнением Максвелла: циркуляция вектора магнитной индукции по любому контуру пропорциональна скорости изменения потока вектора напряженности электрического поля через этот контур (при отсутствии токов, пересекающих контур):

$$\Gamma_B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\Delta \Phi_E}{\Delta t}. \quad (4)$$

Ранее мы описывали структуру магнитного поля в рассматриваемой системе и показали, что его силовые линии являются окружностями с центрами на оси конденсатора\*. Поэтому в качестве контура выберем окружность радиуса  $r$  с центром на оси конденсатора. На этой окружности вектор индукции  $\vec{B}$  постоянен по модулю и направлен по касательной, поэтому его циркуляция равна произведению модуля вектора на длину окружности. Вектор напряженности  $\vec{E}$  постоянен, поэтому его поток через выделенный контур равен произведению модуля на площадь круга, ограниченного выбранным контуром. Таким образом, для этого контура теорема (4) приводит к уравнению

---

\* Сравните структуры полей в соленоиде и конденсаторе: электрическое и магнитное поля просто поменялись местами, поэтому далее можно просто переписать предыдущий раздел с указанной заменой, что далее и сделано...

$$2\pi rB = \epsilon_0 \mu_0 \pi r^2 \frac{\Delta E}{\Delta t},$$

из которого выражим

$$\pi r^2 \Delta E = \frac{2\pi rB}{\epsilon_0 \mu_0} \Delta t$$

и подставим в формулу (3)

$$\Delta W = \pi r^2 h \epsilon_0 E \Delta E = 2\pi r h \frac{EB}{\mu_0} \Delta t. \quad (5)$$

Здесь также изменение энергии электрического поля представляется в виде потока вектора Пойтинга

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}.$$

Действительно, на рассматриваемой поверхности векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{E}$  перпендикулярны друг другу и направлены касательно к поверхности, поэтому вектор  $\vec{S}$  перпендикулярен поверхности и направлен внутрь рассматриваемого объема (см. рис. 183). Поэтому произведение его модуля  $S = \frac{EB}{\mu_0}$  на площадь боковой поверхности  $s_{бок.} = 2\pi rl$  есть поток этого вектора,

поэтому выражение (5) можно представить в виде

$$\Delta W = 2\pi r h \frac{EB}{\mu_0} \Delta t = s_{бок.} S \Delta t. \quad (6)$$

Отмечаем, что у поверхности пластин конденсатора вектор  $\vec{S}$  направлен вдоль пластин, поэтому здесь его поток равен нулю. Итак, мы приходим к заключению: **скорость изменения энергии**

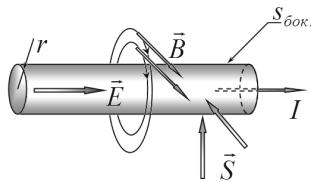


Рис. 183

**электрического поля в некотором объеме равна потоку вектора Пойтинга через поверхность, ограничивающую данный объем.** Как и ранее, положительным считаем поток, направленный внутрь поверхности.

Вдумайтесь еще раз в сделанный вывод и посмотрите на рисунок: мы показали, что энергия внутрь конденсатора проникает в «щелки» между пластинами из окружающего пространства, а не «стекает» с пластин (как в соленоиде, где вектор плотности потока направлен от обмотки). Значит, она должна каким-то образом обогнуть края пластин, но ее точный путь описать так же сложно, как и краевые эффекты.

Легко показать, что при уменьшении заряда на пластинах энергия «вытекает» из конденсатора, так как в этом случае вектор Пойтинга направлен наружу из конденсатора.

### 5.7.3. Перенос энергии при выделении теплоты

Протекание электрического тока по проводнику сопровождается выделением теплоты. Покажем, что и в этом случае энергия поступает к нагревающемуся проводнику через электромагнитное поле.

Пусть электрический ток силой  $I$  протекает по однородному цилиндрическому проводнику радиуса  $r$  и длины  $l$  (рис. 183). За промежуток времени  $\Delta t$  в проводнике выделяется количество теплоты, определяемое законом Джоуля-Ленца

$$\delta Q = I^2 R \Delta t, \quad (1)$$

где  $R$  – электрическое сопротивление проводника. Выразим эту величину через характеристики электромагнитного поля в проводнике.

Точнее, мы будем рассматривать поля в точках, находящихся под боковой поверхностью проводника и примыкающих к ней изнутри проводника. Дело в том, что непосредственно на поверхности проводника распределяются поверхностные заряды, создающие поле внутри проводника. Поэтому внутри проводника электрическое поле существует и заставляет двигаться заряженные частицы, а вне проводника электрическое поле отсутствует, так как сам проводник остается электрически нейтральным. Магнитное поле существует как внутри, так и вне проводника с током.

Электрическое поле внутри проводника является однородным, вектор его напряженности  $\vec{E}$  направлен вдоль оси проводника, а его модуль может быть определен из закона Ома для участка цепи:

$$E = \frac{\Delta\phi}{l} = \frac{IR}{l}, \quad (2)$$

где  $\Delta\phi$  – разность потенциалов между концами проводника (приложенное электрическое напряжение). Электрический ток создает магнитное поле, силовые линии которого образуют концентрические окружности с центрами на оси проводника. Индукция этого поля непосредственно у поверхности определяется по формуле

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (3)$$

Выражая значения силы тока через напряженность электрического поля из формулы (2)  $IR = El$  и индукцию магнитного поля из формулы (3)  $I = \frac{2\pi rB}{\mu_0}$ ,

преобразуем выражение (1) к виду

$$\delta Q = I^2 R \Delta t = IR \cdot I \cdot \Delta t = (El) \frac{2\pi rB}{\mu_0} \Delta t = 2\pi rl \frac{EB}{\mu_0} \Delta t = S s_{бок.} \Delta t .(4)$$

Таким образом, мощность выделяющейся теплоты равна потоку вектора Пойтинга

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0} \quad (5)$$

через боковую поверхность проводника, площадь которой равна  $s_{бок.} = 2\pi rl$ .

Обратите внимание, что и в этом случае векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  перпендикулярны друг другу и направлены по касательным к боковой поверхности, поэтому вектор  $\vec{S}$  перпендикулярен поверхности и направлен внутрь проводника. Таким образом, заключаем: **количество теплоты, выделяющейся в некотором объеме в единицу времени, равно потоку вектора Пойтинга через поверхность, ограничивающую данный объем.**

При изменении направления тока изменяются на противоположные направления векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ , а направление вектора потока энергии  $\vec{S}$  останется неизменным. Очевидно, что количество выделяющейся теплоты не зависит от направления тока и при любом направлении тока энергия должна «втекать» в проводник, вследствие чего и направление потока энергии не зависит от направления тока.

Опять мы пришли к неожиданному выводу: энергия втекает в проводник из окружающего пространства через боковую поверхность. То есть энергия электрического тока передается не по проводам, в проводах она только теряется. Так, при отсутствии электрического сопротивления отсутствует электрическое поле, поэтому отсутствует поток энергии, направленный внутрь проводника.

Зачем же тогда они нужны, эти провода? Оказывается, их роль заключается в создании электромагнитного поля нужной конфигурации, такой, чтобы поле в окружающем проводник пространстве могло передавать энергию потребителю.

Аналогично можно рассмотреть разгон заряженных частиц в электрическом поле, так как в обоих случаях электрическое поле совершает работу над заряженными частицами, только в одном случае эта работа приводит к увеличению кинетической энергии, а в другом – расходуется на преодоление сил сопротивления (в результате чего выделяется теплота). Но это различие относится к области механики, а не электродинамики.

#### **5.7.4. Теорема о потоке энергии электромагнитного поля**

Мы рассмотрели три примера переходов энергии из одной формы в другую с участием электромагнитного поля. Выбор этих примеров был обусловлен, главным образом, их простотой: в каждом случае нам удалось независимо рассчи-

тать изменение энергии системы и характеристики полей, существующих на границе рассматриваемой области. В этих процессах часто тяжело определить, что является причиной, что – следствием: с одной стороны, наличие скрещенных полей обеспечивает поток энергии, а с другой, сами процессы формируют нужную конфигурацию электромагнитного поля.

Далее мы показали, что изменение энергии (в любой форме – энергии поля, внутренней, тепловой энергии, механической энергии) рассматриваемой системы можно представить как поток энергии через границу этой системы. Оказалось, что во всех случаях передачи энергии обязательно присутствие непараллельных электрического и магнитного полей. Количественной характеристикой процесса переноса энергии во всех случаях выступает вектор Пойтинга (вектор плотности потока энергии)

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}. \quad (1)$$

Обобщая полученные результаты, закон сохранения энергии можно сформулировать в виде\*: скорость изменения энергии системы равна потоку вектора Пойтинга через поверхность, ограничивающую данную систему (рис. 184), причем положительным считается поток, направ-

---

\* Эту формулировку можно доказать на основе уравнений Максвелла в самом общем случае произвольных систем, произвольных электромагнитных полей. Наши примеры следует считать только иллюстрациями этой общей формулировки, а не ее доказательством.

**ленный внутрь рассматриваемого объема.**

Конечно, это утверждение справедливо, если нет других механизмов передачи энергии данной системе извне: над ней не совершается механическая работа, нет потоков теплоты.

Заметим, что энергия может и «вытекать» из рассматриваемого объема, когда система отдает энергию внешним телам, например, совершает над ними работу. В этом случае поток энергии следует считать отрицательным.

Полученная формулировка закона сохранения энергии вполне очевидна. Ее аналогом может служить утверждение, что «в сосуде содержится столько жидкости, сколько вы ее туда налили».

Вектор плотности потока энергии  $\vec{S}$  определен во всех точках пространства, в котором существует электромагнитное поле, поэтому, с математической точки зрения, его описание задается векторным полем, для которого применимы все математические операции: поток, циркуляция и т. д. Так, поток вектора  $\vec{S}$  через малую площадку определяется традиционно как произведение нормальной составляющей вектора на площадь площадки (рис. 185)

$$\Delta\Phi_{\vec{S}} = (\vec{S} \cdot \vec{n})\Delta s = S\Delta s \cos\alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между векторами нормали и плотности потока энергии  $\vec{S}$ . Чтобы вычислить поток через

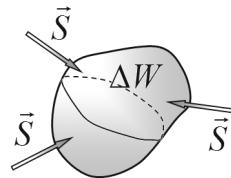


Рис. 184

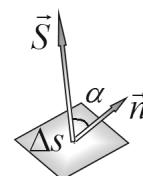


Рис. 185

произвольную поверхность, необходимо разбить ее на малые участки  $\Delta s_i$ , найти поток через каждую такую площадку и просуммировать их по всем площадкам (рис. 186)

$$\Phi_s = \sum_i \vec{S}_i \cdot \vec{n}_i \Delta s_i . \quad (2)$$

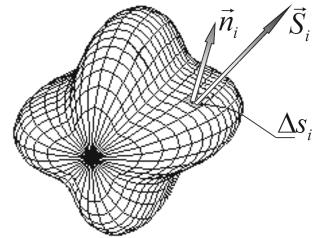


Рис. 186

Напомним, что традиционно для замкнутой поверхности положительной считается внешняя нормаль. Чтобы не нарушать традицию, при определении полного потока энергии через замкнутую поверхность также будем считать **положительным потоком, направленным наружу, то есть «вытекающим» из рассматриваемого объема**. При таком определении теорема о потоке энергии звучит следующим образом: **поток вектора Пойтинга (вектора плотности потока энергии электромагнитного поля) через любую замкнутую поверхность равен скорости уменьшения энергии, заключенной внутри данной поверхности**

$$\Phi_s = -\frac{\Delta W}{\Delta t} . \quad (3)$$

Как и другие теоремы о потоках, данная теорема также широко используется при описании и изучении электромагнитных явлений, в дальнейшем мы также будем обращаться к ней.

## ГЛАВА 2. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

### § 6. Математическое описание колебаний

Важнейшим следствием изученных нами уравнений Максвелла, полностью описывающих электромагнитное поле, является существование электромагнитных волн. Однако, прежде чем приступить к их изучению, нам необходимо познакомиться с методами описания колебательных и волновых процессов.

С периодическими и квазипериодическими<sup>\*</sup> процессами мы постоянно сталкиваемся в повседневной жизни: восходит и заходит солнце; зима сменяет лето; морские волны периодически набегают на берег; слышимые звуки и видимый свет представляют собой волновые, то есть периодические процессы; даже электрический ток в бытовой сети является переменным, изменяющимся по периодическому закону.

Природа этих процессов различна: периодические процессы могут быть механическими, тепловыми, электромагнитными, оптическими, ядерными. Но их математическое описание одинаково и основано на использовании периодических математических функций. Поэтому прежде всего мы

---

\* Квазипериодический – близкий к периодическому, «почти» периодический.

сделаем небольшое математическое вступление, касающееся свойств периодических функций.

## 6.1. Периодические функции

Функция  $F(x)$  называется периодической (рис. 187), если существует такое число  $T$ , что для любого значения  $x$  справедливо выражение

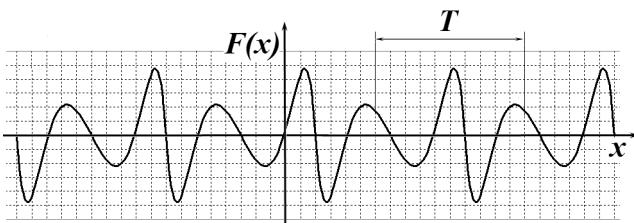


Рис. 187

$$F(x + T) = F(x). \quad (1)$$

Очевидно, что подобное соотношение будет справедливо и для сдвига аргумента на  $2T, 3T, \dots$ . Минимальное значение  $T$ , для которого выполняется соотношение (1), называется периодом функции.

Простейшими и наиболее известными периодическими функциями являются тригонометрические функции синус и косинус.

Возьмем окружность единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 188). Положение произвольной точки  $A$  этой окружности задается единичным радиус-вектором  $O\vec{A}$ , образующим угол  $\varphi$  с осью  $Ox$ . Как обычно, положительным направле-

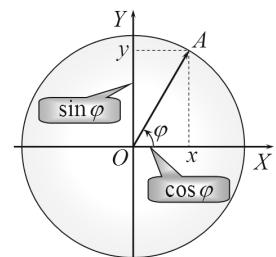


Рис. 188

нием отсчета угла является направление «против часовой стрелки». Косинусом угла  $\varphi$  называется абсцисса  $x$  радиус-вектора точки  $A$ , синусом угла  $\varphi$  называется ордината  $y$  этого же вектора. Аргумент\* этих функций может принимать произвольные значения.

Понятно, что при изменении аргумента на полный угол  $2\pi$  радиус-вектор занимает прежнее положение, поэтому периодом функций  $y = \sin \varphi$  и  $y = \cos \varphi$  является величина  $T = 2\pi$ .

На рис. 189 приведены графики этих функций.

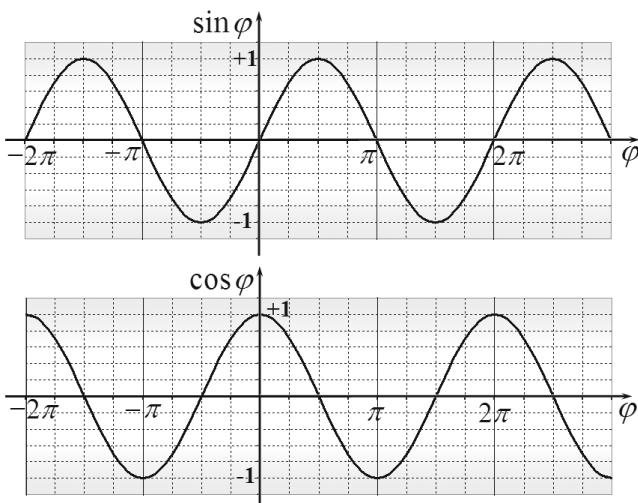


Рис. 189

Графики этих функций изображаются одной и той же кривой, которая называется синусоидой,

---

\* Обратим внимание, что аргумент тригонометрических функций должен быть безразмерным. Так, например, «синус 1 метра» – выражение бессмысленное!

только сдвинуты друг относительно друга на величину  $\frac{\pi}{2}$ .

Из определения тригонометрических функций и рис. 188 следуют формулы приведения

$$\begin{aligned}\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos\varphi, & \sin(\varphi + \pi) &= -\sin\varphi, \\ \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) &= -\sin\varphi, & \cos(\varphi + \pi) &= -\cos\varphi.\end{aligned}\quad (2)$$

Обратим также внимание, что косинус является четной функцией  $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$ , а синус – нечетной  $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ .

Приведем ряд тригонометрических формул, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Из теоремы Пифагора следует основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1, \quad (3)$$

из которого легко выразить одну из тригонометрических функций через другую.

Получим формулы для синуса и косинуса суммы двух аргументов.

Пусть единичный отрезок  $OA$  образует угол  $\alpha$  с осью  $Ox$  (рис. 190). Проведем еще один единичный отрезок  $OB$ , образующий угол  $\beta$  с отрезком  $OA$  и, соответственно, угол  $(\alpha + \beta)$  с осью  $Ox$ . Согласно определению, косинус суммарного угла равен длине

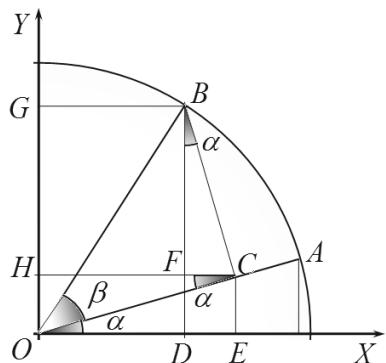


Рис. 190

отрезка  $OD$ , которая равна разности длин отрезков  $OE$  и  $DE$ :

$$\cos(\alpha + \beta) = |OD| = |OE| - |DE|.$$

Рассматривая прямоугольный треугольник  $OBC$ , видим, что его катеты равны

$$\begin{aligned} |OC| &= \cos \beta, \\ |BC| &= \sin \beta. \end{aligned}$$

Далее, рассматривая подобные треугольники  $OCE$  и  $BFC$ , в которых один из углов равен  $\alpha$ , находим, что

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= |OD| = |OE| - |DE| = |OC| \cos \alpha - \\ &- |BC| \sin \alpha = \cos \beta \cdot \cos \alpha - \sin \beta \cdot \sin \alpha. \end{aligned}$$

Таким образом, формула для косинуса суммы имеет вид

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta. \quad (3)$$

Аналогично с помощью рис. 184 можно получить формулу для синуса суммы:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta. \quad (4)$$

Полагая в этих формулах  $\alpha = \beta$ , получим формулы для косинуса и синуса двойного аргумента:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha. \quad (5)$$

Из первой из этих формул и основного тригонометрического тождества следуют формулы «понижения степени»:

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha). \quad (6)$$

Используя формулу для косинуса суммы, получим формулы для преобразования произведения

тригонометрических функций в сумму. Из формулы для косинуса суммы

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

запишем формулу для косинуса разности (используя свойства четности тригонометрических функций)

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

Складывая и вычитая эти две формулы, получим, что

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)). \quad (7)$$

Покажем, как можно преобразовать линейную комбинацию синуса и косинуса  $y(\phi) = A \sin\phi + B \cos\phi$ . Вынесем за скобки выражение  $\sqrt{A^2 + B^2}$ :

$$y(\phi) = A \sin\phi + B \cos\phi = \\ = \sqrt{A^2 + B^2} \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin\phi + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos\phi \right). \quad (8)$$

Теперь коэффициенты при синусе и косинусе удовлетворяют условию

$$\left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 + \left( \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)^2 = 1,$$

поэтому их можно обозначить как косинус и синус некоторого угла  $\Delta\phi$ :

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos\Delta\phi, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin\Delta\phi. \quad (9)$$

Следовательно, формулу (8) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 y(\phi) &= A \sin \phi + B \cos \phi = \\
 &= \sqrt{A^2 + B^2} (\sin \phi \cdot \cos \Delta\phi + \sin \Delta\phi \cdot \cos \phi) = \\
 &= \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\phi + \Delta\phi). \tag{10}
 \end{aligned}$$

Таким образом, линейная комбинация синуса и косинуса одного аргумента может быть представлена как синус (или косинус) аргумента с некоторым сдвигом, величина которого определяется формулами (9).

Отметим также приближенные формулы, справедливые при малых значениях аргумента ( $x \ll 1$ ): синус малого аргумента приблизительно равен самому аргументу

$$\sin x \approx x. \tag{11}$$

Погрешность этой формулы составляет величину порядка  $x^3$ . Геометрически эта формула означает, что длина малой хорды примерно равна длине дуги, стягивающей эту хорду.

Для косинуса малого аргумента справедлива приближенная формула

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}, \tag{12}$$

погрешность которой является величиной порядка  $x^4$ .

Рис. 191 иллюстрирует эти приближенные формулы.

Наконец, приведем выражения для производных от этих функций: производная синуса угла равна косинусу этого же угла

$$(\sin x)' = \cos x, \tag{13}$$

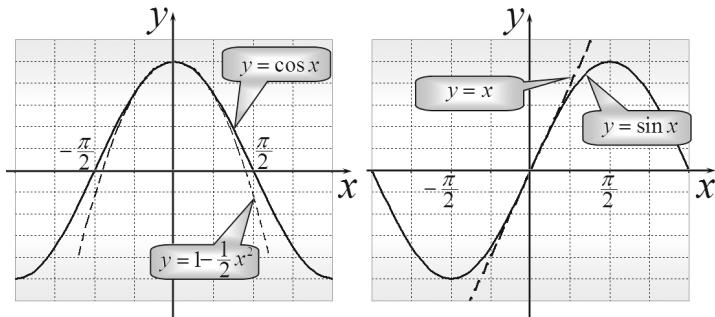


Рис. 191

а производная косинуса равна синусу, взятому с противоположным знаком:

$$(\cos x)' = -\sin x. \quad (14)$$

## 6.2. Кинематика колебательного движения

В данном разделе мы рассмотрим простейшую кинематическую модель колебательного движения материальной точки, движущейся вдоль прямой. Условия, при которых эта модель адекватно описывает реальные колебания, могут быть получены только на основании физических законов, в частности, законов динамики.

Для построения этой модели обратим внимание, что равномерное движение точки по окружности является периодическим процессом. Действительно, пусть материальная точка  $C$  движется с постоянной угловой скоростью  $\omega$  по окружности радиуса  $A$  (рис. 192). При этом угловая координата точки будет изменяться по линейному закону

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \quad (1)$$

где  $\varphi_0$  – начальная координата точки. Несмотря на то что угол поворота монотонно возрастает через равные промежутки времени, равные периоду вращения  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , точка возвращается в исходное положение, в котором ее кинематические характеристики (скорость, ускорение) принимают исходные значения. Если радиус-вектор точки, векторы ее скорости и ускорения изменяются по периодическому закону, то и их проекции также изменяются по периодическим законам. Иными словами, движение проекции точки на любую из осей координат является колебательным движением вдоль прямой.

Такое колебательное движение проекции можно наблюдать в реальном эксперименте. Для этого необходимо поместить вращающийся по окружности шарик перед плоским экраном и осветить его световым потоком, параллельным плоскости вращения (рис. 193). В этом случае тень от шарика будет совершать колебания вдоль одной прямой.

Даже не зная тригонометрических функций, достаточно легко построить график закона движе-

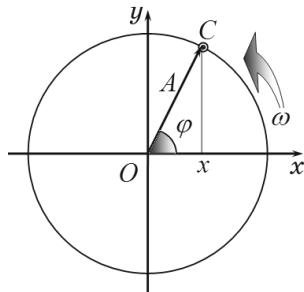


Рис. 192

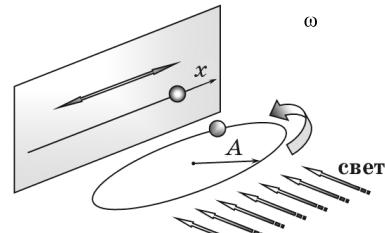


Рис. 193

ния тени шарика. Для этого необходимо изобразить окружность, отметить на ней равноотстоящие точки, а затем нанести на график временной зависимости их координаты через равноотстоящие интервалы времени (рис. 194).

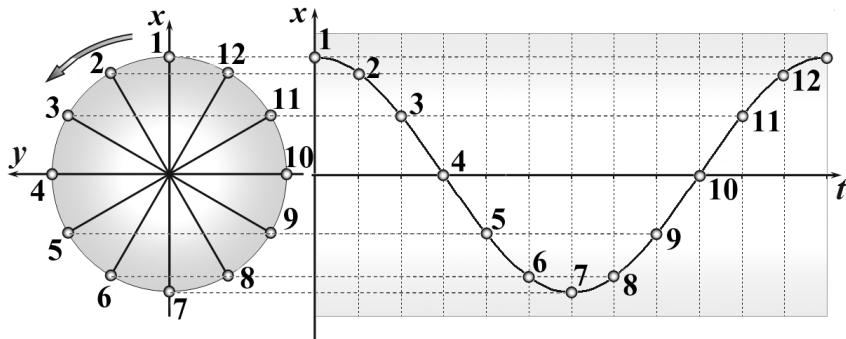


Рис. 194

Не будем делать вид, что нам совсем незнакома ни тригонометрия, ни кинематические законы равномерного движения по окружности, и на их основании получим строгие выражения для кинематических характеристик рассматриваемой модели колебательного движения.

Еще раз изобразим часть окружности радиуса  $A$ , по которой движется материальная точка  $C$  (рис. 195). Положение точки задается радиус-вектором  $\vec{r}$ , направленным под переменным углом  $\varphi$  к оси  $Ox$ .

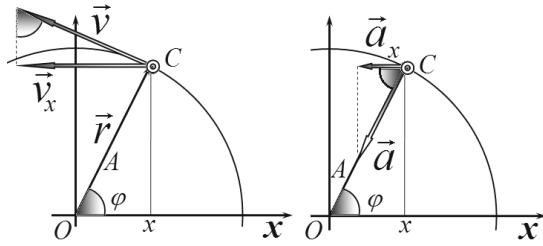


Рис. 195

Проекция этого вектора на ось  $Ox$  равна

$$x = A \cos \varphi. \quad (2)$$

Учитывая, что угол поворота изменяется в соответствии с формулой (1), получим закон изменения координаты точки от времени:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (3)$$

**Движение, при котором координата точки изменяется по закону косинуса (или синуса), называется гармоническим<sup>\*</sup> колебанием.** Таким образом, при равномерном движении точки по окружности ее проекция совершает гармонические колебания.

Как следует из вида функции (3), гармоническое колебание точки определяется тремя параметрами, каждый из которых имеет наглядный смысл<sup>\*\*</sup>. Параметр  $A$  называется **амплитудой колебаний**, он равен максимальному отклонению точки от центрального положения. Эта величина имеет ту же размерность, что и координата  $x$ , то есть размерность длины. Изменяющаяся величина  $\varphi = \omega t + \varphi_0$  называется **фазой колебания**, а величина  $\varphi_0$  – **начальной фазой**.

---

\* Подчеркнем, что не все колебания являются гармоническими, однако рассматриваемый здесь вид колебаний является простейшей моделью колебательного движения, тем не менее достаточно часто встречающейся в действительности. Название этого вида движения связано с тем, что функции синус и косинус называются гармоническими функциями, как наиболее совершенные и изящные (по мнению некоторых математиков).

\*\* Все эти параметры имеют явные аналоги в характеристиках движения по окружности, однако в теории колебательного движения они получили «персональные имена».

Параметр  $\omega$  называется **круговой частотой колебаний**. Так как период косинуса равен  $2\pi$ , то при изменении аргумента косинуса на эту величину значение функции не меняется. Это обстоятельство позволяет выразить круговую частоту через время одного колебания  $T$  (которое также называется **периодом колебаний**). Для этого следует учесть, что при изменении времени на период  $\Delta t = T$  фаза колебания изменяется на  $\Delta\phi = \omega\Delta t = 2\pi$ , то есть  $\omega T = 2\pi$ . Таким образом, круговая частота связана с периодом колебания соотношением

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (4)$$

Более наглядной характеристикой колебаний является **обычная частота  $v$  – число колебаний в единицу времени**. Если период – это время одного колебания, то величина, обратная периоду, равна числу колебаний в единицу времени, то есть частоте колебаний

$$v = \frac{1}{T}. \quad (5)$$

С помощью соотношений (4)-(5) легко связать круговую и обычную частоты колебаний:

$$\omega = 2\pi v. \quad (6)$$

Очевидно, что круговая и обычные частоты являются размерными физическими величинами, их размерность обратна размерности времени  $[\omega] = [v] = [T] = c^{-1}$ . Для обычной частоты колебаний единица ее измерения называется герц (сокращенно Гц): частота колебаний 1 герц означает одно колебание в секунду.

На основании полученного соотношения (6) иногда говорят, что круговая частота колебаний равна числу колебаний за  $2\pi$  секунд. Однако, по нашему мнению, такое определение является излишним, потому что, во-первых, попробуйте точно отмерить указанное количество секунд, а во-вторых, время не обязательно измерять в секундах. Поэтому к этой величине следует относиться как к удобной вспомогательной математической величине: если везде использовать только физически наглядную частоту колебаний  $v$ , то во всех формулах придется дописывать множитель  $2\pi$ , что приводит к необоснованному перерасходу чернил и бумаги. Также не следует искать особого наглядного смысла в фазе колебаний.

Отметим, что подобные замечания касательно угловой скорости вращения  $\omega$  (аналогом которой является круговая частота) не обоснованы, так как угловая скорость имеет явный физический смысл – угол поворота (измеренный в радианах) в единицу времени.

При движении по окружности вектор скорости точки направлен по касательной к окружности (см. рис. 189), его модуль равен  $v = \omega A$  (напомним, здесь  $A$  – радиус окружности). Если проекция радиус-вектора  $\vec{r}$  есть координата точки  $x$ , то проекция вектора скорости  $\vec{v}$  на ту же ось будет равна скорости движения проекции. Из рисунка несложно определить, что проекция вектора скорости на ось  $Ox$  равна  $v_x = -v \sin \varphi$ . Используя выражения для

модуля скорости и выражение для угла поворота, определяем, что скорость точки при гармоническом колебании (3) зависит от времени по закону

$$v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi_0). \quad (7)$$

Величина  $\omega A = v_0$  равна максимальной скорости движения точки при гармонических колебаниях. Отметим также, что при гармонических колебаниях скорость точки также изменяется по гармоническому закону.

Аналогичным образом найдем ускорение точки, совершающей гармонические колебания. Так при равномерном движении по окружности ускорение точки является центростремительным, то есть вектор ускорения  $\vec{a}$  направлен к центру окружности, а его модуль равен  $a = \omega^2 A$ . Из рис. 196 следует, проекция вектора ускорения на выбранную ось  $Ox$  равна  $a_x = -\cos \varphi$ . Следовательно, зависимость ускорения от времени при гармонических колебаниях имеет вид

$$a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi_0). \quad (8)$$

Полученные функции зависимости скорости и ускорения точки от времени можно найти непосредственно из закона движения (3). Действительно, мгновенная скорость является первой производной координаты по времени, поэтому функция (7) является первой производной от функции (3).

$$v(t) = (x(t))' = -\omega A \sin(\omega t + \phi_0). \quad (7a)$$

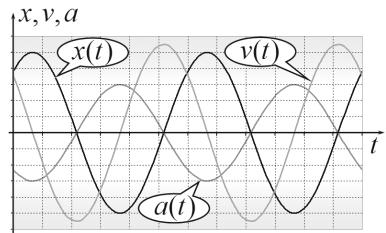


Рис. 196

Аналогично, зависимость ускорения от времени (8) является первой производной от скорости (7) или второй производной координаты (3).

$$a(t) = (v(t))' = (x(t))'' = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi_0). \quad (8a)$$

На рис. 196 показаны графики зависимостей координаты  $x(t)$ , скорости  $v(t)$  и ускорения  $a(t)$  точки, совершающей гармонические колебания. Все эти зависимости описываются гармоническими функциями одного периода (одинаковой частоты), сдвинутыми друг относительно друга на четверть периода (которому соответствует сдвиг фазы на  $\pi/2$ ). Между нулями и экстремумами этих функций существуют очевидные соответствия: координата движущейся точки достигает максимального и минимального значения, когда ее скорость обращается в нуль; модуль скорости максимален, когда точка проходит через нулевую координату; модуль ускорения максимален, когда скорость равна нулю, а отклонение точки максимально.

Теперь обратим внимание на чрезвычайно интересное и важное соотношение между ускорением точки и ее координатой, которое следует из сравнения функций (8) и (3):

$$a = -\omega^2 x. \quad (9)$$

При гармонических колебаниях ускорение точки пропорционально ее координате, с отрицательным коэффициентом пропорциональности.

При изучении механического движения мы неоднократно подчеркивали, что известная зависимость ускорения тела  $\vec{a}(t, \vec{r}, \vec{v})$  от времени, координат, скорости при известных начальных

условиях позволяет однозначно найти закон движения – зависимость координат от времени  $\bar{r}(t)$ , то есть решить основную задачу механики. Уравнение (9) является частным случаем этой задачи: ускорение зависит от координаты, причем элементарным образом, оно просто пропорционально ей. Следовательно, если на основании динамических законов нам удастся показать, что в некоторой реальной физической системе выполняется уравнение (9), то мы можем однозначно утверждать, что эта система может совершать гармонические колебания.

Мы получили это важнейшее уравнение, исходя из рассмотрения закона движения (3). Теперь мы можем решить обратную задачу: если при движении материальной точки ее ускорение связано с координатой соотношением (9), то зависимость координаты от времени описывается функцией:

$$x(t) = A_0 \cos(\omega t + \phi_0). \quad (10)$$

В этом выражении параметры  $A_0$  (амплитуда колебаний) и  $\phi_0$  (начальная фаза) могут быть любыми: при любых значениях этих параметров функция (10) удовлетворяет уравнению (9).

Несмотря на указанный произвол в решении уравнения (9), само уравнение уже немало говорит о возможных движениях системы: во-первых, оно указывает, что движение есть гармоническое колебание, во-вторых, однозначно указывает частоту колебаний. Коэффициент пропорциональности в этом уравнении есть квадрат круговой частоты, взятый с противоположным знаком.

Вспомним. Пусть все силы, действующие на тело, постоянны и по величине, и по направлению. В этом случае из законов динамики следует, что движение тела является равноускоренным, причем величина ускорения также определяется на основании этих же законов. Однако для однозначного нахождения закона движения требуется задание начальных условий.

Чтобы однозначно определить закон движения при гармонических колебаниях, необходимо произвольные параметры  $A_0$  и  $\phi_0$  выразить через начальные условия. Итак, пусть заданы начальные условия:

$$\text{при } t = 0 \quad \begin{cases} x = x_0 \\ v = v_0. \end{cases} \quad (11)$$

Используя тригонометрическую формулу для косинуса суммы, перепишем выражение (10) в виде

$$x(t) = A_0 \cos(\omega t + \phi_0) = A_0 (\cos\phi_0 \cdot \cos\omega t - \sin\phi_0 \cdot \sin\omega t) = A \cos\omega t + B \sin\omega t, \quad (12)$$

в котором вместо двух произвольных параметров  $A_0$  и  $\phi_0$  введены два новых параметра:

$$\begin{aligned} A &= A_0 \cos \phi_0 \\ B &= -A_0 \sin \phi_0. \end{aligned} \quad (13)$$

Аналогичным образом можно преобразовать выражение\* для скорости частицы (7):

$$v = -\omega A_0 \sin(\omega t + \phi_0) = -\omega A_0 (\sin\omega t \cdot \cos\phi_0 + \cos\omega t \cdot \sin\phi_0) = -\omega A \sin\omega t + \omega B \cos\omega t, \quad (14)$$

\* Конечно, можно просто взять производную от функции (12).

Подставим в функции (12) и (14) начальные условия (11), получим выражения

$$x(0) = x_0 = A \cos 0 + B \sin 0 = A$$

$$v(0) = v_0 = -\omega A \cos 0 + \omega B \sin 0 = \omega B,$$

из которых следуют искомые формулы для параметров функции (12):

$$A = x_0, \quad B = \frac{v_0}{\omega}.$$

Таким образом, решение уравнения (9) с начальными условиями (11) имеет вид

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (15)$$

Не составляет труда представить эту же функцию в виде (10). Так, амплитуда колебаний при заданных начальных условиях определяется выражением

$$A_0 = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}, \quad (16)$$

а начальная фаза удовлетворяет условию

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi_0} = -\frac{B}{A} = -\frac{v_0}{\omega x_0}. \quad (17)$$

Подчеркнем еще одно важнейшее свойство гармонических колебаний, описываемых уравнением (9): **период и частота этих колебаний не зависят от их амплитуды**. Если амплитуда колебаний определяется начальными условиями, то их частота полностью определяется коэффициентом пропорциональности между ускорением и координатой точки.

Формально, с математической точки зрения, уравнение (9) можно рассматривать в общем виде. Пусть некоторая функция  $X(t)$  удовлетворяет условию, что ее вторая производная пропорциональна самой функции (с отрицательным коэффициентом пропорциональности)

$$X'' = -\omega^2 X, \quad (10)$$

тогда эта функция изменяется по гармоническому закону  $X(t) = A \cos(\omega t + \phi_0)$ , в котором параметры  $A$  и  $\phi_0$  находят из начальных условий, а круговая частота определяется самим уравнением.

### 6.3. Фазовые траектории колебательного движения

Рассмотрим еще один наглядный способ графического представления произвольных (не только гармонических) колебаний. Пусть закон колебательного движения описывается функцией  $x(t)$ , которая обязательно является периодической. По известному закону движения можно определить зависимость скорости от времени как производную от координаты  $v(t) = (x(t))'$ . Введем на плоскости декартову систему координат, вдоль одной из осей которой будем откладывать координату точки, а вдоль другой – ее скорость. Введенная таким образом система называется **фазовой плоскостью**. Две функции  $x(t)$  и  $v(t)$  в любой момент времени определяют на этой плоскости некоторую точку, а геометрическое место этих точек образу-

ет некоторую непрерывную линию, которая называется **фазовой траекторией**.

Приведем пример построения фазовой траектории. Пусть небольшой упругий шарик брошен вертикально вверх (рис. 197) с начальной скоростью  $v_0$ . Если пренебречь сопротивлением воздуха, то скорость шарика будет изменяться со временем по закону

$$v = v_0 - gt, \quad (1)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения. Изменение координаты шарика с течением времени описывается функцией

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \quad (2)$$

Поднявшись на максимальную высоту  $h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$ , шарик упадет на горизонтальную поверхность и отразится от нее. Если удар считать абсолютно упругим, то скорость шарика после удара примет первоначальное значение, после чего движение шарика будет повторяться. Графики зависимостей координаты и скорости шарика\* от времени показаны на рис. 198.

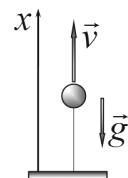


Рис. 197

---

\* Стого говоря, процесс движения шарика не будет строго периодическим, так как скорость шарика будет изменяться вследствие сопротивления воздуха и неупругости его ударов. Кроме того, удар шарика и изменение его скорости происходит не мгновенно, а в течение некоторого промежутка времени, который пренебрежимо мал по сравнению со временем его свободного движения.

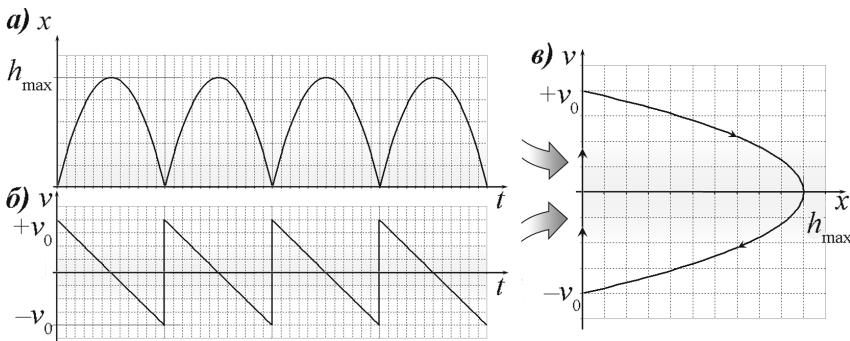


Рис. 198

Эти же функции (1), (2) определяют в параметрической форме линию на фазовой плоскости – фазовую траекторию движения шарика. Эта линия показана на рис. 198в. Понятно, что при периодическом движении фазовая траектория является замкнутой. На фазовой траектории принято указывать направление движения: при положительной скорости координата возрастает, а при отрицательной скорости координата убывает.

Иногда говорят, что фазовая траектория указывает зависимость скорости от координаты, но такое высказывание не всегда корректно: так, одной координате может соответствовать несколько значений скорости (как в рассмотренном примере). А функциональная зависимость требует однозначного соответствия: каждому значению координаты соответствует единственное значение скорости.

Особенно просто выглядит фазовая траектория гармонического колебания, при котором координата и скорость описываются функциями

$$\begin{cases} x = A \cos(\omega t + \varphi_0) \\ v = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0). \end{cases} \quad (3)$$

Из этих уравнений следует, что уравнение фазовой траектории можно записать в виде

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{v}{\omega A}\right)^2 = 1, \quad (4)$$

которое является уравнением эллипса\* с полуосами  $A$  и  $\omega A$  (рис. 199а). Еще более предпочтительным является построение фазовой траектории в относительных единицах: когда на одной оси откладываются отношения координат к амплитуде колебаний  $\left(\frac{x}{A}\right)$ , а

на другой – отношение скорости к максимальной скорости движения  $\left(\frac{v}{\omega A}\right)$ . В этих коор-

динатах фазовая траектория гармонического колебания является окружностью единичного радиуса (рис. 199б).

С помощью фазовой диаграммы легко анализировать характер колебания – так, отличить окружность от другой замкнутой кривой легко даже «на глаз».

\* Можно дать следующее «определение» этой хорошо знакомой линии: эллипс – «это круг, который можно вписать в квадрат со сторонами 3 x 4».

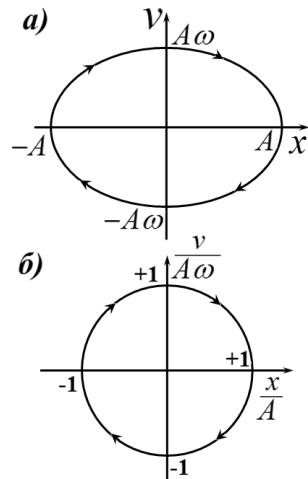


Рис. 199

## 6.4. Негармонические колебания. Разложение Фурье

Сейчас мы покажем, что использование модели гармонических колебаний позволяет описывать и более сложные периодические движения. Еще в 1822 году французский физик и математик Жан Батист Жозеф Фурье в своей работе «Аналитическая теория теплоты» показал, что любая периодическая функция может быть представлена в виде суммы гармонических функций (то есть синусов и косинусов), причем частоты этих функций являются кратными основной частоте. Так, если период некоторой функции  $x(t)$  равен  $T$ , то эта функция может быть представлена в виде суммы (разложения Фурье):

$$\begin{aligned}x(t) &= A_0 + (A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t) + (A_2 \cos 2\omega t + B_2 \sin 2\omega t) + \\&+ (A_3 \cos 3\omega t + B_3 \sin 3\omega t) + \dots = \\&= A_0 + \sum_k (A_k \cos k\omega t + B_k \sin k\omega t).\end{aligned}$$

В общем случае эта сумма должна содержать бесконечно много слагаемых, однако в большинстве практически значимых случаев коэффициенты этого разложения достаточно быстро убывают с ростом номера  $k$  (и соответствующей частоты  $\omega_k = k \frac{2\pi}{T}$ ), поэтому практически всегда с достаточной степенью точности можно ограничиться относительно небольшим числом слагаемых.

С разложением периодической функции хорошо знакомы музыканты, которые знают, что каж-

дой ноте (основному тону), взятой на любом музыкальном инструменте, соответствует целый набор кратных частот (обертонов). Набор этих колебаний с кратными частотами составляет тембр звука.

Существуют достаточно простые формулы, позволяющие находить коэффициенты разложения Фурье. Мы не собираемся в дальнейшем использовать разложение Фурье, поэтому ограничимся простым примером разложения периодических функций.

На рис. 200 показаны графики функций  $v(t) = \sum_{k=1}^N \frac{\sin(kt)}{k}$  при различных значениях числа слагаемых  $N$ . Нетрудно догадаться, что при больших  $N$  эти функции стремятся к рассмотренной выше зависимости скорости от времени, изображенной на рис. 198. Даже при относительно небольшом  $N = 5$  сходство этих функций уже вполне узнаваемо. Можно найти и разложение Фурье для зависимости координаты от времени в этом же примере, являющейся набором парабол. Эта зависимость выражается суммой  $x(t) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^N \frac{\cos(kt)}{k^2}$ .

Графики этих функций для разного числа слагаемых также изображены на рис. 200.

Таким образом, с математической точки зрения, прыгающий шарик вполне можно описать суммой десяти гармонических колебаний с кратными частотами.

На этом мы заканчиваем рассмотрение кинематического описания колебательного движения, ко-

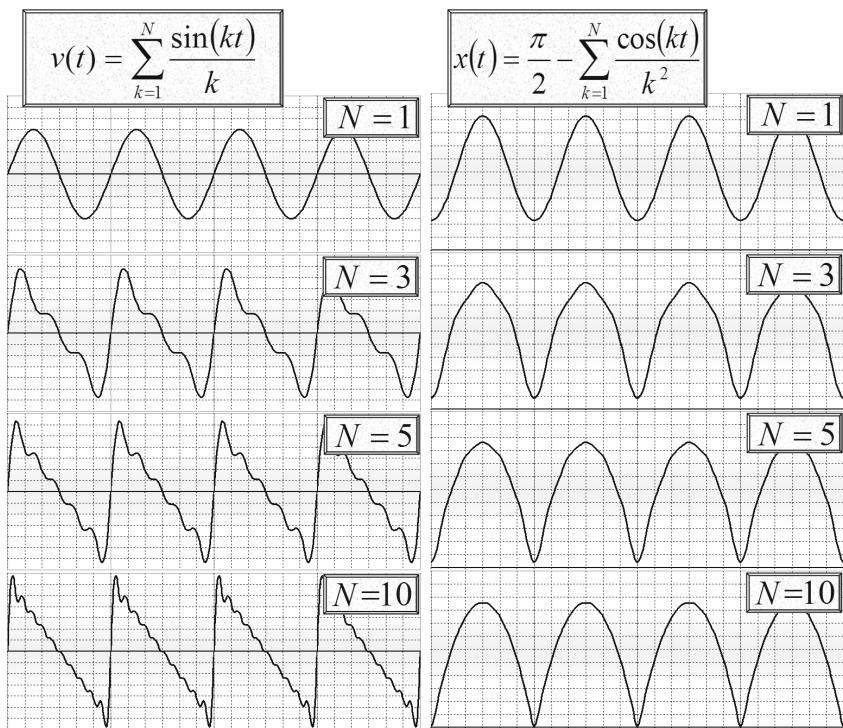


Рис. 200

торое во многом построено на основании описания равномерного движения материальной точки по окружности. Подчеркнем, что многократное упоминание о равномерности движения не является излишним. Так как при неравномерном движении по окружности движущаяся материальная точка, конечно, будет возвращаться в исходные положения, но не через равные промежутки времени, ее движение не будет периодическим, кроме того, скорость и ускорение также не будут изменяться периодически.

Для примера, на рис. 201 показан график зависимости координаты точки, движущейся по окружности равнотускоренно. Эта функция описывается выражением  $x = A \cos \frac{\beta t^2}{2}$ .

Видно, что эта функция не периодическая.

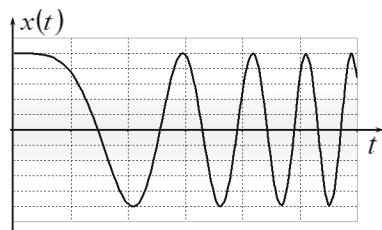


Рис. 201

## §7. Простейшие колебательные системы

Если система обладает одной степенью свободы и в ней возможны гармонические колебания, то такая система называется **гармоническим осциллятором**<sup>\*</sup>. Рассмотрим несколько примеров таких механических систем, которые также называют маятниками.

### 7.1. Пружинный маятник

Опишем движение небольшого бруска массой  $m$ , расположенного на гладкой горизонтальной поверхности и прикрепленного к неподвижному упору с помощью легкой пружины жесткости  $k$  (рис. 202). Положение бруска будем описывать с помощью декартовой координаты  $x$ , начало отсчета которой совместим с положением, в котором пружина не деформирована.

При отклонении бруска от положения равновесия на него будет действовать сила упругости пружины  $\vec{F}$ , направленная к положению равновесия, ее модуль определяется законом Гука  $F = kx$ . На

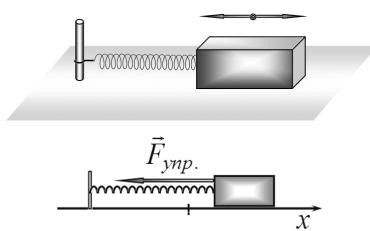


Рис. 202

\* В переводе с латинского осцилляции означают «колебания».

основании второго закона Ньютона и пренебрегая трением, запишем уравнение, описывающее движение бруска:

$$ma = -kx. \quad (1)$$

Из этого уравнения следует, что ускорение бруска зависит от его координаты

$$a = -\frac{k}{m}x, \quad (2)$$

то есть пропорционально координате с отрицательным коэффициентом пропорциональности. Сравнивая с полученным ранее кинематическим уравнением, связывающим ускорение тела с его координатой

$$a = -\omega^2 x, \quad (3)$$

мы убеждаемся в их полной тождественности. На основании этого мы делаем обоснованный вывод: в рассматриваемой системе брусков совершают гармонические колебания  $x = A \cos(\omega t + \phi_0)$ . Частота этих колебаний не зависит от их амплитуды и легко находится из сравнения уравнений (2) и (3), идентичность которых требует выполнения условия  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ , или

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad v = \frac{\omega}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (4)$$

Период колебаний бруска равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (5)$$

Полученные формулы для частоты и периода колебаний качественно легко объяснимы: частота

колебаний возрастает с ростом жесткости пружины и убывает при возрастании массы груза.

Колебания, возникающие под действием внутренних возвращающих консервативных сил, называются **свободными**.

Подчеркнем: сейчас мы получили уравнение (2) на основании законов динамики, его совпадение с рассмотренным ранее кинематическим уравнением (3) заранее не предполагалось, это можно даже назвать «счастливым совпадением».

Закон движения бруска однозначно определяется при задании начальных условий. Зависимость параметров закона движения от начальных условий была рассмотрена нами ранее, поэтому здесь укажем только два крайних случая начальных условий.

Если мы отклоним бруск от положения равновесия на расстояние  $A$  и отпустим его без толчка (начальные условия: при  $t = 0$   $x_0 = A$ ,  $v_0 = 0$ ), то закон движения будет иметь вид

$$x = A \cos \omega t. \quad (5)$$

В другом предельном случае, когда бруsku резким толчком сообщают начальную скорость (начальные условия: при  $t = 0$   $x_0 = 0$ ,  $v = v_0$ ), закон движения будет несколько иным:

$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (6)$$

Рассмотрим теперь описание движения небольшого шарика массой  $m$ , подвешенного на легкой пружине жесткостью  $k$  (рис. 203). Направим

ось  $Ox$  вертикально вниз, начало отсчета совместим с положением недеформированной пружины. В процессе движения на шарик действуют сила тяжести  $m\vec{g}$  и сила упругости  $\vec{F}_{ypr.}$ , модуль которой определяется законом Гука  $F_{ypr.} = kx$ . Уравнение второго закона Ньютона в проекции на введенную ось имеет вид

$$ma = m\vec{g} - kx. \quad (7)$$

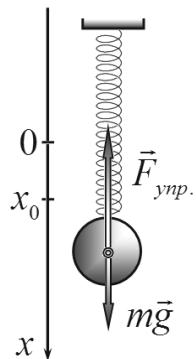


Рис. 203

Так как сила упругости зависит от координаты шарика (следовательно, непостоянна), то движение шарика не будет равноускоренным. Понятно, что движение шарика будет колебательным, но, на первый взгляд, уравнение его движения (7) отличается от рассмотренного нами уравнения гармонических колебаний: присутствует постоянная составляющая  $mg$ . Преобразуем уравнение (7):

$$ma = -k\left(x - \frac{mg}{k}\right). \quad (8)$$

Появившаяся в уравнении величина  $x_0 = \frac{mg}{k}$  имеет наглядный смысл: она указывает положение равновесия шарика, в котором сила тяжести уравновешивается силой упругости  $mg = kx_0$ . Теперь мы можем сместить начало отсчета оси координат, совместив его с положением равновесия. В этой измененной системе отсчета координата шарика равна  $x_1 = x - x_0$ , ускорение шарика и в новой

системе отсчета остается прежним  $a_1 = a$ . Поэтому уравнение движения шарика в этой системе отсчета имеет вид, полностью совпадающий с уравнением гармонических колебаний

$$ma_1 = -kx_1, \quad (9)$$

с частотой  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Таким образом, постоянная сила, действующая в колебательной системе, не изменяет частоты колебания, а только смещает положение равновесия. Полное решение уравнения движения (9) нам известно, поэтому можно также записать и полное решение уравнения (7) в исходной системе отсчета

$$x = \frac{mg}{k} + A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (10)$$

в котором произвольные постоянные  $A$ ,  $B$  определяются из начальных условий.

Еще одним общим методом получения уравнения движения является использование закона сохранения энергии. Рассмотрим превращения энергии в ходе колебаний бруска на гладкой горизонтальной поверхности (рис. 202). Для того чтобы вывести брускок из положения равновесия, к нему необходимо приложить внешнюю силу. Эта сила должна совершить положительную работу, тем самым сообщая системе энергию. Эта энергия «запасается» в виде потенциальной энергии де-

формированной пружины и равна  $U_0 = \frac{kx_0^2}{2}$ . Если брускок еще и дополнительно толкнуть, то система

получит дополнительную энергию в форме кинетической энергии бруска  $E_{\text{кин.0}} = \frac{mv_0^2}{2}$ .

В процессе движения бруска происходят постоянные переходы энергии из потенциальной в кинетическую (когда брусков движется к положению равновесия – сила упругости совершают положительную работу, поэтому кинетическая энергия возрастает) и обратно – из кинетической в потенциальную (когда брусков удаляются от положения равновесия – работа силы упругости отрицательна, поэтому кинетическая энергия убывает).

Пренебрегая трением, закон сохранения механической энергии выражается уравнением

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E, \quad (11)$$

в котором сумма кинетической энергии бруска и потенциальной энергии деформированной пружины остается постоянной величиной, которая легко выражается через начальные условия

$E = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{kx_0^2}{2}$ . В уравнении (11) неизвестной является зависимость координаты от времени  $x(t)$ , скорость движения является производной от координаты по времени  $v(t) = x'(t)$ . Таким образом, с математической точки зрения уравнение (11) содержит неизвестную функцию и ее производную. Подставим в это уравнение закон движения, найденный нами из динамического уравнения (1):

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (12)$$

Зависимость скорости от времени описывается в этом случае функцией

$$v(t) = -x_0 \omega \sin \omega t + v_0 \cos \omega t. \quad (13)$$

Несложно убедиться, что эти функции при подстановке в уравнение (11) превращают его в верное тождество (конечно, при  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ ), следовательно, функция (12) является решением этого уравнения.

Таким образом, уравнение (12) также является уравнением гармонических колебаний, оно полностью эквивалентно (равносильно) уравнению (1).

Для доказательства этого утверждения достаточно взять производную по времени от уравнения (11):

$$\frac{m}{2} 2vv' + \frac{k}{2} 2xx' = 0,$$

при выводе учтено, что производная от постоянной энергии равна нулю; учитывая, что производная от координаты равна скорости  $x' = v$ , а производная от скорости есть ускорение  $v' = a$ , получаем после сокращения уравнение (1)  $ma + kx = 0$ . Можно также провести и обратный математический переход от уравнения (1) к уравнению (11).

Интересно, что решение уравнения (11) можно найти «по теореме Пифагора». Действительно, предположим, что его решением является

функция, изменяющаяся по «закону косинуса»:  $x(t) = A \cos \omega t$ , тогда скорость будет изменяться «по закону синуса»:  $v = -\omega A \sin \omega t$ . По известному основному тригонометрическому тождеству сумма квадратов синуса и косинуса равна единице, следовательно, можно подобрать такое значение параметра  $\omega$ , чтобы уравнение (11) приводило к этому тождеству. Подставляя записанные выражения для зависимостей координаты и скорости от времени в уравнение (11), получим

$$\frac{m}{2}(-\omega A \sin \omega t)^2 + \frac{k}{2}(A \cos \omega t)^2 = E,$$

после очевидного преобразования

$$\frac{kA^2}{2} \left( \cos^2 \omega t + \frac{m\omega^2}{k} \sin^2 \omega t \right) = E.$$

Чтобы это уравнение превратилось в тождество, необходимо, чтобы выполнялось условие  $\frac{m\omega^2}{k} = 1$ , из которого следует известная формула для периода колебаний. Амплитуда колебаний  $A$  выражается через полную энергию системы.

Подведем основной итог: если на основании физических законов (главным образом закона сохранения энергии) удалось показать, что некоторая переменная величина  $X(t)$  и ее производная  $V(t) = X'(t)$  связаны соотношением

$$V^2 + \omega^2 X^2 = \text{const}, \quad (14)$$

то величина  $X$  изменяется по гармоническому закону с круговой частотой  $\omega$ .

## 7.2. Математический маятник

Небольшой шарик, подвешенный на легкой нерастяжимой нити, способен совершать **свободное** колебательное движение (рис. 204). Для описания движения маятника будем считать шарик материальной точкой, пренебрежем массой нити и сопротивлением воздуха. Такая модель называется **математическим маятником**.

В качестве координаты, описывающей положение шарика, выберем угол отклонения нити от вертикали  $\varphi$ . Для описания изменения этой координаты удобно использовать уравнение динамики вращательного движения

$$J\ddot{\varphi} = M, \quad (1)$$

где  $J = ml^2$  – момент инерции системы,

$\ddot{\varphi} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$  – угловое ускорение тела (вторая производная от угла поворота),  $M$  – суммарный момент внешних сил, действующих на систему\*. На шарик действуют силы тяжести  $m\vec{g}$  и натяжения нити. Момент силы натяжения нити  $\vec{N}$  относительно точки подвеса равен нулю, поэтому уравнение (1) для подвешенного шарика приобретает вид

\* В принципе, можно использовать и уравнения динамики поступательного движения, но используемый здесь подход является предпочтительным, так как траекторией движения точки является дуга окружности.

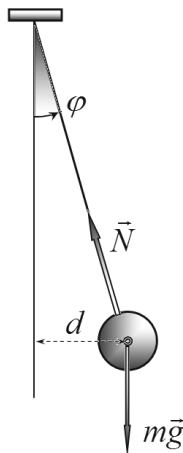


Рис. 204

$$ml^2\varepsilon = mgl \sin \varphi, \quad (2)$$

или

$$\varepsilon = -\frac{g}{l} \sin \varphi. \quad (3)$$

Это уравнение описывает колебания маятника, но не является уравнением гармонических колебаний, так как момент сил пропорционален синусу угла отклонения, а не самому углу. Однако, если считать углы отклонения малыми (сколько это — мы выясним позднее), можно воспользоваться приближенной формулой  $\sin \varphi \approx \varphi$ , в этом приближении уравнение (3) превращается в знакомое уравнение гармонических колебаний

$$\varepsilon = -\Omega^2 \varphi, \quad (4)$$

где  $\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$  — круговая частота малых колебаний маятника\*. Решение этого уравнения мы уже выписывали

$$\varphi = \varphi_0 \cos \Omega t, \quad (5)$$

здесь  $\varphi_0$  — максимальное отклонение нити, то есть амплитуда колебаний. Для простоты будем считать, что начальная скорость шарика равна нулю.

Период малых колебаний маятника выражается через круговую частоту:

---

\* Мы выбрали обозначение  $\Omega$  (это тоже «омега», только заглавная) для собственной частоты малых колебаний, чтобы традиционное обозначение  $\omega$  оставить за угловой скоростью движения шарика, которая далее будет фигурировать в наших рассуждениях.

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (6)$$

Так как малые колебания математического маятника являются гармоническими, то их период не зависит от амплитуды. Этот факт был экспериментально отмечен еще Г. Галилеем. При больших углах отклонения период колебаний математического маятника незначительно возрастает.

Отметим, что период колебаний математического маятника не зависит также от массы шарика – вспомните, ускорение свободного падения, а также другие характеристики движения тела в поле тяжести Земли также не зависят от массы тела (если, конечно, пренебречь сопротивлением воздуха).

Формула (6) может быть использована и используется для экспериментального определения ускорения свободного падения. Длина нити и период колебаний достаточно просто измерить экспериментально, затем с помощью формулы (6) можно рассчитать ускорение свободного падения.

Попробуем описать движение математического маятника с помощью закона сохранения механической энергии. Кинетическая энергия шарика выражается формулой  $E_{кин.} = \frac{J\omega^2}{2} = \frac{ml^2\omega^2}{2}$ .

Нулевой уровень отсчета потенциальной энергии совместим с точкой подвеса нити, тогда потенциальная энергия шарика равна  $U = -mgl \cos\varphi$ . Урав-

нение закона сохранения механической энергии (с учетом начальных условий) имеет вид

$$\frac{ml^2\omega^2}{2} - mgl \cos\varphi = -mgl \cos\varphi_0. \quad (7)$$

Это уравнение также не является уравнением гармонических колебаний. Но если мы опять будем считать углы отклонения маятника малыми и воспользуемся приближенной формулой  $\cos\varphi \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ , то уравнение (7) перейдет в уравнение гармонических колебаний

$$\frac{ml^2\omega^2}{2} + \frac{mgl\varphi^2}{2} = \frac{mgl\varphi_0^2}{2},$$

или

$$\frac{\omega^2}{2} + \frac{\Omega^2\varphi^2}{2} = \frac{\Omega^2\varphi_0^2}{2}, \quad (8)$$

где обозначено  $\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$  – круговая частота колебаний, совпадающая с полученной из динамического уравнения (2).

Конечно, такое совпадение не является случайным: фактически, в обоих подходах мы использовали одно и то же приближение малых углов отклонения.

### 7.3. Математический маятник с пружиной

Рассмотрим еще один пример колебательной системы, являющейся «гибридом» математи-

ческого и пружинного маятника (рис. 205): к шарику, подвешенному на нити длиной  $l$ , прикреплена легкая пружина так, что в положении равновесия нить маятника располагается вертикально (в этом случае пружина не деформирована). По-прежнему положение маятника будем описывать с помощью угла отклонения  $\varphi$ , который будем считать малым. Уравнение динамики вращательного движения относительно точки подвеса для шарика будет иметь вид

$$J\varepsilon = -mgl \sin\varphi - F_{ynp} l \cos\varphi, \quad (1)$$

где  $J = ml^2$  – момент инерции маятника,  $\varepsilon$  – угловое ускорение,  $mgl \sin\varphi$  – момент силы тяжести,  $d_F = l \cos\varphi$  – момент силы упругости. Считая угол отклонения малым, удлинение пружины можно представить в виде  $\Delta x = l\varphi$  и при этом можно считать, что ось пружины все время остается горизонтальной. В этом же приближении можно положить  $\sin\varphi \approx \varphi$ ,  $\cos\varphi \approx 1$ . Поэтому уравнение (1) упрощается

$$ml^2\beta = -mgl\varphi - k l \varphi \cdot l,$$

или

$$\beta = -\left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)\varphi. \quad (2)$$

Это уравнение является уравнением гармонических колебаний: ускорение пропорционально

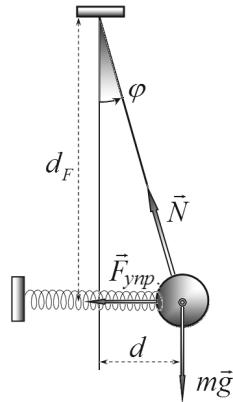


Рис. 205

смещению от положения равновесия. Круговая частота этих колебаний равна

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{k}{m}}. \quad (3)$$

При желании и наличии фантазии в этой формуле можно увидеть «теорему Пифагора». Обозначим  $\Omega_y = \sqrt{\frac{g}{l}}$  — круговая частота математического маятника,  $\Omega_x = \sqrt{\frac{k}{m}}$  — круговая частота пружинного маятника (если они не связаны между собой). Тогда частота колебаний объединенного маятника в соответствии с формулой (3) удовлетворяет соотношению

$$\Omega_0^2 = \Omega_x^2 + \Omega_y^2.$$

## 7.4. Колебание жидкости в трубке

Рассмотрим еще один пример колебательной системы. Пусть в вертикальной U-образной трубке находится вода (рис. 206). В состоянии равновесия верхний уровень воды расположен на высоте  $l$ . Воду вывели из положения равновесия, и она совершает колебания, переливаясь из одного колена трубки в другое. Для определения частоты (или периода) этих колебаний воспользуемся законом сохранения энергии. В качестве координаты

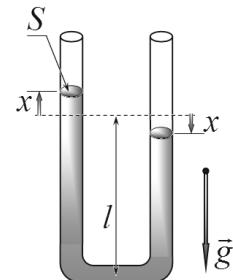


Рис. 206

ты, характеризующей положение воды, выберем величину  $x$  – отклонение уровня воды в одном колене от положения равновесия. Если площадь поперечного сечения трубы  $S$  постоянна по ее длине, то скорость течения жидкости будет одинакова и равна производной от введенной координаты  $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ . Следовательно, кинетическая энергия движущейся жидкости равна

$$E_{\text{кин.}} = \frac{mv^2}{2} = 2\rho Sl \frac{v^2}{2}, \quad (1)$$

где  $\rho$  – плотность воды,  $2Sl$  – ее объем (пренебрегая жидкостью, находящейся в нижней части трубы, которую будем считать малой). Для расчета потенциальной энергии вспомним, что потенциальная энергия тела в поле тяжести Земли равна произведению массы тела, ускорения свободного падения и высоты центра масс, поэтому в рассматриваемом случае

$$U = \rho g S \left( l + x \right) \frac{(l+x)}{2} + \rho g S \left( l - x \right) \frac{(l-x)}{2} = \rho g S \left( l^2 + x^2 \right), \quad (2)$$

где первое слагаемое равно потенциальной энергии жидкости в левом колене трубы, второе – в правом. Если пренебречь неизбежными потерями механической энергии из-за сил вязкого трения, то сумма кинетической и потенциальной энергии жидкости постоянна, поэтому

$$\rho S l v^2 + \rho g S (l^2 + x^2) = \text{const.}$$

Из этого уравнения следует, что движение жидкости подчиняется уравнению гармонических колебаний

$$v^2 + \frac{g}{l}x^2 = const \quad (3)$$

с круговой частотой  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$  и периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Описать движение жидкости на основании уравнений динамики в данном случае сложнее.

## 7.5. Качественный анализ движения материальной точки

Во многих случаях характер поведения механической системы может быть проанализирован без точного решения уравнений движения. В данном разделе мы рассмотрим один из методов такого качественного анализа.

Пусть материальная точка массы  $m$  может двигаться вдоль прямой, с которой мы совместим ось  $Ox$  декартовой системы координат. Для расчета закона движения этой точки используется уравнение второго закона Ньютона

$$ma = F, \quad (1)$$

где  $a$  – ускорение точки,  $F$  – сумма всех сил, действующих на материальную точку (точнее, сумма проекций сил на выбранную ось). В общем случае силы, действующие на точку, могут быть постоянными, а также зависеть от времени, координаты точки, от ее скорости. Поэтому с математической

точки зрения уравнение (1) следует рассматривать как уравнение относительно неизвестной функции  $x(t)$  – закона движения.

Помимо самой неизвестной функции, в это уравнение входят ее производные\*: первая производная  $x' = v(t)$  – мгновенная скорость точки, вторая производная  $x'' = a$  – ее ускорение. При задании начальных условий (начальной координаты и начальной скорости) это уравнение имеет единственное решение, которое и определяет точный закон движения материальной точки. Однако в большинстве случаев точное решение уравнения (1) вызывает значительные математические трудности, поэтому очень часто его решают численно с помощью компьютера. Один из простейших методов такого численного решения был рассмотрен нами при изучении кинематики.

Если сумма всех сил, действующих на тело, равна нулю, движение такого тела является равномерным. Если все силы, действующие на тело, постоянны (как по величине, так и по направлению), то и их сумма также постоянна. В этом случае движение тела является равноускоренным и его описание не вызывает никаких сложностей.

Оказывается, что в том случае, материальная точка движется вдоль прямой\*\* и силы зависят

---

\* Такие уравнения называются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

\*\* В общем случае можно говорить о движении тела вдоль заданной линии, то есть о движении с одной степенью свободы.

только от координат этой точки, достаточно легко проанализировать характер ее движения, даже не решая явно уравнение движения (1).

### 7.5.1. Автономные системы

Многие из уже изученных нами сил зависят от положения тела (его координаты). Такими силами являются силы всемирного тяготения, силы электростатического взаимодействия, силы упругости. Если на тело действуют только такие силы, то уравнение движения (1) приобретает вид

$$ma = F(x). \quad (2)$$

Такая физическая система, уравнения движения которой не содержат в явном виде ни времени, ни скорости частиц, называется **автономной**. Поведение таких систем можно качественно проанализировать на основании закона сохранения механической энергии. Преобразуем уравнение (1) следующим образом. Запишем выражение для ускорения\* как «скорость изменения скорости»

$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$  и умножим уравнение на  $\Delta x$  – малое изменение координаты тела

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} \Delta x = F(x) \Delta x. \quad (3)$$

---

\* Для тех, кто уже познакомился с производными, можно было бы уже записывать эти математические преобразования на языке бесконечно малых величин. Но, чтобы не путать остальных, мы сохраним пока прежние обозначения.

В этом уравнении величина  $m \frac{\Delta v}{\Delta t} \Delta x = m \Delta v \frac{\Delta x}{\Delta t} = m v \Delta v = \Delta \left( \frac{mv^2}{2} \right)$  есть изменение кинетической энергии тела на малом интервале изменения его координаты.

Если тело движется вдоль прямой под действием силы  $\vec{F}$ , то величина  $F(x)\Delta x = \delta A$  является работой, совершенной над телом на этом же интервале изменения координаты. Так как силы, действующие на рассматриваемое тело, зависят только от координаты, то работа этих сил может быть представлена как уменьшение потенциальной энергии тела<sup>\*</sup>  $\delta A = -\Delta U$ . Понятно, что потенциальная энергия является некоторой функцией от координаты тела  $U(x)$ .

Таким образом, проведенные математические преобразования приводят нас к уравнению закона сохранения механической энергии: увеличение кинетической энергии тела равно убыли его потенциальной энергии; или сумма кинетической и потенциальной энергий тела остается постоянной:

\* Опять возникает необходимость в уточнении терминологии. Более строго следует говорить о потенциальной энергии взаимодействия данного тела с другими телами (или полями). Но в данном разделе предполагается, что изменяется положение только рассматриваемого тела, положения же всех остальных остается неизменным. Поэтому здесь мы будем использовать «физически жаргонное выражение», приписывая потенциальную энергию взаимодействия рассматриваемому телу.

$$\frac{mv^2}{2} + U(x) = E = \text{const.} \quad (4)$$

Константа в этом уравнении имеет смысл полной механической энергии движущегося тела  $E$  и может быть определена из начальных условий.

Подобный вывод мы уже проводили при рассмотрении закона сохранения энергии. Здесь же подчеркнем, что сделанные нами преобразования носят математический характер, поэтому, если удалось получить уравнение движения вида (2), то всегда можно перейти к эквивалентному уравнению (4), в котором функция  $U(x)$  удовлетворяет соотношению (5) – независимо от того, является ли функция  $F(x)$  силой, а  $U(x)$  – потенциальной энергией. Для того чтобы ввести понятие потенциальной энергии для того или иного вида взаимодействия, необходимо доказать, что это *взаимодействие является потенциальным*, то есть что работа не зависит от вида траектории, а определяется только начальным и конечным положением. Такие силы называются **консервативными**, и системы, в которых действуют только такие силы, также называются **консервативными**. В некоторых случаях удается провести преобразование от уравнения (2) к уравнению (4), даже если нельзя говорить строго о потенциальной энергии, в такой ситуации функцию  $U(x)$  называют *эффективной* потенциальной энергией. С примером такой задачи мы познакомимся позднее.

Напомним, что сила, действующая на тело, однозначно связана с его потенциальной энергией. Пусть тело движется вдоль оси  $Ox$  и на него действует некоторая (необязательно постоянная) сила  $\vec{F}$ . При малом смещении тела на величину  $\Delta x$  (рис. 207) эта сила совершил работу  $\delta A = F\Delta x \cos\alpha = F_x \Delta x$ . Эта работа равна убыли потенциальной энергии тела  $\delta A = -\Delta U$ . Приравнивая выражения для работы, получим универсальное соотношение между силой и соответствующей потенциальной энергией:

$$F_x(x) = -\frac{\Delta U}{\Delta x}. \quad (5)$$

Можно выписать аналогичные выражения и для других проекций вектора силы.

Формулу (5) можно записать в более «продвинутой» форме

$$F(x) = -\frac{\Delta U}{\Delta x} = -U'(x), \quad (5')$$

где  $U'(x)$  – производная от потенциальной энергии по координате. Иными словами, проекция силы на некоторую ось равна производной от потенциальной энергии по соответствующей координате, взятой с противоположным знаком.

Отметим также, что выражение (5) определяет потенциальную энергию с точностью до постоянного слагаемого – с этим, парадоксальным на пер-

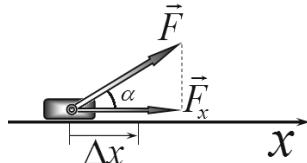


Рис. 207

вый взгляд, обстоятельством мы уже неоднократно встречались.

Связь между этими двумя функциями может быть проиллюстрирована и графически (рис. 208): если потенциальная энергия  $U(x)$  возрастает, то проекция силы  $F_x(x)$  отрицательна (на участках  $x < x_1$ ,  $x > x_2$ ); если  $U(x)$  убывает, то  $F(x)$  положительна (на участке  $x_1 < x > x_2$ ). В точках экстремумов функции  $U(x)$  функция  $F_x(x)$  обращается в нуль (на графике  $x = x_1$  и  $x = x_2$ ). Если  $U(x)$  есть суммарная потенциальная энергия тела, то ее производная, то есть соответствующая ей функция  $F_x(x)$ , есть результирующая сила, действующая на тело. В этом случае экстремумам потенциальной энергии соответствуют положению равновесия – в этих точках результирующая сила равна нулю. Эти положения равновесия могут быть как устойчивыми, так и неустойчивыми. Тело находится в положении устойчивого равновесия, если при малом отклоне-

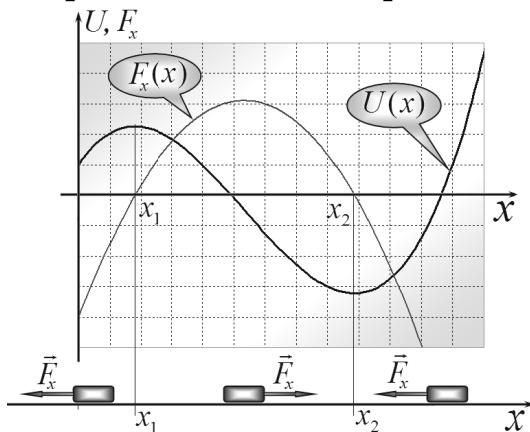


Рис. 208

нии от него возникают силы, направленные в сторону точки равновесия (стремящиеся вернуть тело в положение равновесия). Так, для примера, показанного на рис. 208, точка  $x = x_2$  есть точка устойчивого равновесия, а точка  $x = x_1$  – неустойчивого равновесия\*.

Следует также запомнить, что действующая сила всегда направлена в сторону убывания потенциальной энергии. Из этого правила иногда делают почти мистический вывод: «всякая система стремиться к минимуму потенциальной энергии». Но откуда неодушевленная и неразумная «система» знает, где находится этот самый минимум? Не знает! Просто в каждой точке сила, направляющая движение, направлена в сторону убывания энергии!

Проведенные рассуждения становятся очевидными, если воспользоваться следующей аналогией (рис. 209). В поле тяжести потенциальная энергия тела пропорциональна высоте  $U = mgh$ , поэтому профиль потенциальной кривой совпадает с профилем поверхности, на которой находится рассматриваемое

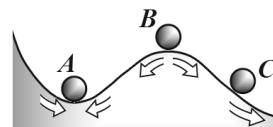


Рис. 209

---

\* Возможны и другие положения равновесия: безразличное, когда в некоторой области вблизи рассматриваемой точки потенциальная энергия постоянна, а сила равна нулю; «полуустойчивое» положение равновесия, когда смещение в одну сторону приводит к появлению силы, направленной к положению равновесия, а при отклонении в другую сторону возникает сила, удаляющая тело от положения равновесия. Последняя на графике  $U(x)$  есть точка перегиба.

тело. Поэтому поведение тела в некотором потенциальном поле описываем функцией  $U(x)$  аналогично поведению шарика (чтобы трение было пренебрежимо малым), катящемуся по горке с профилем, совпадающим с потенциальной кривой.

Так, очевидно, что в яме (точка **A**) шарик будет находится в положении устойчивого равновесия, на горке (точка **B**) положение равновесия неустойчиво. А в общем случае шарик всегда будет катиться вниз!

Рассмотренная аналогия не является строгой в математическом смысле. Так, для шарика, катящегося по горке, при его смещении вдоль оси  $Ox$  на величину  $\Delta x$ , его перемещение будет равно

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

а не  $\Delta x$ . Соответственно, будут иными выражения для скорости и кинетической энергии. Тем не менее можно подобрать такие профили горки, чтобы качение шарика точно моделировало движение, описываемое уравнением (4). Первый исторический пример такого движения был дан в начале XIX века голландским физиком Х. Гюйгенсом. Известно, что период колебаний тела не зависит от амплитуды, если его потенциальная энергия квадратично зависит от координаты, то есть если потенциальная кривая – парабола. Гюйгенс показал, что профиль горки для катящегося шарика должен иметь форму циклоиды.

Он даже реализовал эту идею в конструкции своего циклоидального маятника.

Дадим теперь наглядную геометрическую иллюстрацию уравнения (4). Для этого построим график зависимости потенциальной энергии тела от его координаты  $U(x)$  (на рис. 210 приведен пример возможной зависимости). График зависимости потенциальной энергии от координаты называют **потенциальной кривой**. На этом же графике проведем горизонтальную прямую, соответствующую уровню полной механической энергии точки. Пусть, например, эта энергия равна  $E_0$ . В точке с произвольной координатой  $A$  длина вертикального отрезка  $AB$  равна потенциальной энергии тела, длина отрезка  $AC$  есть полная энергия тела, следовательно, длина отрезка  $BC$  выражает кинетическую энергию рассматриваемого тела  $E_K$ . Так как кинетическая энергия не может быть отрицательной, то тело не может находиться в тех точках оси, где потенциальная энергия больше его полной энергии. Ничто не мешает потенциальной энергии быть отрицательной. В любом случае кинетическая энергия на графике потенциальной энергии равна длине вертикального отрезка от уровня полной энергии до потенциальной кривой (например, в точке  $x = x_2$ ).

Горизонтальная прямая, проведенная на уровне полной энергии, отсекает на потенциальной

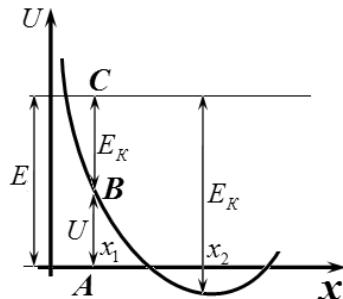


Рис. 210

кривой допустимые области движения тела: те, где потенциальная кривая лежит ниже прямой полной энергии. Приведем наглядный пример на заданную тему. Пусть потенциальная кривая имеет вид, изображенный на рис 211.

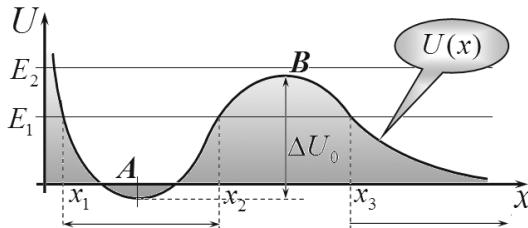


Рис. 211

Если полная энергия тела равна  $E_1$ , то его движение возможно в двух областях. Первая – в интервале  $x_1 < x < x_2$ , здесь тело совершает колебательное движение. Вторая – при  $x > x_3$ , в этой области тело «убегает» на бесконечность\*.

В точках пересечения уровня полной энергии с потенциальной кривой полная энергия равна потенциальной, следовательно, кинетическая энергия и скорость тела в этой точке обращается в нуль. Такие точки называются **точками возврата**.

Если полная энергия тела в рассматриваемом примере увеличится до значения  $E_2$ , то для него область разрешенного движения расширяется, исчезает область запрещенного движения вблизи точки **B**.

---

\* Понятно, что выбор характера движения определяется не только энергией тела, но и его начальным положением. Не забывайте о начальных условиях!

Интересным случаем является совпадение уровня полной энергии  $E$  с минимумом потенциальной энергии (рис. 212). При уменьшении полной энергии  $E$  до минимального значения  $E_{\min}$  область разрешенного движения  $x_1 < x < x_2$  сжимается в точку  $x = x_0$ , соответствующую точке минимума потенциальной кривой, что еще раз подтверждает, что точка минимума есть точка устойчивого равновесия.

Область, в которой потенциальная кривая содержит точку минимума, часто называют **потенциальной ямой**. Минимальная энергия, которую необходимо сообщить телу, находящемуся на дне потенциальной ямы, чтобы извлечь тело, называется глубиной ямы  $\Delta U_0$ . Она показана на рис. 211 в точке **B**. Заметим, что потенциальные ямы могут быть и бесконечно глубокими.

Анализ устойчивости является необходимой составной частью изучения движения тела. Наиболее удобно и наглядно он проводится на основе простого разглядывания потенциальной кривой. Но, в принципе, этот анализ можно провести, рассматривая зависимость силы от расстояния. В положениях равновесия результирующая сила равна нулю. Устойчивость определяется зависи-

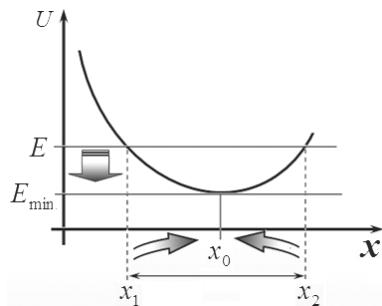


Рис. 212

мостью (даже просто знаком) проекции силы при малом отклонении от положения равновесия. Рассмотрите внимательно еще раз рис. 212 и проанализируйте, как ведет себя сила и ее график вблизи устойчивого  $x = x_2$  и неустойчивого  $x = x_1$  положений равновесия.

Наконец, еще одно общее рассуждение, касательно возможностей качественного анализа. Оказывается, потенциальные кривые прекрасно сочетаются с фазовыми траекториями — по заданной потенциальной кривой можно построить набор фазовых траекторий, соответствующих различным значениям полной энергии. Такой набор фазовых траекторий также называется **фазовым портретом** системы. Под графиком потенциальной кривой изобразим участок фазовой плоскости так, чтобы оси  $X$  были параллельны, и начала их отсчета совпадали (рис. 213).

Для примера рассмотрим потенциальную кривую, соответствующую гармоническим колебаниям. На графике потенциальной энергии зададим уровень полной энергии системы  $E_0$  горизонтальной прямой, точки пересечения которой с потенциальной кривой определяют крайние точки — проводя вертикальные прямые, их можно отметить на фазовой плоскости. Величину скорости при произвольном

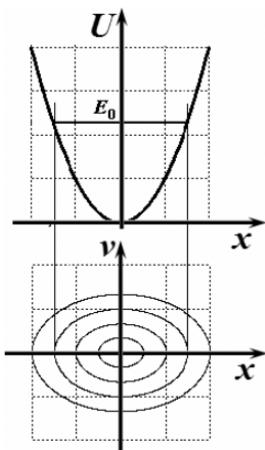


Рис. 213

значении координаты можно оценить из разности полной и потенциальной энергии. Если же пользоваться компьютером, то можно построить точно. Из уравнения (10) выразим зависимость скорости от координаты:

$$v = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E_0 - U(x))}.$$

Как следует из этого выражения, фазовая траектория симметрична относительно оси  $x$ . Это понятно с точки зрения здравого смысла: в процессе колебательного движения за один период тело проходит каждую точку дважды: один раз в одном направлении, другой – в противоположном, причем модули скорости при прохождении одной точки одинаковы. Как и следовало ожидать, движение точки является колебательным (можно даже уточнить – колебания гармонические), так как фазовые траектории являются эллипсами.

### 7.5.2. Диссипативные системы

Если на тело, движущееся вдоль оси  $Ox$ , действуют силы, приводящие к уменьшению механической энергии системы, то такие силы (и такие системы) называются **диссипативными**\*. Такие силы зависят от скорости, например, силы сопротивления воздуха, силы вязкого трения. Заметим, что даже сила сухого трения, подчиняющаяся закону Кулона-Амонтона, также зависит от вектора

---

\* От латинского *dissipatio* – рассеивание.

скорости, так как эта сила всегда направлена в сторону, противоположную вектору скорости.

С другой стороны, сила Лоренца, действующая на движущуюся заряженную частицу со стороны магнитного поля, также зависит от скорости, но не является диссипативной. Так как эта сила перпендикулярна вектору скорости, то она не совершает работы, следовательно, не изменяет энергии тела.

Качественно поведение таких систем также возможно проанализировать на основании рассмотрения потенциальной кривой. При наличии слабого затухания полная механическая энергия системы будет медленно уменьшаться, что соответствует медленному понижению уровня полной энергии.

Особенно наглядно можно провести такой анализ с помощью фазового портрета системы, построенного без учета потерь энергии.

Пусть потенциальная кривая для некоторого тела имеет вид, показанный на рис. 214. Ниже построен фазовый портрет системы\*. Потенциальная кривая симметрична и содержит две точки минимума  $x_1$ ,  $x_2$  (две потенциальные ямы), соответствующие положениям устойчивого равновесия, разделенным точкой неустойчивого равновесия  $x = 0$ . В зависимости от величины полной энергии

---

\* В этом разделе фазовые траектории построены с помощью методов численного решения уравнений движения. Иными словами, это не схематические изображения, это результат точного расчета!

будет меняться и характер движения тела. Так, при положительной энергии  $E > 0$  тело движется симметрично относительно начала отсчета, огибая обе ямы. Когда тело проходит начало отсчета координат, его скорость минимальна. Фазовые траектории в этом случае также симметричны и охватывают обе точки устойчивого равновесия  $x_1, x_2$ .

Если полная энергия тела отрицательна, то оно может двигаться только в одной из потенциальных ям: ему не хватает энергии, чтобы преодолеть потенциальный барьер, их разделяющий. В этом случае фазовые траектории также замкнуты, но охватывают только одну из точек устойчивого равновесия, какую именно – определяет начальное положение. Эта область на фазовом портрете на рисунке 214 заштрихована.

При наличии малых потерь механической энергии фазовая траектория движения тела будет «сжиматься», переходя с одной фазовой траектории (рис. 214) на другую, соответствующую меньшей энергии. На рис. 215 показана одна из возможных фазовых траекторий, которая, в конце концов, придет к одному из положений устойчивого равновесия. Заметим, что предугадать, в

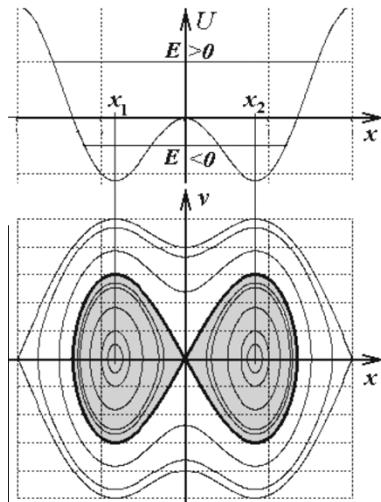


Рис. 214

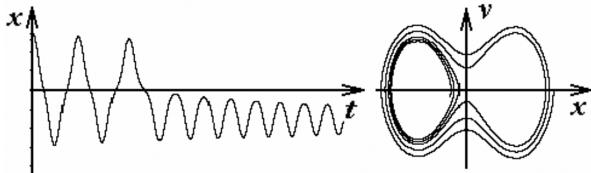


Рис. 215

какую именно из двух потенциальных ям попадет тело, практически невозможно: это зависит от начального положения тела, параметров сил трения, и даже если эти характеристики известны, может быть случайным.

### 7.5.3. Малые колебания в произвольных колебательных системах

Проведенный анализ общих свойств колебательных систем показывает, что необходимым условием возможности колебательного движения в произвольной системе является наличие **положения устойчивого равновесия**. В этом случае при отклонении тела от положения равновесия возникнет возвращающая сила, направленная к положению равновесия. Под действием этой силы тело приобретет некоторую скорость, которая будет максимальна при достижении положения равновесия. Далее тело по инерции проскочит положение равновесия и отклонится от него в противоположную сторону. После чего процесс повторится. Таким образом, вторым условием возможности колебаний является **наличие у системы инерционных свойств**: тело нулевой массы свободно колебаться

не может. При отсутствии сил трения процесс колебаний будет продолжаться бесконечно; если же силы трения значительны, то даже при наличии положения устойчивого равновесия колебания невозможны.

Рассмотрим теперь описание движения материальной точки вблизи положения устойчивого равновесия. Как и прежде, будем основываться на уравнении второго закона Ньютона

$$ma = F_x(x), \quad (1)$$

где  $F_x(x)$  – проекция результирующей силы на ось, вдоль которой движется тело. Совместим начало отсчета  $x = 0$  с положением равновесия тела. В этой точке результирующая сила равна нулю  $F_x(0) = 0$ . Графически это выражается тем, что график зависимости  $F_x(x)$  пересекает ось  $Ox$  (рис. 216) под некоторым отрицательным углом\*. При малом отклонении от положения равновесия функцию  $F_x(x)$  можно приближенно заменить линейной\*\*

$$F_x(x) = -kx. \quad (2)$$

График этой приближенной функции является прямой линией. Очевидно, что наименьшая погрешность приближения будет достигнута в том

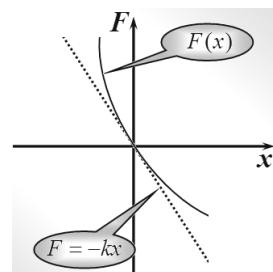


Рис. 216

\* Если угол наклона положителен (то есть функция возрастающая), то это положение равновесия будет неустойчивым.

\*\* Часто силу, пропорциональную смещению, называют квазиупругой.

случае, если построенная прямая будет являться касательной к графику функции  $F_x(x)$ . Следовательно, коэффициент наклона построенной прямой должен совпадать с производной функции  $F_x(x)$  в точке равновесия  $x = 0$

$$k = -F'_x(0). \quad (3)$$

Таким образом, если произвольную силу вблизи положения равновесия заменить<sup>\*</sup> линейным приближением (2) с коэффициентом пропорциональности (3), то уравнение движения преобразуется в уравнение гармонических колебаний

$$ma = -kx \quad (4)$$

с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{-\frac{F'_x(0)}{m}}. \quad (5)$$

Аналогичный результат можно получить и с помощью энергетического подхода к описанию движения рассматриваемого тела. Так, закон сохранения механической энергии выражается уравнением

$$\frac{mv^2}{2} + U(x) = E, \quad (6)$$

где  $E$  – сохраняющаяся полная механическая энергия тела,  $U(x)$  – его потенциальная энергия. Положению устойчивого равновесия соответствует точка минимума функции  $U(x)$ . При малом отклонении от положения равновесия график этой функ-

---

\* Такая замена возможна, если производная от функции  $F_x(x)$  в точке равновесия отлична от нуля. Возможны такие редкие ситуации, когда это условие не выполняется, – одну из них мы рассмотрим позднее.

ции можно приближенно описать параболой\*, потому что это простейшая функция, имеющая точку минимума:

$$U(x) \approx \frac{kx^2}{2}. \quad (7)$$

Пример такого приближения был приведен при рассмотрении свойств тригонометрических функций, когда косинус заменили приближенной квадратичной функцией.

В формуле (7) коэффициент пропорциональности  $k$  совпадает с коэффициентом в формуле (2). Для доказательства этого утверждения достаточно вспомнить формулу, связывающую потенциальную энергию с действующей силой: сила равна производной от потенциальной энергии, взятой с противоположным знаком  $F_x = -U'(x)$ . Именно при записи приближенного выражения для потенциальной энергии в виде (7) из него непосредственно следует выражение (2):

$$F_x = -\left(\frac{kx^2}{2}\right)' = -kx.$$

Приближенная формула (7) для потенциальной энергии приводит к уравнению гармонических колебаний в форме

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = E. \quad (8)$$

\* «Подтверждаем» известный закон физика-экспериментатора: «Всякая неизвестная функция линейна, если она не парабола».

Фактически, это приближение мы использовали при выводе формулы для периода колебаний математического маятника.

Подведем итог общего рассмотрения: **вблизи положения устойчивого равновесия** тело может совершать колебания; если возвращающая сила может быть представлена в виде  $F_x(x) \approx -kx$ , а потенциальная энергия в форме  $U(x) \approx \frac{kx^2}{2}$ , то малые колебания являются гармоническими.

#### 7.5.4. Математический маятник: негармонические колебания

Наиболее типичным и наглядным примером использования приближения малых колебаний является описание колебаний математического маятника. При больших углах отклонения использование приближения малых углов неприменимо, в этом случае необходимо искать решение точного уравнения движения

$$\varepsilon = -\frac{g}{l} \sin \phi, \quad (1)$$

где  $\varepsilon$  – угловое ускорение маятника. К сожалению, это уравнение, с математической точки зрения, очень сложное. Функции, являющиеся решениями этого уравнения при различных начальных условиях, не выражаются через элементарные функции. Можно, конечно, решить это уравнение численно\* с помощью компьютера. Мы не будем

---

\* Принципиальную возможность такого построения решения мы показали при изучении кинематики.

рассматривать эти методы, ограничимся указанием принципиальных отличий решений уравнения (1) от приближения малых углов. Важнейшим из них является негармоничность колебаний. Конечно, решениями этого уравнения являются периодические функции, которые, по теории Фурье, можно представить в виде суммы (бесконечной) гармонических функций кратных частот. Иными словами, в колебаниях математического маятника появляются кратные частоты – **обертоны**.

На рис. 217 показаны графики зависимости угла отклонения маятника от времени при различных амплитудах колебаний, полученных с помощью численных расчетов. Конечно, определить на глаз, являются ли они синусоидами или нет, невозможно.

Вторым важным отличием точного решения (1) от приближенного является зависимость периода колебаний от их амплитуды, что хорошо видно на рис. 217. Покажем, как может быть рассчитана (опять же, численно) эта зависимость. Пусть нить маятника отклонена на угол  $\phi_0$ . Разобьем диапазон изменения координаты  $[-\phi_0, \phi_0]$  точки на малые интервалы  $\Delta\phi = \frac{\phi_0}{N}$ , тем самым получим набор точек разбиения  $\phi_k = k\Delta\phi$ ,  $k = -N, -N + 1, \dots, -1, 0, +1, +2, \dots, +N$ .

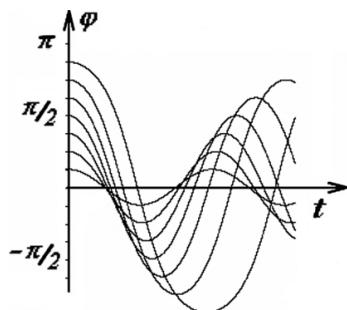


Рис. 217

Используя закон сохранения энергии для маятника

$$\frac{ml^2\omega^2}{2} - mgl \cos\varphi = -mgl \cos\varphi_0,$$

мы можем вычислить скорости маятника  $\omega_k$  в момент прохождения точек  $\varphi_k$

$$\omega_k = \sqrt{2 \frac{g}{l} (\cos\varphi_k - \cos\varphi_0)}.$$

На каждом интервале  $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$  оценим среднюю скорость как среднее арифметическое значение скоростей на концах интервала

$\bar{\omega}_k = \frac{\omega_k + \omega_{k-1}}{2}$ . Тогда время  $\Delta t_k$ , за которое маятник

пройдет интервал  $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$ , можно найти по

формуле  $\Delta t_k = \frac{\Delta\varphi_k}{\bar{\omega}_k} = \frac{2\Delta\varphi}{\omega_k + \omega_{k-1}}$ , после чего останется

только просуммировать эти значения по всем интервалам разбиения – полученная сумма будет равна половине периода колебания. Такой метод также является приближенным, но уменьшение шага разбиения всегда будет приводить к увеличению точности расчетов. Замена средней скорости среднеарифметическим ее значением является точной при равноускоренном движении, поэтому это приближение соответствует приближению равноускоренного движения на малом интервале.

Не вдаваясь в технические детали расчета (при наличии времени и терпения его можно провести и на бумаге), приведем результаты, полученные

при разбиении диапазона изменения угла на двести равных интервалов. Результаты расчетов представлены на рис. 218.

Здесь  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$  — период малых колебаний,  $\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{T - T_0}{T_0}$  — относительное изменение периода колебаний при увеличении их амплитуды.

Имея эту кривую, можно ответить на вопрос: какие же колебания можно считать «малыми»? Ответ зависит от той точности, которая для вас является достаточной. Так, при амплитуде колебаний

$\Phi_0 = \frac{\pi}{4}$  их период превышает период малых коле-

баний менее чем на 5%, а при амплитуде  $\Phi_0 = \frac{\pi}{2}$  период возрастает всего на 18%. Отметим, что полученная зависимость приближенно может быть описана формулой

$$T \approx T_0 \left( 1 + \frac{\Phi_0^2}{16} \right).$$

В заключение укажем, что полученные результаты полностью подтверждаются экспериментальными данными.

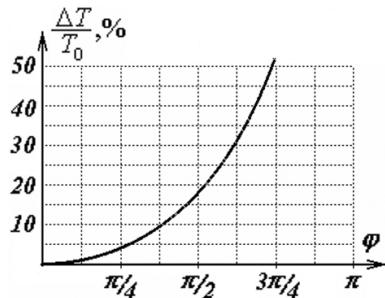


Рис. 218

### 7.5.5. Малые негармонические колебания

Рассмотрим еще один пример колебательной системы: небольшой шарик массы  $m$  расположен на гладкой горизонтальной поверхности и прикреплен с помощью двух пружин жесткости  $k$ , длиной  $l$  к двум неподвижным упорам (рис. 219). В положении равновесия все элементы системы находятся на одной прямой, при этом пружины не деформированы. Брусок совершает колебания в направлении, перпендикулярном пружинам.

Положение шарика будем задавать его смещением  $x$  от положения равновесия. В процессе движения на шарик действуют силы упругости со стороны пружин.

Уравнение движения шарика имеет вид

$$ma = -2F_{yup.} \sin \alpha. \quad (1)$$

Выразим силы упругости и синус угла отклонения через величину отклонения  $x$ , считая его малым. Для вычисления силы упругости воспользуемся законом Гука и приближенной формулой

$$\begin{aligned} F_{yup.} &= k\Delta l = k\left(\sqrt{l^2 + x^2} - l\right) = kl\left(\sqrt{1 + \frac{x^2}{l^2}} - 1\right) \approx \\ &\approx kl\left(1 + \frac{1}{2} \frac{x^2}{l^2}\right) - 1 = \frac{kx^2}{2l}. \end{aligned}$$

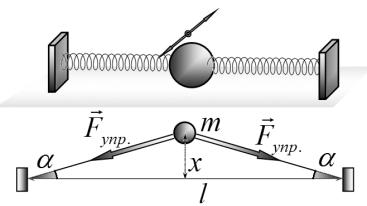


Рис. 219

Если считать отклонение малым, то и угол  $\alpha$  также будет малым, поэтому

$$\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{l}.$$

В этом приближении уравнение движения шарика будет иметь вид

$$ma = -\frac{k}{2l^2}x^3. \quad (2)$$

Таким образом, даже малые колебания шарика в рассматриваемой системе не являются гармоническими. Аналитического решения полученного уравнения (2) также не существует. Анализ этого уравнения показывает, что период колебаний шарика в этой системе сильно зависит от амплитуды (даже при малых амплитудах): он убывает обратно пропорционально амплитуде.

*То, что период гармонических колебаний не зависит от амплитуды, является в некотором смысле «счастливым совпадением»: при возрастании амплитуды колебаний, с одной стороны, возрастает путь, проходимый телом, с другой – возрастает средняя скорость движения. Для гармонических колебаний эти два факто-ра полностью компенсируют друг друга! Для математического маятника путь возрастает быстрее, чем средняя скорость, поэтому период его колебаний незначительно возрастает при возрастании амплитуды. В рассмотренном при-мере средняя скорость возрастает значительно быстрее, чем путь, проходимый шариком, – в*

*этом случае период колебаний быстро убывает при возрастании амплитуды.*

### 7.5.6. Вращение или колебание?

Колебательное движение мы начали изучать с помощью описания равномерного движения точки по окружности. Теперь мы применим методы анализа движения, разработанные для колебательного движения, к описанию свободного движения спутника вокруг Земли.

Итак, пусть спутник свободно, с выключенными двигателями, движется вокруг центра Земли  $C$  (рис. 220), который будем считать неподвижным. Влиянием звезд и планет на движение спутника пренебрежем.

Спутник и Земля взаимодействуют с силой, подчиняющейся закону всемирного тяготения Ньютона. Эта сила взаимодействия является консервативной и направлена вдоль линии, соединяющей центры Земли и спутника. Поэтому в процессе движения будут сохраняться механическая энергия и момент импульса. Так как момент импульса является вектором, то орбита планеты будет плоской. В общем случае орбита спутника не будет круговой, поэтому его положение однозначно определяется двумя координатами.

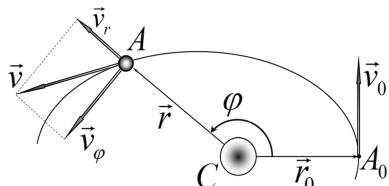


Рис. 220

Положение спутника  $A$  (определенное радиус-вектором  $\vec{r}$ ) удобно задавать в полярных координатах:  $r$  – расстояние от начала координат до спутника,  $\phi$  – полярный угол между некоторой произвольной осью и направлением на спутник. Вектор скорости спутника  $\vec{v}$  разложим на две составляющие: радиальную  $\vec{v}_r$ , направленную вдоль линии, соединяющей спутник с Землей, и перпендикулярную ей азимутальную компоненту  $\vec{v}_\phi$ . Первая из этих компонент соответствует изменению расстояния до центра спутника, вторая описывает изменение полярного угла.

Будем считать, что в начальный момент времени спутник находился в точке  $A_0$  на расстоянии  $r_0$  от Земли и его скорость была равна  $v_0$  и направлена перпендикулярно радиус-вектору  $\vec{r}_0$  этой точки. Заметим, что в этой точке радиальная компонента скорости  $v_r = 0$ , поэтому в этой точке расстояние до планеты минимально или максимально (то есть эта точка либо апогей, либо перигей). Азимутальный угол удобно отсчитывать от этого направления.

Закон сохранения механической энергии записывается в виде уравнения

$$\frac{m(v_r^2 + v_\phi^2)}{2} - G \frac{mM}{r} = \frac{mv_0^2}{2} - G \frac{mM}{r_0}, \quad (1)$$

где  $m, M$  – массы спутника и Земли, соответственно;  $G$  – гравитационная постоянная;  $-G \frac{mM}{r}$  – потенциальная энергия гравитационного взаимодействия.

Сохранение момента импульса выражается уравнением

$$mv_{\phi}r = mv_0r_0. \quad (2)$$

Уравнения (1)-(2) при указанных начальных условиях полностью описывают движения спутника\* и могут быть решены строго, правда, на уровне высшей математики. Наша цель иная: качественно проанализировать возможные типы движения спутника в зависимости от начальных условий.

Прежде всего обратим внимание на то, что в уравнения явно не входит угол  $\phi$ , поэтому появляется возможность избавиться от этого угла и скорости его изменения, то есть свести задачу к одномерной. Такое упрощение возможно всегда при движении в поле центральных сил.

Выразим из уравнения (2) азимутальную составляющую скорости

$$v_{\phi} = \frac{v_0 r_0}{r} \quad (3)$$

и подставим в уравнение (1):

$$\frac{mv_r^2}{2} + \frac{mv_0^2 r_0^2}{2r^2} - G \frac{mM}{r} = \frac{mv_0^2}{2} - G \frac{mM}{r_0}. \quad (4)$$

Теперь очень внимательно посмотрите на полученное уравнение: это уравнение не содержит угловой координаты  $\phi$ , только расстояние  $r$  и радиальную составляющую скорости  $v_r$ . Более того, по форме оно совпадает с уравнением закона сохранения энергии для тела, движущегося вдоль одной оси:

---

\* Доказательство этого утверждения почти очевидно: две координаты – два уравнения!

$$\frac{mv_r^2}{2} + U_{\phi}(r) = E, \quad (5)$$

поэтому для его анализа можно пользоваться стандартными методами, основанными на исследовании потенциальной кривой. В данном случае потенциальная кривая описывается функцией

$$U_{\phi} = \frac{mv_0^2 r_0^2}{2r^2} - G \frac{mM}{r}. \quad (6)$$

С точки зрения физического смысла, эта функция не является потенциальной энергией, так как первое слагаемое является частью кинетической энергии. Однако по своей математической форме в уравнении (4) эта функция играет смысл потенциальной энергии, поэтому эту функцию называют «эффективной потенциальной энергией».

Теперь для анализа движения достаточно построить график зависимости эффективной потенциальной энергии от расстояния  $r$ . Схематически это построение можно выполнить в три шага (рис. 221):

- 1) при малых расстояниях ( $r \rightarrow 0$ ) первое слагаемое в функции (6) возрастает значительно быстрее, поэтому ( $U_{\phi} \rightarrow +\infty$ ): рисуем кривую, стремящуюся ввысь и прижимающуюся к вертикальной оси;

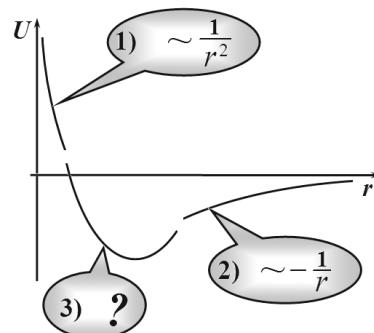


Рис. 221

2) при больших  $r \rightarrow \infty$  второе слагаемое по модулю становится больше первого, хотя оба стремятся к нулю, поэтому  $U_{\text{эф.}} \rightarrow 0$ , причем  $U_{\text{эф.}} < 0$ : рисуем кривую, приближающуюся к горизонтальной оси снизу;

3) остается соединить эти кривые, нет иного выхода, как нарисовать некоторую дугу снизу.

Если же у вас есть терпение или нечаянно под рукой оказался компьютер, то можно эту кривую построить и поточнее (если вы знаете численные значения параметров функции) – результат одного из таких усилий на рис. 222.

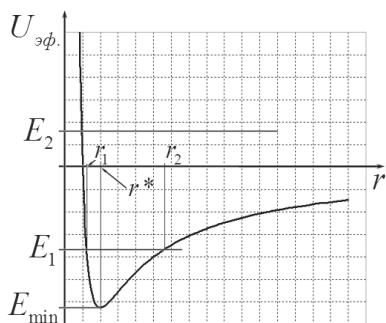


Рис. 222

При любом методе убеждаемся, что данная функция имеет точку минимума, то есть очередной раз мы «попадаем» в потенциальную яму. Дальнейшие рассуждения традиционны. Задаем и рисуем уровень полной энергии спутника и определяем области допустимого движения. Только следует иметь в виду, что эффективная потенциальная энергия зависит от начальных условий, поэтому у нас нет возможности независимо изменять и потенциальную кривую, и начальные условия.

Из вида потенциальной кривой следует, что движение спутника ограничено (т.е. он не удаляется на бесконечное расстояние), если его полная энергия отрицательна. В этом нет ничего удиви-

тельного: потенциальная энергия притяжения отрицательна, в соответствии с выбором нулевого уровня на бесконечности.

Теперь можно определить условия, определяющие характер движения спутника.

Чтобы спутник двигался по круговой орбите, его полная энергия должна быть равна минимуму эффективной потенциальной энергии  $E_{\min}$ . Значение этой величины можно найти, используя стандартные методы исследования функций. Но в данном случае это значение можно найти элементарно, если заметить, что функция (6) квадратичная, если в качестве ее аргумента рассматривать

величину  $\xi = \frac{1}{r}$ :

$$U_{\phi} = \frac{mv_0^2 r_0^2}{2r^2} - G \frac{mM}{r} = \frac{mv_0^2 r_0^2}{2} \xi^2 - GmM\xi = \xi \left( \frac{mv_0^2 r_0^2}{2} \xi - GmM \right).$$

Нули этой параболы хорошо видны:  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = 2 \frac{GM}{v_0^2 r_0^2}$ , и хорошо известно, что абсцисса точки экстремума параболы лежит посередине между корнями. Поэтому точка экстремума  $r^*$  исследуемой функции находится из условия:

$$\xi^* = \frac{\xi_2}{2} = \frac{GM}{v_0^2 r_0^2} \Rightarrow r^* = \frac{1}{\xi^*} = \frac{v_0^2 r_0^2}{GM}.$$

Следовательно, минимальная потенциальная энергия равна

$$E_{\min} = U_{\phi}(\xi^*) = \xi^* \left( \frac{mv_0^2 r_0^2}{2} \xi^* - GmM \right) = -\frac{m(GM)^2}{2v_0^2 r_0^2}.$$

Приравняем ее к полной (она же начальная) энергии спутника:

$$-\frac{m(GM)^2}{2v_0^2 r_0^2} = \frac{mv_0^2}{2} - G \frac{mM}{r_0}$$

и получим уравнение для начальной скорости, решение которого не слишком сложно:

$$v_0^4 - 2\left(G \frac{M}{r_0}\right)v_0^2 + \left(\frac{GM}{r_0}\right)^2 = 0 \Rightarrow \left(v_0^2 - G \frac{mM}{r_0}\right)^2 = 0.$$

Окончательно получаем

$$v_0 = \sqrt{G \frac{mM}{r_0}}.$$

Узнаете? Это формула для первой космической скорости, которая элементарно следует из условия равномерного движения по круговой орбите:

$$\frac{mv_0^2}{r_0} = G \frac{mM}{r_0^2}.$$

Если энергия спутника отрицательна, но больше  $E_{\min}$  (на рис. 222 эта энергия обозначена  $E_1$ ), то расстояние до центра Земли в процессе движения будет изменяться в ограниченных пределах  $r_1 < r < r_2$ . Предельные значения можно рассчитать, как точки возврата для рассматриваемой потенциальной кривой, полагая в этих точках  $v_r = 0$ . Иными словами, решая уравнение

$$U_{\phi.} = E_1 \Rightarrow \frac{mv_0^2 r_0^2}{2r^2} - G \frac{mM}{r} = \frac{mv_0^2}{2} - G \frac{mM}{r_0}.$$

Решение этого уравнения можно упростить, если сообразить, что один корень его заранее известен – это начальное расстояние  $r_0$ .

Согласитесь, найти пределы изменения расстояния на основании законов Ньютона затруднительно!

Следующий интересный случай, когда полная энергия спутника обращается в нуль. Ему соответствует минимальная скорость, при которой спутник удаляется на бесконечность\*. Она определяется из уравнения

$$E = 0 \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} - G \frac{mM}{r_0} = 0 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2 \frac{GM}{r_0}}.$$

Найденное значение есть вторая космическая скорость!

Наконец, при положительной полной энергии спутника он всегда удаляется на бесконечное расстояние.

Таким образом, мы показали, что построение потенциальной кривой (даже эффективной) дает возможность, не решая уравнения движения, качественно описать его характер. Поэтому осмелимся дать общую рекомендацию: если есть возможность построить потенциальную кривую, то обязательно это сделайте!

---

\* Для «не избранных» это утверждение может звучать странно и парадоксально: чтобы космический корабль покинул Землю и удалился в бесконечные просторы Вселенной, его энергия должна быть равной нулю! Может, и двигатели не нужны?

## 7.6. Затухающие колебания

Рассмотренные свободные незатухающие колебания являются идеализацией, моделью, применимой на небольших временных интервалах. В реальных механических колебательных системах обязательно присутствуют диссипативные силы (силы трения, силы вязкости), приводящие к уменьшению механической энергии системы из-за ее перехода в другие формы, например, в тепловую. В данном разделе мы рассмотрим описание колебательного движения при наличии таких сил.

### 7.6.1. Затухание под действием силы сухого трения

Рассмотрим характер движения пружинного маятника (рис. 223) с учетом силы сухого трения. Будем считать, что сила, действующая на брускок со стороны горизонтальной поверхности, подчиняется закону Кулона-Амонтона. Коэффициент трения обозначим  $\mu$ , будем считать, что он не зависит от скорости движения бруска, также пренебрежем различием между трением скольжения и максимальным трением покоя.

Совместим ось  $Ox$  с направлением движения бруска, а ее начало – с положением недеформиро-

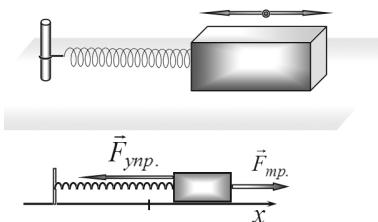


Рис. 223

ванной пружины. При отклонении бруска на расстояние  $x$  на него в горизонтальном направлении будут действовать силы упругости и сила трения (рис. 223). Если в этом положении сила упругости  $F_{upr.} = kx$  меньше максимальной силы трения покоя  $F_{mp.} = \mu mg$ , брускок будет находиться в покое. Таким образом, в интервале, в котором  $k|x| < \mu mg$ , или

$$-\mu \frac{mg}{k} \leq x \leq +\mu \frac{mg}{k}, \quad (1)$$

брускок может находиться в покое, если его скорость равна нулю, поэтому этот интервал является зоной застоя. Пусть начальное отклонение бруска, равное  $A_0$ , лежит вне зоны застоя, начальную скорость будем полагать равной нулю (см. рис. 224). В этом случае уравнение движения бруска имеет вид

$$ma = -kx + \mu mg. \quad (2)$$

Особо подчеркнем, что это уравнение справедливо только при движении бруска влево, то есть до тех пор, пока скорость бруска отрицательна  $v < 0$ , при изменении направления движения изменится знак при силе трения\*.

В этом принципиальное отличие этого уравнения от уравнения движения груза, подвешенного

\* Можно записать это уравнение в форме, применимой на всех этапах движения, представив силу трения в виде  $F_{mp.} = -\mu mg \frac{v}{|v|}$ , где  $v$  – скорость бруска. В этой записи явно показано, что сила трения направлена в сторону, противоположную скорости. Но, во-первых, необходимо анализировать условия начала движения после каждой остановки, во-вторых, все равно его необходимо решать поэтапно, что мы и сделаем.



Рис. 224

на пружине (уравнение (7) из раздела 7.3.1), в котором постоянная сила  $\mu g$  действительно постоянна – не зависит от направления движения. Тем не менее мы можем воспользоваться рассмотренным ранее методом решения уравнения (2), не забывая об его ограниченной области применимости. Преобразуем уравнение (2) к виду

$$ma = -k \left( x - \mu \frac{mg}{k} \right). \quad (3)$$

Это уравнение является уравнением гармонических колебаний для величины  $x_1(t) = x - \mu \frac{mg}{k}$ .

Эта функция изменяется по гармоническому закону с частотой, равной частоте свободных колебаний пружинного маятника  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Учитывая начальные условия  $x(0) = A_0$ ,  $v(0) = 0$ , решение уравнения (3) имеет вид

$$x(t) - \mu \frac{mg}{k} = \left( A_0 - \mu \frac{mg}{k} \right) \cos \omega t,$$

откуда следует закон движения бруска

$$x(t) = \mu \frac{mg}{k} + \left( A_0 - \mu \frac{mg}{k} \right) \cos \omega t. \quad (4)$$

Скорость бруска будет изменяться по закону

$$v(t) = -\omega \left( A_0 - \mu \frac{mg}{k} \right) \sin \omega t. \quad (5)$$

Остановка бруска произойдет в момент времени  $t_1 = \frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2}$ , где  $T$  – период свободных колебаний маятника. В момент остановки координата бруска будет равна

$$A_1 = x(t_1) = -A_0 + 2\mu \frac{mg}{k}. \quad (6)$$

Обратите внимание, что координата точки остановки может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от величины начального отклонения.

График закона на временном интервале  $t \leq \frac{T}{2}$  показан на рис. 225 и представляет собой участок косинусоиды, сдвинутый относительно начала отсчета на величину  $\mu \frac{mg}{k}$ .

Если точка первой остановки не попадает в зону застоя, то брускок начнет движение в противоположном направлении. Описание следующей фазы движения аналогично, можно даже полностью воспользоваться полученным решением, для чего достаточно изменить направление оси на противоположное.

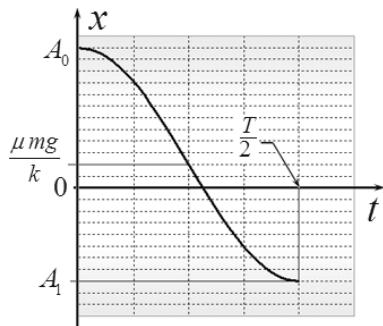


Рис. 225

На рис. 226 показан график закона движения бруска при относительно малом коэффициенте трения, «шитый» из участков синусоид, аналогичных рассмотренному выше.

Между последовательными остановками отклонение бруска уменьшается на постоянную величину

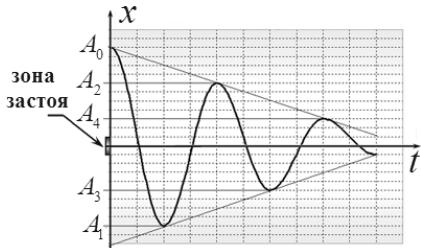


Рис. 226

$$\Delta|A| = 2\mu \frac{mg}{k} \quad (7)$$

до тех пор, пока очередная точка остановки не попадет в область застоя.

Таким образом, постоянная по модулю сила трения не изменяет частоту колебаний, но приводит к уменьшению амплитуды колебаний, причем это уменьшение происходит по линейному закону.

Здесь необходимо сделать одно филологическое замечание. Процесс затухающих колебаний не является периодическим, поэтому использование таких понятий, как период, частота, амплитуда колебаний, строго говоря, не оправдано. Однако при малом затухании эти термины используются: в этом случае под переменной амплитудой колебаний можно понимать отклонение от положения равновесия в моменты остановки, периодом колебаний можно считать промежуток времени между двумя максимальными отклонениями (пусть и различ-

ными) в одну сторону. Конечно, при сильном трении (или малом начальном отклонении) движение может содержать только одну фазу: в одну сторону до остановки. Сколько должно быть возвращений (два, три...), чтобы движение можно было считать колебательным, решайте самостоятельно.

Рассмотрим теперь превращения различных форм энергии в процессе затухающих колебаний.

Начальная энергия пружины  $U_0 = \frac{kA_0^2}{2}$ , полученная благодаря работе внешней силы при отклонении бруска от положения равновесия, в процессе движения преобразуется в кинетическую энергию движения бруска и частично преобразуется в тепловую энергию из-за наличия трения.

Так, при движении бруска от положения начального отклонения  $x = A_0$  до границы зоны застоя  $x = \mu \frac{mg}{k}$  сила упругости превышает силу трения.

На этом участке проходят следующие энергетические процессы:

- направление смещения совпадает с направлением силы упругости, поэтому сила упругости совершает положительную\* работу  $\delta A_{upr.} = -kx\Delta x$ ;

- потенциальная энергия пружины уменьшается, изменение энергии пружины равно работе силы трения, взятой с противоположным знаком

---

\* Не удивляйтесь появлению знака минуса в формуле: на этом участке  $\Delta x < 0$ . Кроме того, обращайте внимание на обозначения (букв не хватает!)  $A_0, A_1, A_2, \dots$  – амплитуды;  $\delta A$  – работа.

(напомним очевидное: пружина совершает положительную работу, поэтому ее энергия уменьшается)  $\Delta U = -\delta A_{ynp.} = kx\Delta x$ ;

- сила трения направлена в сторону, противоположную направлению перемещения бруска, поэтому ее работа отрицательна  $\delta A_{mp.} = -\mu mg\Delta x$ ;

- количество выделяющейся теплоты равно работе силы трения, взятой с противоположным знаком  $\delta Q = -\delta A_{mp.}$ ;

- кинетическая энергия бруска возрастает, причем по теореме о кинетической энергии, ее увеличение равно суммарной работе внешних сил, то есть сумме работ силы упругости и силы трения

$$\Delta E_{kin.} = \delta A_{ynp.} + \delta A_{mp.} = -kx\Delta x + \mu mg\Delta x; \quad (8)$$

- в любой момент времени сумма кинетической энергии бруска, потенциальной энергии пружины и количества выделившейся теплоты равна начальной энергии бруска (что непосредственно следует из уравнения (8)):

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} + \mu mg(A_0 - x) = \frac{kA_0^2}{2}. \quad (9)$$

Аналогично можно описать процессы превращения энергии и на других участках движения. Важно не забывать, что работа всегда является мерой перехода энергии из одной формы в другую.

Так, с помощью закона сохранения энергии легко получить координату первой точки остановки. Учитывая, что в этой точке скорость и кинетическая энергия бруска равны нулю, запишем уравнение

$$\frac{kA_0^2}{2} = \frac{kA_1^2}{2} + \mu mg(A_0 - A_1), \quad (10)$$

смысла которого можно выразить словами\*: сумма потенциальной энергии системы в момент остановки и количества выделившейся теплоты равна начальной энергии системы.

Из уравнения (10) следует формула (6) для координаты первой остановки.

Уравнение закона сохранения энергии (9) позволяет построить фазовую траекторию движения бруска. Путем алгебраических преобразований это уравнение приводится к виду

$$\frac{mv_2^2}{2} + \frac{k\left(x - \mu \frac{mg}{k}\right)^2}{2} = \frac{k\left(A_0 - \mu \frac{mg}{k}\right)^2}{2}.$$

Оно является уравнением эллипса, смещенного относительно начала координат. Это уравнение справедливо для первой половины периода колебаний, дальнейшие участки строятся аналогично – результат построения показан на рис. 227.

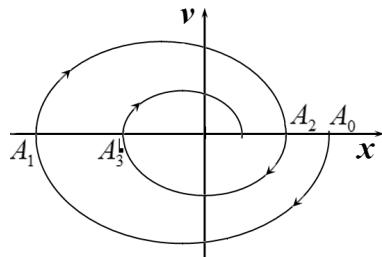


Рис. 227

---

\* Это истолкование не единственno, возможна, например, и такая формулировка: уменьшение механической энергии системы равно количеству выделившейся теплоты.

## 7.6.2. Затухание колебаний под действием сил вязкого трения

Еще одной часто встречающейся причиной затухания колебаний являются силы вязкого трения. Для анализа такого типа движения рассмотрим колебательную систему,

показанную на рис. 228.

Будем считать, что брускок может двигаться по гладкой горизонтальной поверхности, но в процессе движения на него действует сила сопротивления окружающей среды (например, воздуха). Будем считать, что эта сила пропорциональна скорости движения бруска

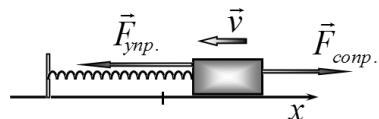


Рис. 228

$$\vec{F} = -\beta \vec{v}. \quad (1)$$

Векторная форма записи этого закона, а также отсутствие трения покоя позволяют рассматривать движение тела во всех его фазах, независимо от его направления. Коэффициент пропорциональности в формуле (1) зависит от свойств среды, размеров и формы движущегося тела, в данном разделе мы будем полагать его, как и другие параметры системы, известным. Используя традиционные обозначения, запишем уравнение второго закона Ньютона в проекции на горизонтальную ось:

$$ma = -kx - \beta v. \quad (2)$$

Для большей общности незначительно преобразуем это уравнение, разделив его на массу груза

$$a = -\frac{k}{m}x - \frac{\beta}{m}v,$$

и введем обозначения появившихся параметров.

Величина  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$  есть квадрат круговой частоты свободных колебаний шарика (иногда ее называют **собственная частота**). Отношение коэффициента сопротивления к массе тела обозначим\*  $\frac{\beta}{m} = 2\gamma$ . В этом случае параметр  $\gamma$  называется **коэффициентом затухания**. Можно заметить, что этот параметр имеет размерность, обратную времени. Следовательно, обратная величина  $\beta^{-1} = \tau$  имеет размерность времени. Далее мы покажем, что она является характерным временем затухания колебаний. С учетом этих обозначений уравнение приобретает вид

$$a = -\omega_0^2x - 2\gamma v. \quad (3)$$

Это уравнение называется **уравнением затухающих колебаний**. Можно сказать, что изученное нами уравнение свободных колебаний  $a = -\omega_0^2x$  является частным случаем уравнения (3), в котором коэффициент затухания равен нулю. Поэтому при малом значении этого коэффициента решение уравнения (3) должно быть похоже на гармонические колебания.

---

\* Мы уже привыкли к необычным, на первый взгляд, обозначениям. Появление в обозначении множителя «2» упрощает проведение дальнейших преобразований.

По-прежнему неизвестной величиной уравнения (3) является функция  $x(t)$  – зависимость координаты тела от времени. Помимо самой неизвестной функции, в уравнение входят ее первая (скорость) и вторая (ускорение) производные. Для однозначного определения закона движения к этому уравнению необходимо добавить начальные условия. Будем считать, что в момент времени  $t = 0$  шарик отклонили от положения равновесия на величину  $x(0) = A_0$  и отпустили без толчка  $v(0) = 0$ .

При задании начальных условий уравнение (3) может быть решено однозначно, правда, сама процедура поиска решения требует определенной математической подготовки, поэтому в нашем изложении мы ее опустим. В явном виде решение уравнения (3) при заданных начальных условиях и не слишком большой силе вязкости имеет вид<sup>\*</sup>

$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos \omega t, \quad (4)$$

где обозначено

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (5)$$

Схематический график этой функции и его огибающие показаны на рис. 229.

Отметим наиболее существенные особенности решения уравнения за-

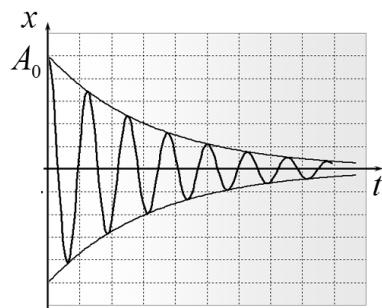


Рис. 229

\* Учитывая, что многие «боятся» показательной функции, в дальнейшем мы эту функцию использовать не будем.

тухающих колебаний (3). Наличие силы вязкого трения приводит к уменьшению амплитуды колебаний. Причем, в отличие от рассмотренного затухания под действием силы сухого трения, амплитуда убывает нелинейно. Далее мы покажем, что это убывание происходит в геометрической прогрессии. При наличии вязкого трения частота колебаний уменьшается по сравнению с частотой свободных колебаний. Это уменьшение качественно понятно: сила трения замедляет движение, что и приводит к увеличению периода и уменьшению частоты. Если затухание невелико, этим изменением частоты можно пренебречь. Точный вид зависимости частоты от коэффициента затухания дает формула (5).

На рис. 230 показаны несколько графиков решения рассматриваемого уравнения при различных значениях коэффициента затухания. Числа на графиках указывают значение

параметра  $\frac{\gamma}{\omega_0}$ . Отметим, что при  $\gamma \geq \omega_0$  движение тела перестает быть колебательным. В этом случае (сильного затухания) тело монотонно стремится к положению равновесия.

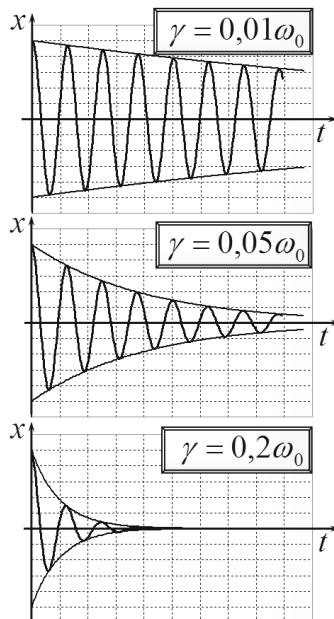


Рис. 230

Проанализируем теперь процесс затухания колебаний с энергетической точки зрения. Разобьем область движения тела на малые интервалы  $\Delta x$ . В пределах каждого интервала справедливо уравнение (3), которое мы умножим на величину интервала  $\Delta x$ :

$$ma\Delta x = -kx\Delta x - \beta v\Delta x. \quad (6)$$

Выясним теперь смысл каждого слагаемого этого уравнения. Используя определения ускорения и скорости, преобразуем выражение в левой части:

$$ma\Delta x = m \frac{\Delta v}{\Delta t} \Delta x = m\Delta v \frac{\Delta x}{\Delta t} = mv\Delta v = \Delta \left( \frac{mv^2}{2} \right). \quad (7)$$

Проведенные преобразования показывают, что эта величина есть изменение кинетической энергии шарика. Первое слагаемое в правой части (6) есть работа силы упругости на малом интервале смещения шарика, и она может быть представлена в виде

$$\delta A_{ynp.} = F_{ynp.} \Delta x = -kx\Delta x = -\Delta \left( \frac{kx^2}{2} \right). \quad (8)$$

Полученный результат очевиден: так как сила упругости потенциальна, то работа этой силы равна уменьшению потенциальной энергии пружины.

Наконец, последнее слагаемое (6) является работой силы вязкого трения. Эта сила не является потенциальной, поэтому ее работа не может быть выражена через изменение потенциальной энергии. Работа силы трения, взятая с противоположным знаком, равна количеству теплоты, выделившейся на данном интервале:

$$\delta Q = -\delta A_{mp.} = \beta v \Delta x. \quad (9)$$

Таким образом, уравнение (6) в виде

$$\delta Q = -\Delta \left( \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} \right) \quad (10)$$

допускает очевидное энергетическое истолкование: уменьшение механической энергии системы равно количеству выделившейся теплоты.

При слабом затухании можно приближенно вычислить потери механической энергии. Для этого применим широко распространенный метод, к помощи которого будем прибегать и далее. Еще раз преобразуем выражение для количества выделяющейся теплоты: с помощью соотношения  $\Delta x = v \Delta t$  перейдем от изменения координаты к временному интервалу  $\Delta t$

$$\delta Q = \beta v \Delta x = \beta v^2 \Delta t. \quad (11)$$

Видно, что мощность выделяющейся теплоты пропорциональна квадрату скорости  $P = \beta v^2$ . Для того чтобы точно вычислить потери механической энергии (равные выделившейся теплоте), необходимо знать зависимость скорости тела от времени, или закон движения, то есть точно решить уравнение движения. Но в том случае, когда затухание мало, на небольшом интервале времени можно пренебречь влиянием силы вязкого трения\*. Продемонстрируем этот подход. Пусть после  $n$  колебаний амплитуда отклонения равна  $A_n$ . Пренебрегая вязким трением, запишем закон движения тела (изменением частоты также пренебрегаем):

---

\* Звучит парадоксально: чтобы рассчитать затухание, следует им пренебречь!

$$x(t) \approx A_n \cos \omega_0 t,$$

которому соответствует следующая зависимость скорости тела от времени

$$v(t) \approx -A_n \omega_0 \sin \omega_0 t.$$

Следовательно, мощность выделяющейся теплоты изменяется с течением времени по закону

$$P = \beta v^2 = \beta A_n^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t. \quad (12)$$

Теперь легко найти среднюю за период колебания мощность тепловых потерь:

$$\langle P \rangle = \beta A_n^2 \omega_0^2 \langle \sin^2 \omega_0 t \rangle = \beta A_n^2 \omega_0^2 \left\langle \frac{1 - \cos 2\omega_0 t}{2} \right\rangle = \frac{1}{2} \beta A_n^2 \omega_0^2. \quad (13)$$

При выводе последнего соотношения учтено, что среднее значение косинуса за период, очевидно, равно нулю.

Учитывая, что подобные усреднения нам предстоит неоднократно проделывать в дальнейшем, приведем еще одно наглядное геометрическое доказательство полученного результата. Построим график зависимости мощности от времени  $P = P_{\max} \sin^2 \omega_0 t$ . Площадь под графиком зависимости тепловой мощности от времени (на рисунке заштрихована) равна количеству выделившейся теплоты. Проведя горизонтальную прямую на уровне половины максимальной мощности, получим прямоугольник, площадь которого равна площади заштрихованной фигуры. Поэтому величина  $\frac{1}{2} P_{\max}$  равна средней мощности (рис. 231).

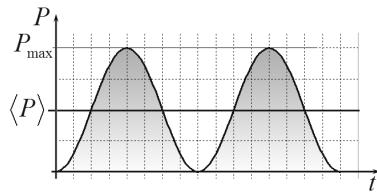


Рис. 231

Таким образом, потери механической энергии за один период колебаний равны

$$\Delta E = \langle P \rangle T = \frac{1}{2} \beta A_n^2 \omega_0^2 \frac{2\pi}{\omega_0} = \pi \beta A_n^2 \omega_0 . \quad (14)$$

Учитывая, что в моменты максимального отклонения скорость шарика обращается в нуль, из уравнения энергетического баланса (10) получим соотношение, описывающее уменьшение амплитуды за одно колебание

$$\frac{kA_n^2}{2} - \frac{kA_{n+1}^2}{2} = \pi \beta A_n^2 \omega_0 . \quad (15)$$

Обозначим  $\frac{kA_n^2}{2} = E_n$  – механическая энергия пружинного маятника после совершения  $n$  колебаний. Изменение этой энергии описывается выражением, следующим из (15):

$$E_n - E_{n+1} = \pi \beta \omega_0 \frac{2E_n}{k} . \quad (16)$$

Коэффициент в правой части с помощью введенных обозначений преобразуем к виду

$$\frac{2\pi \beta \omega_0}{k} = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{\beta \omega_0^2}{k} = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{\beta}{k} \frac{k}{m} = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{\beta}{m} = 2\gamma T ,$$

с учетом которого перепишем соотношение (16)

$$E_n - E_{n+1} = 2\gamma T E_n .$$

Из этого соотношения следует формула

$$E_{n+1} = (1 - 2\gamma T) E_n ,$$

указывающая, что механическая энергия убывает в геометрической прогрессии

$$E_n = E_0 (1 - 2\gamma T)^n . \quad (17)$$

Используя связь между энергией и амплитудой колебаний, получим явное выражение для изменения амплитуды:

$$A_n = A_0 \left( \sqrt{(1-2\gamma T)} \right)^n \approx A_0 (1-\gamma T)^n, \quad (18)$$

при выводе которого использована приближенная формула  $(1+\xi)^\alpha \approx 1 + \alpha\xi$  для квадратного корня. Формула (18) показывает, что амплитуда колебания также убывает в геометрической прогрессии. Безразмерная величина  $\gamma T$  равна относительному уменьшению амплитуды за один период колебания.

Напомним, что полученные выводы справедливы для малого затухания. Теперь можно дать количественный критерий малости затухания, описываемого уравнением (3): приведенный вывод остается справедливым при выполнении условия

$$\gamma T = \gamma \frac{2\pi}{\omega_0} \ll 1. \quad (19)$$

## § 8. Вынужденные колебания. Резонанс

### 8.1. Уравнение вынужденных колебаний и его решение

Потери механической энергии в любой колебательной системе из-за наличия сил трения неизбежны, поэтому без «подкачки» энергии извне колебания будут затухающими. Существует несколько принципиально различных способов создания колебательных систем незатухающих колебаний. Остановимся более подробно на рассмотрении **незатухающих колебаний под действием внешней периодической силы**. Такие колебания называются **вынужденными**.

Продолжим изучение движения гармонического маятника (рис. 232). Помимо рассмотренных ранее сил упругости и вязкого трения, на брускок действует внешняя вынуждающая периодическая сила, изменяющаяся по гармоническому закону

$$F_{\text{вн.}} = F_0 \cos \omega t, \quad (1)$$

частота которой может отличаться от собственной частоты колебаний маятника  $\omega_0$ .

Природа этой силы в данном случае нам не существенна. Создать такую силу можно различными способами, например, сообщить шарику

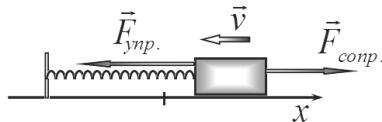


Рис. 232

электрический заряд и поместить его во внешнее переменное электрическое поле.

Уравнение движения шарика в рассматриваемом случае имеет вид

$$ma = -kx - \beta v + F_0 \cos \omega t. \quad (2)$$

Разделим его на массу шарика и используем прежние обозначения параметров системы. В результате получим **уравнение вынужденных колебаний**:

$$a = -\omega_0^2 x - 2\gamma v + f_0 \cos \omega t, \quad (3)$$

где  $f_0 = \frac{F_0}{m}$  – отношение амплитудного значения внешней вынуждающей силы к массе шарика.

Общее решение уравнения (3) достаточно громоздко и, конечно, зависит от начальных условий. Характер движения шарика, описываемого уравнением (3), понятен: под действием вынуждающей силы возникнут колебания, амплитуда которых будет возрастать. Этот переходный режим достаточно сложен и зависит от начальных условий. По прошествии некоторого промежутка времени колебательный режим установится, их амплитуда перестанет изменяться. Именно **установившийся режим колебаний** во многих случаях представляет основной интерес. Мы не будем рассматривать переход системы к установившемуся режиму, а сконцентрируем внимание на описании и изучении характеристик этого режима. При такой постановке задачи нет необходимости задавать начальные условия, так как интересующий нас установив-

шийся режим не зависит от начальных условий, его характеристики полностью определяются самим уравнением.

С аналогичной ситуацией мы сталкивались при изучении движения тела под действием постоянной внешней силы и силы вязкого трения

$$ma = F_0 - \beta v.$$

По прошествии некоторого времени тело движется с постоянной *установившейся* скоростью  $v = \frac{F_0}{\beta}$ , которая не зависит от начальных условий и полностью определяется уравнением движения. Начальные условия определяют режим, **переходный** к установившемуся движению.

На основании здравого смысла разумно предположить, что в установившемся режиме колебаний шарик будет колебаться с частотой внешней вынуждающей силы. Поэтому решение уравнения (3) следует искать в гармонической функции с частотой\* вынуждающей силы.

Для начала решим уравнение (3), пренебрегая силой сопротивления

$$a = -\omega_0^2 x + f_0 \cos \omega t. \quad (4)$$

---

\* В последовательности нашего изучения колебаний мы все время уходим от частоты собственных колебаний: частота свободных незатухающих колебаний совпадает с собственной частотой, частота затухающих колебаний немногим меньше собственной, а частота вынужденных колебаний совпадает с частотой вынуждающей силы, а не собственной частотой.

Попробуем<sup>\*</sup> найти его решение в виде гармонической функции

$$x = A \cos \omega t. \quad (5)$$

Для этого вычислим зависимости скорости и ускорения тела от времени как производные от закона движения

$$v(t) = x'(t) = -A\omega \sin \omega t$$

$$a(t) = v'(t) = -A\omega^2 \cos \omega t$$

и подставим их значения в уравнение (4):

$$-A\omega^2 \cos \omega t = -A\omega_0^2 \cos \omega t + f_0 \cos \omega t.$$

Теперь можно сократить на  $\cos \omega t$ . Следовательно, это выражение обращается в верное тождество в любой момент времени при выполнении условия

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (6)$$

Таким образом, наше предположение о решении уравнения (4) в виде (5) оправдалось: установившийся режим колебаний описывается функцией

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (7)$$

Отметим, что коэффициент  $A$ , согласно полученному выражению (6), может быть как по-

---

\* Строгое решение этого уравнения изобилует простыми, но объемными математическими выкладками, которые затуманивают физический смысл получаемых результатов. Поэтому мы, фактически, будем стараться угадать его решение, основываясь на здравом физическом смысле. Во-первых, такой подход является физическим, а во-вторых, полученные нами результаты могут быть строго обоснованы математически.

ложительным (при  $\omega < \omega_0$ ), так и отрицательным (при  $\omega > \omega_0$ ). Изменение знака соответствует изменению фазы колебаний на  $\pi$  (причина такого изменения будет выяснена чуть позже), поэтому амплитудой колебаний является модуль этого коэффициента  $|A|$ .

Амплитуда установившихся колебаний, как и следовало ожидать, пропорциональна величине вынуждающей силы. Кроме того, эта амплитуда сложным образом зависит от частоты вынуждающей силы. Схематический график этой зависимости показан на рис. 233.

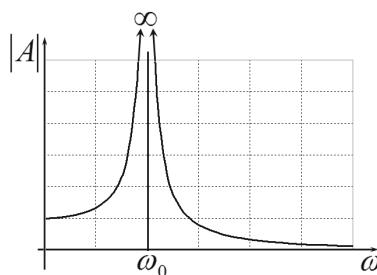


Рис. 233

Как следует из формулы (6) и хорошо видно на графике, при приближении частоты вынуждающей силы к собственной частоте системы амплитуда резко возрастает. Причина такого возрастаия амплитуды понятна: вынуждающая сила «вовремя» подталкивает шарик, при полном совпадении частот установившийся режим отсутствует — амплитуда возрастает до бесконечности. Конечно, на практике такое бесконечное возрастание наблюдать невозможно: во-первых, это может привести к разрушению самой колебательной системы, во-вторых, при больших амплитудах колебаний нельзя пренебрегать силами сопротивления среды.

**Резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к собственной частоте колебаний системы называется явлением резонанса.**

Приступим теперь к поиску решения уравнения вынужденных колебаний с учетом силы сопротивления:

$$a = -\omega_0^2 x - 2\gamma v + f_0 \cos \omega t. \quad (8)$$

Естественно, что и в этом случае решение следует искать в виде гармонической функции с частотой вынуждающей силы. Легко заметить, что поиск решения в формуле (5) в данном случае не приведет к успеху. Действительно, уравнение (8), в отличие от уравнения (4), содержит скорость частицы, которая описывается функцией синуса. Поэтому временная часть в уравнении (8) не сократится. Следовательно, решение уравнения (8) следует представить в общей форме гармонической функции

$$x(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad (9)$$

в которой два параметра ( $A_0$  и  $\varphi$ ) необходимо найти с помощью уравнения (8). Параметр  $A_0$  является амплитудой вынужденных колебаний,  $\varphi$  – сдвиг фаз между изменяющейся координатой и переменной вынуждающей силой. Используя тригонометрическую формулу для косинуса суммы, функцию (9) можно представить в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_0 \cos(\omega t + \varphi) = A_0 \cos \varphi \cdot \cos \omega t - \\ &- A_0 \sin \varphi \cdot \sin \omega t = B \cos \omega t + C \sin \omega t, \end{aligned} \quad (10)$$

которая также содержит два параметра  $B = A_0 \cos \varphi$  и  $C = -A_0 \sin \varphi$ , подлежащих определению. Используя функцию (10), запишем явные выражения для зависимостей скорости и ускорения частицы от времени

$$\begin{aligned}x(t) &= B \cos \omega t + C \sin \omega t \\v(t) &= x'(t) = -B\omega \sin \omega t + C\omega \cos \omega t \\a(t) &= v'(t) = -B\omega^2 \cos \omega t - C\omega^2 \sin \omega t\end{aligned}\quad (11)$$

и подставим в уравнение (8):

$$\begin{aligned}-B\omega^2 \cos \omega t - C\omega^2 \sin \omega t &= \\&= -\omega_0^2 (B \cos \omega t + C \sin \omega t) - \\&\quad - 2\gamma (-B\omega \sin \omega t + C\omega \cos \omega t) + f_0 \cos \omega t\end{aligned}\quad (12)$$

Перепишем это выражение в виде

$$\begin{aligned}(B(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\gamma\omega C - f_0) \cos \omega t + \\+ (C(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\gamma\omega B) \sin \omega t = 0.\end{aligned}\quad (13)$$

Для того чтобы равенство (13) выполнялось в любой момент времени, необходимо, чтобы коэффициенты при косинусе и синусе были равны нулю. На основании этого условия получаем два линейных уравнения для определения параметров функции (10):

$$\begin{aligned}B(\omega_0^2 - \omega^2) + 2\gamma\omega C &= f_0 \\C(\omega_0^2 - \omega^2) - 2\gamma\omega B &= 0.\end{aligned}\quad (14)$$

Решение этой системы уравнений имеет вид

$$B = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} f_0$$

$$C = \frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} f_0. \quad (15)$$

На основании формулы (10) определяем характеристики вынужденных колебаний: амплитуду

$$A_0 = \sqrt{B^2 + C^2} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}, \quad (16)$$

сдвиг фаз

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{C}{B} = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (17)$$

На рис. 234 показана схематическая зависимость амплитуды вынужденных колебаний  $A$  от частоты вынуждающей силы  $\omega$ . При малом затухании эта зависимость имеет резкий максимум при приближении частоты вынуждающей силы  $\omega$  к собственной частоте системы  $\omega_0$ . Таким образом, и в этом случае возможно возникновение резонанса, поэтому построенные зависимости часто называют резонансной кривой. Учет слабого затухания показывает, что амплитуда не возрастает до бесконечности, ее максимальное значение зависит от коэффициента затухания: с возрастанием последнего максимальная амплитуда быстро убывает.

Полученная зависимость амплитуды колебаний от частоты вынуждающей силы (16) содержит

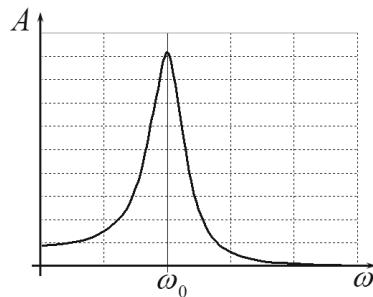


Рис. 234

слишком много независимых параметров ( $f_0$ ,  $\omega_0$ ,  $\gamma$ ) для того, чтобы построить полное семейство резонансных кривых. Как и во многих случаях, эту зависимость можно существенно упростить, перейдя к «безразмерным» переменным. Преобразуем формулу (16) к следующему виду

$$A = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} = \\ = \frac{f_0}{\omega_0^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{2\gamma}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad (16a)$$

и обозначим  $\tilde{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0}$  – относительная частота (отношение частоты вынуждающей силы к собственной частоте колебаний системы);  $\tilde{A} = \frac{A}{A_0}$  – относительная амплитуда (отношение амплитуды колебаний к величине отклонения  $A_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2}$  при нулевой частоте);  $\delta = \frac{2\gamma}{\omega_0} = \frac{\gamma T}{\pi}$  – безразмерный параметр\*, определяющий величину затухания. Используя эти обозначения, существенно упрощаем функцию (16):

---

\* Для любителей новых слов укажем, что эта величина называется декрементом затухания и очень часто встречается в теории колебаний.

$$\tilde{A} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \tilde{\omega}^2)^2 + \delta^2 \tilde{\omega}^2}}, \quad (166)$$

так как содержит всего один параметр –  $\delta$ .

Однопараметрическое семейство резонансных кривых, описываемых функцией (166), может быть построено особенно легко с помощью компьютера. Результат такого построения показан на рис. 235. Отметим, что переход к «обычным» единицам измерения может быть проведен элементарным изменением масштаба осей координат.

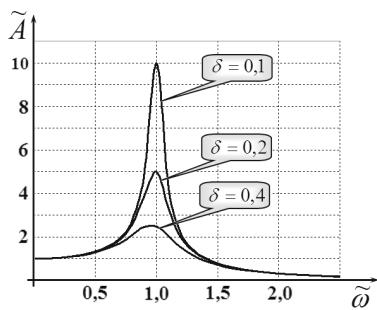


Рис. 235

Следует отметить, что частота вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний максимальна, также зависит от коэффициента затухания, слегка убывая с ростом последнего. Наконец, подчеркнем, что увеличение коэффициента затухания приводит к существенному увеличению ширины резонансной кривой.

Возникающий сдвиг фаз между колебаниями точки и вынуждающей силой также зависит от частоты колебаний и коэффициента их затухания. Более подробно с ролью этого сдвига фаз мы познакомимся при рассмотрении преобразования энергии в процессе вынужденных колебаний.

## 8.2. Векторное описание колебаний. Векторное сложение колебаний

Решение уравнения вынужденных колебаний потребовало от нас достаточно громоздких тригонометрических преобразований. Аналогичные проблемы возникают и при решении других задач, связанных со сложением нескольких тригонометрических функций. Поэтому для упрощения подобных математических выкладок разработан специальный математический метод – метод векторных диаграмм, с которым мы сейчас познакомимся.

Этот метод применяется для нахождения суммы гармонических функций одинаковой частоты вида

$$x(t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi). \quad (1)$$

Каждая такая функция определяется двумя параметрами<sup>\*</sup>  $A$  и  $\varphi$ . Сумма произвольного числа слагаемых вида (1) также является гармонической функцией того же вида.

Суммирование функций вида (1) может быть проведено аналитически в самом общем случае:

$$\begin{aligned} X(t) &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) + A_3 \cos(\omega t + \varphi_3) + \dots = \\ &= \sum_{k=1}^N A_k \cos(\omega t + \varphi_k) = \sum_{k=1}^N A_k (\cos \omega t \cdot \cos \varphi_k - \sin \omega t \cdot \sin \varphi_k) = \\ &= \left( \sum_{k=1}^N A_k \cos \varphi_k \right) \cos \omega t - \left( \sum_{k=1}^N A_k \sin \varphi_k \right) \sin \omega t = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \end{aligned}$$

где амплитуда результирующей функции равна

---

\* Частоту колебаний  $\varphi$  считаем заданной.

$$A_0 = \sqrt{\left( \sum_{k=1}^N A_k \cos \varphi_k \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^N A_k \sin \varphi_k \right)^2}, \quad (2)$$

а ее фаза удовлетворяет условию

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = -\frac{\left( \sum_{k=1}^N A_k \sin \varphi_k \right)}{\left( \sum_{k=1}^N A_k \cos \varphi_k \right)}. \quad (3)$$

Проведенным преобразованиям можно дать наглядное геометрическое, векторное истолкование. Изучение колебаний мы начали с рассмотрения связи между равномерным вращением вектора и законом движения его проекции.

На рис. 236 восстановлена эта связь. Теперь мы скажем, что вектор длиной  $A$ , направленный под углом  $\varphi$  к одной из осей, может представлять функцию (1). Теперь вместо аналитического сложения функций этого вида можно геометрически сложить векторы, изображающие отдельные слагаемые. При этом важно помнить, что все функции имеют одинаковые частоты, следовательно, изображающие их векторы врачаются с одной и той же угловой скоростью, поэтому углы между ними не изменяются. Можно сделать следующий шаг:

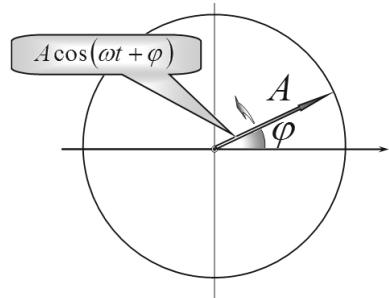


Рис. 236

«забыть» об их вращении\*, а складывать неподвижные векторы. Окончательным результатом суммирования будет являться проекция суммарного вектора на исходную ось.

Так, рис. 237 иллюстрирует сложение двух гармонических функций с разными амплитудами и разными начальными фазами. Амплитуду  $A_0$  и фазу  $\varphi_0$  результирующего колебания можно найти геометрически.

Например, амплитуда результирующего колебания может быть легко найдена с помощью теоремы косинусов:

$$A_0^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1 A_2 \cos(\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)) \Rightarrow \\ A_0 = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Полезно также запомнить геометрическое представление других тригонометрических функций (рис. 238).

Для этого следует воспользоваться тригонометрическими формулами приведения и «привести» эти функции к виду (1):

$$\sin \omega t = \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

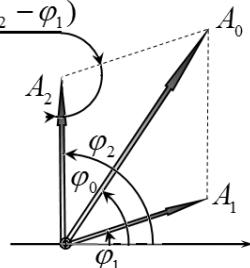


Рис. 237

---

\* Для физиков можно сказать о переходе во вращающуюся систему отсчета.

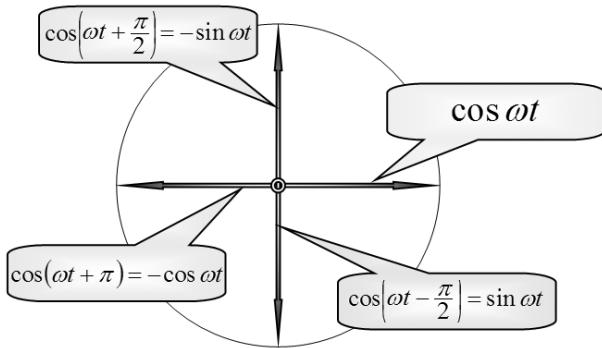


Рис. 238

$$-\cos \omega t = \cos(\omega t \pm \pi)$$

$$-\sin \omega t = \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Продемонстрируем применение метода векторных диаграмм для решения уравнения вынужденных колебаний:

$$a = -\omega_0^2 x - 2\gamma v + f_0 \cos \omega t. \quad (4)$$

Зависимости координаты, скорости и ускорения частицы запишем в виде

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) = A\omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \pi). \quad (5)$$

Подставим эти выражения в уравнение (4), которое запишем в виде

$$a + 2\gamma v + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$$

$$A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \pi) + 2\gamma A\omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \\ + \omega_0^2 A \cos(\omega t + \varphi) = f_0 \cos \omega t. \quad (6)$$

Теперь формально это уравнение имеет следующий смысл: сумма трех гармонических функций с разными амплитудами и фазами равна известной гармонической функции (вынуждающей силе).

Изобразим векторную диаграмму суммы трех слагаемых. Пока неизвестное направление оси, от которой отсчитываются углы, можно выбрать произвольно (на рис. 239 она выбрана горизонтально).

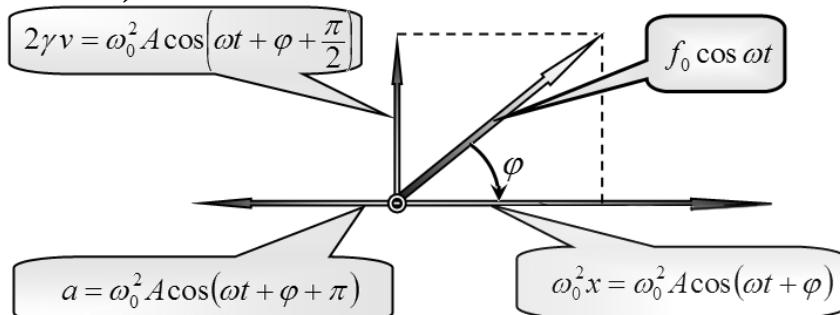


Рис. 239

Геометрическая сумма этих трех векторов (найти которую в данном случае можно элементарно) должна быть равна вектору, изображающему вынуждающую силу. Так как в исходном уравнении именно эта функция имеет нулевую fazу, то отсчет угла сдвига fazы должен проводиться именно от этого вектора. Так, на приведенном рисунке этот угол

отрицателен, так как поворот от вектора, изображающего вынуждающую силу, к вектору, изображающему зависимость  $x(t)$ , осуществляется в отрицательном направлении («по часовой стрелке»).

Используя построенную диаграмму, легко записать уравнение, связывающее амплитуду колебаний и амплитуду вынуждающей силы (на основании теоремы Пифагора):

$$A^2 (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + A^2 (2\gamma\omega)^2 = f_0^2,$$

из которого следует выражение для амплитуды вынужденных колебаний

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}, \quad (7)$$

естественно, совпадающее с полученным ранее аналитическим методом. Векторная диаграмма дает такое же выражение и для сдвига фаз:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (8)$$

Таким образом, метод векторных диаграмм позволяет получать точные формулы гораздо быстрее, чем традиционный аналитический метод, основанный на громоздких преобразованиях тригонометрических формул.

### **8.3. Превращения энергии при вынужденных колебаниях**

Внешняя сила, действующая на колебательную систему, совершает работу, следовательно, в

систему поступает энергия. Полезно рассмотреть превращения энергии в ходе вынужденных колебаний. Для этого поступим уже традиционным образом: динамическое уравнение<sup>\*</sup> колебаний

$$a = -\omega_0^2 x - 2\gamma v + f_0 \cos \omega t \quad (1)$$

умножим на скорость

$$a \cdot v = -\omega_0^2 x \cdot v - 2\gamma v \cdot v + f_0 \cos \omega t \cdot v$$

и перепишем в виде

$$f_0 \cos \omega t \cdot v = a \cdot v + \omega_0^2 x \cdot v + 2\gamma v \cdot v. \quad (2)$$

В этом уравнении каждое слагаемое имеет наглядный физический смысл. Так, функция  $P_0(t) = f_0 \cos \omega t \cdot v(t)$  описывает мгновенную мощность, развиваемую внешней вынуждающей силой. Величина  $2\gamma v \cdot v = f_{\text{сопр.}}(t) \cdot v(t) = P_{\text{потер.}}(t)$  является мощностью силы сопротивления и описывает потери механической энергии в единицу времени. Слагаемое  $a(t) \cdot v(t)$  преобразовывается следующим образом

\* Напомним, что уравнение следует из второго закона Ньютона, которое мы разделили на массу движущегося тела. Слагаемые, стоящие в правой части этого уравнения, имеют смысл «удельных» сил, то есть отношений сил к массе тела. Для упрощения изложения в дальнейшем эти слагаемые мы также будем называть «силами»:  $-\omega_0^2 x$  – сила упругости,  $-2\gamma v$  – сила сопротивления,  $f_0 \cos \omega t$  – вынуждающая сила. Аналогично, энергетические характеристики так же относятся к единице массы, поэтому величину  $\frac{v^2}{2}$  будем называть кинетической энергией, а величину  $\frac{\omega_0^2 x^2}{2}$  – потенциальной энергией системы. Кому такие переименования не нравятся, может все выражения этого раздела умножить на массу тела и любоваться знакомыми формулами.

$$a(t) \cdot v(t) = v \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta \left( \frac{v^2}{2} \right)}{\Delta t} = \frac{\Delta E_{кин.}}{\Delta t}$$

и равно скорости изменения кинетической энергии колеблющегося тела  $\Delta E_{кин.}$ . Наконец,

$$\omega_0^2 x \cdot v = \omega_0^2 x \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta \left( \frac{\omega_0^2 x^2}{2} \right)}{\Delta t} = \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

есть мощность силы упругости, равная скорости изменения потенциальной энергии системы  $U$ . С учетом проведенных преобразований уравнение (2) приобретает смысл закона сохранения и превращения энергии:

$$P_0 \Delta t = \Delta(E_{кин.} + U) + P_{потерп} \Delta t. \quad (3)$$

Энергия, переданная посредством работы внешней силы, расходуется на увеличение механической энергии системы и работу против сил сопротивления (равную, в свою очередь, потерям механической энергии).

Полученное уравнение (3) справедливо для любого промежутка времени, в том числе и на стадии переходного режима. Применим его к режиму установившихся колебаний. В этом режиме колебания являются гармоническими, поэтому за время, равное периоду колебаний, все характеристики движения (координата, скорость, кинетическая и потенциальная энергия) возвращаются к исходным значениям. Если в уравнении (3) интервал времени  $\Delta t$  положить равным периоду колебаний, то изменение полной энергии будет равно нулю, что при-

водит к очевидному результату: **работа внешней силы за период колебаний равна работе против силы сопротивления.** Иными словами, вся энергия, поступающая в систему, превращается в теплоту, выделяющуюся из-за наличия сил сопротивления.

Не составляет труда получить точные значения механической энергии и мощностей всех сил в процессе вынужденных колебаний. Зависимости координаты и скорости от времени нам известны и описываются формулами

$$\begin{aligned}x(t) &= A_0 \cos(\omega t + \varphi) \\v(t) &= -A_0 \omega \sin(\omega t + \varphi).\end{aligned}\quad (4)$$

В этом режиме полная механическая энергия системы равна

$$\begin{aligned}E(t) &= E_{\text{кин.}} + U = \frac{v^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{2} = \\&= \frac{A_0^2}{2} (\omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \omega_0^2 \cos^2(\omega t + \varphi)) = \\&= \frac{A_0^2 \omega_0^2}{2} \left( 1 + \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2} \sin^2(\omega t + \varphi) \right).\end{aligned}\quad (5)$$

Ее значение колеблется вокруг среднего значения  $\langle E \rangle = \frac{A_0^2 \omega_0^2}{2}$ .

Мощности внешней силы и силы сопротивления описываются формулами

$$\begin{aligned}P_0 &= f_0 \cos \omega t \cdot v = -A_0 \omega f_0 \cos \omega t \sin(\omega t + \varphi) \\P_{\text{норм.}} &= 2\gamma v^2 = 2\gamma A_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi).\end{aligned}\quad (6)$$

Причем первая принимает как положительные, так и отрицательные значения, а вторая все время положительна.

На рисунке 240 показаны графики зависимостей от времени внешней силы, координаты и скорости частицы, ниже построены графики зависимости от времени мощностей внешней силы и силы сопротивления, а также механической энергии. Графики построены для случая, когда частота вынуждающей силы меньше собственной частоты системы  $\omega < \omega_0$ , а затухание незначительно. На графиках выделены интервалы времени, когда работа внешней силы положительна, то есть когда энергия поступает в систему.

Эти графики показывают, что мгновенные значения энергетических характеристик даже в установившемся режиме достаточно сложно взаимосвязаны между собой: энергия, сообщаемая внешней силой, расходуется на изменение энергии системы (как кинетической, так и потенциальной),

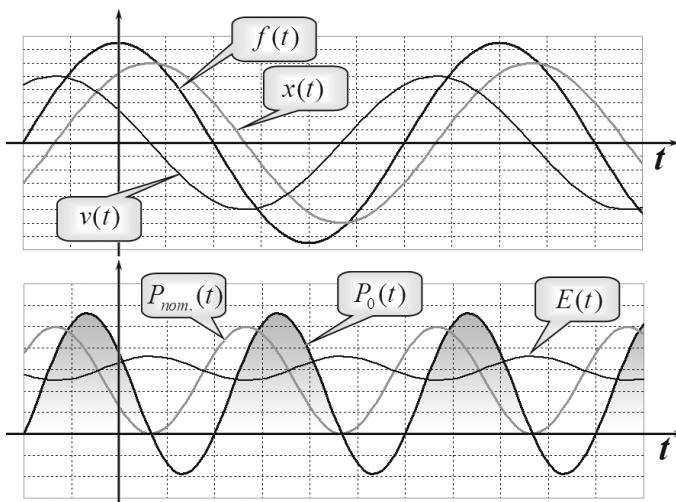


Рис. 240

кинетическая энергия переходит в потенциальную и обратно, часть энергии теряется из-за наличия сопротивления.

Более проста ситуация в случае точного резонанса, когда частота вынуждающей силы совпадает с собственной частотой колебаний системы. В этом случае механическая энергия системы остается постоянной, поэтому в любой момент времени мощность внешней силы в точности равна мощности потерь. Сдвиг фаз между вынуждающей силой и координатой точки равен  $\pm\frac{\pi}{2}$ , что приводит к тому, что изменение скорости точки синфазно с изменением внешней силы. В этом случае мгновенная мощность внешней силы в точности равна мощности потерь, поэтому полная энергия осциллятора остается постоянной.

Рассмотрение мгновенных энергетических характеристик представляет скорее академический интерес. С точки зрения практических применений, более важно рассмотрение этих характеристик, усредненных по промежутку времени, значительно превышающему период колебаний. Тем более, это справедливо в тех случаях, когда частота колебаний настолько велика, что различить отдельное колебание не представляется возможным\*.

---

\* Наиболее ярким примером такого положения является изучение взаимодействия света с веществом, где ни один прибор не в состоянии выделить отдельное колебание электромагнитной волны.

Проведем расчет усредненных энергетических характеристик в установившемся режиме вынужденных колебаний.

Для начала получим одну важную математическую формулу, которую неоднократно будем использовать в дальнейшем. Пусть две функции изменяются по гармоническому закону с одной и той же частотой

$$\begin{aligned} X_1(t) &= A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ X_2(t) &= A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Найдем среднее значение произведения этих функций, используя тригонометрическую формулу для произведения косинусов

$$\begin{aligned} \langle X_1(t) \cdot X_2(t) \rangle &= A_1 A_2 \langle \cos(\omega t + \varphi_1) \cdot \cos(\omega t + \varphi_2) \rangle = \\ &= \frac{A_1 A_2}{2} \langle \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) \rangle. \end{aligned}$$

Первое слагаемое (косинус разности фаз) не зависит от времени, второе является переменной функцией времени; очевидно, что ее среднее значение равно нулю. Таким образом, мы получаем, что среднее произведение двух функций равно половине произведения амплитуд, умноженной на косинус сдвига фаз между ними:

$$\langle X_1(t) \cdot X_2(t) \rangle = \frac{A_1 A_2}{2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (8)$$

Частные случаи этой формулы очевидны и ранее уже применялись нами. Так, при сдвиге фаз, равном нулю, среднее произведение равно половине произведения амплитуд – ранее мы показали,

что среднее значение квадрата косинуса (и синуса) равно 0,5; при сдвиге фаз, равном  $\pm \frac{\pi}{2}$ , среднее произведение равно нулю.

Полученная формула имеет красивую геометрическую интерпретацию на языке векторного представления колебаний. Если гармонические функции представить в векторной форме (в виде вращающихся векторов), то их **среднее произведение**, в соответствии с полученной формулой (8), **равно половине скалярного произведения векторов**, изображающих функции-сомножители (рис. 241).

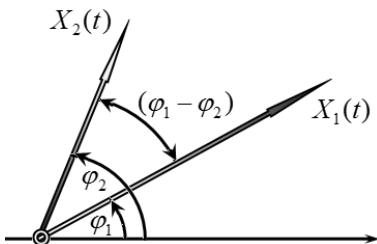


Рис. 241

Обратимся еще раз к рис. 239, на котором построена векторная диаграмма, иллюстрирующая процесс вынужденных колебаний. С ее помощью легко получить те же энергетические характеристики, которые мы нашли аналитически. Убедитесь в этом самостоятельно.

В заключение данного раздела получим явное выражение для средней мощности внешней силы (и равной ей мощности потерь) при вынужденных колебаниях. Эту величину разумно назвать средней мощностью, поглощаемой системой. Проще всего это сделать, усредняя мгновенную мощность потерь (6):

$$\begin{aligned}
 \langle P_{nomen} \rangle &= \langle 2\gamma A_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \rangle = \\
 &= 2\gamma A_0^2 \omega^2 \frac{1}{2} = \frac{\gamma f_0^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}.
 \end{aligned} \tag{9}$$

При выводе этой функции использовано явное выражение для амплитуды вынужденных колебаний. Эта зависимость похожа на зависимость амплитуды от частоты вынуждающей силы, но следует помнить, что это все-таки разные функции.

## § 9. Автоколебания. Параметрические колебания

### 9.1. Примеры автоколебательных систем

В некоторых «саморегулирующихся» системах незатухающие колебания могут поддерживаться **постоянной внешней силой**. Такие системы называются **автоколебательными**, а их поведение называется **автоколебаниями**.

По-видимому, простейшая автоколебательная система показана на рис. 242.

В бак через трубу *A* с постоянной скоростью наливается вода, при этом уровень воды в баке *h* возрастает со временем по линейному закону (рис. 242).

Через дно бака пропущена изогнутая труба (сифон) *C*, второе колено которого немного не доходит до дна бака. Когда уровень воды в баке (и в изогнутом колене) достигает верхней точки сифона, вода через изогнутую трубку выливается из бака.

Таким образом, уровень воды в баке изменяется по периодическому закону, который, естественно, отличается от гармонического (рис. 243). Период колебаний уровня воды в баке зависит как от внешних условий (скорости налиивания воды), так и от параметров самой колебательной системи.

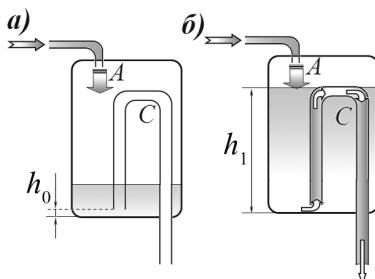


Рис. 242

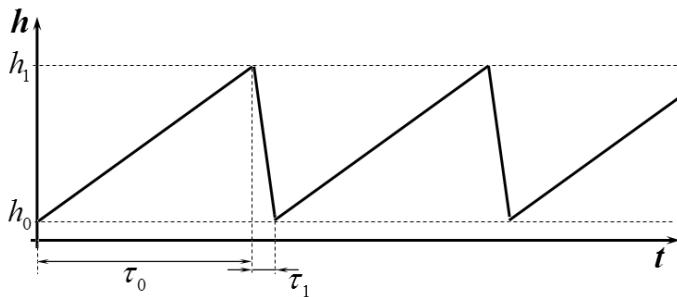


Рис. 243

мы, размеров бака, диаметра трубы сифона, ее высоты. Важно подчеркнуть, что в данной системе существует механизм, автоматически регулирующий изменение уровня воды: когда уровень воды достигает высшей точки, бак автоматически опустошается. Поэтому данная система является автоколебательной.

Такой же принцип работы заложен в генератор электрических колебаний, показанный на рис. 244.

Регулирующим элементом в этой системе является

неоновая лампочка – диод  $D$ . Если напряжение на лампе меньше некоторого напряжения  $U_1$  (которое называется напряжением зажигания), то газ в лампе является практически идеальным изолятором, в этом случае электрический ток через лампочку не проходит. При достижении напряжения зажигания в газе возникает электрический разряд, при этом газ ионизируется и становится хорошим про-

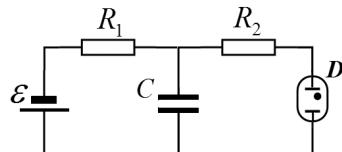


Рис. 244

водником, при этом электрическое сопротивление лампы падает практически до нуля.

Принцип работы показанного генератора следующий: конденсатор  $C$  подключен через резистор  $R_1$  к источнику постоянной ЭДС, значение которой превышает напряжение зажигания неоновой лампочки. Изначально незаряженный конденсатор заряжается, напряжение на нем возрастает, напряжение на лампочке равно напряжению на конденсаторе, так как ток через нее не идет. Когда это напряжение достигает значения напряжения зажигания, вспыхивает электрический разряд, лампа «открывается» и конденсатор разряжается через резистор  $R_2$  и лампочку, напряжение на нем резко падает до напряжения  $U_0$ , при котором газовый разряд прекращается. После этого процесс повторяется сколько угодно раз (пока не разряжается батарейка). Таким образом, напряжение на конденсаторе, а также ток через лампочку изменяются по периодическому (но не гармоническому) закону. В этой колебательной системе период колебаний зависит от ЭДС источника, сопротивлений резисторов, емкости конденсатора. Наличие внутреннего механизма, регулирующего характер протекающих процессов, делает эту систему **автоколебательной** (рис. 245).

Автоколебания лежат в основе многих явлений природы: колебания листьев растений под действием равномерного потока воздуха; образование турбулентных потоков на перекатах и порогах рек; голоса людей, животных и птиц образуются благо-

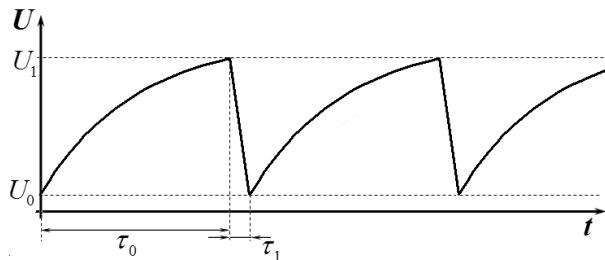


Рис. 245

даря автоколебаниям, возникающим при прохождении воздуха через голосовые связки; действие регулярных гейзеров и пр.

На автоколебаниях основан принцип действия большого количества всевозможных технических устройств и приспособлений, в том числе: работа всевозможных часов, как механических, так и электрических; звучание всех духовых и струнно-смычковых музыкальных инструментов; действие всевозможных генераторов электрических и электромагнитных колебаний, применяемых в электротехнике, радиотехнике и электронике; работа поршневых паровых машин и двигателей внутреннего сгорания и др.

## 9.2. Автоколебания в системах с «отрицательным трением»

Хорошо известно, что для большинства трущихся поверхностей коэффициент трения покоя превышает коэффициент трения скольжения. Увеличение силы трения покоя по сравнению с си-

лой трения скольжения носит название «явление застоя». Это явление приводит к ряду интересных последствий, например, его наличием объясняется скрип дверных петель, звучание струны скрипки и др. Механизм возбуждения колебаний в этих случаях также является автоколебательным.

Рассмотрим его на примере следующей системы (рис. 246).

На движущуюся с постоянной скоростью  $v_0$  горизонтальную ленту транспортера помещен брускок, прикрепленный с помощью легко растягимой пружины (жесткость которой равна  $k$ ) к неподвижному упору.

Будем рассматривать движение бруска в системе отсчета, связанной с неподвижным упором (рис. 247). Будем считать, что в точке начала отсчета оси пружина не деформирована.

Пусть в начальный момент времени брускок находится в точке начала отсчета и поконится относительно ленты (т.е. движется со скоростью ленты в выбранной системе отсчета). В это время сила трения, действующая на брускок, является силой трения покоя, поэтому она максимальна

$$F_{mp.0} = \mu_0 mg,$$

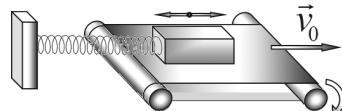


Рис. 246

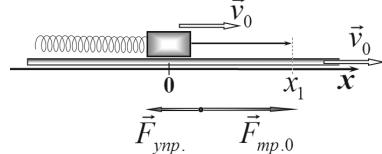


Рис. 247

где  $\mu_0$  – коэффициент трения покоя бруска о ленту. Брусок будет двигаться с постоянной скоростью, равной скорости ленты  $v_0$ , до тех пор, пока увеличивающаяся сила упругости пружинки не превысит силу трения покоя. Обозначим координату этой точки  $x_1$ , ее значение определим из уравнения

$$kx_1 = \mu_0 mg \Rightarrow x_1 = \mu_0 \frac{mg}{k}.$$

После прохождения этой точки брусок начнет скользить относительно ленты (рис. 248), поэтому сила трения скачком уменьшится до силы трения скольжения

$$F_{mp.1} = \mu_1 mg,$$

где  $\mu_1$  – коэффициент трения скольжения бруска о ленту, причем  $\mu_1 < \mu_0$ . Еще некоторое время брусок будет продолжать двигаться в прежнем направлении по инерции (т.к. он имел скорость, равную скорости ленты). Сместившись на максимальное расстояние  $x_{\max}$ , когда его скорость станет равной нулю, он начнет двигаться в обратном направлении с ускорением, определяемым силами трения и упругости, до некоторого положения  $x_{\min}$ . В точке начала скольжения сила упругости достигает максимальной силы трения покоя. На участке

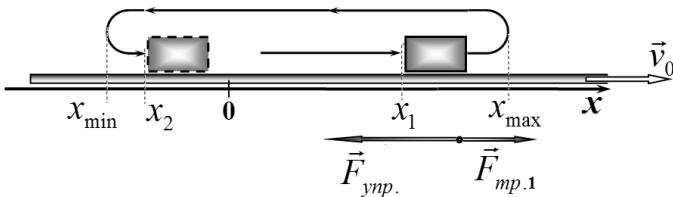


Рис. 248

$x_1 \rightarrow x_{\max} \rightarrow x_{\min} \rightarrow x_2$  бруск движется под действием силы упругости и постоянной силы трения скольжения\*, поэтому описывается гармонической функцией с частотой, равной собственной частоте колебаний бруска на пружине. В точке остановки относительно ленты скорость бруска становится равной скорости ленты. На этом этапе уравнение движения бруска будет иметь вид

$$ma = -kx + \mu_1 mg \Rightarrow a = -\omega_0^2 x + \mu_1 g,$$

здесь  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  – собственная частота колебаний бруска на пружине. Это уравнение следует решать при следующих начальных условиях: в начальный момент времени координата бруска равна  $x_1$ , а его скорость –  $v_0$ . Это решение имеет достаточно громоздкий вид\*\*:

$$x(t) = \mu_1 \frac{mg}{k} + (\mu_0 - \mu_1) \frac{mg}{k} \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t.$$

Затем направление его движения опять изменится, его скорость начнет возрастать до тех пор, пока не станет равной скорости ленты (точку, в которой это произойдет, обозначим  $x_2$ ), после чего процесс повторится: бруск станет двигаться до точки  $x_1$  со скоростью ленты и т.д.

\* Строго говоря, коэффициент трения скольжения может зависеть от скорости движения, но сейчас мы этой зависимостью пренебрежем.

\*\* Для экономии места подробные выкладки мы опускаем: как всегда, нам важнее физическое содержание, а не алгебраические преобразования.

Эти рассуждения позволяют качественно построить график закона движения бруска (рис. 249).

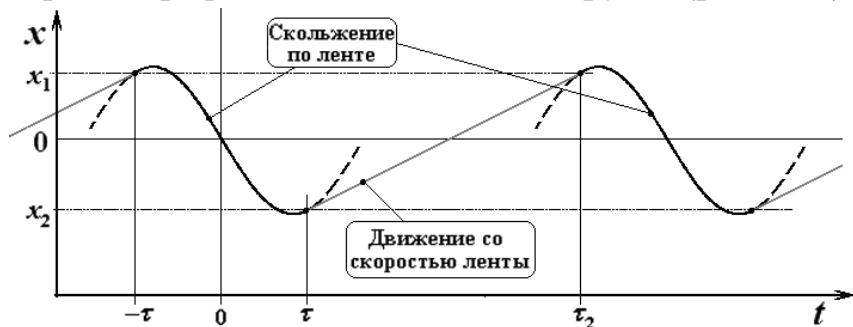


Рис. 249

Таким образом, и в данной системе существует внутренний механизм\*, обеспечивающий переключение режимов движения бруска: резкое скачкообразное изменение силы трения при начале скольжения и в момент равенства скорости скольжения бруска и скорости ленты. В заключение подчеркнем, что положительная работа силы трения покоя компенсирует потери энергии из-за трения скольжения.

Колебания скрипичной струны описываются аналогичным образом: равномерно движущийся смычок играет роль «движущейся ленты транспортера», а сама струна совмещает в себе функции

\* Иногда системы, подобные рассмотренной, не совсем удачно называют системами с «отрицательным трением» – подразумевая, что в некотором диапазоне трение уменьшается при возрастании скорости или, в общем случае, потери уменьшаются при возрастании амплитуды колебаний – при этом возможен эффективный механизм генерации колебаний.

брюска (ее масса) и пружины (ее упругость). Как следует из проведенного рассмотрения, частота автоколебаний зависит не только от свойств самой системы (массы, упругости), но и характеристик внешнего постоянного воздействия, например, скорости движения смычка. Таким образом, у скрипача имеются богатые возможности управлять звуком струн: подбирать толщину, регулировать натяжение, изменять скорость движения смычка и силу его давления на струну, выбирать точку приложения...

### 9.3. Маятниковые часы

Еще одним широко известным примером механической автоколебательной системы является механизм маятниковых часов-ходиков (рис. 250). В этом устройстве колебания маятника поддерживаются периодическим подталкиванием с помощью зубцов храпового колеса, соединенного с висящей гирей. Принцип работы этого механизма типичен для автоколебательных систем – работа постоянной внешней силы (силы тяжести, действующей на гирю) периодически компенсирует потери механической энергии маятника.

Различные устройства для измерения времени создавались уже в глубокой древности. Непосред-

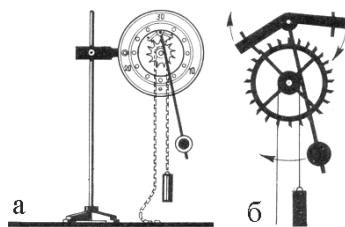


Рис. 250

ственными предшественниками механических часов, подготовившими их изобретение, были водяные часы. В сложных водяных часах уже использовались циферблат с перемещающейся по нему стрелкой, груз в качестве движущей силы, колесные передачи, механизм боя и марионетки, разыгрывавшие различные сцены.

Первые упоминания о башенных колесных часах в Европе приходятся на границу XIII и XIV веков. Первые часовые механизмы приводились в движение энергией опускающегося груза. Приводной механизм состоял из гладкого деревянного вала и намотанного на него пенькового каната с каменной, а позднее металлической гирей на конце. Благодаря силе тяжести гири, канат начинал разматываться и вращал вал. На вал было насажено большое или главное зубчатое колесо, находившееся в сцеплении с зубчатыми колесами передаточного механизма. Таким образом, вращение от вала передавалось механизму часов.

По-настоящему эра механических часов началась в Европе только в конце XIII века. В 1288 году башенные часы были установлены в Вестминстерском аббатстве в Англии. В 1292 году часами обзавелся храм в Кентербери. В 1300 году встречается сообщение о том, что башенные часы сооружены во Флоренции (упоминание об этих часах сохранилось в «Божественной комедии» Данте). В 1314 году часы были уже во французских Каннах. Ни один из этих ранних механизмов не сохранился до наших дней, имена их создателей тоже неизвест-

ны. Однако мы можем достаточно точно представить себе их устройство. Самый простой часовой механизм (если не брать во внимание механизм боя) может включать в себя всего три зубчатых колеса. Очевидно, что все упомянутые выше часы представляли собой пример простого трехколесного механизма с однострелочным циферблатом.

Ко второй половине XV века относятся самые первые упоминания об изготовлении часов с пружинным двигателем, который открыл путь к созданию миниатюрных часов. Источником движущей энергии в пружинных часах служила заведенная и стремящаяся развернуться пружина, которая представляла собой эластичную, тщательным образом закаленную, стальную ленту, свернутую вокруг вала внутри барабана. Внешний конец пружины закреплялся за крючок в стенке барабана, внутренний соединялся с валом барабана. Стремясь развернуться, пружина приводила во вращение барабан и связанное с ним зубчатое колесо, которое в свою очередь передавало это движение системе зубчатых колес до регулятора включительно.

Самые значительные усовершенствования в механизм часов были внесены во второй половине XVII века знаменитым голландским физиком Гюйгенсом, создавшим новые регуляторы как для пружинных, так и для гиревых часов.

Впервые мысль применить маятник в простейших приборах для измерения времени пришла великому итальянскому ученому Галилео Галилею. Сохранилось предание, что в 1583 году девятнад-

цати летний Галилей, находясь в Пизанском соборе, обратил внимание на раскачивание люстры. Он заметил, отсчитывая удары пульса, что время одного колебания люстры остается постоянным, хотя размах делается все меньше и меньше. Позже, приступив к серьезному изучению маятников, Галилей установил, что при малом размахе (амплитуде) раскачивания (всего несколько градусов) период колебания маятника зависит только от его длины и имеет постоянную длительность. Такие колебания стали называть изохронными. Очень важно, что при изохронных колебаниях период колебания маятника не зависит от его массы. Благодаря этому свойству маятник оказался очень удобным прибором для измерения небольших отрезков времени. На его основе Галилей разработал несколько простых счетчиков, которые использовал при проведении своих экспериментов. Но из-за постепенного затухания колебаний маятник не мог служить для измерения длительных промежутков времени.

Около 1676 года английский часовщик Клемент изобрел якорно-анкерный спуск, который очень удачно подходил к маятниковым часам, имевшим небольшую амплитуду колебания. В этой конструкции спуска на ось маятника насаживался якорь с палетами. Раскачиваясь вместе с маятником, палеты попеременно внедрялись в ходовое колесо, подчиняя его вращение периоду колебания маятника. При каждом колебании колесо успевало повернуться на один зуб. Благодаря такому

спусковому механизму маятник получал периодические толчки, которые не давали ему остановиться. Толчок происходил всякий раз, когда ходовое колесо, освободившись от одного из зубьев якоря, ударялось с определенной силой о другой зуб. Этот толчок передавался от якоря к маятнику (с. 477 рис. 250б).

Кто бы ни был первым изобретателем маятниковых часов, ясно, что маятник в качестве регулятора хода часов стал входить в широкое применение только после появления трудов Гюйгенса «Часы» и особенно «Маятниковые часы».

Если в ранней работе Гюйгенса содержится в основном только описание первых маятниковых часов, то в последующей дается и их теория, которая, в принципе, остается без изменения до сих пор. Эта теория оказалась способной служить рациональной основой для последующего конструирования маятниковых часов. В брошюре «Часы» приведены чертежи изобретенных Гюйгенсом маятниковых часов и дано их описание.

При создании часов Гюйгенсу было известно, что колебание маятника с увеличением его амплитуды становится неизохронным и что при применении в маятниковых часах шпиндельного хода получение изохронного колебания маятника или колебания его по круговой дуге в пределах только нескольких градусов является задачей технически трудно разрешимой. Вариация хода часов при большой дуге была весьма значительной, и это,

безусловно, отражалось на их точности. При данных условиях для Гюйгенса важно было добиться изохронного колебания при любой дуге размаха маятника. Это вынудило его искать средство, которое могло бы обеспечить изохронность колебаний маятника не только при малой, но и при большой амплитуде.

Для решения этой задачи Гюйгенсу «потребовалось укрепить и, где нужно, дополнить учение великого Галилея о падении тел. «Наиболее желательным плодом, как бы величайшей вершиной этого учения, и является открытое мною свойство циклоиды». Для того чтобы найти эту кривую, Гюйгенс вынужден был проводить тщательно подготовленные опыты, основанные на сравнении изученного им падения маятника по круговой дуге, с падением тел, скатывающихся по круговому пути под влиянием тяжести. Он стремился найти такую кривую, движение по которой могло бы происходить независимо от высоты падения и всегда за одно и то же время. Единственной кривой, удовлетворяющей этому условию, оказалась циклоида с горизонтальным основанием и вершиной, опущенной вниз.

Открытие Гюйгенсом свойства циклоиды как «кривой с равным временем», или обладающей свойством таутокронизма при действии силы тяжести, и было им использовано для создания часов с циклоидальным маятником. Далее Гюйгенс геометрически вывел общезвестную формулу для определения периода колебаний математического маятника при малой амплитуде. В теоретической

механике эта формула выводится с применением высшей математики.

Установив, что кривая развертывания циклоиды тоже есть циклоида, Гюйгенс подвесил маятник на нитях и поместил по обеим их сторонам циклоидально изогнутые металлические щеки таким образом, чтобы при его качании нити ложились по этим кривым поверхностям. Тогда действительно, описывая циклоиду, маятник мог иметь равномерный ход при любом изменении амплитуды (рис. 251). Для построения циклоидальных щек Гюйгенс изобрел шаблон, пользуясь разработанной им теорией эволюты и эвольвенты. В первых часах с циклоидальным маятником, изготовленных Костером, когда еще не было такого шаблона, Гюйгенс находил кривые, соответствующие циклоиде, опытным путем.

Часы, снабженные циклоидальным маятником, имеющие большую амплитуду, Гюйгенс считал наиболее пригодными для мореходства.

Английское Адмиралтейство назначило очень крупную премию за создание таких часов. Гюйгенс не получил этой премии, но его работы над теорией часов внесли крупнейший вклад в основание физики.

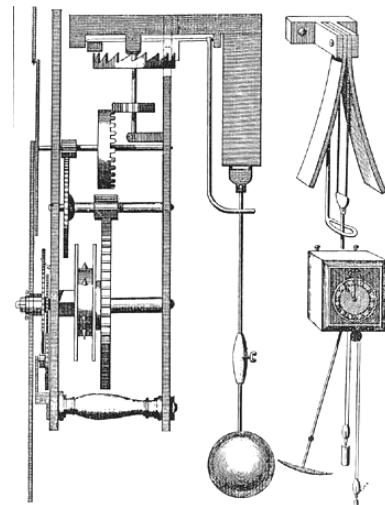


Рис. 251



Рис. 252

Христиан Гюйгенс ван Зёйлихем\* (Christiaan Huygens) (1629–1695) – нидерландский математик, физик, астроном и изобретатель (рис. 252).

Христиан Гюйгенс родился в Гааге. Отец его, Константин Гюйгенс, тайный советник принцев Оранских, был замечательным литератором, получившим также хорошее научное образование. Молодой Гюйгенс изучал право и математику в Лейденском университете, затем решил посвятить себя науке. В 1651 году опубликовал «Рассуждения о квадратуре гиперболы, эллипса и круга». Вместе с братом он усовершенствовал телескоп, доведя его до 92-кратного увеличения, и занялся изучением неба. Первая известность пришла к Гюйгенсу, когда он открыл кольца Сатурна (Галилей их тоже видел, но не смог понять, что это такое) и спутник этой планеты, Титан. В 1657 году Гюйгенс получил голландский патент на конструкцию маятниковых часов. В последние годы жизни этот механизм пытался создать Галилей, но ему помешала прогрессирующая слепота. Часы Гюйгенса реально работали и обеспечивали превосходную для того времени точность хода. Центральным элементом конструкции был придуманный Гюйгенсом якорь, который периодически подталкивал маятник и поддерживал незатухающие колебания. Сконструированные Гюйгенсом точные и недорогие часы с маятником быстро получили широчайшее распространение по всему миру.

\* Согласно нидерландско-русской практической транскрипции, эти имя и фамилию по-русски правильнее воспроизвести как Кристиан Хёйгенс.

В 1665 году поселился в Париже и был принят в число членов Академии наук. В 1666 году становится ее первым президентом. Гюйгенс руководил Академией 15 лет. В 1673 году под названием «Маятниковые часы» выходит исключительно содержательный труд по кинематике ускоренного движения.

Гюйгенс участвовал в современных ему спорах о природе света. В 1678 году он выпустил «Трактат о свете» – набросок волновой теории света. Другое замечательное сочинение он издал в 1690 году; там он изложил качественную теорию отражения, преломления и двойного лучепреломления в исландском шпате в том самом виде, как она излагается теперь в учебниках физики. Сформулировал так называемый принцип Гюйгенса, позволяющий исследовать движение волнового фронта, впоследствии развитый Френелем и сыгравший важную роль в волновой теории света и теории дифракции.

В 1681 году, в связи с намеченной отменой Нантского эдикта, Гюйгенс, не желая переходить в католицизм, вернулся в Голландию, где продолжил свои научные исследования.

В 1673 году Гюйгенс опубликовал классический труд по механике «Маятниковые часы» (*«Horologium oscillatorium, sive de motu pendulorum ac horologia aptato demonstrationes geometrica»*). Скромное название не должно вводить в заблуждение. Кроме теории часов, сочинение содержало множество первоклассных открытий в области анализа и теоретической механики. Гюйгенс также проводит там квадратуру ряда поверхностей вращения. Это и другие его сочинения имели огромное влияние на молодого Ньютона.

В первой части труда Гюйгенс описывает усовершенствованный циклоидальный маятник, который обладает постоянным временем качания независимо от амплитуды. Для объяснения этого свойства автор посвящает вторую часть книги выводу общих законов движения тел в поле тяжести – свободных, движущихся по наклонной плоско-

сти, скатывающихся по циклоиде. Надо сказать, что это усовершенствование не нашло практического применения, поскольку при малых колебаниях повышение точности от циклоидального привеса незначительно. Однако сама методика исследования вошла в золотой фонд науки.

Гюйгенс выводит законы равноускоренного движения свободно падающих тел, основываясь на предположении, что действие, сообщаемое телу постоянной силой, не зависит от величины и направления начальной скорости. Выводя зависимость между высотой падения и квадратом времени, Гюйгенс делает замечание, что высоты падений относятся как квадраты приобретенных скоростей. Далее, рассматривая свободное движение тела, брошенного вверх, он находит, что тело поднимается на наибольшую высоту, потеряв всю сообщенную ему скорость, и приобретает ее снова при возвращении обратно.

Галилей допускал без доказательства, что при падении по различно наклонным прямым с одинаковой высоты тела приобретают равные скорости. Гюйгенс доказывает это следующим образом. Две прямые разного наклонения и равной высоты приставляются нижними концами одна к другой. Если тело, спущенное с верхнего конца одной из них, приобретает большую скорость, чемпущенное с верхнего конца другой, то можнопустить его по первой из такой точки ниже верхнего конца, чтобы приобретенная внизу скорость была достаточна для подъема тела до верхнего конца второй прямой; но тогда бы вышло, что тело поднялось на высоту, большую той, с которой упало, а этого быть не может.

От движения тела по наклонной прямой Гюйгенс переходит к движению по ломаной линии и далее к движению по какой-либо кривой, причем доказывает, что скорость, приобретаемая при падении с какой-либо высоты по кривой, равна скорости, приобретаемой при свободном падении с той же высоты по вертикальной линии, и что такая же скорость необходима для подъема того же тела на ту же высоту как по вертикальной прямой, так и по кривой. Затем, переходя к

циклоиде и рассмотрев некоторые геометрические свойства ее, автор доказывает таутохронность (независимость периода от амплитуды) движений тяжелой точки по циклоиде.

В третьей части сочинения излагается теория эволют и эвольвент, открытая автором еще в 1654 г.; здесь он находит вид и положение эволюты циклоиды.

В четвертой части излагается теория физического маятника; здесь Гюйгенс решает ту задачу, которая не давалась стольким современным ему геометрам, – задачу об определении центра качаний. Основой решения задачи послужило положение, которое сейчас представляет простое следствие закона сохранения энергии.

В последней, пятой, части своего сочинения Гюйгенс дает тринадцать теорем о центробежной силе. Эта глава дает впервые точное количественное выражение для центробежной силы, которое впоследствии сыграло важную роль для исследования движения планет и открытия закона всемирного тяготения. Гюйгенс приводит в ней (словесно) несколько фундаментальных формул для периода колебаний математического маятника и для центростремительного ускорения.

## 9.4. Параметрические колебания. Качели

С детства всем хорошо знакома и многими любима такая старинная забава, как качели. Тренировкам на этом снаряде придают большое значение даже летчики и космонавты. Когда малыша, сидящего на качелях, раскачивает кто-то из старших, стоящий рядом, то такой механизм разгона и поддержания колебаний нами подробно изучен: это вынужденные колебания под действием внешней периодической силы. Но на качелях можно раскачиваться самостоятельно, сидя или стоя на них.

Процедура раскачивания в этом случае заключается в том, что человек, стоящий на качелях, периодически, в нужные моменты, приседает и встает. При этом периодически изменяются **параметры** самой колебательной системы (момент инерции, расстояние от точки подвеса до центра масс), поэтому такие незатухающие колебания называются **параметрическими**. Простейшим уравнением, описывающим такие колебания, может быть знакомое нам уравнение гармонических колебаний, в котором параметр  $\omega^2$  является периодической функцией времени:

$$a = -\omega^2(t)x. \quad (1)$$

Зависимость параметра от времени может быть, например, представлена в виде

$$\omega^2 = \omega_0^2(1 + \epsilon \cos \omega t), \quad (2)$$

где постоянная  $\omega_0^2$  – собственная частота колебаний при неизменных средних значениях параметров системы (например, частота свободных колебаний качелей при неподвижно стоящем на них человеке), а второе слагаемое описывает периодическое изменение параметров системы.

Несмотря на внешнюю простоту этого уравнения, его анализ и решение очень сложны\*, поэтому мы рассмотрим параметрические колебания качелей с энергетической точки зрения.

---

\* Это уравнение широко известно, оно даже имеет персональное имя – уравнение Матье. К сожалению, оно не имеет аналитического решения, выражаемого через элементарные функции, поэтому его решают либо приближенными методами, либо численно, с помощью компьютера.

Когда человек приседает и встает, он совершает работу, поэтому, в принципе, может увеличивать амплитуду колебаний и компенсировать неизбежные потери механической энергии на трение и сопротивление воздуха. Подчеркнем, что в рассматриваемом случае источник энергии находится «внутри» самой колебательной энергии, причем этот источник должен расходовать энергию «сознательно», включаясь и выключаясь в нужные моменты времени. Обратим также внимание на то обстоятельство, что рассматриваемая система не является замкнутой: раскачиваться на незакрепленных качелях, по меньшей мере, затруднительно. Наконец, движение человека относительно качелей должно быть периодическим, то есть время от времени, он должен возвращаться в исходное положение (сколько раз присел, столько раз встал).

Используем эти общие соображения для описания раскачивания качелей. Предельно упростим ситуацию: будем считать человека материальной точкой, расстояние от которой до оси вращения может изменяться в некоторых небольших пределах «сознательно», то есть в нужные моменты времени. Для того чтобы максимально увеличить механическую энергию колебаний, человек должен вставать, когда для этого требуется приложить максимальное усилие, так как при этом будет совершена максимальная работа. Очевидно, что это условие достигается, когда качели проходят нижнюю точку. Если человек будет приседать в другом месте, то потери механической энергии при этом будут меньше, чем

работа, совершенная при вставании в нижней точке. Таким образом, имеется возможность поддерживать незатухающие колебания.

Итак, пусть начальный угол отклонения качелей равен  $\phi_0$  и при этом максимальном отклонении центр масс находится на максимальном удалении  $l$  от точки подвеса  $O$  (рис. 253а). Когда качели опускаются под действием силы тяжести в нижнее положение, рассматриваемая материальная точка приобретет скорость  $v_0$ , которую можно найти на основании закона сохранения энергии

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgl(1 - \cos\phi_0), \quad (3)$$

из которого следует

$$v_0 = \sqrt{2gl(1 - \cos\phi_0)}. \quad (4)$$

Далее, пусть в момент прохождения нижней точки центр масс очень быстро поднимается на малую высоту  $h$  (рис. 253б), при этом его скорость возрастет до некоторой величины  $v_1$ . Попробуем найти эту скорость на основании закона сохранения момента импульса

$$mv_0 l = mv_1(l - h), \quad (5)$$

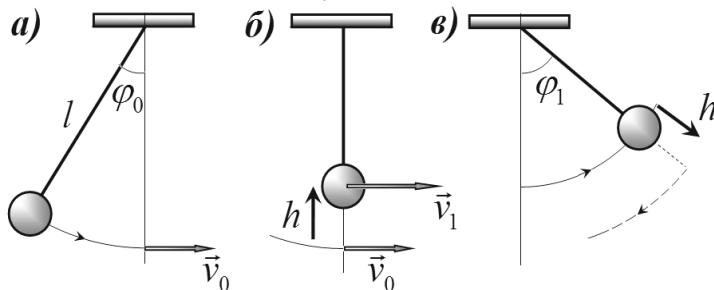


Рис. 253

из этого уравнения находим

$$v_1 = v_0 \frac{l}{l-h} \approx v_0 \left( 1 + \frac{h}{l} \right). \quad (6)$$

На последнем шаге мы использовали приближенную формулу, считая, что высота подъема  $h$  значительно меньше длины качелей  $l$ .

Этот же результат можно получить и на основании рассмотрения энергетического баланса. Так, в нижней точке сила давления человека на качели равна (эта формула непосредственно следует из уравнения второго закона Ньютона)

$$F = \frac{mv_0^2}{l} + mg. \quad (7)$$

Чтобы приподнять тело, к нему следует приложить такую же по модулю силу, направленную вверх. Следовательно, при этом необходимо совершить работу  $\delta A \approx Fh$  (это выражение является приближенным, так как, строго говоря, эта силы неизначительно должна изменяться при вставании). Эта работа идет на увеличение кинетической и потенциальной энергии тела:

$$Fh \approx \left( \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \right) + mgh. \quad (8)$$

Это уравнение позволяет найти выражение для скорости

$$v_1 = v_0 \sqrt{1 + 2 \frac{h}{l}} \approx v_0 \left( 1 + \frac{h}{l} \right), \quad (9)$$

которое совпадает с выражением (6), полученным на основании закона сохранения импульса. От-

личия в малых величинах порядка  $\left(\frac{h}{l}\right)^2$  обусловлены приближенным выражением для совершенной работы. Можете быть уверены, что при точном расчете работы (с учетом изменения силы при изменении расстояния до точки подвеса) эти два подхода дают одинаковые результаты, совпадающие с формулой (6).

Интересен вопрос: а какая горизонтальная сила, действующая на тело, увеличивает его скорость? Отвечаем: чтобы вставать строго вертикально, человек должен действовать с некоторой горизонтальной силой на качели, их ответная реакция и приводит к появлению ускорения тела в горизонтальном направлении\*.

Теперь с помощью закона сохранения энергии

$$mg(l-h)(1-\cos\varphi_1) = \frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} \left(\frac{l}{l-h}\right)^2 = \\ = mgl(1-\cos\varphi_0) \left(\frac{l}{l-h}\right)^2 \quad (10)$$

можно найти максимальный угол отклонения качелей  $\varphi_1$  в противоположном направлении (рис. 253в), который удовлетворяет условию

$$(1-\cos\varphi_1) = (1-\cos\varphi_0) \left(\frac{l}{l-h}\right)^3. \quad (11)$$

\* Если рассматривать движение тела во врачающейся неинерциальной системе отсчета, то эта сила называется силой Кориолиса, это та же сила, что подмывает берега рек из-за вращения Земли.

Ясно, что этот угол больше начального. Далее, в верхней точке человек должен быстро присесть, чтобы опять подняться в нижней точке. Если человек будет приседать в верхней точке, где скорость качелей равна нулю, то на основании закона сохранения импульса (так же, как и на основании энергетического баланса) потеря энергии колебаний не произойдет! Если же приседать в другой точке траектории, то скорость колебаний уменьшится, что и является причиной потери механической энергии. Таким образом, за половину периода колебаний угол отклонения качелей увеличился, и при этом тело вернулось в исходное нижнее положение относительно качелей. Оценим также изменение высоты подъема за этот промежуток времени:

$$\Delta z = l(1 - \cos\phi_1) - l(1 - \cos\phi_0) = l \left( \left( \frac{l}{l-h} \right)^3 - 1 \right) \approx 3l \frac{h}{l}. \quad (12)$$

Легко показать, что соответствующее увеличение потенциальной энергии равно работе, совершенной при вставании. В проведенном расчете мы пренебрегли силами трения в оси вращения качелей и сопротивлением воздуха. Понятно, что в установившемся режиме рассмотренный механизм «подкачки» энергии (совершение работы при вставании) восполняет потери механической энергии.

Можно подвести некоторые итоги. Мы показали, что периодическое изменение параметров системы может приводить к возникновению и поддержанию незатухающих параметрических

колебаний в колебательных системах с трением и другими силами сопротивления. При этом потери механической энергии компенсируются работой сил, изменяющих параметры системы. На примере рассмотренного движения качелей видно, что их максимальное раскачивание достигается в том случае, когда частота изменения параметра в два раза превышает собственную частоту колебаний системы – за один период нужно дважды приседать и дважды вставать.

Это правило является общим и для других систем, в которых совершаются параметрические колебания. Такое возрастание амплитуды колебаний называется **параметрическим резонансом**. Главное его отличие от резонанса при вынужденных колебаниях заключается в том, что он наступает в том случае, когда частота изменения параметров системы в два раза превышает собственную частоту колебаний.

В отличие от вынужденных колебаний, параметрические не являются самовозбуждающими: необходимо некоторое начальное отклонение системы от положения равновесия, чтобы начался процесс параметрических колебаний. Посмотрите на проведенные выкладки для описания колебаний качелей при отсутствии начального угла отклонения: появление колебаний невозможно.

В заключение данного раздела подчеркнем, что параметрические колебания возможны и в других колебательных системах: электрических, оптических и т.д.

# ГЛАВА 3. ПЕРЕМЕННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

## §10. Переменный электрический ток

Не будет большим преувеличением, если сказать, что современная цивилизация построена на производстве, передаче и использовании энергии электрического тока. Причем в быту, на транспорте, в промышленности главным образом используются механизмы, работающие на переменном электрическом токе. В данном параграфе мы рассмотрим основные физические принципы работы цепей переменного электрического тока.

### 10.1. Генератор электрического тока

В качестве источников переменного тока используются генераторы переменного электрического тока, принцип действия которых основан на явлении электромагнитной индукции. Работу такого генератора рассмотрим с помощью упрощенной схемы, показанной на рис. 254.

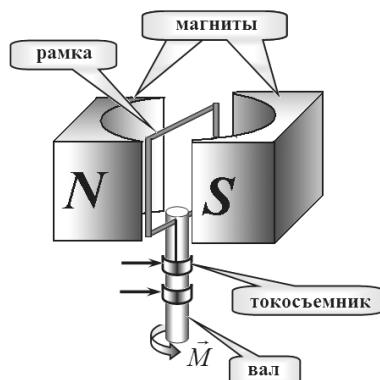


Рис. 254

Проволочная рамка (ротор), прикрепленная к валу, может вращаться в зазоре между полюсами постоянных магнитов (которые называются статором). Выводы проволочной обмотки рамки соединены с проводящими кольцами, расположенными на валу. С этими кольцами прикасаются скользящие контакты (щетки), с помощью которых осуществляется электрический контакт между обмоткой рамки и внешней электрической цепью, для которой генератор служит источником ЭДС. Вал соединен с некоторым двигателем (например, турбиной), который заставляет рамку вращаться с некоторой постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Для обеспечения вращения к валу постоянно прикладывается некоторый момент сил  $\bar{M}$ .

Будем считать, что магниты создают однородное магнитное поле индукции  $\vec{B}$  (рис. 255). Положение рамки будем характеризовать углом поворота  $\phi$ , который образует нормаль  $\vec{n}$  к плоскости рамки с направлением вектора индукции поля  $\vec{B}$ . При вращении рамки изменяется магнитный поток через нее, поэтому в ней индуцируется ЭДС. Так как с помощью токосъемника (кольцо и щеток) рамка соединена с внешней электрической цепью, то в рамке и внешней цепи возникает электрический ток.

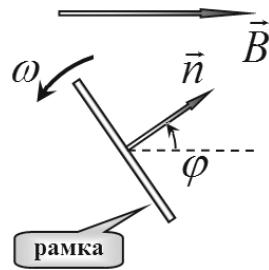


Рис. 255

При равномерном вращении рамки угол поворота изменяется по закону

$$\varphi = \omega t. \quad (1)$$

Магнитный поток через рамку также изменяется с течением времени, его зависимость определяется функцией

$$\Phi = BS \cos \varphi = BS \cos \omega t, \quad (2)$$

где  $S$  – площадь рамки, кроме того, считаем, что обмотка рамки содержит один виток. По закону электромагнитной индукции М. Фарадея, ЭДС индукции, возникающая в рамке, равна

$$\varepsilon = -\Phi' = BS\omega \sin \omega t. \quad (3)$$

Как следует из этого выражения, ЭДС индукции изменяется по гармоническому закону, с частотой, равной угловой скорости вращения рамки. Таким образом, мы показали, что рассмотренное устройство действительно является источником переменной ЭДС.

Покажем теперь, что рассматриваемый генератор преобразует механическую энергию двигателя в энергию электрического тока. Пусть к генератору подключена внешняя цепь, полное сопротивление\* которой равно  $R$ . В соответствии с законом Ома, сила тока в цепи будет равна

---

\* В реальности обмотка генератора и внешняя цепь обладают индуктивностью, кроме того, внешняя цепь может содержать элементы, обладающие электрической емкостью, поэтому расчет силы тока и его энергетических характеристик более сложен, чем рассматривается в данном разделе. Эти расчеты будут проведены в дальнейшем, здесь же мы рассматриваем простейшую ситуацию для того, чтобы продемонстрировать основную идею.

$$I = \frac{\epsilon}{R} = \frac{BS\omega}{R} \sin \omega t. \quad (4)$$

Так как рамка с током находится в магнитном поле, то на ее стороны действуют силы Ампера, тормозящие движение рамки. Ранее мы показали, что момент сил Ампера, действующий на рамку с током, находящуюся в однородном магнитном поле, определяется формулой  $M_1 = IBS \sin \phi$ , где  $\phi$  – угол, который образует нормаль к контуру с направлением вектора индукции поля (в нашем случае тот же угол, который фигурировал в предыдущих формулах). Учитывая зависимости угла поворота (1) и силы тока (4) от времени, получим, что в рассматриваемом случае тормозящий момент сил Ампера зависит от времени по закону

$$M_1 = IBS \sin \omega t = \frac{B^2 S^2 \omega}{R} \sin^2 \omega t. \quad (5)$$

Для вращения с постоянной угловой скоростью к рамке должен прикладываться такой же по модулю момент внешних сил, создаваемый двигателем. Таким образом, мощность, которую должен развивать двигатель, рассчитывается по формуле

$$P = M_1 \omega = \frac{B^2 S^2 \omega^2 \sin^2 \omega t}{R}. \quad (6)$$

Принимая во внимание выражение (4) для силы тока, полученное выражение представляется в виде

$$P = \frac{B^2 S^2 \omega^2 \sin^2 \omega t}{R} = \left( \frac{BS\omega \sin \omega t}{R} \right)^2 R = I^2 R, \quad (7)$$

что совпадает с мощностью электрического тока, которая определяется законам Джоуля-Ленца.

**Итак, мы показали, что энергия индуцированного тока в точности равна работе сил, вращающих рамку генератора.**

Конечно, промышленные электрические генераторы (рис. 256) устроены сложнее, чем рассмотренный нами. Вместо рамки с одним витком используется ротор, содержащий несколько обмоток с большим числом витков. Сильное магнитное поле создается статором, образованным электромагнитами. Во многих генераторах электрический ток индуцируется в неподвижных обмотках, а магнитное поле создается вращающимися электромагнитами. В этом случае через подвижные контакты передается гораздо меньший электрический ток электромагнитов, чем индуцированный электрический ток.

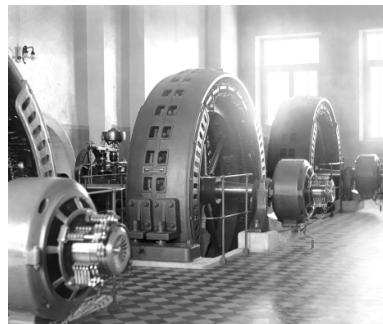


Рис. 256

## **10.2. Переменный электрический ток – квазистационарное приближение**

Теоретической основой описания физических процессов в цепях переменного тока являются фундаментальные физические законы, выражаемые уравнениями Максвелла, законами взаимодействия электромагнитных полей с веществом, законами движения заряженных частиц в веществе. Строгое их применение требует при-

влечения сложного математического аппарата и чрезвычайно громоздкое. К счастью, во многих практических важных случаях с высокой степенью точности описание цепей переменного тока можно проводить в рамках **квазистационарного приближения**, суть которого сводится к применению достаточно простых законов, описывающих постоянные, стационарные токи (законы Ома, законы электростатики). Однако применимость этого приближения в каждом случае требует обоснования, поэтому сейчас мы обсудим основные допущения, лежащие в основе квазистационарного приближения. Изученные нами законы постоянного тока получены для стационарного распределения электрических зарядов на проводниках, стационарных электрических и магнитных полей, стационарного распределения токов. В квазистационарном приближении полагают, что, несмотря на изменение тока с течением времени, в любой момент все упомянутые характеристики соответствуют стационарному режиму при данном мгновенном значении силы тока.

Поэтому вопрос о применимости данного приближения связан со сравнением времен установления стационарного режима с характерными временами изменения тока в цепи. Для переменных токов характерным временем изменения может служить период колебаний тока. В Европе промышленный ток имеет частоту 50 Гц\*, следовательно, период их

---

\* В Северной Америке частота промышленного тока – 60 Гц.

колебаний равен 0,02 с, поэтому времена установления стационарного режима следует сравнивать с этой величиной. В радиотехнике и электронике используются токи гораздо более высоких частот, поэтому условия применимости квазистационарного приближения могут быть иными.

Мы уже оценивали времена установления стационарного тока – полученные результаты свидетельствуют, что вплоть до частот порядка сотен килогерц и для устройств разумных геометрических размеров эти времена значительно меньше периода колебаний. Для очень длинных линий передач (длиной порядка тысяч километров) необходимо учитывать конечность времени распространения электромагнитного поля.

Вторым существенным допущением, используемым при расчетах цепей переменного поля, является полное пренебрежение испусканием электромагнитных волн. Действительно, всякое неравномерное изменение силы тока и зарядов приводит к испусканию волн. Однако энергия, уносимая этими волнами, пропорциональна четвертой степени частоты, поэтому при частотах тока, используемых в технике, интенсивность волн крайне мала, а значит, в большинстве случаев этими энергетическими потерями можно пренебречь.

Далее мы будем рассматривать электрические цепи, подключенные к источнику переменной ЭДС. С учетом сделанных замечаний можно считать, что для мгновенных значений токов и напря-

жений справедливы законы, установленные для постоянного тока, в частности правила Кирхгофа. Тем не менее даже в рамках квазистационарного приближения расчет характеристик переменного тока представляет собой достаточно громоздкую математическую задачу. Если ЭДС источника изменяется по гармоническому закону с некоторой частотой  $\omega$ , то в установившемся режиме все характеристики тока в цепи (силы токов и напряжения на различных участках цепи) будут также изменяться по гармоническим законам с той же частотой. Поэтому полное описание таких токов будет задано, если найдены все амплитудные значения токов и напряжений, а также сдвиги фаз между ними. Для решения этой более простой задачи разработан целый ряд методов, с которыми мы и познакомимся в дальнейшем.

*Подчеркнем, что мы будем рассматривать только установившийся режим колебаний тока в цепи, оставляя без внимания очень быстрые процессы установления этого режима. Ситуация аналогична рассмотрению вынужденных колебаний, где, как мы показали, также устанавливается стационарный режим, при котором амплитуды и фазы колебаний не зависят от начальных условий, а полностью определяются параметрами рассматриваемой системы. Именно в этом установившемся режиме цепь полностью описывается амплитудами и фазами токов и напряжений, а все временные зависимости выражаются привычными гармоническими функциями.*

ми (синусами и косинусами), которые при желании и необходимости всегда можно выписать в явном виде.

### 10.3. Активное сопротивление в цепи переменного тока

Простейшим случаем описания цепей переменного тока является цепь, все элементы которой подчиняются закону Ома для участка цепи.

Пусть полное сопротивление такой цепи равно  $R$  (рис. 257). Обратите внимание на обозначение источника переменной ЭДС. Мгновенное значение напряжения на резисторе связано с силой тока законом Ома:

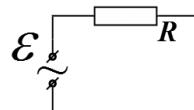


Рис. 257

$$U(t) = I(t)R. \quad (1)$$

Зависимость напряжения на резисторе от времени может быть описана функцией

$$U(t) = U_0 \cos \omega t, \quad (2)$$

в которой несущественная начальная фаза колебаний принята равной нулю.  $U_0$  – амплитудное значение напряжения на резисторе. Здесь и далее все амплитудные значения токов и напряжений будем обозначать нулевым индексом.

Отметим, что если пренебречь внутренним сопротивлением источника, то напряжение на резисторе численно совпадает с ЭДС.

По закону Ома, зависимость силы тока от времени принимает вид

$$I(t) = \frac{U_0}{R} \cos \omega t. \quad (3)$$

Таким образом, сила тока через резистор также описывается гармонической функцией той же частоты, амплитудное значение силы тока связано с амплитудным значением напряжения простым соотношением

$$I_{R0} = \frac{U_{R0}}{R}, \quad (4)$$

изменения напряжения и силы тока синфазные, то есть разность фаз между силой тока и напряжением равна нулю.

Для описания периодических процессов, изменяющихся по гармоническому закону, очень удобно использовать векторное представление колебаний. Подчеркнем, что для расчета цепей переменного тока использование векторных диаграмм для токов и напряжений является одним из основных способов существенного упрощения расчетов. Поэтому для каждого из рассматриваемых элементов мы будем строить соответствующую векторную диаграмму напряжения и силы тока. Оставляя в силе все соглашения о построении диаграмм, получим диаграмму для резистора, изображенную на рис. 258.



Рис. 258

Мгновенная мощность, выделяющаяся на резисторе, рассчитывается по закону Джоуля-Ленца:

$$P = I^2 R. \quad (5)$$

С практической точки зрения, более важной характеристикой является мощность, выделяемая в цепи, усредненная по промежутку времени, значительно превышающему период колебаний. Действительно, бытовые и промышленные электрические приборы работают в течение длительного времени, поэтому и важны именно средние энергетические характеристики. Расчет средней мощности тока в рассматриваемой цепи не представляет труда:

$$\langle P \rangle = \left\langle I_0^2 R \cos^2 \omega t \right\rangle = \frac{1}{2} I_0^2 R. \quad (6)$$

Для того чтобы полностью сохранить форму закона Джоуля-Ленца для переменных токов, вводят понятие действующего значения тока  $I_{\text{д}}$ . По определению, действующим значением силы переменного тока называется значение силы постоянного тока, мощность которого равна средней мощности переменного тока.

Величина действующего значения силы тока рассчитывается в соответствии с данным определением

$$\frac{1}{2} I_0^2 R = I_{\text{д}}^2 R, \quad (7)$$

из которого следует, что действующее и амплитудное значения силы тока связаны соотношением

$$I_{\text{д}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}. \quad (8)$$

Аналогично определяется и действующее значение напряжения

$$U_d = \frac{U_0}{\sqrt{2}}. \quad (9)$$

Отметим, что измерительные приборы (амперметры и вольтметры переменного тока) регистрируют именно действующие значения. Кроме того, номинальные значения напряжений и токов бытовых приборов также указываются как действующие значения. Так, стандартное напряжение в цепи – 220 вольт – есть действующее значение, а амплитудное значение этого напряжения равно  $U_0 = U_d \sqrt{2} = 220\sqrt{2} \approx 310V$ .

Так как на резисторе, подчиняющемся закону Ома, средняя выделяющаяся мощность отлична от нуля, то его сопротивление называют **активным**, в отличие от сопротивлений, которые вносят в цепь элементы, обладающие электрической емкостью и индуктивностью, которые называются **реактивными**.

#### 10.4. Емкость в цепи переменного тока. Емкостное сопротивление

Рассмотрим электрическую цепь, содержащую резистор с активным сопротивлением  $R$  и конденсатор емкости  $C$ , подключенные к источнику переменной ЭДС (рис. 259).

Конденсатор, подключенный к источнику постоянной ЭДС, полностью препятству-

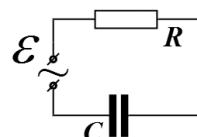


Рис. 259

ет прохождению тока: за некоторый промежуток времени конденсатор заряжается, напряжение между его обкладками становится равным ЭДС источника, после чего ток в цепи прекращается. Если же конденсатор включен в цепь переменного тока, то ток в цепи не прекращается – фактически, конденсатор периодически перезаряжается, заряды на его обкладках периодически изменяются как по величине, так и по знаку. Конечно, никакие заряды не протекают между обкладками, электрического тока в строгом определении между ними нет. Но часто, не вдаваясь в детали и не слишком корректно, говорят о токе через конденсатор, подразумевая под этим ток в цепи, к которой подключен конденсатор. Такой же терминологией будем пользоваться и мы.

По-прежнему для мгновенных значений справедлив закон Ома для полной цепи: ЭДС источника равна сумме напряжений на всех участках цепи. Применение этого закона к рассматриваемой цепи приводит к уравнению

$$\varepsilon = U_R + U_C = IR + \frac{q}{C}, \quad (1)$$

здесь  $U_R = IR$  – напряжение на резисторе,  $U_C = \frac{q}{C}$  –

напряжение на конденсаторе,  $q$  – электрический заряд на его обкладках. Уравнение (1) содержит три изменяющиеся во времени величины (известную ЭДС и пока неизвестные силу тока и заряд конденсатора); учитывая, что сила тока равна производной по времени от заряда конденсатора  $I = q'$ ,

это уравнение может быть точно решено. Так как ЭДС источника изменяется по гармоническому закону, то и напряжение на конденсаторе и сила тока в цепи также будут изменяться по гармоническим законам с той же частотой – это утверждение непосредственно следует из уравнения (1).

Сначала установим связь между силой тока в цепи и напряжением на конденсаторе. Зависимость напряжения от времени представим в виде

$$U_c(t) = U_0 \cos \omega t. \quad (2)$$

Подчеркнем, что в данном случае напряжение на конденсаторе отличается от ЭДС источника, как будет видно из дальнейшего изложения; между этими функциями существует также и разность фаз. Поэтому при записи выражения (2) мы выбираем произвольную начальную фазу нулевой: при таком определении фазы ЭДС напряжения на резисторе и силы тока отчитываются относительно фазы колебаний напряжения на резисторе.

Используя связь между напряжением и зарядом конденсатора, запишем выражение для зависимости последнего от времени

$$q = U_0 C \cos \omega t, \quad (3)$$

которое позволяет найти временную зависимость силы тока<sup>\*</sup>:

---

\* Здесь мы используем математическую операцию вычисления производной функции. Если же вас она еще пугает, воспользуйтесь аналогией с механическими гармоническими колебаниями: аналогом заряда является координата, тогда аналогом силы тока служит мгновенная скорость.

$$I_c = q' = -U_0 C \omega \sin \omega t = U_0 C \omega \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (4)$$

На последнем шаге использована тригонометрическая формула приведения, для того чтобы в явном виде выделить сдвиг фаз между током и напряжением.

Итак, мы получили, что амплитудное значение силы тока через конденсатор связано с напряжением на нем соотношением

$$I_{c0} = U_{c0} C \omega, \quad (5)$$

а также между колебаниями силы тока и напряжения существует разность фаз, равная  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Эти результаты суммированы на рис. 260, где также представлена векторная диаграмма колебаний силы тока и напряжения.

Для того чтобы сохранить форму закона Ома для участка цепи, вводят понятие **емкостного сопротивления**, которое определяется по формуле

$$Z_c = \frac{1}{C \omega}. \quad (6)$$

В этом случае соотношение (5) становится традиционным для закона Ома:

$$I_{c0} = \frac{U_{c0}}{Z_c}. \quad (7)$$



Рис. 260

При изучении закона Ома для цепей постоянного тока мы указывали, что электрическое поле заставляет упорядоченно двигаться заряженные частицы внутри проводника, то есть создает электрический ток. Иными словами, «напряжение является причиной возникновения тока». В данном случае ситуация обратная: благодаря электрическому току на обкладках возникают электрические заряды, создающие электрическое поле, поэтому можно сказать, что в данном случае «сила тока является причиной возникновения напряжения». Хотя к данным рассуждениям следует относиться несколько скептически, так как движение зарядов (электрический ток) и электрическое поле «подстраиваются» друг к другу, пока между ними не устанавливается определенное соотношение, соответствующее установившемуся режиму. Так, при постоянном токе условием стационарности является условие постоянства тока. В цепи переменного тока в установившемся режиме согласуются не только амплитудные значения токов и напряжений, но и разность фаз между ними. Иными словами, обсуждаемый здесь причинно-следственный вопрос подобен вопросу о том, «что появилось раньше: курица или яйцо?»

Так как между током и напряжением существует сдвиг фаз, равный  $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ , то средняя мощность тока через конденсатор равна нулю. Действительно,

$$\langle P \rangle = \langle U_c(t) \cdot I_c(t) \rangle = U_{c0} \cdot I_{c0} \left\langle \cos(\omega t) \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \right\rangle = 0.$$

Иными словами, потеря энергии при протекании тока через конденсатор в среднем не происходит. Конечно, конденсатор влияет на протекание тока в цепи. В ходе зарядки конденсатора энергия электрического тока превращается в энергию электростатического поля между обкладками конденсатора, а при разрядке конденсатор отдает в цепь накопленную энергию, при этом средняя энергия, потребляемая конденсатором, остается равной нулю. Поэтому емкостное сопротивление называют реактивным.

Графики зависимости силы тока, напряжения и мгновенной мощности тока в рассматриваемой цепи показаны на рис. 261.

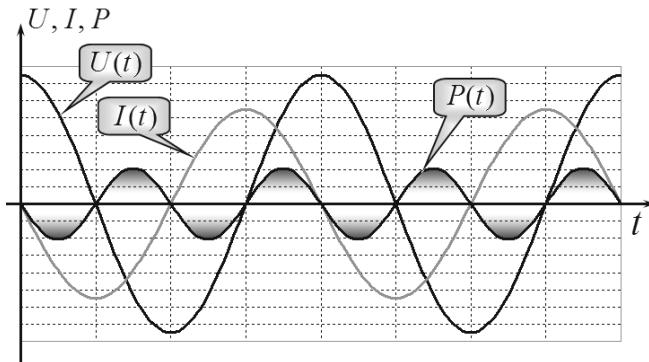


Рис. 261

Заливкой выделены промежутки времени, в течение которых конденсатор накапливает энергию – в этих промежутках сила тока и напряжение имеют один знак.

Уменьшение емкостного сопротивления при возрастании частоты очевидно: чем выше частота тока, тем меньший заряд на конденсаторе успевает накопиться на обкладках конденсатора за половину периода (пока ток идет в одном направлении), тем меньше напряжение на нем, тем меньше он препятствует прохождению тока в цепи. Аналогичные рассуждения справедливы и для объяснения зависимости этого сопротивления от емкости конденсатора.

Вернемся к рассмотрению цепи, показанной на рис. 259, которая описывается уравнением (1). Пренебрегая внутренним сопротивлением источника, запишем явное выражение для напряжения, создаваемого источником:

$$U_0 \cos \omega t = IR + \frac{q}{C}. \quad (8)$$

Здесь  $U_0$  – амплитудное значение напряжения, равное амплитудному значению ЭДС источника. Кроме того, теперь мы считаем начальную фазу ЭДС источника равной нулю (ранее за нуль мы принимали фазу колебаний напряжения на резисторе).

Используя это уравнение и связь между силой тока и зарядом конденсатора, найдем явное выражение для зависимости силы тока в цепи от времени. Представим эту зависимость в виде

$$I = I_0 \cos(\omega t + \phi), \quad (9)$$

где  $I_0$  и  $\phi$  – подлежащие определению амплитудное значение силы тока и разность фаз между колебаниями тока и напряжения источника. Легко заме-

тить, что в этом случае заряд конденсатора изменяется по закону

$$q(t) = q_0 \sin(\omega t + \varphi) = \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t + \varphi). \quad (10)$$

Для проверки этого соотношения достаточно вычислить производную от приведенной функции и убедиться, что она совпадает с функцией (9).

Подставим эти выражения в уравнение (8)

$$U_0 \cos \omega t = I_0 R \cos(\omega t + \varphi) + \frac{I_0}{C\omega} \sin(\omega t + \varphi)$$

и преобразуем тригонометрическую сумму

$$\begin{aligned} R \cos(\omega t + \varphi) + \frac{1}{C\omega} \sin(\omega t + \varphi) &= \\ &= \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} \left( \cos\left(\omega t + \varphi\right) + \frac{\frac{1}{C\omega}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}} \sin\left(\omega t + \varphi\right) \right) = \\ &= \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2} \cos\left(\omega t + \varphi + \varphi_1\right), \end{aligned}$$

где через  $\varphi_1$  обозначена величина, удовлетворяющая условию

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{1/C\omega}{R}.$$

Теперь видно, что для того, чтобы функция (9) являлась решением уравнения (8), необходимо, чтобы ее параметры принимали значения:

амплитуда

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}}; \quad (11)$$

искомая разность фаз  $\phi$ , связанная с появившимся параметром  $\phi_1$  соотношением  $\phi + \phi_1 = 0$ , такова, что

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{1/C\omega}{R}. \quad (12)$$

Таким образом, найдена явная зависимость силы тока от времени.

В принципе, таким методом можно рассчитать любую цепь переменного тока. Но такой подход требует громоздких тригонометрических и алгебраических преобразований. К тем же результатам можно прийти гораздо проще, используя формализм векторных диаграмм. Покажем, как метод векторных диаграмм применяется к рассматриваемой цепи. Самое важное при использовании этого метода – построение векторной диаграммы, изображающей колебания токов и напряжений на различных участках цепи.

Так как конденсатор и резистор соединены последовательно, то силы токов через них одинаковы в любой момент времени. Изобразим силу тока в виде произвольно направленного вектора (например, горизонтально\*, как на рис. 262).

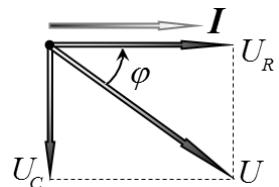


Рис. 262

---

\* Мы постоянно подчеркиваем, что начальная фаза отдельного колебания ни в каких процессах не существенна, она может быть изменена простым переносом начала отсчета времени. Физический смысл имеют разности фаз между различными величинами, изменяющимися по гармоническим законам. Здесь мы как бы очередной раз изменяем «точку отсчета» фазы – при горизонтальном расположении вектора

Далее изобразим векторы колебаний напряжения на резисторе  $U_R$ , который параллелен вектору колебаний тока (так как сдвиг фаз между этими колебаниями равен нулю), и напряжения на конденсаторе  $U_C$ , который перпендикулярен вектору колебаний тока (так как сдвиг фаз между ними равен  $\frac{\pi}{2}$  – см. рис. 260). Сумма этих напряжений равна напряжению источника, поэтому вектор суммы векторов, изображающих колебания  $U_R$  и  $U_C$ , изображает колебания напряжения источника  $U(t)$ .

Если же вы настаиваете, что фаза суммарного напряжения равна нулю (то есть вектор, изображающий  $U$ , должен быть расположен горизонтально), то поверните построенную диаграмму (рис. 263). Таким догматизмом далее мы заниматься не будем!

Из построенной диаграммы следует, что амплитудные значения рассматриваемых напряжений связаны соотношением (следующим из теоремы Пифагора)

$$U_0^2 = U_{R0}^2 + U_{C0}^2. \quad (9)$$

Выражая амплитуды напряжений через амплитуду силы тока с помощью известных соот-

колебаний тока мы неявно принимаем начальную фазу колебаний силы тока равной нулю.

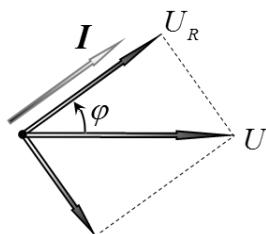


Рис. 263

ношений  $U_{R0} = I_{R0}R$  и  $U_{C0} = \frac{I_{C0}}{C\omega}$ , получаем элементарное уравнение для определения амплитуды силы тока

$$U_0^2 = (I_0 R)^2 + \left( \frac{I_0}{C\omega} \right)^2, \quad (13)$$

из которого находим амплитуду силы тока в цепи

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left( \frac{1}{C\omega} \right)^2}}, \quad (14)$$

что, естественно, совпадает с выражением (11), полученным ранее громоздким алгебраическим методом. Векторная диаграмма также позволяет легко определить сдвиг фаз между колебаниями силы тока и напряжения источника:

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{U_C}{U_R} = \frac{1/C\omega}{R}, \quad (15)$$

что также совпадает с полученным ранее.

Как видно, метод векторных диаграмм позволяет полностью рассчитать характеристики цепей переменного тока гораздо проще, чем рассмотренным выше методом аналитического решения соответствующего уравнения.

Следует подчеркнуть, что физическая сущность обоих методов одна и та же, она выражается уравнением (10), различие только в математическом языке, на котором решается это уравнение.

Рассчитаем среднюю мощность, развивающую источником. Мгновенное значение этой мощности

равно произведению ЭДС на силу тока  $P = \varepsilon I$ . Подставляя явные значения для этих величин и проводя усреднение, получим

$$\begin{aligned}\langle P \rangle &= \langle \varepsilon I \rangle = \langle U_0 \cos \omega t \cdot I_0 \cos(\omega t + \varphi) \rangle = \\ &= U_0 I_0 \langle \cos \omega t \cdot \cos(\omega t + \varphi) \rangle = \frac{U_0 I_0}{2} \cos \varphi.\end{aligned}\quad (16)$$

Обратите внимание, что полученное выражение для средней мощности является общим для переменного тока: средняя мощность переменного тока равна половине произведения амплитуд силы тока, напряжения и косинуса разности фаз между ними. Если использовать не амплитудные, а действующие значения силы тока и напряжения, то формула (16) приобретает вид

$$\langle P \rangle = U_d I_d \cos \varphi, \quad (17)$$

**средняя мощность переменного электрического тока равна произведению действующих значений силы тока, напряжения и косинуса разности фаз между ними.** Часто косинус сдвига фаз между силой тока и напряжением называют **коэффициентом мощности**.

В тех случаях, когда по электрической линии требуется передать максимальную мощность, необходимо стремиться, чтобы сдвиг фаз между током и напряжением был минимальным (оптимально – нулевым), так как в этом случае передаваемая мощность будет максимальна.

Применим полученную формулу для расчета мощности тока в рассматриваемой цепи, для чего выразим косинус сдвига фаз из выражения (12) и

подставим в формулу (17), в результате чего получим:

$$\langle P \rangle = \frac{U_0 I_0}{2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega}\right)^2}} = \frac{1}{2} I_0^2 R = I_d^2 R . \quad (18)$$

При выводе этого соотношения использована формула (14) для амплитуды силы тока в цепи. Полученный результат очевиден: средняя мощность, развиваемая источником, равна средней мощности теплоты, выделяющейся на резисторе. Этот вывод еще раз подтверждает, что на конденсаторе не происходит потерь энергии электрического тока.

Расчет мощности тока также можно проводить с помощью построенной векторной диаграммы, из которой следует, что произведение амплитуды напряжения источника на косинус сдвига фаз равно амплитуде напряжения на резисторе  $U_0 \cos \phi = U_{R0}$ , откуда сразу следует формула (18).

Так как амплитудные и действующие значения сил токов и напряжений пропорциональны друг другу, то длины векторов векторных диаграмм можно считать пропорциональными действующим (а не амплитудным) значениям. При таком определении среднее произведение двух гармонических функций равно скалярному произведению векторов, изображающих эти функции.

## 10.5. Индуктивность в цепи переменного тока. Индуктивное сопротивление

Исследуем теперь влияние индуктивности элементов цепей на протекание в них переменного электрического тока. Для этого рассмотрим электрическую цепь, состоящую из последовательно соединенных резистора с активным сопротивлением  $R$  и соленоида с индуктивностью  $L$ , подключенных к источнику переменной ЭДС (рис. 264). Активным сопротивлением обмотки соленоида и внутренним сопротивлением источника пренебрежем. Последовательность описания процессов, происходящих в данной цепи, остается такой же, как и в предыдущих разделах.

Зависимость силы тока от времени описывается уравнением для мгновенных значений, которое следует из закона Ома – суммарная ЭДС в контуре равна сумме напряжений на элементах контура:

$$\varepsilon + \varepsilon_{si} = IR. \quad (1)$$

В записи этого уравнения учтено, что при протекании переменного тока через катушку в ней индуцируется ЭДС самоиндукции, равная

$$\varepsilon_{si} = -LI', \quad (2)$$

где  $I'$  – производная от силы тока по времени.

ЭДС самоиндукции, в соответствии с правилом Ленца, препятствует изменению силы тока в цепи.

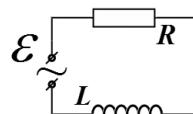


Рис. 264

Поэтому для преодоления этого «сопротивляющегося» вихревого поля источник должен создавать в обмотке катушки потенциальное электрическое поле, разность потенциалов которого между концами обмотки должна быть по модулю равна ЭДС самоиндукции. Поэтому величину  $U_L = \varepsilon_{si}$  можно назвать напряжением на катушке индуктивности. Установим связь между силой тока в соленоиде и напряжением на нем. Для этого представим зависимость напряжения на катушке индуктивности от времени функцией

$$U_L = U_{L0} \cos \omega t. \quad (3)$$

Тогда для нахождения зависимости силы тока от времени необходимо решить уравнение

$$U_0 \cos \omega t = -\varepsilon_{si} = LI'. \quad (4)$$

Этому удовлетворяет функция

$$I_L = \frac{U_{0L}}{L\omega} \sin \omega t = \frac{U_{0L}}{L\omega} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right), \quad (5)$$

что можно проверить простой подстановкой этой функции в исходное уравнение\*. Таким образом, амплитудное значение силы тока через соленоид связано с амплитудным значением напряжения простым соотношением

$$I_{L0} = \frac{I_{L0}}{L\omega}, \quad (6)$$

\* Для того чтобы решить уравнение (4), необходимо найти функцию, производная от которой определяется этим уравнением. Эта математическая операция, обратная вычислению производной, является интегрированием. Те, кто пока еще «боится» этой операции, могут считать, что решение мы счастливо угадали.

и между колебаниями силы тока и напряжения возникает разность фаз, равная  $\Delta\phi = -\frac{\pi}{2}$ . Эти результаты суммированы на рис. 265, где также представлена векторная диаграмма колебаний силы тока и напряжения.

Выражение (6) совпадает по форме с уравнением закона Ома, поэтому величину  $Z_L = L\omega$  разумно назвать **индуктивным сопротивлением**.

Физической причиной появления индуктивного сопротивления является ЭДС самоиндукции, препятствующая изменению тока через соленоид. Поэтому очевидно, что это сопротивление должно возрастать при возрастании частоты тока и при увеличении индуктивности цепи.

Проблема установления причинно-следственных связей между силой тока, ЭДС самоиндукции и напряжением в данном случае также относится к «философско-филологическим», то есть бессмысленна с физической точки зрения: электрическое поле, создаваемое источником, приводит к появлению переменного электрического тока, который посредством переменного магнитного поля создает ЭДС индукции, которая изменяет электрическое



Рис. 265

поле, которое влияет на протекание тока, и так далее, как в сказке про попа и его собаку.

Так как между напряжением и силой тока существует разность фаз, равная  $\Delta\phi = -\frac{\pi}{2}$ , то средняя мощность тока, протекающего через соленоид, равна нулю. Следовательно, индуктивное сопротивление также является реактивным.

На рис. 266 построены графики временных зависимостей напряжения, силы тока и мгновенной мощности тока через соленоид. Выделены промежутки времени, когда мощность тока положительна. В эти моменты энергия электрического тока переходит в энергию магнитного поля, создаваемого этим током в соленоиде. В других временных интервалах, когда индукция этого поля убывает, магнитное поле отдает свою накопленную энергию в цепь.

Наконец, построим векторную диаграмму для токов и напряжений в цепи, содержащей индуктивность (рис. 267).

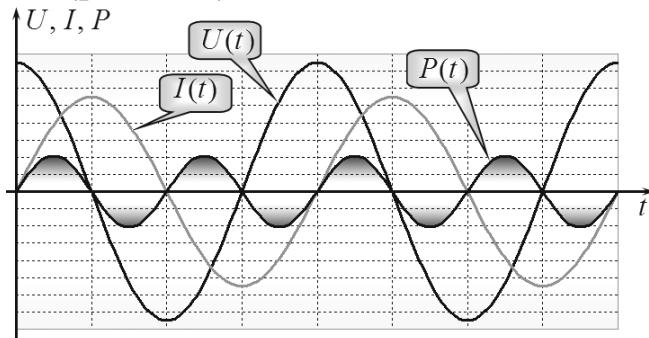


Рис. 266

Так как сила тока в цепи одинакова, то построение диаграммы начнем именно с вектора, изображающего силу тока (рис. 267). Затем строим векторы напряжений на резисторе  $U_R$  параллельно вектору силы тока и напряжения на катушке  $U_L$  – перпендикулярно ему, в соответствии с рисунком 265. Сумма этих напряжений равна напряжению источника  $U$ . Используя теорему Пифагора и связь между амплитудами токов и напряжений, получим уравнение

$$U_0^2 = U_{R0}^2 + U_{L0}^2 = (I_0 R)^2 + (I_0 L\omega)^2, \quad (7)$$

из которого определяем амплитудное значение силы тока в цепи:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}. \quad (8)$$

Из векторной диаграммы также определяем сдвиг фаз между силой тока и напряжением:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{U_L}{U_R} = \frac{L\omega}{R}. \quad (9)$$

Также с помощью векторной диаграммы несложно доказать, что и в данной цепи средняя мощность источника равна средней мощности теплоты, выделяющейся на резисторе.

## 10.6. Цепи переменного тока. Резонанс напряжений

Полученные соотношения между амплитудами токов и напряжений, а также определяющие сдвиг

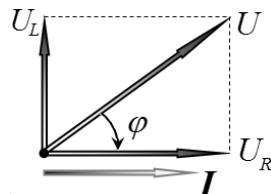


Рис. 267

фаз между ними, позволяют рассчитать характеристики любой цепи переменного тока. Принципиально методика расчета характеристик цепей переменного тока не отличается от методики расчета цепей постоянного тока: физические законы, выраженные в правилах Кирхгофа, справедливы для **мгновенных** значений токов и напряжений на любом участке цепи. Однако в случае переменных токов ситуация осложняется чисто математическими проблемами: как от уравнений для мгновенных значений токов и напряжений перейти к их амплитудным (или действующим) величинам, к разностям фаз, определяющим энергетические характеристики рассматриваемых цепей? Именно для преодоления этих математических трудностей разработаны различные математические методы расчета, одним из которых является метод векторных диаграмм.

Применим этот метод для описания цепи, изображенной на рис. 268: к источнику переменной ЭДС последовательно подключены резистор, катушка индуктивности и конденсатор. Для расчета характеристик цепи запишем уравнение закона Ома для полной цепи\* (суммарная ЭДС контура равна сумме напряжений на элементах этого контура)

$$\varepsilon + \varepsilon_{si} = U_R + U_C. \quad (1)$$

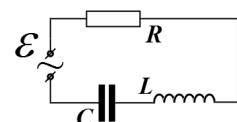


Рис. 268

---

\* Напоминаем, что здесь, как и ранее, мы пользуемся обоснованным нами квазистационарным приближением.

Здесь  $U_R = IR$ , напряжение на резисторе,  $U_c = \frac{q}{C}$  – напряжение на конденсаторе,  $\varepsilon_{si} = -LI'$  – ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке индуктивности. Зависимость ЭДС источника от времени представим в традиционной форме (внутренним сопротивлением источника пренебрегаем)

$$\varepsilon = U_0 \cos \omega t. \quad (2)$$

Уравнение (1), конечно, может быть решено аналитически: для этого необходимо представить зависимость силы тока от времени в общей тригонометрической форме  $I = I_0 \cos(\omega t + \phi)$  и подставить его в уравнение (при этом напряжение на конденсаторе и ЭДС самоиндукции должны быть выражены через параметры силы тока), после чего провести разложения тригонометрических функций, приравнять коэффициенты при синусах и косинусах, решить полученную систему алгебраических уравнений. Такой путь очень длинный, поэтому мы пойдем другим...

Перепишем уравнение (1) в форме, справедливой для мгновенных значений:

$$\varepsilon(t) = U_R(t) + U_C(t) + U_L(t), \quad (3)$$

где  $U_L = -LI'$ , напряжение на катушке, необходимое для преодоления противодействующей ЭДС самоиндукции. Теперь можно поступать формально, как при расчете цепей постоянного тока. Так как все элементы цепи соединены последовательно, то сила тока одинакова во всех точках цепи, сумма напряжений на всех элементах цепи равна ЭДС источника. Для цепей постоянного тока на осно-

вании этих законов мы получали уравнение для определения силы тока в цепи. Для рассматриваемой цепи переменного тока подход к расчету аналогичен, только ситуация осложняется наличием различных сдвигов фаз между током и напряжением на элементах цепи. Только для преодоления этой сложности нам приходится строить векторные диаграммы токов и напряжений.

Для рассматриваемой цепи это построение проводится в следующем порядке (рис. 269): выбираем произвольное направление (на рисунке – горизонтальное), вдоль которого направляем вектор  $I$ , изображающий колебания силы тока. Модуль этого вектора и его направление относительно вектора ЭДС источника подлежат определению. Можно сказать, что мы «рисуем уравнение» относительно неизвестного вектора силы тока. Далее, в соответствии с рисунками 258, 260, 265 строим векторы напряжений на резисторе, конденсаторе и катушке индуктивности, затем строим вектор суммы векторов напряжений, которая в соответствии с уравнением (3) равна ЭДС источника. Наконец, используя теорему Пифагора, записываем соотношение для амплитудных значений напряжений и ЭДС:

$$U_0^2 = U_{R0}^2 + (U_{L0} - U_{C0})^2. \quad (4)$$

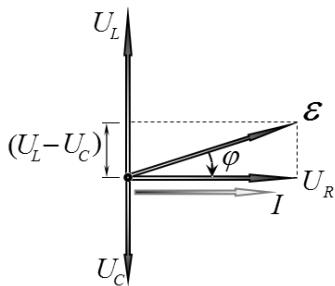


Рис. 269

Обратите внимание, насколько соотношение для амплитудных значений отличается от соотношения (3) для соответствующих мгновенных значений.

Наконец, выражаем амплитудные значения напряжений через амплитудное значение силы тока  $U_{R0} = I_0 R$ ,  $U_{C0} = \frac{1}{\omega C} I_0$ ,  $U_{L0} = \omega L I_0$  и подставляем их в выражение (4), в результате чего получаем уравнение для определения амплитуды силы тока:

$$U_0^2 = I_0^2 R^2 + \left( \omega L I_0 - \frac{1}{\omega C} I_0 \right)^2. \quad (5)$$

Решение этого уравнения элементарно:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}. \quad (6)$$

Также из векторной диаграммы легко определяется сдвиг фаз между ЭДС источника и силой тока в цепи, эта величина подчиняется соотношению

$$\operatorname{tg} \varphi = - \frac{U_{L0} - U_{C0}}{U_{R0}} = - \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (7)$$

Формулы (6)-(7) дают полное решение поставленной задачи, определяют зависимость силы тока в цепи от времени источника.

### Задание для самостоятельной работы

Покажите, что в данной цепи работа источника равна количеству теплоты, выделяющейся на резисторе (активном сопротивлении).

Проанализируем выражение (6) для амплитуды силы тока. Полученная функция  $I_0(\omega)$  показывает, что сила тока сложным образом зависит от частоты источника. Из вида этой функции следует, что она имеет максимум, если второе слагаемое под корнем обращается в нуль:

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0,$$

то есть когда частота источника становится равной

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (8)$$

В этом случае амплитуда силы тока принимает максимальное значение, равное

$$I_{\max} = \frac{U_0}{R}, \quad (9)$$

которое не зависит от емкости конденсатора и индуктивности катушки. При частоте, стремящейся к нулю, и частоте, стремящейся к бесконечности, сила тока стремится к нулю. Схематические графики зависимостей амплитуды силы тока от частоты показаны на рис. 270. Разные кривые соответствуют разным значениям активного сопротивления, причем  $R_1 < R_2 < R_3 < R_4$ .

Интересно качественно объяснить такое поведение рассматриваемых зависимостей. Так, при малых частотах источника бесконечно воз-

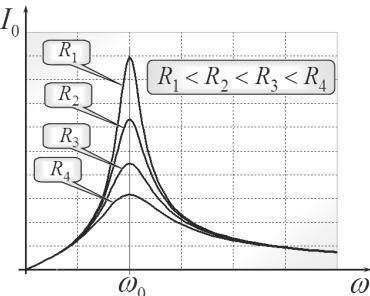


Рис. 270

растает сопротивление конденсатора (постоянный ток через конденсатор не протекает!), а при больших частотах резко возрастает сопротивление катушки индуктивности (из-за резкого возрастаия ЭДС самоиндукции). Если же частота источника совпадает с частотой цепи, то сила тока в цепи полностью определяется ее активным сопротивлением. Взгляните на векторную диаграмму: при этой частоте амплитуды напряжений на конденсаторе и катушке равны, а так как они изменяются в противофазе, то в любой момент полностью компенсируют друг друга. Иными словами, при этой частоте эти элементы как бы «выпадают» из цепи. Механизм этого эффекта заключается в том, что в моменты зарядки конденсатора максимальна ЭДС самоиндукции, и, наоборот, когда ЭДС самоиндукции максимально препятствует ЭДС источника, разряжается конденсатор, поддерживая ток в цепи. В этом режиме осуществляется перекачка энергии между конденсатором и катушкой – энергия электрического поля конденсатора переходит в энергию магнитного поля катушки и обратно, причем эта «перекачка» не влияет на работу источника. Рассмотренное явление резкого возрастаия амплитуды силы тока в цепи с последовательно соединенными конденсатором и катушкой индуктивности получило название **резонанса напряжений**, а частота, определяемая формулой (8), называется **резонансной**.

Рассмотренная зависимость амплитуды силы тока от частоты является много параметрической (так как зависит от ЭДС источника, активного сопротивления, емкости и индуктивности цепи). Имеет смысл перейти к некоторым безразмерным переменным, чтобы унифицировать построенные зависимости. Наиболее естественно в качестве аргумента этой функции выбрать относительную частоту – отношение частоты источника к резонансной частоте цепи:

$$\xi = \frac{\omega}{\omega_0}. \quad (10)$$

Тогда, подставляя выражение для частоты  $\omega = \omega_0 \xi = \frac{\xi}{\sqrt{LC}}$  в функцию (6), получим:

$$\begin{aligned} I_0(\xi) &= \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left( \frac{\xi}{\sqrt{LC}} L - \frac{\sqrt{LC}}{\xi C} \right)^2}} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \frac{L}{C} \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right)^2}} = \\ &= \frac{U_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{L}{CR^2} \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right)^2}}. \end{aligned}$$

Далее удобно ввести в качестве функции отношение амплитуды силы тока к ее максимально-му значению  $\eta = \frac{I_0}{I_{\max}}$  и обозначить единственный безразмерный параметр цепи  $\beta = \frac{L}{CR^2}$ . Тогда изучаемая зависимость становится однопараметрической и приобретает вид

$$\eta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta \left( \xi - \frac{1}{\xi} \right)^2}}. \quad (11)$$

Графики этих функций показаны на рис. 271. Безразмерный параметр цепи влияет только на ширину максимума: чем больше этот параметр (чем меньше активное сопротивление), тем резонансная кривая уже и резче. Заметьте, что построенные графики оцифрованы, то есть рассчитаны численно!

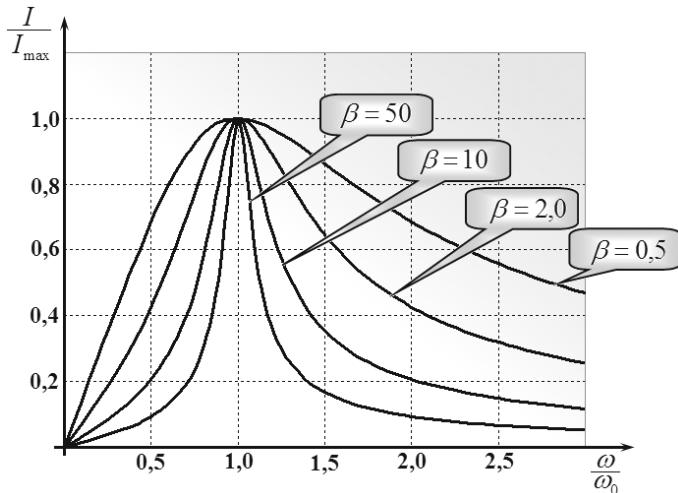


Рис. 271

## 10.7. Резонанс токов

Рассмотрим теперь цепь, состоящую из тех же элементов, только соединенных параллельно (рис. 272). Расчет токов в данной цепи не

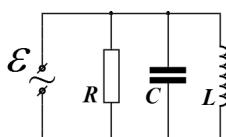


Рис. 272

вызывает особых сложностей, так как напряжения на всех элементах этой цепи одинаковы и равны ЭДС источника (если по-прежнему пренебречь его внутренним сопротивлением). Поэтому для сил токов во всех ветвях справедливы выражения, полученные нами ранее в разделах 10.3-10.5. Следовательно, для определения силы суммарного тока, протекающего через источник, достаточно просуммировать токи, протекающие через резистор, конденсатор и катушку индуктивности:

$$I(t) = I_R(t) + I_L(t) + I_C(t). \quad (1)$$

Для определения амплитудного значения силы суммарного тока построим векторную диаграмму этих токов (рис. 273). В данном случае ее построение следует начинать с вектора, изображающего колебания напряжения на элементах цепи

$$\varepsilon = U_0 \cos \omega t. \quad (2)$$

Теперь относительно этого вектора следует построить векторы, изображающие силы токов. С помощью построенной диаграммы выражаем амплитуду силы результирующего тока

$$I_0^2 = I_{R0}^2 + (I_{C0} - I_{L0})^2. \quad (3)$$

Наконец, выражаем амплитуды сил токов через напряжение, создаваемое источником,  $I_{R0} = \frac{U_0}{R}$ ,  $I_{C0} = \omega C U_0$ ,  $I_{L0} = \frac{U_0}{\omega L}$ , подставим их в фор-

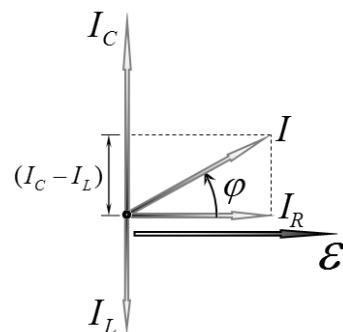


Рис. 273

мулу (3) и выразим искомое значение амплитудного значения силы тока:

$$I_0 = U_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}. \quad (4)$$

Также с помощью построенной векторной диаграммы найдем сдвиг фаз между током и напряжением источника:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_{c0} - I_{L0}}{I_{R0}} = \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\frac{1}{R}} = R \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right). \quad (5)$$

Итак, мы получили формулу, определяющую зависимость силы тока в цепи от времени:

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

Проанализируем зависимость амплитуды силы тока (4) от частоты источника. В данном случае эта функция имеет минимум, который достигается, когда второе слагаемое под корнем обращается в нуль

$$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0,$$

то есть при частоте, равной

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (6)$$

В этом случае амплитуда силы тока равна

$$I_0 = \frac{U_0}{R} \quad (7)$$

и не зависит от значений емкости и индуктивности цепи. Физическая причина подобного поведения тока в цепи аналогична рассмотренной в предыдущем разделе при изучении резонанса напряжений.

В этом случае в противофазе находятся токи, протекающие через конденсатор и через катушку индуктивности, поэтому ток циркулирует в контуре  $L - C$  и «не выходит» во внешнюю цепь. И в этом случае происходит постоянное перетекание энергии электрического поля конденсатора в энергию магнитного поля катушки индуктивности.

На рис. 274 показаны графики зависимостей амплитудного значения силы тока от частоты источника при различных значениях активного сопротивления резистора, причем  $R_1 < R_2 < R_3 < R_4$ .

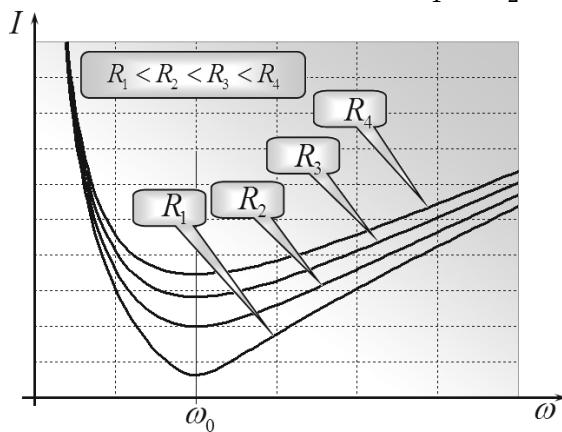


Рис. 274

Рассмотренное в данном разделе явление резкого уменьшения силы суммарного тока в цепи с параллельно соединенными конденсатором и катушкой индуктивности называется **резонансом токов**<sup>\*</sup>,

\* Название, возможно, не слишком удачное: при резонансе напряжений сила тока возрастает, а при резонансе токов сила тока убывает. Но не будем менять исторически сложившиеся термины.

а соответствующая частота (6), при которой оно наблюдается, называется **резонансной частотой**.

Отметим, что при резонансе токов уменьшается именно суммарный ток, в то время как токи через конденсатор и катушку индуктивности могут достигать больших значений.

## 10.8. Колебательный контур

### 10.8.1. Свободные колебания в контуре

Рассмотренные в предыдущих разделах цепи переменного тока наводят на мысль, что пара элементов – конденсатор и катушка индуктивности – образуют своеобразную колебательную систему. Сейчас мы покажем, что это действительно так: в цепи, состоящей только из этих элементов (рис. 275), возможны даже свободные колебания, то есть без внешнего источника ЭДС. Поэтому цепь (или часть другой цепи), состоящая из конденсатора и катушки индуктивности, называется колебательным контуром.

Пусть конденсатор зарядили до заряда  $q_0$  и затем подключили к нему катушку индуктивности. Такую процедуру легко осуществить с помощью цепи, схема которой показана на рис. 276: сначала ключ за-мыкают в положении 1, при этом конденсатор заряжается до напряжения, равного ЭДС источника, после чего

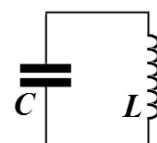


Рис. 275

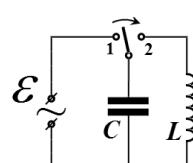


Рис. 276

ключ перебрасывают в положение 2, после чего начинается разрядка конденсатора через катушку.

Для определения зависимости заряда конденсатора от времени  $q(t)$  применим закон Ома, согласно которому напряжение на конденсаторе  $U_c = \frac{q}{C}$  равно ЭДС самоиндукции, возникающей в катушке:  $\epsilon_{si} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} = -LI'$  (здесь «штрих» означает производную по времени). Таким образом, оказывается справедливым уравнение

$$-LI' = \frac{q}{C}. \quad (1)$$

В этом уравнении содержится две неизвестные функции – зависимости от времени заряда  $q(t)$  и силы тока  $I(t)$ , поэтому его решить нельзя. Однако сила тока является производной от заряда конденсатора  $q'(t) = I(t)$ , поэтому производная от силы тока является второй производной от заряда

$$I'(t) = q''(t). \quad (2)$$

С учетом этого соотношения перепишем уравнение (1) в виде

$$I'(t) = q''(t). \quad (3)$$

Поразительно, но это уравнение полностью совпадает с хорошо изученным нами уравнением гармонических колебаний. Вторая производная от неизвестной функции пропорциональна самой этой функции с отрицательным коэффициентом пропорциональности:  $x'' = -\omega_0^2 x$ ! Следовательно, решением этого уравнения будет гармоническая функция

$$q = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (4)$$

с круговой частотой

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (5)$$

Эта формула определяет **собственную частоту колебательного контура**. Соответственно, период колебаний заряда конденсатора (и силы тока в контуре) равен

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (6)$$

Полученное выражение для периода колебаний называется **формулой Дж. Томпсона**.

Как обычно, для определения произвольных параметров  $A$ ,  $\phi$  в общем решении (4) необходимо задать начальные условия – заряд и силу тока в начальный момент времени. В частности, для рассмотренного примера цепи (рис. 277) начальные условия имеют вид: при  $t = 0$   $q = q_0$ ,  $I = 0$ , поэтому зависимость заряда конденсатора от времени будет описываться функцией

$$q = q_0 \cos \omega_0 t, \quad (7)$$

а сила тока изменяется со временем по закону

$$I = -\omega_0 q_0 \sin \omega_0 t. \quad (8)$$

Приведенное рассмотрение колебательного контура является приближенным: любой реальный контур обладает активным сопротивлением (соединительных проводов и обмотки катушки). Поэтому в уравнении (1) следует учесть падение напряжения на этом активном сопротивлении, следовательно, это уравнение приобретет вид

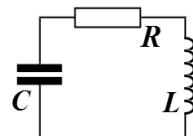


Рис. 277

$$-LI' = \frac{q}{C} + IR,$$

который с учетом связи между зарядом и силой тока преобразуется к форме

$$q'' = -\frac{1}{LC}q - \frac{R}{L}q'.$$

Это уравнение нам также знакомо: это уравнение затухающих колебаний  $x'' = -\omega_0^2x - \beta x'$ , причем коэффициент затухания, как и следовало ожидать, пропорционален активному сопротивлению цепи  $\beta = \frac{R}{L}$ .

Процессы, происходящие в колебательном контуре, могут быть также описаны и с помощью закона сохранения энергии. Если пренебречь активным сопротивлением контура, то сумма энергий электрического поля конденсатора и магнитного поля катушки остается постоянной, что выражается уравнением

$$\frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = const, \quad (9)$$

которое также является уравнением гармонических колебаний с частотой, определяемой формулой (5). По своей форме это уравнение также совпадает уравнениями, следующими из закона сохранения энергии при механических колебаниях. Так как уравнения, описывающие колебания электрического заряда конденсатора, аналогичны уравнениям, описывающим механические колебания, то можно провести аналогию между процессами, протекающими в колебательном контуре, и процессами в любой механической системе. На

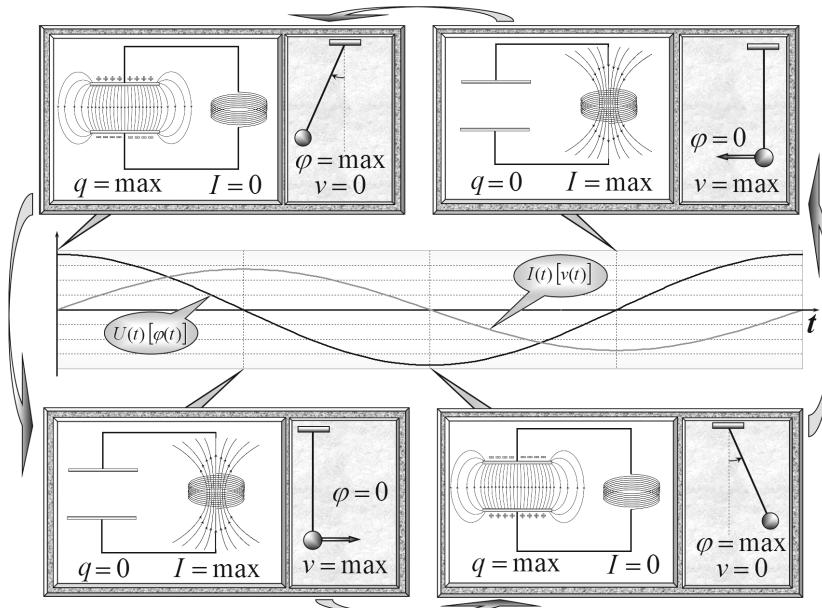


Рис. 278

рис. 278 такая аналогия проведена для колебаний математического маятника. В этом случае аналогами являются «заряд конденсатора  $q(t)$  – угол отклонения маятника  $\varphi(t)$ » и «сила тока  $I(t) = q'(t)$  – скорость движения маятника  $V(t)$ ».

Пользуясь этой аналогией, качественно опишем процесс колебаний заряда и электрического тока в контуре. В начальный момент времени конденсатор заряжен, сила электрического тока равна нулю, вся энергия заключена в энергии электрического поля конденсатора (*что аналогично максимальному отклонению маятника от положения равновесия*). Затем конденсатор начинает разряжаться, сила тока возрастает, при этом в катушке

возникает ЭДС самоиндукции, которая препятствует возрастанию тока; энергия конденсатора уменьшается, переходя в энергию магнитного поля катушки (*аналогия – маятник движется к нижней точке с возрастанием скорости движения*). Когда заряд на конденсаторе становится равным нулю, сила тока достигает максимального значения, при этом вся энергия превращается в энергию магнитного поля (*маятник достиг нижней точки, скорость его максимальна*). Затем магнитное поле начинает убывать, при этом ЭДС самоиндукции поддерживает ток в прежнем направлении, конденсатор начинает заряжаться, причем знаки зарядов на обкладках конденсатора противоположны начальному распределению (*аналог – маятник движется к противоположному начальному максимальному отклонению*). Затем ток в цепи прекращается, при этом заряд конденсатора опять становится максимальным, но противоположным по знаку (*маятник достиг максимального отклонения*), после чего процесс повторится в противоположном направлении.

### 10.8.2. Вынужденные колебания в контуре

Как уже было сказано, в реальном колебательном контуре колебания будут затухающими<sup>\*</sup> из-за

---

\* Еще одной причиной затухания тока в контуре является излучение электромагнитных волн, но об этом важнейшем явлении мы будем говорить позднее. Сейчас же отметим, что при не слишком высоких частотах потери энергии на излучение пренебрежимо малы.

неизбежного выделения теплоты на активном сопротивлении (которым мы пренебрегли). Поэтому для поддержания незатухающих колебаний в контуре необходим внешний источник энергии, иными словами, нам необходимо рассмотреть вынужденные колебания. Один из возможных вариантов осуществления таких колебаний мы уже рассмотрели при изучении темы «Резонанс напряжений», где мы фактически изучили колебания в контуре, внутрь которого включен источник переменной ЭДС, который может считаться аналогом внешней вынуждающей силы.

Чтобы явным образом показать, что явление резонанса напряжений можно рассматривать как вынужденные колебания, перепишем использованное уравнение закона Ома:

$$\varepsilon(t) = U_R(t) + U_C(t) + U_L(t).$$

Для этого подставим в него явные выражения для напряжений на элементах цепи  $U_C = \frac{q}{C}$ ,  $U_R = IR = Rq'$ ,  $U_L = -\varepsilon_{si} = LI' = Lq''$  и ЭДС источника  $\varepsilon = U_0 \cos \omega t$  и перепишем его в виде

$$q'' = -\frac{1}{LC}q - \frac{R}{L}q' + \frac{U_0}{L} \cos \omega t,$$

который полностью совпадает с уравнением вынужденных колебаний

$$x'' = -\omega_0^2 x - \beta x' + f_0 \cos \omega t.$$

Рассмотрим теперь возможность возникновения вынужденных колебаний в контуре, когда источник переменной ЭДС находится вне конту-

ра\*, как показано на рис. 279. Расчет данной цепи (которая также представлена на рис. 279) проведем, используя метод векторных диаграмм. В данном случае нас прежде всего будет интересовать сила тока в колебательном контуре.

Так как конденсатор и катушка индуктивности соединены параллельно, то мгновенные напряжения ( $U_C$ ,  $U_L$ ) на этих элементах одинаковы. Обозначим это напряжение  $U_1$ . Построение диаграммы следует начинать с построения вектора, изображающего колебания этого напряжения. Далее построим векторы, изображающие колебания сил токов через конденсатор  $I_C$  и катушку индуктивности  $I_L$  – эти векторы перпендикулярны вектору напряжения  $U_1$  и противоположны друг другу. Как обычно, колебания токов через конденсатор и через катушку индуктивно-

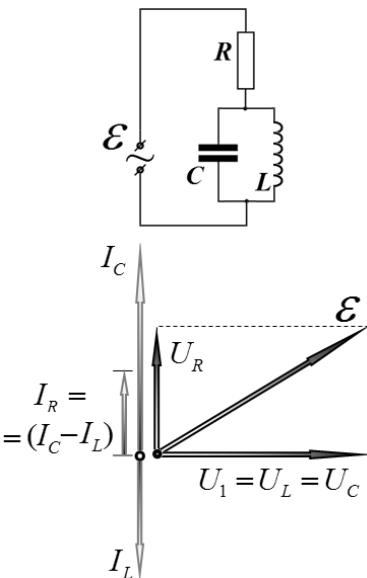


Рис. 279

\* Опять забегая вперед, скажем, что именно такая схема реализуется в приемниках электромагнитных волн, как радио, так и телевизионных. В этих приборах колебательный контур служит избирательным элементом, выделяющим требуемую волну из широкого спектра. Роль источника в этом случае играет антенна.

сти происходят в противофазе. Колебательный контур соединен последовательно с резистором, поэтому сумма токов  $I_C$  и  $I_L$  (конечно, их мгновенных значений) равна силе тока через резистор  $I_R$ . Вектор, изображающий напряжение на резисторе  $U_R$ , сонаправлен с вектором суммарного тока. Наконец, сумма векторов напряжения на резисторе  $U_R$  и напряжения на контуре  $U_1$  равна ЭДС источника.

Построенная векторная диаграмма позволяет рассчитать амплитудные значения токов и напряжений на элементах данной цепи. Выразим традиционным образом амплитудные значения сил токов через конденсатор и катушку через амплитуду напряжения на контуре:

$$I_{L0} = \frac{U_{10}}{\omega L}, \quad I_{C0} = \omega C U_{10}. \quad (1)$$

Амплитуда силы тока через резистор (и через источник) определяется из векторной диаграммы и равна

$$I_{R0} = (I_{C0} - I_{L0}) = U_{10} \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right). \quad (2)$$

Теперь можно записать выражение для амплитуды напряжения на резисторе:

$$U_{R0} = I_{R0} R = U_{10} \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right) R. \quad (3)$$

Далее, глядя на диаграмму напряжений, запишем теорему Пифагора для вектора ЭДС источника:

$$U_0^2 = U_{R0}^2 + U_{10}^2 = U_{10}^2 \left( 1 + \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2 R^2 \right) = \\ = \frac{U_{10}^2}{R^2} \left( \frac{1}{R^2} + \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2 \right), \quad (4)$$

здесь  $U_0$  – амплитуда ЭДС источника.

Из этого уравнения легко определить напряжение на резисторе:

$$U_{10} = \frac{U_0}{R} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}}. \quad (5)$$

Наконец, с помощью формул (1), (2), (3) запишем выражения для сил токов в рассматриваемой цепи:

$$I_{L0}(\omega) = \frac{U_0}{R} \frac{\frac{1}{\omega L}}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}}, \\ I_{C0}(\omega) = \frac{U_0}{R} \frac{\omega C}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}}, \\ I_{R0}(\omega) = \frac{U_0}{R} \frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left( \omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2}}. \quad (6)$$

Проанализируем зависимость этих величин от частоты источника ЭДС. Во всех формулах под корнем имеется два положительных слагаемых,

причем только второе зависит от частоты. При частоте

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (7)$$

равной собственной частоте колебательного контура, второе слагаемое под корнем обращается в ноль, поэтому можно ожидать, что вблизи этой частоты силы токов через конденсатор и катушку достигают максимального значения. Понятно, что максимумы функций  $I_{L0}(\omega)$  и  $I_{c0}(\omega)$  несколько смещены от частоты  $\omega_0$ , потому что частота источника  $\omega$  присутствует и вне корня. Однако если первое слагаемое под корнем  $\left(\frac{1}{R^2}\right)$  мало, то сдвиг максимума от значения  $\omega = \omega_0$  будет незначительным.

Отметим также, что при  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  амплитуды токов через конденсатор и катушку оказываются равными. Действительно, в этом случае

$$I_{L0} = \frac{U_0}{\omega_0 L} = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad I_{c0} = U_0 \omega_0 C = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (8)$$

Но самое неожиданное, что при  $\omega = \omega_0$  сила тока через резистор обращается в нуль! Соответственно, напряжение на колебательном контуре становится равным ЭДС источника, что также следует и из полученных формул для токов в контуре. Схематические графики зависимостей амплитуд токов\* от частоты источника по-

---

\* График зависимости амплитуды тока через резистор построен как график модуля функции (6), потому что изменение знака этой функции соответствует изменению фазы колебаний этого тока.

казаны на рис. 280. Понятно, что при  $\omega \rightarrow 0$  и  $\omega \rightarrow \infty$  сопротивление контура стремится к нулю, и в этом случае сила тока через резистор стремится к своему предельному значению  $I_{R0} = \frac{U_0}{R}$ .

При  $\omega \rightarrow 0$  ток не проходит через конденсатор, а сопротивление катушки стремится к нулю. При  $\omega \rightarrow \infty$ , наоборот, ток проходит через конденсатор без сопротивления, а индуктивное сопротивление стремится к бесконечности, поэтому ток через катушку не проходит.

Таким образом, мы показали, что в рассмотренной цепи при частоте источника, стремящейся к собственной частоте контура, амплитуда силы тока в контуре резко возрастает, наблюдается явление резонанса, следовательно, колебательный контур можно использовать для выделения колебаний требуемой частоты. Интересно отметить, что острота пика возрастает с ростом сопротивления резистора, находящегося вне контура.

В заключение данного раздела обсудим, почему при  $\omega = \omega_0$  сила тока во внешней для контура цепи обращается в нуль. Колебания токов через конденсатор  $I_C$  и через катушку индуктивности  $I_L$  происходят в противофазе, а в случае  $\omega = \omega_0$  амplitуды этих токов уравниваются, в результате чего формально и получается нулевое значение для сум-

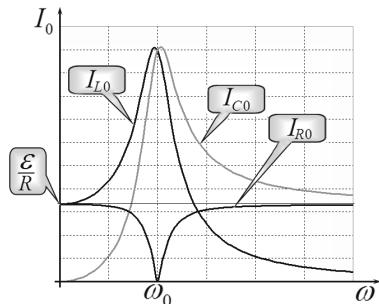


Рис. 280

марного тока. Фактически, в этом случае электрический ток циркулирует в колебательном контуре, не выходя из него. Подчеркнем, что наш анализ проведен для установившегося режима колебаний – в переходном режиме ток через резистор (и через источник) идет, обеспечивая контур энергией. Когда колебания устанавливаются, подкачка энергии становится излишней, так как мы пренебрегли потерями энергии в контуре. Обратите внимание, что при  $\omega = \omega_0$  сила тока в контуре не зависит от сопротивления внешнего резистора, а полностью определяется параметрами контура.

Вспомните, что вынужденные колебания механических систем обладают тем же свойством: при точном резонансе и при отсутствии сил сопротивления работа внешней силы также обращается в нуль.

Если же рассмотреть реальный контур, обладающий активным сопротивлением, то между током в контуре и напряжением на нем разность фаз будет отлична от нуля, поэтому энергия источника будет поступать в контур, компенсируя потери. В этом случае также будет отличен от нуля и ток во внешней цепи.

## § 11. Трансформатор

### 11.1. Устройство трансформатора

Широко распространенным устройством для преобразования напряжения в цепях переменного тока является **электрический трансформатор**, принцип работы которого основан на явлении электромагнитной индукции.

Принципиальная схема трансформатора показана на рис. 281 (в рамке показано его обозначение на электрических схемах).

Трансформатор состоит из двух проволочных обмоток (катушек), расположенных на общем сердечнике. Выводы одной из обмоток подключаются к источнику переменной ЭДС, эта обмотка называется **первичной**. Ко второй обмотке подключаются устройства – потребители электрической энергии, эта обмотка называется **вторичной**. Конечно, разделение обмоток на первичную и вторичную является условным: они могут при необходимости меняться ролями; для нас важно, что источник энергии подключен к первичной обмотке.

Реальные трансформаторы могут содержать несколько вторичных обмоток, так, чтобы одновременно получать источники различного напря-

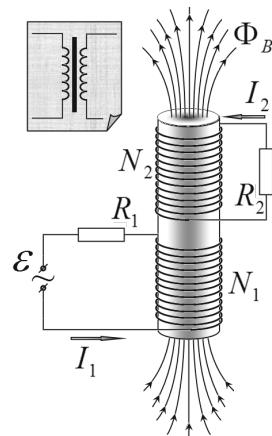


Рис. 281

жения. Часто обмотки трансформатора располагаются одна над одной. Кроме того, сердечники трансформаторов могут иметь различную форму, внешний вид некоторых трансформаторов показан на рис. 282.



Рис. 282

Физические принципы работы трансформатора достаточно просты. Переменный электрический ток, создаваемый источником в первичной обмотке, создает в сердечнике переменное магнитное поле. Поток этого магнитного поля пересекает и витки вторичной обмотки, поэтому при изменении магнитного потока в ней индуцируется ЭДС индукции, благодаря которой возможно возникновение и поддержание переменного электрического тока в цепи вторичной обмотки.

Сердечник является необходимой деталью любого трансформатора. Обычно он изготавливается из ферромагнитных материалов с высокой магнитной проницаемостью, благодаря чему магнитное поле (и его магнитный поток) практически полностью концентрируется внутри сердечника. С этой же целью сердечники трансформаторов, как правило, замкнуты, чтобы магнитный поток не выходил из него. В этом случае потери энергии магнитного поля сводятся к минимуму. Так как магнитное поле в сердечнике является переменным, то в нем также индуцируется электрическое поле, которое может приводить к появлению электрических то-

ков (токов Фуко). Наличие таких токов приводит к разогреву сердечника и, следовательно, к потерям энергии. Во избежание этих потерь сердечники трансформаторов изготавливают из тонких железных пластин, покрытых тонким слоем непроводящих окислов, которые препятствуют возникновению сильных токов. Также во многих случаях сердечники изготавливают из керамических ферромагнетиков (ферритов), электрическое сопротивление которых высоко.

## 11.2. Уравнения, описывающие работу трансформатора

Рассмотрим математическое описание процессов, протекающих при работе трансформатора. При этом мы будем пользоваться, как обычно, упрощенной математической моделью. Прежде всего мы будем считать, что магнитный поток, пересекающий все витки как первичной, так и вторичной обмоток трансформатора, одинаков для всех витков. Обозначим этот магнитный поток  $\phi(t)$ . Понятно, что он является функцией времени. В этом случае магнитные потоки через первичную и вторичную обмотки<sup>\*</sup> выражаются очевидными формулами

$$\Phi_1 = N_1\phi, \quad (1)$$

$$\Phi_2 = N_2\phi, \quad (2)$$

---

\* Напомним, что часто эти величины называют потокосцеплением, однако этот термин далее мы использовать не будем.

где  $N_1, N_2$  – числа витков в первичной и вторичной обмотках, соответственно. Обозначим также  $I_1, I_2$  – силы переменных токов в первичной и вторичных обмотках. Магнитное поле в сердечнике создается электрическими токами в обеих обмотках, поэтому, считая все витки одинаковыми, магнитный поток через один виток можем записать в виде

$$\phi = \lambda N_1 I_1 + \lambda N_2 I_2. \quad (3)$$

В этой формуле  $\lambda$  – постоянный коэффициент, зависящий от формы и размеров витка и магнитной проницаемости сердечника. Согласно этой формуле, магнитный поток, создаваемый током в одном витке, равен  $\lambda I$ , поэтому величина  $\lambda$  может быть названа индуктивностью одного витка.

В общем случае магнитные потоки через обмотки трансформатора выражаются формулами

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= L_{11}I_1 + L_{12}I_2 \\ \Phi_2 &= L_{21}I_1 + L_{22}I_2, \end{aligned} \quad (3a)$$

в которых постоянные коэффициенты  $L_{11}, L_{12}$  являются индуктивностями обмоток, а равные коэффициенты  $L_{12} = L_{21}$  называются коэффициентами взаимной индукции. В рамках нашей упрощенной модели трансформатора эти коэффициенты выражаются через числа витков

$$L_{11} = \lambda N_1^2, \quad L_{12} = L_{21} = \lambda N_1 N_2, \quad L_{22} = \lambda N_2^2.$$

При изменении магнитного потока\* в обмотках трансформатора возникают ЭДС индукции, кото-

---

\* Конечно, причиной изменения магнитного потока является изменение токов в обмотках, но сами эти токи существенно зависят от ЭДС индукции, поэтому в очередной раз разрешить проблему «первичности курицы или яйца» не удается.

рые, в соответствии с законом Фарадея, равны производным от магнитных потоков:

$$\varepsilon_{ind1} = -\Phi'_1 = -\lambda N_1 \phi'$$

$$\varepsilon_{ind2} = -\Phi'_2 = -\lambda N_2 \phi'. \quad (4)$$

Для упрощения дальнейшего изложения будем считать, что в первичной и вторичной цепях отсутствуют элементы с емкостным и индуктивным (конечно, кроме самих обмоток) сопротивлениями. Активные сопротивления этих цепей обозначим  $R_1$ ,  $R_2$ , соответственно. В этом случае уравнения закона Ома для первичной и вторичных цепей будут иметь вид

$$\varepsilon + \varepsilon_{ind1} = I_1 R_1, \quad (5)$$

$$\varepsilon_{ind2} = I_2 R_2, \quad (6)$$

здесь  $\varepsilon$  – ЭДС источника.

Таким образом, мы получили систему уравнений, описывающих работу трансформатора, включающую:

- уравнение (3) для магнитного потока в сердечнике (в общем виде уравнения (3а));
- уравнения (4) для ЭДС индукции в обмотках трансформатора;
- уравнения закона Ома (5)-(6) для токов в первичном и вторичном контурах (в общем случае они могут включать также и реактивные сопротивления этих контуров).

Эта система из пяти уравнений содержит пять неизвестных функций ( $\phi(t)$ ,  $\varepsilon_1(t)$ ,  $\varepsilon_2(t)$ ,  $I_1(t)$ ,  $I_2(t)$ ), поэтому может быть решена точно. Заметим, что зависимость ЭДС источника от времени является известной функцией, которую мы будем считать изменяющейся по гармоническому закону

$$\epsilon = \epsilon_0 \cos(\omega t + \phi_0). \quad (8)$$

Проанализируем полученную систему уравнений. Прежде всего, учтем, что магнитный поток через обмотку пропорционален числу витков в ней, поэтому **отношение ЭДС индукции при любом режиме работы трансформатора равно отношению числа витков в обмотках**

$$\frac{\epsilon_{ind2}}{\epsilon_{ind1}} = \frac{N_2 \phi'}{N_1 \phi'} = \frac{N_2}{N_1}, \quad (9)$$

причем это выражение справедливо как для мгновенных, так и амплитудных значений ЭДС. Отношение числа витков вторичной обмотки к числу витков первичной обмотки  $\kappa = \frac{N_2}{N_1}$  называется **коэффициентом трансформации** трансформатора, поэтому отношение ЭДС индукции в обмотках равно коэффициенту трансформации.

Если коэффициент трансформации больше единицы, то трансформатор называется **повышающим**, в противном случае – **понижающим**.

В практических приложениях более важной характеристикой является отношение напряжения на нагрузке к ЭДС источника, эта величина зависит от характеристик первичного и вторичного контуров.

Напомним, что при непосредственном подключении нагрузки к источнику (рис. 283) напряжение на нагрузке меньше ЭДС источника. Действительно, по закону Ома, сила тока в цепи равна

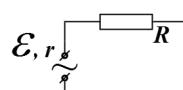


Рис. 283

$$I = \frac{\varepsilon}{r + R_h},$$

где  $R_h$  – сопротивление нагрузки,  $r$  – внутренне сопротивление источника, в это сопротивление также можно включить и сопротивление подводящих проводов (линии передачи). В рассматриваемой цепи напряжение на нагрузке равно

$$U_h = IR_h = \varepsilon \frac{R_h}{r + R_h} = \varepsilon \left( 1 + \frac{r}{R_h} \right)^{-1}, \quad (10)$$

что меньше ЭДС источника, и только в том случае, когда сопротивление нагрузки значительно превышает сопротивление источника и подводящих проводов  $\frac{r}{R_h} \rightarrow 0$ , напряжение на нагрузке стремится к ЭДС источника\*. Уменьшение напряжения на нагрузке связано с потерями энергии электрического тока в источнике и линии передачи. КПД рассматриваемой цепи (отношение мощности тока через нагрузку к мощности, развиваемой источником) также меньше единицы:

$$\eta = \frac{IU_h}{I\varepsilon} = \left( 1 + \frac{r}{R_h} \right)^{-1}. \quad (11)$$

Поэтому уменьшение влияния внутреннего сопротивления источника и линии передачи является важной проблемой, связанной с экономией

\* Часто ЭДС источника не совсем верно ассоциируется с напряжением (вспомните надписи на батарейках). Кроме того, отметим, что данные результаты справедливы для цепей как постоянного, так и переменного тока.

электроэнергии. Далее мы покажем, что использование трансформаторов позволяет частично решить данную проблему.

### 11.3. «Режим холостого хода»

Вернемся к анализу системы уравнений, описывающих работу трансформатора. Наиболее простым частным случаем является так называемый **«режим холостого хода»**. Этот режим реализуется, если сила тока во вторичной цепи значительно меньше тока первичной цепи  $I_2 \ll I_1$ . В этом случае можно пренебречь магнитным потоком, создаваемым током во вторичной цепи. В этом случае напряжение на нагрузке равно ЭДС индукции во вторичной обмотке  $U_2 = \varepsilon_{ind\ 2}$ . Если также пренебречь активным сопротивлением первичной цепи, то из уравнения (5) следует, что ЭДС индукции в первичной обмотке равно ЭДС источника, взятой с противоположным знаком  $\varepsilon_{ind\ 1} = -\varepsilon$ . Поэтому напряжение на первичной обмотке\*, взятое с обратным знаком, будет равно ЭДС индукции в этой обмотке  $U_1 = -\varepsilon_{ind\ 1}$  и равно ЭДС источника. Следовательно, в этом случае отношение амплитуд напряжений на обмотках (или отношение напряжения на нагрузке к ЭДС источнику) будет равно отношению числа витков:

$$\frac{U_h}{\varepsilon_0} = \frac{U_{20}}{U_{10}} = \frac{N_2 |\phi'|_{max}}{N_1 |\phi'|_{max}} = \frac{N_2}{N_1} = \kappa. \quad (12)$$

---

\* Напомним, напряжение на индуктивном сопротивлении предназначено для преодоления ЭДС самоиндукции.

**То есть в режиме холостого хода отношение напряжения на нагрузке к ЭДС источника равно коэффициенту трансформации трансформатора, или напряжение на нагрузке в  $k$  раз превышает ЭДС источника.**

Найдем силу тока в первичной цепи. Для этого, используя уравнение (3) для магнитного потока  $\phi = \lambda N_1 I_1$ , запишем уравнение для ЭДС индукции в первичной цепи

$$\varepsilon_{ind1} = -N_1 \dot{\phi} = -\lambda N_1^2 I'_1.$$

С учетом связи ЭДС индукции и ЭДС источника  $\varepsilon_{ind1} = -\varepsilon$  и представления последнего в виде  $\varepsilon = \varepsilon_0 \cos \omega t$  получим уравнения для определения силы тока

$$\varepsilon_0 \cos \omega t = \lambda N_1^2 I'_1, \quad (13)$$

решение которого имеет вид

$$I_1 = \frac{\varepsilon_0}{\lambda N_1^2 \omega} \sin \omega t.$$

Мы получили очевидный результат – выражение для силы тока в цепи, содержащей катушку индуктивности (так как индуктивность первичной обмотки равна  $L = \lambda N_1^2$ ). Сдвиг фаз между силой тока и ЭДС источника равен  $\frac{\pi}{2}$ , поэтому средняя мощность тока равна нулю, что очевидно, так как в рассматриваемом приближении ток через нагрузку отсутствует.

*Иными словами, при стремлении сопротивления нагрузки к бесконечности КПД цепи стремится к единице, правда, полезная мощность при этом стремится к нулю.*

## 11.4. Режим «без потерь»

Рассчитаем теперь характеристики цепи, пренебрегая активным сопротивлением первичной цепи (то есть пренебрегая внутренним сопротивлением источника, активным сопротивлением первичной обмотки и подводящих проводов). В этом случае отсутствуют потери энергии электрического тока, то есть вся энергия источника тока используется потребителем, а значит, выделяется на нагрузке.

Полученную ранее систему уравнений можно, конечно, решить аналитически. Однако, если ЭДС источника изменяется по гармоническому закону с круговой частотой  $\omega$ , то все характеристики цепи (токи, напряжения, ЭДС индукции) будут изменяться также по гармоническим законам с той же частотой. Поэтому для решения системы уравнений удобнее воспользоваться методом векторных диаграмм (рис. 284).

Построение этих диаграмм удобно начать с вектора колебаний магнитного потока в сердечнике трансформатора, так как он является общим для обеих обмоток. Представим зависимость этого потока от времени в виде

$$\phi = \phi_0 \cos \omega t. \quad (14)$$

Как обычно, выбор начальной фазы колебания является произвольным, поэтому здесь мы полагаем его равным нулю, амплитудное значение магнитного потока обозначено и подлежит определению. Вектор колебания этой величины, в соответствии с

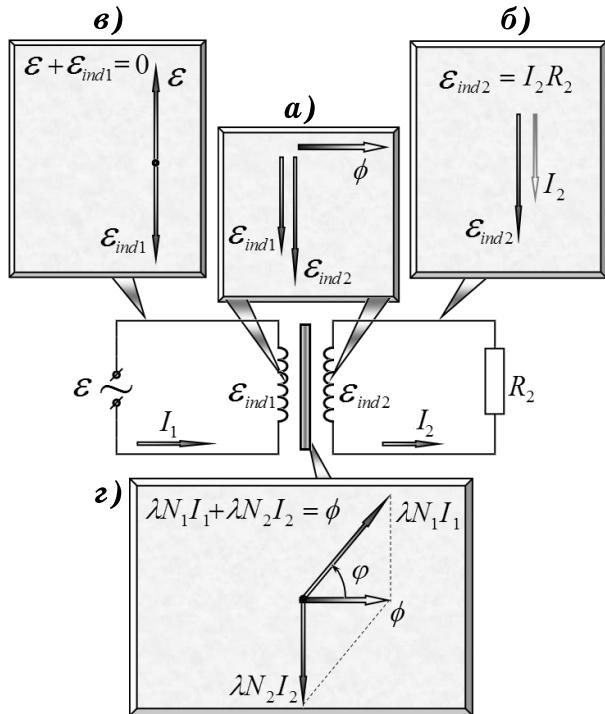


Рис. 284

принятыми нами правилами, изобразим горизонтально (рис. 284а). Производная этого потока по времени задается функцией

$$\phi' = -\Phi_0 \omega \sin \omega t, \quad (15)$$

следовательно, ЭДС индукции в первичной и вторичной обмотках в соответствии с формулами (4) описываются выражениями

$$\mathcal{E}_{ind1} = -\Phi'_1 = N_1 \Phi_0 \omega \sin \omega t = N_1 \Phi_0 \omega \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\mathcal{E}_{ind2} = -\Phi'_2 = N_2 \Phi_0 \omega \sin \omega t = N_2 \Phi_0 \omega \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right). \quad (16)$$

Векторы колебаний этих величин перпендикулярны вектору колебаний магнитного потока, так как их фаза сдвинута относительно фазы колебаний магнитного потока. Они также изображены на диаграмме 284б. Амплитудные значения ЭДС выражаются через амплитуду магнитного потока:

$$\varepsilon_{\text{ind} 10} = N_1 \phi_0 \omega, \quad (17)$$

$$\varepsilon_{\text{ind} 20} = N_2 \phi_0 \omega. \quad (18)$$

Далее построим векторную диаграмму для уравнения (6), описывающего ток во вторичной цепи. В соответствии с этим уравнением, вектор колебаний силы тока совпадает с направлением вектора индукции (рис. 284в). Это же уравнение, записанное для амплитудных значений, имеет вид

$$I_{20} R_2 = \varepsilon_{\text{ind} 20} = N_2 \phi_0 \omega. \quad (19)$$

Уравнение закона Ома для первичной цепи (5) в рассматриваемом приближении  $R_1 = 0$  приобретает простой вид

$$\varepsilon_{\text{ind} 1} = -\varepsilon. \quad (20)$$

Соответствующая ему диаграмма изображена на рис. 284в. Это уравнение утверждает равенство амплитуд ЭДС источника и индукции первичной обмотки

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_{\text{ind} 10}. \quad (21)$$

Наконец, строим векторную диаграмму для уравнения (3), описывающего магнитный поток в сердечнике (рис. 284г). Здесь вектор величины  $\lambda N_1 I_1$  (это магнитный поток, создаваемый током в первичной обмотке трансформатора) направлен так, чтобы его сумма с вектором  $\lambda N_2 I_2$  совпадала

с вектором колебаний магнитного потока  $\phi$ . Угол между этими векторами  $\phi$  заранее не известен и подлежит определению.

Для решения<sup>\*</sup> полученной системы выразим из уравнений (21) и (17) амплитуду магнитного потока:

$$\phi_0 = \frac{\varepsilon_0}{N_1 \omega}. \quad (23)$$

Теперь из уравнения (19) легко определить амплитуду тока во вторичной цепи:

$$I_{20} = \frac{N_2 \omega}{R_2} \phi_0 = \frac{N_2}{N_1} \cdot \frac{\varepsilon_0}{R_2}. \quad (24)$$

Из построенных векторных диаграмм следует, что колебания тока во вторичной цепи проходят в противофазе с колебаниями ЭДС источника.

Напряжение на нагрузке определяется формулой

$$U_{20} = I_{20} R_2 = \frac{N_2}{N_1} \varepsilon_0, \quad (25)$$

то есть отношение этого напряжения к ЭДС источника и в этом случае равно коэффициенту трансформации трансформатора  $\kappa = \frac{N_2}{N_1}$ .

**Таким образом, если активное сопротивление первичной цепи пренебрежимо мало, то напряжение на нагрузке в  $\kappa$  раз превышает ЭДС источника. Следовательно, трансформатор можно использовать как для повышения, так и для понижения напряжения на нагрузке.**

\* Этую систему можно решать различными способами – как вам больше нравится.

Для определения силы тока в первичной цепи следует воспользоваться уравнением (3) для магнитного потока. Теорема Пифагора для векторов диаграммы 284 позволяет записать соотношение

$$(\lambda N_1 I_{10})^2 = \phi_0^2 + (\lambda N_2 I_{20})^2, \quad (26)$$

из которого следует

$$\begin{aligned} I_{10} &= \frac{1}{\lambda N_1} \sqrt{\phi_0^2 + (\lambda N_2 I_{20})^2} = \frac{1}{\lambda N_1} \sqrt{\phi_0^2 + \left( \lambda N_2 \frac{N_2 \omega}{R_2} \phi_0 \right)^2} = \\ &= \frac{\varepsilon_0}{\lambda N_1^2 \omega} \sqrt{1 + \left( \frac{N_2^2 \lambda \omega}{R_2} \right)^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

Можно отметить, что если разомкнуть вторичную цепь (например, положив  $R_2 \rightarrow \infty$ ), то формула (27) приводит к очевидному, полученному ранее, результату

$$I_{10} = \frac{\varepsilon_0}{\lambda N_1^2 \omega} = \frac{\varepsilon_0}{L_{11} \omega}.$$

Сдвиг фаз между силой тока в первичной цепи и ЭДС источника, как следует из диаграмм 270в и 270г, равен  $\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right)$ , где угол  $\phi$  легко определить из последней диаграммы. Так, например, можно записать

$$\sin \phi = \frac{\lambda N_2 I_{20}}{\lambda N_1 I_{10}} = \frac{N_2 I_{20}}{N_1 I_{10}} = \left( 1 + \left( \frac{R_2}{\lambda N_2^2 \omega} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (28)$$

Наконец, рассчитаем среднюю мощность, развиваемую источником в данной цепи:

$$\langle P_{ucm.} \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 I_{10} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{1}{2} \epsilon_0 I_{10} \sin \varphi = \frac{1}{2} \epsilon_0 I_{10} \frac{N_2 I_{20}}{N_1 I_{10}} = \\ = \frac{1}{2} I_{20} \left( \frac{N_2}{N_1} \frac{\epsilon_0}{R_2} \right) R_2 = \frac{1}{2} I_{20}^2 R_2 = \langle P_{nomp.} \rangle, \quad (29)$$

(при выводе которого использована формула (24) для амплитуды силы тока во вторичной цепи). Полученное соотношение очевидно\*: мощность, развиваемая источником, равна мощности, выделяющейся на нагрузке.

## 11.5. Учет потерь

Учет активного сопротивления первичной цепи принципиально не изменяет физических принципов описания рассматриваемых процессов, однако усложняет математические расчеты.

Единственное изменение, которое необходимо внести в полученную ранее систему уравнений для амплитуд, заключается в замене уравнения (20) полным уравнением для силы тока в первичной цепи

$$\epsilon + \epsilon_{ind1} = I_1 R_1, \quad (30)$$

векторная диаграмма для которого изображена на рис. 285. Направление вектора колебаний силы тока  $I_1$  по-прежнему определяется уравнением для магнитного потока в сердечнике, поэтому его направле-

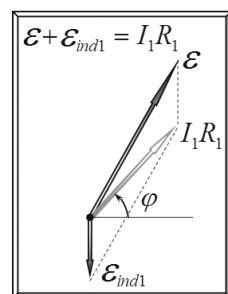


Рис. 285

\* Оно подтверждает не столько закон сохранения энергии, сколько правильность проделанных расчетов.

ние задается предыдущими диаграммами. Вектор колебаний ЭДС источника должен быть направлен так, чтобы его сумма с вектором колебаний ЭДС индукции в первичной цепи была направлена вдоль вектора колебаний силы тока.

Используя теорему косинусов для векторного треугольника, образованного векторами колебаний  $\varepsilon_{ind\ 1}$ ,  $\varepsilon$ ,  $I_1$ ,  $R_1$ , можно записать уравнение

$$\begin{aligned}\varepsilon_0^2 &= (I_{10}R_1)^2 + \varepsilon_{ind10}^2 - 2I_{10}R_1 \cdot \varepsilon_{ind10} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= (I_{10}R_1)^2 + \varepsilon_{ind10}^2 + 2I_{10}R_1 \cdot \varepsilon_{ind10} \sin\varphi.\end{aligned}\quad (31)$$

В данном уравнении неизвестной также является величина индукции в первичной обмотке  $\varepsilon_{ind\ 1}$  (модуль которой в данном случае отличен от модуля ЭДС источника). Поэтому предпочтительнее выразить все неизвестные величины через амплитуду магнитного потока  $\phi_0$ . ЭДС индукции выражается уравнением (17)  $\varepsilon_{ind\ 10} = N_1\phi_0\omega$ , а из диаграммы 284г следует, что

$$I_{10} \sin\varphi = \frac{N_2}{N_1} I_{20} = \frac{N_2}{N_1} \frac{\varepsilon_{ind20}^{(2)}}{R_2} = \frac{N_2}{N_1} \frac{1}{R_2} N_2 \omega \phi_0 = \frac{N_2^2 \omega}{N_1 R_2} \phi_0, \quad (32)$$

при выводе этого соотношения использовано выражение (18) для ЭДС индукции вторичной обмотки. После подстановки в уравнение (31) получим:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0^2 &= \left( \frac{N_2^2 \omega R_1}{N_1 R_2} \right)^2 \phi_0^2 + \left( \frac{R_1}{\lambda N_1} \right)^2 \phi_0^2 + (N_1 \omega)^2 \phi_0^2 + 2R_1 \cdot N_1 \phi_0 \omega \cdot \frac{N_2^2 \omega}{N_1 R_2} \phi_0 = \\ &= \left( \frac{N_2^2 \omega R_1}{N_1 R_2} + N_1 \omega \right)^2 \phi_0^2 + \left( \frac{R_1}{\lambda N_1} \right)^2 \phi_0^2 =\end{aligned}$$

$$= \left( \frac{R_1}{\lambda N_1} \right)^2 \phi_0^2 \left( \left( \frac{N_2^2 \lambda \omega}{R_2} + \frac{N_1^2 \lambda \omega}{R_1} \right)^2 + 1 \right),$$

откуда следует, что

$$\phi_0 = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\left( \frac{N_2^2 \lambda \omega}{R_2} + \frac{N_1^2 \lambda \omega}{R_1} \right)^2 + 1}} \cdot \frac{\lambda N_1}{R_1} = \frac{\varepsilon_0}{N_1 \omega \sqrt{\left( \frac{N_2^2 R_1}{N_1^2 R_2} + 1 \right)^2 + \frac{R_1}{N_1^2 \lambda \omega}}}.$$

Наконец, искомые значения сил токов в первичной и вторичной обмотках описываются формулами

$$I_{10} = \frac{\phi_0}{\lambda N_1} \sqrt{\left( \frac{N_2^2 \lambda \omega}{R_2} \right)^2 + 1} = \frac{\varepsilon_0}{\lambda N_1^2 \omega} \frac{\sqrt{\left( \frac{N_2^2 \lambda \omega}{R_2} \right)^2 + 1}}{\sqrt{\left( \frac{N_2^2 R_1}{N_1^2 R_2} + 1 \right)^2 + \frac{R_1}{N_1^2 \lambda \omega}}}, \quad (33)$$

$$I_{20} = \frac{N_2 \omega}{R_2} \phi_0 = \frac{N_2}{N_1} \frac{\varepsilon_0}{R_2} \frac{1}{\sqrt{\left( \frac{N_2^2 R_1}{N_1^2 R_2} + 1 \right)^2 + \frac{R_1}{N_1^2 \lambda \omega}}}. \quad (34)$$

Обратите внимание на запись полученных выражений: первые множители в этих выражениях совпадают с полученными ранее выражениями (27) и (24), а последние множители представляют собой безразмерные коэффициенты, в них фигурируют только отношения чисел витков, сопротивлений, отношений активных и реактивных сопротивлений. Такая форма записи делает наглядным анализ формул. Так, сразу видно, что при  $R_1 \rightarrow 0$  эти формулы приводят к выражениям, полученным в приближении «без потерь».

Во многих случаях индуктивное сопротивление первичной цепи значительно превышает ее активное сопротивление, поэтому их отношение  $\frac{R_1}{N_1^2 \lambda \omega}$  можно пренебречь. В этом приближении напряжение на нагрузке определяется формулой

$$U_{20} = I_{20} R_2 = \frac{N_2}{N_1} \varepsilon_0 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{N_2^2 R_1}{N_1^2 R_2} + 1\right)^2 + \frac{R_1}{N_1^2 \lambda \omega}}} \approx \frac{\frac{N_2}{N_1} \varepsilon_0}{\frac{N_2^2 R_1}{N_1^2 R_2} + 1} = \frac{\kappa \varepsilon_0}{\frac{\kappa^2 R_1}{R_2} + 1},$$

здесь по-прежнему  $\kappa = \frac{N_2}{N_1}$  – коэффициент трансформации.

Таким образом, активное сопротивление уменьшает напряжение на нагрузке, причем его влияние тем больше, чем больше коэффициент трансформации. Физическая причина такого влияния понятна: чем больше коэффициент трансформации, тем больше сила тока в первичной цепи, тем больше падение напряжения на сопротивлении первичной цепи, тем больше потери энергии электрического тока на этом сопротивлении.

Сравнивая полученную формулу с выражением (10) для напряжения на нагрузке в цепи без трансформатора, видим, что формально трансформатор изменяет напряжение в  $\kappa$  раз, при этом активное сопротивление изменяется в  $\kappa^2$  раз. Следовательно, для уменьшения потерь выгодно передавать энергию при высоком напряжении, а использовать ее при пониженном: в этом случае  $\kappa <$

1, поэтому потери снижаются. Данный вывод может быть истолкован «на пальцах»: при увеличении напряжения в линии передач в  $n$  раз во столько же раз снижается сила тока (при постоянной мощности), поэтому потери, пропорциональные квадрату силы тока, снижаются в  $n^2$  раз.

## § 12. ЛЭП – линия электропередач

Энергоресурсы распределены на Земле неравномерно, поэтому практически постоянно электроэнергия производится в одних местах, а потребляется в других. Поэтому ее приходится передавать и часто – на большие расстояния. До сих пор не придумали лучшего способа передачи, чем многокилометровые ЛЭП – проводные линии электропередачи (рис. 286). Несмотря на то что провода этих линий изготавливают из алюминия, металла с малым удельным электрическим сопротивлением, потери энергии могут быть весьма значительны.

Проведем простейшую оценку. Пусть электроплитка мощностью  $P = 1 \text{ кВт}$  питается от источника напряжением\*  $U = 220 \text{ В}$ , расположенного на расстоянии  $l = 1 \text{ км}$ , линия передачи – из алюминиевого провода радиуса  $r = 1 \text{ мм}$ . Найдем потери электроэнергии при ее передаче.

Сопротивление электроплитки найдем из формулы для мощности тока  $P = U^2 R$ :

$$R_h = \frac{U^2}{P} = \frac{220^2}{1 \cdot 10^3} \approx 50 \text{ Ом.}$$



Рис. 286

---

\* Напомним, что традиционно указываются действующие значения напряжений и токов.

Сопротивление линии передачи:

$$R_1 = \rho \frac{L}{S} = 2,8 \cdot 10^{-8} \frac{2 \cdot 10^3}{\pi (1 \cdot 10^{-3})^2} \approx 20 \text{ } Oм,$$

(здесь  $\rho = 2,8 \cdot 10^{-8} \text{ } Oм \cdot м$  – удельное сопротивление алюминия; не забудьте, что линия состоит из двух проводов). Относительные потери энергии при передаче рассчитаем по формуле

$$\frac{I^2 R_1}{I^2 R_1 + I^2 R_h} = \frac{R_1}{R_1 + R_h} = \frac{20}{20 + 50} \approx 30\%.$$

Впечатляющий результат: потери энергии составляют третью часть! А если энергию передавать на расстояния в сотни и тысячи километров, да и передаваемые мощности значительно превышают киловатт.

Проведенный расчет показывает, что уменьшение потерь энергии при ее передаче имеет громадное практическое значение.

Формализуем данную проблему. Схема простейшей (лучше сказать, примитивной) линии передач показана на рис. 287. Обозначим:  $R_2$  – сопротивление нагрузки,  $R_1$  – сопротивление линии передачи. В такой цепи коэффициент полезного действия (отношение энергии, полученной потребителем, к энергии, отданной источником) равно

$$\eta = \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (1)$$

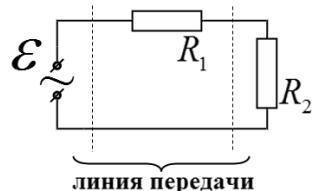


Рис. 287

Можно также ввести коэффициент потерь (отношение энергии, потерянной при передаче, к энергии, отданной источником):

$$K_{nom.} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (2)$$

На рис. 288 показаны графики зависимости КПД и коэффициента потерь линии передачи от отношения сопротивлений линии передачи и нагрузки. Отметим, что сопротивление линии передач возрастаает при увеличении расстояния (при этом увеличиваются потери). Кроме того, при увеличении мощности нагрузки уменьшается ее сопротивление, что также приводит к увеличению потерь энергии. Поэтому помните: при включении очередного электрического прибора вы увеличиваете потери энергии не только абсолютные, но и относительные – стоит ли за свой счет напрасно обогревать Вселенную?

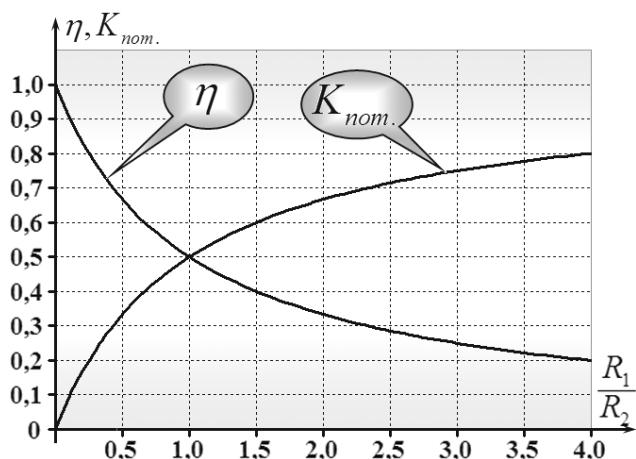


Рис. 288

Выход из столь печальной ситуации был найден еще на заре электрической эры. Он заключается в увеличении электрического напряжения в линиях электропередач. Увеличение напряжения приводит к уменьшению силы тока и, как следствие, к еще более значительному снижению потерь. Впрочем, мы уже говорили об этом в предыдущем разделе.

Итак, увеличение напряжения ЛЭП необходимо для уменьшения потерь. С другой стороны, увеличение напряжения в бытовых сетях смертельно опасно для жизни: всегда есть опасность непреднамеренного попадания человека под удар электрическим током. Поэтому напряжение в бытовых сетях не слишком велико\*: в нашей стране 220 В, в ряде стран – 127 В, используются также 110 В, 240 В. Кроме того, достаточно сложно и опасно создавать электрогенераторы с высоким ЭДС.

Таким образом, электроэнергия производится и потребляется при невысоком напряжении, а передаваться должна при высоком. Эти обстоятельства привели к тому, что традиционные линии

---

\* Тяжело обосновать выбор того или иного значения стандарта напряжения в сети: эти значения сложились исторически. Различные значения этого стандарта в разных странах свидетельствуют о том, что не было единого центра развития электроэнергетики, а может, и о неумении и нежелании договариваться. Аналогична ситуация и со стандартом частоты – в Европе принятая стандартная частота 50 Гц (полукруглое число), а в Северной Америке – 60 Гц – (наверно, с числом секунд в минуте перепутали).

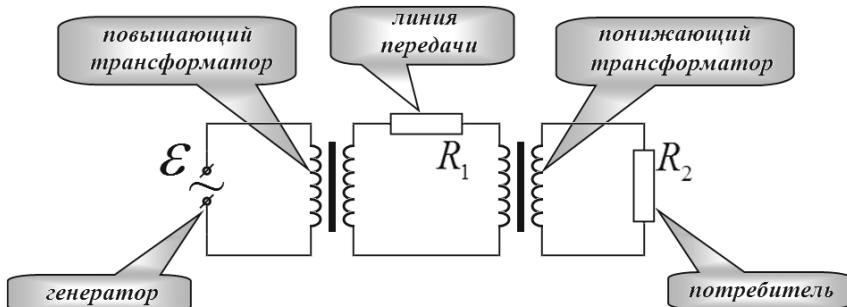


Рис. 289

электропередач строятся по схеме, изображенной на рис. 289.

Наша задача – проанализировать влияние электрического сопротивления линии передачи  $R_1$  в такой схеме транспортировки электроэнергии. Для упрощения расчетов мы пренебрежем активным сопротивлением электрогенератора и всего первичного контура: обычно его размеры значительно меньше длины ЛЭП. Также будем считать, что трансформаторы одинаковы, только включены противоположно: во сколько раз повышает напряжение первый, во столько же раз понижает второй. Кроме того, сохраним прежние обозначения для сопротивлений нагрузки и линии передачи.

Методика расчета характеристик этой цепи не отличается от методики расчетов, использованных нами ранее, поэтому здесь наше изложение будет более сжатым. Получим систему уравнений, описывающих характеристики данной цепи, при этом сразу будем строить соответствующие векторные диаграммы для этих уравнений. Возмож-

ность использования метода векторных диаграмм обоснована тем, что генератор создает переменную ЭДС, изменяющуюся по гармоническому закону, поэтому все характеристики (силы токов, напряжения, магнитные потоки, ЭДС индукции) также будут изменяться по гармоническим законам с той же частотой.

Как и ранее, в качестве основы построения векторных диаграмм выберем магнитный поток в сердечнике понижающего трансформатора, зависимость которого от времени запишем в виде

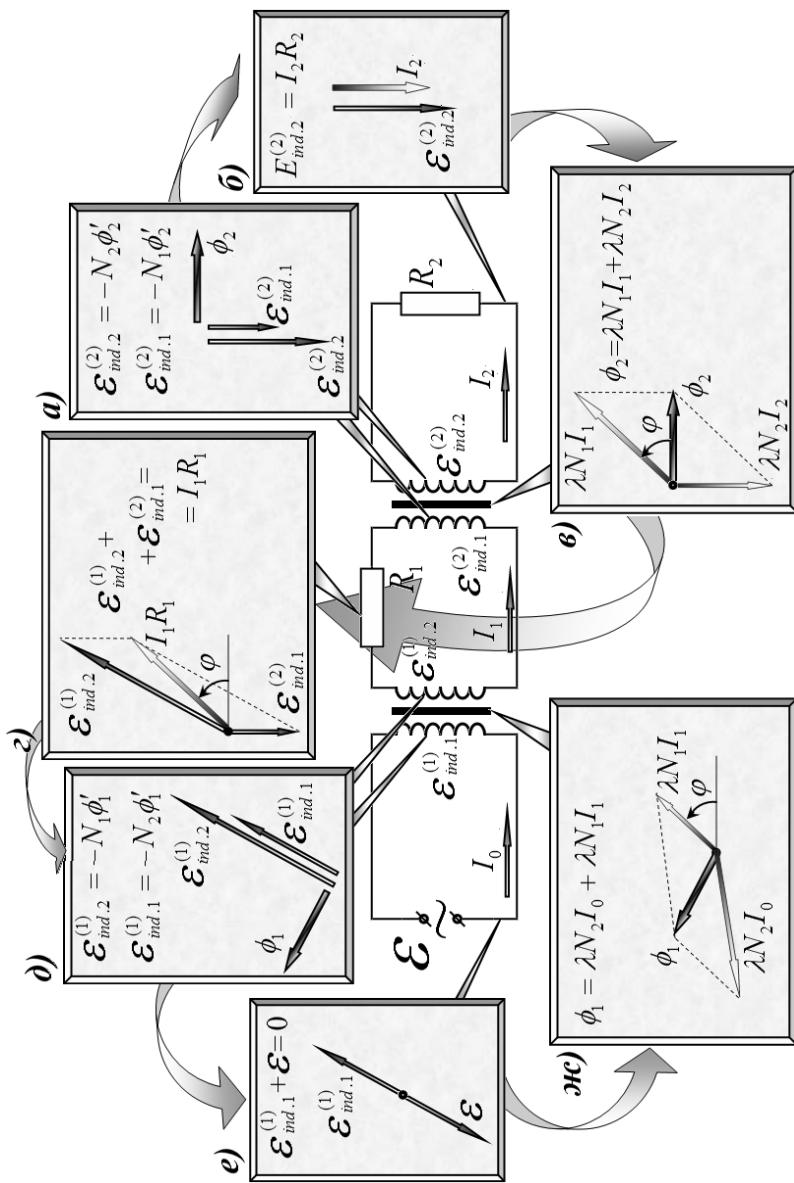
$$\phi_2 = \phi_{20} \cos \omega t. \quad (3)$$

Вектор этого колебания изобразим горизонтальным (рис. 290а). Изменение магнитного потока индуцирует ЭДС в первичной и вторичной обмотках\* этого трансформатора, которые, в соответствии законом индукции М. Фарадея, равны

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ind2}^{(2)} &= -N_2 \phi'_2 = N_2 \omega \phi_{20} \sin \omega t = N_2 \omega \phi_{20} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \\ \varepsilon_{ind1}^{(2)} &= -N_1 \phi'_1 = N_1 \omega \phi_{20} \sin \omega t = N_1 \omega \phi_{20} \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

\* Данная цепь непроста, поэтому приходится усложнять обозначения: все величины, относящиеся к контуру потребителя, имеют индекс 2, к контуру линии передачи – индекс 1, к контуру генератора – индекс 0 (при этом все амплитуды будут иметь двойной индекс (второй – 0). Величины ЭДС индукции имеют верхний индекс: (2) – для понижающего трансформатора, (1) – для повышающего. Теоретики утверждают, что удачные обозначения – половина успеха в решении задачи. Кроме того, все обозначения указаны на схеме.

Рис. 290



Соответствующие им векторы колебаний перпендикулярны вектору колебаний магнитного потока, они также изображены на рис. 290а.

ЭДС индукции во вторичной цепи этого трансформатора создает в контуре потребителя электрический ток, сила которого определяется законом Ома

$$\varepsilon_{ind2}^{(2)} = I_2 R_2, \quad (5)$$

который, в частности, утверждает, что вектор колебаний силы тока в этом контуре сонаправлен с вектором индукции (рис. 290б). Построенные векторы магнитного потока  $\phi_2$  и силы тока  $I_2$ , позволяют определить направление вектора колебаний силы тока в линии передачи. Для этого воспользуемся уравнением, определяющим магнитный поток в сердечнике понижающего трансформатора

$$\phi_2 = \lambda N_1 I_1 + \lambda N_2 I_2. \quad (6)$$

Это уравнение «изображено» на рис. 290в, угол между векторами силы тока в линии передачи и магнитного потока (т.е. сдвиг фаз между соответствующими колебаниями) обозначен  $\phi$ . Мы обозначили число витков в первичной обмотке этого трансформатора  $N_1$ , а во вторичной –  $N_2$ . Таким образом, коэффициент трансформации равен  $k = \frac{N_2}{N_1}$ . Согласно нашим предварительным рассуждениям, этот коэффициент должен быть меньше единицы. Будем считать, что столько же витков содержит и повышающий трансформатор, только наоборот: в первичной –  $N_2$ , во вторичной –  $N_1$ .

Переходим к контуру линии передач, сила тока в котором подчиняется закону Ома:

$$\varepsilon_{ind1}^{(2)} + \varepsilon_{ind2}^{(1)} = I_1 R_1. \quad (7)$$

Уже определенные направления векторов силы тока  $I_1$  и ЭДС индукции в первичной обмотке понижающего трансформатора  $\varepsilon_{ind1}^{(2)}$  позволяют построить вектор ЭДС индукции во вторичной обмотке повышающего трансформатора  $\varepsilon_{ind2}^{(1)}$  – рис. 290г. Эта ЭДС создается изменяющимся магнитным потоком в сердечнике повышающего трансформатора  $\phi_1$ . Вектор колебаний этого потока перпендикулярен вектору индукции  $\varepsilon_{ind2}^{(1)}$  (он построен на рис. 290д). Запишем также уравнения закона М.Фарадея, связывающие изменение магнитного потока с ЭДС индукции в обмотках повышающего трансформатора:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ind2}^{(1)} &= -N_1 \phi'_1 \\ \varepsilon_{ind1}^{(1)} &= -N_2 \phi'_1. \end{aligned} \quad (8)$$

Как и в любом трансформаторе, векторы колебаний ЭДС индукции в обмотках сонаправлены (рис. 290г). Так как мы пренебрегаем активным сопротивлением в контуре генератора (при необходимости его можно учесть), то уравнение закона Ома для этого контура имеет вид

$$\varepsilon_{ind1}^{(1)} + \varepsilon = 0. \quad (9)$$

Следовательно, вектор колебаний ЭДС генератора направлен противоположно вектору ЭДС индукции в первичной обмотке повышающего трансформатора (рис. 290е).

Наконец, запишем уравнение для магнитного потока в сердечнике повышающего трансформатора

$$\phi_1 = \lambda N_2 I_0 + \lambda N_1 I_1, \quad (10)$$

соответствующая ему векторная диаграмма построена на рис. 290ж.

Подсчитаем\*: мы записали девять уравнений, содержащих девять неизвестных переменных (два магнитных потока, три силы тока, четыре ЭДС индукции в обмотках).

Таким образом, наша система уравнений является полной и может быть решена.

Мы не будем полностью решать данную систему: для анализа потерь электроэнергии в линии передач нам достаточно определить силы токов в цепи потребителя и линии передач, поэтому ограничимся расчетом этих величин. Поэтому стратегия «борьбы с системой уравнений» заключается в скорейшем исключении магнитных потоков и ЭДС индукции в обмотках трансформаторов, выражении их через амплитуды искомых токов и ЭДС генератора.

Начнем с контура генератора: из уравнения (9) выражаем амплитуду ЭДС индукции первичной обмотки повышающего трансформатора:

$$\varepsilon_{ind10}^{(1)} = \varepsilon_0, \quad (11)$$

далее из уравнений (8) находим амплитуду ЭДС индукции во вторичной обмотке:

$$\varepsilon_{ind20}^{(1)} = \varepsilon_{ind10}^{(1)} \frac{N_1}{N_2} = \varepsilon_0 \frac{N_1}{N_2}. \quad (12)$$

---

\* Достойно самоуважения! Система из девяти (!) дифференциальных уравнений нас уже не должна очень сильно пугать!

Теперь подходим «с другой стороны» – контура потребителя. Из уравнения (5) выражаем амплитуду ЭДС индукции во вторичной обмотке понижающего трансформатора:

$$\varepsilon_{ind20}^{(2)} = I_{20}R_2, \quad (13)$$

а из уравнений (4) – амплитуду ЭДС в первичной обмотке:

$$\varepsilon_{ind10}^{(2)} = \varepsilon_{ind20}^{(2)} \frac{N_1}{N_2} = I_{20}R_2 \frac{N_1}{N_2}. \quad (14)$$

Уже можно рассмотреть уравнение для силы тока в контуре линии передачи (7), для амплитуд колебаний величин, фигурирующих в этом уравнении справедливо уравнение (теорема косинусов для соответствующего векторного треугольника на рис. 290г):

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon_{ind2}^{(1)}\right)^2 &= \left(I_{10}R_1\right)^2 + \left(\varepsilon_{ind1}^{(2)}\right)^2 - 2\left(\varepsilon_{ind1}^{(2)}\right) \cdot \left(I_{10}R_1\right) \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= \left(I_{10}R_1\right)^2 + \left(\varepsilon_{ind1}^{(2)}\right)^2 + 2\left(\varepsilon_{ind1}^{(2)}\right) \cdot \left(I_{10}R_1\right) \sin\varphi. \end{aligned} \quad (15)$$

В этом уравнении явно «лишним» является синус сдвига фаз, который выразим через амплитуды токов с помощью векторной диаграммы 290в:

$$\sin\varphi = \frac{\lambda N_2 I_{20}}{\lambda N_1 I_{10}} = \frac{N_2 I_{20}}{N_1 I_{10}}. \quad (16)$$

Подставим это выражение в уравнение (15), заменим и выражение (14) для ЭДС:

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon_0 \frac{N_1}{N_2}\right)^2 &= \left(I_{10}R_1\right)^2 + \left(I_{20}R_2 \frac{N_1}{N_2}\right)^2 + 2\left(I_{20}R_2 \frac{N_1}{N_2}\right) \cdot \left(I_{10}R_1\right) \frac{N_2 I_{20}}{N_1 I_{10}} = \\ &= \left(I_{10}R_1\right)^2 + I_{20}^2 \left(R_2 \frac{N_1}{N_2}\right)^2 + 2I_{20}^2 R_2 R_1. \end{aligned} \quad (17)$$

В этом уравнении только две неизвестные величины, причем именно те, которые нас интересуют, – амплитуды токов. Нужно еще одно такое же уравнение. Его получим из векторной диаграммы для магнитного потока в сердечнике понижающего трансформатора 290в (теорема Пифагора для векторного треугольника):

$$\phi_{20}^2 = (\lambda N_1 I_{10})^2 - (\lambda N_2 I_{20})^2. \quad (18)$$

К сожалению, в этом уравнении появилась амплитуда магнитного потока, поэтому срочно ее исключаем с помощью уравнения для ЭДС индукции (4):

$$\phi_{20} = \frac{\epsilon_{ind20}^{(2)}}{N_2 \omega} = I_{20} \frac{R_2}{N_2 \omega}. \quad (19)$$

Подстановка этого выражения в уравнение (18) приводит к требуемому уравнению

$$\left( I_{20} \frac{R_2}{N_2 \omega} \right)^2 = (\lambda N_1 I_{10})^2 - (\lambda N_2 I_{20})^2. \quad (20)$$

Итак, у нас осталось два уравнения (17) и (20) с двумя неизвестными, решение которых не вызывает затруднений. Из (20) выражаем

$$I_{10}^2 = I_{20}^2 \left( \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^2 + \left( \frac{R_2}{\lambda N_1 N_2 \omega} \right)^2 \right) = I_{20}^2 \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^2 \left( 1 + \left( \frac{R_2}{\lambda N_2^2 \omega} \right)^2 \right) \quad (21)$$

и подставляем в уравнение (17):

$$\left( \epsilon_0 \frac{N_1}{N_2} \right)^2 = I_{20}^2 \left( R_1 \frac{N_2}{N_1} \right)^2 \left( 1 + \left( \frac{R_2}{\lambda N_2^2 \omega} \right)^2 \right) + I_{20}^2 \left( R_2 \frac{N_1}{N_2} \right)^2 + 2 I_{20}^2 R_2 R_1,$$

получаем выражение для амплитуды силы тока в цепи потребителя:

$$I_{20} = \frac{\varepsilon_0}{R_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \left( \frac{R_1}{R_2} \frac{N_2^2}{N_1^2} \right)^2 \left( 1 + \left( \frac{R_2}{\lambda N_2^2 \omega} \right)^2 \right) + 2 \frac{R_1}{R_2} \frac{N_2}{N_1}}}. \quad (22)$$

Наконец, с помощью формулы (21) получаем выражение для амплитуды тока в линии передач

$$I_{10} = I_{20} \frac{N_2}{N_1} \sqrt{1 + \left( \frac{R_2}{\lambda N_2^2 \omega} \right)^2}. \quad (23)$$

Мы достигли поставленной цели, однако полученные выражения\* достаточно громоздки, поэтому упростим их с помощью разумных (и обоснованных) приближений. Первое: положим, что активное сопротивление нагрузки значительно меньше индуктивного сопротивления вторичной обмотки понижающего трансформатора, то есть пренебрежем слагаемым  $\left( \frac{R_2}{\lambda N_2^2 \omega} \right) \ll 1$ . Это условие обычно выполняется на практике\*\*. Второе: в линиях передач напряжение составляет сотни киловольт, а напряжение в бытовой сети сотни вольт, поэтому введенный коэффициент трансформации  $\kappa = \frac{N_2}{N_1}$  значительно меньше единицы, поэтому в формуле (22) можно «с чистой совестью» прене-

\* В очередной раз обратите внимание на запись формул: сначала самые существенные (и почти очевидные) множители, затем безразмерные коэффициенты, составленные из отношений сопротивлений.

\*\* Не слишком серьезное обоснование: трансформатор большой, а лампочка над ним маленькая.

бречь квадратичным слагаемым  $\left(\frac{R_1}{R_2} \frac{N_2^2}{N_1^2}\right)^2$ . В рамках этих приближений формулы для токов существенно упрощаются:

$$I_{20} \approx \frac{\varepsilon_0}{R_2} \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \frac{R_1}{R_2} \frac{N_2}{N_1}}} \approx \frac{\varepsilon_0}{R_2} \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} \frac{N_2}{N_1}}, \quad (24)$$

$$I_{10} = I_{20} \frac{N_2}{N_1} \sqrt{1 + \left(\frac{R_2}{\lambda N_2^2 \omega}\right)^2} \approx I_{20} \frac{N_2}{N_1}.$$

Обратите внимание, что в рамках сделанных приближений сила тока в линии передач в  $k$  раз меньше силы тока в цепи потребителя.

В заключение рассчитаем КПД рассматриваемой линии передачи. Учтем, что сумма мощностей, потребляемой нагрузкой («полезная») и выделяющейся в линии передач («вредная»), равна мощности, развиваемой генератором. Это очевидное утверждение можно доказать и в данном случае. Для этого следует до конца решить полученную систему уравнений и найти силу тока в цепи генератора, но этот раздел и так уже перегружен алгебраическими выкладками, поэтому поверим, что полученные выражения для сил токов верны. Итак, КПД линии передач равен

$$\eta = \frac{I_{20}^2 R_2}{I_{20}^2 R_2 + I_{10}^2 R_1} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} \frac{I_{10}^2}{I_{20}^2}} \approx \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2} \approx 1 - \frac{R_1}{R_2} \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2. \quad (25)$$

На последнем шаге мы использовали приближенную формулу, полагая с надеждой, что потери

в линии передач не слишком велики. С той же точностью коэффициент потерь равен

$$K_{nom.} = 1 - \eta \approx \frac{R_1}{R_2} \left( \frac{N_2}{N_1} \right)^2. \quad (26)$$

Этот результат оправдывает проделанные расчеты: повышение напряжения в линии передач существенно снижает потери. Так, например, повышение напряжения в тысячу раз (реально оно может быть и большим) приводит к уменьшению потерь в миллион раз!

Тот, кто придумал трансформатор, был талантлив! Кстати, этим талантливым изобретателем был американский инженер, серб по национальности, Никола Тесла.

# СОДЕРЖАНИЕ

## Глава 1. Электродинамика

§ 1. Постоянное магнитное поле.....	3
1.1. Магнитные взаимодействия .....	3
1.2. Индукция магнитного поля .....	31
1.2.1. Вектор угловой скорости – векторное произведение.....	31
1.2.2. Вектор момента силы – векторное произведение .....	36
1.2.3. Вектор индукции магнитного поля .....	40
1.3. Силовые линии магнитного поля .....	45
1.4. Сила Ампера.....	47
1.5. Сила Лоренца.....	52
1.6. Закон Био-Савара .....	54
1.7. Расчет индукции магнитного поля .....	67
1.7.1. Магнитное поле кругового тока .....	68
1.7.2. Магнитное поле прямого тока .....	73
1.8. Взаимодействие параллельных токов – закон Ампера .....	79
1.9. Единица силы тока – ампер. Магнитная постоянная.....	82
1.10. Электрические и магнитные силы – что больше? .....	84
1.11. Магнитный поток, теорема о магнитном потоке.....	88
1.12. Циркуляция вектора индукции. Теорема о циркуляции магнитного поля .....	96
1.13. Применение теоремы о циркуляции к расчету магнитного поля.....	102

1.13.1. Поле цилиндрического проводника с током .....	102
1.13.2. Поле пластины с током .....	105
1.13.3. Поле соленоида .....	109
1.14. Электростатика и магнитостатика: заключение .....	115

<b>§ 2. Взаимодействие магнитного поля с веществом.....</b>	<b>117</b>
2.1. Намагниченность вещества .....	118
2.2. Описание магнитного поля в веществе. Магнитные характеристики вещества ...	122
2.3. Типы магнетиков .....	128
2.3.1. Диамагнетики .....	129
2.3.2. Парамагнетики .....	133
2.3.4. Ферромагнетики .....	137
2.4. Постоянные магниты .....	144
2.5. Взаимодействие постоянных магнитов....	149
2.6. Взаимодействие магнетиков с постоян- ным магнитным полем .....	154
<b>§ 3. Движение заряженных частиц в электри- ческом и магнитном полях.....</b>	<b>158</b>
3.1. Заряженная частица в электростатичес- ком поле .....	159
3.1.1. Движение заряженной частицы в одно- родном электростатическом поле.....	160
3.1.2. Электронно-лучевая трубка с электо- статическим отклонением .....	163
3.2. Плоское движение заряженной частицы в однородном магнитном поле .....	165

3.2.1. Циклотрон .....	167
3.2.2. Масс-спектроскопия .....	170
3.2.3. Магнитная отклоняющая система .....	176
3.3. Движение по винтовой линии в однородном магнитном поле.....	177
3.4. Магнитное поле Земли, магнитные бури, северные сияния .....	180
3.5. Магнетрон .....	183
<b>§ 4. Переменное электромагнитное поле .....</b>	<b>190</b>
4.1. Явление электромагнитной индукции ...	190
4.1.1. Открытие явления электромагнитной индукции М. Фарадеем .....	190
4.1.2. Движущийся проводник в магнитном поле .....	193
4.1.3. «Движущееся» магнитное поле вблизи проводника .....	208
4.1.4. Изменяющееся магнитное поле .....	216
4.1.5. Закон электромагнитной индукции Фарадея .....	220
4.2. Явление самоиндукции. Индуктивность .....	223
4.3. Ток смещения .....	228
4.4. Электромагнитное поле движущегося заряда .....	236
4.5. Уравнения Maxwella .....	241
<b>§ 5. Превращение энергии в электрических и магнитных явлениях .....</b>	<b>256</b>
5.1. Математическое введение .....	257

<b>5.2. Превращения энергии при зарядке и разрядке конденсаторов.....</b>	<b>269</b>
<b>5.2.1. Напоминание и гидродинамическая аналогия .....</b>	<b>269</b>
<b>5.2.2. Разрядка конденсатора .....</b>	<b>276</b>
<b>5.2.3. Зарядка конденсатора от источника постоянной ЭДС .....</b>	<b>282</b>
<b>5.2.4. Перераспределение зарядов на конденсаторах .....</b>	<b>290</b>
<b>5.2.5. Изменение энергии конденсатора при изменении его емкости.....</b>	<b>296</b>
<b>5.3. Энергия электрического тока. Энергия магнитного поля .....</b>	<b>309</b>
<b>5.4. Давление магнитного поля.....</b>	<b>317</b>
<b>5.5. Превращения энергии при изменении индуктивности цепи .....</b>	<b>320</b>
<b>5.6. Сверхпроводники в магнитном поле .....</b>	<b>326</b>
<b>5.7. Перенос энергии в электромагнитном поле .....</b>	<b>337</b>
<b>5.7.1. Возрастание энергии магнитного поля...</b>	<b>338</b>
<b>5.7.2. Возрастание энергии электрического поля .....</b>	<b>343</b>
<b>5.7.3. Перенос энергии при выделении теплоты .....</b>	<b>346</b>
<b>5.7.4. Теорема о потоке энергии электромагнитного поля .....</b>	<b>349</b>

## **Глава 2. Механические колебания**

<b>§ 6. Математическое описание колебаний .....</b>	<b>353</b>
<b>6.1. Периодические функции .....</b>	<b>354</b>
<b>6.2. Кинематика колебательного движения ...</b>	<b>360</b>

<b>6.3. Фазовые траектории колебательного</b>		
<b>движения.....</b>	<b>371</b>	
<b>6.4. Негармонические колебания. Разложение</b>		
<b>Фурье .....</b>	<b>375</b>	
<b>§7. Простейшие колебательные системы .....</b>	<b>379</b>	
<b>7.1. Пружинный маятник.....</b>	<b>379</b>	
<b>7.2. Математический маятник.....</b>	<b>387</b>	
<b>7.3. Математический маятник с пружиной ....</b>	<b>390</b>	
<b>7.4. Колебание жидкости в трубке.....</b>	<b>392</b>	
<b>7.5. Качественный анализ движения материальной точки.....</b>	<b>394</b>	
<b>7.5.1. Автономные системы .....</b>	<b>396</b>	
<b>7.5.2. Диссипативные системы.....</b>	<b>407</b>	
<b>7.5.3. Малые колебания в произвольных колебательных системах.....</b>	<b>410</b>	
<b>7.5.4. Математический маятник: негармонические колебания .....</b>	<b>414</b>	
<b>7.5.5. Малые негармонические колебания .....</b>	<b>418</b>	
<b>7.5.6. Вращение или колебание? .....</b>	<b>420</b>	
<b>7.6. Затухающие колебания .....</b>	<b>428</b>	
<b>7.6.1. Затухание под действием силы сухого трения .....</b>	<b>428</b>	
<b>7.6.2. Затухание колебаний под действием сил вязкого трения.....</b>	<b>436</b>	
<b>§ 8. Вынужденные колебания. Резонанс .....</b>	<b>445</b>	
<b>8.1. Уравнение вынужденных колебаний и его решение .....</b>	<b>445</b>	
<b>8.2. Векторное описание колебаний. Векторное сложение колебаний.....</b>	<b>455</b>	

<b>8.3. Превращения энергии при вынужденных колебаниях .....</b>	<b>460</b>
<b>§ 9. Автоколебания. Параметрические колебания.....</b>	<b>469</b>
9.1. Примеры автоколебательных систем ....	469
9.2. Автоколебания в системах с «отрица- тельным трением» .....	472
9.3. Маятниковые часы .....	477
9.4. Параметрические колебания. Качели ....	487
 <b>Глава 3. Переменный электрический ток</b>	
<b>§10. Переменный электрический ток .....</b>	<b>495</b>
10.1. Генератор электрического тока .....	495
10.2. Переменный электрический ток – ква- зистационарное приближение .....	499
10.3. Активное сопротивление в цепи пере- менного тока.....	503
10.4. Емкость в цепи переменного тока. Ем- костное сопротивление.....	506
10.5. Индуктивность в цепи переменного тока. Индуктивное сопротивление .....	519
10.6. Цепи переменного тока. Резонанс на- пряжений .....	523
10.7. Резонанс токов .....	531
10.8. Колебательный контур .....	535
10.8.1. Свободные колебания в контуре .....	535
10.8.2. Вынужденные колебания в контуре ....	540
 <b>§ 11. Трансформатор.....</b>	<b>548</b>

11.1. Устройство трансформатора .....	548
11.2. Уравнения, описывающие работу трансформатора .....	550
11.3. «Режим холостого хода» .....	555
11.4. Режим «без потерь» .....	557
11.5. Учет потерь.....	562
<b>§ 12. ЛЭП – линия электропередач.....</b>	<b>567</b>

Учебное издание  
**Слободянюк Анатолий Иванович**  
**ФИЗИКА ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ**  
**Магнитостатика. Электродинамика. Теория колебаний**

*Пособие для учащихся учреждений  
общего среднего образования с русским языком обучения*

Ответственный за выпуск Г. В. Нехай

Редактор М. Л. Рудковская

Технический редактор В. Н. Кравцова

Компьютерная верстка М. Л. Рудковская

Дизайн обложки В. И. Рынкевич

Корректор А. С. Коляго

Подписано в печать 07.06.2017. Формат 60x84/16. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 34,41. Уч.-изд. л. 18,22.

Тираж 8850 экз. Заказ .

Общественное объединение «Белорусская ассоциация «Конкурс».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий № 1/288 от 14.04.2014.  
Ул. Беды, 24–100А, 220040, г. Минск.

Республиканское унитарное предприятие  
«Издательство «Белорусский Дом печати».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий № 2/102 от 01.04.2014.  
Пр-т Независимости, 79, 220013, г. Минск.





