

Задача 10-2. «Конденсатор»

0. Емкость конденсатора определяется по известной формуле

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 a^2}{h}. \quad (1)$$

Часть 1.

1.1 Напряженность электрического поля внутри конденсатора выражается через разность потенциалов на его обкладках

$$E = \frac{U_0}{h}. \quad (2)$$

И остается постоянной при смещении пластин, так заряды на пластинах остаются неизменными. Эту же напряженность можно выразить через поверхностную плотность зарядов σ на пластинах

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (3)$$

Из этих выражений следует, что

$$\sigma = \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 \frac{U_0}{h}. \quad (4)$$

Следовательно, сила притяжения пластин (и равная ей сила, с которой надо раздвигать пластины) равна

$$F = \sigma S E' = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 a^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{U_0}{h} \right)^2 a^2 \quad (5)$$

Здесь учтено, что поле между пластинами создается зарядами на обеих пластинах, а при вычислении силы, действующей на одну из них, следует учитывать поле, создаваемое зарядами на другой. Напряженность этого поля E' , очевидно в два раза меньше, чем E . Эту формулу можно записать сразу, если знать, что давление электрического поля на проводник равно плотности энергии электрического поля.

Эта сила не зависит от расстояния между пластинами.

1.2 Работа по перемещению пластины на расстояние h в этом случае равна

$$A = Fh = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{U_0}{h} \right)^2 a^2 h = \frac{\varepsilon_0 a^2 U_0^2}{2h} = \frac{C_0 U_0^2}{2}. \quad (6)$$

1.3 Так как в данном случае постоянным остается заряд на пластинах, то изменение энергии конденсатора можно рассчитать по формуле

$$\Delta W = \frac{q^2}{2C} - \frac{q^2}{2C_0} \quad (7)$$

где $C = \frac{C_0}{2}$ - емкость конденсатора после увеличения расстояния между пластинами в 2 раза.

Следовательно,

$$\Delta W = \frac{q^2}{2C} - \frac{q^2}{2C_0} = \frac{q^2}{2C_0} = \frac{C_0 U_0^2}{2} \quad (8)$$

1.4 Таким образом, закон сохранения энергии в данном случае строго выполняется: работа внешних сил равна увеличению энергии конденсатора.

Часть 2.

При подключенном источнике заряды на пластинах изменяются, так как остается постоянной разность потенциалов, а напряженность поля изменяется!

2.1 Сила взаимодействия между пластинами зависит только от напряженности поля между ними, поэтому можно воспользоваться формулой (5)

$$F = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 a^2.$$

Только в данном случае следует учесть, что напряженность поля при изменении расстояния между пластинами изменяется. Обозначим расстояние между пластинами x . Тогда напряженность поля будет равна

$$E = \frac{U_0}{x}. \quad (9)$$

Следовательно, сила их притяжения описывается формулой

$$F = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \left(\frac{U_0}{x} \right)^2 a^2 \quad (10)$$

Таким образом, необходимая сила обратно пропорциональна квадрату расстояния между пластинами.

2.2 Для вычисления работы можно воспользоваться аналогией: напряженность поля точечного заряда также обратно пропорциональна квадрату расстояния, а потенциал этого поля обратно пропорционален расстоянию. Поэтому для работы по раздвиганию пластин можно записать

$$A = \frac{1}{2} \varepsilon_0 U_0^2 a^2 \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{2h} \right) = \frac{1}{4} \frac{\varepsilon_0 U_0^2 a^2}{h} = \frac{1}{4} C_0 U_0^2 \quad (11)$$

2.3 Изменение энергии конденсатора в данном случае равно (с учетом того, что емкость конденсатора уменьшилась в 2 раза $C = \frac{C_0}{2}$)

$$\Delta W = \frac{CU_0^2}{2} - \frac{C_0 U_0^2}{2} = -\frac{C_0 U_0^2}{4}. \quad (12)$$

2.4 Внешние силы совершили положительную работу, а энергия конденсатора уменьшилась!?

Таким образом, данная проблема требует более тщательного анализа.

Сомнений в выполнимости закона сохранения энергии быть не должно, только надо его применять правильно! Энергия сохраняется в замкнутой системе, а конденсатор таковой не является - он же подключен к источнику ЭДС. При увеличении расстояния между пластинами емкость конденсатора уменьшается, поэтому уменьшается заряд на пластинах, которому некуда деться, кроме как вернуться назад, в источник. Их возвращению препятствуют сторонние силы (вспомните – сторонние силы источника стремятся «вытолкнуть заряды из источника»), поэтому при возвращении зарядов энергия источника повышается. Таким образом, при раздвигании пластин конденсатора происходит подзарядка источника, а энергия, переданная посредством совершенной работы, переходит в энергию источника. Кроме того, энергия поля в конденсаторе также уменьшается, поэтому эта «потеря» энергии также переходит в источник. Иными словами, при перемещении пластины внешняя сила не только совершает работу по подзарядке источника, но и «заставляет» электрическое поле вернуть часть своей энергии.

При уменьшении емкости заряд конденсатора уменьшился на величину

$$\Delta q = C_0 U_0 - C U_0 = \frac{1}{2} C_0 U_0. \quad (13)$$

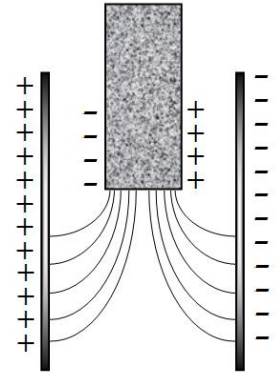
Следовательно, увеличение энергии источника равно:

$$\Delta W_{ист} = U_0 \Delta q = \frac{1}{2} C_0 U_0^2. \quad (14)$$

Таким образом «баланс энергии» сходится: работа внешних сил плюс уменьшение энергии конденсатора равно увеличению энергии источника.

Часть 3.

3.1 Механизм возникновения силы, действующей на пластинку со стороны электрического поля, проиллюстрирован на рисунке. При ее смещении изначально однородное распределение зарядов на обкладках конденсатора и поляризационных зарядов на пластинке искажается. Как следствие этого перераспределения зарядов искажается и электрическое поле, поэтому возникают силы, стремящиеся втянуть пластинку внутрь конденсатора. Если конденсатор заряжен, то для извлечения пластинки необходимо приложить к ней внешнюю силу и совершить положительную работу.



Прямой расчет силы, действующей на пластинку сложен, однако для ее определения можно воспользоваться энергетическим подходом: изменение энергии системы равно работе внешних сил:

$$F \Delta x = \Delta W \quad (15)$$

В данном случае емкость конденсатора также уменьшается при постоянном напряжении на нем. Поэтому можно воспользоваться идеями, полученными во второй части задачи. При малом изменении емкости:

энергия конденсатора изменяется на величину

$$\Delta W_c = \frac{1}{2} U_0^2 \Delta C; \quad (16)$$

Энергия источника изменяется на величину ($\Delta q = U_0 \Delta C$ - изменение заряда конденсатора, изменение заряда источника имеет противоположный знак)

$$\Delta W_u = -U_0 \Delta q = -U_0^2 \Delta C; \quad (17)$$

Изменение полной энергии системы

$$\Delta W = -\frac{1}{2} U_0^2 \Delta C; \quad (18)$$

Если пластина сместилась на расстояние x вдоль пластин то емкость конденсатора окажется равной (как емкость двух параллельно соединенных конденсаторов

$$C = \frac{\epsilon_0 a x}{h} + \frac{\epsilon_0 \epsilon a (a - x)}{h} = \frac{\epsilon_0 a}{h} (x + \epsilon (a - x)) \quad (19)$$

Изменение емкости при малом смещении пластины равно

$$\Delta C = \frac{\epsilon_0 a x}{h} + \frac{\epsilon_0 \epsilon a (a - x)}{h} = -\frac{\epsilon_0 a}{h} (\epsilon - 1) \Delta x. \quad (20)$$

Наконец, с помощью формул (15) и (18) находим

$$F = \frac{\epsilon_0 a}{2h} (\epsilon - 1) U_0^2. \quad (21)$$