

Задача 10- 3. Термоэлектрические явления.

Современная теория строения металлов основывается на законах квантовой физики. Однако и более простые классические теории позволяют описывать многие свойства металлов. Одной из простейших теорий, описывающих явления тепло- и электропроводности в металлах, является теория металлов Друде, предложенная немецким физиком Паулем Друде в 1900 году. Теория основывается на следующих предположениях:

- 1) кристаллическая решётка металла образована положительно заряженными ионами, которые считаются неподвижными, электроны же внутри металла свободны и образуют электронный газ, который считается идеальным;
- 2) электрон - электронными столкновениями пренебрегают, рассматривая только столкновения электронов с ионами;
- 3) в интервале между столкновениями не учитывается взаимодействие электрона с другими электронами и ионами решетки;
- 4) столкновения мгновенно изменяют скорость электрона, причём скорость электрона после столкновения не зависит от его скоростью до столкновения, направлена случайно, а её величина соответствует температуре проводника, в области столкновения;
- 5) время между двумя последовательными столкновениями является случайной величиной, среднее значение которого определяется свойствами металла и равно τ (эта величина также называется *временем релаксации*); средний квадрат времени между столкновениями равен $2\tau^2$;

В данной задаче вам предстоит в рамках теории Друде рассчитать некоторые характеристики меди.

Вам могут понадобиться значения следующих величин:

- элементарный заряд $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл ;
- масса электрона $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг ;
- постоянная Авогадро $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹ ;
- постоянная Больцмана $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж · К⁻¹ ;
- атомная масса меди $A_{Cu} = 6,36 \cdot 10^{-2}$ кг · моль⁻¹ ;
- валентность меди $Z_{Cu} = 1$;
- плотность меди $\rho_{Cu} = 8,92 \cdot 10^3$ кг · м⁻³ ;
- удельное сопротивление меди $\gamma_{Cu} = 1,68 \cdot 10^{-8}$ Ом · м .

Часть 1. Закон Ома.

В данной части вам необходимо доказать, что из теории Друде следует закон Ома для участка цепи, который в дифференциальной форме имеет вид

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (1)$$

Где \vec{j} - вектор плотности тока, \vec{E} - напряженность поля внутри проводника, σ - его удельная проводимость.

- 1.1 Найдите концентрацию электронов в меди n и рассчитайте её численное значение.
- 1.2 Найдите среднеквадратичную скорость движения электронов меди $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$ температуре и рассчитайте её численное значение при температуре $T = 300 \text{ K}$.
- Пусть внутри металла существует однородное электрическое поле напряженности \vec{E} .
- 1.3 Найдите среднюю скорость $\langle \vec{v} \rangle$ упорядоченного движения электронов в меди в этом случае. Покажите, что эта скорость пропорциональна напряженности электрического поля \vec{E} .
- 1.4 Выразите удельную проводимость металла σ через среднее время между столкновениями τ .
- 1.5 Используя экспериментальные значения характеристик меди, рассчитайте численное значение среднего времени между столкновениями τ .
- 1.6 Рассчитайте численное значение средней скорости упорядоченного движения электронов в меди при плотности тока $j_0 = 1,0 \text{ A} \cdot \text{мм}^{-2}$.

Часть 2. Закон Джоуля – Ленца.

В данной части вам необходимо доказать. Что из теории Друде следует закон Джоуля – Ленца, который в дифференциальной форме выражается формулой

$$w = \frac{1}{\sigma} j^2, \quad (2)$$

где w - мощность теплоты, выделяющаяся в единице объема проводника при прохождении тока плотности j .

Пусть температура проводника постоянна и равна T . Внутри проводника существует однородное электрическое поле напряженности \vec{E} .

- 2.1 Найдите среднюю энергию $\langle \varepsilon \rangle$, передаваемую электроном кристаллической решётке за одно столкновение.
- 2.2 Покажите, что мощность теплоты, выделяющейся в единице объема, описывается формулой (2).

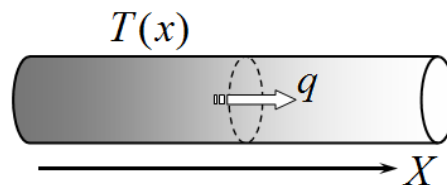
Часть 3. Закон Видемана – Франца.

Пусть металлический стержень неравномерно нагрет так, что его температура изменяется вдоль стержня и описывается функцией $T(x)$

В этом случае в стержне будет существовать поток теплоты, который описывается законом Фурье

$$q = -\kappa \frac{\Delta T}{\Delta x}, \quad (3)$$

где q - плотность потока теплоты (количество теплоты, перетекающей через площадку единичной площади в единицу времени), κ - коэффициент теплопроводности материала стержня.



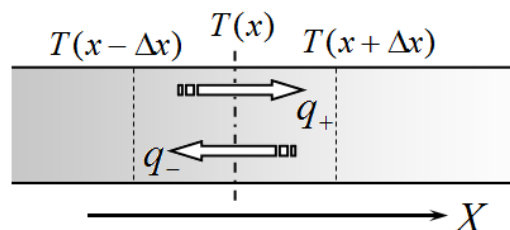
Теплопроводность металлов главным образом обусловлена движением электронов, поэтому между теплопроводностью и электропроводностью металлов должна существовать связь. Эта связь была экспериментально обнаружена в 1853 году и носит название закона Видемана – Франца, который утверждает, что отношение

$$\frac{\kappa}{\sigma T} = L \quad (4)$$

является постоянной величиной для всех металлов и называется числом Лоренца L .

В данной части вам необходимо доказать, что из модели Друде следует закон Видемана – Франца, а также рассчитать постоянную Лоренца.

3.1 Запишите выражения для плотностей потоков энергии, переносимой электронами в положительном q_+ и отрицательном q_- направлении оси X , а также суммарного потока энергии q .



Используйте приближенную формулу, справедливую при медленном изменении функции

$$T(x \pm \Delta x) = T(x) \pm \left(\frac{\Delta T}{\Delta x} \right) \Delta x \quad (5)$$

3.2 Получите формулу для теплопроводности металла и рассчитайте ее численное значение для меди при температуре $T = 300\text{K}$

3.3 Рассчитайте численное значение постоянной Лоренца L .

Часть 4. Эффект Томсона.

При прохождении электрического тока по неоднородно нагретому проводнику выделяется дополнительное (по сравнению с теплотой Джоуля – Ленца) количество теплоты (это явление называется эффектом Томсона). Эффектом Томсона называется дополнительное выделение или поглощение теплоты при прохождении тока в неравномерно нагретом проводнике. В данной части задачи вам необходимо показать, что модель Друде объясняет этот эффект и получить формулу для расчета мощности теплоты Томсона.

Пусть температура медного стержня металла не зависит от времени, но зависит от координаты по закону

$$T(x) = T_0 + \lambda x, \quad (6)$$

где T_0 и λ - известные положительные константы. По стержню протекает электрический ток плотности j .

4.1 При каком направлении тока теплота Томсона будет положительной, а при каком отрицательной?

4.2 Найдите мощность теплоты, выделяющейся в единице объема стержня (плотность мощности) p в описанном случае.

4.3 Покажите, что мощность дополнительной теплоты Томсона пропорциональна плотности тока j и градиенту температуры λ . Получите выражение для коэффициента пропорциональности.