



Республиканская физическая олимпиада 2021 год (Заключительный этап)

Теоретический тур

9 класс.

1. Полный комплект состоит из трех заданий.
2. Для вашего удобства вопросы, на которые Вам необходимо ответить, помещены в рамки.
3. При оформлении работы каждое задание начинайте с новой страницы. При недостатке бумаги обращайтесь к организаторам!
3. Подписывать рабочие листы запрещается.
4. В ходе работы можете использовать ручки, карандаши, чертежные принадлежности, калькулятор.
5. Со всеми вопросами, связанными с условиями задач, обращайтесь к организаторам олимпиады.

Постарайтесь внимательно прочитать условия задач!

Может, вам покажется, что условия задач слишком длинные. Но мы сочинили их такими, чтобы Вам было легче решать. Поверьте, иногда решения короче таких условий! Не теряйте присутствия духа, смело беритесь за решение каждой задачи. Помните, оцениваются не только полные решения, но и их отдельные части и даже отдельные здравые мысли.

Желаем успехов в выполнении данных заданий!

Пакет заданий содержит:

- титульный лист (стр. 1);
- условия 3 теоретических задач (стр. 2-6).

Задание 1. Разминка

Задача 1.1

В высоком вертикальном цилиндрическом сосуде с площадью поперечного сечения S находится вода. В сосуд опускают небольшой алюминиевый цилиндр объема V . При этом уровень воды в сосуде оказывается равным h_0 . Удельные теплоемкости воды и алюминия равны c_1, c_2 , а их плотности - ρ_1, ρ_2 , соответственно. Удельная теплота испарения воды L , удельная теплота плавления льда λ , плотность льда ρ_3 .

Теплоемкостью сосуда можно пренебречь, также можно пренебречь потерями теплоты в окружающую среду.

1.1.1 Пусть температура начальная воды равна $t_0 = 100^\circ\text{C}$, а начальная температуры цилиндра $t_1 = 120^\circ\text{C}$. До установления теплового равновесия вода полностью не выкипает, цилиндр все время остается погруженным в воду. Найдите, на сколько изменится уровень воды в сосуде Δh_1 после установления теплового равновесия.

1.1.2 Пусть температура воды равна $t_0 = 0,0^\circ\text{C}$, а начальная температуры цилиндра $t_1 = -20^\circ\text{C}$. До установления теплового равновесия вода полностью не замерзает, цилиндр все время остается погруженным в воду. Найдите, на сколько изменится уровень воды в сосуде Δh_2 после установления теплового равновесия.

1.1.3 Оцените численное значение отношение изменения высот $\frac{\Delta h_2}{\Delta h_1}$, если $\frac{L}{\lambda} \approx 7$, а $\frac{\rho_3}{\rho_1} \approx 0,9$.

Задача 1.2

Угловой размер Солнца видимого с Земли (угол под которым виден солнечный диск на земном небе) равен $\varphi \approx 32'$.

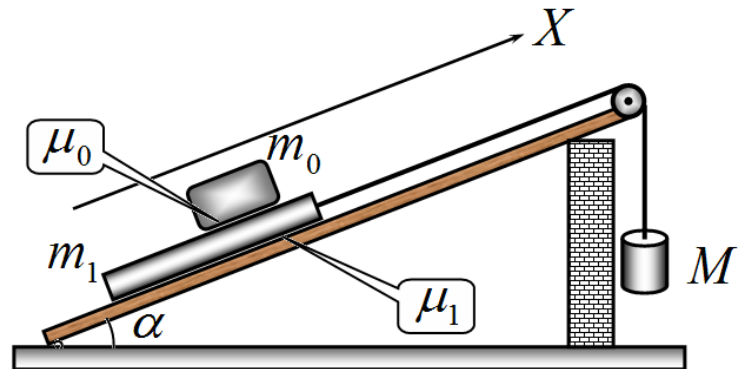
1.2.1 Рассчитайте, на какую высоту h надо поднять непрозрачный шар диаметра $d = 1,0 \text{ м}$, чтобы солнечная тень от него на поверхности земли стала не видна.

1.2.2 На высоте h , найденной в п. 1.2.1 горизонтально расположили большой непрозрачный плоский экран, в котором проделано круглое отверстие диаметра $d = 1,0 \text{ м}$. Найдите, чему будет равен диаметр солнечного «зайчика» от этого отверстия на поверхности Земли.

Задача 2. Наклонная плоскость

Для подъема грузов широко используется такой простой механизм, как наклонная плоскость.

Для его описания воспользуемся следующей моделью. Ящик массы $m_0 = 20 \text{ кг}$ (груз, который необходимо поднять) помещают на поддон массы $m_1 = 5,0 \text{ кг}$, который размещают на наклонной плоскости, образующей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом. К поддону привязана прочная нерастяжимая веревка, которая переброшена через блок, закрепленный в верхней части наклонной плоскости. Ко второму свободно свисающему концу веревки прикреплен груз массы M , которую можно изменять. Массы веревки и блока пренебрежимо малы, трения в оси блока нет. Коэффициент трения груза о поддон равен $\mu_0 = 0,65$, коэффициент трения поддона о наклонную плоскость равен $\mu_1 = 0,20$. Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10 \frac{m}{c^2}$.



В зависимости от массы подвешенного груза M возможны различные варианты движения ящика и поддона (движутся вверх, или вниз по наклонной плоскости, ящик скользит или не скользит по поддону и т.д.).

Вам необходимо рассмотреть все возможные варианты таких движений.

Примем, что ось X направлена вверх параллельно наклонной плоскости.

1. Рассмотрите все возможные режимы движения поддона и ящика. Для каждого режима укажите, при каких значениях массы повешенного груза будет реализовываться рассматриваемый режим движения (получите формулы и затем рассчитайте соответствующие значения масс M). Получите формулы для ускорений ящика a_0 и поддона a_1 в каждом из рассмотренных режимов движения.
2. Постройте на одном бланке графики зависимостей проекций на ось X ускорений груза a_0 и поддона a_1 от массы подвешенного груза M .
3. Укажите, при каком значении массы подвешенного груза M наиболее рационально использовать данное устройство для подъема груза. Свой выбор кратко обоснуйте.
4. Укажите, при каком значении массы подвешенного груза M , КПД наклонной плоскости будет максимальным. Чему равен этот максимальный КПД? Кратко сформулируйте причины, по которым этот КПД оказывается меньше единицы.

Примечание. Под КПД наклонной плоскости понимается отношение изменение потенциальной энергии поднимаемого ящика m_0 (работа полезная), к работе, совершенной при опускании подвешенного груза M (работа совершенная).

Задача 3. Систематические погрешности электрических схем

При проведении измерений вольтамперных характеристик (ВАХ – зависимость силы тока через исследуемый элемент от напряжения на нем) используют различные электрические цепи. Одной из самых популярных схем является схема, показанная на рис. 1.

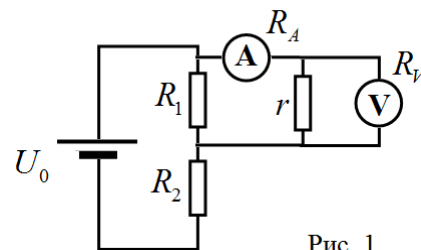


Рис. 1

При расчетах таких цепей часто используют различные приближения (считают, что сопротивление амперметра равно нулю, сопротивление вольтметра бесконечно большим и т.д.).

Такие приближения вносят систематические погрешности в проводимые расчеты и анализ полученных экспериментальных результатов.

В данной задаче вам необходимо построить разумные оценки погрешностей, вносимых тем обстоятельством, что приборы являются не идеальными.

При расчетах рекомендуем использовать приближенную формулу, справедливую при малых x :

$$\frac{1}{1+x} \approx 1-x. \quad (1)$$

Часть 1. Погрешность делителя напряжения.

На рис. 2а показана схема делителя напряжения на двух резисторах, сопротивления которых равны R_1, R_2 . Изменяя сопротивления этих резисторов, можно изменять напряжение U_1 на резисторе R_1 . При подключении к этому резистору исследуемой схемы с общим сопротивлением r (Рис. 2б), напряжение на резисторе R_1 изменяется и принимает некоторое значение \tilde{U}_1 . Однако, в некоторых случаях различием между U_1 и \tilde{U}_1 пренебрегают.

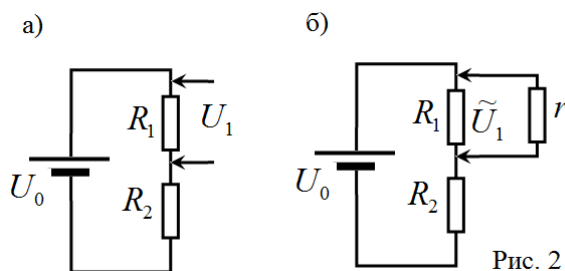


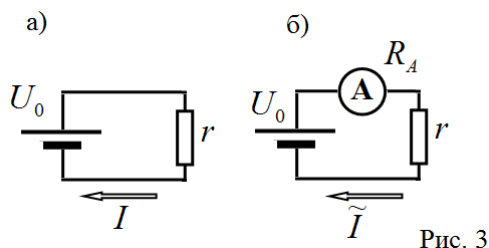
Рис. 2

1.1 Рассчитайте значения напряжений U_1 и \tilde{U}_1 .

1.2 Рассчитайте, при каком значении сопротивления исследуемой цепи r относительное изменение напряжения $\varepsilon_V = \left| \frac{U_1 - \tilde{U}_1}{U_1} \right|$ не превышает 1%. Получите формулу в общем виде и проведите численный расчет при $R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом}$.

Часть 2. Погрешность, вносимая амперметром

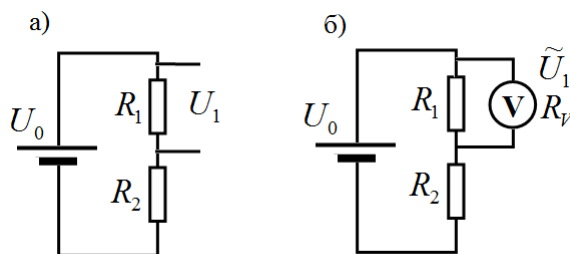
В цепи, показанной на рис. 3а, обозначим силу тока в цепи I . При подключении амперметра сила тока в цепи изменяется и становится равной \tilde{I} .



2.1 Рассчитайте, при каком значении сопротивления амперметра R_A относительное изменение силы тока в цепи $\varepsilon_A = \left| \frac{I - \tilde{I}}{I} \right|$ не превышает 1%. Получите формулу в общем виде и проведите численный расчет при $r = 10 \text{ Ом}$.

Часть 3. Погрешность, вносимая вольтметром.

Для измерения напряжения используется схема, показанная на рис. 4б. При отсутствии вольтметра напряжение на резисторе R_1 равно U_1 , при подключении вольтметра с сопротивлением R_V , напряжение на этом резисторе становится равным \tilde{U}_1 .



3.1 Рассчитайте, при каком значении сопротивления исследуемой цепи r относительное изменение напряжения $\varepsilon_V = \left| \frac{U_1 - \tilde{U}_1}{U_1} \right|$ не превышает 1%. Получите формулу в общем виде и проведите численный расчет при $R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом}$.

Часть 4. Корректировка измеренной ВАХ

С помощью схемы, приведенной на рис. 1, проведено измерение зависимости силы тока, которое показывает амперметр \tilde{I} , от показаний вольтметра \tilde{U} для некоторого нелинейного элемента r (его сопротивление не постоянно, а изменяется при изменении напряжения). Сопротивление вольтметра $R_V = 2,0 \text{ кОм}$, сопротивление амперметра $R_A = 2,0 \text{ Ом}$.

На отдельном бланке (на следующей странице) приведен график измеренной зависимости. Для вашего удобства в Таблице 1 приведены численные значения этих величин, по которым построен график.

4.1 На этом же бланке постройте скорректированный график ВАХ исследуемого элемента (зависимость силы тока через этот элемент I от напряжения на этом элементе U).

На этом же листе приведите расчетные формулы, по которым Вы провели корректировку графика, необходимые расчеты можете провести в свободных графах Таблицы 1.

Не забудьте сдать этот Бланк!

Бланк к задаче 3 (Часть 4)

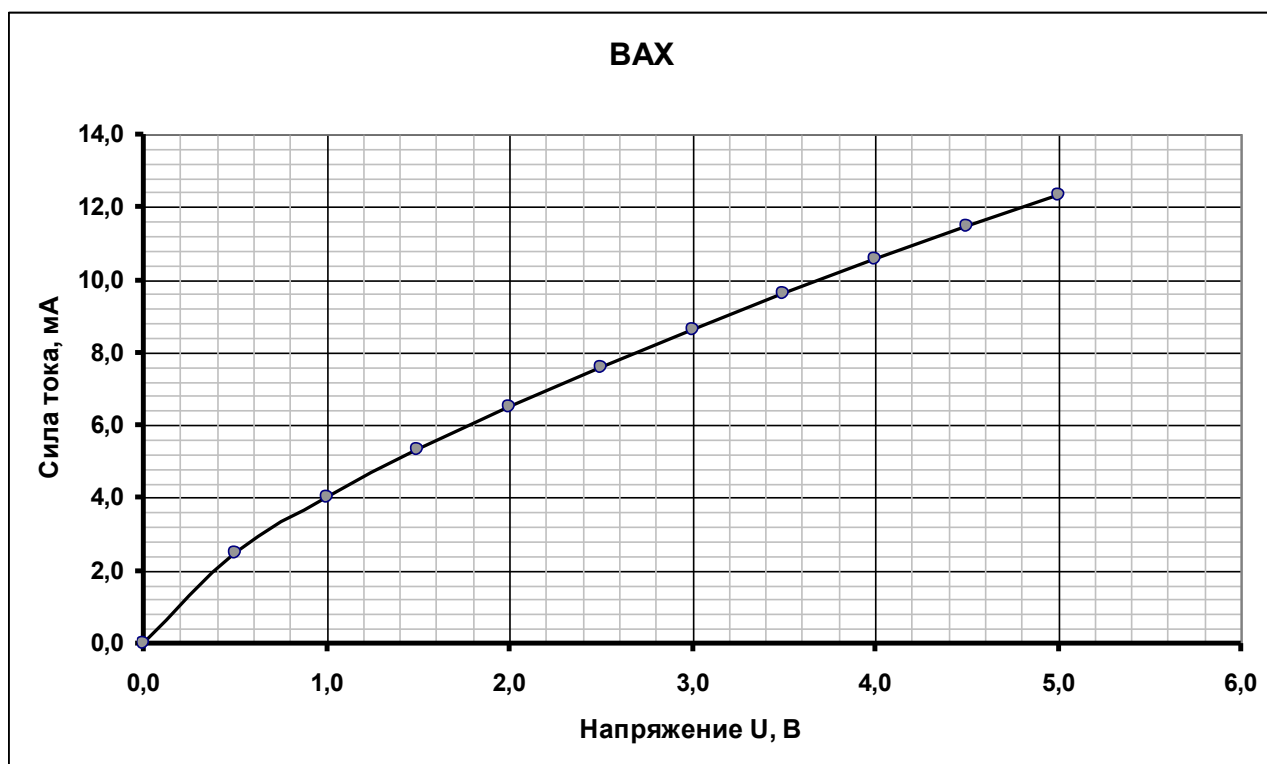


Таблица 1.

\tilde{U} , В	\tilde{I} , мА				
0,00	0,00				
0,50	2,46				
1,00	4,00				
1,50	5,31				
2,00	6,50				
2,50	7,60				
3,00	8,63				
3,50	9,61				
4,00	10,56				
4,50	11,46				
5,00	12,34				

Расчетные формулы:

Республиканская физическая олимпиада

2021 год

(Заключительный этап)

Теоретический тур

10 класс.

1. Полный комплект состоит из трех заданий.
2. Для вашего удобства вопросы, на которые Вам необходимо ответить, помещены в рамки.
3. При оформлении работы каждое задание начинайте с новой страницы. При недостатке бумаги обращайтесь к организаторам!
3. Подписывать рабочие листы запрещается.
4. В ходе работы можете использовать ручки, карандаши, чертежные принадлежности, калькулятор.
5. Со всеми вопросами, связанными с условиями задач, обращайтесь к организаторам олимпиады.

Постарайтесь внимательно прочитать условия задач!

Может, вам покажется, что условия задач слишком длинные. Но мы сочинили их такими, чтобы Вам было легче решать. Поверьте, иногда решения короче таких условий! Не теряйте присутствия духа, смело беритесь за решение каждой задачи. Помните, оцениваются не только полные решения, но и их отдельные части и даже отдельные здравые мысли.

Желаем успехов в выполнении данных заданий!

Пакет заданий содержит:

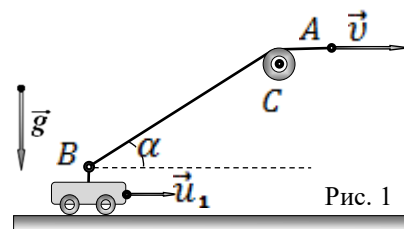
- титульный лист (стр. 1);
- условия 3 теоретических задач (стр. 2-7);

Задача 1. Привязанная тележка

Небольшую тележку B необходимо подтянуть слева направо по гладкой горизонтальной поверхности с помощью легкой нерастяжимой нити. При движении тележка не отрывается от горизонтальной поверхности. Три удальца решили сделать это по-разному... Рассмотрим кинематическую схему каждого из них.

Часть 1. «Высокий блок»

По плану первого удальца нить переброшена через неподвижный блок C (Рис. 1), расположенный на некоторой высоте от горизонтальной поверхности. Конец A нити тянут горизонтально с постоянной скоростью \vec{v} вправо (см. Рис. 1).

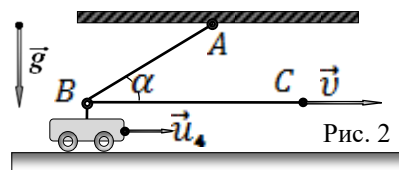


1.1 Получите выражение для мгновенной скорости $u_1(\alpha)$ тележки в момент, когда часть BC нити составляет угол α с горизонтом, считая скорость v конца A нити известной.

1.2 Используя полученное выражение для $u_1(\alpha)$, найдите скорости тележки u_2 на бесконечности ($\alpha = 0^\circ$) и u_2 , когда тележка находится в положении при $\alpha = 35^\circ$.

Часть 2. «Подвижный блок»

По плану второго удальца лёгкая нить ABC (Рис. 2) закреплена в некоторой точке A на потолке и перекинута через малый гладкий блок B , закреплённый на самой тележке. Конец C нити тянут горизонтально с постоянной скоростью \vec{v} вправо (см. Рис. 2).

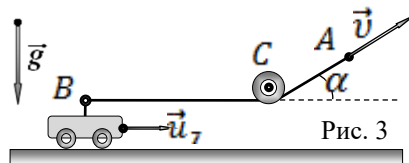


2.1 Получите выражение для мгновенной скорости $u_4(\alpha)$ тележки в момент, когда часть AB нити составляет угол α с горизонтом, считая скорость v конца C нити известной.

2.2 Используя полученное выражение для $u_4(\alpha)$, найдите скорости тележки u_5 на бесконечности ($\alpha = 0^\circ$) и u_6 , когда тележка находится в положении при $\alpha = 35^\circ$.

Часть 3. «Низкий блок».

По плану третьего удальца неподвижный блок C (Рис. 3) расположен так, что участок BC нити практически горизонтален. Конец A нити тянут под постоянным углом α к горизонту (см. Рис. 3) с постоянной скоростью \vec{v} .



3.1 Получите выражение для мгновенной скорости $u_7(\alpha)$ тележки, считая скорость v конца A нити известной.

Задача 2. Картезианский водолаз.

Картезианский водолаз – механическая игрушка, основанная на изменении силы Архимеда при увеличении внешнего давления. Первое описание водолаза было дано итальянским учёным Рафаэлло Маджотти в 1648 году. Его водолазы, а он называл их «флакончики», плавали в высоких цилиндрических сосудах, избыточное давление в которых создавалось закрывающей их ладонью или, если сосуд достаточно узок, большим пальцем.

В скором времени игрушка стала популярной. С начала XVIII века эта игрушка стала называться Декартов или Картезианский (по-латыни Декарт произносится как Картезий) водолаз. а также «Картезианский дьявол», «Поплавок Декарта».

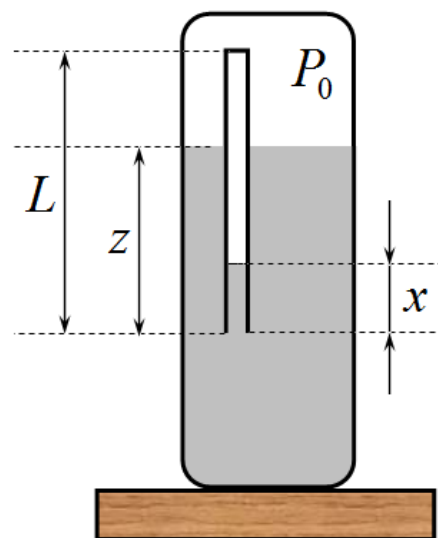
Несмотря на почти четырехвековую историю, строгое описание поведения этого поплавка вызывает затруднение у современных «олимпиадников».

Рассмотрим тонкостенную трубку, закрытую с одного конца и открытую с другого (можно назвать ее пробирка), которая помещается в сосуд с водой открытым концом вниз. Будем считать, что центр тяжести трубки смещен к открытому краю, поэтому трубка в сосуде всегда располагается вертикально. Температура в системе остается постоянной.

Будем считать, что все параметры установки заданы: длина трубки $L = 10 \text{ см}$, площадь ее поперечного сечения s , плотность воды $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, ускорение свободного падения $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, давление воздуха в сосуде P_0 (оно может изменяться).

Обозначим: z - глубина погружения трубки по ее нижнему краю; x - высота столбика воды в трубке.

Давление воздуха будем измерять в единицах водяного столба, в этом случае гидростатическое давление воды просто равно разности высот (давление и длина измеряются в одних единицах)



Часть 1. Вынужденное погружение.

В данной части задачи будем считать, что давление воздуха в сосуде постоянно и равно P_0 . Пустую пробирку аккуратно опускают открытым концом в воду. При этом она свободно плавает на поверхности воды, погрузившись на глубину $z_0 = \eta L$ (где η - известный безразмерный коэффициент). Затем пробирку удерживают рукой на некоторой глубине z , которая может быть как меньше, так и больше глубины пробирки.

1.1 Найдите зависимость высоты столбика воды в трубке x от глубины погружения z . Постройте схематический график полученной зависимости.

1.2 Найдите зависимость силы Архимеда, действующей на трубку, от глубины погружения z . Постройте схематический график полученной зависимости.

1.3 Найдите максимальное значение силы Архимеда, укажите, при каком значении z оно реализуется.

1.4 Выразите силу Архимеда, действующую на трубку, через давление воздуха в трубке P и глубину ее погружения z .

1.5 Получите строгое уравнение, позволяющее получить значение глубины z_1 , на которую надо погрузить трубку, чтобы она утонула и больше самопроизвольно не всплывала. Рассчитайте численное значение этой глубины при нормальном атмосферном давлении $P_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Па}$ и $\eta = 0,80$.

Часть 2. Трубка в закрытом сосуде.

Пробирку погрузили в воду, как описано в части 1. Она плавает, погрузившись в воду на глубину $z_0 = 0,80L$ при давлении воздуха в сосуде P_0 . Сосуд закрывают и начинают плавно изменять давление воздуха в нем.

2.1 При каком давлении воздуха P , пробирка начнет тонуть? Получите строгое уравнение, позволяющее найти эту величину. Рассчитайте численное значение этой величины при $P_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Па}$ и $\eta = 0,80$.

Часть 3. Конструкторская.

3.1 Предложите простой вариант рассмотренной игрушки, в котором водолаз можно заставить погружаться легким нажатием пальца. (конечно, самого водолаза трогать нельзя). Укажите примерные численные характеристики вашей игрушки.

Задача 3. Амперметр, вольтметр, омметр и пр.

В настоящее время большинство электроизмерительных приборов – электронные. Принципы их работы таинственны и не всегда понятны (тем более, что их производители часто держат эти принципы в тайне).

«Старые добрые» электромеханические измерительные приборы могут использоваться до настоящего времени, их работа основана на простых физических принципах. Кроме того, некоторые из них до настоящего времени имеют существенные преимущества перед электронными. С одним из таких приборов вам предстоит познакомиться в данной задаче.

Часть 1. Приборы магнитоэлектрической системы.

Принцип действия такого прибора основан на вращении рамки с током в постоянном магнитном поле. Ось рамки соединена с пружиной и стрелкой по отклонению стрелки можно судить о силе протекающего через рамку тока¹.

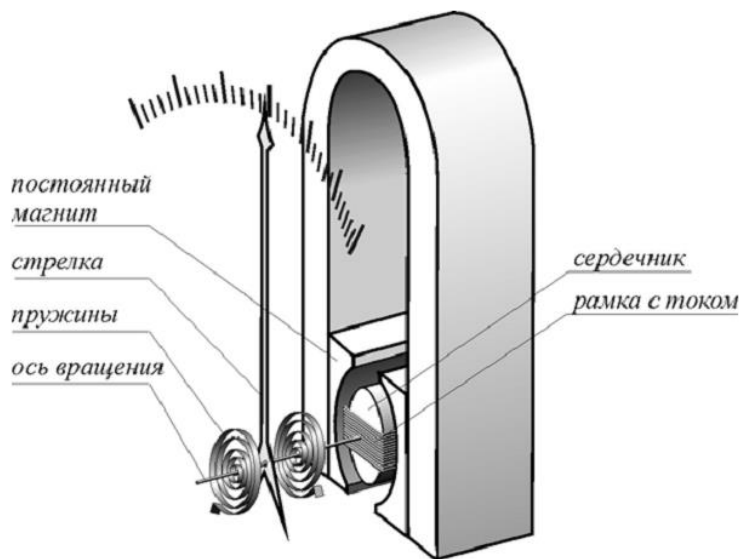
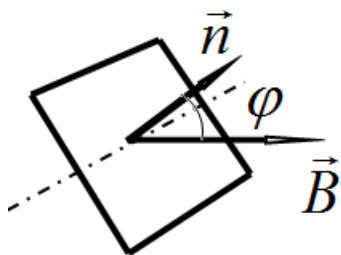


Рис. 2. Устройство прибора магнитоэлектрической системы.



На рамку с током в однородном магнитном поле действует момент силы равный

$$M = IBS \sin \varphi,$$

где I - сила тока в рамке. S - ее площадь, B - индукция магнитного поля, φ - угол между вектором индукции поля и нормалью к рамке.

1.1 При какой ориентации рамки, задаваемой углом φ_0 , в положении равновесия при отсутствии тока, прибор будет работать в режиме близком к линейному, т.е. угол отклонения стрелки от положения равновесия будет пропорционален силе протекающего тока?

Основными характеристиками этого прибора (далее будем называть его гальванометр) являются: электрическое сопротивление рамки r , максимальная допустимая сила тока через рамку I_{\max} , соответствующая отклонению стрелки на всю шкалу, минимальное регистрируемое значение силы тока I_{\min} . Считайте эти величины известными.

Далее вам предстоит сконструировать ряд приборов на основе описанного гальванометра. В вашем распоряжении имеются резисторы, конденсаторы, источники тока любых номиналов. Также следует стремиться к тому, чтобы сконструированный вами прибор работал в режиме,

¹ Рисунки скачаны из Интернета, поэтому на их нумерацию обращать внимание не следует.

близком к линейному, т.е. чтобы сила тока через гальванометр была пропорциональная измеряемой величине.

1.2 Предложите схему вольтметра на основе гальванометра и схему его подключения к измеряемой цепи. Укажите характеристики использованных вами дополнительных элементов. Приведите формулы, по которым можно рассчитать измеряемое напряжение по измеренной силе тока через гальванометр. Укажите диапазон измерения напряжений.

1.3 Предложите схему омметра на основе гальванометра. Укажите характеристики использованных вами дополнительных элементов. Приведите формулы, по которым можно рассчитать измеряемое сопротивление по измеренной силе тока через гальванометр. Укажите диапазон измерения сопротивлений.

Часть 2. Электростатический вольтметр.

Принцип действия электростатического вольтметра основан на втягивании подвижного электрода в зазор между пластинами неподвижного электрода, когда электроды подключаются к источнику измеряемого напряжения.

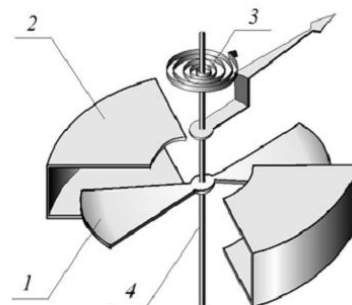
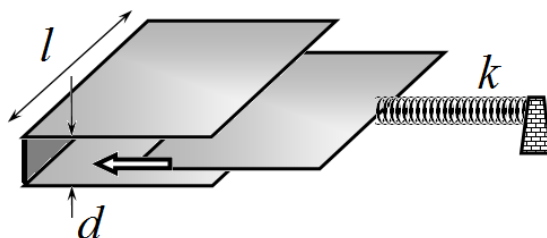


Рис. 5. Конструкция электростатического вольтметра: 1 – подвижный электрод, 2 – неподвижный электрод, 3 – пружина, 4 – ось вращения.

Конструкции таких приборов могут существенно различаться. Поэтому для описания их работы рассмотрим упрощенную модель. Неподвижный электрод представляет собой две соединенные между собой параллельные прямоугольные проводящие пластины со стороной длины l , находящиеся на малом расстоянии d друг от друга. Подвижный электрод представляет такую же пластину, способную вдвигаться в зазор между пластинами неподвижного электрода, оставаясь параллельным им. Эта пластина соединена с неподвижным упором с помощью пружины жесткости k . Измеряемое напряжение U_0 подается на электроды. При этом измеряется смещение подвижной пластины.



2.1 На электроды подано постоянное напряжение U_0 . Найдите силу, которая действует подвижную пластину со стороны электрического поля в зазоре между электродами.

При расчете пренебрегайте краевыми эффектами, т.е. считайте электрическое поле однородным и существующим только в области перекрытия электродов. Напоминаем, что для расчета силы можно применить формулу «из механики»:

$$F = -\frac{\Delta W}{\Delta x},$$

где ΔW - изменение энергии системы при смещении пластины на расстояние Δx . Обращаем ваше внимание: для того, чтобы пластина втягивалась внутрь зазора, необходимо чтобы при этом энергия системы уменьшалась!

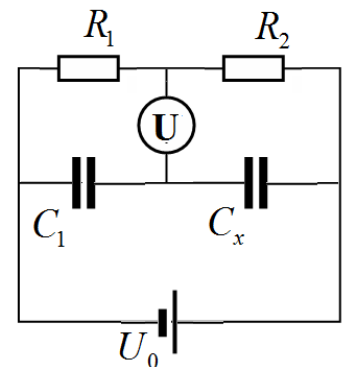
2.2 Найдите зависимость смещения подвижной пластины относительно положения равновесия в зависимости от приложенного напряжения.

2.3 Если полученная зависимость нелинейная, предложите способ ее линеаризовать, т.е. добиться того, чтобы смещение пластины было приблизительно пропорционально предложенному напряжению.

Часть 3. «Фарадометр»

Электростатический конденсатор можно использовать для измерения емкости конденсатора.

Рассмотрите мостовую схему, приведенную на рисунке. Считайте, что значения сопротивлений и емкостей, напряжение источника известны.



3.1 Что покажет вольтметр магнитоэлектрической системы, если его включить в эту цепь?

3.2 Рассчитайте показания электростатического вольтметра, включенного в эту цепь.

Эта схема позволяет реализовать «нулевой» метод балансировки: изменяя сопротивления резисторов R_1 , R_2 , можно добиться того, что напряжение на вольтметре станет равным нулю.

3.3 При каком соотношении между сопротивлениями резисторов и емкостями конденсаторов напряжение на электростатическом вольтметре будет равно нулю?



Республиканская физическая олимпиада 2021 год (Заключительный этап)

Теоретический тур

11 класс.

1. Полный комплект состоит из трех заданий.
2. Для вашего удобства вопросы, на которые Вам необходимо ответить, помещены в рамки.
3. При оформлении работы каждое задание начинайте с новой страницы. При недостатке бумаги обращайтесь к организаторам!
3. Подписывать рабочие листы запрещается.
4. В ходе работы можете использовать ручки, карандаши, чертежные принадлежности, калькулятор.
5. Со всеми вопросами, связанными с условиями задач, обращайтесь к организаторам олимпиады.

Постарайтесь внимательно прочитать условия задач!

Может, вам покажется, что условия задач слишком длинные. Но мы сочинили их такими, чтобы Вам было легче решать. Поверьте, иногда решения короче таких условий! Не теряйте присутствия духа, смело беритесь за решение каждой задачи. Помните, оцениваются не только полные решения, но и их отдельные части и даже отдельные здравые мысли.

Желаем успехов в выполнении данных заданий!

Пакет заданий содержит:

- титульный лист (стр. 1);
- условия 3 теоретических задач (стр. 2-7);

Задание 1. Легкая разминка

Задача 1.1

В комнате объема $V = 250 \text{ м}^3$ находится воздух при температуре $t_0 = 15^\circ\text{C}$. После включения нагревателя температура воздуха поднялась до $t_0 = 25^\circ\text{C}$. Атмосферное давление в комнате осталось неизменным и равным $P = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

- 1.1.1 Найдите изменение внутренней энергии воздуха в комнате при его нагревании?
1.1.2 Оцените, какое количество теплоты пошло на нагревание воздуха.

Молярная теплоемкость воздуха при постоянном объеме равна $C_V = \frac{5}{2}R$, где

$R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ - универсальная газовая постоянная.

Задача 1.2

Однородная плоская мыльная пленка натянута на рамку и освещается нормально плоской монохроматической волной. Пленку медленно растягивают, увеличивая ее площадь, при этом измеряют интенсивность отраженного от пленки света. Можно считать, что объем пленки остается неизменным.

При площади пленки S_0 интенсивность отраженного света достигает максимума. При дальнейшем увеличении площади пленки на величину $\Delta S_1 \ll S_0$ интенсивность отраженного света уменьшилась в 4 раза.

- 1.2 На сколько после этого надо дополнительно увеличить площадь пленки ΔS_2 , чтобы интенсивность отраженного света упала до нуля?

Задача 1.3

Квант рентгеновского излучения с длиной волны $\lambda_0 = 0,55 \text{ нм}$ рассеялся на свободном неподвижном электроне строго назад.

- 1.3 Найдите изменение длины волны $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$ рассеянного кванта.

Расчет проведите с использованием релятивистских формул для характеристик движения электрона. Так энергия электрона E , связана с его импульсом p соотношением:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4,$$

где $c = 3,0 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ - скорость света, $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ - масса покоя электрона, постоянная

Планка $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$.

Задача 2. Негармонические колебания

Часть 1.

Материальная точка массы m может двигаться без трения вдоль оси Ox . Зависимость ее потенциальной энергии от координаты x задается функцией

$$U(x) = ka^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{x^2} - 2 \right), \quad (1)$$

где k и a - известные положительные постоянные величины.

1.1 Постройте схематический график зависимости потенциальной энергии частицы от координаты x .

Точка начинает двигаться без начальной скорости, причем в начальный момент времени $t = 0$ ее координата равна $x = x_0$ ($x_0 > a$).

- 1.2 Покажите, что движение точки будет колебательным. Укажите, будут ли эти колебания гармоническими.
- 1.3 Найдите, в каких пределах будет изменяться координата точки в процессе ее движения.
- 1.4 Найдите период малых колебаний точки, если амплитуда этих колебаний значительно меньше a .
- 1.5 Найдите период очень больших колебаний точки при $x_0 \gg a$.
- 1.6 Покажите, что период колебаний точки не зависит от ее начального положения x_0 .

Подсказка. Рассмотрите зависимость квадрата координаты от времени $z(t) = x^2(t)$. Получите уравнение, описывающее изменение этой величины.

Пусть $x_0 = 3a$.

- 1.7 Найдите закон движения точки, т.е. зависимость ее координаты от времени $x(t)$.
- 1.8 Постройте схематический график зависимости $x(t)$. Для этого используйте относительные координаты $\frac{x}{a}$ и $\frac{t}{T}$, где T - найденный период колебаний точки.

Задача 3. Эффект Эйнштейна-де-Гааза

Момент импульса, момент инерции... небольшое теоретическое введение.

Существует ряд задач, в которых объектом внимания выступает вращательное движение тел. При описании вращательного движения используется такая величина как вектор момент импульса тела \vec{L} . При движении материальной точки массы m по окружности радиуса r со скоростью v модуль момента импульса равен

$$L = mvr \quad (1)$$

Направление вектора совпадает с осью вращения в соответствии с правилом правого винта (см. рис.) Вы встречались с этой величиной при изучении теории Бора (вспомните правило квантования), а также в астрономии при изучении второго закона Кеплера.

Момент импульса системы материальных точек момент импульса равен сумме моментов импульсов отдельных точек.

Для вращающегося с угловой скоростью ω вокруг неподвижной оси тела момент импульса определяется по формуле

$$L = I\omega, \quad (2)$$

Где I - момент инерции тела, зависящей от его массы, размеров и формы. Так момент инерции однородного цилиндра относительно оси симметрии диска, перпендикулярной его плоскости, равен

$$I = \frac{1}{2}mr^2, \text{ где } r - \text{ радиус цилиндра.}$$

Для замкнутой системы суммарный момент импульса сохраняется. Если же на тело действует суммарный момент силы M , то его угловая скорость изменяется в соответствии с уравнением (аналогичным уравнению второго закона Ньютона для поступательного движения):

$$I \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = M. \quad (3)$$

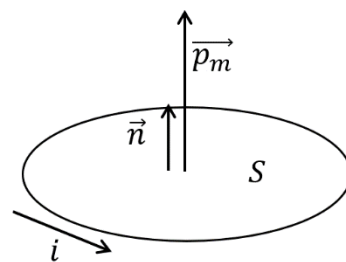
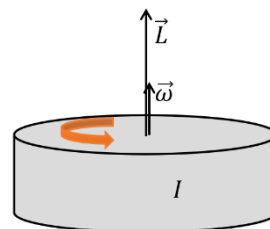
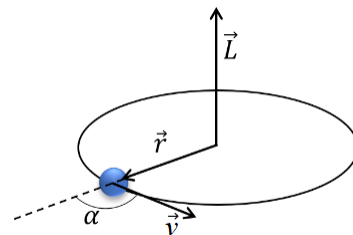
А есть ли какой-нибудь момент в магнетизме?

Для витка с током (и для отдельных атомов в согласии с гипотезой Ампера о молекулярных токах) вводится понятие магнитного момента p_m , который равен произведению силы тока в витке i на площадь витка S :

$$p_m = iS \quad (4)$$

Направлен вектор магнитного момента по нормали к плоскости витка также в соответствии с правилом правого винта.

Этих данных достаточно для ознакомления и осмысления работы А. Эйнштейна, написанной в соавторстве с де Гаазом, в которой описывается открытый ими эффект.



Эффект Эйнштейна-де Гааза.

«С тех пор как Эрстед открыл, что магнитные действия вызываются не только постоянными магнитами, но и электрическими токами, существовали два, казалось, совершенно независимых способа создания магнитного поля. Такое положение вещей влекло за собой стремление считать различие в сущности этих двух источников поля лишь кажущимися и побуждало к попыткам обойтись одной-единственной причиной возбуждения магнитного поля. И вот Ампер, вскоре после открытия Эрстеда, выдвинул свою известную гипотезу молекулярных токов, позволявшую объяснить магнитные свойства (парамагнитных и ферромагнитных веществ) токами, циркулирующими в молекулах.

Так же и электронная теория, особенно в том виде, какой придал ей Г. А. Лоренц,— нуждаясь в едином понимании возникновения электромагнитных полей,— в основном придерживалась гипотезы Ампера. Но по этой теории молекулярные токи, как и вообще все электрические токи, создавались движущимися элементарными зарядами.

Несмотря на то, что эти представления о циркулирующих в атоме и молекуле элементарных зарядах (мыслившихся большей частью в виде отрицательных электронов) позволяли придерживаться единой причины происхождения электромагнитного поля, они все же вызывали самые серьезные принципиальные сомнения.»

А.Эйнштейн «Experimenteller Nachweis der Ampereschen Molekularstrome». (Mit W. J-de Haas.) Verhndl. Dtsch. Phys. Ges., 1915, 17, 152—170.

Данная часть задачи посвящена эффекту Эйнштейна-де Гааза, позволившему в 1915 г. более подробно разобраться с гипотезой Ампера о молекулярных токах, являющихся причиной возникновения магнитных свойств у веществ.

Справочные сведения:

Масса электрона - $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг;

Заряд электрона - $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл;

Рассмотрим классическую модель атома: положительно заряженное ядро, вокруг которого обращаются электроны по стационарным орбитам. Выделим для рассмотрения один электрон, движущийся со скоростью v по круговой орбите радиуса r .

1. Определите момент импульса L электрона.
2. Определите магнитный момент p_m электрона, связанный с его круговым движением вокруг ядра атома.
3. Получите выражение и рассчитайте численное значение для гиромагнитного отношения $g = \frac{p_m}{L}$ — отношения магнитного момента p_m электрона к его моменту импульса L .

Гиромагнитное отношение является одной из важнейших характеристик заряженных и массивных частиц.

Одной из основных задач исследования А. Эйнштейна и В. Де Гааза состояла в экспериментальном определении гиромагнитного отношения g для подтверждения гипотезы Ампера о молекулярных токах.

Макроскопическое проявление микроскопического намагничивания

Изменение характера намагничивания с молекулярной точки зрения описывается достаточно просто: при включении внешнего магнитного поля элементарные магнитные моменты каждого атома тела стремятся выстроиться вдоль направления магнитного поля. Перестройка данной системы приводит к изменению момента импульса каждого из электронов системы. Однако полный момент импульса тела должен остаться неизменным. Следовательно, при изменении направления внешнего магнитного поля из-за «переворота» магнитных моментов, а значит и связанных гиромангнитным отношением моментов импульса электронов, перенамагниченный образец целиком придет во вращение, что можно зафиксировать, например, по отклонению луча света зеркальцем, закрепленным на рассматриваемом образце.

§ 3. Описание экспериментального метода. Соотношение (5) в принципе можно проверить следующим образом. Цилиндр Z из мягкого железа следует подвесить (рис. 2) на тонкой нити F так, чтобы его ось была расположена вертикально и совпадала с направлением нити; период колебаний должен составлять несколько секунд. При этом цилиндр Z должен висеть внутри концентрической катушки S , посредством которой железный цилиндр можно намагничивать параллельно его оси. При изменении направления тока в катушке S , т. е. при перенамагничивании цилиндра, должны наблюдаться крутильные колебания цилиндра Z .

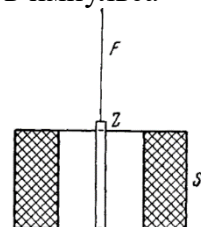
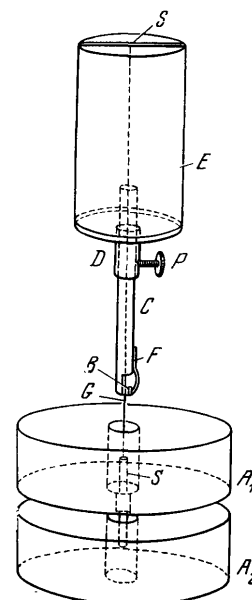


Рис. 2.

4. Запишите, как связаны между собой изменение момента импульса цилиндра с изменением магнитных моментов электронов, вращающихся вокруг атомов.
5. Определите, какую угловую скорость приобретет цилиндр массы m и радиуса r , изготовленный из вещества с молярной массой M в результате изменения направления магнитного поля на противоположное. Считайте, что в каждом атоме вещества имеется ровно один электрон, отвечающий за магнитные свойства, магнитный момент которого равен p_m .

Основной эксперимент.

Для определения гиромангнитного отношения А. Эйнштейн и В. Де Гааз использовали следующую экспериментальную установку: Цилиндрический стерженек S из мягкого железа длиной l и диаметром D подвешивался в вертикальном магнитном переменном поле, создававшемся одинаковыми катушками A_1 и A_2 . Стерженек S подвешивался точно по оси катушек на стеклянной нити G , приклеенной в отверстии на верхнем торце стерженька. Стеклянная нить G диаметром d вверху прикреплялась к поперечному стержню, вставленному в широкую латунную трубку E , удерживаемую штативом. Для изменения действующей длины подвешивающей нити G и для установления резонанса служило следующее приспособление: широкая трубка E внизу имела более узкое горло, внутри которого помещалась передвигаемая вертикально латунная трубка C , фиксируемая винтом P . Трубка C внизу имела зажим B , щеки которого прижимались друг к другу латунной пружиной F . Припаянная горизонтально к нижнему краю одной из щек поперечная проволочка обеспечивала точность зажима подвешивающей нити на строго определенной высоте. На стерженьке S на высоте промежутка между катушками A_1 и A_2 были укреплены два зеркальца, изготовленные из покровных стекол для микроскопа, которые отражали пучок света на шкалу, располагавшуюся на расстоянии x .



Приближения, построенные в ходе экспериментов:

1) Использовался ферромагнитный образец, в котором намагничение быстро достигало насыщения, т.е. все магнитные моменты достаточно быстро перестраивались во внешнем переменном магнитном поле. Было установлено, что при таком режиме механический момент, закручивающий цилиндр, равен $M_3 = \frac{4P_m}{\pi g} \omega \cos \omega t$, где ω - частота переменного тока, пропускаемого через катушку вокруг исследуемого цилиндра, P_m - полный магнитный момент цилиндра при насыщении.

2) Для более точного определения гиромагнитного отношения исследовался резонанс, т.е. явление резкого изменения амплитуды вынужденных колебаний цилиндра, подвешенного на упругой нити, при совпадении частоты переменного магнитного поля с собственной частотой ω_0 крутильных колебаний цилиндра.

3) На вращающийся цилиндр действует момент сил вязкого трения прямо пропорциональный угловой скорости вращения цилиндра $M_{\text{тр}} = -k\omega$ (k - известный коэффициент пропорциональности).

6. На основании приближений, сформулированных в работе, составьте уравнение, описывающее динамику вращательного движения цилиндра в переменном магнитном поле.

Полученное вами уравнение представляет собой уравнение вынужденных колебаний. Спустя длительный промежуток времени зависимость угловых колебаний цилиндра описывается функцией $\alpha(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$.

7. Найдите решение уравнения колебаний стержня при условии резонанса, когда частота изменения магнитного поля совпадает с собственной частотой колебаний стержня, т.е. определите параметры A и φ в законе движения.

Численные значения параметров установки, представленные в работе, следующие: $I = 0,0126$, $P_m = 458$, $|\alpha|_{\text{max}} = 0,320 \cdot 10^{-2}$, $k = 2,1 \cdot 10^{-6}$. Все данные представлены в одной системе единиц.

8. Определите по этим данным гиромагнитное отношение. Сравните полученный результат с результатом, рассчитанным в п. 3 данной задачи.

Следует отметить, что спустя несколько лет после выхода статьи А. Эйнштейна в свет было установлено, что полученные результаты не совсем корректны. («великие» тоже ошибаются!). Оказалось, что полученное значение гиромагнитного отношения занижено примерно в два раза. Последующие более точные эксперименты также дали значение примерно в два раза превышающее приведенное в рассматриваемой работе.

9. Предложите гипотезу, объясняющую вновь найденное значение гиромагнитного отношения.

Задание 9-1. Разминка

Задача 1.1

1.1.1 В данном случае вода будет выкипать, до тех пор пока температура цилиндра не опустится до температуры кипения воды $t_0 = 100^\circ\text{C}$. Поэтому теплота, выделившаяся при остывании цилиндра полностью, поэтому уравнение теплового баланса в данном случае будет иметь вид:

$$c_2 m_2 \Delta t = L \Delta m_1. \quad (1)$$

Масса алюминиевого цилиндра равна

$$m_2 = \rho_2 V, \quad (2)$$

а массу испарившейся воды можно выразить через изменение высоты уровня воды

$$\Delta m_1 = \rho_1 S \Delta h_1. \quad (3)$$

Подставим эти выражения в уравнение (1):

$$c_2 \rho_2 V \Delta t = L \rho_1 S \Delta h_1. \quad (4)$$

Откуда находим, что уровень воды в сосуде понизится на величину

$$\Delta h_1 = \frac{c_2 \rho_2 V \Delta t}{L \rho_1 S}. \quad (5)$$

1.1.2 При заданных начальных условиях лед будет намерзать на цилиндр, а так плотность льда меньше плотности цилиндра, то уровень воды в сосуде будет повышаться. Уравнение теплового баланса в этом случае имеет вид

$$c_2 m_2 \Delta t = \lambda \Delta m_1. \quad (6)$$

Массу намерзшего льда в данном случае также можно выразить через изменение уровня воды в сосуде:

$$\frac{\Delta m_1}{\rho_3} - \frac{\Delta m_1}{\rho_1} = S \Delta h_2 \Rightarrow \Delta m_1 = S \Delta h_2 \frac{\rho_3 \rho_1}{\rho_1 - \rho_3}. \quad (7)$$

Подстановка этих значений в уравнение (6) дает

$$c_2 \rho_2 V \Delta t = \lambda S \Delta h_2 \frac{\rho_3 \rho_1}{\rho_1 - \rho_3}. \quad (8)$$

Отсюда находим повышение уровня воды

$$\Delta h_2 = \frac{c_2 \rho_2 V \Delta t}{\lambda S \rho_1} \frac{\rho_1 - \rho_3}{\rho_3}. \quad (9)$$

1.1.3 Отношение изменения высот равно

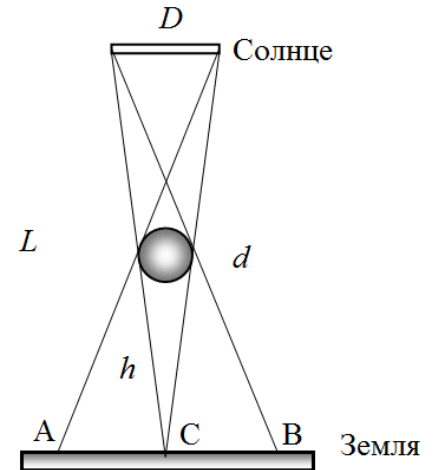
$$\frac{\Delta h_2}{\Delta h_1} = \frac{L}{\lambda} \frac{1 - \frac{\rho_3}{\rho_1}}{\frac{\rho_3}{\rho_1}} \approx 7 \frac{0,1}{0,9} = 0,8 \quad (10)$$

Задача 1.2

Нарисуем ход крайних лучей, идущих от краев Солнца и падающих на края шарика. Тогда внешние лучи указывают края полутени (AB), а внутренние – область полной тени (на рисунке это точка C)

1.2.1 Из рисунка следует, что область тени на земле исчезнет, если угловой размер шарика станет равным угловому размеру Солнца, т.е. при

$$\frac{d}{h} = \varphi \Rightarrow h = \frac{d}{\varphi} = \frac{10 \text{ м}}{\frac{\pi}{180} \frac{32'}{60'}} \approx 1,1 \text{ км}. \quad (1)$$



1.2.2 Построенный рисунок можно использовать и для вычисления размеров светового зайчика. Из построенного рисунка следует, что диаметр светового зайчика AB примерно (но с высокой точностью) равен

$$d_1 = h\varphi \quad (2)$$

Это же выражение можно получить, рассматривая отверстие, как точечное, тогда солнечный «зайчик» является изображением Солнца в камере-обскуре. Если высота определяется по формуле (1), то диаметр зайчика равен диаметру отверстия:

$$d_1 = d = 10 \text{ м}. \quad (3)$$

Задача 9-2. Наклонная плоскость

Основная сложность анализа движения тел в этой системе заключается в том, что заранее не известно направление векторов сил трения. Понятно, что сила трения направлена в сторону, противоположную вектору относительной скорости трущихся тел. Кроме того, следует учесть, что трение в данной системе может быть как трением скольжения, так и трением покоя. Поэтому наиболее разумным путем анализа различных вариантов движения является следующий: сделать предположение о направлении движения тел, найти соответствующие значения ускорений и на основании полученных формул, сформулировать условия, при которых реализуется рассматриваемый режим.

Прежде всего, заметим, что при заданных численных значениях выполняются условия:

- а) $\mu_0 > \tan \alpha$, поэтому ящик не будет скользить по поддону, если последний покоится, или скользит вниз;
- б) $\mu_1 < \tan \alpha$, поддон может скользить по наклонной плоскости под действием силы тяжести. Это наблюдение позволяет упростить анализ возможных вариантов движения. Будем их рассматривать последовательно по мере увеличения массы повешенного груза M .

Сделаем еще несколько общих замечаний, применимых ко всем режимам движения.

Как известно, сила трения скольжения (она же максимальная сила трения покоя) определяется законом Кулона – Амонтона:

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \quad (1)$$

Где N - сила нормальной реакции. В нашем случае наклонная плоскость всегда неподвижна, поэтому векторы ускорений всегда направлены параллельно наклонной плоскости. Поэтому сила нормальной реакции, действующая на любое тело, движущееся по наклонной плоскости, равна

$$N = mg \cos \alpha. \quad (2)$$

Поэтому модуль силы трения скольжения (т.е. когда тело движется) равен

$$F_{\text{тр}} = \mu mg \cos \alpha \quad (3)$$

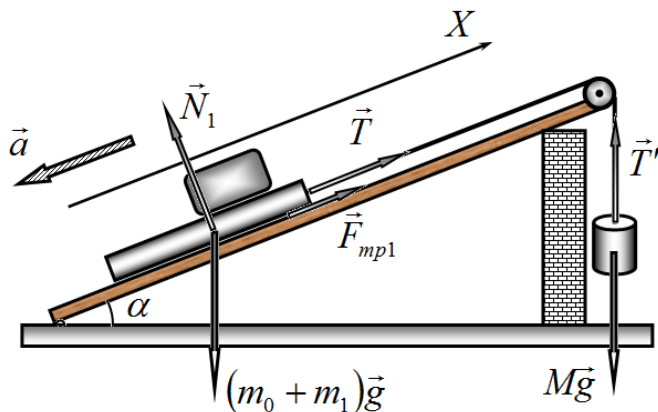
А модуль силы трения покоя (когда тело не движется по поверхности) удовлетворяет условию:

$$|F_{\text{тр покоя}}| \leq \mu mg \cos \alpha. \quad (4)$$

1. Приступим теперь к анализу возможных режимов движения, последовательно мысленно увеличивая массы повешенного груза,

Режим 1. Поддон скользит вниз по наклонной плоскости.

Предположим, что поддон скользит вниз по наклонной плоскости, а ящик не движется по поддону (т.е. ящик и поддон движутся как единое целое). В этом случае силы, действующие на поддон с ящиком, и силы, действующие на подвешенный груз, направлены так, как показано на рисунке.



Тогда на основании 2 закона Ньютона можно записать уравнения для описания движения поддона с полезным грузом в проекции на ось X :

$$(m_1 + m_0)a = T - (m_1 + m_0)g \sin \alpha + \mu_1(m_1 + m_0)g \cos \alpha . \quad (5)$$

здесь T - модуль силы натяжения веревки, $\mu_1(m_1 + m_0)g \cos \alpha$ - модуль силы трения, действующей на поддон.

Для подвешенного груза аналогичное уравнение имеет вид:

$$Ma = Mg - T . \quad (6)$$

Заметим, что модуль силы натяжения веревки действующий на этот груз равен модулю силы натяжения, действующей на поддон, потому, что: веревка и блок невесомы, сила трения в оси блока отсутствуют. Модули ускорений равны потому, что веревка нерастяжима.

Из уравнений (5)-(6) находим, что в этом режиме проекция ускорения поддона и полезного груза равна

$$a = \frac{M - (m_1 + m_0)(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{(m_1 + m_0 + M)} g . \quad (7)$$

Это выражение будет справедливо, если эта проекция отрицательна (т.е. действительно поддон скользит вниз по наклонной плоскости). Следовательно, этот режим реализуется при

$$a < 0 \Rightarrow M < (m_1 + m_0)(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) = 8,2 \text{ кг} \quad (8)$$

Покажем, что в этом режиме m_0 действительно будет покоиться относительно поддона.

Если этот груз движется вниз вместе с поддоном с некоторым ускорением a , то для него справедливо уравнение (в проекции на наклонную плоскость «вниз»)

$$m_0 a = m_0 g \sin \alpha - F_{mp0} . \quad (9)$$

Из этого уравнения следует, что сила, трения действующая на груз должна быть равна

$$F_{mp0} = m_0 g \sin \alpha - m_0 a \quad (10)$$

В рассмотренном режиме ускорение изменяется от нуля до максимального значения $a_{\max} = g(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha)$. Следовательно, сила трения должна изменяться от $F_{mp0} = m_0 g \sin \alpha$ до $F_{mp0} = \mu_1 m_0 g \cos \alpha$. Во всем этом диапазоне сила трения меньше, чем максимальная сила трения покоя $F_{mp \max} = \mu_0 m_0 g \cos \alpha$, следовательно, груз скользить по поддону не будет.

Отметим, что для такого скольжения поддон надо тянуть вниз с некоторой заметной силой (вычисление которой не требуется по условию задачи).

Если масса повешенного груза превысит значение, задаваемое условием (8), то система перейдет в следующий режим 2.

Режим 2. Поддон с грузом покоится.

Верхнюю границу этого режима найдем, как нижнюю границу режима 3.

Режим 3. Поддон движется вверх по наклонной плоскости, ящик движется вместе с ним (т.е. не проскальзывает по поддону).

В этом режиме изменится на противоположное направление силы трения, действующей на поддон со стороны наклонной плоскости. Поэтому в уравнении (5) достаточно изменить знак перед слагаемым, описывающим проекцию силы трения, а уравнение для движения подвешенного груза останется неизменным. Таким образом, система уравнений, описывающих движение в данном режиме, имеет вид

$$\begin{cases} (m_1 + m_0)a = T - (m_1 + m_0)g \sin \alpha - \mu_1(m_1 + m_0)g \cos \alpha \\ Ma = Mg - T \end{cases} \quad (11)$$

Из этих уравнений следует, что ускорение поддона (и равное ему ускорения ящика) описывается формулой

$$a = \frac{M - (m_1 + m_0)(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{(m_1 + m_0 + M)} g. \quad (12)$$

Эта формула справедлива при $a > 0$, или при

$$M > (m_1 + m_0)(\sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha) = 16,8 \text{ кг}. \quad (13)$$

Если масса подвешенного груза лежит в интервале между найденными граничными значениями (8) и (13) поддон с ящиком будут покоиться.

При увеличении массы подвешенного груза M ускорение поддона с ящиком будет возрастать. Однако, силой, которая непосредственно «разгоняет» ящик является сила трения, действующая на него со стороны поддона. Поэтому при некотором ускорении поддона, силы трения будет не достаточно, что сообщить такое же ускорение ящику, поэтому ящик начнет скользить по поддону. Поэтому появляется следующий режим движения.

Режим 4. Поддон движется вверх, ящик проскальзывает по поддону.

На рисунке показаны направления сил, действующих на движущиеся тела в рассматриваемой системе. Уравнение, описывающее движение ящика при его проскальзывании по поддону, записывается в виде

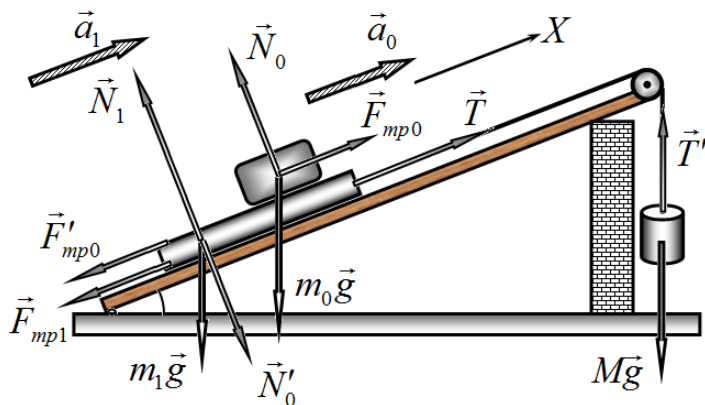
$$m_0 a_0 = \mu_0 m_0 g \cos \alpha - m_0 g \sin \alpha, \quad (14)$$

где $\mu_0 m_0 g \cos \alpha$ - модуль силы трения, действующей между ящиком и поддоном. Из уравнения (14) следует, что ускорения ящика в этом режиме остается постоянным и равным

$$a_0 = (\mu_0 \cos \alpha - \sin \alpha)g = 0,63 \frac{M}{c^2}, \quad (14)$$

Уравнение движения поддона в проекции на ось X в этом режиме имеет вид:

$$m_1 a_1 = T - m_1 g \sin \alpha - \mu_0 m_0 g \cos \alpha - \mu_1 (m_0 + m_1) g \cos \alpha. \quad (15)$$



Добавляя уравнение движения подвешенного груза

$$Ma_1 = Mg - T \quad (16)$$

И решая полученную систему уравнений, получим формулу для ускорения поддона (и подвешенного груза):

$$a_1 = \frac{M - m_1 \sin \alpha - \mu_0 m_0 \cos \alpha - \mu_1 (m_0 + m_1) \cos \alpha}{m_1 + M} g. \quad (17)$$

Эта формула для ускорения поддона справедлива, если это ускорение превышает максимально возможное ускорение ящика, задаваемое формулой (14), т.е. при

$$\frac{M - m_1 \sin \alpha - \mu_0 m_0 \cos \alpha - \mu_1 (m_0 + m_1) \cos \alpha}{m_1 + M} g > (\mu_0 \cos \alpha - \sin \alpha) g. \quad (18)$$

Это неравенство будет выполняться, если масса подвешенного груза превысит значение

$$M > \frac{(\mu_0 + \mu_1)(m_0 + m_1) \cos \alpha}{1 - \mu_0 \cos \alpha + \sin \alpha} = 19,6 \text{ кг} \quad (19)$$

Подведем итог: ускорение поддона описывается функцией:

$$a_1 = \begin{cases} \frac{M - (m_1 + m_0)(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{(m_1 + m_0 + M)} g = \frac{M - 8,2}{25 + M} g; & \text{при } M < 8,2 \text{ кг} \\ 0; & \text{при } 8,2 \text{ кг} < M < 16,8 \text{ кг} \\ \frac{M - (m_1 + m_0)(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{(m_1 + m_0 + M)} g = \frac{M - 16,8}{25 + M} g & \text{при } 16,8 \text{ кг} < M < 19,6 \text{ кг} \\ \frac{M - m_1 \sin \alpha - \mu_0 m_0 \cos \alpha - \mu_1 (m_0 + m_1) \cos \alpha}{m_1 + M} g = \frac{M - 18,1}{5 + M} g & \text{при } M > 19,6 \text{ кг} \end{cases} \quad (20)$$

Ускорение ящика задается функцией

$$a_0 = \begin{cases} a_1 & \text{при } M < 19,6 \text{ кг} \\ (\mu_0 \cos \alpha - \sin \alpha) g = 0,63 \frac{M}{c^2} & \text{при } M > 19,6 \text{ кг} \end{cases} \quad (21)$$

2. Графики полученных зависимостей показаны на рисунке. Пунктиром обозначен участок графика зависимости ускорения ящика, когда оно отличается от ускорения поддона.



3. Понятно, что рациональным выбором массы подвешенного груза является участок от точки 3 до точки 4 (в режиме 3 по нашей терминологии), когда ящик поднимается и не скользит по поддону. По-видимому, не следует затрачивать лишних усилий и заставлять ящик двигаться с ускорением, поэтому наиболее разумно выбрать значение массы, соответствующее начальной точке этого участка, т.е.

$$M = 16,8 \text{ кг}, \quad (22)$$

Точнее, чуть больше!

4. КПД будет максимальным при указанном значении массы $M = 16,8 \text{ кг}$. При меньшей массе ящик не будет подниматься, а при большей — часть энергии опускающегося груза будет преобразовываться в кинетическую энергию движения ящика и поддона.

Если подвешенный груз опустится на некоторое расстояние Δh , то ящик поднимется на высоту $\Delta h_0 = \Delta h \sin \alpha$. Поэтому КПД установки в этом случае будет равен

$$\eta = \frac{m_0 g \Delta h_0}{M g \Delta h} = \frac{m_0 \sin \alpha}{M} \approx 60\%. \quad (23)$$

Очевидно, что данная величина заметно меньше 1 по двум причинам: необходимость преодоления сил трения и «бесполезный» подъем поддона.

Задача 9-3. Систематические погрешности электрических схем

Часть 1. Погрешность делителя напряжения.

1.1 Расчет напряжений проводится с использованием закона Ома и законов последовательного и параллельного соединения проводников. Так

$$U_1 = U_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (1)$$

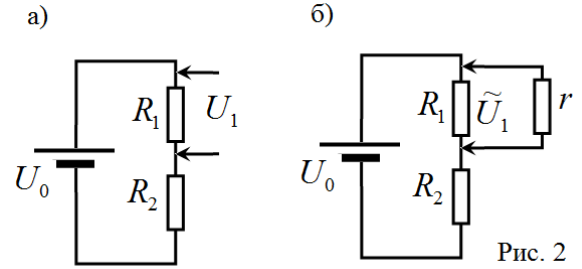


Рис. 2

Для расчета напряжения при подключении исследуемой цепи r в формуле (1) сопротивление R_1 заменить сопротивлением \tilde{R}_1 параллельно соединенных резистора R_1 и исследуемой цепи сопротивлением r . При этом

$$\frac{1}{\tilde{R}_1} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{r}. \quad (2)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1 &= U_0 \frac{\tilde{R}_1}{\tilde{R}_1 + R_2} = U_0 \frac{1}{1 + \frac{R_2}{\tilde{R}_1}} = U_0 \frac{1}{1 + R_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{r} \right)} = U_0 \frac{1}{1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{r}} = \\ &= \frac{U_0}{1 + \frac{R_2}{R_1}} \left(1 + \frac{R_1 R_2}{r(R_1 + R_2)} \right)^{-1} \approx \frac{U_0 R_1}{R_1 + R_2} \left(1 - \frac{R_1 R_2}{r(R_1 + R_2)} \right) = U_1 \left(1 - \frac{R_1 R_2}{r(R_1 + R_2)} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

При выводе учтено, что для малого изменения напряжения должно выполняться условие $r \gg R_1, R_2$. На сколько это меньше, показывает формула (3), из которой следует, что относительное изменение напряжения равно

$$\varepsilon_v = \left| \frac{U_1 - \tilde{U}_1}{U_1} \right| = \frac{R_1 R_2}{r(R_1 + R_2)}. \quad (4)$$

Указанное изменение напряжение не превысит указанную величину при выполнении условия

$$\frac{R_1 R_2}{r(R_1 + R_2)} < \varepsilon_v \Rightarrow r > \frac{R_1 R_2}{\varepsilon_v (R_1 + R_2)}. \quad (5)$$

При $R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом}$ и $\varepsilon_v = 0,01$

$$r > 500 \text{ Ом}. \quad (6)$$

Часть 2. Погрешность, вносимая амперметром

2.1 Силы тока в приведенных цепях рассчитываются элементарно:

$$I = \frac{U_0}{r}$$

$$\tilde{I} = \frac{U_0}{r + R_A} \approx \frac{U_0}{r} \left(1 - \frac{R_A}{r} \right) \quad (6)$$

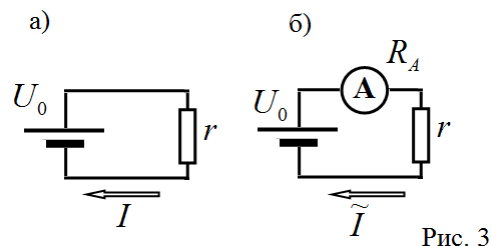


Рис. 3

Таким образом, относительное изменение силы тока при подключении амперметра равно

$$\varepsilon_A = \left| \frac{I - \tilde{I}}{I} \right| = \frac{R_A}{r} \quad (7)$$

Указанное требование будет выполнено, при

$$\frac{R_A}{r} < \varepsilon_A \quad R_A < \varepsilon_A r = 0,10 \text{ Ом} \quad (8)$$

Часть 3. Погрешность, вносимая вольтметром.

3.1 Для решения этой части задачи достаточно заметить, что рассматриваемые здесь схемы полностью эквивалентны схемам, рассмотренным в Части 1. Поэтому можно воспользоваться результатами, полученными в этой части, если сопротивление r заменить на сопротивление вольтметра R_V . Тогда относительное изменение напряжения не превысит 1% при выполнении условия

$$\frac{R_1 R_2}{R_V (R_1 + R_2)} < \varepsilon_V \Rightarrow R_V > \frac{R_1 R_2}{\varepsilon_V (R_1 + R_2)} = 500 \text{ Ом} \quad (9)$$

Часть 4. Корректировка измеренной ВАХ

4.1 В использованной схеме показания вольтметра равны напряжению на исследуемом элементе

$$U = \tilde{U} \quad (10)$$

Амперметр показывает сумму сил токов через исследуемый элемент и вольтметр:

$$\tilde{I} = I + I_A \quad (11)$$

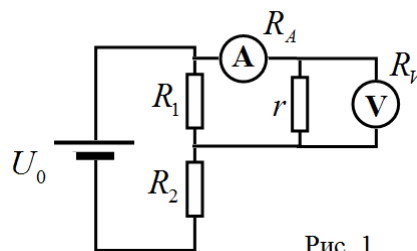


Рис. 1

Таким образом, для корректировки полученной зависимости необходимо из показаний амперметра вычесть силу тока через амперметр, которая рассчитывается по закону Ома:

$$I = \tilde{I} - \frac{\tilde{U}}{R_V} \quad (12)$$

Необходимые расчеты и скорректированный график приведены в таблице и на бланке. На этом графике: верхняя кривая – исходный график; нижняя прямая – зависимость силы тока через вольтметр от напряжения, средняя кривая – «истинный» график вольтамперной характеристики исследуемого элемента.

Бланк к задаче 3 (Часть 4)

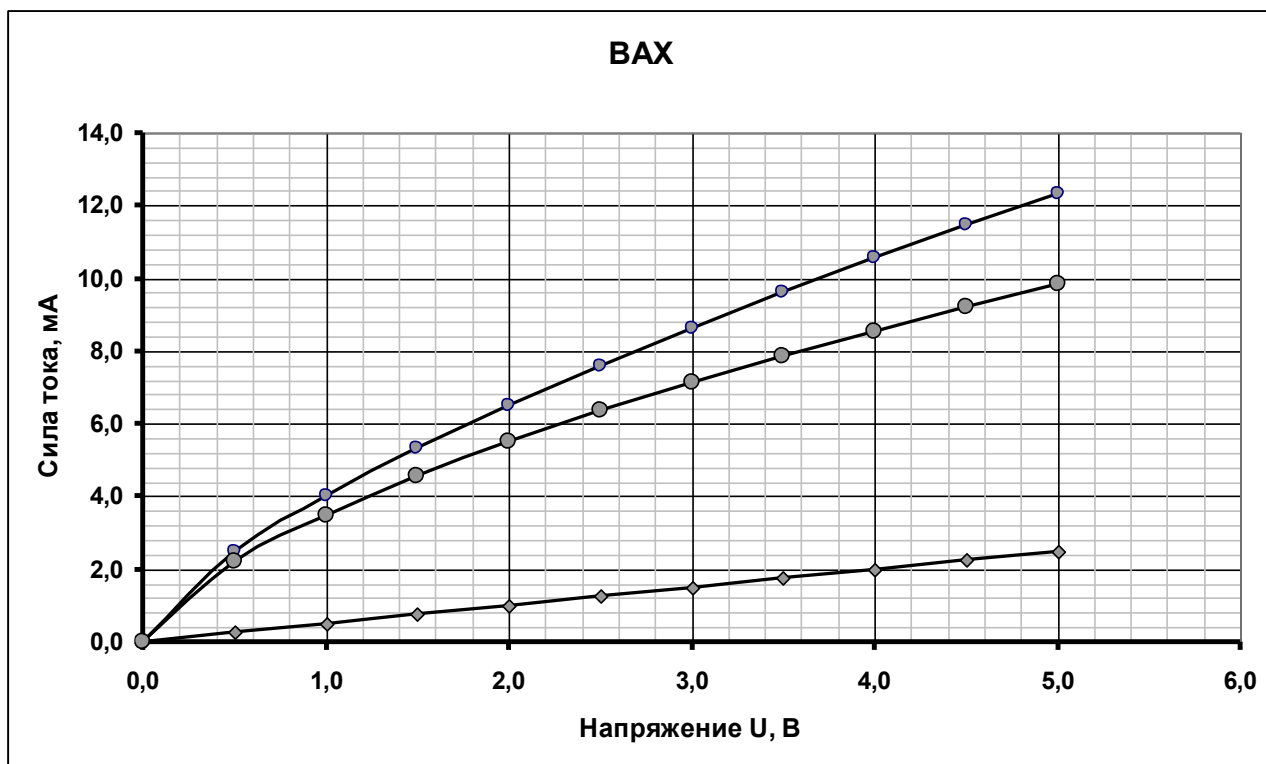


Таблица 1.

\tilde{U} , В	\tilde{I} , мА	I_V , мА	I_r , мА		
0,00	0,00	0,00	0,00		
0,50	2,46	0,25	2,21		
1,00	4,00	0,50	3,50		
1,50	5,31	0,75	4,56		
2,00	6,50	1,00	5,50		
2,50	7,60	1,25	6,35		
3,00	8,63	1,50	7,13		
3,50	9,61	1,75	7,86		
4,00	10,56	2,00	8,56		
4,50	11,46	2,25	9,21		
5,00	12,34	2,50	9,84		

Расчетные формулы

Сила тока через вольтметр: $I_V = \frac{\tilde{U}}{R_V}$.

Сила тока через исследуемый элемент $I_r = \tilde{I} - I_V$.

Задача 1. Привязанная тележка

Часть 1. «Высокий блок»

1.1 За малый промежуток времени Δt тележка сместится вправо по горизонтали на расстояние $u_1 \Delta t$. При этом длина нити уменьшится на величину $v \Delta t$. Из соответствующего прямоугольного треугольника получаем

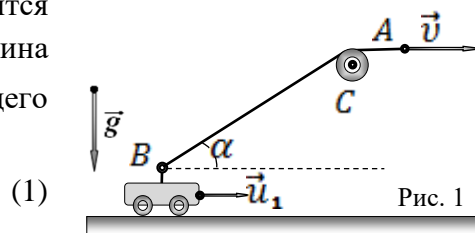
$$v \Delta t = u_1 \Delta t \cos \alpha.$$

Из (1) находим искомую зависимость

$$u_1(\alpha) = \frac{v}{\cos \alpha}. \quad (2)$$

1.2 Используя (2), найдем искомые значения скоростей тележки на бесконечности и при $\alpha = 35^\circ$:

$$u_1 = v; \quad u_1 = 1,22v$$



Часть 2. «Подвижный блок»

2.1 Поскольку нить ABC нерастяжима, то длина ломаной ABC при движении тележки остаётся постоянной. Следовательно, уменьшение длины одного звена ломаной за некоторый промежуток времени должно равняться увеличению длины её второго звена.

Пусть за небольшой промежуток времени Δt тележка сместится вправо на расстояние $u \Delta t$. При этом длина участка AB нити уменьшится на величину (Рис. 2)

$$\Delta l_{AB} = u \Delta t \cos \alpha. \quad (5)$$

С другой стороны, длина участка BC нити за этот же промежуток времени увеличится на Δl_{BC}

$$\Delta l_{BC} = (v - u) \Delta t. \quad (6)$$

Приравняв (5) и (6) по условию не растяжимости нити, получим

$$\Delta l_{AB} = \Delta l_{BC} \Rightarrow u \Delta t \cos \alpha = (v - u) \Delta t. \quad (7)$$

Из (7) находим искомую зависимость $u_4(\alpha)$

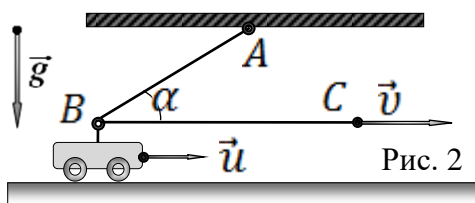
$$u_4(\alpha) = \frac{v}{1 + \cos \alpha}. \quad (8)$$

2.2 Используя (8), найдем искомые значения скоростей тележки на бесконечности и при $\alpha = 35^\circ$

$$u_5 = u_4(\alpha = 0^\circ) = \frac{v}{1 + \cos 0^\circ} = \frac{v}{2} = 0,75 \frac{\text{м}}{\text{с}}, \quad (9)$$

$$u_6 = u_4(\alpha = 35^\circ) = \frac{v}{1 + \cos 35^\circ} = 0,82 \frac{\text{м}}{\text{с}}. \quad (10)$$

Заметим, что полученное значение (9) можно было найти и без использования (8), поскольку u_5 соответствует случаю подвижного блока, на котором «проигрывают» в скорости в два раза.



Часть 3. «Низкий блок»

3.1 Данная часть задачи самая простая, поскольку при такой схеме вытяжки тележки её скорость независимо от угла α всегда будет равна по модулю скорости нити.

Задача 2. Картезианский водолаз.

Часть 1. Вынужденное погружение.

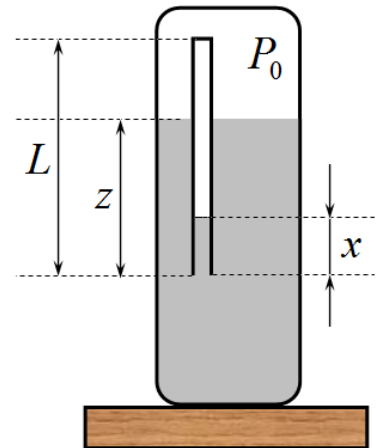
1.1 Так как температура воздуха в трубке и его масса не изменяются, то для этого воздуха справедлив закон Бойля-Мариотта:

$$P_0 L = P(L - x) \quad (1)$$

С другой стороны давление воздуха в трубке можно выразить через гидростатическое давление воды:

$$P = P_0 + z - x \quad (2)$$

Здесь, как сказано в условии, давление воздуха измеряется в метрах водяного столба.



В этих уравнениях две неизвестные величины: давление воздуха в трубке P и высота x , поэтому эта система может быть решена:

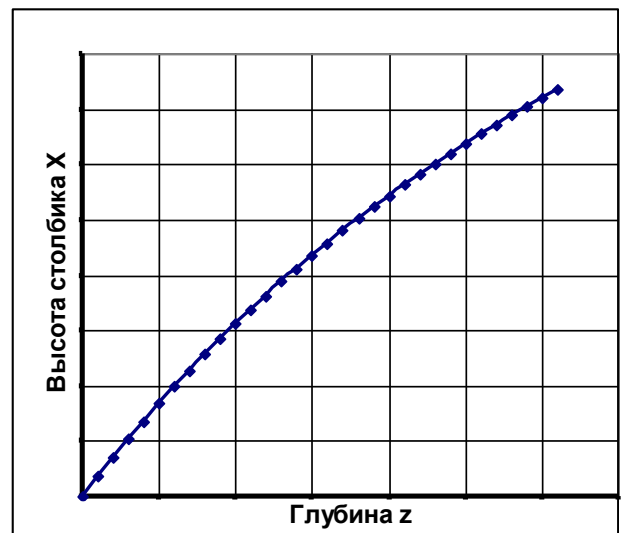
$$\begin{aligned} P_0 L &= (P_0 + z - x)(L - x) \Rightarrow \\ x^2 - (P_0 + z)x - Lx + (P_0 + z)L - P_0 L &= 0 \Rightarrow \\ x^2 - (P_0 + z + L)x + zL &= 0 \Rightarrow \\ x_{1,2} &= \frac{(P_0 + z + L)}{2} \pm \sqrt{\frac{(P_0 + z + L)^2}{4} - zL} \end{aligned} \quad (3)$$

Из двух корней следует выбрать корень со знаком минус. В качестве обоснования такого выбора можно привести следующий: при $z = 0$ высота x также должна равняться нулю.

Поэтому окончательно получим

$$x(z) = \frac{(P_0 + z + L)}{2} - \sqrt{\frac{(P_0 + z + L)^2}{4} - zL}. \quad (4)$$

Схематический график этой зависимости показан на рисунке: при увеличении z , величина x монотонно стремится к L .



1.2 Силу Архимеда можно выразить по известной формуле, как вес вытесненной воды. Однако, необходимо рассмотреть два случая:

А) Глубина погружения меньше длины пробирки $z < L$. В этом случае

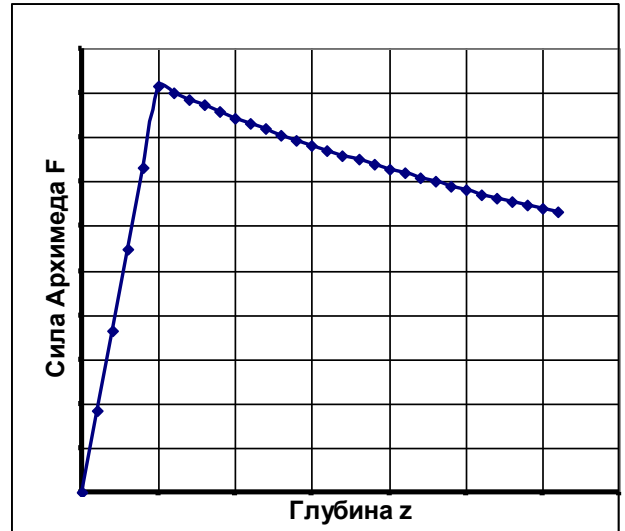
$$F_A = \rho g s(z - x) \quad (5)$$

Так как x растет медленнее, чем z , то в этом случае сила Архимеда возрастает при увеличении z .

Б) Глубина погружения больше длины пробирки $z > L$. В этом случае

$$F_A = \rho g s(L - x). \quad (6)$$

В этом случае сила Архимеда с ростом z убывает.
Схематический график этой зависимости показан на следующем рисунке.



1.3 Таким образом, сила Архимеда принимает максимальное значение при $z = L$.
Как следует из формулы (4), при этом величина x будет равна

$$x(z) = \frac{(P_0 + 2L)}{2} - \sqrt{\frac{(P_0 + 2L)^2}{4} - L^2} = \frac{(P_0 + 2L)}{2} - \sqrt{\frac{P_0^2 + 4P_0L}{4}},$$

а максимальное значение силы Архимеда :

$$\begin{aligned} F_{A \max} &= \rho g s (L - x) = \rho g s \left(L - \frac{(P_0 + 2L)}{2} + \sqrt{\frac{P_0^2 + 4P_0L}{4}} \right) = \\ &= \rho g s \left(\sqrt{\frac{P_0^2 + 4P_0L}{4}} - \frac{P_0}{2} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

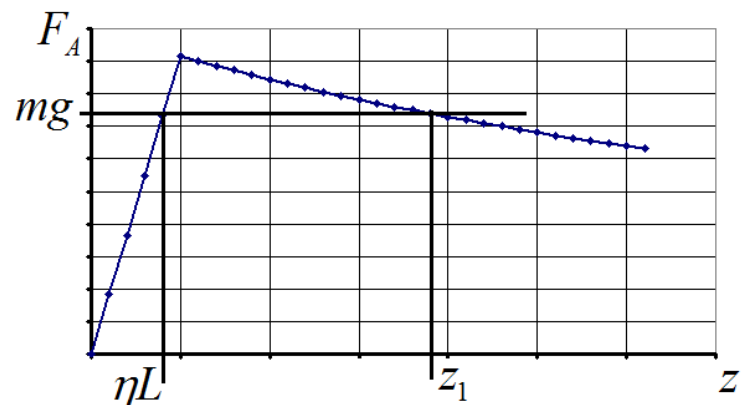
Заметим, что при $P_0 \gg L$ это максимальное значение стремится к L . Действительно, в этом приближении изменение давление воздуха в трубке при погружении пренебрежимо мало, поэтому можно считать, что воздух занимает всю трубку.

1.4 Силу Архимеда можно выразить как разность сил давлений на закрытый верхний торец трубки, поэтому

$$F_A = (P - (P_0 + \rho g(z - L)))s, \quad (8)$$

что, конечно, равносильно использованному ранее подходу.

1.5 На графике зависимости силы Архимеда от глубины погружения отметим уровень силы тяжести. Для этого проведем вертикальную линию $z = \eta L$ до пересечения с графиком зависимости силы Архимеда от глубины. В точке пересечения эта сила будет равна силе тяжести. Далее проведем горизонтальную линию на уровне силы тяжести до пересечения со второй ветвью графика. Абсцисса этой



точки и будет искомая глубина z_1 . Легко показать, что положение равновесия в точке z_1 является неустойчивым, поэтому, если глубина погружения станет чуть больше, чем z_1 , трубка утонет. Таким образом, для расчета этой глубины необходимо решить следующее уравнение

$$F_A(\eta L) = F_A(z_1). \quad (9)$$

Используя полученные формулы для силы Архимеда, получим требуемое уравнение:

$$(z - x)_0 = (L - x(z_1)) \Rightarrow$$

$$h_0 = L - \frac{(P_0 + z + L)}{2} + \sqrt{\frac{(P_0 + z + L)^2}{4} - zL} \quad (10)$$

где обозначено

$$h_0 = (z - x)_0 = \eta L - \frac{(P_0 + \eta L + L)}{2} - \sqrt{\frac{(P_0 + \eta L + L)^2}{4} - \eta L^2} \quad (11)$$

Высота столбика воздуха в трубке, когда она плавает на поверхности.

Данное уравнение очень громоздко. Одна при данных заданных в условии величина $L \ll P_0$. Так $P_0 = 10 \text{ м}$, а $L = 0,10 \text{ м}$. Поэтому можно пренебречь изменением давления на высоте трубки. В этом случае $h_0 \approx L$ - при погружении трубки на ее высоту объем воздуха в ней остается неизменным. В положении равновесия сила Архимеда, а следовательно, и сила тяжести трубки равны $mg = \rho g s \eta L$. При погружении на глубину z давление в трубке становится равным $(P_0 + z)$, поэтому высота столба воздуха в трубке оказывается равной

$$P_0 L = (P_0 + z)h \Rightarrow h = \frac{P_0 L}{(P_0 + z)} \quad (12)$$

При этом сила Архимеда должна стать равной силе тяжести

$$\rho g s h = \rho g s \eta L \Rightarrow \frac{P_0 L}{(P_0 + z)} = \eta L. \quad (13)$$

Из этого уравнения элементарно находим

$$z = \frac{1 - \eta}{\eta} P_0 = 2,5 \text{ м}. \quad (14)$$

Часть 2 данной задачи решается аналогично, только в записанных уравнениях следует рассматривать зависимость параметров не от z , а от давления воздуха в сосуде P_1 .

Часть 3 Конструкторская, предоставляет богатые возможности для творчества. Однако основными идеями являются: помещение трубки в закрытый сосуд, и предварительное наполнении трубки водой, так чтобы она плавала «на грани» - при незначительном изменении объема сосуда (а, следовательно, и объема воздуха в трубке) трубка начинала тонуть.

Задача 3. Амперметр, вольтметр, омметр и пр.

Часть 1. Приборы магнитоэлектрической системы.

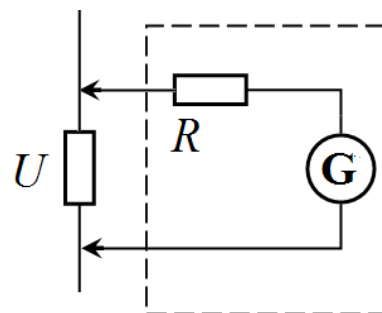
1.1 При пропускании тока через рамку на нее будут действовать моменты сил со стороны магнитного поля и со стороны пружины, в результате рамка перейдет в новое положение равновесия, которое определяется уравнением

$$IBS \sin(\varphi_0 + \delta) = k\delta. \quad (1)$$

где δ - угол отклонения стрелки от «нулевого» положения. Из уравнения (1) следует, что для «линейности» прибора необходимо, чтобы момент со стороны магнитного поля слабо зависел от поворота рамки. Это достигается при $\varphi_0 = 90^\circ$, в этом случае $\sin(\varphi_0 + \delta) = \cos \delta \approx 1$. Иными словами в положении равновесия нормаль к рамке должна быть перпендикулярна линиям магнитного поля, или магнитные линии должны лежать в плоскости рамки. Кроме того, при такой ориентации момент силы со стороны магнитного поля максимален, что повышает чувствительность гальванометра.

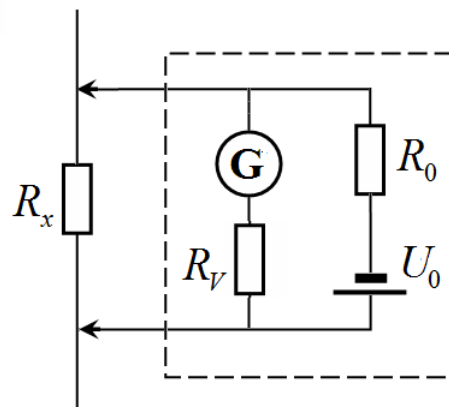
1.2 Чтобы «превратить» гальванометр в вольтметр, к необходимо последовательно подключить дополнительный резистор большого сопротивления R (значительно превышающего сопротивление элемента, на котором производится измерение напряжения). В этом случае сила тока через гальванометр будет равна

$$I = \frac{U}{R}. \quad (2)$$



Следовательно, диапазон измеряемых напряжений будет лежать в интервале $[RI_{\min}, RI_{\max}]$. Данная схема работает строго в линейном режиме.

1.3 Так как гальванометр измеряет силу тока, то омметр должен содержать источник тока. При протекании тока через измеряемый резистор, напряжение на нем пропорционально его сопротивлению. Поэтому желательно, чтобы сила тока в цепи этого резистора не зависела от его сопротивления. Для этого следует источник с большим внутренним сопротивлением (источник тока). Можно просто добавить резистор с большим сопротивлением в измерительную цепь. Далее следует измерять напряжение на измеряемом резисторе, то есть использовать разработанную схему вольтметра. Таким образом, «вырисовывается» следующая схема омметра и его подключения к измеряемому резистору.



В этой схеме: R_0 - сопротивление в цепи источника

тока, R_v - сопротивление в цепи вольтметра; R_x - измеряемое напряжение. Между этими сопротивлениями должно выполняться соотношение: $R_0 \gg R_v \gg R_x$. При выполнении этих условий сила тока через резистор будет равна:

$$I_G = \left(\frac{U_0}{R_0} R_x \right) \frac{1}{R_v} = \left(\frac{U_0}{R_0 R_v} \right) \cdot R_x \quad (3)$$

и пропорциональна измеряемому сопротивлению.

Часть 2. Электростатический вольтметр.

2.1 Пластины электродов в области их перекрытия можно рассматривать как конденсатор, емкость которого зависит от смещения подвижной пластины:

$$C = \frac{\varepsilon_0 l (x + x_0)}{d}. \quad (4)$$

При проведении измерений этот конденсатор фактически подключается к источнику постоянного напряжения U . Поэтому энергия этого конденсатора равна

$$W_c = \frac{CU^2}{2}. \quad (5)$$

При втягивании подвижного электрода емкость конденсатора увеличивается, поэтому увеличивается и его энергия. Это приводит к определенному парадоксу: пластина должна не втягиваться, а выталкиваться из зазора неподвижного электрода!?

Однако, никакого парадокса нет: дело в том, что конденсатор не является замкнутой системой, он подключен к источнику напряжения. При увеличении емкости увеличивается заряд конденсатора, следовательно, источник совершает работу по зарядке конденсатора, поэтому его энергия уменьшается. Изменение энергии источника рассчитывается следующим образом:

$$W_U = -A = -qU = -CU^2. \quad (6)$$

Полная энергия системы равна

$$W = W_c + W_U = -\frac{CU^2}{2}. \quad (7)$$

Таким образом, при втягивании подвижной пластины суммарная энергия уменьшается, следовательно, на пластину действует сила, направленная к неподвижному электроду и равная

$$F = -\frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{U^2}{2} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{\varepsilon_0 l}{2d} U^2. \quad (7)$$

2.2 В положении равновесия эта сила компенсируется силой упругости пружины:

$$\frac{\varepsilon_0 l}{2d} U^2 = kx. \quad (8)$$

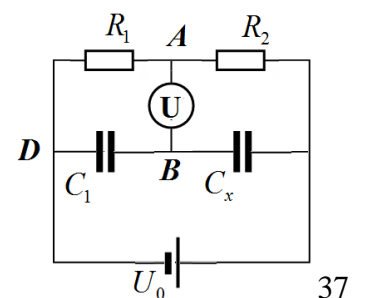
Тогда смещение пластины

$$x = \frac{\varepsilon_0 l}{2dk} U^2. \quad (9)$$

2.3 Зависимость смещения от напряжения нелинейная, для ее линеаризации можно попытаться заменить прямоугольные пластины на пластину более «хитрой» формы. Для этого необходимо добиться выполнения условия $\frac{dS}{dx} = \gamma\sqrt{x}$. Такая геометрическая задача может быть решена.

Часть 3. «Фарадометр»

3.1 Если в цепи подключен вольтметр магнитоэлектрической системы, то его показания будут равны нулю. Так как после зарядки конденсаторов ток через вольтметр прекратится.



3.2 Так как ток через электростатический вольтметр не течет, то верхнюю (с резисторами) и нижнюю (с конденсаторами) ветви моста можно рассматривать независимо.

Примем потенциал точки D равным нулю. Тогда потенциал точки A будет равен

$$\varphi_A = IR_2 = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \quad (10)$$

Потенциал точки B равен напряжению на конденсаторе C_1 . Это напряжение можно найти рассматривая два последовательно соединенных резистора:

$$\begin{cases} C_1 U_1 = C_2 U_2 \\ U_1 + U_2 = U_0 \end{cases} \Rightarrow U_1 = U_0 \frac{C_2}{C_1 + C_2}. \quad (11)$$

Показания вольтметра:

$$U_V = U_0 \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{C_2}{C_1 + C_2} \right) \quad (12)$$

3.3 Мост будет сбалансирован при выполнении «симметричного» условия:

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{C_2}{C_1}. \quad (13)$$

Задание 1. Легкая разминка

Задача 1.1

1.1.1 Внутренняя энергия газа рассчитывается по формуле:

$$U = C_V \nu RT . \quad (1)$$

Запишем также уравнение состояния газа

$$PV = \nu RT . \quad (2)$$

Из этих уравнений следует, что

$$U = C_V PV . \quad (3)$$

Внутренняя энергия воздуха в комнате не изменилась.

1.2.1 Тем не менее, на нагревание воздуха теплота необходима. Изменение внутренней энергии оказалась равным нулю, потому, что часть воздуха вышла наружу. Сложность расчета полного количества теплоты заключается в том, что в процессе разные порции воздуха выходили при разных температурах, получая разное количество теплоты.

Рассмотрим, как изменялось количество воздуха в комнате при изменении температуры. Для этого выразим из (2) зависимость количества вещества в комнате от температуры:

$$\nu = \frac{PV}{RT} . \quad (4)$$

Тогда при изменении температуры на малую величину dT число молей уменьшалось на

$$d\nu = \frac{PV}{R} \frac{dT}{T^2} . \quad (5)$$

Эта порция воздуха получила количество теплоты, равное

$$\delta Q = C_P (T - T_0) d\nu = C_P \frac{PV}{R} \frac{T - T_0}{T^2} dT . \quad (6)$$

Здесь $C_P = C_V + R = \frac{7}{2} R$ - молярная теплоемкость при постоянном объеме (процесс изобарный). Для точного расчета количества полученной теплоты необходимо проинтегрировать выражение (6). Однако, так как относительное изменение абсолютной температуры не велико, то в знаменателе этого выражения изменением температуры можно пренебречь. Тогда количество теплоты, унесенное на улицу можно представить в виде:

$$Q = \frac{C_P}{R} PV \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta T}{T_0} \right)^2 = \frac{7}{4} PV \left(\frac{\Delta T}{T_0} \right)^2 \approx 52 \text{ кДж} . \quad (7)$$

Модно заметить, что это выражение модно представить в наглядной форме (которую можно получить на основании качественных физических рассуждений)

$$Q = \frac{1}{2} C_P \Delta \nu \Delta T . \quad (8)$$

Задача 1.2

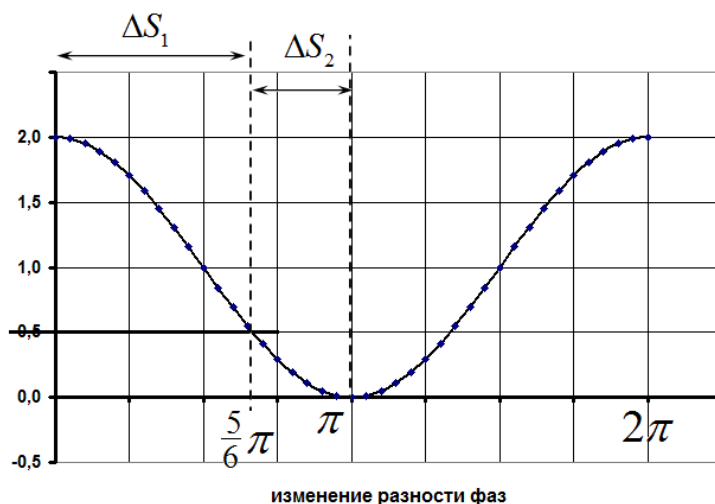
Причиной изменения интенсивности отраженного света является интерференция волн, отраженных от передней и задней поверхностей пленки. При интерференции двух волн одинаковой интенсивности интенсивность результирующей волны описывается формулой

$$I = I_0(1 + \cos \varphi), \quad (1)$$

Где φ разность фаз между интерферирующими волнами. Разность фаз между указанными волнами пропорциональна толщине пленки, или обратно пропорциональна ее площади. При малом изменении площади, толщина пленки также будет изменяться мало, тогда это изменение толщины можно выразить следующим образом

$$h = \frac{h_0 S_0}{S_0 + \Delta S} \approx h_0 \left(1 - \frac{\Delta S}{S_0} \right) \quad (2)$$

Таким образом, можно считать, что изменение толщины пленки, а следовательно и разности фаз между двумя волнами пропорционально изменению ее площади. Так как при начальной площади S_0 интенсивность достигла максимума, то при этой площади разность фаз составляла целое число 2π , поэтому можно положить, в этот момент разность фаз равнялась нулю. Для наглядности изобразим график интенсивности отраженного света от разности фаз. Итак, при $\Delta S = 0$ разность фаз также равнялась нулю, а интенсивность достигла максимального значения в 2 условных единицы. Далее интенсивность монотонно убывала – следовательно, все изменения проходят в пределах одного порядка интерференции. Затем интенсивность уменьшилась в 4 раза, следовательно, она стала равной 0,5. Глядя на формулу (1), не сложно заметить, что в этот момент косинус сдвига фаз стал равным -0,5, что



соответствует разности фаз в $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi$. Для того, чтобы интенсивность стала равной нулю, необходимо чтобы разность фаз стала равной π . То есть фаза должна дополнительно измениться на $\frac{1}{6}\pi$. При изменении площади на величину ΔS_2 , фаза должна измениться в 5 раз меньше, чем при изменении площади на величину ΔS_1 . А так как изменение разности фаз и изменение площади пропорциональны друг другу, то изменение площади должно быть в 5 раз меньше, т.е.

$$\Delta S_2 = \frac{1}{5} \Delta S_1. \quad (3)$$

Задача 1.3

Запишем уравнения закона сохранения импульса

$$\frac{h}{\lambda_0} = -\frac{h}{\lambda} + p \quad (1)$$

И закона сохранения энергии

$$\frac{hc}{\lambda_0} + mc^2 = \frac{hc}{\lambda} + E \quad (2)$$

Здесь p , E - импульс и энергия электрона после взаимодействия. Добавим уравнение связи между энергией и импульсом электрона

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (3)$$

При аккуратном (и не слишком громоздком) решении полученной системы уравнений (1)-(3) . получаем известный результат для сдвига длины волны:

$$\Delta\lambda = 2\frac{h}{mc} = 4,8 \cdot 10^{-12} \text{ м} . \quad (4)$$

Задача 2. Негармонические колебания.

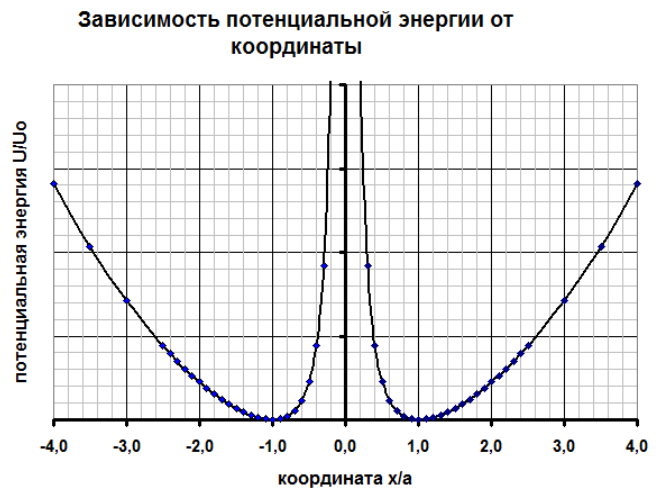
1.1 Для построения схематического графика потенциальной функции (зависимости потенциальной энергии от координаты)

$$U(x) = ka^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{x^2} - 2 \right) \quad (1)$$

Следует отметить ее очевидные свойства:

- функция является четной, поэтому ее график симметричен относительно оси ординат;
- функция обращается в ноль при $x = a$;
- при $x \rightarrow 0$ потенциальная энергия стремится к бесконечности, т.е. в нуле существует бесконечный потенциальный барьер;
- при $x \rightarrow \infty$ функция приближается к квадратичной зависимости, ее график приближается к параболе.

Этих свойств вполне достаточно, что бы построить схематический график зависимости $U(x)$, который показан на рисунке.



1.2 Потенциальная кривая имеет точку минимума, что соответствует наличию положения устойчивого равновесия. Поэтому точка будет совершать колебательное движение. Так как зависимость потенциальной энергии от координаты не является квадратичной. То колебания не будут гармоническими.

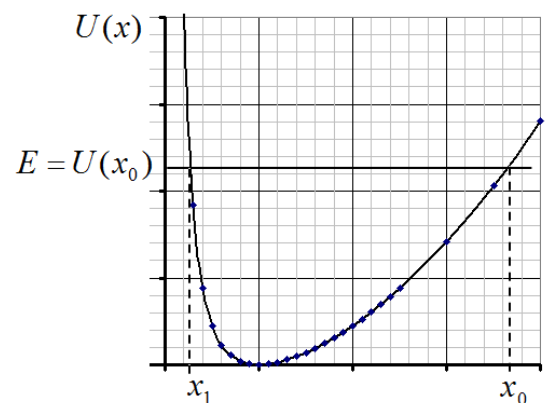
1.3 Как было отмечено вблизи $x = 0$ потенциальная энергия стремится к бесконечности, поэтому материальная точка не сможет преодолеть этот барьер. Поэтому в дальнейшем достаточно рассматривать только область $x > 0$. Для качественного анализа характера движения можно воспользоваться уравнением закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + U(x) = U(x_0) \quad (2)$$

В котором полная энергия точки определяется начальным условием $E = U(x_0)$. Точки возврата, в которых скорость обращается в нуль задаются уравнением:

$$U(x) = U(x_0) \quad (3)$$

Это уравнение иллюстрируется рисунком, на котором отмечен уровень полной энергии и точки x_0, x_1 , в пределах которых происходит движение точки. Для определения пределов движения необходимо решить уравнение (причем надо выбирать только положительные корни)



$$ka^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{x^2} - 2 \right) = ka^2 \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{a^2}{x_0^2} - 2 \right) \quad (4)$$

Можно решить это уравнение стандартными методами (оно сводится к биквадратному уравнению). Но проще заметить, что уравнение симметрично относительно замены $\frac{x}{a} \rightarrow \frac{a}{x}$.

Поэтому второй положительный корень этого уравнения $x_1 = \frac{a}{x_0}$.

Таким образом, материальная точка будет двигаться внутри интервала

$$x \in \left[x_0, \frac{a}{x_0} \right]. \quad (5)$$

1.4 Малые колебания точки происходят вблизи положения равновесия $x = a$. Поэтому представим координату точки в виде

$$x = (a + y) \quad (6)$$

Где отклонение от положения равновесия $y \ll a$. Для упрощения потенциальной функции преобразуем ее к виду

$$\begin{aligned} U(x) &= ka^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{x^2} - 2 \right) = ka^2 \left(\frac{(a+y)^2}{a^2} + \frac{a^2}{(a+y)^2} - 2 \right) = \\ &= ka^2 \frac{(a+y)^4 + a^4 - 2(a+y)^2 a^2}{(a+y)^2 a^2} = ka^2 \frac{((a+y)^2 - a^2)^2}{(a+y)^2 a^2} = ka^2 \frac{(2ay + y^2)^2}{(a+y)^2 a^2} \end{aligned}$$

Теперь следует пренебречь всеми слагаемыми, имеющими больший порядок, чем y^2 :

$$U(x) = ka^2 \frac{(2ay + y^2)^2}{(a+y)^2 a^2} \approx ka^2 \frac{(2ay)^2}{(a)^2 a^2} = 4ky^2. \quad (7)$$

В этом приближении уравнение закона сохранения энергии приобретает вид

$$\frac{mv^2}{2} + 4ky^2 = 4ky_0^2, \quad (8)$$

которое является уравнением гармонических колебаний с круговой частотой $\omega^2 = \frac{8k}{m}$.

Следовательно, период малых колебаний определяется по формуле

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{8k}} = \pi \sqrt{\frac{m}{2k}}. \quad (9)$$

1.5 При больших амплитудах колебаний можно приближенно считать, что

$$U(x) = kx^2 \quad (10)$$

При $x > 0$ и обращается в бесконечность при $x = 0$. График этой приближенной функции показан на рисунке. Движение в этом случае можно представить как гармонические колебания при $x > 0$ и абсолютно упругое отражение в начале координат. Поэтому период таких колебаний будет равен половине периода гармонических колебаний с потенциальной энергией, описываемой функцией (10):

$$T = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}} = \pi \sqrt{\frac{m}{2k}}. \quad (11)$$

Этот период совпадает с периодом малых колебаний.



1.6 Воспользуемся «подсказкой» и получим уравнение для квадрата координаты частицы $z = x^2$. Скорость изменения этой величины равна

$$V_z = (z)' = 2xx' = 2xv \quad (12)$$

Тогда скорость частицы равна:

$$v = \frac{V_z}{2x}. \quad (13)$$

Выразим потенциальную энергию через параметр z :

$$U(x) = ka^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{a^2}{x^2} - 2 \right) = ka^2 \left(\frac{z}{a^2} + \frac{a^2}{z} - 2 \right). \quad (14)$$

Подставим эти выражение в уравнения закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} + U(x) = U(x_0) \Rightarrow \frac{m}{2} \left(\frac{V_z}{2x} \right)^2 + k \frac{(z - a^2)^2}{z} = k \frac{(z_0 - a^2)^2}{z_0}. \quad (15)$$

Учитывая, что $x^2 = z$, получим

$$\frac{m}{2} V_z^2 + 4k(z - a^2)^2 = 4k \frac{(z_0 - a^2)^2}{z_0} \quad (16)$$

В этом уравнении можно выделить полный квадрат относительно переменной z и привести его к виду

$$\frac{m}{2} V_z^2 + 4k(z - b)^2 = E. \quad (17)$$

А это уравнение также является уравнением гармонических колебаний, для которых период не зависит от амплитуды. Следовательно, переменная z (поэтому и $x = \sqrt{z}$) изменяется периодически, с постоянным периодом, не зависящим от амплитуды колебаний.

1.7 Для того, чтобы получить зависимость координаты от времени, необходимо провести преобразования, анонсированные в предыдущем пункте задачи. Однако, можно пойти и более простым логическим путем:

- переменная z изменяется по гармоническому закону, поэтому отклонения от средней точки в обе стороны должны быть одинаковы;

- координата x изменяется в пределах $\left[x_0, \frac{a^2}{x_0} \right]$, поэтому переменная $z = x^2$ лежит в интервале $\left[x_0^2, \frac{a^4}{x_0^2} \right]$;

- средняя точка для переменной z имеет значение $\bar{z} = \frac{1}{2} \left(x_0^2 + \frac{a^4}{x_0^2} \right)$;

- амплитуда изменения переменной z равна $A = x_0^2 - \bar{z} = \frac{1}{2} \left(x_0^2 - \frac{a^4}{x_0^2} \right)$.

Поэтому закон изменения переменной z должен иметь вид (период колебаний задается формулой (9)):

$$z = \bar{z} + A \cos \omega t = \frac{1}{2} \left(x_0^2 + \frac{a^4}{x_0^2} \right) + \frac{1}{2} \left(x_0^2 - \frac{a^4}{x_0^2} \right) \cos \omega t. \quad (18)$$

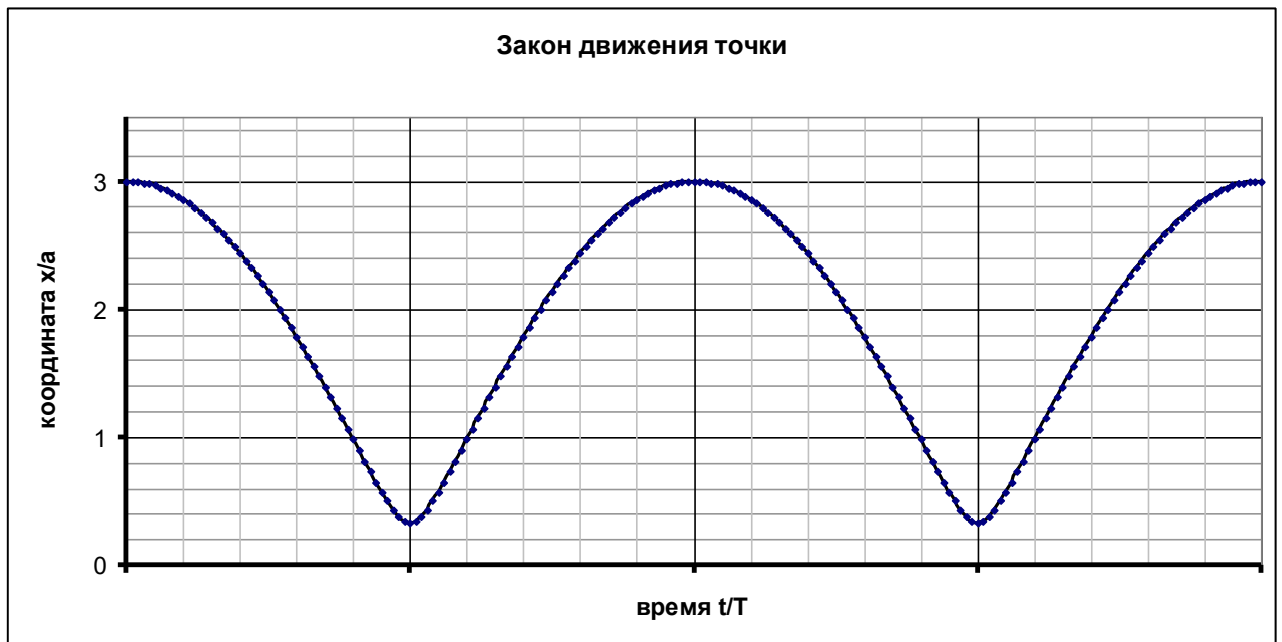
Наконец, возвращаясь к координате точки. Получим закон ее изменения:

$$x(t) = \sqrt{\frac{1}{2} \left(x_0^2 + \frac{a^4}{x_0^2} \right) + \frac{1}{2} \left(x_0^2 - \frac{a^4}{x_0^2} \right) \cos \omega t} \quad (19)$$

Подставляя заданное начальное значение $x_0 = 3a$, получим

$$x(t) = \frac{a}{3} \sqrt{41 + 40 \cos \omega t} \quad (20)$$

График этой функции показан на рисунке.



Задача 3. Эффект Эйнштейна-де-Гааза

1. В полном соответствии с теоретическим введением момент импульса электрона, вращающегося по круговой орбите вокруг ядра атома, определяется соотношением:

$$L = m_e v r \quad (1)$$

2. Электрон, движущийся по круговой орбите, аналогичен круговому току, сила которого может быть записана в виде:

$$i = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r} \quad (2)$$

Тогда магнитный момент такого кругового тока:

$$p_m = i\pi r^2 = \frac{evr}{2} \quad (3)$$

Не стоит забывать о том, что момент импульса и магнитный момент, - это векторные величины. Вследствие того, что электрон – отрицательно заряженная частица, а за направление тока принято направление движения положительно заряженных частиц, соответствующие моменты направлены в разные стороны.

3. Выразим гиромагнитное отношение с использованием (1) и (3), с учетом направления векторов:

$$\vec{p}_m = -\frac{e}{2m_e} \vec{L} \quad (4)$$

$$g = \frac{p_m}{L} = \frac{e}{2m_e} = 8,78 \cdot 10^{10} \frac{\text{Кл}}{\text{кг}} \quad (5)$$

4. Рассмотрим момент импульса всех электронов, отвечающих за магнитные свойства цилиндра. Используя гиромагнитное отношение, свяжем значение суммарного момента импульса электронов с магнитными моментами каждого из них:

$$\vec{L}_e = -\frac{2m_e}{e} \sum_{(i)} \vec{p}_{mi} \quad (6)$$

Изменение момента импульса электронов при изменении магнитных моментов:

$$\Delta \vec{L}_e = -\frac{2m_e}{e} \sum_{(i)} \Delta \vec{p}_{mi} \quad (7)$$

Поскольку суммарный момент импульса цилиндра не изменяется, можно записать:

$$\Delta \vec{L}_e + \Delta \vec{L}_{\text{цпл}} = 0 \longrightarrow \Delta \vec{L}_{\text{цпл}} = -\Delta \vec{L}_e \quad (8)$$

И по итогу:

$$\Delta \vec{L}_{\text{цпл}} = \frac{2m_e}{e} \sum_{(i)} \Delta \vec{p}_{mi} \quad (9)$$

5. При изменении направления магнитного поля на противоположное магнитные моменты электронов, вращающихся на круговых орбитах, переворачиваются:

$$\overrightarrow{\Delta p_m} = -2 \overrightarrow{p_m} \quad (10)$$

Тогда в соответствии с (9) получаем:

$$\overrightarrow{\Delta L_{цил}} = \frac{2m_e}{e} (-2 \overrightarrow{p_m}) N, \quad (11)$$

Где N – количество электронов, отвечающих за магнитные свойства образца. Поскольку количество таких электронов совпадает с числом атомов, получаем:

$$N = \frac{m}{M} N_A \quad (12)$$

И в итоге:

$$\overrightarrow{\Delta L_{цил}} = -\frac{4m_e}{e} \frac{m}{M} N_A \overrightarrow{p_m} \quad (13)$$

Исходя из изменения момента импульса цилиндра найдем конечную угловую скорость вращения:

$$\Delta L_{цил} = I \Delta \omega = \frac{4m_e}{e} \frac{m}{M} N_A p_m \quad (14)$$

Откуда с учетом выражения для момента инерции цилиндра получаем:

$$\omega = \frac{8m_e}{eMr^2} N_A p_m \quad (15)$$

6. Вывод уравнения крутильных колебаний цилиндра:

Изменение момента импульса:

$$\frac{dL}{dt} = I \alpha''(t) \quad (16)$$

Оно связано с действием следующих вращающих моментов:

А) Возвращающий момент

$$M_1 = -I \omega_0^2 \alpha(t), \quad (17)$$

отвечающий за собственные крутильные колебания с циклической частотой ω_0 ;

Б) Момент сил вязкого трения, описанный в условии задачи:

$$M_2 = -k \alpha'(t), \quad (18)$$

где $\alpha'(t)$ - угловая скорость вращения цилиндра;

В) Механический момент, связанный с переманчиванием цилиндра во внешнем переменном магнитном поле, любезно предоставленный авторами задачи:

$$M_3 = \frac{4P_m}{\pi g} \omega \cos \omega t \quad (19)$$

Уравнение динамики вращательного движения цилиндра тогда:

$$\frac{dL}{dt} = M_1 + M_2 + M_3 \quad (20)$$

Уравнение крутильных колебаний цилиндра во внешнем переменном магнитном поле с учетом всех приближений, описанных в условии задачи выглядит следующим образом:

$$I\alpha''(t) = -I\omega_0^2\alpha(t) - k\alpha'(t) + \frac{4P_m}{\pi g} \omega \cos \omega t \quad (20)$$

7. Подставим в уравнение (20) функцию, описанную в условии задачи: $\alpha(t) = A \sin(\omega t + \phi)$.

Для подстановки выразим производные от данной функции по времени:

$$\alpha'(t) = \omega A \cos(\omega t + \phi) \quad (21)$$

$$\alpha''(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \phi) \quad (22)$$

Подставляя (21), (22) в (20), и учитывая, что частота колебаний внешнего переменного магнитного поля равна собственной частоте колебаний системы $\omega = \omega_0$, получаем:

$$\alpha(t) = \frac{4P_m}{\pi g k} \sin(\omega t), \text{ т.е. } A = \frac{4P_m}{\pi g k}, \phi = 0 \quad (23).$$

8. Выразим тогда гиромагнитное отношение:

$$g = \frac{4P_m}{\pi |\alpha_{\max}| k} = 8,7 \cdot 10^{10} \quad (24)$$

9. Отличие измеренного значения гиромагнитного отношения от предсказываемого теорией объясняется наличием собственного магнитного момента электрона и ядра атома – спина.