Вариант 1

Задания теоретического тура

1. Короткие задачи (25 баллов)

1.1. В каком месте Земли эклиптика может совпасть с горизонтом и когда это бывает? (2 балла)

Решение и ответ.

Для наблюдателя на северном полярном круге, в момент восхода точки весеннего равноденствия (ее часовой угол, совпадающий со звездным временем, равен 18 ч). Для наблюдателя на южном полярном круге, в момент захода точки весеннего равноденствия (звездное время равно 6ч).

1.2. Спустя какой промежуток времени после своей верхней кульминации Солнце будет находиться на высоте 20° в Минске ($\varphi = 53°54'$), если склонение Солнца $\delta = 23°05'$. (2 балла)

Решение.

$\cos z = \sin\varphi \cdot \sin\delta + \cos\varphi \cdot \cos\delta \cdot \cos t \Rightarrow \cos t = 0{,}047 \Rightarrow t = 5^h 49^m 13^s$

Ответ: $t = 5^h 49^m 13^s$.

1.3. В 2008 году при наблюдении WASP-14, звезды главной последовательности с массой $M_{\mathrm{WASP-14}}$ = 1,211 $M_\odot$, транзитным методом была обнаружена экзопланета WASP-14b. Транзиты происходят раз в T = 2,2438 дня. Вычислите большую полуось орбиты WASP-14b. Масса Солнца $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ кг, астрономическую единицу принять равной $1{,}496 \cdot 10^8$ км. (3 балла)

Решение.

С учетом 3-его обобщенного закона Кеплера:

$$(a_{\mathrm{WASP-14}} + a_{\mathrm{WASP-14b}})^3 = G\,\frac{(M_{\mathrm{WASP-14}} + M_{\mathrm{WASP-14b}})}{4\pi^2}T^2$$

Т.к. массой экзопланеты, по сравнению с массой звезды, можно пренебречь и считать, что барицентр системы находится в центре звезды, тогда:

$$a_{\mathrm{WASP-14b}} = \left(G\,\frac{M_{\mathrm{WASP-14}}}{4\pi^2}T^2\right)^{1/3} = 0{,}0359\ \text{а. е.}$$

Ответ: $a_{WASP-14b} = 0{,}0359$ а. е.

1.4. У периодической кометы афелийное расстояние равно Q = 48,1 а.е., а перигелийное составляет q = 5,3 а.е. Найдите площадь плоскости, ограниченной орбитой этой кометы. (3 балла)

Решение.

$S = \pi ab$,

где S – площадь плоскости, ограниченной орбитой, a – большая и b – малая полуоси орбиты кометы.

$b = a\sqrt{1 - e^2}$

С учетом формулы выше:

$S = \pi a^2\sqrt{1 - e^2}$

Найдем большую полуось орбиты кометы:

$$\begin{cases} Q = a(1 + e) \\ q = a(1 - e) \end{cases} \Rightarrow a = \frac{Q+q}{2} = 26{,}7 \text{ а. е},$$

где Q – расстояние в афелии, q – в перегелии.

Найдем эксцентриситет орбиты:

$$e = \frac{Q}{a} - 1 = 1 - \frac{q}{a} = 0.8$$

или

$$\frac{Q}{q} = \frac{1+e}{1-e} \Rightarrow e = \frac{Q-q}{Q+q} = 0.8$$

Тогда площадь:

$S = 1{,}34 \cdot 10^3 \text{ а. е.}^2$

Ответ: $S = 1{,}34 \cdot 10^3 \text{ а. е.}^2$

1.5. Для кометы из предыдущей задачи рассчитайте, чему будет равна скорость кометы в перигелии и афелии, а также в момент времени, когда ее радиус-вектор составит 70% от большой оси орбиты. (3 балла)

Решение.

Скорость в афелии:

$$\upsilon_Q = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a}\frac{1-e}{1+e}} = 1{,}93 \text{ км/с}$$

Скорость в перегелии:

$$\upsilon_q = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a}\frac{1+e}{1-e}} = 17{,}34 \text{ км/с}$$

Скорость в точке орбиты:

$$\upsilon = \sqrt{GM_\odot\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{GM_\odot\left(\frac{2}{0{,}7a} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a}\left(\frac{2}{0{,}7} - 1\right)} = 7{,}88 \text{ км/с}$$

Ответ: υ_Q = 1,93 км/с, υ_q = 17,34 км/с, υ = 7,88 км/с.

1.6. Определите лучевую скорость квазара, красное смещение которого z = 1,3. (3 балла)

Решение.

$\upsilon = \frac{(z+1)^2-1}{(z+1)^2+1}c = 2{,}05 \cdot 10^5\,\frac{\text{км}}{\text{с}}$

Ответ: $\upsilon = 2{,}05 \cdot 10^5\,\frac{\text{км}}{\text{с}}$

1.7. Рассеянное звездное скопление имеет видимый блеск $m = 1^m$. Из какого максимального числа видимых невооруженным глазом звезд может оно состоять. (2 балла)

Решение.

$\mathrm{m} = -2{,}5\lg\sum_{i=1}^{n} 2{,}512^{-m_i} = m_0 - 2{,}5lgN \Rightarrow N = 10^{\frac{\mathrm{m_0 - m}}{2,5}} = 100$

Ответ: N = 100 шт.

1.8. В среднем у человека $S = 1{,}4$ м^2 кожи. Если принять, что наша кожа ничего не отражает, то чему будет равна светимость среднего человека? Какова длина волны, на которую приходится максимум излучения человека? Сможем ли мы увидеть данное излучение? Нормальная температура человека составляет t = 36,6 °C. Постоянная Вина b = $2{,}9 \cdot 10^{-3}$м·К, постоянная Стефана-Больцмана σ = $5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт·м$^{-2}$·К$^{-4}$. (3 балла)

Решение.

$L = \sigma T^4 S = 729{,}3$ Вт/м^2 – светимость среднего человека

$\lambda_{\max} = \frac{b}{T} = 9{,}367$мкм – длина волны, на которую приходится максимум излучения человека

Излучение невозможно наблюдать глазом, т.к. длина волны лежит в инфракрасном диапазоне.

Ответ: L = 729,3 Вт/м^2; $\lambda_{\max} = 9{,}367$ мкм; наблюдение невозможно.

1.9. Вычислите критическую плотность Вселенной. Постоянную Хаббла принять равной H = 70,1 км/(с·Мпк). (2 балла)

Решение.

$\rho_{crit} = \frac{3H^2}{8\pi G} = 9{,}58 \cdot 10^{-27}$ кг/м^3

Ответ: $\rho_{crit} = 9{,}58 \cdot 10^{-27}$ кг/м^3.

1.10. Рассчитайте радиус Шварцшильда черной дыры, масса которой M = 2,5 $M_\odot$. (2 балла)

Решение.

$\mathrm{R} = \frac{2GM}{c^2}$ – радиус Шварцшильда черной дыры $\Rightarrow \mathrm{R}_{2,5} = 7{,}4$ км.

Ответ: $\mathrm{R}_{2,5} = 7{,}4$ км.

2. Странная парочка: Плутон-Харон (25 баллов)

В 1978 году астроном Джеймс Кристи с помощью полутораметрового рефлектора зафиксировал наличие у Плутона спутника, который был назван Хароном[1]. Как Луна к Земле, так и Харон все время повернут к своему «хозяину» – Плутону одной стороной. Более того, Плутон тоже всегда обращен к спутнику одним и тем же полушарием. Это очень редкое «взаимопонимание» двух небесных тел связано с тем, что их периоды обращения вокруг своих осей и их орбитальные периоды совпадают. Еще одно необычное явление связано с размерами парочки: радиус Харона всего вдвое меньше, чем радиус Плутона.

Вычислите разницу видимых звездных величин $\Delta \mathrm{m} = \mathrm{m}_\chi - m_{\text{п}}$ (где m_χ – видимая звездная величина Харона для наблюдателя, находящегося на Плутоне; $m_{\text{п}}$ – видимая звездная величина Плутона для наблюдателя, находящегося на Хароне), если известно, что альбедо Плутона и Харона равны 0,5 и 0,37, соответственно.

<u>Решение</u>.

$\Phi_{\text{отр}}^{\Pi} = \Phi_0 \cdot \mathrm{A}_\Pi$ – поток излучения Солнца, отраженный Плутоном;

$\Phi_{\text{отр}}^{\chi} = \Phi_0 \cdot \mathrm{A}_\chi$ – поток излучения Солнца, отраженный Хароном.

Т.к. можно считать, что поток излучения Φ_0, приходящий от Солнца, к этим двум небесным телам одинаков.

$\Phi_{\text{пад}} = \frac{\Phi_{\text{отр}}^{\Pi}}{2\pi \mathrm{a}} \Rightarrow E_\chi = \Phi_{\text{пад}} \mathrm{A}_\chi \cdot \mathrm{S}_\chi, E_\Pi = \Phi_{\text{пад}} \mathrm{A}_\Pi \cdot \mathrm{S}_\Pi$

Тогда из формулы Погсона:

$$\lg \frac{E_\chi}{E_\Pi} = \lg \frac{\Phi_{\text{пад}} \mathrm{A}_\chi \cdot \mathrm{S}_\chi}{\Phi_{\text{пад}} \mathrm{A}_\Pi \cdot \mathrm{S}_\Pi} = \lg \frac{\mathrm{A}_\chi \cdot \mathrm{S}_\chi}{\mathrm{A}_\Pi \cdot \mathrm{S}_\Pi} = 0{,}4(\mathrm{m}_\chi - m_{\text{п}}) = 0{,}4\Delta \mathrm{m} \Rightarrow$$

$$\Delta \mathrm{m} = 2{,}5 \lg \frac{R_\Pi^2}{\mathrm{R}_\chi^2} \frac{A_\Pi}{\mathrm{A}_\chi} \approx 1{,}^{\mathrm{m}}8$$

<u>Ответ</u>: $\Delta \mathrm{m} \approx 1{,}^{\mathrm{m}}8$.

3. Systems Saturnlum[2] (25 баллов)

Как известно, первенство в наблюдении Сатурна принадлежит Галилео Галилею. Однако зрительная труба ученого была настолько несовершенна, что не давала достаточно четкого изображения. А расплывчатый вид наблюдавшихся им объектов не позволял ему утверждать об открытии наверняка. Чтобы закрепить за собой первенство

---

[1] Такое имя в греческой мифологии носил перевозчик душ умерших через подземную реку Стикс в царство мертвых – Аид.

[2] «Система Сатурна» - один из трудов Гюйгенса, в котором изложена идея решения загадки о кольцах Сатурна, ставившей ученых XVII в. в тупик.

и в то же время не попасть в неловкое положение ошибившегося, Галилей прибегнул к модному в то время жесту: об открытии, правильность и достоверность которого вызывали сомнения, сообщалось в краткой шифровке, сложной для толкования всем, кроме автора. Галилей в 1610-м году опубликовал такую анаграмму:

Smaismrmielmepoetaleumibuvnenugttaviras

Спустя несколько лет Галилей сам расшифровал свое послание миру. Но открытия так и не произошло.

Решить сложнейшую загадку того времени и определить, что же наблюдал Галилей, смог Христиан Гюйгенс. И тогда он во весь голос сообщил:

Annulo cingitur, tenui, plano, nusquam cohaerente, ad eclipticam inclinato

что означало: "кольцом окружен тонким, плоским, нигде не прикасающимся, к эклиптике наклоненным". Это произошло в 1658-м году. В год опубликования анаграммы Христиан Гюйгенс открывает также и самый большой спутник Сатурна - Титан - крупнейший спутник Сатурна, второй по величине спутник в Солнечной системе и единственный спутник планеты, обладающий плотной атмосферой.

26 марта 2014 года учеными Национальной обсерватории Рио-де-Жанейро был открыт новый «властелин колец». Им является астероид под названием Харикло́[3], орбита которого лежит между Сатурном и Ураном. Харикло окружена двумя достаточно узкими и плотными кольцами, в основном состоящих изо льда и пыли, точно также, как и кольца Сатурна или Урана. Команда назвала кольца Ояпок (внутреннее кольцо) и Чуй (внешнее кольцо), в честь двух рек, которые формируют северную и южную прибрежные границы Бразилии.

В этой задаче Вам необходимо:

а) Вычислить синодический и сидерический период обращения Сатурна. Считать, что орбита круговая. Большая полуось орбиты Сатурна равна 9,6 а.е. (5 баллов)

<u>Решение</u>.

[3] Название дали в честь Харикло — жены кентавра Хирона

$\mathrm{T}_C = \sqrt{a_c^3} = 29{,}74$ лет

$\frac{1}{\mathrm{S}} = \frac{1}{T_\oplus} - \frac{1}{T_C} \Longrightarrow S_\mathrm{C} = \frac{T_C T_\oplus}{T_C - T_\oplus} = 1{,}035$ года

Ответ: $\mathrm{T}_C = 29{,}74$ лет, $S_\mathrm{C} = 1{,}035$ года

b) Вычислить момент импульса Сатурна относительно Солнца, если линейная скорость вращения точки на поверхности Сатурна относительно его центра равна 9,87 км/с. Считать, что Сатурн вращается равномерно, а орбита лежит в плоскости эклиптики. Также принять, что его экваториальный радиус равен полярному и составляет 60 268 км, масса гиганта составляет $5{,}68 \cdot 10^{26}$ кг. В данном пункте примите, что барицентр системы Солнце-Сатурн находится в центре Солнца. (10 баллов)

Напоминаем, что момент инерции однородного шара находится по формуле:

$$\frac{2}{5}\mathrm{mr}^2$$

Решение.

Момент импульса Сатурна, относительно Солнца:

$\mathrm{L}_{\text{отн}} = \mathrm{L}_0 + M_C v_\text{а} a = I_c\omega + M_C v_\text{а} a = \frac{2}{5} M_C r_c^2 \frac{v_r}{r_c} + M_C \frac{2\pi \mathrm{a}}{T} a = 2M_C\left(\frac{1}{5} v_r r_c + \frac{\pi a^2}{T}\right)$

$\mathrm{L}_{\text{отн}} = 7{,}8 \cdot 10^{42}\,\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}}$

Ответ: $\mathrm{L}_{\text{отн}} = 7{,}8 \cdot 10^{42}\,\frac{\text{кг}\cdot\text{м}^2}{\text{с}}$.

c) Определить среднюю плотность Титана, если ускорение свободного падения на нем 1,352 м/с^2, а его площадь поверхности составляет 0,18% от площади поверхности Сатурна. (5 баллов)

Решение.

$\mathrm{g}_T = \frac{GM_T}{R_T}$ – ускорение свободного падения на Титане.

$M_T = \rho_T V_T = \frac{4}{3}\pi R_T^3 \rho_T$ – масса Титана,

$S_T = 1{,}8 \cdot 10^{-3} S_C \Rightarrow R_T = R_C\sqrt{1{,}8 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \mathrm{g}_T = \frac{4}{3}\pi \mathrm{G} R_T \rho_T \ \Rightarrow \rho_T = \frac{3\mathrm{g}_T}{4\pi G R_C \sqrt{1{,}8 \cdot 10^{-3}}}$

$\rho_T = 1{,}89$ г/см^3 – плотность Титана

Ответ: $\rho_T = 1{,}89$ г/см^3.

d) Оценить, что ближе находится к барицентру системы масс: Сатурн в системе Солнце-Сатурн или Харикло в системе масс Солнце-Харикло? В данном пункте необходимо учесть, что барицентры систем находятся не в центре Солнца. Влиянием других тел на положение центра масс пренебречь. Орбиту Харикло считать круговой с большой полуосью 15,74 а.е. (5 баллов)

Решение.

Составим две системы уравнений:

$\begin{cases} M_{\odot} l_{\odot} = M_C l_C \\ l_{\odot} + l_C = a_C \end{cases}$ – для системы масс Солнце-Сатурн

$\begin{cases} M_{\odot} l_{\odot} = M_{\chi} l_{\chi} \\ l_{\odot} + l_{\chi} = a_{\chi} \end{cases}$ – для системы масс Солнце-Харикло $\Longrightarrow$

$\Rightarrow \mathrm{l}_c = \frac{M_{\odot} a_c}{M_{\odot} + M_C}, \mathrm{l}_{\chi} = \frac{M_{\odot} a_{\chi}}{M_{\odot} + M_{\chi}} \Rightarrow \frac{\mathrm{l}_c}{\mathrm{l}_{\chi}} = \frac{M_{\odot} a_c}{M_{\odot} + M_C} \cdot \frac{M_{\odot} + M_{\chi}}{M_{\odot} a_{\chi}} = \frac{M_{\odot} + M_{\chi}}{M_{\odot} + M_C} \frac{a_c}{a_{\chi}}$,

Т.к. масса любых «кентавров» солнечной системы много меньше массы Солнца, значит для оценки значения можно пренебречь массой Харикло. Тогда:

$\frac{\mathrm{l}_c}{\mathrm{l}_{\chi}} = 0{,}61 \Rightarrow$ Сатурн расположен ближе к барицентру системы масс.

Ответ: Сатурн.

4. «Похожий на звезду радиоисточник» (25 баллов)

Квазары - сверкающие объекты, которые излучают самое значительное количество энергии, обнаруженное во Вселенной. Находясь на колоссальном расстоянии от Земли, они демонстрируют большую яркость, чем космические тела, расположенные в 1000 раз ближе. Согласно современному определению, квазар – это активное ядро галактики, где протекают процессы, освобождающие огромную массу энергии. Сам термин означает «похожий на звезду радиоисточник». Именно по причине электромагнитного излучения и значительного красного смещения, открытые объекты были определены как новые, находящиеся на границах вселенной.

a) Определите скорость удаления Нашей Галактики, если красное смещение квазара z = 6,5. (5 балла)

Решение.

С учетом релятивистского эффекта Доплера:

$\upsilon = \frac{(z^2 + 2z)c}{z^2 + 2z + 2} = 289500 \frac{\text{км}}{\text{с}}$

Ответ: 289500 км/с.

b) Вычислите расстояние до квазара. (5 балла)

Решение.

Расстояние до квазара (от квазара до Нашей Галактики определим из закона Хаббла).

$r = \frac{\upsilon}{H}$

где υ - скорость удаления Галактики.

Тогда $r = 4130$ Мпк

Ответ: $r = 4130$ Мпк.

c) Оцените какую проницающую способность должен иметь телескоп, чтобы с расстояния квазара увидеть Нашу Галактику. (5 балла)

Решение.

Проницающая способность телескопа должна быть $m_{пр} > m_{нг}$.

$M_{нг} = m_{нг} + 5 - 5\lg r$

где m и M видимая звездная величина и абсолютная звездная величина Нашей Галактики с расстояния квазара, r - расстояние до квазара

Откуда $m = M - 5 + 5\lg r \Rightarrow m_{нг} = -21 - 5 + 5\lg 4130 \cdot 10^6 = 22$

Значит проницающая способность телескопа $m_{пр} > 22$.

Ответ: $m_{пр} > 22$.

d) Чему равна его разрешающая способность на длине волны максимума чувствительности глаза? (5 балла)

Решение.

Разрешающая способность телескопа (дифракционный предел) определяется по формуле

$\alpha'' = 1{,}22\frac{\lambda}{D}$

где λ – длинна волны (550нм).

Можно также использовать приведённую формулу

$\alpha'' = \frac{138''}{D_т}$

где D_T - диаметр объектива телескопа выраженной в миллиметрах.

Проницающая способность телескопа при идеальных атмосферных условиях определяется как

$m_т = 2{,}1 + 5\lg D_т$

где D_T - диаметр объектива телескопа выраженной в миллиметрах.

Тогда $D_T = 10^{\frac{m_т - 2{,}1}{5}} = 9550$ мм $\Rightarrow \alpha'' = 0{,}0145''$

Ответ: $\alpha'' = 0{,}0145''$

e) Можно ли увидеть в этот телескоп шаровое скопление из N = 1000 звёзд, звёздная величина которых $m_0 = 15$? (5 балла)

Абсолютная звездная величина Нашей Галактики M = -21, постоянная Хаббла 70,1 $\frac{\text{км}}{\text{с·Мпк}}$.

Решение.

Светимость шарового скопления $L = NL_0$,
где N – число звёзд в скоплении, а L_0 – светимость каждой звезды.
Тогда
$\frac{L}{L_0} = 2{,}512^{m_0 - m}$,
где m – видимая звёздная величина скопления.
Если $m < m_{пр}$, то его можно будет увидеть в телескоп.
Если $m > m_{пр}$, то нет.
Определим m шарового скопления
$\mathrm{N} = 2{,}512^{m_0 - m} \Rightarrow \mathrm{m} = m_0 - 2{,}5\lg N = 7{,}5$
Таким образом $m < m_{пр}$ значит можно будет увидеть в телескоп шаровое скопление.

Ответ: Да, можно.