

# КОСМОЛОГИЯ

COSMOLOGY  
Steven Weinberg



Стивен  
**Вайнберг**  
НОБЕЛЕВСКИЙ ЛАУРЕАТ



URSS

Перед Вами — монументальная книга, написанная ведущим экспертом в области физики частицы и космологии. За тридцать пять лет, прошедших с момента появления знаменитой книги Стивена Вайнберга «Гравитация и космология», произошла настоящая революция как в космологической теории, так и в сборе наблюдательных данных. Только великий специалист, приложив недюжинные усилия, был способен собрать воедино все основные достижения в одной книге, изложив материал не только в высшей степени точно, но и доступно для понимания. Этот труд по достоинству оценит самый широкий круг читателей — начиная от студентов, которые только приступают к изучению предмета, и заканчивая экспертами в современной космологии. Эта книга обязана стать настольной для всех и каждого, кто работает в области космологии.

*Андрей Линде, Стэнфордский университет*

Пришло самое время дать обзор физики тех явлений, которые оформились в огромную предметную область. И Вайнберг сделал его, и сделал потрясающе. Он представляет все-охватывающий и доскональный анализ широкого круга проблем современной космологии: от методов исследования структуры и эволюции окружающей нас Вселенной до вопросов темной материи и темной энергии, а также рассматривает идеи о том, как могла выглядеть Вселенная в далеком прошлом, до того момента, начиная с которого для описания Вселенной у нас имеется хорошо разработанная теория.

*Джим Либлз, Принстонский университет*

В книге рассматриваются самые важные вопросы современной космологии: ускоренное расширение, наблюдаемое по сверхновым, детальная структура реликтового излучения, доказательства существования темной материи. Вайнберг скрупулезно анализирует все достижения в их историческом развитии и аккуратно подытоживает наблюдательные данные. Он привносит глубокое понимание физических явлений, из чего сплетается богатый текст, который по достоинству оценят астрономы и физики. Каждый, кто работает в области космологии, почертнет многое необходимое для себя из этой книги.

*Роберт П. Киршнер, Гарвардский университет*

Красота того, что сделал Вайнберг, заключается в основательности. Литература по космологии очень обширна, и по многим вопросам чрезвычайно трудно найти логически замкнутую подачу материала. Вайнберг решил свести всё воедино, начиная от основ космологии Фридмана—Робертсона—Уокера и заканчивая современной инфляционной теорией. Освещены все без исключения важнейшие темы современной космологии. Цель Вайнберга — подать каждую тему с самих основ, не допуская использования размытых утверждений или непроверенных результатов из других источников. В моем следующем лекционном курсе я без сомнения буду опираться на эту книгу. И я с нетерпением жду этого.

*Алан Гут, Массачусетский технологический институт*

Вайнберг, благодаря своему исключительному таланту, закрыл брешь в научной библиографии, предложив читателям тщательно выверенную монографию, которая, несмотря на строгость изложения, читается с удовольствием и которая обречена стать еще одним классическим учебником автора. Вайнберг предпринял титанические усилия, чтобы собрать и выделить огромный массив теоретических и экспериментальных достижений в этой быстро развивающейся научной области, внеся огромный вклад в фундаментальную науку и для астрофизического сообщества — как для студентов, так и для продвинутых исследователей.

*Габриэле Венециано, ЦЕРН, Женева*

**Steven Weinberg**

**COSMOLOGY**

**OXFORD**  
UNIVERSITY PRESS

**Вайнберг Стивен**

**Космология:** Пер. с англ. / Под ред. и с предисл. И. Я. Арефьевой, В. И. Санюка.  
М.: УРСС: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. — 608 с.

Монументальная монография поблесковского лауреата Стивена Вайнберга обобщает результаты прогресса, достигнутого за последние два десятилетия в современной космологии. Она является уникальной по охвату материала, манере его изложения и тщательности математической проработки. Цель книги — дать замкнутое описание космологии, а также идей и формул, которые используются и проверяются в современных космологических наблюдениях. Впервые в рамках одной книги собран столь всеобъемлющий материал по современному состоянию теории.

«Космологию» можно органично разделить на две части. Первые четыре главы посвящены в основном рассмотрению в среднем изотропной и однородной Вселенной. В них анализируются такие фундаментальные блоки, как эволюция Вселенной до момента образования галактик, реликтовое излучение, ранняя Вселенная, инфляционный период и др. Вторая часть книги (главы 5–10) посвящена анализу различных отклонений Вселенной от усредненного состояния. Здесь излагается общий формализм и его применение к эволюции неоднородностей, анализируется анизотропия реликтового излучения, крупномасштабная структура, гравитационное линзирование и др.

В книге не просто сообщаются результаты, полученные численными расчетами, но делается упор на аналитическое описание космологических явлений, позволяющее проникнуть в их суть. В «Космологии» детально описываются многие самые смелые современные идеи, которые редко встречаются в обзорах по космологии и для изучения которых надо погружаться в специальные статьи. В монографии также представлены актуальные измерения космологических параметров, для того чтобы дать читателю представление об успехах наблюдательной науки.

В приложениях собран технический материал, необходимый для понимания основного текста книги, представлен словарь обозначений и дана подборка интересных задач. Монография содержит великолепный исчерпывающий список литературы со ссылками на оригинальные статьи.

Книгу отличает прекрасный стиль и внимание к читателю, что влечет за собой отточенность формулировок и ясность изложения. Она, безусловно, будет интересна всем исследователям, занимающимся космологией, как экспериментаторам, так и теоретикам, а также физикам, специализирующимся на изучении элементарных частиц.

*Перевод с английского: К. Б. Алкалаев, В. Э. Подобед, А. В. Берков*

*Книга «Космология» была впервые опубликована на английском языке в 2008 г. Перевод на русский язык публикуется по соглашению с Oxford University Press*

*Cosmology, First Edition, was originally published in English in 2008. This translation is published by arrangement with Oxford University Press*

Издательство «Книжный дом «ЛИБРОКОМ»». 117335, Москва, Нахимовский пр-т, 56.  
Формат 70×100/16. Печ. л. 38. Зак. № К-9731.

Отпечатано в ГУП ЧР «ИПК «Чувашия» Мининформполитики Чувашии.  
428019, г. Чебоксары, пр-т И. Яковleva, 13.

ISBN 978-5-453-00040-1  
(УРСС)

© УРСС, 2012  
© Steven Weinberg, 2008

ISBN 978-5-397-03648-1  
(Книжный дом «ЛИБРОКОМ»)



E-mail: URSS@URSS.ru  
Тел./факс (многоканальный):  
+ 7 (499) 724 25 45  
Каталог изданий в Интернете:  
<http://URSS.ru>

10267 ID 167530

9 785397 036481

*Луизе, Элизабет и Габриэле*

# **Содержание**

Предисловие редакторов перевода . . . . .	13
Предисловие . . . . .	14
Основные обозначения . . . . .	19
<b>Глава 1. РАСПИРЕНИЕ ВСЕЛЕННОЙ . . . . .</b>	<b>21</b>
<b>1.1. Геометрия пространства-времени . . . . .</b>	<b>22</b>
Метрика Робертсона—Уокера • Сопутствующие координаты • Собственные расстояния • Распад импульса • Пространственные геодезические • Сохранение числа • Сохранение энергии и импульса • Холодная материя, горячая материя, вакуумная энергия • Глобальные геометрия и топология	
<b>1.2. Космологическое красное смещение . . . . .</b>	<b>30</b>
Время испускания как функция радиальной координаты • Красные и голубые смещения • Постоянная Хаббла • Открытие расширения • Меняющиеся красные смещения	
<b>1.3. Расстояния при малых красных смещениях: постоянная Хаббла . . . . .</b>	<b>34</b>
Тригонометрический параллакс • Собственные движения • Видимая светимость: главная последовательность, красное звездное сгущение, звезды типа RR Лиры, вращающиеся двойные звезды, цефеиды • Соотношение Талли—Фишера • Соотношение Фабера—Джексона • Главная последовательность • Сверхновые типа Ia • Флуктуации поверхностной яркости • Результат для постоянной Хаббла	
<b>1.4. Фотометрическое расстояние и расстояние по угловому диаметру . . . . .</b>	<b>53</b>
Фотометрическое расстояние • Параметр замедления • Рывок и толчок • Расстояние по угловому диаметру	
<b>1.5. Динамика расширения . . . . .</b>	<b>57</b>
Уравнения поля Эйнштейна • Уравнение Фридмана • Вывод в ньютоновском приближении • Критическая плотность • Проблема плоскостности • Расширение при доминировании вещества • Радиационно-доминированное расширение • Расширение при доминировании вакуума • Модель де Ситтера • $\Omega_m$ , $\Omega_R$ , $\Omega_\Lambda$ • Формула для фотометрического расстояния • Будущее расширение • Историческое замечание: космологическая постоянная • Историческое замечание: стационарная модель	
<b>1.6. Расстояния при больших красных смещениях: ускоряющееся расширение . . . . .</b>	<b>68</b>
Открытие ускоряющегося расширения • Ньютоновская интерпретация • Серая пыль? • Открытие ранней стадии замедления ускорения • Другие	

---

эффекты • Параметр $w$ в уравнении состояния • Наблюдения в рентгеновских лучах • Проблемы космологической постоянной	
<b>1.7. Космическое расширение или «усталость» света? . . . . .</b>	<b>81</b>
Тест на поверхностную яркость • Замедление спада сверхновых	
<b>1.8. Возрасты . . . . .</b>	<b>83</b>
Распространенность тяжелых элементов • Выключение главной последовательности • Возраст и красное смещение	
<b>1.9. Массы . . . . .</b>	<b>90</b>
Усредненные по теореме вириала кластеры галактик: $\Omega_m$ • Рентгеновская светимость кластеров галактик: $\Omega_b/\Omega_m$	
<b>1.10. Межгалактическое поглощение . . . . .</b>	<b>100</b>
Оптическая глубина • Резонансное поглощение • Поглощение на длине волны 21 см • Поглощение на линии Лайман- $\alpha$ • Владина Ганна—Петерсона • Анализ Алкока—Пачинского	
<b>1.11. Подсчеты числа источников . . . . .</b>	<b>108</b>
Числа vs $z$ и $\ell$ • Эволюция • Обзор радиоисточников	
<b>1.12. Квинтэссенция . . . . .</b>	<b>114</b>
Теории скалярного поля • Степенной потенциал • Следящее решение • Двухпараметрические модели	
<b>1.13. Горизонты . . . . .</b>	<b>124</b>
Горизонт частиц • Горизонт событий	
<b>Глава 2. РЕЛИКТОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ . . . . .</b>	<b>127</b>
<b>2.1. Предвосхищение и открытие реликтового излучения . . . . .</b>	<b>127</b>
Излучение черного тела • Ранние гипотезы • Открытие • Формула Рэлея—Джинса • Линии поглощения CN • Воздушные шары и ракеты • COBE и FIRAS • Плотность энергии • Плотность числа частиц • Влияние на космическое излучение	
<b>2.2. Эпоха равновесия . . . . .</b>	<b>135</b>
Энтропия в расчете на один барион • Баланс излучения и вещества • Разделение энергии	
<b>2.3. Рекомбинация и последнее рассеяние . . . . .</b>	<b>140</b>
Распределение Максвелла—Больцмана • Формула Саха • Распад $n = 2$ в $n = 1$ • Анализ Пиблза • Вероятность Лайман- $\alpha$ убегания • Уравнение для скорости • Дробная ионизация • Непрозрачность • Приближение Джонса—Вайза	
<b>2.4. Дипольная анизотропия . . . . .</b>	<b>157</b>
Угловое распределение температуры • Открытие U2 • Измерения COBE и WMAP • Кинематический квадруполь	
<b>2.5. Эффект Сюняева—Зельдовича . . . . .</b>	<b>160</b>
Уравнение Компанейца • Спектральный сдвиг • Использование вместе с рентгеновской светимостью	

<b>2.6. Первичные флуктуации реликтового излучения: беглый взгляд . . . . .</b>	<b>164</b>
Коэффициенты парциальных волн $a_{\ell m}$ • Мультипольные коэффициенты $C_\ell$ • Космическая дисперсия • Эффект Сакса—Вольфе • Спектр Гаррисона—Зельдовича • Доплеровские флуктуации • Внутренние температурные флуктуации • Интегрированный эффект Сакса—Вольфе • Наблюдения COBE	
<b>Глава 3. РАННЯЯ ВСЕЛЕННАЯ . . . . .</b>	<b>177</b>
<b>3.1. Температурная история . . . . .</b>	<b>177</b>
Плотность энтропии • Распределения Ферми—Дирака и Бозе—Эйнштейна • Время против температуры • Эффективное число сортов • Отщепление нейтрино • Разогрев за счет электрон-позитронной аннигиляции • Массы нейтрино и химические потенциалы	
<b>3.2. Космологический нуклеосинтез . . . . .</b>	<b>188</b>
Конверсия нейтрон — протон • Равновесные ядерные распространенности • Дейтериевое «бутылочное горлышко» • Распространенность гелия • Распространенность дейтерия • Распространенность $^3\text{He}$ • Распространенность лития • $\Omega_b h^2$	
<b>3.3. Бариосинтез и лептосинтез . . . . .</b>	<b>203</b>
Условия Сахарова • Задержанный распад • Электрослабое несохранение • Лептогенез • Механизм Аффлека—Дайна • Равновесный нуклеосинтез	
<b>3.4. Холодная темная материя . . . . .</b>	<b>216</b>
Кластер Пуля • Распространенность WIMPs с преобладанием левых частиц • Счастицы • Поиски WIMPs • Аннигиляционное гамма-излучение • Аксиды и аксино	
<b>Глава 4. ИНФЛЯЦИЯ . . . . .</b>	<b>233</b>
<b>4.1. Три вопроса . . . . .</b>	<b>234</b>
Плоскостность • Горизонты • Монополи	
<b>4.2. Медленная инфляция . . . . .</b>	<b>240</b>
Формирование пузырей • Новая инфляция • Условия медленного скатывания • Степенной потенциал • Экспоненциальный потенциал • Повторный разогрев	
<b>4.3. Хаотическая инфляция, вечная инфляция . . . . .</b>	<b>248</b>
Условие вечной инфляции • Условие хаотичной инфляции	
<b>Глава 5. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ МАЛЫХ ФЛУКТУАЦИЙ . . . . .</b>	<b>251</b>
<b>5.1. Полевые уравнения . . . . .</b>	<b>251</b>
Возмущенный тензор Риччи • Возмущенный тензор энергии-импульса • Скалярные моды • Векторные моды • Тензорные моды	
<b>5.2. Разложение Фурье и стохастические начальные условия . . . . .</b>	<b>260</b>
Решения в виде плоских волн • Стохастические параметры • Корреляционные функции • Разложение по спиральностям	

---

<b>5.3. Выбор калибровки . . . . .</b>	<b>268</b>
Калибровочные преобразования • Ньютоновская калибровка • Синхронная калибровка • Конверсия • Другие калибровки	
<b>5.4. Законы сохранения за пределами горизонта . . . . .</b>	<b>277</b>
Величины $\mathcal{R}$ и $\zeta$ • Теорема о сохранении • Сохранение для изолированных компонентов	
<b>Глава 6. ЭВОЛЮЦИЯ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ . . . . .</b>	<b>290</b>
<b>6.1. Скалярные возмущения — кинетическая теория . . . . .</b>	<b>291</b>
Холодная темная материя • Барионная плазма • Возмущение $\delta n^{ij}$ матрицы плотности числа фотонов • Безразмерная матрица $J_{ij}$ интенсивности фотонов • Уравнения Больцмана для фотонов • Функции источника для фотонов • Давление, плотность и анизотропная инерция фотонов • Решения для фотонов на линии прямой видимости • Возмущения $\delta n_\nu$ плотности числа нейтрино • Безразмерная интенсивность нейтрино $J$ • Уравнения Больцмана для нейтрино • Давление, плотность и анизотропная инерция для нейтрино • Решения для нейтрино на линии прямой видимости • Уравнения гравитационного поля • Начальные условия	
<b>6.2. Скалярные возмущения — гидродинамический предел . . . . .</b>	<b>307</b>
Гидродинамика и полевые уравнения • Адиабатические начальные условия • Неадиабатические моды • Малые и большие длины волн	
<b>6.3. Скалярные возмущения — длинные волны . . . . .</b>	<b>315</b>
Эволюция очень далеко за горизонтом • Эволюция в эру доминирования материи	
<b>6.4. Скалярные возмущения — короткие длины волн . . . . .</b>	<b>323</b>
Эволюция в эру доминирования излучения • Эволюция глубоко внутри горизонта • Быстрые и медленные моды • Совместимость	
<b>6.5. Скалярные возмущения — интерполяция и передаточные функции . . . . .</b>	<b>337</b>
Точное решение для $\bar{\rho}_6 = 0$ • Передаточные функции • Эффекты плотности и затухания для барионов	
<b>6.6. Тензорные возмущения . . . . .</b>	<b>347</b>
Уравнения гравитационного поля • Уравнения Больцмана для фотонов • Функции источника для фотонов • Анизотропная инерция фотонов • Решение для фотонов на линии прямой видимости • Уравнения Больцмана для нейтрино • Анизотропная инерция для нейтрино • Решения для нейтрино на линии прямой видимости • Эволюция без затухания • Передаточные функции • Влияние затухания	
<b>Глава 7. АНИЗОТРОПИИ НА МИКРОВОЛНОВОМ НЕБЕ . . . . .</b>	<b>364</b>
<b>7.1. Общие формулы для флюктуаций температуры . . . . .</b>	<b>364</b>
Формула на линии прямой видимости • Перестройка скалярных температурных флюктуаций • Проинтегрированный эффект Сакса—Вольфе	

- Приближение внезапного расцепления • Повторный вывод, следуя траекториям фотонов • Калибровочная инвариантность

## **7.2. Температурные мультипольные коэффициенты: скалярные моды . . . . . 379**

- Общая формула • Приближение больших  $\ell$  • Расчет формфакторов • Затухание Силка—Ландау • Сравнение с числовыми кодами • Наблюдения на земле и на воздушных шарах • WMAP • Результаты для космологических параметров

## **7.3. Температурные мультипольные коэффициенты: тензорные моды . . . . . 398**

- Общая формула • Расчет амплитуды гравитационной волны • Расчет функции источника • Приближение больших  $\ell$  • Приближение внезапного расцепления • Численные результаты

## **7.4. Поляризация . . . . . 407**

- Параметры Стокса • Сферические гармоники спина  $\pm 2$  • Свойства инверсии пространства • Поляризация  $E$  и  $B$  • Скалярные моды: общая формула • Скалярные моды: приближение больших  $\ell$  • Скалярные моды: численные результаты • Скалярные моды: наблюдения • Тензорные моды: общая формула • Тензорные моды: приближение больших  $\ell$  • Тензорные моды: численные результаты • Корреляционные функции

## **Глава 8. РОСТ СТРУКТУРЫ . . . . . 438**

### **8.1. Линейные возмущения после рекомбинации . . . . . 439**

- Гидродинамика и уравнения поля • Факторизация возмущений • Эффект вакуумной энергии • Степенная спектральная функция  $P(k)$  • Корреляционная функция • Прямое измерение  $P(k)$  • Среднеквадратичная флуктуация  $\sigma_R$  • Измерение  $P(k)$  • Барионные акустические осцилляции • Космическая дисперсия при измерении  $P(k)$

### **8.2. Нелинейный рост . . . . . 457**

- Сферически симметричный коллапс • Вычисление  $\sigma_R$  • Массовая функция Пресса—Шехтера

### **8.3. Коллапс барионной материи . . . . . 463**

- Масса Джинса • Непрерывность • Уравнения Эйлера • Степенные решения • Критическое волновое число для барионного коллапса

## **Глава 9. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ЛИНЗЫ . . . . . 468**

### **9.1. Уравнение линзы для точечных масс . . . . . 468**

- Выход уравнения линзы • Разделение изображений • Кольцо Эйнштейна

### **9.2. Увеличение: сильное линзирование и микролинзирование . . . . . 471**

- Светимость изображения • Сохранение поверхностной яркости • Эффективный радиус сильного линзирования • Численные расчеты • Модель де Ситтера • Модель Эйнштейна—де Ситтера • Обзор линз • Наблюдения микролинзирования

### **9.3. Протяженные линзы . . . . . 479**

- Уравнение линзы • Светимость линзы • Численные расчеты • Обзоры

---

<b>9.4. Задержка во времени . . . . .</b>	<b>483</b>
Геометрическая задержка • Потенциальная задержка • Наблюдения	
<b>9.5. Слабое линзирование . . . . .</b>	<b>489</b>
Вычисление отклонения • Матрица сдвига • Матрица эллиптичности	
• Средняя матрица сдвига • Поле сдвига $\kappa$ • Мультипольные коэффициенты • Приближение больших $\ell$ • Измерение $P(k)$ • Корреляционные функции • Обзор сдвигов	
<b>9.6. Космические струны . . . . .</b>	<b>505</b>
Вычисление отклонения • Подозрение на струны	
<b>Глава 10. ИНФЛЯЦИЯ КАК ПРИЧИНА ВОЗНИКНОВЕНИЯ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ . . . . .</b>	<b>507</b>
<b>10.1. Скалярные флуктуации во время инфляции . . . . .</b>	<b>508</b>
Действие скалярного поля • Возмущения поля, плотности, давления и скорости • Уравнения поля • ВКБ-решение в ранние моменты времени • Разложение Фурье • Коммутационные соотношения • Вакуум Банча—Дэвиса • Гауссова статистика • Возмущение кривизны $\mathcal{R}$ • Уравнение Муханова—Сасаки • Предел $\mathcal{R}_q^r$ вне горизонта • Число $e$ -кратностей после выхода из-под горизонта • Экспоненциальный потенциал • Измерение силы спектрального индекса и флуктуаций • Значения параметров экспоненциального потенциала • Подтверждение простого действия	
<b>10.2. Тензорные флуктуации во время инфляции . . . . .</b>	<b>524</b>
Уравнения гравитационного поля • ВКБ-решение в ранние моменты времени • Разложение Фурье • Коммутационные соотношения • Отношение скаляр/тензор $r$ • Наблюдательные границы на $r$	
<b>10.3. Флуктуации во время инфляции: приближение медленного скатывания . . . . .</b>	<b>527</b>
Параметры $\epsilon$ и $\delta$ • Приближение медленного скатывания • Сила спектрального индекса и флуктуаций • Наблюдательные ограничения на потенциал • Число $e$ -кратностей после выхода из-под горизонта	
<b>10.4. Мультиполевая инфляция . . . . .</b>	<b>537</b>
Гауссовы, адиабатические, масштабно-инвариантные и слабые флуктуации • Тепловое равновесие после инфляции • Уравнения эволюции • ВКБ-решение в ранние моменты времени • Реперы • Коммутационные соотношения • Условия медленного скатывания • Кривизна $\mathcal{R}$ после выхода из-под горизонта • Что мы узнали об инфляции?	
<b>Приложение А. Некоторые полезные числа . . . . .</b>	<b>548</b>
<b>Приложение В. Обзор общей теории относительности . . . . .</b>	<b>549</b>
<b>Приложение С. Обмен энергией между излучением и электронами . . . . .</b>	<b>563</b>
<b>Приложение Д. Эргодическая теорема . . . . .</b>	<b>568</b>
<b>Приложение Е. Гауссовские распределения . . . . .</b>	<b>569</b>

Приложение F. Ньютоновская космология . . . . .	570
Приложение G. Поляризация фотонов . . . . .	573
Приложение H. Релятивистское уравнение Больцмана . . . . .	575
Словарь обозначений . . . . .	585
Подборка задач . . . . .	591
Именной указатель . . . . .	594
Предметный указатель . . . . .	601

## **Предисловие редакторов перевода**

Космология изучает проблемы происхождения и эволюции Вселенной на основе общей теории относительности и квантовой теории. За последние десятилетия космология вышла на качественно новый уровень, в первую очередь благодаря данным радиотелескопов на спутниках.

Современная космология берет начало в работах российского ученого А. А. Фридмана, который в 1922 году нашел решения уравнений Эйнштейна, описывающие расширяющуюся Вселенную. В 1929 году наблюдения Э. Хаббла подтвердили это предсказание. В 1948 году Г. А. Гамов предложил модель «горячего» рождения Вселенной и на основе этой модели предсказал существование реликтового излучения, случайно открытого спустя 17 лет радиоастрономами А. Пензиасом и Р. Вилсоном. Именно свойства реликтового излучения стали предметом детального изучения в спутниковых экспериментах COBE, WMAP, Planck и др., в качестве мощного средства для измерения динамики и геометрии Вселенной, начиная с достаточно ранних стадий ее эволюции. Фундаментальный вклад в современную космологию внесли работы Я. Б. Зельдовича, А. А. Старобинского, А. Д. Линде, В. А. Рубакова и других российских ученых.

Основным результатом спутниковых наблюдений стало то, что свойства современной и ранней Вселенной, равно как и особенности ее эволюции, известны сегодня не только качественно, но и количественно. Другими словами, появилась Стандартная космологическая модель, удовлетворяющая всей совокупности данных наблюдений, которая описывает как эволюцию Вселенной в целом, так и образование ее крупномасштабной структуры. Описанию этой модели и посвящена предлагаемая книга Стивена Вайнберга по современной космологии.

Стивен Вайнберг является автором современной теории элементарных частиц — Стандартной модели. В 1979 ему совместно с Шелдоном Ли Глэшоу и Абдусом Саламом была присуждена Нобелевская премия по физике за создание теории слабых и электромагнитных взаимодействий элементарных частиц.

Книги Стивена Вайнберга «Первые три минуты», «Гравитация и космология», «Мечты об окончательной теории» (М.: URSS, 2008) и др. заслуженно пользуются у российского читателя высоким успехом.

Новая книга, предлагаемая вниманию российского читателя, представляет собой тот редкий случай, когда ученый уровня Вайнберга не просто излагает результаты своих исследований, а фактически приглашает в свою творческую лабораторию. Здесь можно научиться и четкой постановке задач, и выбору наиболее эффективных методов для их решения и скрупулезному сопоставлению результатов вычислений с данными наблюдений. Читатели книги Вайнберга имеют возможность познакомиться с современными научными представлениями о тайнах мироздания.

Ирина Арефьева  
Валерий Санюк

## Предисловие

За последние четверть века необычайно оживились исследования в области космологии. Предложенная в начале 1980-х гг. теория инфляции привела к решению ряда знаменитых космологических загадок и предложила механизм происхождения крупномасштабной структуры, который можно проверить наблюдениями анизотропии космического микроволнового фона. В ноябре 1989 г. мы стали свидетелями запуска спутника-исследователя космического фона COBE (Cosmic Background Explorer Satellite). Измерения с помощью помещенного на спутнике спектрофотометра вскоре подтвердили тепловую природу космического микроволнового фона и определили его температуру с беспрецедентной для космологии точностью в три знака после запятой. Чуть позже в данных, собранных радиометром спутника, была обнаружена давно ожидавшаяся анизотропия микроволнового фона. Последующие наблюдения с помощью приборов на Земле, на воздушных шарах и, наконец, на спутнике WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) показали, что эта анизотропия намного больше той, которую можно ожидать на основании инфляционной теории. В конце 1990-х гг. использование сверхновых типа Ia в качестве стандартных свечей привело к открытию, что расширение Вселенной ускоряется, откуда следует, что основная часть энергии Вселенной представляет собой некий вид темной энергии с отношением давления к плотности менее чем  $-1/3$ . Это получило подтверждение путем точных наблюдений анизотропии микроволнового фона и массового обследования галактик, что в совокупности привело к установлению необычайно точных значений космологических параметров.

Одновременно классические методы астрономии позволили получать постоянно уточняющиеся независимые ограничения на те же самые космологические параметры. Открытие с помощью спектроскопии тяжелых элементов, наличия тория, а затем урана в атмосферах старых звезд вместе с постоянным изучением ухода с главной последовательности в шаровых скоплениях привело ко все более точным оценкам возраста Вселенной. Измерение отношения дейтерия к водороду в межзвездном поглощении вместе с расчетами космологического нуклеосинтеза дало хорошую величину для космической плотности обычной барионной материи и показало, что она составляет только пятую часть плотности определенного типа загадочной небарионной холодной темной материи. Наблюдения с помощью космического телескопа «Хаббл», а также с помощью наземных телескопов давали все более точные значения постоянной Хаббла. Весьма обнадеживает то, что некоторые параметры, измеренные этими средствами, имеют значения, согласующиеся

---

с теми, которые получены при изучении космического микроволнового фона и крупномасштабной структуры.

Движение вперед продолжается. В предстоящие годы мы можем ожидать получения определенной информации о том, постоянна ли плотность темной энергии или она меняется со временем, а также надеемся обнаружить признаки гравитационного излучения, которое откроет для изучения эру инфляции. Мы можем установить природу темной материи, либо искусственно создав частицы такой материи на новых больших ускорителях, либо непосредственно наблюдая столкновение с Землей частиц естественной темной материи. Остается еще понять, может ли в наше время фундаментальная физическая теория обеспечить нас конкретной теорией инфляции либо объяснить темную материю или темную энергию.

Это новое оживление в космологии явилось сигналом для физиков, занимающихся элементарными частицами. К 1980-м гг. хорошо утвердилась Стандартная модель элементарных частиц и полей. Хотя продолжается существенная теоретическая и экспериментальная работа, между экспериментом и новыми теоретическими идеями осталось мало контактов, а без такого контакта физика частиц потеряла большую часть своей привлекательности. Сегодня космология предлагает физике частиц материал, который будет способствовать ее подъему, как в 1960-е и 1970-е гг.

В 1999 г. я завершил трехтомную книгу по квантовой теории полей (далее цитируется как КТП) и, обнаружив у себя непривычно много свободного времени, поставил перед собой задачу детально изучить теорию, лежащую в основе достигнутого за прошлые два десятилетия прогресса в космологии. Хотя в прошлом я немного занимался исследованиями по космологии, потребовались значительные усилия для того, чтобы выйти на современный уровень. Обзорные статьи по космологии содержали хорошие сводки данных, но часто в этих статьях формулы цитировались без вывода, а иногда даже без ссылок на исходный вывод. Некоторые формулы оказывались неправильными, и поэтому мне было необычайно трудно выводить их заново. Когда мне удавалось найти исходные ссылки, то выяснялось, что в статьях содержались или пробелы в доказательствах, или опора на скрытые предположения, или использование необъясненных обозначений. Часто аналитические исследования заменялись огромными компьютерными программами. Во многих случаях я обнаруживал, что легче самому построить соответствующую теорию.

Результатом явилась эта книга. Ее цель — дать замкнутые объяснения идей и формул, которые используются и проверяются в современных космологических наблюдениях. Книгу можно разделить на две части, каждая из которых, по моему опыту преподавания предмета, содержит достаточно материала для односеместрового курса лекций для старшекурсников. В первой части (главы от 1 до 4) в основном речь идет о в среднем изотропной и однородной Вселенной, и только в разд. 2.6 дается краткое введение в вопрос об анизотропиях. Эти главы расположены в более или менее обратном хронологическом

порядке; в гл. 1 речь идет о Вселенной до момента образования галактик, что примерно соответствует красным смещениям  $z < 10$ ; в гл. 2 рассматривается микроволновой фон, испущенный при красном смещении  $z \approx 1000$ ; гл. 3 описывает раннюю Вселенную от начала радиационно-доминированного расширения до красного смещения  $z \approx 10^4$ , когда плотность излучения стала меньше плотности материи; наконец, гл. 4 охватывает период инфляции, который, как полагают, предшествовал радиационно-доминированной эре. Вторая часть книги (главы от 5 до 10) посвящена отклонениям от средних параметров Вселенной. После изложения общего формализма в гл. 5 и его применения к эволюции неоднородностей в гл. 6 я возвращаюсь в гл. 7 к анизотропиям микроволнового фона и рассматриваю крупномасштабную структуру материи в гл. 8. Гравитационное линзирование рассматривается ниже в гл. 9, так как наиболее важное космологическое приложение связано с использованием слабого линзирования для изучения крупномасштабной структуры. Исследование инфляции в гл. 4 имело дело только со средними свойствами Вселенной в инфляционную эру; я возвращаюсь к инфляции в гл. 10, где обсуждаю рост неоднородностей от квантовых флуктуаций во время инфляции.

Я пытался в этой книге в максимально возможной степени представить аналитические вычисления космологических явлений, а не просто сообщать результаты, полученные численными расчетами. Использующиеся в литературе расчеты для сравнения наблюдений с теорией по необходимости принимают во внимание много деталей, которые либо делают аналитическое исследование невозможным, либо затемняют главные физические особенности расчетов. В таких случаях я не колебался и жертвовал определенной степенью точности в пользу большей ясности. Особенно это коснулось гидродинамического рассмотрения космических флуктуаций в разд. 6.2–6.5 и рассмотрения крупномасштабной структуры в гл. 8. Однако в разд. 6.1 и приложении Н я также отдаю должное более точной кинетической теории, на которой основаны современные космологические компьютерные программы. Оба подхода применяются к расчету анизотропий космического микроволнового фона в гл. 7.

С 1960-х гг. в космологии произошло так много событий, что эта книга мало напоминает мой труд 1972 г. «Гравитация и космология». Изредка я отсылаю к этой книге (цитируемой как ГиК) за материалом, который нет смысла повторять здесь. Классическая общая теория относительности мало изменилась с 1972 г. (если не считать большого усиления экспериментального подтверждения), так что мне казалось ненужным излагать гравитацию и космологию в данной книге. Однако для удобства читателей, которые хотят освежить в памяти знания по общей теории относительности и привыкнуть к моим обозначениям, я предлагаю в приложении В краткое введение в общую теорию относительности. В других Приложениях речь идет о техническом материале, который оказывается полезным в разных местах этой книги. Я также

поместил в конце этой книги словарь обозначений, используемых в более чем одном разделе, и набор задач.

Чтобы удержать книгу в приемлемых размерах, я решил исключить материал, являющийся в значительной степени спекулятивным. Так, в этой книге не обсуждаются космологическая теория в высших измерениях, антропные рассуждения, голографическая космология или гипотезы о деталях инфляции и много других новых идей. Возможно, некоторые из них я включу в следующий том. Данная книга во многом посвящена тому, что называется магистральной космологией, — сценарию, согласно которому за инфляцией, запущенной одним или несколькими скалярными полями, следует Большой взрыв, управляемый излучением, холодной темной материи, барионной материи и вакуумной энергией.

Я надеюсь, что обсуждение представленных в книге вопросов отвечает состоянию дел на момент  $200n$  года, где  $n$  — целое число, меняющееся в разных частях книги от 1 до 7. Я пытался дать ссылки на все имеющиеся к этому времени и относящиеся к делу астрофизические работы, но несомненно не мог не пропустить какие-то статьи. В большинстве случаев отсутствие литературной ссылки не следует интерпретировать как претензию на авторство, хотя в некоторых случаях это так и есть. В известных мне случаях я включал ссылки не только на опубликованные работы, но и на постинги в Корнелльском архиве (<http://arxiv.org>). В ряде случаев я указывал только Корнелльский архивный номер, если обсуждаемая статья еще не вышла в свет или если она никогда не была представлена к публикации. Я цитировал последние известные мне измерения космологических параметров отчасти потому, что хотел дать читателю представление о том, что сейчас стало возможным наблюдать. Однако я не пытался комбинировать измерения, полученные в наблюдениях разных типов, так как не думаю, что это добавило бы какое-то дополнительное физическое понимание, а любое такое космологическое согласие очень скоро стало бы устаревшим.

Я в большом долгу перед моими коллегами из Техасского университета, в том числе перед Томасом Барнсом, Фрицем Бенедиктом, Вилли Фишлером, Карлом Гебхардтом, Патриком Грином, Ричардом Матцнером, Паулем Шапиро, Крейгом Уилером и, особенно, Дуаной Дикус, которая выполнила ряд численных расчетов и нашла много ошибок. Среди моих коллег я особенно благодарен Еичиро Комацу, который прочел корректуру рукописи и был неиссякаемым источником идей и информации о космологических исследованиях. Большую помощь в выполнении рисунков и в расчетах окказал мне студент-исследователь Рафаэль Флаугер; кроме того, Флаугер и другие студенты — Джингу Ли Боретц, Каннокуан Чайчердзакул, Бо Ли, Ян Родерер и Юки Ватанабе — указали мне на многочисленные ошибки. Мэтью Андерсон помог выполнить численные расчеты космологического нуклеосинтеза. Я также много узнал из переписки по специальным вопросам с Эдом Бертшингером, Диком Бондом, Латамом Бойлем, Робертом Каном, Аланом Гутом,

Робертом Киршнером, Андреем Линде, Эриком Линдером, Вячеславом Мухановым, Солом Перлмуттером, Джонатаном Притчардом, Адамом Рисом, Уросом Сельджаком, Паулем Стейнхардтом, Эдвином Тернером и Матиасом Зальдарриагой. Выражаю также благодарность Яну Даффи и Терри Рили за большую помощь. Конечно, я один несу ответственность за все ошибки, которые могли остаться в книге. Надеюсь, что читатели дадут мне знать о любых ошибках, которые они заметят; я выложу их на веб-странице<sup>1)</sup>

<http://zippy.ph.utexas.edu/~weinberg/corrections.html>

*Остин, Техас  
Июнь 2007*

---

<sup>1)</sup> В данном издании учтены опечатки, указанные на сайте на момент передачи книги в печать. — *Прим. изд.*

## Основные обозначения

Латинские индексы  $i, j, k$  и т. п. в общем случае являются индексами трех пространственных координат, обычно они принимают значения 1, 2, 3.

Греческие индексы  $\mu, \nu$  и т. п. в общем случае являются индексами четырех пространственно-временных координат 1, 2, 3, 0, причем  $x^0$  является временной координатой.

Если не оговорено особо, по повторяющимся индексам производится суммирование.

Плоская пространственно-временная метрика  $\eta_{\mu\nu}$  диагональна, причем диагональные элементы равны  $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$ ,  $\eta_{00} = -1$ .

Пространственные три-векторы отмечаются полужирными буквами.

Шляпка над любым вектором обозначает соответствующий единичный вектор. Так,  $\hat{v} = v/|v|$ .

Точка над любой величиной обозначает производную от этой величины по времени.

$$\nabla^2 \text{ — лапласиан } \frac{\partial^2}{\partial(x^1)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(x^2)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(x^3)^2}.$$

За исключением векторов и тензоров, нижний индекс 0 обозначает текущий момент времени.

Когда речь идет о плотностях, давлениях и скоростях, нижние индексы  $B$ ,  $D$ ,  $\gamma$  и  $\nu$  относятся соответственно к барионной плазме (ядра и электроны), холодной темной материи, фотонам и нейтрино, в то время как нижние индексы  $M$  и  $R$  относятся соответственно к нерелятивистской материи (барионная плазма плюс холодная темная материя) и излучению (фотоны плюс нейтрино).

Комплексное сопряжение, транспонирование и эрмитово сопряжение матрицы или вектора  $A$  обозначаются  $A^*$ ,  $A^T$  и  $A^\dagger = A^{*T}$ , соответственно. Обозначение + э. с. или + к. с. в конце формулы указывает на добавление к предыдущим слагаемым их эрмитово или комплексно сопряженных выражений.

Начиная с гл. 5 черта над любым символом обозначает невозмущенное значение соответствующей величины.

Когда речь идет о волновых числах,  $q$  используется для сопутствующих волновых чисел при произвольной нормировке масштабного фактора Робертсона—Уокера  $a(t)$ , в то время как  $k$  равно нынешнему значению  $q/a_0$  соответствующего физического волнового числа  $q/a(t)$ .

Это отличается от общепринятой практики использования  $k$  для обозначения сопутствующего волнового числа с меняющимися соглашениями для нормировки  $a(t)$ .

Если не оговорено особо, мы используем единицы, в которых  $\hbar$  и скорость света равны единице. Везде в книге  $-e$  есть рационализированный заряд электрона, так что постоянная тонкой структуры равна  $\alpha = e^2/(4\pi) \simeq 1/137$ .

Числа в круглых скобках в конце приводимых числовых данных дают неопределенность в последних цифрах цитируемого числа.

О других символах, используемых более чем в одном разделе, см. в Словаре обозначений на с. 585.

# Глава 1

## РАСШИРЕНИЕ ВСЕЛЕННОЙ

Если смотреть в любую сторону, заглядывая на расстояния, превышающие по крайней мере 300 миллионов световых лет, видимая Вселенная кажется одинаковой<sup>1)</sup>. Для космического фона микроволнового излучения, о котором пойдет речь в гл. 2 и 7, изотропия оказывается намного более точной (порядка  $10^{-5}$ ). Как будет показано в этих главах, такое излучение приходит к нам примерно 14 миллиардов лет, и это подкрепляет вывод о том, что на достаточно больших расстояниях Вселенная почти одинакова во всех направлениях.

Трудно представить себе, что мы находимся в каком-то особом положении во Вселенной, так что мы приходим к заключению, что Вселенная должна выглядеть для наблюдателей изотропной, где бы они ни находились. Но это верно не для всех наблюдателей. Вселенная не покажется изотропной наблюдателям в космическом корабле, который мчится сквозь нашу Галактику со скоростью, равной половине скорости света. Такие наблюдатели увидят, что с того направления, в котором они движутся, свет звезд и микроволновое фоновое космическое излучение приходят к ним с намного большей интенсивностью, чем сзади. Формулируя предположение об изотропности, нужно уточнить, что Вселенная кажется одинаковой по всем направлениям для семейства «типичных» свободно падающих наблюдателей — тех наблюдателей, которые движутся со средней скоростью типичных галактик, находящихся по соседству. Иными словами, условия должны быть одинаковыми в одно и то же время (при подходящем определении времени) во всех точках, которые могут быть перенесены друг в друга вращением относительно любой типичной галактики. Однако последовательностью таких вращений относительно различных типичных галактик можно перенести любую точку в любую другую, так что Вселенная оказывается еще и однородной — наблюдатели во всех типичных галактиках в один и тот же момент времени видят практически одинаковые условия<sup>2)</sup>.

---

<sup>1)</sup> K. K. S. Wu, O. Lahav, and M. J. Rees, *Nature* **397**, 225 (January 21, 1990). Противоположную точку зрения можно найти в P. H. Coleman, L. Pietronero, and R. H. Sanders, *Astron. Astrophys.* **200**, L32 (1988); L. Pietronero, M. Montuori, and F. Sylos-Labini, в сб. *Критические диалоги по космологии* (World Scientific, Singapore, 1997), 24; F. Sylos-Labini, M. Montuori, and L. Pietronero, *Phys. Rep.* **293**, 61 (1998).

<sup>2)</sup> Данные обзора Sloan Digital Sky Survey свидетельствуют о том, что распределение галактик однородно в масштабах больше чем примерно 300 млн св. лет; см. J. Yadav, S. Bharadwaj, B. Pandey, and T. R. Seshadri, *Mon. Not. Roy. Astronom. Soc.* **364**, 601 (2005) [astro-ph/0504315].

Предположение о том, что Вселенная изотропна и однородна, приводит нас в разд. 1.1 к выбору такой пространственно-временной системы координат, в которой метрика принимает простую форму, впервые исследованную Фридманом<sup>3)</sup> в качестве решения полевых уравнений Эйнштейна, а затем выведенную только на основе изотропности и однородности Робертсоном<sup>4)</sup> и Уокером<sup>5)</sup>. Почти вся современная космология основана на этой метрике Робертсона—Уокера, по крайней мере в качестве первого приближения. Наблюдаемые следствия этих предположений обсуждаются в разд. 1.2–1.4 без отсылок к каким-либо динамическим предположениям. Полевые уравнения Эйнштейна применяются к метрике Робертсона—Уокера в разд. 1.5, а их следствия изучаются в разд. 1.6–1.13.

---

## 1.1

---

### Геометрия пространства-времени

**Метрика Робертсона—Уокера • Сопутствующие координаты • Собственные расстояния • Распад импульса • Пространственные геодезические • Сохранение числа • Сохранение энергии и импульса • Холодная материя, горячая материя, вакуумная энергия • Глобальные геометрия и топология**

В качестве подготовки к изучению пространственно-временной метрики рассмотрим сперва геометрию трехмерного однородного и изотропного пространства. Как обсуждается в приложении B, геометрия заложена в *метрике*  $g_{ij}(x)$  (где  $i$  и  $j$  принимают значения, отвечающие трем координатным направлениям), или, что эквивалентно, в *элементе длины*<sup>6)</sup>  $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ , где подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

---

Мы говорим, что  $ds$  есть *собственное расстояние* между  $x$  и  $x + dx$ , имея в виду, что это есть расстояние, измеренное топографом, использующим координатную систему, декартову в малой окрестности точки  $x$ .

---

Очевидным примером однородного и изотропного трехмерного пространства с положительно определенными длинами является плоское пространство с элементом длины

$$ds^2 = dx^2. \quad (1.1.1)$$

Преобразования координат, оставляющие инвариантным это выражение, — просто обычные трехмерные вращения и переносы. Другой довольно очевид-

<sup>3)</sup> A. Friedman, *Z. Phys.* **10**, 377 (1922); *ibid.* **21**, 326 (1924).

<sup>4)</sup> H. P. Robertson, *Astrophys. J.* **82**, 284 (1935); *ibid.*, **83**, 187, 257 (1936).

<sup>5)</sup> A. G. Walker, *Proc. Lond. Math. Soc.* (2) **42**, 90 (1936).

<sup>6)</sup> Более точно — квадрат элемента длины. — *Прим. ред. перев.*

ной возможностью является сферическая поверхность радиуса  $a$  в четырехмерном евклидовом пространстве с элементом длины

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2 + dz^2, \quad z^2 + \mathbf{x}^2 = a^2. \quad (1.1.2)$$

В этом случае преобразования, оставляющие инвариантным линейный элемент, — четырехмерные вращения; направление  $\mathbf{x}$  можно изменить на любое другое путем четырехмерного вращения, оставляющего неизменным  $z$  (т. е. путем обычного трехмерного вращения), в то время как перенести  $\mathbf{x}$  в любую другую точку можно с помощью четырехмерного вращения, изменяющего  $z$ . Можно доказать<sup>7)</sup>, что единственная оставшаяся альтернатива (с точностью до преобразования координат) — гиперсферическая поверхность в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве с линейным элементом

$$ds^2 = d\mathbf{x}^2 - dz^2, \quad z^2 - \mathbf{x}^2 = a^2, \quad (1.1.3)$$

где  $a^2$  — (пока что) произвольная положительная константа. Преобразования координат, оставляющие это выражение инвариантным, — четырехмерные псевдовращения типа преобразований Лоренца, но с  $z$  вместо времени.

Можно изменить масштаб координат:

$$\mathbf{x}' \equiv \frac{\mathbf{x}}{a}, \quad z' \equiv \frac{z}{a}. \quad (1.1.4)$$

Если опустить штрихи, линейные элементы в сферическом и гиперсферическом случаях запишутся в виде

$$ds^2 = a^2 [d\mathbf{x}^2 \pm dz^2], \quad z^2 \pm \mathbf{x}^2 = 1. \quad (1.1.5)$$

Дифференциал уравнения  $z^2 \pm \mathbf{x}^2 = 1$  равен  $z dz = \mp \mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}$ , так что

$$ds^2 = a^2 \left[ d\mathbf{x}^2 \pm \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 \mp \mathbf{x}^2} \right]. \quad (1.1.6)$$

Можно распространить это выражение на случай евклидового пространства, записав его в виде

$$ds^2 = a^2 \left[ d\mathbf{x}^2 + K \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 - K \mathbf{x}^2} \right], \quad (1.1.7)$$

где

$$K = \begin{cases} +1 & \text{для сферического пространства,} \\ -1 & \text{для гиперсферического пространства,} \\ 0 & \text{для евклидова пространства.} \end{cases} \quad (1.1.8)$$

<sup>7)</sup> См. S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (John Wiley & Sons, New York, 1972); рус. пер.: С. Вейнберг, *Гравитация и космология* [далее цитируется как ГиК], (1975), разд. 13.2.

Постоянную  $K$  часто записывают как  $k$ , но мы во всей книге будем использовать для нее заглавную букву, чтобы избежать путаницы с символами для волнового числа или для индекса, пробегающего пространственные координаты.

Заметим, что нужно выбирать  $a^2 > 0$ , чтобы  $ds^2$  было положительным при  $\mathbf{x} = 0$ , а следовательно, везде.

Можно очевидным образом распространить все это на геометрию пространства-времени: достаточно включить слагаемое (1.1.7) в пространственно-временной линейный элемент, считая при этом  $a$  произвольной функцией времени (известной как *масштабный фактор Робертсона—Уокера*):

$$d\tau^2 \equiv -g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = dt^2 - a^2(t) \left[ d\mathbf{x}^2 + K \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x})^2}{1 - K\mathbf{x}^2} \right]. \quad (1.1.9)$$

Еще одна теорема<sup>8)</sup> утверждает, что эта метрика единственна (с точностью до координатного преобразования), если Вселенная выглядит сферически симметричной и изотропной для множества свободно падающих наблюдателей, таких как астрономы в типичных галактиках. Компоненты метрики в этих координатах равны:

$$g_{ij} = a^2(t) \left[ \delta_{ij} + K \frac{x^i x^j}{1 - K\mathbf{x}^2} \right], \quad g_{i0} = 0, \quad g_{00} = -1, \quad (1.1.10)$$

где  $i, j$  принимают значения 1, 2, 3, а  $x^0 \equiv t$  — временная координата в нашей системе единиц, где скорость света равна единице. Вместо квазидекартовых координат  $x^i$  можно ввести сферические полярные координаты, в которых

$$d\mathbf{x}^2 = dr^2 + r^2 d\Omega, \quad d\Omega \equiv d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2,$$

так что

$$d\tau^2 = dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 d\Omega \right]. \quad (1.1.11)$$

В этом случае метрика становится диагональной, причем

$$g_{rr} = \frac{a^2(t)}{1 - Kr^2}, \quad g_{\theta\theta} = a^2(t)r^2, \quad g_{\phi\phi} = a^2(t)r^2 \sin^2 \theta, \quad g_{00} = -1. \quad (1.1.12)$$

В разд. 1.5 мы увидим, что динамические уравнения космологии связаны с общей нормировкой функции  $a(t)$  только через величину  $K/a^2(t)$ , так что при  $K=0$  эта нормировка несущественна; все, что важно, — отношение значений  $a(t)$  в разные моменты времени.

<sup>8)</sup> ГиК, разд. 13.5.

Уравнение движения свободно падающих частиц приводится в приложении В (уравнение (B.12)):

$$\frac{d^2x^\mu}{du^2} + \Gamma_{\nu\kappa}^\mu \frac{dx^\nu}{du} \frac{dx^\kappa}{du} = 0, \quad (1.1.13)$$

где  $\Gamma_{\nu\kappa}^\mu$  — аффинная связность, определенная в уравнении (B.13) приложения В:

$$\Gamma_{\nu\kappa}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda} \left[ \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\kappa} + \frac{\partial g_{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^\lambda} \right], \quad (1.1.14)$$

а  $u$  — подходящая переменная, параметризующая положения вдоль мировой линии и пропорциональная  $\tau$  для массивных частиц.

---

Мировую линию  $x^\mu = x^\mu(u)$ , удовлетворяющую уравнению (1.1.13), называют *геодезической*, имея в виду то, что интеграл  $\int dt$  стационарен по отношению к любой бесконечно малой вариации пути, оставляющей фиксированными конечные точки.

---

Заметим, в частности, что производные  $\partial_i g_{00}$  и  $\dot{g}_{0i}$  обращаются в ноль, так что  $\Gamma_{00}^i = 0$ . Поэтому покоящаяся частица в этих координатах будет оставаться в покое, так что это будут *сопутствующие координаты*, следующие за движением типичных наблюдателей. Так как  $g_{00} = -1$ , интервал собственного времени  $(-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{1/2}$  для сопутствующих часов равен просто  $dt$ , так что  $t$  — время, измеряемое в системе покоя сопутствующих часов.

Смысл масштабного фактора Робертсона—Уокера  $a(t)$  можно прояснить, вычислив собственное расстояние от начала координат до сопутствующего объекта с радиальной координатой  $r$  в момент времени  $t$ :

$$d(r, t) = a(t) \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = a(t) \times \begin{cases} \sin^{-1} r, & K = +1; \\ \operatorname{sh}^{-1} r, & K = -1; \\ r, & K = 0. \end{cases} \quad (1.1.15)$$

В этой координатной системе координата  $r$  сопутствующего объекта не зависит от времени, так что собственное расстояние от нас до сопутствующего объекта увеличивается (или уменьшается) в зависимости от  $a(t)$ . Так как в нашем собственном положении нет ничего особенного, собственное расстояние между любыми двумя сопутствующими наблюдателями в любом месте Вселенной также должно быть пропорционально  $a(t)$ . Скорость изменения любого такого собственного расстояния  $d(t)$  равна

$$\dot{d} = \frac{da}{a}. \quad (1.1.16)$$

В следующем разделе мы увидим, что  $a(t)$  в действительности растет.

Нам потребуются также ненулевые компоненты аффинной связности, определяемые формулой (1.1.14):

$$\Gamma_{ij}^0 = -\frac{1}{2}(g_{0i,j} + g_{0j,i} - g_{ij,0}) = a\dot{a}\left(\delta_{ij} + K\frac{x^i x^j}{1 - Kx^2}\right) = a\dot{a}\tilde{g}_{ij}, \quad (1.1.17)$$

$$\Gamma_{0j}^i = \frac{1}{2}g^{il}(g_{l0,j} + g_{lj,0} - g_{0j,l}) = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij}, \quad (1.1.18)$$

$$\Gamma_{jl}^i = \frac{1}{2}\tilde{g}^{im}\left(\frac{\partial\tilde{g}_{jm}}{\partial x^l} + \frac{\partial\tilde{g}_{lm}}{\partial x^j} - \frac{\partial\tilde{g}_{jl}}{\partial x^m}\right) = \tilde{\Gamma}_{jl}^i. \quad (1.1.19)$$

Здесь  $\tilde{g}_{ij}$  и  $\tilde{\Gamma}_{jl}^i$  — чисто пространственные метрика и аффинная связность, а  $\tilde{g}^{ij}$  есть обратная матрица к  $3 \times 3$ -матрице  $\tilde{g}_{ij}$ , которая в общем случае отличается от  $ij$ -компонент обратной к  $4 \times 4$ -матрице  $g_{\mu\nu}$ . В квазидекартовых координатах:

$$\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij} + K\frac{x^i x^j}{1 - Kx^2}, \quad \tilde{\Gamma}_{jl}^i = K\tilde{g}_{jl}x^i. \quad (1.1.20)$$

Мы можем использовать эти компоненты аффинной связности, чтобы найти движение частицы, которая не находится в покое в сопутствующей системе координат. Во-первых, вычислим скорость изменения импульса частицы ненулевой массы  $m_0$ . Рассмотрим величину

$$P \equiv m_0 \sqrt{g_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau}}, \quad (1.1.21)$$

где  $d\tau^2 = dt^2 - g_{ij} dx^i dx^j$ . В локально инерциальных декартовых координатах, в которых  $g_{ij} = \delta_{ij}$ , величина  $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2}$ , где  $v^i = dx^i/dt$ , так что (1.1.21) есть формула, которую дает специальная теория относительности для величины импульса. С другой стороны, величина (1.1.21), очевидно, инвариантна по отношению к произвольным изменениям *пространственных* координат, так что мы можем с тем же успехом вычислить ее в сопутствующих координатах Робертсона—Уокера. Это можно сделать непосредственно с помощью формулы (1.1.13), но, чтобы сберечь силы, предположим, что мы принимаем систему пространственных координат, в которой частицы расположены вблизи начала координат  $x^i = 0$ , где  $\tilde{g}_{ij} = \delta_{ij} + O(x^2)$ , и мы поэтому можем отбросить чисто пространственные компоненты  $\Gamma_{jk}^i$  аффинной связности. В общей теории относительности получается уравнение движения

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = -\Gamma_{\mu\nu}^i \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -\frac{2}{a} \frac{da}{dt} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dt}{d\tau}.$$

Умножая на  $d\tau/dt$ , получаем уравнение

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{dx^i}{d\tau} \right) = -\frac{2}{a} \frac{da}{dt} \frac{dx^i}{d\tau},$$

решение которого имеет вид

$$\frac{dx^i}{d\tau} \propto \frac{1}{a^2(t)}. \quad (1.1.22)$$

Подставляя этот результат в (1.1.21) с метрикой  $g_{ij} = a^2(t)\delta_{ij}$ , видим, что

$$P(t) \propto \frac{1}{a(t)}. \quad (1.1.23)$$

Это верно для любой ненулевой массы, как бы мала она ни была по сравнению с импульсом. Отсюда следует, что, хотя у фотонов как  $m_0$ , так и  $d\tau$  равны нулю, формула (1.1.23) остается справедливой.

При интерпретации астрономических наблюдений (особенно гравитационных линз в гл. 9) важно охарактеризовать пути фотонов и материальных частиц. Очевидно, что фотоны и частицы, проходящие сквозь начало координат нашей пространственной системы координат, двигаются в этой координатной системе по прямым линиям, являющимся пространственными геодезическими — кривыми, удовлетворяющими условию

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \tilde{\Gamma}_{jl}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0, \quad (1.1.24)$$

где  $ds$  — трехмерная собственная длина

$$ds^2 = \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j. \quad (1.1.25)$$

Но свойство быть геодезической инвариантно относительно координатных преобразований (так как оно выражается в обращении вектора в ноль), так что путь фотона или частицы также будет пространственной геодезической в любой пространственной системе координат, включая те из них, где пути фотона или частицы *не* проходят через начало координат.

Это можно увидеть в подробностях следующим образом. Если использовать формулы (1.1.17) и (1.1.18), то уравнения движения фотона или материальной частицы (1.1.13) принимают вид

$$0 = \frac{d^2x^i}{du^2} + \Gamma_{jl}^i \frac{dx^j}{du} \frac{dx^l}{du} + \frac{2\dot{a}}{a} \frac{dx^i}{du} \frac{dt}{du}, \quad (1.1.26)$$

$$0 = \frac{d^2t}{du^2} + a\dot{a}\tilde{g}_{ij} \frac{dx^i}{du} \frac{dx^j}{du}. \quad (1.1.27)$$

Уравнение (1.1.26) можно записать в виде

$$0 = \left( \frac{ds}{du} \right)^2 \left[ \frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma_{jl}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^l}{ds} \right] + \left[ \frac{d^2s}{du^2} + \frac{2\dot{a}}{a} \frac{dt}{du} \frac{ds}{du} \right] \frac{dx^i}{ds}, \quad (1.1.28)$$

где  $s$  до сих пор произвольно. Если принять, что  $s$  является собственной длиной (1.1.25) в пространственной геометрии, тогда, как мы видели,

$$du^2 \propto d\tau^2 \propto dt^2 - a^2 ds^2.$$

После деления на  $du^2$ , дифференцирования по  $u$  и использования формулы (1.1.27) получаем, что

$$\frac{d^2s}{du^2} + \frac{2\dot{a}}{a} \frac{dt}{du} \frac{ds}{du} = 0,$$

так что из (1.1.28) следует (1.1.24).

Существует множество слаженных векторных и тензорных полей, типа тока галактик и тензора энергии-импульса, средние значения которых удовлетворяют требованиям изотропности и однородности. Изотропность требует, чтобы среднее значение любого три-вектора  $v^i$  обращалось в ноль, а однородность требует, чтобы среднее значение любого три-скаляра (т. е. величины, инвариантной относительно чисто пространственных преобразований) было функцией только времени, так что токи галактик, барионов и пр. имеют компоненты

$$J^i = 0, \quad J^0 = n(t), \quad (1.1.29)$$

где  $n(t)$  равно числу галактик, барионов и пр. в собственном объеме в сопутствующей системе отсчета. Если эти величины сохраняются в смысле формулы (B.38), тогда

$$0 = J^\mu_{;\mu} = \frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu} J^\nu = \frac{dn}{dt} + \Gamma^i_{i0} n = \frac{dn}{dt} + 3 \frac{da}{dt} \frac{n}{a},$$

так что

$$n(t) = \frac{\text{const}}{a^3(t)}. \quad (1.1.30)$$

Это показывает, что плотности чисел уменьшаются за счет расширения сопутствующей координатной сетки при растущем  $a(t)$ .

Аналогично, изотропность требует, чтобы среднее значение любого три-тензора  $t^{ij}$  в точке  $x = 0$  было пропорционально  $\delta_{ij}$ , а следовательно, и  $g^{ij}$ , что равно  $a^{-2}\delta_{ij}$  при  $x = 0$ . Однородность требует, чтобы коэффициент пропорциональности был некоторой функцией только времени. Так как между двумя три-тензорами  $t^{ij}$  и  $g^{ij}$  существует пропорциональность, она должна оставаться ненарушенной в результате произвольного преобразования пространственных координат, включая те преобразования, которые сохраняют форму  $g^{ij}$  в процессе переноса начала координат в любую другую точку. Следовательно, однородность и изотропность требуют, чтобы компоненты тензора энергии-импульса *везде* принимали вид

$$T^{00} = \rho(t), \quad T^{0i} = 0, \quad T^{ij} = \tilde{g}^{ij}(x)a^{-2}(t)p(t). \quad (1.1.31)$$

Эти выражения являются общепринятыми определениями собственной плотности энергии  $\rho$  и давления  $p$ , которые даются формулой (B.43) в случае четырехвектора скорости с компонентами  $u^i = 0$ ,  $u^0 = 1$ .

Закон сохранения импульса  $T^{i\mu}_{;\mu} = 0$  для метрики Робертсона—Уокера и тензора энергии-импульса (1.1.31) выполняется автоматически, а вот закон сохранения энергии дает полезную информацию:

$$\begin{aligned} 0 = T^{0\mu}_{;\mu} &= \frac{\partial T^{0\mu}}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^0 T^{\nu\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^\mu T^{0\nu} = \\ &= \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \Gamma_{ij}^0 T^{ij} + \Gamma_{i0}^i T^{00} = \frac{d\rho}{dt} + \frac{3\dot{a}}{a}(p + \rho), \end{aligned}$$

так что

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{3\dot{a}}{a}(p + \rho) = 0. \quad (1.1.32)$$

Это уравнение можно легко решить в случае уравнения состояния вида

$$p = w\rho \quad (1.1.33)$$

с не зависящим от времени  $w$ . В этом случае уравнение (1.1.32) приводит к решению

$$p \propto a^{-3-3w}. \quad (1.1.34)$$

В частности, это применимо в трех часто встречающихся предельных случаях:

- **Холодная материя** (например, пыль):  $p = 0$ ,

$$\rho \propto a^{-3}. \quad (1.1.35)$$

- **Горячая материя** (например, излучение):  $p = \rho/3$ ,

$$\rho \propto a^{-4}. \quad (1.1.36)$$

- **Энергия вакуума**: как мы увидим в разд. 1.5, существует другой тип тензора энергии-импульса, для которого  $T^{\mu\nu} \propto g^{\mu\nu}$ , так что  $p = -\rho$ , и в этом случае уравнение (1.1.32) имеет решение в виде постоянного  $\rho$ , известного (с точностью до общепринятых численных множителей) как *космологическая постоянная*, или *энергия вакуума*.

Эти результаты применимы по отдельности для существующих холодной материи, горячей материи и космологической постоянной, при условии, что между различными компонентами отсутствует взаимообмен энергией. В разд. 1.5 это будет использовано вместе с полевыми уравнениями Эйнштейна для исследования динамики космического расширения.

До сих пор мы рассматривали только локальные свойства пространства-времени. Посмотрим теперь на него в целом. При  $K = +1$  пространство конечно, хотя, как любая сферическая поверхность, не имеет границ. Система координат, использованная для вывода выражения (1.1.7), с  $K = +1$  покрывает только половину пространства с  $z > 0$ , точно так же, как карта Земли в полярной проекции может показать только одно полушарие. Принимая во внимание, что  $z$  может иметь два знака, находим, что длина окружности пространства равна  $2\pi a$ , а его объем равен  $2\pi^2 a^3$ .

Пространства с  $K = 0$  или  $K = -1$  обычно считаются бесконечными, однако есть и другие варианты. Можно построить конечные пространства с той же локальной геометрией путем наложения подходящих условий периодичности. Например, в случае  $K = 0$  мы можем отождествить точки  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x} + n_1\mathbf{L}_1 + n_2\mathbf{L}_2 + n_3\mathbf{L}_3$ , где  $n_1, n_2, n_3$  пробегают все целые числа, а  $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$  и  $\mathbf{L}_3$  – фиксированные, не лежащие в одной плоскости три-векторы, которые задают пространство. Такое пространство конечно, и его объем равен  $a^3\mathbf{L}_1(\mathbf{L}_2 \times \mathbf{L}_3)$ . Заглядывая достаточно далеко, мы должны были бы видеть одни и те же структуры в распределении вещества и излучения в противоположных направлениях. Поскольку какие-либо признаки такого распределения в наблюдаемом распределении галактик или флуктуаций реликтового излучения отсутствуют, любая длина периодичности типа  $|\mathbf{L}_i|$  должна быть больше чем примерно  $10^{10}$  световых лет<sup>9)</sup>.

Для  $K = -1$ , так же как для  $K = +1$  и  $K = 0$ , имеется бесконечное количество возможных условий периодичности<sup>10)</sup>. Мы не будем далее рассматривать эти возможности, так как они представляются плохо обоснованными. При наложении условий периодичности мы отказываемся от вращательной (но не трансляционной) симметрии, которая и привела к метрике Робертсона–Уокера, поэтому нет особого смысла накладывать эти условия периодичности, одновременно ограничивая локальную геометрию пространства-времени той, которая описывается метрикой Робертсона–Уокера.

## 1.2

---

### Космологическое красное смещение

**Время испускания как функция радиальной координаты • Красные и голубые смещения • Постоянная Хаббла • Открытие расширения • Меняющиеся красные смещения**

Общие рассуждения предыдущего раздела не дают никаких указаний на то, является ли масштабный множитель  $a(t)$  в метрике Робертсона–Уокера (1.1.9) растущим, уменьшающимся или постоянным. Эта информация приходит к нам из наблюдений сдвига частот спектральных линий от далеких галактик по сравнению со значениями, наблюдаемыми в земных лабораториях.

Чтобы вычислить эти сдвиги частот, выберем координатную систему Робертсона–Уокера, в которой мы находимся в начале координат, и рассмотрим световой луч, приходящий к нам по радиальному направлению. Луч света

<sup>9)</sup> N. J. Cornish et al., *Phys. Rev. Lett.* **92**, 201302 (2004); N. G. Phillips & A. Kogut, *Astrophys. J.*, **545**, 820 (2006) [astro-ph/0404400].

<sup>10)</sup> Обзоры этого вопроса см. в: G. F. R. Ellis, *Gen. Rel. & Grav.* **2**, 7 (1971); M. Lachièze-Rey and J.-P. Luminet, *Phys. Rept.* **254**, 135 (1995); M. J. Rebouças, in *Proc. Of the Xth Brasilian School of Cosmology and Gravitation*, eds. M. Novello and S. E. Perez Bergliaffa (American Institute of Physics Conference Proceedings. Vol. 782, New York, 2005): 188 [astro-ph/0504365].

подчиняется уравнению  $d\tau^2 = 0$ , так что для такого луча уравнение (1.1.11) дает

$$dt = \pm a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (1.2.1)$$

Для светового луча, приходящего к началу координат от далекого источника, расстояние  $r$  уменьшается с ростом  $t$ , так что в уравнении (1.2.1) следует выбрать знак минус. Значит, если свет покидает источник с сопутствующей координатой  $r_1$  в момент времени  $t_1$ , он приходит в начало координат  $r = 0$  в более поздний момент времени  $t_0$ , определяемый из формулы

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (1.2.2)$$

Беря дифференциал этого соотношения и вспоминая, что радиальная координата  $r_1$  сопутствующих источников не зависит от времени, приходим к выводу, что интервал  $\delta t_1$  между отправлением двух последовательных световых сигналов связан с интервалом  $\delta t_0$  между их прибытием посредством соотношения

$$\frac{\delta t_1}{a(t_1)} = \frac{\delta t_0}{a(t_0)}. \quad (1.2.3)$$

Если «сигналами» являются последовательные гребни волны, частота испускания равна  $\nu_1 = 1/(\delta t_1)$ , а наблюдаемая частота  $\nu_0 = 1/(\delta t_0)$ , так что

$$\frac{\nu_0}{\nu_1} = \frac{a(t_1)}{a(t_0)}. \quad (1.2.4)$$

Если  $a(t)$  увеличивается, то это красное смещение, т. е. уменьшение частоты на множитель  $a(t_1)/a(t_0)$ , что эквивалентно увеличению длины волны на множитель, традиционно обозначаемый<sup>11)</sup>  $1 + z$ :

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t_1)}. \quad (1.2.5)$$

Если  $a(t)$ , напротив, уменьшается, речь идет о голубом смещении, т. е. уменьшении длины волны, определяемом множителем (1.2.5) с отрицательным  $z$ . Полученные результаты часто интерпретируются как знакомый всем эффект Доплера; формула (1.1.15) показывает, что при увеличении или уменьшении  $a(t)$  собственное расстояние до любого сопутствующего источника света вроде типичной галактики увеличивается или уменьшается со временем, так что такие источники удаляются от нас или приближаются к нам, что естественно приводит к красному или голубому смещению. По этой причине

<sup>11)</sup> В русскоязычной литературе  $z$  принято называть *параметром красного смещения*. — Прим. ред. перев.

часто говорят, что галактики с красным (или голубым) смещением  $z$  имеют космологическую радиальную скорость  $c z$ .

---

Понятие относительной скорости имеет смысл только при  $z \ll 1$ , так что существование далеких источников с  $z > 1$  не является каким-либо нарушением специальной теории относительности.

---

Однако интерпретация космологического красного смещения как эффекта Доплера может завести нас слишком далеко. В частности, увеличение длины волны от момента испускания света до момента его поглощения зависит не от скорости изменения  $a(t)$  в моменты испускания или поглощения, но от увеличения  $a(t)$  за весь период времени от испускания до поглощения.

Мы можем понять также сдвиг частоты (1.2.4), обратившись к квантовой теории света: импульс фотона частотой  $\nu$  равен  $h\nu/c$  (где  $h$  — постоянная Планка), и мы видели в предыдущем разделе, что этот импульс изменяется как  $1/a(t)$ .

Для близлежащих источников можно разложить  $a(t)$  в ряд, так что

$$a(t) \simeq a(t_0)[1 + (t - t_0)H_0 + \dots], \quad (1.2.6)$$

где  $H_0$  — коэффициент, известный под названием *постоянной Хаббла*:

$$H_0 \equiv \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_0)}. \quad (1.2.7)$$

Тогда формула (1.2.5) дает относительное увеличение длины волны в виде

$$z = H_0(t_0 - t_1) + \dots. \quad (1.2.8)$$

Заметим, что для близких объектов  $t_0 - t_1$  есть собственное расстояние  $d$  (в системе единиц с  $c = 1$ ). Поэтому для галактик, достаточно близких для того, чтобы использовать приближение (1.2.6), мы ожидаем линейного роста красного (при  $H_0 > 0$ ) или голубого (при  $H_0 < 0$ ) смещения с ростом собственного расстояния  $d$ :

$$z = H_0 d + \dots. \quad (1.2.9)$$

Красное смещение света от других галактик впервые наблюдал в 1910-е гг. Весто Мелвин Слайфер в Лоуэллской обсерватории (Флагстафф, штат Аризона). В 1922 г. он опубликовал перечень из 41 спиральной туманности, среди которых 36 имели положительные значения  $z$ , достигающие величины 0,006, и только 5 — отрицательные  $z$ , причем самая большая по модулю отрицательная величина  $z = -0,001$  обнаружилась у туманности Андромеды M31<sup>12)</sup>.

---

<sup>12)</sup> V. M. Slipher, таблица, подготовленная для книги А. С. Эддингтона (A. S. Eddington), *The Mathematical Theory of Relativity*, 2nd ed. (Cambridge University Press, London, 1924): 162.

С 1918 по 1925 гг. С. Виртц и К. Лундмарк<sup>13)</sup> обнаружили ряд спиральных туманностей, красные смещения которых, казалось, росли с расстоянием. Но до 1923 г. можно было делать выводы только об *относительных* расстояниях между спиральными туманностями, используя наблюдения их видимой светимости или углового диаметра. Не зная абсолютной светимости и физических размеров, можно было даже предположить, что спиральные туманности являются внешними частями нашей Галактики, во что в действительности верили многие астрономы. Открытие Эдвином Хабблом в 1923 г. цефеид — переменных звезд в туманности Андромеды M31 (обсуждение см. в следующем разделе) — позволило оценить расстояние до нее и размер, и стало ясно, что спиральные туманности являются не объектами в нашей собственной Галактике, а целыми галактиками, подобными нашей.

В ранних данных Слайфера, Виртца и Лундмарка не просматривалось ясной линейной связи между красным смещением и расстоянием из-за проблемы, продолжающейся портить измерения постоянной Хаббла до сих пор. Реальные галактики в общем случае перемещаются не только вместе с общим расширением или сжатием Вселенной; в типичном случае они обладают также «пекулярными» скоростями в несколько сотен км/с, порожденными гравитационным полем соседних галактик и межгалактической материи. Чтобы увидеть линейное соотношение между красным смещением и расстоянием, необходимо изучить галактики с  $|z| \gg 10^{-3}$ , чьи космологические скорости  $zs$  составляют тысячи км/с.

В 1929 г. Хаббл<sup>14)</sup> объявил, что он обнаружил «примерно линейное» соотношение между красным смещением и расстоянием. Но к этому времени красные смещения и расстояния были измерены только для галактик из большого скопления в созвездии Девы, красные смещения которых указывали на радиальную скорость порядка 1000 км/с, что немногим больше, чем типичные пекулярные скорости. Поэтому точки, отвечающие данным Хаббла, были беспорядочно разбросаны на диаграмме зависимости красного смещения от расстояния и в действительности не соответствовали линейной зависимости. Однако в начале 1930-х гг. Хаббл измерил красные смещения и расстояния для галактик в скоплении Волосы Вероники, красное смещение которых  $z \simeq 0,02$  соответствует скорости разбегания порядка 7000 км/с, так что линейное соотношение между красным смещением и расстоянием стало очевидным. Вывод был ясен (по крайней мере, для некоторых космологов): Вселенная действительно расширяется. Правильность такой интерпретации красного смещения подтверждается наблюдениями, которые мы обсудим в разд. 1.7.

Со времен Хаббла и до настоящего времени были обнаружены галактики с еще большими красными смещениями. Были найдены галактики с крас-

<sup>13)</sup> C. Wirtz, *Astr. Nachr.* **206**, 109 (1918); *ibid.* **215**, 349 (1921); *ibid.* **216**, 451 (1922); *ibid.* **222**, 21 (1924); *Scientia* **38**, 303 (1925); K. Lundmark, *Stock. Hand.* **50**, No. 8 (1920); *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **84**, 474 (1924); *ibid.* **85**, 865 (1925).

<sup>14)</sup> E. P. Hubble, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **15**, 168 (1929).

ными смещениями порядка единицы, для которых разложения типа (1.2.9) бесполезны, и требуются формулы, учитывающие релятивистские эффекты (см. разд. 1.4 и 1.5). Ко времени написания этой книги самым большим аккуратно измеренным красным смещением обладала галактика, найденная с помощью телескопа Субару<sup>15)</sup>. Линия Лайман- $\alpha$  от этой галактики (испускаемая при переходе с уровня  $2p$  на уровень  $1s$  водорода), которая в норме соответствует ультрафиолетовой длине волны  $1215\text{ \AA}$ , наблюдается на инфракрасной линии волны  $9682\text{ \AA}$ , что указывает на красное смещение  $1+z = 9682/1215$ , или  $z = 6,96$ .

В конце концов станет возможным измерить скорость расширения  $H(t) \equiv \dot{a}(t)/a(t)$  в моменты времени  $t$  более ранние, чем сегодняшний, путем наблюдения изменений в очень аккуратно измеренных красных смещениях отдельных галактик за время порядка десятилетия<sup>16)</sup>. Дифференцируя соотношение (1.2.5), видим, что скорость изменения красного смещения в зависимости от времени наблюдения равна

$$\frac{dz}{dt_0} = \frac{\dot{a}(t_0)}{a(t_1)} - \frac{a(t_0)\dot{a}(t_1)}{a^2(t_1)} \frac{dt_1}{dt_0} = \left[ H_0 - H(t_1) \frac{dt_1}{dt_0} \right] (1+z).$$

Из тех же рассуждений, которые привели к выражению (1.2.3), имеем  $dt_1/dt_0 = 1/(1+z)$ , так что, если измерить  $dz/dt_0$ , можно найти скорость расширения в момент испускания света по формуле

$$H(t_1) = H_0(1+z) - \frac{dz}{dt_0}. \quad (1.2.10)$$

## 1.3

---

### Расстояния при малых красных смещениях: постоянная Хаббла

Тригонометрический параллакс • Собственные движения • Видимая светимость: главная последовательность, красное звездное сгущение, звезды типа RR Лиры, вращающиеся двойные звезды, цефеиды • Соотношение Талли–Фишера • Соотношение Фабера–Джексона • Главная последовательность • Сверхновые типа Ia • Флуктуации поверхности яркости • Результат для постоянной Хаббла

Теперь нам следует подумать о том, как измеряются астрономические расстояния. В этом разделе мы будем рассматривать сравнительно близкие объекты — скажем, с  $z$ , не превышающим 0,1, — так что влиянием кривизны

<sup>15)</sup> M. Iye et al., *Nature* **443**, 186 (2006) [astro-ph/0609393].

<sup>16)</sup> A. Loeb, *Astrophys. J.* **499**, L111 (1998) [astro-ph/9802122]; P.-S. Corasaniti, D. Huterer, and A. Melchiorri, *Phys. Rev. D* **75**, 062001 (2007) [astro-ph/0701433]. По поводу более ранних предложений на эту тему см. A. Sandage, *Astrophys. J.* **139**, 319 (1962).

пространства-времени и космического расширения на определение расстояний можно пренебречь. Эти измерения сами по себе имеют космологическое значение, так как они используются для определения величины постоянной Хаббла  $H_0$ . К тому же измерение расстояний при больших красных смещениях, с помощью которого можно найти форму функции  $a(t)$ , опирается на наблюдения «стандартных свечей» — объектов с известной внутренне присущей им светимостью, которая должна быть определена и откалибрована при изучении этих сравнительно небольших красных смещений. Определение расстояний при больших красных смещениях будут обсуждаться в разд. 1.6, после того как в разд. 1.4 и 1.5 у нас будет возможность заложить фундамент для анализа влияния расширения и пространственно-временной геометрии на измерение расстояний до очень далеких объектов.

В наши дни принято разделять объекты, используемые для измерения расстояний в космологии, на первичные и вторичные индикаторы расстояний. Абсолютные светимости первичных индикаторов расстояний в нашей местной группе галактик измеряются либо напрямую, кинематическими методами, которые не зависят от априорного знания абсолютных светимостей, либо косвенно, путем наблюдения первичных индикаторов расстояний в совокупности с другими первичными индикаторами, расстояние до которых измеряется кинематическими методами. Число таких относительно близких первичных индикаторов расстояний достаточно велико, чтобы можно было сформулировать эмпирические правила, задающие их абсолютные светимости как функции различных наблюдаемых характеристик. К сожалению, эти первичные индикаторы расстояний недостаточно ярки для того, чтобы мы могли изучать их на расстояниях, для которых  $z$  больше примерно 0,01, т. е. красные смещения, при которых космологические скорости  $c_2$  были бы больше типичного случайного разброса галактических скоростей в результате космологического расширения (несколько сотен км/с). Поэтому их нельзя использовать непосредственно для получения информации об  $a(t)$ . Для этих целей необходимо использовать вторичные индикаторы расстояний, которые достаточно ярки, чтобы изучать их на таких больших расстояниях, и чьи абсолютные светимости известны за счет связи более близких из них с первичными индикаторами расстояний.

### A. Первичные индикаторы расстояний\*

Почти все измерения расстояний в астрономии в конечном итоге основаны на измерениях расстояний до объектов внутри нашей собственной Галактики с использованием одного из двух классических кинематических методов.

\* Обзор вопроса см. в работе M. Feast (M. Feast) в *Nearby Large-Scale Structures and the Zone of Avoidance*, eds. A. P. Fairall and P. Woudt (ASP Conference Series, San Francisco, 2005) [astro-ph/0405440].

### 1. Тригонометрический параллакс

Движение Земли вокруг Солнца приводит к годовому движению кажущегося положения любой звезды по эллипсу, максимальный угловой радиус  $\pi$  которого задается в радианах (при  $\pi \ll 1$ , что верно для всех звезд) формулой

$$\pi = \frac{d_3}{d}, \quad (1.3.1)$$

где  $d$  — расстояние звезды от Солнечной системы, а  $d_3$  — среднее расстояние от Земли до Солнца<sup>17)</sup>, определенное как *астрономическая единица*, 1 а.е. = =  $1,496 \times 10^8$  км. Парсек (пк) определяется как расстояние, на котором  $\pi = 1''$ ; в одном радиане 206 264,8 секунд дуги, так что

$$1 \text{ пк} = 206\,264,8 \text{ а.е.} = 3,0856 \times 10^{13} \text{ км} = 3,2616 \text{ световых лет.}$$

Параллакс в угловых секундах есть величина, обратная расстоянию в парсеках.

Первыми звездами, расстояние до которых было найдено путем измерения их тригонометрических параллаксов, были  $\alpha$  Центавра (Томас Гендерсон в 1832 г.) и 61 Лебедя (Фридрих Вильгельм Бессель в 1838 г.). Эти звезды находятся на расстояниях, равных соответственно 1,35 и 3,48 пк. Атмосфера Земли сильно затрудняет измерения тригонометрических параллаксов, меньших  $0,03''$ , с помощью земных телескопов, так что в течение многих лет этот метод мог быть использован только для измерения расстояний до звезд, не превышающих 30 пк, а на этих расстояниях — только для нескольких звезд и к тому же с низкой точностью.

Ситуация изменилась после запуска Европейским космическим агентством спутника Hipparcos<sup>18)</sup> для измерения видимых положений и свети-

<sup>17)</sup> История измерения расстояний в Солнечной системе восходит к Аристарху Самосскому (ок. 310–230 гг. до н. э.). Из отношения ширины земной тени во время лунного затмения к угловому диаметру Луны он получил оценку отношения диаметров Луны и Земли; из углового диаметра Луны он рассчитал отношение диаметра Луны к расстоянию от Луны до Земли; наконец, используя угол между направлениями на Луну и на Солнце в половинной фазе Луны он вычислил отношений расстояний от Земли до Солнца и до Луны; тем самым он смог измерить расстояние до Солнца в земных диаметрах. Хотя метод Аристарха вполне корректен, его наблюдения были неточными, и полученная им оценка расстояния до Солнца оказалась слишком малой. [Очерк состояния греческой астрономии до Аристарха и перевод его работы можно найти в T. L. Heath, *Aristarchus of Samos* (Oxford University Press, Oxford, 1913).] Расстояние от Земли до Солнца было впервые достаточно точно определено посредством измерения параллакса. В 1672 г. Жан Ришэ (Jean Richer) и Джованни Доменико Кассини (Giovanni Domenico Cassini) измерили расстояние от Земли до Марса, откуда можно вывести расстояние от Земли до Солнца, наблюдая разницу между видимым направлением на Марс из Парижа и Кайенны, расстояние между которыми известно и составляет 6000 миль. В наше время расстояния внутри Солнечной системы весьма точно измеряются по запаздыванию отраженных планетами сигналов радаров и радиосигналов ретрансляторов, расположенных на космических кораблях.

<sup>18)</sup> Название спутника образовано от High Precision Parallax Collecting Satellite. Возможно, неслучайно аббревиатура совпадает с именем греческого астронома Гиппарха (II в. до н. э.), составившего каталог звезд, видимых невооруженным глазом (около 850 звезд, 136 г. до н. э.). Он же ввел понятие звездной величины (от 1-й до 6-й). — Прим. ред. перев.

мостей большого числа звезд в нашей Галактике<sup>19)</sup>. Для звезд достаточной яркости параллаксы можно было измерить с точностью (стандартным отклонением) в интервале от 7 до  $9 \times 10^{-4}$  угловых секунд. Из 118 000 звезд в каталоге Hipparcos для 20 000 звезд, часть из которых находятся на расстоянии выше 100 пк, оказалось возможным определить таким способом расстояния с заявленной неопределенностью не более 10 %.

## 2. Собственные движения

Источник света на расстоянии  $d$  со скоростью  $v_{\perp}$ , перпендикулярной лучу зрения, будет казаться движущимся по небу со скоростью  $\mu$  в радианах/время, равной

$$\mu = \frac{v_{\perp}}{d}. \quad (1.3.2)$$

Это называется *собственным движением* источника. Конечно, в общем случае астрономы не могут непосредственно измерить поперечную скорость  $v_{\perp}$ , однако посредством измерения доплеровского сдвига спектральных линий источника они могут измерить компоненту  $v_r$  скорости вдоль луча зрения. Задача состоит в том, чтобы извлечь  $v_{\perp}$  из измеренного значения  $v_r$ . Это можно сделать в ряде частных случаев.

- Движущиеся скопления — скопления звезд, образовавшихся совместно и, следовательно, движущихся по параллельным путям с равной скоростью.

Это *открытые (или рассеянные) скопления* — в том смысле, что они не связаны между собой гравитационным притяжением, в отличие от значительно больших шаровых скоплений, чья сферическая форма указывает на гравитационную связь внутри системы.

Самым важным из таких скоплений являются Гиады (в «Улиссе» Теннисона названные «дождливыми Гиадами»), содержащие свыше 100 звезд. Скорости этих звезд вдоль луча зрения измеряются из их доплеровских сдвигов, и если мы знаем расстояние до скопления, то скорости его звезд под прямым углом к лучу зрения могут быть измерены по их собственным движениям. Расстояние до этого скопления было определено давно и составляет около 40 пк, исходя из условия, что все эти скорости параллельны. Измеренные таким способом расстояния часто называют *параллаксами движущихся скоплений*. С момента запуска спутника Hipparcos метод движущихся скоплений был дополнен прямым измерением тригонометрического параллакса ряда этих скоплений, в том числе Гиад.

- Второй метод основан на статистическом анализе доплеровских сдвигов и собственных движений звезд в выборке, у которой известны все *относительные* расстояния, например, в силу того, что все звезды обладают (неизвестной)

<sup>19)</sup> M. A. C. Perryman et al., *Astron. Astrophys.* 323, L49 (1997).

абсолютной светимостью или все они находятся на одном и том же (неизвестном) расстоянии. Доплеровские сдвиги позволяют определить скорости вдоль луча зрения, а собственные движения и относительные расстояния дают скорости, поперечные к лучу зрения, с точностью до единственного общего множителя, связанного с неизвестной абсолютной светимостью или расстоянием. Этот множитель можно определить, опираясь на требование о совпадении распределения скоростей, поперечных лучу зрения, с распределением скоростей вдоль луча зрения. Измеренные таким способом расстояния часто называют *статистическими параллаксами* или *динамическими расстояниями*.

- Расстояние до переменной звезды — цефеиды  $\zeta$  Близнецов — было измерено<sup>20)</sup> путем сравнения скорости изменения ее физического диаметра, найденной с помощью эффекта Доплера, со скоростью изменения ее углового диаметра, измеренного оптическим интерферометром. (Подробнее о цефеидах см. чуть далее.) Расстояние оказалось равным  $336 \pm 44$  пк, т. е. значительно превышающим те расстояния, которые можно измерить методом тригонометрического параллакса. Этот метод был впоследствии использован для восьми других цефеид<sup>21)</sup>.
- Становится возможным измерять расстояния путем измерения собственного движения вещества, порожденного сверхновой, если предположить наличие у взрыва в той или иной степени цилиндрической симметрии, так что поперечную скорость  $v_{\perp}$  можно вывести из радиальной скорости  $v_r$ , измеренной по доплеровским сдвигам. Этот метод был применен<sup>22)</sup> для кольца вокруг сверхновой SN1987A, наблюдавшегося в 1987 г. в Большом Магеллановом Облаке; расстояние до него оказалось равным 52 кпк (тысяч парсеков).

- Измерение меняющегося со временем доплеровского сдвига и собственного движения объекта по орбите вокруг центральной массы можно использовать для определения расстояния до этого объекта. Например, если луч зрения оказывается лежащим в плоскости орбиты, а сама орбита круговая, то доплеровский сдвиг достигает максимума при движении объекта по лучу зрения и тем самым определяет орбитальную скорость  $v$ . В то же время собственное движение  $\mu$  имеет максимум тогда, когда объект движется с той же скоростью под прямыми углами к лучу зрения, и определяет расстояние как  $v/\mu$ . Этот метод можно использовать также для орбит, наклоненных к линии зрения и некруговых, изучая временные вариации доплеровского сдвига и собственное движение. Применение этого метода к звезде S2, вращающейся вокруг массивной черной дыры в центре Галактики, дает (считающееся на сегодняшний день лучшим) значение расстояния Солнечной системы от центра

<sup>20)</sup> B. F. Lane, M. J. Kuchner, A. F. Boden, M. Creech-Eakman, and S. B. Kulkarni, *Nature* **407**, 485 (September 28, 2000).

<sup>21)</sup> P. Kervella et al., *Astron. Astrophys.* **423**, 327 (2004) [astro-ph/0404179].

<sup>22)</sup> N. Panagia, *Mem. Soc. Astron. Italiana* **69**, 225 (1998).

Галактики<sup>23)</sup>, равное  $8,0 \pm 0,4$  кпк. Этот метод позволяет также измерить некоторые расстояния за пределами нашей Галактики, используя движение мазеров — точечных микроволновых источников — в аккреционных дисках газа и пыли на орбитах вокруг черных дыр в центрах галактик. Орбитальную скорость можно оценить по доплеровскому сдвигу мазеров на краю диска акреции, движущихся непосредственно к нам или от нас, и если это совпадает с орбитальными скоростями мазеров, движущихся поперек луча зрения, то отношение этой орбитальной скорости к их наблюдаемому собственному движению определяет расстояние до галактики. На сегодняшний день этот метод был использован для измерения расстояния до галактики NGC 4258<sup>24)</sup>, оказавшегося равным  $7,2 \pm 0,5$  Мпк, и до галактики M33<sup>25)</sup>, оказавшегося равным  $0,730 \pm 0,168$  Мпк.

Эти кинематические методы имеют ограниченную применимость вне окрестностей Солнца. Для измерения больших расстояний нужен другой метод.

### 3. Видимая светимость

Наиболее общий метод определения расстояний в космологии основан на измерении видимой светимости объектов с известной (или предполагаемой) абсолютной светимостью. Абсолютная светимость  $L$  есть энергия, излучаемая за 1 с, а видимая светимость  $\ell$  есть энергия, приходящая за 1 с на 1 см<sup>2</sup> площади приемника. Если энергия излучается изотропно, то мы можем легко найти соотношение между абсолютной и видимой светимостями в рамках евклидовой геометрии, представив себе, что светящийся объект окружен сферой, радиус которой равен расстоянию  $d$  между объектом и Землей. Полная энергия, проходящая за 1 с через сферу, равна  $4\pi d^2 \ell$ , так что

$$\ell = \frac{L}{4\pi d^2}. \quad (1.3.3)$$

Это соотношение подвержено поправкам из-за межзвездного и межгалактического поглощения, а так же из-за возможной анизотропии источника, которые хоть и важны, но на практике содержат слишком много технических деталей, которые нет смысла здесь обсуждать.

К сожалению, астрономы используют традиционные обозначения для видимой и абсолютной светимостей в терминах видимой и абсолютной звездной величины<sup>26)</sup>. Во втором веке нашей эры астроном из Александрии Клавдий Птолемей опубликовал список из 1022 звезд, распределенных по категориям

<sup>23)</sup> F. Eisenhauer et al., *Astrophys. J. Lett.* **597** L121 (2003) [astro-ph/0306220].

<sup>24)</sup> J. Hertnstein et al., *Nature* **400**, 539 (3 August, 1999).

<sup>25)</sup> A. Brunthaler, M. J. Reid, H. Falcke, L. J. Greenhill, and C. Henkel, *Science* **307**, 1440 (2005) [astro-ph/0503058].

<sup>26)</sup> Об истории шкалы абсолютной звездной величины см. J. B. Hearnshaw, *The Measurement of Starlight. Two centuries of astronomical photometry* (Cambridge University Press, Cambridge, 1996); K. Krisciunas, [astro-ph/0106313].

по их видимой яркости, причем самым ярким звездам была приписана первая звездная величина, а еле видимым — шестая звездная величина<sup>27)</sup>. Эта традиционная шкала яркости была сделана количественной в 1856 г. Норманом Погсоном (Norman Pogson), который постановил, что разность в пять звездных величин должна соответствовать отношению в 100 раз в видимых светимостях, так что  $\ell \propto 10^{-2m/5}$ . С появлением фотоумножителей в начале XX в. стало возможным зафиксировать константу пропорциональности: видимая болометрическая светимость (т. е. светимость, охватывающая все длины волн) задается через видимую болометрическую звездную величину  $m$  соотношением

$$\ell = 10^{-2m/5} \times 2,52 \times 10^{-5} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}. \quad (1.3.4)$$

Для ориентации приведем несколько примеров: Сириус имеет видимую звездную величину  $m_{\text{в}} = -1,44$ , туманность Андромеды M31 имеет  $m_{\text{в}} = 0,1$ , а большая галактика M87 в ближайшем большом скоплении галактик имеет  $m_{\text{в}} = 8,9$ . Абсолютная звездная величина в любой полосе длин волн определяется как видимая звездная величина, которую объект имел бы на расстоянии 10 пк, так что абсолютная болометрическая светимость задается через абсолютную болометрическую звездную величину  $M$  соотношением

$$L = 10^{-2M/5} \times 3,02 \times 10^{35} \text{ эрг} \cdot \text{с}^{-1}. \quad (1.3.5)$$

Для сравнения, в видимом диапазоне длин волн абсолютная звездная величина  $M_{\text{в}}$  равна +4,82 для Солнца, +1,45 для Сириуса и −20,3 для нашей Галактики. Соотношение (1.3.3) можно записать как формулу для расстояния<sup>28)</sup> через *модуль расстояния*  $m - M$ :

$$d = 10^{1+(m-M)/5} \text{ пк.} \quad (1.3.6)$$

Имеется несколько различных типов звезд, которые используются при измерении расстояния путем наблюдения их видимой светимости.

- Главная последовательность.** Для звезд, продолжающих сжигать водород в своих сердцевинах, выполняется характерное соотношение между абсолютной светимостью и цветом, причем обе характеристики зависят от массы звезды. Диаграмма этой зависимости называется главной последовательностью. Она была открыта перед Первой мировой войной Эйнаром Герцшпунгом и Генри Норрисом Расселлом. Светимость максимальна для бело-голубых звезд и затем постепенно уменьшается для звезд, цвет которых стремится к желтому и красному. *Форма* главной последовательности находится путем наблюдения видимых светимостей и цвета большого числа звезд в скоплениях в предположении, что в каждом скоплении все звезды находятся на одном

<sup>27)</sup> Звездный каталог Птолемея можно найти в кн.: M. R. Cohen and I. E. Drabkin, *A Source Book in Greek Science* (Harvard University Press, Cambridge, MA, 1948): c. 131.

<sup>28)</sup> Формулу (1.3.6) в астрофизике называют *формулой Погсона*, который ввел понятие *модуля расстояния* (*distance modulus*). — Прим. ред. перев.

и том же расстоянии от нас, однако для калибровки абсолютных светимостей на главной последовательности нам необходимо знать расстояние до скоплений. Долгое время калибровка абсолютных светимостей звезд на главной последовательности была основана на наблюдении примерно ста звезд главной последовательности в скоплении Гиады, расстояние до которых было измерено описанным выше методом движущегося скопления. После запуска спутника Hipparcos калибровка главной последовательности значительно улучшилась благодаря наблюдению цвета и видимых светимостей порядка 100 000 звезд главной последовательности, расстояние до которых стало известным после измерения их тригонометрического параллакса. В эту выборку попали звезды из открытых скоплений, такие как Гиады, Презепы, Плеяды и NGC 2516; наблюдения звезд в этих скоплениях приводят к согласованным абсолютным звездным величинам главной последовательности, если должным образом учесть переменный химический состав звезд в разных скоплениях<sup>29)</sup>. После калибровки главной последовательности указанным способом можно использовать соотношение (1.3.3) для измерения расстояния до любого звездного скопления или галактики, в которых наблюдаются звезды, демонстрирующие соотношение главной последовательности между видимой светимостью и цветом. Расстояния, измеренные таким способом, называют иногда *фотометрическими параллаксами*.

Анализ измерений параллакса спутником Hipparcos выявил противоречие между расстояниями до звездного скопления Плеяды, определенными путем наблюдения звезд главной последовательности и измерением тригонометрического параллакса<sup>30)</sup>. Традиционный метод, использующий калибровку главной последовательности, основанную на применении метода движущегося скопления к более близкому скоплению Гиады, привел к значению расстояния до Плеяд<sup>31)</sup>, равному  $132 \pm 4$  пк. Однако тригонометрические параллаксы ряда звезд в Плеядах, измеренные спутником Hipparcos, давали расстояние<sup>32)</sup>  $118 \pm 4$  пк, что было в противоречии с результатами подгонки по главной последовательности. Совсем недавно эти параллаксы спутника Hipparcos вошли в противоречие с более аккуратными измерениями параллаксов трех звезд в Плеядах с помощью интерферометра FGS (Fine Guidance Sensor) на телескопе «Хаббл»<sup>33)</sup>, которые давали расстояние  $133,5 \pm 1,2$  пк в хорошем согласии с результатами, полученными изучением главной последовательности. Похоже, что к моменту написания книги баланс мнений

<sup>29)</sup> S. M. Percival, M. Salaris, and D. Kilkenney, *Astron. Astrophys.* **400**, 541 (2003) [astro-ph/0301219].

<sup>30)</sup> B. Paczyński, *Nature* **227**, 299 (22 january, 2004).

<sup>31)</sup> G. Meynet, J.-C. Mermilliod, and A. Maeder, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **98**, 477 (1993).

<sup>32)</sup> J.-C. Mermilliod, C. Turon, N. Robichon, F. Arenou, and Y. Lebreton, в *ESA SP-402 Hipparcos-Venice '97*, eds. M. A. C. Perryman and P. L. Bernacca (European Space Agency, Paris, 1997), 643; van Leeuwen and C. S. Hansen Ruiz, *ibid*, 689; F. van Leeuwen, *Astron. Astrophys.* **341**, L71 (1999).

<sup>33)</sup> D. R. Soderblom *et al.*, *Astron. J.* **129**, 1616 (2005) [astro-ph/0412093].

астрономической общественности склоняется к расстояниям, полученным фотометрией главной последовательности<sup>34)</sup>.

- **Красные звездные скопления.** Диаграмма «цвет — звездная величина» для скоплений в богатых металлами<sup>35)</sup> областях Галактики обнаруживает в малой области диаграммы определенные скопления звезд — красных гигантов — с разбросом видимой звездной величины всего лишь порядка 0,2. Это звезды, у которых водород в ядре оказался исчерпан и его место в качестве топлива для ядерных реакций занял гелий. Абсолютная звездная величина скопления красных гигантов в инфракрасной полосе (длины волн около 800 нм) была определена с использованием расстояний и видимых звездных величин, измеренных спутником Hipparcos и взятых из более раннего обзора<sup>36)</sup> и оказалась равной<sup>37)</sup>  $M_i = -0,28 \pm 0,2$ . В этой полосе зависимость абсолютной величины от цвета является слабой, однако были приведены аргументы в пользу того, что даже инфракрасная звездная величина может существенно зависеть от степени металличности звезды<sup>38)</sup>.

- **Звезды типа RR Лиры.** Существуют переменные звезды, которые в течение многих десятилетий используются в качестве индикаторов расстояний<sup>39)</sup>. Эти звезды можно отличить от других по их периодам, обычно находящимся в пределах от 0,2 до 0,8 дней. Использование статистического параллакса, тригонометрического параллакса и метода движущихся скоплений (с данными, полученными как в наземных обсерваториях, так и на спутнике Hipparcos) позволяет получить, соответственно<sup>40)</sup>, абсолютную видимую величину звезд типа RR Лиры в гало нашей Галактики:  $0,77 \pm 0,13$ ,  $0,71 \pm 0,15$  и  $0,67 \pm 0,10$ , в хорошем согласии с более ранними результатами<sup>41)</sup>  $M_{\mathrm{B}} = 0,71 \pm 0,12$  для звезд типа RR Лиры в гало и  $0,79 \pm 0,30$  для звезд типа RR Лиры в толстом диске Галактики. Звезды типа RR Лиры в большинстве своем слишком далеки для того, чтобы измерить их тригонометрический параллакс, однако недавние измерения с помощью космического телескопа «Хаббл»<sup>42)</sup> дали значения  $3,82 \times 10^{-3}$  угловых секунд для тригонометрического параллакса

<sup>34)</sup> Новая интерпретация первичных данных спутника Hipparcos предложена в F. van Leeuwen and E. Fantino, *Astron. Astrophys.* **439**, 791 (2005) [astro-ph/0505432].

<sup>35)</sup> Астрономы используют слово «металлы» для обозначения всех элементов тяжелее гелия.

<sup>36)</sup> A. Udalski *et al.*, *Acta Astron.* **42**, 253 (1992).

<sup>37)</sup> B. Paczyński and K. Z. Stanek, *Astrophys. J.* **494**, L219 (1998).

<sup>38)</sup> L. Girardi, M. A. T. Groenewegen, A. Weiss, and M. Salaris, [astro-ph/9805127].

<sup>39)</sup> Обзор см. в G. Bono, *Lect. Notes Phys.* **635**, 85 (2003) [astro-ph/0305102].

<sup>40)</sup> P. Popowski and A. Gould, *Astrophys. J.* **506**, 259, 271 (1998); также [astro-ph/9703140], [astro-ph/9802168] и *Post-Hipparcos Cosmic Candles*, eds. A. Heck and F. Caputo (Kluwer Academic Publisher, Dordrecht) [astro-ph/9808006]; A. Gould and P. Popowski, *Astrophys. J.* **568**, 544 (1998) [astro-ph/9805176] и ссылки в этих работах.

<sup>41)</sup> A. Layden, R. B. Hanson, S. L. Hawley, A. R. Klemola, and C. J. Hanley, *Astron. J.* **112**, 2110 (1996).

<sup>42)</sup> G. F. Benedict *et al.*, *Astrophys. J.* **123**, 473 (2001) [astro-ph/0110271].

звезды, давшей название всему этому типу звезд, в предположении, что абсолютная звездная величина равна  $0,61_{-0,10}^{+0,11}$ .

- **Затменные двойные звезды.** В благоприятных случаях можно, не прибегая к каким-то промежуточным индикаторам расстояний, оценить собственную светимость звезды, которая периодически частично затмевается партнером меньшего размера. Скорость партнера можно установить по доплеровскому сдвигу спектральных линий (причем эллиптичность орбиты определяется вариацией доплеровского сдвига во времени), а радиус главной звезды может быть затем вычислен из длительности затмения. Температура главной звезды может быть найдена по измерению ее спектра — как правило, по измерению видимой светимости в разных интервалах длин волн. Зная радиус (а следовательно, площадь) и температуру главной звезды, можно вычислить ее абсолютную светимость с помощью закона Стефана—Больцмана для излучения черного тела. Этот метод был применен к измерению расстояний до двух ближайших карликовых галактик — Большого Магелланова Облака (БМО)<sup>43)</sup> и Малого Магелланова Облака (ММО)<sup>44)</sup>, — а также галактики Андромеды M31<sup>45)</sup> и ее спутника M33<sup>46)</sup>.

- **Переменные цефеиды.** Благодаря своей большой яркости цефеиды были до сего времени наиболее важными звездами, используемыми для измерения расстояний вне нашей Галактики. Получившие имя после открытия первой такой звезды —  $\delta$  Цефея, — они могут быть узнаны по характерной зависимости их светимости от времени с периодами, меняющимися от 2 до 45 дней. (В других галактиках были найдены цефеиды с периодами вплоть до 100 дней.) В 1912 г. Генриетта Сван Ливитт (Henrietta Swan Leavitt) обнаружила, что переменные цефеиды в Малом Магеллановом Облаке (ММО) имеют видимые светимости, описываемые гладкой функцией от периода изменения светимости, однако расстояние до ММО тогда было неизвестно. Измерив расстояния и видимые светимости нескольких цефеид в рассеянных звездных скоплениях и определив тем самым их абсолютные светимости, удалось откалибровать соотношение между периодом и светимостью. Таким образом, переменные цефеиды стали «стандартной свечой», которую можно использовать для измерения расстояния до любой галактики, достаточно близкой к нам для того, чтобы цефеиды были видны. Именно открытие цефеид в M31 вместе с калибровкой Ливитт для соотношения «период—светимость» цефеид позволило Эдвину Хабблу в 1923 г. измерить расстояние до M31 и показать, что она находится очень далеко от нашей Галактики и, следовательно, является самостоятельной галактикой.

<sup>43)</sup> E. F. Guinan et al., *Astrophys. J.* **509**, L21 (1998); E. L. Fitzpatrick et al., *Astrophys. J.* **587**, 685 (2003).

<sup>44)</sup> T. J. Harries, R. W. Hilditch, and I. D. Howarth, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **339**, 157 (2003); R. W. Hilditch, I. D. Howarth, and T. J. Harries, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **357**, 304 (2005).

<sup>45)</sup> I. Ribas et al., *Astrophys. J.* **635**, L37 (2005).

<sup>46)</sup> A. Z. Bonanos et al., *Astrophys. Space Sci.* **304**, 207 (2006) [astro-ph/0606279].

Сегодня форма соотношения «период—светимость» для цефеид устанавливается главным образом по звездам Большого Магелланова Облака (БМО), где обнаружено много цефеид; кроме того, принимается во внимание зависимость абсолютной светимости от цвета. Таким образом, калибровка абсолютных светимостей цефеид может быть выражена как измерение расстояния до БМО (и зачастую равнозначна ему). Фотометрия главной последовательности и другие методы привели к тому, что в течение ряда лет общепринятым для БМО считался модуль расстояния 18,5, что, согласно (1.3.6), соответствует расстоянию  $5,0 \times 10^4$  пк. Использование звезд красных скоплений<sup>47)</sup> приводило к значению модуля расстояния, равному 18,47 со случайной ошибкой  $\pm 0,01$  и систематической ошибкой  $+0,05_{-0,06}$ . Большой каталог<sup>48)</sup> цефеид в БМО был интерпретирован членами исследовательской группы Key Project космического телескопа «Хаббл»<sup>49)</sup>, которая описала видимую и инфракрасную абсолютные величины как функции периода  $P$  в днях:

$$M_B = -2,760 \lg P - 1,458, \quad M_H = -2,962 \lg P - 1,942, \quad (1.3.7)$$

в предположении, что модуль расстояния БМО равен 18,5.

Этот результат был подвергнут критике по двум направлениям, которые иллюстрируют трудности измерений подобного рода.

Во-первых, были известны рассогласования в измерении расстояния до БМО. Если положить, что звезды красных скоплений в БМО обладают той же инфракрасной светимостью, что и звезды в локальном галактическом диске, можно определить модуль расстояния, который оказывается<sup>50)</sup> на 0,45 меньше, что дает расстояние до БМО, отличающееся в 0,8 раз. Это, в свою очередь, ставится под сомнение на том основании, что звезды в БМО имеют заметно меньшую металличность, чем в локальном диске; две группы ученых, которые приняли это во внимание<sup>51)</sup>, получили модуль расстояния, равный  $18,36 \pm 0,17$  и  $18,28 \pm 0,18$ , что находится в хорошем согласии с ранее принятым значением. Это согласуется также с измерением расстояния до БМО, вытекающим<sup>52)</sup> из наблюдений звезд типа RR Лиры, которое приводит к значению модуля расстояния  $18,33 \pm 0,06$ . Это значение модуля расстояния до БМО подтверждается измерением расстояния до затменной двойной звезды HV2274; с учетом ее расстояния до центра БМО получается<sup>53)</sup> модуль расстояния до БМО, равный  $18,30 \pm 0,07$ .

<sup>47)</sup> M. Salaris, S. Percival, and L. Girardi, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **345**, 1030 (2003) [astro-ph/0307329].

<sup>48)</sup> A. Udalski et al., *Acta Astr.* **49**, 201 (1999); табл. 1.

<sup>49)</sup> W. L. Freedman et al., *Astrophys. J.* **553**, 47 (2001).

<sup>50)</sup> K. Z. Stanek, D. Zaritsky, and J. Harris, *Astrophys. J.* **500**, L141 (1998) [astro-ph/9803181].

<sup>51)</sup> A. A. Cole, *Astrophys. J.* **500**, L137 (1998) [astro-ph/9804110]; L. Girardi et al., *op. cit.*

<sup>52)</sup> P. Popowsky and A. Gould, *op. cit.*

<sup>53)</sup> E. F. Guinan et al., *op. cit.*

Во-вторых, появились новые, не опирающиеся на цефеиды из БМО, калибровки соотношения «период—светимость» для цефеид, которые вместе с наблюдениями цефеид из БМО можно использовать для получения независимых расстояний до БМО<sup>54)</sup>. В последние годы спутник Hipparcos<sup>55)</sup> измерил тригонометрические параллаксы для 223 переменных цефеид в нашей Галактике, из которых почти 200 можно использовать для калибровки соотношения «период—светимость», не обращаясь к фотометрии главной последовательности, звездам красных скоплений или звездам типа RR Лиры. Ближайшие цефеиды находятся на расстоянии примерно 100 пк от нас (расстояние до Полярной звезды равно примерно 130 пк), так что параллаксы составляют всего несколько миллионных долей угловой секунды и отдельные измерения не слишком точны; однако располагая измерениями для 200 цефеид, можно получить вполне хорошую точность. Один ранний результат<sup>56)</sup> давал соотношение между абсолютной видимой величиной  $M_b$  и периодом  $P$  (в днях) в виде

$$M_b = -2,81 \lg P - 1,43 \pm 0,10.$$

Это меньше предыдущих результатов примерно на 0,2, т. е. приводит к приросту собственной светимости цефеид с множителем  $10^{0,2 \times 2/5} = 1,20$ , что ведет к увеличению на 10 % всех космических расстояний, прямо или косвенно опирающихся на соотношение «период—светимость» для цефеид. При таком значении абсолютной светимости цефеид модуль расстояния до БМО оказался бы равным 18,66 или немного меньше, если сделать поправки на металличность БМО.

---

Впрочем, после калибровки абсолютной светимости цефеид, выполненной по данным наблюдений спутника Hipparcos, БМО имеет значение только для определения формы зависимости «период—светимость» для цефеид.

---

Этот результат для абсолютных светимостей цефеид был в конце концов опровергнут<sup>57)</sup>.

Все эти нестыковки теперь можно устраниТЬ, используя значения тригонометрического параллакса для цефеид в нашей галактике, полученные с помощью интерферометра FGS на телескопе «Хаббл». Самый первый три-

<sup>54)</sup> См. обзор в M. Feast, *Odessa Astron. Publ.* **14** [astro-ph/0110360].

<sup>55)</sup> M. A. C. Perryman, *Astron. Astrophys.* **323**, L149 (1997).

<sup>56)</sup> M. W. Feast and R. M. Catchpole, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **286**, L1 (1997); см. также F. Pont, *Harmonizing Cosmic Distance Scales in a Post-Hipparcos Era*, eds. D. Egret and A. Heck (ASP Conference Series, San Francisco, 1998) [astro-ph/9812074]; H. Baumgardt, C. Dettbarn, B. Fuchs, J. Rockmann, and R. Wielen, *Harmonizing Cosmic Distance Scales in a Post-Hipparcos Era*, *ibid* [astro-ph/9812437].

<sup>57)</sup> См., например, B. F. Madore and W. L. Freedman, *Astrophys. J.* **492**, 110 (1998). Недавний обзор теоретических вопросов, связанных с соотношением «период—светимость» для цефеид, см. в A. Gautschy, *Recent Results on  $H_0$  — 19th Texas Symposium on Relativistic Astrophysics* [astro-ph/9901021].

гонометрический параллакс  $\delta$  Цефея<sup>58)</sup> дал расстояние  $273 \pm 11$  пк, что соответствует модулю расстояния до БМО, равному  $18,50 \pm 0,13$ . Позже были измерены тригонометрические параллаксы для 9 галактических цефеид, которые привели к значению модуля расстояния БМО, равному  $18,50 \pm 0,03$  или, с поправками на металличность,  $18,40 \pm 0,05$ <sup>59)</sup>.

Также была проведена независимая калибровка соотношения «период—светимость» для цефеид путем наблюдения<sup>60)</sup> цефеид в галактике NGC 4258, расстояние до которой, равное  $7,2 \pm 0,5$  Мпк, было получено из наблюдений за собственным движением мазеров в этой галактике, как описывалось выше. Это значение расстояния находится в удовлетворительном согласии со значением  $7,6 \pm 0,3$  Мпк, полученным для цефеид в галактике NGC 4258 в предположении, что эти цефеиды подчиняются соотношению (1.3.7), рассчитанному исходя из значения 18,5 для модуля расстояния до БМО, что подтверждает соотношение «период—светимость». Однако цефеиды из NGC 4258 и из БМО отличаются друг от друга металличностью, что ставит такой вывод под сомнение<sup>61)</sup>. Выполненная в 2006 г. калибровка соотношения «период—светимость» для цефеид, опирающаяся на исследование 281 цефеид в NGC 4258<sup>62)</sup> (расстояние до которой, как мы видели, известно из наблюдений за доплеровскими сдвигами и собственными движениями мазеров), дает значение модуля расстояния до БМО, равное  $18,41 \pm 0,10$  (стат.)  $\pm 0,13$  (систем.). Это исследование охватывает как богатые металлами области, вроде нашей Галактики, так и бедные, вроде БМО, а потому обеспечивает калибровку соотношения «период—светимость» для цефеид с учетом металличности.

В обзоре 2003 г.<sup>63)</sup> приводится значение модуля расстояния до БМО, измеренное с помощью разнообразных индикаторов расстояний помимо цефеид (в том числе звезд типа RR Лиры, звезд из красных скоплений и т. п.) и равное  $18,48 \pm 0,04$ , что находится в очень хорошем согласии с прежним значением  $18,52 \pm 0,05$ , которое получено из наблюдений за цефеидами с поправками, внесенными исследовательской группой Key Project космического телескопа «Хаббл».

## B. Вторичные индикаторы расстояний

Ни один из перечисленных выше индикаторов расстояний не является достаточно ярким, чтобы использовать его для измерения расстояний при таких красных смещениях, при которых пекулярные скорости становятся преенебрежимо малыми по сравнению со скоростью расширения (скажем,  $z > 0,03$ ).

<sup>58)</sup> G. F. Benedict et al., *Astrophys. J.* **124**, 1695 (2002).

<sup>59)</sup> G. F. Benedict et al., *Astron. J.* **133**, 1810 (2007) [astro-ph/0612465].

<sup>60)</sup> J. A. Newman et al., *Astrophys. J.* **553**, 562 (2001) [astro-ph/0012377].

<sup>61)</sup> См., например, B. Paczynski, *Nature* **401**, 331 (1999); F. Caputo, M. Marconi, and I. Musella, *Astrophys. J.* [astro-ph/0110526].

<sup>62)</sup> L. M. Macri et al., *Astrophys. J.* **652**, 1133 (2006) [astro-ph/0608211].

<sup>63)</sup> M. Feast, *Lect. Notes Phys.* **635**, 45 (2003) [astro-ph/0301100].

Поэтому нам нужны так называемые *вторичные индикаторы расстояний*, которые ярче цефеид, — например, целые галактики или сверхновые, которые по яркости могут быть сопоставимыми с галактиками.

На протяжении многих лет цефеиды можно было использовать в качестве индикаторов расстояний только в масштабах порядка нескольких миллионов парсеков (Мпк), что ограничивало их применение Местной группой галактик (состоящей из нашей Галактики, туманности Андромеды M31 и примерно дюжины галактик меньшего размера, вроде M33, БМО и ММО) и несколькими близлежащими группами (M81, M101 и Группа Скульптора). Этого было мало для того, чтобы откалибровать расстояния в достаточно широком наборе галактик и сверхновых, поэтому возникла необходимость использовать множество промежуточных индикаторов расстояний — шаровых скоплений, областей НП, ярчайших звезд в галактиках и т. п. В настоящее время телескоп «Хаббл» позволяет наблюдать цефеиды в составе множества галактик, удаленных от нас на гораздо большие расстояния — до 30 Мпк, так что вторичные индикаторы расстояний можно откалибровать напрямую, не опираясь на промежуточные индикаторы. Были выделены четыре ведущих вторичных индикатора расстояний.

### 1. Соотношение Талли—Фишера

Хотя галактики в целом можно увидеть на очень больших расстояниях, выделить какой-либо класс галактик с одной и той же абсолютной светимостью не представлялось возможным. Однако в 1977 г. Талли и Фишер<sup>64)</sup> разработали метод оценки абсолютной светимости для подходящих спиральных галактик. Спектральная линия поглощения 21 см в таких галактиках (возникающая при переходе атомов водорода с более низкого на более высокий уровень в сверхтонкой структуре) расширяется благодаря эффекту Доплера, создаваемому вращением галактики. Ширина  $W$  линии указывает на максимальную скорость вращения галактики, связанную с массой галактики, которая, в свою очередь, соотносится с абсолютной светимостью галактики<sup>65)</sup>.

---

Соотношение Талли—Фишера можно применять и к ширине других спектральных линий — например, к радиочастотному переходу в молекуле монооксида углерода<sup>66)</sup>.

---

В одной из работ, где применялся этот подход<sup>67)</sup>, форма функции  $L_i(W)$ , описывающей зависимость абсолютной светимости в инфракрасном диапа-

<sup>64)</sup> R. B. Tully and J. R. Fisher, *Astron. Astrophys.* **54**, 661 (1977).

<sup>65)</sup> M. Aaronson, J. R. Mould, and J. Huchra, *Astrophys. J.* **229**, 1 (1979).

<sup>66)</sup> Y. Tutui et al., *Publ. Astron. Soc. Japan.* **53**, 701 (2001) [astro-ph/0108462].

<sup>67)</sup> R. Giovanelli, *The Extragalactic Distance Scale — Proceedings of the Space Telescope Science Institute Symposium held in Baltimore, MD, May 1996* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997): 113; R. Giovanelli et al., *Astron. J.* **113**, 22 (1997).

зоне (то есть абсолютной светимости с точностью до некоторого общего постоянного множителя) от ширины спектральной линии 21 см, определялась по выборке, включавшей в себя 555 спиральных галактик в 24 скоплениях, многие из которых имели красное смещение меньше 0,1.

---

Относительные расстояния для этих галактик были найдены из отношения их красных смещений с помощью уравнения (1.2.9), так что пекулярные скорости вносят заметные ошибки в оценку соотношения абсолютных светимостей для каждой пары галактик, но при наличии 555 галактик в выборке можно предполагать, что эти ошибки сводятся на нет при гладкой аппроксимации измеренных относительных значений абсолютной светимости методом наименьших квадратов.

---

В грубом приближении функция  $L_i(W)$  оказалась пропорциональной  $W^3$ . Общий масштаб функции  $L_i(W)$  был затем определен путем подгонки к значениям абсолютной светимости 15 спиральных галактик, расстояния до которых были известны из наблюдений за цефеидами в их составе.

---

Эти 15 галактик удалены всего на 25 Мпк, а этого недостаточно для непосредственного измерения постоянной Хаббла.

---

Постоянную Хаббла можно получить отсюда, используя откалиброванную таким образом функцию  $L_i(W)$  для вычисления расстояний до галактик в 14 скоплениях с красными смещениями в диапазоне от 0,013 до 0,03 и сравнивая с результатами, полученными из (1.2.8).

---

Красные смещения могут оказаться недостаточно большими, чтобы можно было полностью проигнорировать пекулярные скорости, но эта проблема также решается использованием большого числа галактик.

---

Найденное таким образом значение постоянной Хаббла оказалось равным  $70 \pm 5$  (км/с)/Мпк. Позже исследовательская группа Key Project по измерению постоянной Хаббла с помощью телескопа «Хаббл» использовала цефеиды, чтобы заново откалибровать соотношение Талли—Фишера (считая расстояние до БМО равным 50 кпк), и получила значение  $H_0$ , построив график, связывающий расстояния, найденные из соотношения Талли—Фишера, с красными смещениями для 19 скоплений, чьи красные смещения были взяты из обзора G97 Джованелли и соавторов<sup>68)</sup> и находились в диапазоне от 0,007 до 0,03<sup>69)</sup>. Итоговое значение оказалось равным  $71 \pm 3 \pm 7$  (км/с)/Мпк, где первой указана статистическая погрешность, а второй — систематическая.

---

<sup>68)</sup> Giovanelli et al., *op. cit.*

<sup>69)</sup> S. Sakai et al., *Astrophys. J.* **529**, 698 (2000); W. L. Freedman et al., *Astrophys. J.* **553**, 47 (2001); а также ссылки, цитируемые там.

## 2. Соотношение Фабер—Джексона

Подобно тому, как метод Талли—Фишера опирается на корреляцию орбитальных скоростей с абсолютной светимостью для спиральных галактик, метод Фабер—Джексона строится на корреляции случайных скоростей с абсолютной светимостью для эллиптических галактик<sup>70)</sup>. Преимуществом этого метода над методом Талли—Фишера является более строгое теоретическое обоснование, обеспечиваемое теоремой вириала, которую мы обсудим в разд. 1.9 и которая напрямую связывает среднеквадратичную случайную скорость с массой галактики.

## 3. Фундаментальная плоскость

Метод Фабер—Джексона был усовершенствован благодаря пониманию того, что корреляция орбитальной скорости и абсолютной светимости зависит также от поверхностной яркости скопления, а значит, от площади поверхности<sup>71)</sup>.

---

Сам термин «фундаментальная плоскость» относится к способу графического изображения данных об эллиптических галактиках.

---

С помощью этого метода для постоянной Хаббла была получена оценка<sup>72)</sup>  $H_0 = 78 \pm 5$  (стат.)  $\pm 9$  (систем.) (км/с)/Мпк.

## 4. Сверхновые типа Ia

Считается, что сверхновые типа Ia возникают тогда, когда белый карлик в системе двойной звезды отбирает у своего партнера путем акреции достаточно вещества, чтобы значение его массы приблизилось к пределу Чандрасекара — максимальной возможной массе, сдерживаемой давлением вырожденных электронов<sup>73)</sup>. Когда это случается, белый карлик переходит в неустойчивое состояние, а рост температуры и плотности делает возможным преобразование углерода и кислорода в  $^{56}\text{Ni}$ , запускающее термоядерный взрыв, который можно увидеть с расстояний порядка нескольких тысяч мегапарсеков. Масса взорвавшейся звезды всегда близка к пределу Чандрасекара.

<sup>70)</sup> S. M. Faber and R. E. Jackson, *Astrophys. J.* **204**, 668 (1976).

<sup>71)</sup> A. Dressler et al., *Astrophys. J.* **313**, 42 (1987).

<sup>72)</sup> D. D. Kelson et al., *Astrophys. J.* **529**, 768 (2000) [astro-ph/9909222]; J. P. Blakeslee, J. R. Lucey, J. L. Tonry, M. J. Hudson, V. K. Narayan, and B. J. Barris, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **330**, 443 (2002) [astro-ph/011183].

<sup>73)</sup> W. A. Fowler and F. Hoyle, *Astrophys. J.* **132**, 565 (1960). Относя сверхновую к типу I, имеют в виду лишь то, что в ее спектре не наблюдаются линии водорода. Кроме сверхновых типа Ia, есть другие сверхновые типа I, которые возникают при коллапсе ядра звезд, более массивных по сравнению с белыми карликами, и теряют свой внешний слой водорода благодаря звездному ветру, а также сверхновые типа II, порождаемые коллапсом ядра массивных звезд без потери внешнего водородного слоя. Обсуждение предела Чандрасекара см. в ГиК, разд. 11.3.

кара, так что абсолютная светимость таких взрывов варьируется в небольшом диапазоне, что делает их идеальными индикаторами расстояний<sup>74)</sup>. Наличествующие вариации представляются тесно связанными с длительностью периода разгорания и периода угасания сверхновой: чем медленнее угасание, тем выше абсолютная светимость<sup>75)</sup>.

Это соотношение было откалибровано путем измерения сверхновых типа Ia в нескольких галактиках с известными расстояниями. С 1937 по 1999 гг. в галактиках, расстояние до которых было измерено посредством наблюдения за цефеидами<sup>76)</sup>, возникли десять сверхновых. Шесть из них были использованы исследовательской группой HST Key  $H_0$  Project<sup>77)</sup> для калибровки соотношения между абсолютной светимостью и временем угасания. Затем с помощью полученного соотношения были рассчитаны расстояния в выборке из 29 сверхновых типа Ia в галактиках с красными смещениями в диапазоне от 0,01 до 0,1, наблюдения за которыми велись в обсерватории Cerro Tololo<sup>78)</sup>. График, связывающий эти расстояния с измеренными красными смещениями, привел к значению постоянной Хаббла, равному<sup>79)</sup>  $H_0 = 71 \pm 2$  (стат.)  $\pm 6$  (систем.) (км/с)/Мпк. Это значение хорошо согласуется с более ранним результатом для сверхновых типа Ia, полученным группой исследователей из Гарварда<sup>80)</sup>:  $H_0 = 67 \pm 7$  (км/с)/Мпк. Впоследствии члены гарвардской группы забраковали<sup>81)</sup> свой прежний результат и сейчас указывают значение  $H_0 = 73 \pm 4$  (стат.)  $\pm 5$  (систем.) (км/с)/Мпк. С другой стороны, группа, возглавляемая Сэндиджем, с помощью сверхновых типа Ia и соотношения Талли—Фишера систематически получала для  $H_0$  более низкие зна-

<sup>74)</sup> Сверхновые типа Ia впервые были использованы в качестве индикаторов расстояний в работе A. Sandage and G. A. Tammann, *Astrophys. J.* **256**, 339 (1982), опиравшейся на более раннее замечание о том, что сверхновые типа Ia обладают довольно однородной светимостью, сделанное в работе C. T. Kowal, *Astron. J.* **73**, 1021 (1968). В 1982 г. преодоление зазора между расстояниями, которые могут быть измерены с помощью цефеид, и расстояниями, на которых могут быть обнаружены сверхновые, требовало задействования наиболее ярких сверхгигантов в качестве промежуточных индикаторов расстояний. Обзор использования сверхновых типа Ia в качестве «стандартных свечей» см. в D. Branch, *Ann. Rev. Astron. & Astrophys.* **36**, 17 (1998); P. Höflich, C. Gerardy, E. Linder, and H. Marion, *Stellar Candles*, eds. W. Gieren et al. (*Lecture Notes in Physics*) [astro-ph/0301334].

<sup>75)</sup> M. Phillips, *Astrophys. J.* **413**, L105 (1993); M. Hamuy et al., *Astron. J.* **109**, 1 (1995); A. Riess, W. Press, and R. Kirshner, *Astrophys. J.* **438**, L17 (1996); S. Jha, A. Riess, and R. P. Kirshner, *Astrophys. J.* **659**, 122 (2007). Зависимость абсолютной светимости от цвета, равно как и от времени угасания, рассматривалась в работе R. Tripp and D. Branch [astro-ph/9904347].

<sup>76)</sup> См. список в Tripp and Branch, *op. cit.*

<sup>77)</sup> B. Gibson et al., *Astrophys. J.* **529**, 723 (2000) [astro-ph/9908149].

<sup>78)</sup> M. Hamuy et al., *Astron. J.* **112**, 2398 (1996).

<sup>79)</sup> L. Ferrarese et al., *Proceedings of the Cosmic Flows Workshop*, eds. S. Courteau et al. (ASP Conference Series) [astro-ph/9909134]; W. L. Freedman et al., *Astrophys. J.* **553**, 47 (2001).

<sup>80)</sup> A. G. Riess, W. H. Press, and R. P. Kirshner, *Astrophys. J.* **438**, L17 (1995).

<sup>81)</sup> A. Riess et al., *Astrophys. J.* **627**, 579 (2005) [astro-ph/0503159].

чения<sup>82)</sup>. Разброс, по всей видимости, постепенно сокращается: в 2006 г. эта группа приводила<sup>83)</sup> значение  $H_0 = 62,3 \pm 1,3$  (стат.)  $\pm 5,0$  (сист.) (км/с)/Мпк.

---

По мнению Сэндиджа и его коллег, источником расхождения в этих результатах служат различия в соотношениях «период—светимость» для цефеид, с помощью которых измеряются расстояния до галактик со сверхновыми, используемыми для калибровки соотношения между абсолютной светимостью и временем угасания сверхновой. Сэндидж и коллеги используют соотношение «период—светимость», зависящее от металличности. Однако Макри и коллеги (см. сноска 62) последовательно указывают на отсутствие различий в соотношении «период—светимость» цефеид для богатых и бедных металлами областей в NGC 4258.

---

Есть давняя надежда на то, что хорошая теоретическая картина взрыва сверхновых позволит измерять расстояния до них без использования первичных индикаторов расстояний. Проведенное в 2003 г. сопоставление<sup>84)</sup> наблюдаемых кривых блеска (видимая звездная величина как функция времени) и спектров с теоретическими результатами для 26 сверхновых типа Ia с красными смещениями вплоть до 0,05, а также еще одной с красным смещением 0,38, дало значение  $H_0 = 67$  (км/с)/Мпк с погрешностью двух стандартных отклонений в размере 8 (км/с)/Мпк. Пока еще преждевременно заменять этим методом прежний метод, основанный на использовании первичных индикаторов расстояний для калибровки абсолютных светимостей сверхновых, однако согласие в значениях  $H_0$ , полученных этими двумя методами, дает некоторую уверенность в том, что старый метод не приводил к значительным ошибкам.

Поучительно рассмотреть еще один, пятый вторичный индикатор расстояний, который также применялся для определения постоянной Хаббла.

## 5. Флуктуации поверхностной яркости

В 1988 г. Тонри и Шнейдер<sup>85)</sup> предложили использовать флуктуации наблюдаемой поверхностной яркости галактик от одной части изображения к другой в качестве меры расстояния до галактики. Предположим, что звезды в галактике можно разбить на классы по светимости: все звезды в классе  $i$  имеют одну и ту же абсолютную светимость  $L_i$ . Скорость поступления энергии на единицу площади апертуры телескопа для маленькой части изображения галактики (например, единичного пикселя ПЗС-матрицы) равна

$$\ell = \sum_i \frac{N_i L_i}{4\pi d^2}, \quad (1.3.8)$$

---

<sup>82)</sup> См. реюме 1996 г. в G. A. Tammann and M. Federspeil, *The Extragalactic Distance Scale*, eds. M. Livio, M. Donahue, and N. Panagia (Cambridge University Press, 1997): 137.

<sup>83)</sup> A. Sandage et al., *Astrophys. J.* **653**, 843 (2006) [astro-ph/0603647].

<sup>84)</sup> P. Höflich, C. Gerardy, E. Linder, and H. Marion, *op. cit.*

<sup>85)</sup> J. Tonry and D. P. Schneider, *Astron. J.* **96**, 807 (1988).

где  $N_i$  — число звезд класса  $i$  в этой части изображения галактики, а  $d$  — расстояние до галактики. Как правило, различить можно только самые яркие звезды, поэтому не все  $N_i$  могут быть измерены непосредственно, однако можно измерить флюктуации  $\ell$  при переходе от одной части изображения к другой, возникающие благодаря конечным значениям  $N_i$ . Допустим, что флюктуации различных  $N_i$  при переходе между частями изображения галактики независимы и подчиняются статистике Пуассона, так что:

$$\langle (N_i - \langle N_i \rangle)(N_j - \langle N_j \rangle) \rangle = \delta_{ij} \langle N_i \rangle, \quad (1.3.9)$$

где угловыми скобками обозначено усреднение по малым частям центрального фрагмента изображения галактики. Отсюда следует, что

$$\frac{\langle (\ell - \langle \ell \rangle)^2 \rangle}{\langle \ell \rangle} = \frac{\bar{L}}{4\pi d^2}, \quad (1.3.10)$$

где  $\bar{L}$  — взвешенная по светимости средняя звездная светимость

$$\bar{L} \equiv \frac{\sum_i \langle N_i \rangle L_i^2}{\sum_i \langle N_i \rangle L_i}, \quad (1.3.11)$$

которая, как можно ожидать, меняется существенно меньше от одной галактики к другой, нежели светимость самих галактик. Проведя калибровку соотношения (1.3.10) путем измерения  $\bar{L}$ , можно использовать его для измерения расстояний. Изучая флюктуации поверхностной яркости галактик из обзора галактик, расстояния до которых измерялись путем наблюдения за цефеидами, Тонри и его коллеги<sup>86)</sup> нашли значение абсолютной звездной величины  $M_u$ , которое в инфракрасном диапазоне эквивалентно абсолютной светимости  $\bar{L}$ :

$$\bar{M}_u = (-1,74 \pm 0,07) + (4,5 \pm 0,25)[m_v - m_u - 1,15], \quad (1.3.12)$$

где  $m_v - m_u$  — параметр, характеризующий цвет галактики и равный разности видимой звездной величины в видимом и инфракрасном диапазонах; здесь предполагается, что его значение лежит между 1,0 и 1,5. Используя соотношение (1.3.10) для определения расстояний до галактик с большими красными смещениями, они получили для постоянной Хаббла значение  $81 \pm 6$  (км/с)/Мпк.

Есть и другие явления, которые используются для определения постоянной Хаббла, в том числе сопоставление видимой и абсолютной светимостей для сверхновых других типов, новых звезд, шаровых скоплений и планетарных туманностей, дисперсионное соотношение «диаметр — скорость» для эллиптических галактик, гравитационные линзы (обсуждаемые в разд. 1.12), эффект

<sup>86)</sup> J. L. Tonry, J. P. Blakeslee, E. A. Ajhar, and A. Dressler, *Astrophys. J.* **473**, 399 (1997). Более поздний обзор см. в J. L. Tonry et al., *Astrophys. J.* **546**, 681 (2001) [astro-ph/0011223].

Сюняева—Зельдовича (обсуждаемый в разд. 2.3) и т. п.<sup>87)</sup> Исследовательская группа HST Key  $H_0$  Project свела воедино результаты своих измерений постоянной Хаббла с помощью соотношения Талли—Фишера, сверхновых типа Ia и некоторых других вторичных индикаторов расстояний и сделала вывод, что<sup>88)</sup>

$$H_0 = 71 \pm 6 \text{ (км/с)/Мпк.}$$

Как мы увидим в разд. 7.2, изучение анизотропии реликтового излучения дает величину  $H_0 = 73 \pm 3$  (км/с)/Мпк. Этот результат не связан ни с одним из инструментов, обсуждавшихся в этом разделе, но зато тесно связан с некоторыми далекоидущими космологическими предположениями, среди которых плоская геометрия пространства, независимость энергии вакуума от времени и холодная темная материя. По этой причине растущая точность измерения  $H_0$  с помощью реликтового излучения не приведет к вытеснению прежних методов измерения, которым посвящен этот раздел, — скорее согласие (или возможное в будущем несогласие) между значениями  $H_0$ , полученными посредством этих очень разных методов, послужит подтверждением (или, может быть, опровержением) тех допущений, которые были сделаны при анализе микроволнового фона.

С учетом остающейся неопределенности в значении постоянной Хаббла в настоящее время обычно принимается, что

$$H_0 = 100h \text{ (км/с)/Мпк,} \quad (1.3.13)$$

где значение безразмерного параметра  $h$  находится в районе 0,7. Это соответствует возрасту наблюдаемой части Вселенной (времени Хаббла)

$$\frac{1}{H_0} = 9,778 \times 10^9 h^{-1} \text{ лет.} \quad (1.3.14)$$

---

## 1.4

### Фотометрическое расстояние и расстояние по угловому диаметру

#### Фотометрическое расстояние • Параметр замедления • Рывок и толчок • Расстояние по угловому диаметру

Теперь мы должны рассмотреть измерение расстояний при больших красных смещениях — скажем, при  $z > 0,1$ , когда влиянием космологического расширения на определение расстояния больше нельзя пренебрегать. Именно эти измерения способны поведать нам о том, ускоряется ли расширение Все-

<sup>87)</sup> Обзор большинства этих методов со ссылками см. в G. H. Jacoby, D. Branch, R. Ciardullo, R. L. Davies, W. E. Harris, M. J. Pierce, C. J. Pritchett, J. L. Tonry and D. L. Welch, *Publ. Astron. Soc. Pacific* **104**, 599 (1992).

<sup>88)</sup> L. Ferrarese et al. *op. cit.*; W. L. Freedman et al., *Astrophys. J.* **553**, 47 (2001).

ленной или замедляется и насколько быстро это происходит. Прежде чем мы сможем интерпретировать результаты этих измерений, нам потребуется разобраться в том, как определяются расстояния при больших красных смещениях (в этом разделе), и применить полевые уравнения Эйнштейна к метрике Робертсона—Уокера (в следующем разделе). После этого мы вернемся (в разд. 1.6) к измерению и интерпретации расстояний при больших красных смещениях.

В предыдущем разделе мы вывели известное соотношение  $\ell = L/(4\pi d^2)$  для видимой светимости  $\ell$  источника с абсолютной светимостью  $L$  на расстоянии  $d$ . На больших масштабах эти рассуждения требуют модификации по трем причинам:

1. В момент времени  $t_0$ , когда свет достигает Земли, площадь сферы вокруг светящегося объекта, проходящей через Землю, в соответствии с метрикой (1.1.10) равняется  $4\pi r_1^2 a^2(t_0)$ , где  $r_1$  — радиальная координата Земли с точки зрения светящегося объекта, которая в точности равна радиальной координате светящегося объекта с точки зрения Земли. Поэтому доля света, полученная телескопом с апертурой  $A$  на Земле, составляет  $A/(4\pi r_1^2 a^2(t_0))$ , так что множитель  $1/d^2$  в формуле для  $\ell$  следует заменить на  $1/(r_1^2 a^2(t_0))$ .
2. Частота, с которой отдельные фотоны достигают конечной точки, ниже частоты их испускания на фактор красного смещения  $a(t_1)/a(t_0) = 1/(1+z)$ .
3. Энергия  $h\nu_0$  отдельного фотона, достигшего Земли, меньше энергии  $h\nu_1$ , которую фотон имел, когда покидал источник, на тот же фактор красного смещения  $1/(1+z)$ .

Собрав все это вместе, мы получаем корректную формулу для видимой светимости источника произвольного размера с радиальной координатой  $r_1$  и красным смещением  $z$ :

$$\ell = \frac{L}{4\pi r_1^2 a^2(t_0)(1+z)^2}. \quad (1.4.1)$$

Удобно ввести «фотометрическое расстояние»  $d_\phi$  таким образом, чтобы соотношение между видимой и абсолютной светимостями для фотометрического расстояния приняло такой же вид, как соотношение (1.3.3):

$$\ell = \frac{L}{4\pi d_\phi^2}. \quad (1.4.2)$$

Тогда формулу (1.4.1) можно записать в виде

$$d_\phi = a(t_0)r_1(1+z). \quad (1.4.3)$$

Для объектов с  $z \ll 1$  полезно разложить соотношение между фотометрическим расстоянием и красным смещением в степенной ряд. Красное смещение  $1+z \equiv a(t_0)/a(t_1)$  связано с временем ретроспектиды<sup>89)</sup>  $t_0 - t_1$

<sup>89)</sup> Другими словами, это промежуток времени, в течение которого излучение идет от небесных объектов к наблюдателю. — Прим. ред. перев.

соотношением

$$z = H_0(t_0 - t_1) + \frac{1}{2}(q_0 + 2)H_0^2(t_0 - t_1)^2 + \dots, \quad (1.4.4)$$

где  $H_0$  — постоянная Хаббла (1.2.7), а  $q_0$  — параметр замедления

$$q_0 \equiv -\frac{1}{H_0^2 a(t_0)} \cdot \left. \frac{d^2 a(t)}{dt^2} \right|_{t=t_0} \quad (1.4.5)$$

Это соотношение можно обратить, чтобы получить время ретроспектива как степенной ряд по красному смещению:

$$H_0(t_0 - t_1) = z - \frac{1}{2}(q_0 + 2)z^2 + \dots. \quad (1.4.6)$$

Радиальная координата  $r_1$  светящегося объекта получается из соотношения (1.2.2) в виде

$$\frac{t_0 - t_1}{a(t_0)} + \frac{H_0(t_0 - t_1)^2}{2a(t_0)} + \dots = r_1 + \dots, \quad (1.4.7)$$

где многоточие справа обозначает члены *третьего* и более высоких порядков в  $r_1$ . Используя (1.4.6), получаем решение:

$$r_1 a(t_0) H_0 = z - \frac{1}{2}(1 + q_0)z^2 + \dots. \quad (1.4.8)$$

Это позволяет представить фотометрическое расстояние (1.4.3) как степенной ряд

$$d_\Phi = H_0^{-1} \left[ z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2 + \dots \right]. \quad (1.4.9)$$

Следовательно, мы можем измерять  $q_0$ , равно как и  $H_0$ , измеряя расстояние светимости как функцию красного смещения с точностью до членов порядка  $z^2$ . Посредством тех же рассуждений выражение (1.4.9) раскрывается до четвертого порядка<sup>90)</sup> по  $z$ :

$$d_\Phi = H_0^{-1} \left[ z + \frac{1}{2}(1 - q_0)z^2 - \frac{1}{6} \left( 1 - q_0 - 3q_0^2 + j_0 + \frac{K}{H_0^2 a_0^2} \right) z^3 + \right. \\ \left. + \frac{1}{24} \left( 2 - 2q_0 - 15q_0^2 - 15q_0^3 + 5j_0 + 10q_0 j_0 + s_0 + \frac{2K(1 + 3q_0)}{H_0^2 a_0^2} \right) z^4 + \dots \right],$$

где  $j_0$  и  $s_0$  — параметры, известные как *рывок* (jerk) и *толчок* (snap):

$$j_0 \equiv \frac{1}{H_0^3 a(t_0)} \left. \frac{d^3 a(t)}{dt^3} \right|_{t=t_0}, \quad s_0 \equiv \frac{1}{H_0^4 a(t_0)} \left. \frac{d^4 a(t)}{dt^4} \right|_{t=t_0}$$

<sup>90)</sup> M. Visser, *Class. Quant. Grav.* **21**, 2603 (2004) [gr-qc/0309109]. Члены третьего порядка по  $z$  были вычислены ранее в работе T. Chiba and T. Nakamura, *Prog. Theor. Phys.* **100**, 1077 (1998).

В прошлом космологию называли «охотой за двумя числами» —  $H_0$  и  $q_0$ . Определение  $H_0$  по-прежнему является важнейшей задачей астрономии, как обсуждалось в предыдущем разделе. Вместе с тем  $q_0$  теперь вызывает меньший интерес. Вместо высокоточного определения расстояний при умеренных (порядка 0,1 или 0,2) красных смещениях, которое дало бы точное значение  $q_0$ , мы ныне занимаемся определением расстояний с умеренной точностью при больших (порядка единицы) красных смещениях, которое связано с формой и поведением функции  $a(t)$  в целом на протяжении последних нескольких миллиардов лет. При красных смещениях порядка единицы разложения по степеням красного смещения не особо полезны. Чтобы мы могли интерпретировать результаты этих измерений, нам понадобится динамическая теория расширения, которая и будет развита в последующих главах. Как мы увидим, современные наблюдения недвусмысленно указывают на то, что для вычисления  $a(t)$  необходимо измерить не два, а три параметра.

Прежде чем обратиться к этой динамической теории, давайте ненадолго остановимся на том, чем отличаются друг от друга различные меры расстояния. До сих пор мы имели дело с собственным расстоянием (1.1.15) и фотометрическим расстоянием (1.4.3). Есть еще один вид расстояний — те расстояния, которые мы измеряем, сопоставляя угловые размеры с физическими масштабами. Внимательное изучение метрики (1.1.12) показывает, что если источник с сопутствующей радиальной координатой  $r_1$ , который испустил свет в момент времени  $t_1$ , при наблюдении в текущий момент времени имеет малый угловой размер  $\theta$ , то его протяженность задается собственным расстоянием  $s = a(t_1)r_1\theta$  (перпендикулярным к линии взгляда). *Расстояние по угловому диаметру*  $d_y$  определяется таким образом, чтобы величина  $\theta$  могла быть выражена с помощью традиционного соотношения евклидовой геометрии:

$$\theta = \frac{s}{d_y}, \quad (1.4.10)$$

откуда мы получаем

$$d_y = a(t_1)r_1. \quad (1.4.11)$$

Сопоставление этого результата с формулой (1.4.3) показывает, что отношение расстояния по угловому диаметру к фотометрическому расстоянию является просто функцией красного смещения:

$$\frac{d_y}{d_\phi} = (1 + z)^{-2}. \quad (1.4.12)$$

Поэтому, если мы измерили фотометрическое расстояние при заданном угловом диаметре (и при этом убеждены в правильности метрики Робертсона—Уокера), то измерение расстояния по угловому диаметру при этом красном смещении не скажет нам о функции  $a(t)$  ничего нового. Поскольку ни галактики, ни сверхновые не имеют четко очерченных границ, то при изучении космологического расширения расстояния по угловому диаметру гораздо менее полезны, чем фотометрические расстояния. Однако, как мы выясним

шже, они играют важную роль в теоретическом анализе гравитационных линз (гл. 9) и флуктуаций реликтового излучения (гл. 2 и 7). В разд. 8.1 мы увидим, что наблюдение акустических осцилляций плотности вещества дает возможность измерить еще один тип расстояния — *структурное расстояние*, равное  $a(t_0)r_1 = (1+z)d_y$ .

## 1.5

## Динамика расширения

**Уравнения поля Эйнштейна • Уравнение Фридмана • Вывод в ньютоновском приближении • Критическая плотность • Проблема плоскости • Расширение при доминировании вещества • Радиационно-доминированное расширение • Расширение при доминировании вакуума • Модель де Ситтера •  $\Omega_m$ ,  $\Omega_R$ ,  $\Omega_\Lambda$  • Формула для фотометрического расстояния • Будущее расширение • Историческое замечание: космологическая постоянная • Историческое замечание: стационарная модель**

До сих пор все наши результаты были очень общими и никак не зависели от предположений о динамике космологического расширения. Дальнейшие шаги потребуют от нас использования уравнений Эйнштейна для гравитационного поля при различных предварительных допущениях о давлении и плотности космической энергии.

Расширением Вселенной управляют полевые уравнения Эйнштейна (В.71), которые можно представить в удобной форме

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G S_{\mu\nu}, \quad (1.5.1)$$

где  $R_{\mu\nu}$  — тензор Риччи:

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\nu\lambda} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\lambda\sigma}, \quad (1.5.2)$$

а  $S_{\mu\nu}$  описывается в терминах тензора энергии-импульса соотношением

$$S_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\lambda_{\lambda}. \quad (1.5.3)$$

Как мы видели в разд. 1.1, для метрики Робертсона—Уокера все компоненты аффинной связности с двумя или тремя временными индексами обнуляются, так что

$$R_{ij} = \frac{\partial \Gamma^k_{ki}}{\partial x^j} - \left[ \frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \Gamma^0_{ij}}{\partial t} \right] + [\Gamma^0_{ik}\Gamma^k_{j0} + \Gamma^k_{i0}\Gamma^0_{jk} + \Gamma^l_{ik}\Gamma^k_{jl}] - [\Gamma^k_{ij}\Gamma^l_{kl} + \Gamma^0_{ij}\Gamma^l_{0l}], \quad (1.5.4)$$

$$R_{00} = \frac{\partial \Gamma^i_{i0}}{\partial t} + \Gamma^i_{0j}\Gamma^j_{0i}. \quad (1.5.5)$$

Вычислять  $R_{i0} = R_{0i}$  нет необходимости, поскольку это три-вектор, который должен исчезнуть в силу изотропности метрики Робертсона—Уокера.

Используя формулы (1.1.17)–(1.1.19), для ненулевых компонент аффинной связности получаем соотношения

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma_{ij}^0}{\partial t} &= \tilde{g}_{ij} \frac{d}{dt}(a\dot{a}), \quad \Gamma_{ik}^0 \Gamma_{j0}^k = \tilde{g}_{ij} \dot{a}^2, \quad \Gamma_{ij}^0 \Gamma_{0l}^l = 3\tilde{g}_{ij} \dot{a}^2, \\ \frac{\partial \Gamma_{i0}^i}{\partial t} &= 3 \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right), \quad \Gamma_{0j}^i \Gamma_{i0}^j = 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2,\end{aligned}\tag{1.5.6}$$

где точками обозначены производные по времени. Используя соотношения (1.5.4) и (1.5.5), мы находим ненулевые компоненты тензора Риччи:

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} - 2\dot{a}^2 \tilde{g}_{ij} - a\ddot{a} \tilde{g}_{ij},\tag{1.5.7}$$

$$R_{00} = 3 \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) + 3 \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = 3 \frac{\ddot{a}}{a},\tag{1.5.8}$$

где  $\tilde{R}_{ij}$  — чисто пространственный тензор Риччи

$$\tilde{R}_{ij} = \frac{\partial \Gamma_{ki}^k}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^k - \Gamma_{ij}^l \Gamma_{kl}^k.\tag{1.5.9}$$

В соответствии с формулой (1.1.19), пространственные компоненты  $\Gamma_{jk}^i$  четырехмерной аффинной связности здесь те же, что и соответствующие компоненты для аффинной связности, вычисляемой в трех измерениях для три-метрики  $\tilde{g}_{ij}$ :

$$\Gamma_{ij}^k = Kx^k \tilde{g}_{ij}.\tag{1.5.10}$$

Чтобы вычислить  $\tilde{R}_{ij}$ , мы используем трюк, который прежде уже применялся для расчета траекторий частиц: мы рассчитаем  $\tilde{R}_{ij}$  там, где это проще всего сделать, — в точке  $x = 0$ , а затем запишем результат в виде соотношения, инвариантного при любых преобразованиях пространственных координат, так что однородность трехмерной метрики обеспечит справедливость этого соотношения в любой точке. Пространственный тензор Риччи в точке  $x = 0$  имеет вид:

$$\tilde{R}_{ij} = \frac{\partial \Gamma_{li}^l}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ji}^l}{\partial x^l} = K\delta_{ij} - 3K\delta_{ij} = -2K\delta_{ij}.\tag{1.5.11}$$

В точке  $x = 0$  пространственная метрика  $\tilde{g}_{ij}$  есть просто  $\delta_{ij}$ , так что эту формулу можно переписать в виде соотношения

$$\tilde{R}_{ij} = -2K\tilde{g}_{ij},\tag{1.5.12}$$

которое, будучи равенством двух три-тензоров, выполняется во всех пространственных системах координат, включая те системы, где точка  $x = 0$  переходит в какую угодно другую точку. Следовательно, соотношение (1.5.12) выполняется везде и вместе с (1.5.7) дает

$$R_{ij} = -[2K + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a}]\tilde{g}_{ij}.\tag{1.5.13}$$

Нам нужно получить также значения  $S_{ij}$  и  $S_{00}$ . Для этого используем (1.1.31) в виде

$$T_{00} = \rho, \quad T_{i0} = 0, \quad T_{ij} = a^2 p \tilde{g}_{ij}, \quad (1.5.14)$$

где  $\rho(t)$  и  $p(t)$  — соответствующие плотность энергии и давление. Тогда уравнение (1.5.3) дает

$$S_{ij} = T_{ij} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{ij} a^2 (T^k{}_k + T^0{}_0) = a^2 p \tilde{g}_{ij} - \frac{1}{2} a^2 \tilde{g}_{ij} (3p - \rho) = \frac{1}{2} (\rho - p) a^2 \tilde{g}_{ij}, \quad (1.5.15)$$

$$S_{00} = T_{00} + \frac{1}{2} (T^k{}_k + T^0{}_0) = \rho + \frac{1}{2} (3p - \rho) = \frac{1}{2} (\rho + 3p), \quad (1.5.16)$$

и  $S_{i0} = 0$ . Следовательно, уравнения Эйнштейна имеют вид

$$-\frac{2K}{a^2} - \frac{2\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi G(\rho - p), \quad (1.5.17)$$

$$\frac{3\ddot{a}}{a} = -4\pi G(3p + \rho). \quad (1.5.18)$$

Мы можем избавиться от вторых производных, добавив утроенное первое уравнение ко второму, в результате чего находим:

$$\dot{a}^2 + K = \frac{8\pi G\rho a^2}{3}. \quad (1.5.19)$$

Это — фундаментальное *уравнение Фридмана*<sup>91)</sup>, описывающее расширение Вселенной.

Оставшаяся в (1.5.17) и (1.5.18) информация воспроизводит закон сохранения:

$$\dot{\rho} = -\frac{3\dot{a}}{a}(\rho + p). \quad (1.5.20)$$

---

Это не должно вызывать удивление: закон сохранения энергии-импульса может быть получен как следствие полевых уравнений Эйнштейна в любых обстоятельствах.

---

Рассматривая  $p$  как функцию  $\rho$ , мы можем решить уравнение (1.5.20), чтобы найти  $\rho$  как функцию  $a$ , а затем использовать (1.5.19), чтобы отыскать  $a$  как функцию  $t$ .

Существует другой способ получить (1.5.19), по крайней мере, в случае нерелятивистской материи. Представим себе сопутствующий шар, который вырезан из расширяющейся Вселенной и в центре которого находится некоторая типичная галактика. Предположим, что все содержавшееся в этом шаре

---

<sup>91)</sup> A. Friedmann, *Z. Phys.* **16**, 377 (1922); *ibid.* **21**, 326 (1924).

вещество удалили. Согласно теореме Биркгофа<sup>92)</sup>, в любой системе, обладающей сферической симметрией относительно некоторой точки, пустой шар с центром в этой точке будет иметь метрику плоского пространства. Ситуация будет сохраняться, что бы ни происходило за пределами этого шара, до тех пор, пока есть сферическая симметрия. Теперь представим себе, что все вещество вернули обратно в шар, причем скорость вещества пропорциональна его расстоянию от центра симметрии, взятого за  $\mathbf{X} = 0$ :

$$\dot{\mathbf{X}} = H(t)\mathbf{X}. \quad (1.5.21)$$

---

Здесь компоненты  $X^i$  вектора  $\mathbf{X}$  — обычные декартовы координаты, а не соответствующие координаты  $x^i$ , которые использовались в метрике Робертсона—Уокера. Обратите внимание на то, что это единственная картина скоростей, которая согласуется с принципом однородности: скорость сопутствующей частицы в точке  $\mathbf{X}_1$  относительно сопутствующей частицы в точке  $\mathbf{X}_2$  есть

$$\dot{\mathbf{X}}_1 - \dot{\mathbf{X}}_2 = H(t)(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2).$$


---

Решением уравнения (1.5.21) будет

$$\mathbf{X}(t) = \left( \frac{a(t)}{a(t_0)} \right) \mathbf{X}(t_0), \quad (1.5.22)$$

где  $a(t)$  — решение уравнения

$$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = H(t). \quad (1.5.23)$$

Пока радиус шара выбирается не слишком большим, скорость (1.5.21) расширения вещества, помещенного в шар, будет нерелятивистской, а гравитационное поле — слабым, так что для описания движения вещества можно использовать ньютонову механику. Кинетическая энергия сопутствующей частицы с массой  $m$  в точке  $\mathbf{X}$  есть

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{X}}^2 = \frac{m\dot{a}^2\mathbf{X}^2}{2a^2}. \quad (1.5.24)$$

Масса, находящаяся ближе к центру по сравнению с частицей, равна  $M(\mathbf{X}) = 4\pi\rho|\mathbf{X}|^3/3$ , так что потенциальная энергия частицы оказывается равной

$$E_n = -\frac{GmM(\mathbf{X})}{|\mathbf{X}|} = -\frac{4\pi Gm\rho|\mathbf{X}|^2}{3}. \quad (1.5.25)$$

Поэтому условие сохранения энергии показывает нам, что

$$E = E_k + E_n = \frac{m|\mathbf{X}(t_0)|^2}{a^2(t_0)} \left[ \frac{\dot{a}^2}{2} - \frac{4\pi G\rho a^2}{3} \right] = \text{const.} \quad (1.5.26)$$

---

<sup>92)</sup> ГиК, разд. 11.7.

Это то же самое уравнение, что и (1.5.19), если мы запишем энергию частицы в виде

$$E = -\frac{Km|\mathbf{X}(t_0)|^2}{2a^2(t_0)}. \quad (1.5.27)$$

Частицы могут уйти бесконечно далеко в том и только в том случае, если  $E \geq 0$ , для чего необходимо  $K = 0$  или  $K = -1$ . При  $K = +1$  скорость частиц меньше скорости убегания, так что разбегание рано или поздно прекратится, и частицы притянутся друг к другу.

Возвращаясь теперь к релятивистскому формализму и произвольной зависимости  $\rho$  от  $a$ , мы можем даже без точных знаний об этой зависимости использовать уравнение (1.5.19), чтобы обрисовать важные следствия, касающиеся общих характеристик расширения. Прежде всего, до тех пор пока  $\rho$  остается положительным, единственной возможностью прекращения расширения Вселенной при  $K = +1$  будет случай сферической геометрии. Кроме того, при любом значении постоянной Хаббла  $H_0 \equiv \dot{a}(t_0)/a(t_0)$  можно рассчитать критическую плотность в настоящий момент времени:

$$\rho_{0,\text{крит}} \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1,878 \times 10^{-29} h^2 \text{ г/см}^3, \quad (1.5.28)$$

где  $h$  — постоянная Хаббла в единицах, равных  $100 \text{ (км/с)}/\text{Мпк}$ . В соответствии с (1.5.19), какие бы предположения о составе Вселенной мы ни сделали, постоянная кривизны  $K$  будет равна  $+1$ ,  $0$  или  $-1$  соответственно тому, превышает ли плотность  $\rho_0$  критическое значение  $\rho_{0,\text{крит}}$ , равна ему или меньше его. Если величина  $3p + \rho$  положительна (что имеет место для любой комбинации вещества и излучения в отсутствие плотности энергии вакуума), то уравнение (1.5.18) даст  $\ddot{a}/a \leq 0$ , так что расширение обязано было начаться в какой-то прошлый момент времени с  $a = 0$ ; текущий возраст Вселенной  $t_0$  не больше времени Хаббла:

$$t_0 \leq H_0^{-1}. \quad (1.5.29)$$

Помимо этого, если  $K = +1$  и расширение останавливается, то при  $\ddot{a}/a \leq 0$  Вселенная вновь сожмется в сингулярность, где  $a = 0$ .

Мы можем использовать уравнение (1.5.18), чтобы получить общую формулу для параметра замедления  $q_0 \equiv -\ddot{a}(t_0)a(t_0)/\dot{a}^2(t_0)$ :

$$q_0 = \frac{4\pi G(\rho_0 + 3p_0)}{3H_0^2} = \frac{\rho_0 + 3p_0}{2\rho_{0,\text{крит}}}, \quad (1.5.30)$$

где нижним индексом 0 отмечены текущие значения. Если в плотности Вселенной в настоящий момент преобладает нерелятивистская материя, то  $p_0 \ll \rho_0$ , и постоянная кривизны  $K$  будет равна  $+1$ ,  $0$  или  $-1$  для  $q_0 > 1/2$ ,  $q_0 = 1/2$  и  $q_0 < 1/2$ , соответственно. С другой стороны, если в плотности Вселенной в настоящий момент доминирует релятивистская материя, то  $p_0 = \rho_0/3$ , и критическое значение параметра замедления, при котором  $K = 0$ , будет

равно  $q_0 = 1$ . Наконец, если определяющей для текущей плотности Вселенной является энергия вакуума, то  $p_0 = -\rho_0$ , и значение параметра замедления, при котором  $K = 0$ , составит  $q_0 = -1$ .

У этих результатов есть одно нетривиальное следствие. Вклад нерелятивистской и релятивистской материи в величину  $\rho a^2$  в уравнении (1.5.19) при  $a \rightarrow 0$  растет как  $a^{-1}$  и  $a^{-2}$ , соответственно, так что на достаточно раннем этапе расширения мы можем с уверенностью пренебречь постоянной  $K$ , и уравнение (1.5.19) даст

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} \rightarrow \frac{8\pi G\rho}{3}. \quad (1.5.31)$$

То есть на этом этапе плотность, по сути дела, становится равной критическому значению  $3H^2/(8\pi G)$ , где  $H \equiv \dot{a}/a$  — значение «постоянной» Хаббла в тот момент времени. С другой стороны, как мы увидим позже, общая плотность энергии Вселенной в настоящий момент по-прежнему весьма близка к критической плотности. Как могло случиться, что спустя миллиарды лет  $\rho$  все еще мало отличается от  $\rho_{\text{крит}}$ ? Эту проблему иногда называют *проблемой плоскостности*.

Наиболее простое решение проблемы плоскостности — идея о том, что мы живем в пространственно плоской Вселенной, где  $K = 0$ , а  $\rho$  всегда в точности равно  $\rho_{\text{крит}}$ . Более популярное решение предлагается инфляционными теориями, которые обсуждаются в гл. 4. В этих теориях  $K$  может быть ненулевой, а  $\rho$  не обязано быть изначально близким к  $\rho_{\text{крит}}$ , но есть ранний период интенсивного роста, в течение которого отношение  $\rho/\rho_{\text{крит}}$  быстро приближалось к единице. В инфляционных теориях ожидается (хотя и не является обязательным требованием), что в настоящий момент  $\rho$  должно быть очень близким к  $\rho_{\text{крит}}$ , а в этом случае принять  $K = 0$  будет хорошим приближением.

При  $K = 0$  мы получаем для уравнения (1.5.19) очень простые решения для трех особых случаев, перечисленных в разд. 1.1.

- **Нерелятивистская материя.** В этом случае  $\rho = \rho_0(a/a_0)^{-3}$ , и решение уравнения (1.5.19) при  $K = 0$  есть

$$a(t) \propto t^{2/3}. \quad (1.5.32)$$

Это дает  $q_0 \equiv -a\ddot{a}/\dot{a}^2 = 1/2$  и приводит к простому соотношению между возрастом Вселенной и постоянной Хаббла:

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} = 6,52 \times 10^9 h^{-1} \text{ лет.} \quad (1.5.33)$$

Уравнения (1.5.32) и (1.5.18) показывают, что при  $K = 0$  плотность энергии в момент времени  $t$  есть  $\rho = 1/(6\pi G t^2)$ . Этот результат известен как *модель Эйнштейна—де Ситтера*. На протяжении многих лет он был наиболее популярной космологической моделью, хотя, как мы увидим далее, возраст (1.5.33) оказывается озадачивающим при сопоставлении с возрастом ряда звезд.

- **Релятивистская материя.** Здесь  $\rho = \rho_0(a/a_0)^{-4}$ , и решение уравнения (1.5.19) при  $K = 0$  имеет вид

$$a(t) \propto \sqrt{t}. \quad (1.5.34)$$

Это дает  $q_0 = +1$ , а возраст Вселенной и постоянная Хаббла оказываются связаны соотношением

$$t_0 = \frac{1}{2H_0}. \quad (1.5.35)$$

Плотность энергии в момент времени  $t$  есть  $\rho = 3/(32\pi G t^2)$ .

- **Энергия вакуума.** Исходя из требований лоренц-инвариантности, тензор энергии-импульса  $T_{\text{в}}^{\mu\nu}$  для вакуума в локально инерциальной системе координат должен быть пропорциональным метрике Минковского  $\eta^{\mu\nu}$  (для которой  $\eta^{ij} = \eta_{ij} = \delta_{ij}$ ,  $\eta^{i0} = \eta_{i0} = \eta^{0i} = \eta_{0i}$ ,  $\eta^{00} = \eta_{00} = -1$ ), а потому в обобщенной системе координат тензор  $T_{\text{в}}^{\mu\nu}$  должен быть пропорционален  $g^{\mu\nu}$ . Сравнивая это с (B.43), мы видим, что для вакуума  $p_{\text{в}} = -\rho_{\text{в}}$ , так что  $T_{\text{в}}^{\mu\nu} = -\rho_{\text{в}} g^{\mu\nu}$ . В отсутствие каких-либо других форм энергии это соотношение должно удовлетворять закону сохранения  $0 = T_{\text{в}}^{\mu\nu}_{;\mu} = g^{\mu\nu} \partial \rho_{\text{в}} / \partial x^\mu$ , откуда следует, что  $\rho_{\text{в}}$  постоянна и не зависит от положения в пространстве-времени. Уравнение (1.5.19) при  $K = 0$  требует соблюдения условия  $\rho_{\text{в}} > 0$  и имеет решения

$$a(t) \propto \exp(Ht), \quad (1.5.36)$$

где  $H$  — постоянная Хаббла, которая здесь действительно постоянна и задается соотношением

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G \rho_{\text{в}}}{3}}. \quad (1.5.37)$$

Здесь  $q_0 = -1$ , и возраст Вселенной оказывается бесконечным. Этот результат известен как *модель де Ситтера*<sup>93)</sup>. Разумеется, во Вселенной есть *какое-то* количество материи, так что даже если в плотности энергии Вселенной преобладает постоянная энергия вакуума, в прошлом было время, когда вещество и/или излучение играли более важную роль, так что период расширения конечен, хотя и превышает тот возраст, который получился бы без энергии вакуума.

В более общем случае, для произвольной  $K$  и некоторой комбинации энергии вакуума, релятивистской и нерелятивистской материи, вводя для критической плотности энергии доли  $\Omega_\Lambda$ ,  $\Omega_m$  и  $\Omega_u$ <sup>94)</sup>, получаем:

$$\rho = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \left[ \Omega_\Lambda + \Omega_m \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 + \Omega_u \left( \frac{a_0}{a} \right)^4 \right], \quad (1.5.38)$$

<sup>93)</sup> W. de Sitter, *Proc. Roy. Acad. Sci. (Amsterdam)* **19**, 1217 (1917); *ibid.* **20**, 229 (1917); *ibid.* **20**, 1309 (1917); *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **78**, 2 (1917).

<sup>94)</sup> Использование обозначения  $\Omega_\Lambda$  вместо  $\Omega_{\text{в}}$  для отношения плотности энергии вакуума к критической плотности энергии стало стандартом, который обусловлен связью с космологической постоянной, обсуждаемой ниже в историческом замечании.

такие текущие плотности энергии вакуума, нерелятивистской материи и релятивистской материи (т. е. излучения) равны, соответственно,

$$\rho_{\Lambda 0} \equiv \frac{3H_0^2\Omega_\Lambda}{8\pi G}, \quad \rho_{M0} \equiv \frac{3H_0^2\Omega_M}{8\pi G}, \quad \rho_{i0} \equiv \frac{3H_0^2\Omega_i}{8\pi G}, \quad (1.5.39)$$

и, в соответствии с уравнением (1.5.19),

$$\Omega_\Lambda + \Omega_M + \Omega_i + \Omega_K = 1, \quad \Omega_K \equiv -\frac{K}{a_0^2 H_0^2}. \quad (1.5.40)$$

Подставляя это в уравнение (1.5.19), получаем

$$\begin{aligned} dt &= \frac{dx}{H_0 x \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K x^{-2} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_i x^{-4}}} = \\ &= \frac{-dz}{H_0 (1+z) \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K (1+z)^2 + \Omega_M (1+z)^3 + \Omega_i (1+z)^4}}, \end{aligned} \quad (1.5.41)$$

где  $x \equiv a/a_0 = 1/(1+z)$ . Следовательно, если мы определим начало отсчета времени как момент, соответствующий бесконечному красному смещению, то время, в которое был испущен свет, достигший нас с красным смещением  $z$ , задается формулой

$$t(z) = \frac{1}{H_0} \int_0^{1/(1+z)} \frac{dx}{x \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K x^{-2} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_i x^{-4}}}. \quad (1.5.42)$$

В частности, полагая  $z = 0$ , мы находим текущий возраст Вселенной:

$$t_0 = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{dx}{x \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K x^{-2} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_i x^{-4}}}. \quad (1.5.43)$$

Чтобы вычислить фотометрическое расстояние или расстояние по угловому диаметру, нам нужно знать также радиальную координату  $r(z)$  источника, чье наблюдаемое в настоящий момент красное смещение равно  $z$ . В соответствии с формулами (1.2.2) и (1.5.41) она равна

$$r(z) = S \left[ \int_{t(z)}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \right] = S \left[ \frac{1}{a_0 H_0} \int_{1/(1+z)}^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K x^{-2} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_i x^{-4}}} \right],$$

где

$$S[y] \equiv \begin{cases} \sin y, & K = +1; \\ y, & K = 0; \\ \operatorname{sh} y, & K = -1. \end{cases}$$

Используя формулу (1.5.40), мы можем переписать это в более удобном виде, чтобы выразить  $a_0 H_0$  в терминах  $\Omega_K$ . Тем самым мы получаем единую

формулу

$$a_0 r(z) = \frac{1}{H_0 \Omega_K^{1/2}} \times \operatorname{sh} \left[ \Omega_K^{1/2} \int_{1/(1+z)}^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K x^{-2} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_i x^{-4}}} \right], \quad (1.5.44)$$

которую можно использовать для любой кривизны.

---

Формула (1.5.44) обладает гладкой сходимостью при  $\Omega_K \rightarrow 0$ , что дает результат для нулевой кривизны. Кроме того, при  $\Omega_K < 0$  аргумент гиперболического синуса оказывается чисто мнимым, так что мы можем использовать соотношение  $\operatorname{sh} ix = i \sin x$ .

---

Из формул (1.5.44) и (1.4.3) получаем фотометрическое расстояние для источника с наблюдаемым красным смещением  $z$ :

$$\begin{aligned} d_\Phi(z) = a_0 r(z)(1+z) &= \frac{1+z}{H_0 \Omega_K^{1/2}} \times \\ &\times \operatorname{sh} \left[ \Omega_K^{1/2} \int_{1/(1+z)}^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K x^{-2} + \Omega_M x^{-3} + \Omega_i x^{-4}}} \right]. \end{aligned} \quad (1.5.45)$$

При  $K = 0$  имеем  $\Omega_K = 0$ , и формула (1.5.45) принимает вид

$$d_\Phi(z) = a_0 r_1(1+z) = \frac{1+z}{H_0} \int_{1/(1+z)}^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_M x^{-3} + \Omega_i x^{-4}}}. \quad (1.5.46)$$

Как мы увидим в разд. 2.1,  $\Omega_i$  много меньше  $\Omega_M$ , и интеграл (1.5.46) при  $z \rightarrow \infty$  сходится в нижнем пределе вне зависимости от того, исчезает ли  $\Omega_i$ , так что принять здесь  $\Omega_i = 0$  будет хорошим приближением.

Интересно выразить параметр замедления  $q_0$  в терминах  $\Omega$ . Отношение  $w$  величин  $p$  и  $\rho$  для вакуума, материи и излучения равно, соответственно,  $-1$ ,  $0$  и  $1/3$ , так что для давления в настоящий момент времени уравнение (1.5.39) имеет значение

$$p_0 = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \left( -\Omega_\Lambda + \frac{1}{3}\Omega_i \right). \quad (1.5.47)$$

Тогда из уравнения (1.5.30) получаем

$$q_0 = \frac{4\pi G(3p_0 + \rho_0)}{3H_0^2} = \frac{1}{2}(\Omega_M - 2\Omega_\Lambda + 2\Omega_i). \quad (1.5.48)$$

Величины  $\Omega_K$ ,  $\Omega_M$  и т. д. интересны нам, в частности, потому, что они сообщают нам о том, остановится ли когда-либо нынешнее расширение Вселенной. В соответствии с формулой (1.5.38) расширение может прекратиться

только в том случае, если кубическое уравнение

$$\Omega_\Lambda u^3 + \Omega_K u + \Omega_m = 0, \quad (1.5.49)$$

где  $u \equiv a(t)/a(t_0)$  больше единицы, имеет действительный корень.

---

Мы игнорируем здесь излучение, поскольку по мере расширения Вселенной оно становится все менее значимым.

---

Это выражение имеет значение  $+1$  при  $u = 1$ . Если  $\Omega_\Lambda < 0$ , то левая сторона уравнения (1.5.49) для достаточно больших  $u$  становится отрицательной, так что при некотором промежуточном значении  $u$  оно должно пройти через нулевое значение, и расширение Вселенной остановится, когда будет достигнуто это значение  $u$ . Даже при  $\Omega_\Lambda \geq 0$  прекращение расширения остается возможным при условии, что  $\Omega_K = 1 - \Omega_\Lambda - \Omega_m$  имеет достаточно большое по модулю отрицательное значение (для чего, среди прочего, требуется условие  $K = +1$ ).

**Историческое замечание 1.** Если мы представим полный тензор энергии-импульса  $T_{\mu\nu}$  как сумму возможного вакуумного члена  $-\rho_v g^{\mu\nu}$  и члена  $T_{\mu\nu}^m$ , отвечающего за материю (включая излучение), то уравнения Эйнштейна принимают вид

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^\lambda_\lambda = -8\pi GT_{\mu\nu}^m + 8\pi G\rho_v g_{\mu\nu}. \quad (1.5.50)$$

Поэтому влияние энергии вакуума эквивалентно следующей модификации полевых уравнений Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \Lambda g_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu}^m, \quad (1.5.51)$$

где

$$\Lambda = 8\pi G\rho_v. \quad (1.5.52)$$

Величина  $\Lambda$  известна как *космологическая постоянная*. Эйнштейн ввел ее в свои полевые уравнения в 1917 г., чтобы обеспечить соответствие условию статичности Вселенной, которое в то время считалось весьма существенным<sup>95)</sup>. Согласно уравнениям (1.5.18) и (1.5.19), статическая Вселенная возможна только при  $3p + \rho = 0$  и  $K = -8\pi G\rho a^2/3$ . Если содержимое Вселенной ограничивается энергией вакуума и нерелятивистской материй, то  $\rho = \rho_m - \rho_v$ ,  $p = -\rho_v$  и  $\rho_m \geq 0$ . Отсюда следует, что  $\rho_m = 2\rho_v \geq 0$ , так что  $K > 0$ , что по соглашению означает  $K = +1$ , а потому  $a$  принимает значение  $a_3 = 1/\sqrt{8\pi G\rho_v} = 1/\sqrt{\Lambda}$ . Этот результат известен как *модель Эйнштейна*.

Хотя сам Эйнштейн не осознал этот факт, однако его космология была нестабильной: если  $a$  немного меньше, чем  $a_3$ , то  $\rho_m$  немного больше, чем  $2\rho_v$ ; тогда уравнение (1.5.18) дает  $\ddot{a}/a < 0$ , а значит,  $a$  начинает уменьшаться. Точно так же, если  $a$  немного превышает  $a_3$ , то оно начинает расти. Модели с  $K = +1$  и  $\Lambda > 0$ , в которых  $a$

---

<sup>95)</sup> A. Einstein, *Sitz. Preuss. Akad. Wiss.*, 142 (1917). Английский перевод см. в *The Principle of Relativity* (Methuen, 1923; перепечатано Dover Publications, New York, 1952), p. 35. (Русский перевод см. в: Эйнштейн А. Собр. научн. тр.: В 4 т. Т. I. М.: Наука, 1965. С. 601–612. — Прим. ред. перев.)

от исходного значения эйнштейновского радиуса  $a_{\text{Э}}$  с  $\rho_{\text{м}} = 2\rho_{\text{в}}$  расширяется до бесконечности (или от исходного значения  $a = 0$  приближается к  $a_{\text{Э}}$  при  $t \rightarrow \infty$ , когда материя присутствует ровно в таком количестве, чтобы при эйнштейновском радиусе выполнялось соотношение  $\rho_{\text{м}} = 2\rho_{\text{в}}$ ), известны как *модели Эддингтона—Леметра*<sup>96)</sup>. Существуют также модели с  $K = +1$  и несколько большим количеством материи, в которых Вселенная начинает эволюционировать от значения  $a = 0$ , долгое время пребывает около эйнштейновского радиуса, а затем опять же расширяется до бесконечности, приближаясь к модели де Ситтера. Эти модели известны как *модели Леметра*<sup>97)</sup>.

Несколько странно, что де Ситтер придумал свою космологическую модель (с  $a \propto \exp(Ht)$ ), также стремясь удовлетворить предполагаемую потребность в статической Вселенной. Исходно он предложил не зависящую от времени метрику, задаваемую соотношением

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - r^2/R^2} - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (1.5.53)$$

или, если провести замену  $r = R \sin \chi$ , эквивалентным соотношением

$$d\tau^2 = \cos^2 \chi dt^2 - R^2(d\chi^2 + \sin^2 \chi d\theta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (1.5.54)$$

где  $R = \sqrt{3/\Lambda}$  — постоянная. Поначалу де Ситтер не осознал тот факт, что в этой метрике  $\Gamma_{00}^i \neq 0$ , так что его система координат не является сопутствующей<sup>98)</sup>. Лишь позже он обратил внимание на то, что при использовании сопутствующих пространственных координат и стандартного космологического времени модель де Ситтера эквивалентна метрике Робертсона—Уокера с  $k = 0$  и  $a \propto \exp(t/R)$ .

После открытия расширения Вселенной космологи утратили интерес к статическим моделям, а Эйнштейн сожалением назвал введение космологической постоянной своей величайшей ошибкой. Однако, как мы увидим в следующем разделе, имеются теоретические основания ожидать, что энергия вакуума не является нулевой, а также наблюдения, свидетельствующие о том, что в действительности она отлична от нуля. Ошибкой Эйнштейна было не то, что он ввел космологическую постоянную, а то, что он счел это ошибкой.

**Историческое замечание 2.** Существует космологическая модель, восходящая к работам Бонди и Голда<sup>99)</sup> и (в несколько отличающемся варианте) Хойла<sup>100)</sup>, известная как *модель стационарной Вселенной*. В этой модели не происходит физических изменений с течением времени, так что постоянная Хаббла является действительно

<sup>96)</sup> A. S. Eddington, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **90**, 668 (1930); G. Lemaître, *Ann. Soc. Sci. Brux. A* **47**, 49 (1927); *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **91**, 483 (1931). Интерпретация космологической постоянной в терминах энергии вакуума изложена Леметром в *Proc. Nat. Acad. Sci.* **20**, 12L (1934).

<sup>97)</sup> G. Lemaître, *op. cit.*

<sup>98)</sup> A. S. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity*, 2nd ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 1924), разд. 70. (Русский перевод: Эддингтон А. Теория относительности. Л.; М.: Гостехиздат, 1984. 356 с. — Прим. ред. перев.) Интересно, что наблюдение Слайфера о том, что для большинства спиральных туманностей характерны красные, а не голубые смещения, Эддингтон интерпретировал в терминах модели де Ситтера, а не моделей Фридмана.

<sup>99)</sup> H. Bondi and T. Gold, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **108**, 252 (1948).

<sup>100)</sup> F. Hoyle *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **108**, 372 (1948); *ibid.* **109**, 365 (1949).

постоянной, а значит,  $a(t) \propto \exp(Ht)$  — в точности как в модели де Ситтера. Чтобы сохранить постоянную кривизну, необходимо принять  $K = 0$ . В этой модели должно непрерывно появляться новое вещество, чтобы  $\rho$  оставалась постоянной по мере расширения Вселенной. С открытием реликтового излучения (которое обсуждается в гл. 2) стационарная модель в ее исходном виде была практически отброшена.

## 1.6

---

### Расстояния при больших красных смещениях: ускоряющееся расширение

- Открытие ускоряющегося расширения • Ньютоновская интерпретация • Серая пыль?**
- Открытие ранней стадии замедления ускорения • Другие эффекты • Параметр  $w$  в уравнении состояния • Наблюдения в рентгеновских лучах • Проблемы космологической постоянной

Мы возвращаемся к нашему рассказу об измерении расстояний как функции красного смещения и теперь рассмотрим красные смещения  $z > 0,1$ , которые слишком велики для того, чтобы можно было игнорировать пекулярные движения источников света, и достаточно велики для того, чтобы нам потребовалось принять во внимание влияние космологического расширения на определение расстояний.

На протяжении многих лет главными «стандартными свечами» при больших красных смещениях служили ярчайшие галактики в богатых скоплениях. Сейчас надежно установлено, что абсолютная светимость таких галактик существенно меняется на космологических масштабах времени. Помимо этого есть несколько эффектов, связанных с их отбором: имеется тенденция выбирать более крупные скопления с самыми яркими галактиками, имеющими более высокую абсолютную светимость и расположенные на больших расстояниях. Эволюция ярчайших галактик интересна сама по себе и по-прежнему является объектом астрономических исследований<sup>101)</sup>, однако использование этих галактик в качестве индикаторов расстояний практически прекратилось. Подобным образом, хотя соотношение Талли—Фишера, которое мы обсуждали в разд. 1.3, применялось к галактикам с красным смещением порядка единицы, при таких красных смещениях оно используется скорее для изучения эволюции галактик, нежели для измерения космологических параметров<sup>102)</sup>.

---

<sup>101)</sup> См., например, D. Zaritsky et al., *Proceedings of the Sesto 2001 Conference on Tracing Cosmic Evolution with Galaxy Clusters* [astro-ph/0108152]; S. Brough et al., *Proceedings of the Sesto 2001 Conference on Tracing Cosmic Evolution with Galaxy Clusters* [astro-ph/0108186].

<sup>102)</sup> N. P. Vogt et al., *Astrophys. J.* **465**, 115 (1996). Обзор и более свежие ссылки см. в A. Aragón-Salamanca, *Galaxy Evolution Across the Hubble Time — Proceedings of I. A. U. Symposium 235*, eds. F. Combes and J. Palous [astro-ph/0610587].

К счастью, сверхновые типа Ia, обсуждавшиеся в разд. 1.3, служат отличной заменой в качестве стандартных свечей<sup>103)</sup>. Они очень яркие; пиковая голубая абсолютная звездная величина в среднем составляет около  $-19,2$ , что вполне сопоставимо с примерной абсолютной звездной величиной  $-20,3$  нашей собственной Галактики. Кроме того, как описывалось в разд. 1.3, сверхновые типа Ia возникают, как правило, тогда, когда белый карлик в составе двойной звезды накапливает путем акреции достаточную массу, чтобы преодолеть предел Чандraseкара, так что природа взрыва такой сверхновой в малой степени зависит и от того, в какой момент истории Вселенной это случилось, и от изначальной массы белого карлика, и от природы его партнера в составе двойной звезды. Однако может существовать зависимость от металличности (доли химических элементов тяжелее гелия) белого карлика, которая, в свою очередь, может зависеть от эпохи, когда произошел взрыв. Наблюдения показывают, что абсолютная светимость сверхновых типа Ia меняется в зависимости от окружающих условий, но, к счастью, при использовании сверхновых в качестве индикаторов расстояний значительная часть этих вариаций может быть скорректирована эмпирически.

Примерно в одно и то же время сразу две группы исследователей — The Supernova Cosmology Project<sup>104)</sup> и High- $z$  Supernova Search Team<sup>105)</sup> — сопоставили результаты наблюдений за сверхновыми типа Ia с теоретическими предсказаниями (эквивалентными соотношению (1.5.45)) для фотометрического расстояния как функции красного смещения.

Исследовательская группа Supernova Cosmology Project проанализировала соотношение между видимой светимостью и красным смещением для 42 сверхновых типа Ia, красное смещение  $z$  которых лежало в диапазоне от  $0,18$  до  $0,83$ , вместе с набором более близких сверхновых из другого обзора по сверхновым с красными смещениями ниже  $0,1$ . Собственные результаты этой группы представлены на рис. 1.1.

С доверительной вероятностью  $99\%$  эти данные исключают случай  $\Omega_\Lambda = 0$  (или  $\Omega_\Lambda < 0$ ). Для плоской космологии с  $\Omega_K = \Omega_i = 0$ , что означает  $\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1$ , эти данные указывают на значение

$$\Omega_m = 0,28_{-0,08}^{+0,09} (1\sigma \text{ статистическая})_{-0,04}^{+0,05} (\text{выявленная систематическая}).$$

<sup>103)</sup> Обзоры см. в S. Perlmutter and B. P. Schmidt, *Supernovae & Gamma Ray Bursts*, ed. K. Weiler (Springer, 2003) [astro-ph/0303428]; P. Ruiz-Lapuente, *Astrophys. Space Sci.* **290**, 43 (2004) [astro-ph/0304108]; A. V. Filippenko, *Measuring and Modeling of the Universe* (Carnegie Observatories Astrophysics Series. Vol. 2, Cambridge University Press) [astro-ph/0307139]; *Lect. Notes Phys.* **645**, 191 (2004) [astro-ph/0309739]; N. Panagia, *Nuovo Cimento B* **210**, 667 (2005) [astro-ph/0502247].

<sup>104)</sup> S. Perlmutter et al., *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999) [astro-ph/9812133]. См. также S. Perlmutter et al., *Nature* **391**, 51 (1998) [astro-ph/9712212].

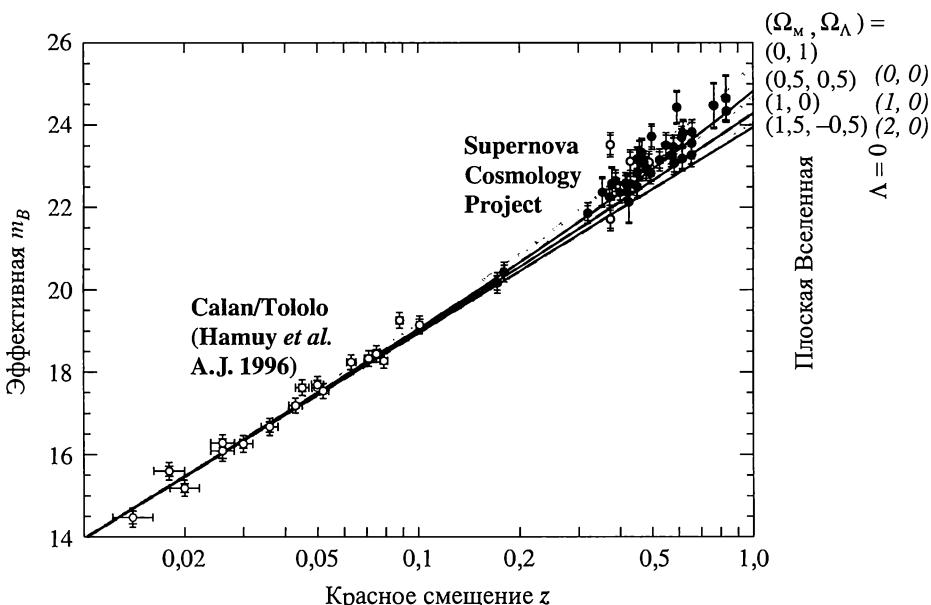
<sup>105)</sup> A. G. Riess et al., *Astron. J.* **116**, 1009 (1998) [astro-ph/9805201]. См. также B. Schmidt et al., *Astrophys. J.* **507**, 46 (1998) [astro-ph/9805200].

Эти данные не зависят от постоянной Хаббла и абсолютной калибровки соотношения между абсолютной светимостью сверхновой и временным масштабом, однако при этом зависят от формы этого соотношения.

Для возраста Вселенной (1.5.43) это дает

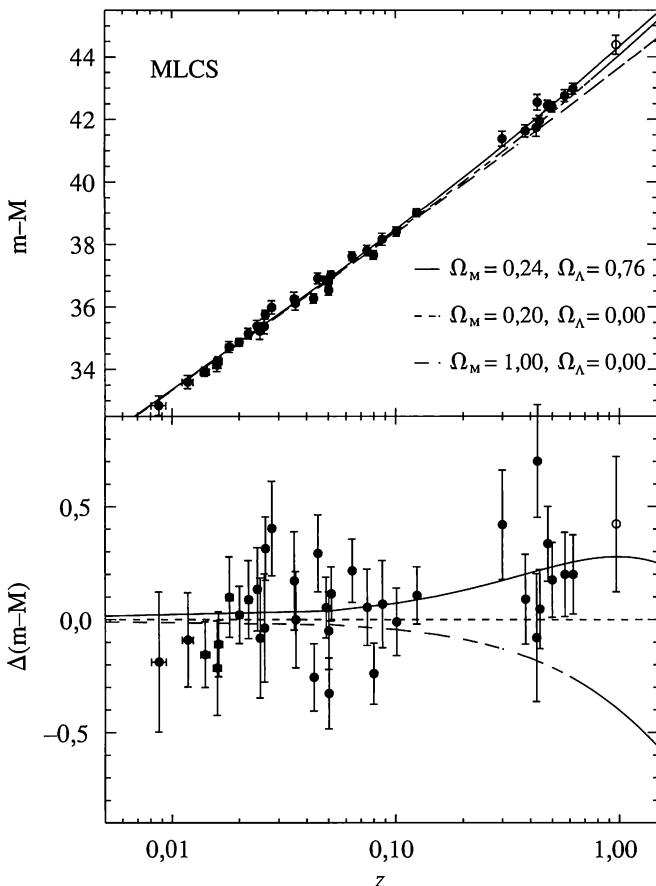
$$t_0 = 13,4_{-1,0}^{+1,3} \times 10^9 \left( \frac{70 \text{ (км/с)/Мпк}}{H_0} \right) \text{ лет.}$$

При  $\Omega_m = 0,28$  и  $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$  уравнение (1.5.48) приводит к отрицательному значению параметра замедления,  $q_0 = -0,58$ , указывающему на то, что *расширение Вселенной ускоряется*.



**Рис. 1.1.** Свидетельства в пользу существования темной энергии, обнаруженные в 1988 г. группой Supernova Cosmology Project (из S. Perlmutter et al., *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999) [astro-ph/9812133]). Здесь показана зависимость эффективной голубой видимой звездной величины  $m_b$  от красного смещения (с поправкой на колебания в абсолютной звездной величине, на которую указывает кривая блеска сверхновой) для 42 сверхновых типа Ia с большими красными смещениями, наблюдавшихся исследовательской группой Supernova Cosmology Project, вместе с 18 сверхновыми типа Ia с более умеренными красными смещениями из обзора Calán—Tololo Supernovae Survey. Горизонтальные риски отражают погрешность красного смещения из-за неопределенности предполагаемой пекулярной скорости порядка 300 км  $\text{с}^{-1}$ . Пунктирные и сплошные кривые обозначают теоретические эффективные видимые светимости для космологических моделей с  $\Omega_K = 0$  либо  $\Omega_\Lambda = 0$ , соответственно, при различных возможных значениях  $\Omega_m$ .

Исследовательская группа High- $z$  Supernova Search Team самостоятельно исследовала 16 сверхновых типа Ia с большими красными смещениями (в диапазоне от 0,16 до 0,97), в том числе 2 из тех, что изучались командой Supernova Cosmology Project, вместе с 34 близлежащими сверхновыми, и пришла к выводу, что  $\Omega_\Lambda > 0$  с доверительной вероятностью 99,7 % и без каких-либо предположений о кривизне пространства. Оригинальные результаты этой группы представлены на рис. 1.2.



**Рис. 1.2.** Свидетельства в пользу существования темной энергии, обнаруженные в 1998 г. группой High- $z$  Supernova Search Team (из A. G. Riess et al., *Astron. J.* **116**, 1009 (1998) [astro-ph/9805201]). На верхнем графике показана зависимость модуля расстояния от красного смещения для выборки сверхновых типа Ia. Эти кривые отражают теоретические результаты для двух космологий: космологии с  $\Omega_\Lambda = 0$  и наиболее согласующейся плоской космологии с  $\Omega_m = 0,24$  и  $\Omega_\Lambda = 0,76$ . Нижний график демонстрирует различия между полученными данными и предсказаниями популярной в прошлом модели Эйнштейна—де Ситтера с  $\Omega_m = 0,2$  и  $\Omega_\Lambda = 0$ , которые представлены горизонтальной пунктирной линией (MLCS — multicolor light curve shape method)

Их наиболее точным результатом для плоской космологии является  $\Omega_m = 0,28 \pm 0,10$  и  $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$ , что дает возраст Вселенной около  $(14,2 \pm 1,5) \times 10^9$  лет, с учетом погрешностей в шкале расстояний для цефеид. При единственном допущении  $\Omega_m \geq 0$ , используя консервативный метод подбора кривой, они с надежностью 99,5 % получили результат  $q_0 < 0$ , подкрепляющий вывод об ускоряющемся расширении. Добавление 8 новых сверхновых в выборке из 230 сверхновых типа Ia дало<sup>106)</sup>  $1,4\Omega_m - \Omega_\Lambda = -0,35 \pm 0,14$ , что служит еще более ярким свидетельством в пользу того, что  $\Omega_\Lambda > 0$ . Затем доводы в пользу нетривиальности энергии вакуума были подкреплены группой Supernova Cosmology Project<sup>107)</sup>, которая, включив в рассмотрение новый набор сверхновых, получила для плоской Вселенной значение  $\Omega_\Lambda = 0,75^{+0,06}_{-0,07}$  (стат.)  $\pm 0,032$  (систем.).

Обе группы согласны с тем, что их результаты чувствительны главным образом к конкретному виду линейной комбинации  $\Omega_\Lambda$  и  $\Omega_m$ , которую группа Supernova Cosmology Project выбирает в виде  $0,8\Omega_m - 0,6\Omega_\Lambda$ , а High- $z$  Supernova Search Team — в виде  $\Omega_m - \Omega_\Lambda$  или  $1,4\Omega_m - \Omega_\Lambda$ . Знак «минус» в этих линейных комбинациях, как и в формуле (1.5.48), отражает тот факт, что материя и энергия вакуума оказывают противоположное воздействие на космологическое ускорение: материя замедляет процесс, тогда как положительная энергия вакуума приводит к его ускорению. Обнаруженные отрицательные значения коэффициентов в этих комбинациях выявляют наличие некоторой компоненты энергии, напоминающей энергию вакуума, с  $p \simeq -\rho$ . Ее часто называют *темной энергией*.

К слову, эти линейные комбинации  $\Omega_\Lambda$  и  $\Omega_m$  несколько отличаются от выражения  $\Omega_m/2 - \Omega_\Lambda$ , задающего, согласно соотношению (1.5.48), параметр замедления  $q_0$ , на определение которого были нацелены многие прежние космологические работы. Таким образом, наблюдение сверхновых типа Ia на космологических расстояниях не следует расценивать как простые измерения  $q_0$ .

Позже группа High- $z$  Supernova Search Team задействовала наблюдения из тех же самых обзоров, чтобы проследить во времени развитие сверхновых, благодаря которым были получены эти данные<sup>108)</sup>. Они открыли 23 новых сверхновых типа Ia с большими красными смещениями, в том числе 15 звезд с  $z > 0,7$ . Анализируя эти звезды вместе с 230 прежними, использованными в работе Тонри и коллег, с учетом допущения  $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$  они получили наилучшие значения  $\Omega_m = 0,33$  и  $\Omega_\Lambda = 0,67$ .

Критической особенностью этих данных о сверхновых, указывающей на то, что  $\Omega_\Lambda > \Omega_m$ , является более быстрое снижение видимой светимости сверхновых Ia с ростом красного смещения, чем можно было бы ожидать

<sup>106)</sup> J. L. Tonry et al., *Astrophys. J.* **594**, 1 (2003) [astro-ph/0305008].

<sup>107)</sup> R. Knop et al., *Astrophys. J.* **598**, 102 (2003) [astro-ph/0309368].

<sup>108)</sup> B. J. Barris et al., *Astrophys. J.* **502**, 571 (2004) [astro-ph/0310843].

в космологии Эйнштейна—де Ситтера с  $\Omega_m = 1$  и  $\Omega_\Lambda = 0$ . Заметить влияние энергии вакуума на видимую светимость можно путем сравнения фотометрического расстояния, вычисленного в двух крайних случаях, где вещества и излучение отсутствуют. Для плоской модели с преобладанием энергии вакуума, где  $\Omega_K = 1$ , а  $\Omega_K = \Omega_m = \Omega_\Lambda = 0$ , уравнение (1.5.46) дает

$$d_\Phi(z) = \frac{z + z^2}{H_0} \quad (\text{доминирование вакуума}), \quad (1.6.1)$$

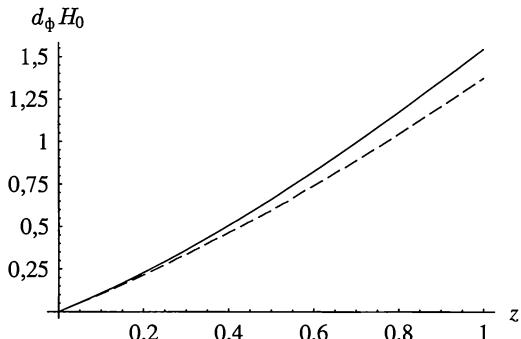
а для модели пустой Вселенной с  $\Omega_K = 1$  и  $\Omega_\Lambda = \Omega_m = \Omega_i = 0$  из уравнения (1.5.45) мы получаем

$$d_\Phi(z) = \frac{z + z^2/2}{H_0} \quad (\text{пустая Вселенная}). \quad (1.6.2)$$

Очевидно, энергия вакуума увеличивает фотометрическое расстояние при любых  $z$ . Тот же эффект можно увидеть, сравнивая более реалистичный случай  $\Omega_\Lambda = 0,7$ ,  $\Omega_m = 0,3$ ,  $\Omega_K = \Omega_i = 0$  с соответствующей версией без энергии вакуума, где  $\Omega_K = 0,7$ ,  $\Omega_m = 0,3$ ,  $\Omega_\Lambda = \Omega_i = 0$ , что представлено на рис. 1.3.

Обе группы исследователей, Supernova Cosmology Project и High- $z$  Supernova Search Team, обнаружили, что кривая зависимости между фотометрическим расстоянием и красным смещением для сверхновых типа Ia проходит ближе к верхней линии на рис. 1.3, чем к нижней. Действительно, согласно (1.4.9), отрицательное значение  $q_0$ , полученное всеми исследователями, отвечает тому факту, что видимая светимость сверхновых типа Ia, наблюдаемая при умеренных красных смещениях, меньше значения для модели пустой Вселенной, в которой  $q_0 = 0$ , — в противоположность тому, чего можно было бы ожидать при расширении с доминирующей материи, где мы имели бы  $q_0 > 0$  и видимые светимости при умеренных красных смещениях были бы больше, чем для  $q_0 = 0$ .

Связь между ускоряющимся расширением и низкой видимой светимостью можно понять в рамках наивной ньютоновской космологической модели, которая обсуждалась в разд. 1.5. В этой модели наблюдаемое красное смещение удаленной галактики зависит от той скорости, которую галактика имела в момент испускания



**Рис. 1.3.** Зависимость фотометрического расстояния от красного смещения для двух космологических моделей. Верхняя сплошная кривая соответствует случаю  $\Omega_\Lambda = 0,7$ ,  $\Omega_m = 0,3$ ,  $\Omega_K = \Omega_i = 0$ ; нижняя пунктирная линия отвечает модели пустой Вселенной, в которой  $\Omega_K = 1$ ,  $\Omega_\Lambda = \Omega_m = \Omega_i = 0$ . По вертикали отложено фотометрическое расстояние, умноженное на постоянную Хаббла

наблюдаемого нами света, однако видимая светимость обратно пропорциональна квадрату *текущего* расстояния до галактики, поскольку свет этой галактики распределяется по площади, пропорциональной (с коэффициентом  $4\pi$ ) квадрату текущего расстояния. Если наблюдаемые нами галактики с самого начала существуют с неизменной скоростью, как это происходит в модели пустой Вселенной, то расстояние от нас до любой галактики в настоящий момент пропорционально ее скорости в момент испускания ею света. В отсутствие энергии вакуума следовало бы ожидать, что галактики замедляются благодаря взаимному гравитационному притяжению, так что наблюдаемая нами скорость будет больше той скорости, которую они имели в момент испускания света, а потому расстояние до них в текущий момент будет меньше, чем при постоянной скорости. Следовательно, в отсутствие энергии вакуума мы могли бы ожидать более высокой видимой светимости сверхновых в этих галактиках. В действительности же фотометрические расстояния для сверхновых, похоже, *больше* тех, которые были бы при постоянной скорости их «домашних» галактик, что указывает не на замедление, а на ускорение движения галактик. Это в точности тот эффект, который можно ожидать при положительной энергии вакуума.

Конечно, может быть и так, что снижение видимой светимости происходит не из-за ускоряющегося расширения, а из-за поглощения или рассеяния света веществом по пути. В принципе, отделить такие эффекты от истинного роста фотометрического расстояния можно было бы, опираясь на изменения видимого цвета, вызываемые поглощением или рассеянием, однако это весьма сложное дело<sup>109)</sup>. Благодаря тщательным измерениям цвета<sup>110)</sup> такие сомнения утратили остроту. Тем не менее по-прежнему остается возможность измыслить некую составляющую межгалактической среды (так называемую *серую пыль*), которая снижала бы видимую светимость, не затрагивая при этом цвет.

Эти соображения в существенной степени утратили силу, в первую очередь благодаря исследованию<sup>111)</sup> сверхновой SN1997ff, найденной в области Hubble Deep Field<sup>112)</sup> в галактике, чье красное смещение  $z = 1,7 \pm 0,1$  является самым большим среди всех найденных по сей день сверхновых, а затем благодаря открытию и анализу 16 новых сверхновых типа Ia (из которых шесть имеют красное смещение  $z > 1,25$ ), выполненному новой группой исследователей — Higher- $z$  Supernova Team<sup>113)</sup>. Эти красные смещения столь велики, что на протяжении изрядной части того промежутка времени, в течение которого свет этих сверхновых шел к нам, в составе плотности энергии Вселенной

<sup>109)</sup> См., например, A. Aguirre, *Astrophys. J.* **525**, 583 (1999) [astro-ph/9904319].

<sup>110)</sup> R. Knop et al., *Astrophys. J.* **598**, 102 (2003) [astro-ph/0309368]; см. также M. Sullivan et al., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **340**, 1057 (2003) [astro-ph/0211444].

<sup>111)</sup> A. G. Riess et al., *Astrophys. J.* **560**, 49 (2001) [astro-ph/0104455].

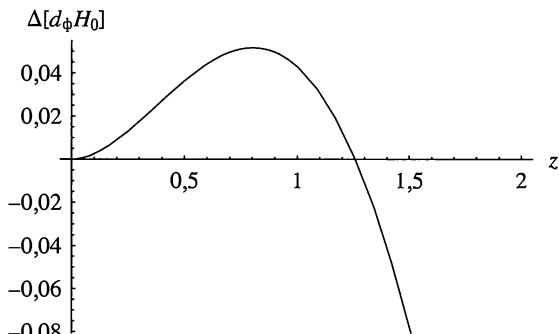
<sup>112)</sup> R. L. Gilliland, P. E. Nugent, and M. M. Phillips, *Astrophys. J.* **521**, 30 (1999).

<sup>113)</sup> A. G. Riess et al., *Astrophys. J.* **607**, 665 (2004) [astro-ph/0402512].

преобладала материя, а не космологическая постоянная, так что процесс расширения Вселенной был скорее замедляющимся, а не ускоряющимся, как пыне. Следовательно, если интерпретация результатов этих двух групп, полученных при меньших красных смещениях, правильна, то видимая светимость этих сверхновых должна быть выше, чем следует из линейного соотношения между фотометрическим расстоянием и красным смещением, — эффект, который не может быть вызван рассеянием или поглощением света. Мы можем на-

глядно увидеть это на рис. 1.4, где показана разница в фотометрических расстояниях (в единицах  $H_0^{-1}$ ) для реалистичного случая  $\Omega_\Lambda = 0,7$ ,  $\Omega_m = 0,3$ ,  $\Omega_K = \Omega_i = 0$  и для модели пустой Вселенной с  $\Omega_K = 1$ ,  $\Omega_m = \Omega_\Lambda = \Omega_i = 0$ . Мы видим, что при умеренных красных смещениях в реалистичной модели фотометрическое расстояние больше, чем в модели пустой Вселенной, но при  $z > 1,25$  это соотношение меняется на противоположное. Это именно то положение вещей, которое мы наблюдаем в реальности. Видимая светимость всех сверхновых согласуется со значениями параметров  $\Omega_m \approx 0,3$ ,  $\Omega_\Lambda \approx 0,7$ , полученными в исследованиях 1998 г., и не соответствует тому, что можно было бы ожидать в случае наличия серой пыли при  $\Omega_\Lambda = 0$ . Позже эти выводы были подкреплены измерением<sup>114)</sup> фотометрических расстояний дополнительных сверхновых типа Ia с красными смещениями около 0,5. В 2006 г. Рис и его коллеги<sup>115)</sup> объявили об открытии телескопом «Хаббл» 21 сверхновой типа Ia, 13 из которых имеют красное смещение  $z \geq 1$ , измеренное не только фотометрически, но и спектроскопически. Измеренные ими фотометрические расстояния и красные смещения вместе с данными о ранее открытых сверхновых типа Ia служат еще одним свидетельством перехода от расширения с преобладанием вещества к расширению с преобладанием энергии вакуума и показывают, что отношение давления к плотности для энергии вакуума при  $z > 1$  согласуется с  $w = -1$  и не подвержено быстрому изменению.

Источником другого серьезного возражения служит возможность того, что абсолютная светимость сверхновых типа Ia может зависеть от конкретного момента взрыва сверхновой. Поскольку сверхновые типа Ia возникают



**Рис. 1.4.** График зависимости от красного смещения для величины, представляющей собой разность умноженного на  $H_0$  фотометрического расстояния для двух случаев — реалистичного случая с  $\Omega_\Lambda = 0,7$ ,  $\Omega_m = 0,3$ ,  $\Omega_K = \Omega_i = 0$  и модели пустой Вселенной, в которой  $\Omega_K = 1$ ,

$$\Omega_\Lambda = \Omega_m = \Omega_i = 0$$

<sup>114)</sup> A. Riess et al., *Astrophys. J.* **642**, 1 (2006) [astro-ph/0510155].  
<sup>115)</sup> A. Riess et al., *Astrophys. J.* **659**, 98 (2007) [astro-ph/0611572].

в весьма характерный момент жизненного цикла звезды, можно ожидать, что влияние эволюции на светимость для сверхновых не будет столь существенным, как в целом для галактик, которые при больших расстояниях мы наблюдаем на более раннем этапе их истории<sup>116)</sup>. Однако при этом на абсолютную светимость сверхновой типа Ia влияет химический состав звезд-предшественниц, который, в свою очередь, зависит от эволюции «домашней» галактики сверхновой<sup>117)</sup>. Влияние такого рода можно вывести за скобки, приняв во внимание корреляцию абсолютной светимости сверхновой со временем ее угасания и ее собственным цветом (оба фактора предположительно зависят от химического состава звезд-предшественниц). Помимо этого, свидетельства в пользу существования темной энергии были обнаружены при исследовании наборов сверхновых типа Ia, найденных в весьма различном окружении и имеющих очень разную историю<sup>118)</sup>. Упомянутое выше исследование 7 сверхновых с  $z > 1,25$  исключает модели с  $\Omega_\Lambda = 0$  и любого рода резкие либо монотонные изменения абсолютной светимости сверхновых, которые могли бы имитировать эффекты, характерные для темной энергии.

Есть еще ряд эффектов, которые могли бы оказывать воздействие на наблюдалось соотношение между видимой светимостью и красным смещением сверхновых:

1. Ожидается, что слабое гравитационное линзирование мало влияет<sup>119)</sup> на выводы, полученные из наблюдений за сверхновыми, за исключением, возможно, обследования небольших областей<sup>120)</sup>. (Гравитационное линзирование обсуждается в гл. 9.) Некоторое время считалось, что видимая светимость наиболее удаленной сверхновой, SN1997ff, могла повыситься благодаря гравитационному линзированию<sup>121)</sup>, что заставило вернуться к обсуждению серой пыли как возможной причины снижения видимой светимости более близких сверхновых. Однако последующий анализ, выполненный той же группой<sup>122)</sup>, показал, что увеличение сверхновой из-за гравитационной линзы меньше, чем считалось, и тем самым поправки, связанные с гравитационным линзированием, оказывают слабое влияние на современные космологические исследования. Члены группы High- $z$

<sup>116)</sup> D. Branch, S. Perlmutter, E. Baron, and P. Nugent, статья для публикации в *Supernova Acceleration Probe Yellow Book* (Snowmass, 2001) [astro-ph/0109070].

<sup>117)</sup> P. Podsiadlowski et al. [astro-ph/0608324]. Эволюция может влиять также на ослабление света пылью в «домашней» галактике; см. T. Totani and C. Kobayashi, *Astrophys. J.* **526**, 65 (1999).

<sup>118)</sup> M. Sullivan et al., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **340**, 1057 (2003) [astro-ph/0211444].

<sup>119)</sup> A. J. Barber, *Astron. Soc. Pacific Conf. Ser.* **237**, 363 (2001) [astro-ph/0109043].

<sup>120)</sup> A. Cooray, D. Huterer, and D. E. Holz, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 021301 (2006).

<sup>121)</sup> E. Mörtstell, C. Gunnarsson, and A. Goobar, *Astrophys. J.* **561**, 106 (2001); C. Gunnarsson, *Proceedings of a Conference on New Trends in Theoretical and Observational Cosmology — Tokyo*, 2001 [astro-ph/0112340].

<sup>122)</sup> J. Jönsson et al., *Astrophys. J.* **639**, 991 (2006) [astro-ph/0506765].

Supernova Project сообщили<sup>123)</sup>, что, напротив, этот эффект, вероятно, улучшает согласие с оценкой  $\Omega_m = 0,35$  и  $\Omega_\Lambda = 0,65$ .

2. Выдвигался аргумент о том, что неоднородности в распределении космического вещества могут привести к ускоряющемуся расширению, не требуя ввода каких бы то ни было экзотических видов энергии вакуума<sup>124)</sup>. Однако, если принять во внимание высокую степень однородности Вселенной при усреднении в достаточно больших масштабах, это представляется маловероятным<sup>125)</sup>.
3. Имеются свидетельства в пользу наличия двух видов сверхновых типа Ia, где более малочисленная группа связана со слиянием белых карликов или различиями в физике взрыва<sup>126)</sup>. Влияние этого результата на космологические исследования еще предстоит оценить.
4. Другие неопределенности, которые могут ухудшать точность измерений, связанных с темной энергией (не ставя под сомнение ее существование), происходят из того обстоятельства, что форма кривой зависимости фотометрического расстояния от красного смещения находится многочисленными обсерваториями, как наземными, так и космическими, а потому существуют многочисленные ошибки калибровки потоков, возникающие между этими разными обсерваториями.
5. Измерение фотометрического расстояния любого источника света с большим красным смещением исторически страдает недостатком, связанным с тем, что измерения не являются «болометрическими», то есть в равной степени чувствительными к любым длинам волн. Они чувствительны преимущественно к длинам волн в ограниченном диапазоне. Космологическое красное смещение меняет видимый цвет источника и тем самым изменяет чувствительность измерения его видимой светимости. Чтобы учесть этот эффект, для измеренной видимой звездной величины вводится так называемая *K-поправка*<sup>127)</sup>. Для сверхновых эта K-поправка была подобрана до открытия темной энергии<sup>128)</sup>, а затем последовательно

<sup>123)</sup> N. Benitez et al., *Astrophys. J.* **577**, L1 (2002) [astro-ph/0207097].

<sup>124)</sup> E. W. Kolb, S. Matarrese, A. Notari, and A. Riotto, *Astrophys. J.* **626**, 195 (2005) [hep-th/0503117]; E. W. Kolb, S. Matarrese, and A. Riotto, *New J. Phys.* **8**, 322 (2006) [astro-ph/0506534]; E. Barausse, S. Matarrese, and A. Riotto, *Phys. Rev. D* **71**, 063537 (2005).

<sup>125)</sup> É. É. Flanagan, *Phys. Rev. D* **71**, 103521 (2005) [hep-th/0503202]; G. G. Geshnizjani, D. J. H. Chung, and N. Afshordi, *Phys. Rev. D* **72**, 023517 (2005) [astro-ph/0503553]; C. M. Hirata and U. Seljak, *Phys. Rev. D* **72**, 083501 (2005) [astro-ph/0503582]; A. Ishibashi and R. M. Wald, *Class. Quant. Grav.* **23**, 235 (2006) [gr-qc/0509108].

<sup>126)</sup> D. Howell et al., *Nature* **443**, 308 (2006); S. Jha, A. Riess, and R. P. Kirshner, *Astrophys. J.* **654**, 122 (2007); R. Quimby, P. Höflich, and J. C. Wheeler, 0705.4467.

<sup>127)</sup> Обсуждение применения K-поправки к галактикам в целом и ссылки на оригинальные работы см. в ГиК, с. 443.

<sup>128)</sup> A. Kim, A. Goobar, and S. Perlmutter, *Proc. Astron. Soc. Pacific* **108**, 190 (1995) [astro-ph/9505024].

уточнялась<sup>129)</sup>. Поскольку точность наблюдений за сверхновыми растет, могут потребоваться и дальнейшие уточнения К-поправки.

Эти наблюдения ускоряющегося расширения согласуются с существованием постоянной энергии вакуума, но отнюдь не доказывают, что плотность этой энергии в самом деле постоянна. Однако само наличие ускоряющегося расширения, в соответствии с уравнением (1.5.18), требует, чтобы значительная часть плотности энергии Вселенной находилась в такой форме, для которой  $\rho + 3p < 0$ , в отличие от обычной материи и излучения. Эта форма получила название *темной энергии*<sup>130)</sup>.

Для учета возможного непостоянства плотности темной энергии стало распространенной практикой анализировать наблюдения в терминах отношения давления и плотности темной энергии:  $p_{\text{т.э.}}/\rho_{\text{т.э.}} \equiv w$ . За исключением случая постоянной плотности энергии вакуума, когда  $w = -1$ , нет никаких особых причин считать  $w$  не зависящим от времени. (Другую, более физическую по своей сути возможность мы рассмотрим в конце разд. 1.12.) По сей день широко изучаются модели, где  $w$  постоянно, но не обязательно равно  $-1$ . До тех пор пока плотность темной энергии и  $\Omega_K$  неотрицательны, расширение Вселенной продолжается, и  $\dot{a}$  всегда положительно. Как показывает уравнение (1.1.34), плотность темной энергии в этом случае ведет себя как  $a^{-3-3w}$ , так что если  $w$  отрицательно (на что указывают наблюдения за сверхновыми), то плотность энергии для излучения и материи должна рано или поздно стать пренебрежимой по сравнению с плотностью темной энергии. Для  $w < -1/3$  эффект возможной кривизны в уравнении Фридмана (1.5.19) в конце концов также становится пренебрежимо малым. Решением этого уравнения при  $w > -1$  с  $\dot{a} > 0$  будет  $t - t_1 \rightarrow Ca^{(3+3w)/2}$ , где  $C > 0$ , а  $t_1$  — постоянная интегрирования. Это соответствует продолжающемуся расширению, скорость которого убывает. Но для  $w < -1$  (ситуация, которую иногда называют случаем *фантомной энергии*) решением при  $\dot{a} > 0$  становится  $t_1 - t \rightarrow Ca^{(3+3w)/2}$ , где снова  $C > 0$ . У этого решения есть примечательная особенность:  $a(t)$  становится бесконечным в момент времени  $t_1$ . В отличие от случая  $w \geq -1$ , при  $w < -1$  все структуры — скопления галактик, звезды, атомы, атомные ядра, протоны и нейтроны — в конце концов будут разрушены силами отталкивания, связанными с темной энергией<sup>131)</sup>.

В 2003 г. на канадско-французско-гавайском телескопе на Мауна-Кеа с целью дальнейшего изучения зависимости темной энергии от времени был начат пятилетний проект исследования сверхновых, *Supernova Legacy Survey*<sup>132)</sup>. К концу первого года была открыта и изучена 71 сверхновая типа Ia

<sup>129)</sup> P. Nugent, A. Kim, and S. Perlmutter, *Proc. Astron. Soc. Pacific* **114**, 803 (2002) [astro-ph/0205351].

<sup>130)</sup> Общий обзор см. в P. J. E. Peebles and B. Ratra, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 559 (2003).

<sup>131)</sup> R. R. Caldwell, M. Kamionkowski, and N. N. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 071301 (2003) [astro-ph/0302506].

<sup>132)</sup> P. Astier, et al., *Astron. Astrophys.* **447**, 31 (2006) [astro-ph/0510447].

с большим красным смещением, что привело к результату

$$\Omega_m = 0,263 \pm 0,042 \text{ (стат.)} \pm 0,032 \text{ (систем.)}.$$

Объединяя эти данные о сверхновых с данными исследования Sloan Digital Sky Survey (которое обсуждается в гл. 8) и предполагая, что значение  $w \equiv p/\rho$  для темной энергии не зависит от времени, исследователи получили, что при условии постоянства  $w$  его значение равно

$$w = -1,023 \pm 0,09 \text{ (стат.)} \pm 0,054 \text{ (систем.)},$$

что согласуется со значением  $w = -1$  для постоянной энергии вакуума. Ко времени написания этих строк стали доступны результаты для 60 сверхновых типа Ia еще одного проекта исследования сверхновых — ESSENCE<sup>133)</sup> (это сокращение образовано от англ. Equation of State: Supernovae trace Cosmic Expansion). Сочетая эти данные с результатами Supernova Legacy Survey, исследовательская группа ESSENCE пришла к заключению, что если  $w$  постоянно, то оно равно  $w = -1,07 \pm 0,09$  (стат.,  $1\sigma$ )  $\pm 0,13$  (систем.), а  $\Omega_m = 0,267^{+0,028}_{-0,018}$  (стат.,  $1\sigma$ ).

Вывод о том, что на темную энергию приходится существенная доля энергии Вселенной, был подкреплен наблюдениями реликтового излучения, как обсуждается в разд. 7.2. Этот вывод получил также подтверждение при использовании другого вида вторичных индикаторов расстояний — рентгеновского излучения горячего газа в скоплениях галактик. В разд. 1.9 мы увидим, что измерение красного смещения, температуры, видимой рентгеновской светимости и углового диаметра скопления позволяет определить соотношение горячего газа («барионов») и всего вещества скопления, их отношение пропорционально  $d_y^{-3/2}$ , где под  $d_y$  подразумевается расстояние до данного скопления по угловому диаметру. Это рассуждение можно развернуть и в обратную сторону: в предположении, что отношение горячего газа ко всему веществу одинаково для всех скоплений в выборке, наблюдения в рентгеновском диапазоне можно использовать для того, чтобы выявить зависимость расстояния до скопления по угловому диаметру от красного смещения<sup>134)</sup>. Наблюдения рентгеновского излучения 26 скоплений галактик с красным смещением в диапазоне  $0,07 < z < 0,9$ , выполненные спутником «Чандра», были использованы в этом ключе и дали значение  $\Omega_\Lambda = 0,94^{+0,21}_{-0,25}$  с доверительной вероятностью 68 %<sup>135)</sup> для космологии с постоянной энергией вакуума и холодной темной материи. При ослаблении допущения о по-

<sup>133)</sup> M. Wood-Vesey et al. [astro-ph/0701041].

<sup>134)</sup> S. Sasaki, *Publ. Astron. Soc. Japan* **48**, 119 (1996) [astro-ph/9611033]; U.-L. Pen, *New Astron.* **2**, 309 (1997) [astro-ph/9610147].

<sup>135)</sup> S. W. Allen, R. W. Schmidt, H. Ebeling, A. C. Fabian, and L. van Speybroeck, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **353**, 457 (2004) [astro-ph/0405340]. Более ранние приложения этого метода см. в K. Rines et al., *Astrophys. J.* **517**, 70 (1999); S. Ettori and A. Fabian, *Astron. Soc. Pac. Conf. Ser.* **200**, 369 (2000); S. W. Allen, R. W. Schmidt, and A. C. Fabian, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **334**, L11 (2002); S. Ettori,

стоянстве плотности космологической темной энергии, но в предположении, что  $\Omega_K = 0$ ,  $w$  постоянно, а плотность барионов имеет значение, на которое указывает космологический нуклеосинтез (обсуждаемый в разд. 3.2), анализ данных спутника «Чандра» приводит к значению  $1 - \Omega_m = 0,76 \pm 0,04$  и к отношению давления к плотности для темной энергии  $w = -1,20^{+0,24}_{-0,28}$ .

Возможно, измерения фотометрического расстояния можно распространить на гораздо большие красные смещения, используя длительные всплески гамма-излучения в качестве вторичных индикаторов расстояний. Эти вспышки совершенно определенно не обладают однородной абсолютной светимостью, однако имеются указания на то, что абсолютная светимость в гамма-диапазоне связана с пиковой энергией гамма-излучения и характеристической временной шкалой<sup>136)</sup>.

Открытие темной энергии имеет чрезвычайную важность как для интерпретации других наблюдений, так и в качестве вызова, брошенного фундаментальной теории. Крайне интригующим является вопрос о том, почему плотность темной энергии столь низка. Вклад квантовых флуктуаций известных полей с энергией до 300 ГэВ (это примерно соответствует предельной энергии, при которой проверены существующие теории) приводит для плотности энергии вакуума к значению порядка (300 ГэВ)<sup>4</sup>, то есть около  $10^{27}$  г/см<sup>3</sup>. Конечно, это значение радикально, с разницей в 56 порядков превосходит наблюдаемую плотность темной энергии  $\Omega_V \rho_{0,\text{крит.}} \simeq 10^{-29}$  г/см<sup>3</sup>. Если и есть другие, неизвестные нам вклады в энергию вакуума, которые могли бынейтрализовать этот вклад, источниками которых являются флуктуации полей при высоких энергиях или полевые уравнения сами по себе, то такиенейтрализующие вклады должны были бы совпадать по величине с точностью до 56 знаков после запятой. Для этого нет каких-либо известных оснований<sup>137)</sup>. Открытие темной энергии добавляет и еще одну проблему: почему плотность темной энергии сопоставима с плотностью энергии для материи в данный конкретный момент истории Вселенной?

Для размышлений над этими проблемами критически важно знать, меняется ли энергия со временем или является действительно не зависящей от времени, — вопрос, на который могут дать ответ дальнейшие исследования удаленных сверхновых типа Ia или другие измерения при больших красных смещениях. Возможность существования переменной темной энергии (известной как квинтэссенция) будет рассмотрена ниже в разд. 1.12.

P. Tozzi, and P. Rosati, *Astron. & Astrophys.* **398**, 879 (2003). Возможность того, что отношение горячего газа ко всему веществу переменно, исследовалась в R. Sadat et al., *Astron. & Astrophys.* **437**, 310 (2005); L. D. Ferramacho and A. Blanchard, *Astron. & Astrophys.* **463**, 423 (2007) [astro-ph/0609822].

<sup>136)</sup> C. Firmani, V. Avila-Reese, G. Ghisellini, and G. Ghirlanda, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **372**, 28 (2006) [astro-ph/0605430]; G. Ghirlanda, G. Ghisellini, and C. Firmani, *New J. Phys.* **8**, 123 (2006) [astro-ph/0610248].

<sup>137)</sup> Обзор попыток найти ответ на этот вопрос см. в S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1 (1989).

## Космическое расширение или «усталость» света?

**Тест на поверхностную яркость • Замедление спада сверхновых**

Сопоставляя измерения красных смещений и фотометрических расстояний с теоретическими выводами, мы полагаемся на некие общие представления о красном смещении и светимости, очерченные в разд. 1.2 и 1.4. Одно из явлений, способное поставить под сомнение эти представления, — поглощение или рассеяние света, которое сокращает количество достигших нас фотонов, испущенных удаленным источником. Обычно эту возможность принимают во внимание путем измерения цветовых характеристик источника, которые подвержены влиянию поглощения и рассеяния; однако, как мы обсуждали в предыдущем разделе, есть вероятность существования серой пыли — субстанции, которую невозможно выявить таким образом. Еще один возможный источник уменьшения видимой светимости — превращение фотонов в частицы, называемые аксионами, благодаря межгалактическим магнитным полям. Есть и еще одна, более радикальная возможность. С самого момента открытия космологического красного смещения не утихает критика интерпретации этого смещения как свидетельства в пользу расширения Вселенной. Может ли быть так, что Вселенная на самом деле статична, в то время как фотоны просто теряют энергию и, следовательно, снижают свою частоту, пока идут к нам, причем эти потери (а вместе с ними и красное смещение) увеличиваются с ростом того расстояния, которое вынужден пройти фотон?

Все эти возможности можно отбросить, сравнив фотометрическое расстояние  $d_\phi(z)$  с расстоянием по угловому диаметру  $d_y(z)$  для одного и того же удаленного источника. Ни один из описанных выше факторов не может повлиять на расстояние по угловому диаметру, до тех пор пока общепринятая трактовка соотношения красного смещения и светимости дает не зависящий от модели результат (1.4.12):  $d_\phi(z)/d_y(z) = (1 + z)^2$ , так что проверка этого соотношения может подтвердить наши представления о  $d_\phi(z)$ .

Проверить это соотношение для  $d_\phi(z)/d_y(z)$  мы можем с помощью «теста поверхностной яркости», довольно давно предложенного Толменом<sup>138)</sup>. Если  $\mathcal{L}$  — абсолютная светимость источника света в расчете на единицу площади, то видимая светимость фрагмента поверхности площадью  $A$  составит  $\ell = \mathcal{L}A/(4\pi d_\phi^2)$ . Этот фрагмент поверхности стягивает телесный угол  $\Omega = A/d_y^2$ . Поверхностная яркость  $B$  определяется как видимая светимость

<sup>138)</sup> R. C. Tolman, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **16**, 5111 (1930); *Relativity, Thermodynamics, and Cosmology* (Oxford Press, Oxford, 1934): 467. (Русский перевод: Толмен Р. Относительность, термодинамика и космология. М.: Наука, 1974. — Прим. ред. перев.)

в расчете на телесный угол, так что

$$B \equiv \frac{\ell}{\Omega} = \frac{\mathcal{L}d_y^2}{4\pi d_\phi^2}. \quad (1.7.1)$$

В традиционной космологии Большого взрыва отношение  $d_y/d_\phi$  дается формулой (1.4.12), так что

$$B = (1+z)^{-4} \left( \frac{\mathcal{L}}{4\pi} \right). \quad (1.7.2)$$

Если мы сумеем найти класс источников света с одинаковой абсолютной светимостью на единицу площади, то их поверхностная яркость должна спадать с ростом красного смещения в точности как  $(1+z)^{-4}$ .

Например, одним из различий между теориями «уставшего света» и общепринятой теорией Большого взрыва является то, что в последней темп всех процессов у источника замедляется с множителем  $(1+z)^{-1}$ , в то время как в теориях «уставшего света» такого замедления не происходит. Одна из величин, замедляющихся при больших красных смещениях в общепринятой теории, — темп испускания фотонов источником. Этот процесс отвечает за один из двух множителей  $(1+z)^{-1}$  в формуле (1.4.1) для видимой светимости; второй множитель возникает благодаря уменьшению энергии отдельных фотонов. С другой стороны, если красное смещение не влияет на темп испускания фотонов, то в статической евклидовой Вселенной, где фотоны теряют энергию по дороге к нам, видимая светимость  $L$  удаленного источника на расстоянии  $d$  будет описываться формулой  $L/(4\pi(1+z)d^2)$ , в знаменателе которой стоит только один множитель  $1+z$ , отвечающий за потери энергии фотонов. То есть фотометрическое расстояние будет равным  $(1+z)^{1/2}d$ , тогда как расстояние по угловому диаметру в евклидовой Вселенной есть просто  $d$ , так что  $d_\phi/d_y = (1+z)^{1/2}$  и поверхностная яркость удаленных галактик должна спадать как  $(1+z)^{-1}$ .

Любин и Сэндидж<sup>139)</sup> использовали телескоп «Хаббл», чтобы сравнить поверхностную яркость галактик в трех далеких скоплениях с красными смещениями 0,76, 0,90 и 0,92 с поверхностной яркостью, полученной измерениями в более близких галактиках. Они выявили уменьшение  $B$  с ростом  $z$ , которое согласуется с уравнением (1.7.2) при разумных поправках на влияние эволюции галактик и не соответствует картине  $B \propto (1+z)^{-1}$ , ожидаемой в статической Вселенной с «уставшим светом».

В стандартной космологии Большого взрыва замедлению с множителем  $1/(1+z)$  подвержен не только темп испускания фотонов, но и скорости всех прочих процессов. Существование такого замедления было подтверждено<sup>140)</sup>

<sup>139)</sup> L. M. Lubin and A. Sandage, *Astron. J.* **122**, 1084 (2001) [astro-ph/0106566]. Их более ранние результаты описаны в A. Sandage and L. M. Lubin, *Astron. J.* **121**, 2271 (2001); L. M. Lubin and A. Sandage, *ibid.*, 2289 (2001) и *Astron. J.* **122**, 1071 (2001) [astro-ph/0106563].

<sup>140)</sup> B. Leibundgut et al., *Astrophys. J.* **466**, L21 (1996); G. Goldhaber et al. (Supernova Cosmology Project), *Astrophys. J.* **558**, 359 (2001) [astro-ph/0104382].

лия темпа затухания свечения некоторых сверхновых типа Ia из набора, использованного группой исследователей Supernova Cosmology Project, работа которых обсуждалась в предыдущем разделе. Гипотеза о простой связи между абсолютной светимостью и внутренним временем угасания становится более правдоподобной, если принять, что наблюданное время угасания «растянуто» на множитель  $1+z$  по сравнению с внутренним временем угасания. В статической евклидовой Вселенной, где красное смещение объясняется «усталостью» света, ничего подобного не наблюдалось бы.

---

## 1.8

### Возрасты

**Распространенность тяжелых элементов • Выключение главной последовательности**  
**• Возраст и красное смещение**

Как мы уже видели, располагая значениями постоянной Хаббла и параметров плотности  $\Omega_m$  и  $\Omega_\Lambda$  для материи и вакуума, мы можем оценить возраст Вселенной. В этом разделе мы обсудим независимые оценки возраста Вселенной, опирающиеся на расчеты возраста некоторых наиболее старых ее объектов.

Поскольку металлы (элементы тяжелее гелия), найденные в наружных оболочках звезд, наследуются главным образом от предыдущих поколений звезд, наиболее старыми звездами будут те, спектр которых демонстрирует низкую распространенность металлов. Это так называемые звезды популяции II, обнаруженные в гало нашей Галактики и, в числе прочего, в шаровых скоплениях. Есть два основных способа оценить возраст старых звезд.

#### A. Распространенность тяжелых элементов

Если скорость распада ядер составляет  $\lambda$ , а изначальная распространенность равна  $A_{\text{нач}}$ , то по прошествии времени  $T$  распространенность составит  $A = A_{\text{нач}} \exp(-\lambda T)$ . Следовательно, если мы знаем  $A_{\text{нач}}$  и можем измерить  $A$ , то мы в состоянии определить  $T$  из соотношения  $T = \lambda^{-1} \ln(A_{\text{нач}}/A)$ . К сожалению, оба этих требования редко бывают выполнены. С другой стороны, часто имеется возможность вычислить *отношение* исходных распространенностей  $A_{1\text{ нач}}$  и  $A_{2\text{ нач}}$  для двух элементов и измерить их *относительную* текущую распространенность  $A_1/A_2$ . Эта относительная распространенность задается соотношением

$$\frac{A_1}{A_2} = \left( \frac{A_{1\text{ нач}}}{A_{2\text{ нач}}} \right) \exp [(\lambda_2 - \lambda_1)T],$$

так что

$$T = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[ \ln \left( \frac{A_1}{A_2} \right) - \ln \left( \frac{A_{1\text{ нач}}}{A_{2\text{ нач}}} \right) \right]. \quad (1.8.1)$$

Если исходные значения распространенности близки, а наблюдаемые значения распространенности сильно различаются, то оценка величины  $T$  будет нечувствительной к точному значению отношению исходных распространенностей.

Оценка изначальной относительной распространенности тяжелых, радиоактивных элементов опирается на надежное допущение о том, что эти элементы образовались в ходе так называемого  $\gamma$ -процесса — быстрого захвата нейтронов более легкими элементами, такими как железо в коллапсирующем ядре при взрывах сверхновых, после чего изотопы с избыточными нейтронами, возникшие таким образом, подвергаются многократному бета-распаду, что приводит к образованию более тесно связанных ядер с тем же числом нуклонов. Этот метод использовался для определения нижней границы возраста нашей Галактики с помощью измерения распространенности в земном веществе изотопа урана  $^{235}\text{U}$ , скорость распада которого составляет  $0,971 \times 10^{-9}/\text{год}$ . Чтобы избежать влияния погрешностей при измерении распространенности  $^{235}\text{U}$  в земном веществе, его распространенность измеряли относительно изотопа  $^{238}\text{U}$ , который распадается медленнее ( $0,154 \times 10^{-9}/\text{год}$ ), но с химической точки зрения ведет себя так же и предположительно распределен аналогичным образом. Исходное отношение значений распространенности для  $^{235}\text{U}$  и  $^{238}\text{U}$ , по оценкам, составляло  $1,65 \pm 0,15$ ; эта величина больше единицы, поскольку к предшественнику  $^{235}\text{U}$  нужно добавить еще три нейтрана, чтобы получить предшественник  $^{238}\text{U}$ . С другой стороны, к настоящему моменту благодаря большей скорости распада  $^{235}\text{U}$  стал (к счастью) менее распространенным, чем  $^{238}\text{U}$ . В настоящий момент отношение значений распространенности изотопов урана в земном веществе составляет 0,00723, то есть уран распадался на протяжении

$$\frac{\ln(1,65) - \ln(0,00723)}{0,971 \times 10^{-9}/\text{лет} - 0,154 \times 10^{-9}/\text{лет}} = 6,6 \text{ млрд лет.}$$

Однако Солнце относится ко второму (или, возможно, третьему) поколению звезд (называемому популяцией I), так что образование урана предположительно происходило в течение долгого промежутка времени, предшествовавшего возникновению Солнечной системы. Данные по отношению значений распространенности для урана были дополнены измерением других отношений распространенности в земном и метеоритном веществе — таких, как  $^{232}\text{Th}/^{238}\text{U}$  и  $^{187}\text{Re}/^{187}\text{Os}$ , — после чего был проведен их анализ со свободным параметром в качестве длительности периода формирования тяжелых элементов. Это привело к более обоснованному, хотя и не столь точному значению нижней границы возраста тяжелых элементов в окрестностях Солнечной системы, равному 9,6 млрд лет<sup>141)</sup>.

<sup>141)</sup> B. S. Meyer and D. N. Schramm, *Astrophys. J.* **311**, 406 (1986).

Гораздо более строгое значение нижней границы возраста Галактики дает применение этих методов к бедным металлами звездам за пределами Солнечной системы. Прежде всего речь идет о спектроскопических наблюдениях тория в звезде CS 22892–052<sup>142)</sup> — звезде-гиганте спектроскопического класса K с очень низким содержанием металлов (а значит, предположительно старой). Для более стабильных элементов, возникших благодаря г-процессу, относительная распространенность в этой звезде соответствует их распространенности в Солнечной системе; исключение составляет наиболее тяжелый из обнаруженных элементов — торий, период полураспада которого (для изотопа  $^{232}\text{Th}$ ) составляет 14 млрд лет и который имеет гораздо более низкую распространенность. Если объяснять уменьшение распространенности тория радиоактивным распадом, то оценка его возраста в этой звезде составляет  $14,1 \pm 3$  млрд лет. Другие оценки возраста для CS 22892–052 и других звезд с низким содержанием металлов были получены путем измерения отношения распространенности тория к распространности европия и лантана<sup>143)</sup>.

Уран-238 распадается быстрее, чем  $^{232}\text{Th}$ , что дает нам возможность получить более достоверную оценку возраста звезды, используя оба значения распространенности — для урана и для тория (разумеется, при условии, что в спектре звезды присутствуют спектральные линии обоих элементов). В спектре CS 22892–052 линии поглощения урана не были обнаружены, но позже были найдены линии поглощения однократно ионизированного урана в спектре двух других звезд, содержащих элементы, порожденные г-процессом, — CS 31082–001 и BD+17°3248. Наблюданное отношение распространенностей урана и тория для CS 31082–001 составляет  $10^{-0,74 \pm 0,15}$ , в то время как для исходного значения отношения в разное время были получены оценки  $10^{-0,255}$  и  $10^{-0,10}$ . Подставляя эти величины в формулу (1.8.1), получаем для возраста этой звезды значение  $12,5 \pm 3$  млрд лет<sup>144)</sup>. Последующие наблюдения привели к значениям  $14 \pm 2$  млрд лет<sup>145)</sup>,  $15,5 \pm 3,2$  млрд лет<sup>146)</sup> и  $14,1 \pm 2,5$  млрд лет<sup>147)</sup>. Сходным образом для звезды BD+17°3248 был вычислен возраст  $13,8 \pm 4$  млрд лет<sup>148)</sup> (см. рис. 1.5). Совсем недавно линии тория и урана были одновременно обнаружены в спектре только что открытой звезды с низким содержанием металлов HE 1523–0903; из отношения значений распространенности тория и урана к значениям распространенности других

<sup>142)</sup> C. Sneden et al., *Astrophys. J.* **467**, 819 (1996); *Astrophys. J.* **591**, 936 (2003) [astro-ph/0303542]. Обзор со ссылками на более ранние работы по распространенности тория приведен в C. Sneden and J. J. Cowan, *Astronomia y Astrofísica (Serie de Conferencia)* **10**, 221 (2001) [astro-ph/0008185].

<sup>143)</sup> I. I. Ivans et al., *Astrophys. J.* **645**, 613 (2006) [astro-ph/0604180], и ссылки на более ранние работы, приведенные там.

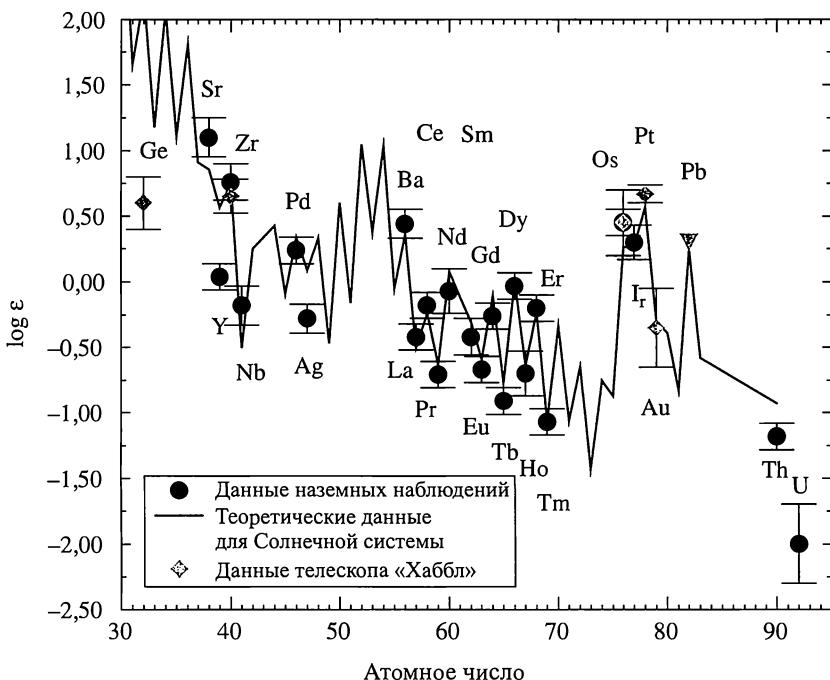
<sup>144)</sup> R. Cayrel et al., *Nature* **409**, 691 (2001).

<sup>145)</sup> V. Hill et al., *Astron. Astrophys.* **387**, 580 (2002).

<sup>146)</sup> H. Schatz et al., *Astrophys. J.* **579**, 626 (2002).

<sup>147)</sup> S. Wanajo, *Astrophys. J.* **577**, 853 (2002).

<sup>148)</sup> J. J. Cowan et al., *Astrophys. J.* **572**, 861 (2002) [astro-ph/0202429].



**Рис. 1.5.** Данные о распространенности порожденных г-процессом элементов для звезды BD+17°3248, которые получены посредством спектроскопических наблюдений, выполненных наземными обсерваториями и телескопом «Хаббл». Для сравнения сплошной линией показаны теоретические значения исходной распространенности, опирающиеся на данные по Солнечной системе. Обратите внимание на то, что наблюдаемые значения распространенности для тория и урана заметно ниже теоретических значений для исходной распространенности. Это указывает на возраст звезды BD+17°3248, равный  $13,8 \pm 4$  млрд лет.

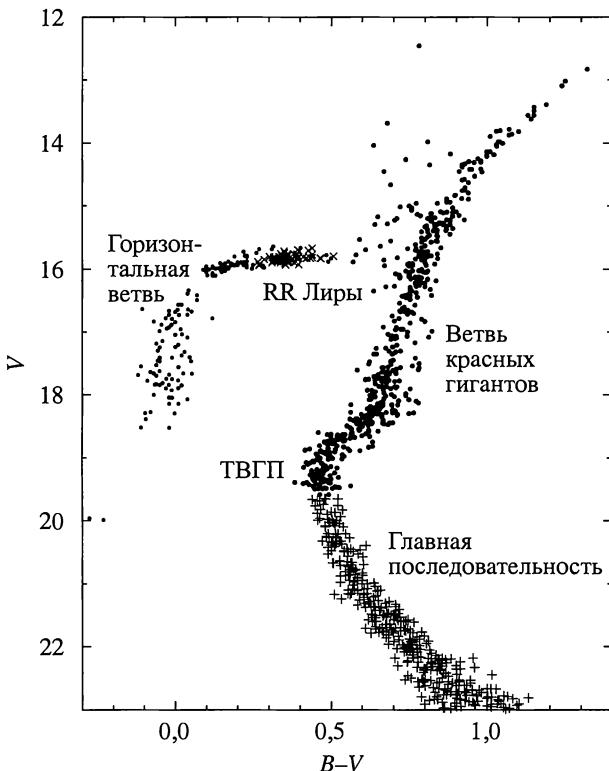
(Из J. J. Cowan et al., *Astrophys. J.* 572, 861 (2002) [astro-ph/0202429])

элементов, возникших посредством г-процесса, а также отношения распространенности этих элементов друг к другу была получена оценка возраста звезды 13,2 млрд лет<sup>149)</sup>.

### В. Выключение главной последовательности

В ядрах тех звезд, которые удовлетворяют соотношению между абсолютной светимостью и поверхностью температурой для главной последовательности, идет сгорание водорода. Когда в ядре водород заканчивается, процессы сгорания продолжаются во внешней оболочке вокруг (временно) инертного гелиевого ядра. Затем звезда выбывает из главной последовательности, обретая более высокую светимость и более низкую поверхность температуру.

<sup>149)</sup> A. Frebel et al., *Astrophys. J.* 660, L117 (2007) [astro-ph/0703414].



**Рис. 1.6.** Диаграмма «цвет — звездная величина» для шарового скопления M15. Визуально наблюдаемая видимая звездная величина звезд скопления M15 отложена на вертикальной оси. Поскольку все звезды этого скопления находятся примерно на одном расстоянии от Земли, видимая визуальная звездная величина отличается от абсолютной звездной величины на некоторое постоянное значение при нарастающей при движении вверх абсолютной светимости. Разница между видимой голубой и визуальной звездными величинами отложена на горизонтальной оси. Это служит мерой поверхности температуры, которая спадает при движении вправо. Если бы скопление M15 было молодым, главная последовательность уходила бы вверх и налево; положение точки выключения главной последовательности (ТВГП) и другие характеристики этой диаграммы указывают на то, что возраст скопления составляет  $15 \pm 3$  млрд лет. Диаграмма взята из B. Chaboyer, *Phys. Rep.* **307**, 23 (1998) и опирается на данные из работы P. R. Durrell and W. E. Harris, *Astron. J.* **105**, 1420 (1993) [astro-ph/9808200]

Чем тяжелее звезда, тем большей светимостью она обладает в главной последовательности и тем быстрее эволюционирует. Поэтому с течением времени главная последовательность скопления звезд, имеющих разные массы, но одинаковый возраст, демонстрирует тенденцию к выключению, которое смещается ко все более и более низким светимостям (см. рис. 1.6). В грубом приближении абсолютная светимость звезд в точке выключения обратно пропорциональна возрасту скопления. В частности, измерения главной последовательности

вательности для ряда шаровых скоплений в разное время приводили к значению возраста<sup>150)</sup>  $11,5 \pm 1,3$ ,  $12 \pm 1$ ,  $11,8 \pm 1,2$ ,  $14,0 \pm 1,2$  и  $12,2 \pm 1,8$  млрд лет. Д. Шрамм, подводя итоги<sup>151)</sup>, заметил, что большая часть расхождений исчезает, если разные расчеты выполнять при одних и тех же значениях таких величин, как исходная распространенность гелия, кислорода и железа, что приводит к согласованному значению возраста  $14 \pm 2$ (стат.) $\pm 2$ (сист.) млрд лет. Заметим, что все эти значения возраста чувствительны к шкале расстояний: относительное изменение  $\delta d/d$  в оценках расстояний влечет за собой относительное изменение  $\delta L/L = -2\delta d/d$  в оценках абсолютной светимости и, как следствие, относительное изменение  $\delta t/t \approx +2\delta d/d$  в оценках возраста. Использование расстояний, измеренных для 9 шаровых скоплений спутником Hipparcos, приводит к оценке возраста Галактики<sup>152)</sup>  $13,2 \pm 2,0$  млрд лет.

В связи с этими значениями возраста возникает одна проблема в наиболее популярной космологической модели — модели с  $\Omega_m = 1$  и отсутствием энергии вакуума. В этом случае возраст Вселенной составляет

$$t_0 = \frac{2}{3H_0} = 9,3 \left( \frac{70 \text{ (км/с)/Мпк}}{H_0} \right) \text{ млрд лет,}$$

что делает Вселенную несколько более молодой по сравнению со старейшими объектами нашей Галактики, хотя и в пределах нескольких стандартных отклонений. Включение постоянной энергии вакуума позволяет обойти эту проблему; как упоминалось в разд. 1.5, если бы во Вселенной больше ничего не было, мы бы имели  $a(t) \propto \exp(Ht)$  — и возраст Вселенной был бы бесконечным. Как мы видели в разд. 1.6, соотношение «расстояние — красное смещение» для сверхновых указывает на то, что в настоящий момент энергия вакуума примерно вдвое превышает энергию материи, что приводит к значению возраста, значительно превышающему  $2/(3H_0)$ :

$$t_0 = 13,4_{-1,0}^{+1,3} \left( \frac{70 \text{ (км/с)/Мпк}}{H_0} \right) \text{ млрд лет.}$$

Это устраняет опасный конфликт *при условии*, что шаровые скопления в нашей Галактике не намного моложе самой Вселенной. В действительности на данный момент имеется поистине впечатляющее соответствие между возрастом самых старых звезд и звездных скоплений, с одной стороны, и возрастом Вселенной, рассчитанным исходя из значений  $H_0$ ,  $\Omega_m$  и  $\Omega_\Lambda$ , которые получены из соотношения между расстоянием и красным смещением, — с другой. Как мы увидим в разд. 7.2, эти вычисления для значения возраста прекрасно согласуются также с возрастом, вычисленным исходя из параметров, которые измерены в ходе наблюдений анизотропии реликтового излучения.

<sup>150)</sup> См. ссылки в B. Chaboyer, *Phys. Rep.* **307**, 23 (1998) [astro-ph/9808200].

<sup>151)</sup> D. Schramm, *Critical Dialogues in Cosmology*, N. Turok, ed. (World Scientific, Singapore, 1997): 81.

<sup>152)</sup> E. Carretta, R. G. Gratton, G. Clementini, and F. F. Pecci, *Astrophys. J.* **533**, 215 (2000) [astro-ph/9902086].

До сих пор в этом разделе мы рассматривали только возраст нашей собственной Галактики в настоящий момент времени. Помимо этого есть возможность оценить возраст других галактик с большими красными смещениями в тот момент времени в прошлом, когда свет, который мы сейчас наблюдаем, покинул эти галактики. Разумеется, мы не в состоянии различить отдельные звезды или шаровые скопления в этих галактиках, однако спектр самой галактики дает правильное представление о ее возрасте. Для того чтобы мы могли отделить влияние металличности, рассеяния и т. п., нам нужен весь спектр, но, грубо говоря, чем более красной является галактика, тем большее количество ярких голубых звезд в ней покинуло главную последовательность, а значит, тем больше ее возраст. Таким образом было найдено<sup>153)</sup>, что радиогалактики 53W091 ( $z = 1,55$ ) и 53W069 ( $z = 1,43$ ) имеют возраст 3,5 и от 3 до 4 млрд лет соответственно. Это дает нам полезную информацию о нижней грани энергии вакуума. В модели с нерелятивистским веществом и постоянной энергией вакуума возраст Вселенной в момент испускания этого света, который в настоящий момент наблюдается с красным смещением  $z$ , задается формулой (1.5.42) в виде:

$$t(z) = \frac{1}{H_0} \int_0^{1/(1+z)} \frac{dx}{x \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K x^{-2} + \Omega_m x^{-3} + \Omega_i x^{-4}}}. \quad (1.8.2)$$

Любая наблюдаемая галактика с красным смещением  $z$  должна иметь в момент испускания света возраст меньше этого. К примеру, в плоской вселенной с  $\Omega_K = \Omega_i = 0$  и, следовательно,  $\Omega_m = 1 - \Omega_\Lambda$ , существование галактики с  $z = 1,55$  и возрастом  $\simeq 3,5$  млрд лет задает для  $\Omega_\Lambda$  нижнюю грань<sup>154)</sup> около 0,6 при  $H_0 = 70$  (км/с)/Мпк.

В конечном итоге точность этих расчетов может стать достаточно хорошей для того, чтобы позволить нам определить по меньшей мере зависимость красного смещения от возраста Вселенной. Разумеется, галактики сформировались в разные моменты истории Вселенной, так что возраст любой отдельной галактики не дает нам возможности сделать заключение о возрасте Вселенной в тот момент, когда наблюдаемый нами свет покинул эту галактику. Однако однородность Вселенной подразумевает, что *распределение времен формирования* на космической шкале времени для любого набора галактик будет одним и тем же в любой точке Вселенной. Из различий в распределении возрастов при разных красных смещениях для подходящего вида галактик мы можем вывести разницу возраста Вселенной  $t$  при этих красных смещениях. Для объектов, испустивших свет, когда возраст Вселенной

<sup>153)</sup> J. S. Dunlop et al., *Nature* **381**, 581 (1996); J. S. Dunlop, в *The Most Distant Radio Galaxies — KNAW Colloquium, Amsterdam, October 1997*, eds. Best et al. [astro-ph/9801114].

<sup>154)</sup> L. M. Krauss, *Astrophys. J.* **489**, 486 (1997); J. S. Alcaniz and J. A. S. Lima, *Astrophys. J.* **521**, L87 (1999) [astro-ph/9902298].

равнялся  $t$ , масштабный фактор Робертсона—Уокера  $a(t)$  связан с наблюдаемым в настоящий момент красным смещением объекта  $z(t)$  соотношением  $1 + z(t) = a(t_0)/a(t)$ , так что  $\dot{z} = -H(t)(1 + z)$ . Чтобы вычислить  $\ddot{z}$ , заметим, что для  $K = 0$ ,  $H^2(t) = 8\pi G\rho(t)/3$  и  $\dot{\rho} = -3H(\rho + p)$ ,

$$\dot{H}(t) = -4\pi G(\rho(t) + p(t)). \quad (1.8.3)$$

Отсюда при  $K = 0$

$$\ddot{z} = \frac{\dot{z}^2}{1+z} \left( \frac{5}{2} + \frac{3p}{2\rho} \right). \quad (1.8.4)$$

Таким образом, измерение разницы  $t$  при разнообразных значениях разницы в красном смещении может позволить получить отношение  $p/\rho$  в различные моменты прошлой истории Вселенной<sup>155)</sup>.

## 1.9

### Массы

Усредненные по теореме вириала кластеры галактик:  $\Omega_m$  • Рентгеновская светимость кластеров галактик:  $\Omega_b/\Omega_m$

В разд. 1.6 мы видели, что наблюдаемая зависимость фотометрического расстояния от красного смещения предполагает, что доля  $\Omega_m$  критической плотности, обеспечивающая нерелятивистским веществом, составляет примерно 30 %. В этом разделе мы рассмотрим другие независимые способы измерения  $\Omega_m$ .

#### A. Вириализованные скопления галактик

Классический подход<sup>156)</sup> к измерению  $\Omega_m$  — использование теоремы вириала для оценки масс различных скоплений галактик, вычисление среднего отношения массы к абсолютной светимости и использование наблюдений полной светимости неба для оценки общей плотности массы в предположении, что отношение «масса—свет» для скоплений галактик типична для Вселенной в целом.

Чтобы вывести теорему вириала, рассмотрим нерелятивистскую гравитационно связанный систему точечных масс  $m_n$  (галактик, звезд, отдельных частиц) и их положения  $X_n$  относительно центра масс системы (в обычной декартовой системе координат). Уравнения движения имеют вид:

$$m_n \ddot{X}_n^i = -\frac{\partial V}{\partial X_n^i}, \quad (1.9.1)$$

<sup>155)</sup> R. Jimenez and A. Loeb, *Astrophys. J.* **573**, 37 (2002) [astro-ph/0106145].

<sup>156)</sup> F. Zwicky, *Astrophys. J.* **86**, 217 (1937); J. H. Oort, *La Structure et l'Evolution de l'Univers* (Institut International de Physique Solvay, R. Stoops, Brussels, 1958): 163.

так потенциальная энергия системы есть

$$V = -\frac{1}{2} \sum_{n \neq l} \frac{G m_n m_l}{|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}_l|}. \quad (1.9.2)$$

Умножение уравнения (1.9.1) на  $X_n^i$  и суммирование по  $n$  и  $i$  дает

$$-\sum_n X_n^i \frac{\partial V}{\partial X_n^i} = \sum_n m_n \mathbf{X}_n \cdot \ddot{\mathbf{X}}_n = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \sum_n m_n \mathbf{X}_n^2 - 2T, \quad (1.9.3)$$

где  $T$  — внутренняя кинетическая энергия (не учитывающая какое бы то ни было движение центра масс):

$$T = \frac{1}{2} \sum_n m_n \dot{\mathbf{X}}_n^2. \quad (1.9.4)$$

Предположим, что эта система достигла состояния равновесия («стала вирIALIZованной»), так что хотя отдельные массы продолжают двигаться, дальнейшей статистической эволюции не происходит, и в частности

$$0 = \frac{d^2}{dt^2} \sum_n m_n \mathbf{X}_n^2. \quad (1.9.5)$$

---

Вот почему важно указать, что  $\mathbf{X}_n$  отсчитываются относительно центра масс; в противном случае движение скопления в целом добавило бы к сумме член, пропорциональный  $t^2$ , и уравнение (1.9.5) стало бы неверным.

---

Однако в этих координатах  $V$  имеет порядок  $-1$ , так что левая сторона уравнения (1.9.3) — просто  $V^{157)}$ , что приводит нас к *теореме вириала*:

$$2T + V = 0. \quad (1.9.6)$$

Мы можем записать  $T$  и  $V$  в виде

$$T = \frac{1}{2} M \langle v^2 \rangle, \quad V = -\frac{1}{2} GM^2 \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle, \quad (1.9.7)$$

где  $\langle v^2 \rangle$  — средневзвешенный (по массе) квадрат скорости относительно центра масс,  $\langle 1/r \rangle$  — среднее обратное расстояние, а  $M = \sum_n m_n$  — суммарная масса системы. Тогда уравнение (1.9.6) дает нам формулу вириала для  $M$ :

$$M = \frac{2\langle v^2 \rangle}{G\langle 1/r \rangle}. \quad (1.9.8)$$

---

<sup>157)</sup> Данное утверждение автора нуждается в пояснении. Речь идет о том, что  $V(\mathbf{X}_n)$  — однородная функция степени однородности  $-1$  и в силу теоремы Эйлера

$$\sum_n x_n^i \frac{\partial V}{\partial x_n^i} = -V.$$

Отсюда из (1.9.3) и следует (1.9.6). — Прим. ред. перев.

Эти выкладки неприменимы к нерегулярным скоплениям галактик, вроде близкого к нам скопления в созвездии Девы. Скопления вроде этого не пришли к конфигурации, для которой выполняется условие (1.9.5), и потому, вероятно, не подчиняются теореме вириала. С другой стороны, теорема вириала, по-видимому, применима (по крайней мере приближенно) к другим (регулярным) скоплениям галактик — вроде скопления Волос Вероники, которое представляется более или менее сферическим. В соответствии с общими принципами статистического равновесия можно ожидать, что среднеквадратичная дисперсия скоростей  $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$  для доминирующих масс в таких скоплениях будет равна дисперсии скоростей видимых галактик в скоплении, которую можно получить из разброса их доплеровских сдвигов, а также дисперсии скоростей ионизированного межгалактического газа в скоплении, которую с наступлением эры рентгеновской астрономии можно измерить на основе рентгеновского спектра газа. Значения  $\langle v^2 \rangle$ , полученные таким образом, не зависят от шкалы расстояний. С другой стороны, значения  $\langle 1/r \rangle$  получаются из угловых расстояний: истинное поперечное собственное расстояние  $d$  выражается в терминах углового расстояния  $\theta$  как  $d = \theta d_y$ , где  $d_y$  — расстояние по угловому диаметру (1.4.11). Для скоплений с  $z \ll 1$  формулы (1.4.9) и (1.4.12) дают  $d_y \simeq z/H_0$ , так что  $d \simeq \theta z/H_0$ . Тем самым оценочное значение  $\langle 1/r \rangle$  для скоплений галактик при  $z \ll 1$  будет вести себя как  $H_0$ , а значения  $M$ , выведенные из (1.9.8), — как  $1/H_0$ . Для абсолютной светимости  $L$  скопления галактик с красным смещением  $z$  и видимой светимостью  $\ell$  при  $z \ll 1$  соотношения (1.4.2) и (1.4.9) дают  $L = 4\pi z^2 \ell / H_0$ , так что значения  $L$  ведут себя как  $H_0^{-2}$ , и в итоге полученное таким образом отношение «масса—свет» ведет себя как  $H_0^{-1}/H_0^{-2} = H_0$ .

Оценки  $M/L$  для богатых скоплений в общем и целом дают результат порядка от 200 до  $300 h M_\odot / L_\odot$ , где  $h$  — постоянная Хаббла в единицах  $100 \text{ (км/с)}/\text{Мпк}$ , а  $M_\odot$  и  $L_\odot$  — масса и абсолютная светимость Солнца. Например, проведенное в 1996 г. исследование<sup>158)</sup> 16 скоплений галактик с красным смещением между 0,17 и 0,55 привело к результату  $M/L = (295 \pm 53) h M_\odot / L_\odot$ . Позже часть исследователей, входивших в эту группу<sup>159)</sup>, сделали поправки на различные искажения и получили  $M/L = (213 \pm 59) h M_\odot / L_\odot$ . Недавнее применение<sup>160)</sup> теоремы вириала к 459 скоплениям привело к значению  $M/L \simeq 348 h M_\odot / L_\odot$ .

Все эти значения  $M/L$  для скоплений галактик заметно больше значения отношения «масса—свет» для видимых областей отдельных галактик<sup>161)</sup>.

<sup>158)</sup> R. G. Carlberg et al., *Astrophys. J.* **462**, 32 (1996).

<sup>159)</sup> R. G. Carlberg, H. K. C. Yee, and E. Ellingson, *Astrophys. J.* **478**, 462 (1997).

<sup>160)</sup> H. Andernach, M. Plionis, O. López-Cruz, E. Tago, and S. Basilakos, *Astron. Soc. Pacific Conf. Ser.* **329**, 289 (2005) [astro-ph/0407098].

<sup>161)</sup> Этот вывод впервые был сделан в исследовании скопления Волос Вероники: F. Zwicky, *Helv. Phys. Acta* **6**, 110 (1933).

(Отношения «масса—свет» для отдельных эллиптических галактик можно измерить, взяв в качестве  $\sqrt{\langle v^2 \rangle}$  дисперсию скоростей звезд, входящих в состав галактики; по большей части это приводит к значению отношения «масса—свет» в диапазоне<sup>162)</sup> от 10 до  $20hM_\odot/L_\odot$ . Поскольку источником всего видимого света скопления являются входящие в состав скопления галактики, мы вынуждены сделать вывод, что большая часть массы скоплений галактик находится на какую-то ее несветящуюся разновидность — либо во внешних несветящихся частях галактик, либо в межгалактическом пространстве. Выдвигались доводы в пользу того, что эта масса находится в окружающих галактики огромных темных гало, которые у ярких галактик простираются на 200 кпк<sup>163)</sup>. Природа этой темной материи — нерешенная проблема космологии, к обсуждению которой мы будем часто возвращаться.

К слову, большое значение  $M/L$ , к которому приводит теорема вириала для эллиптических галактик, свидетельствует о том, что большая часть массы этих галактик заключена не в звездах, сопоставимых по яркости с Солнцем. Для спиральных галактик оценить  $M/L$  сложнее, однако благодаря работе Веры Рубин и др.<sup>164)</sup> стало ясно, что большая часть их массы также не имеет отношения к ярко светящимся звездам<sup>165)</sup>. Если бы основная часть массы спиральной галактики находилась в ее центральных ярких областях, то скорость обращения звезд за пределами такой области подчинялась бы закону Кеплера:  $v \propto r^{-1/2}$ . Однако вместо этого мы наблюдаем, что вне центральной области  $v$  в грубом приближении постоянна, даже за пределами видимого диска галактики, — а это тот эффект, которого следовало бы ожидать для сферического гало с плотностью массы, спадающей как  $1/r^2$ , и в этом случае основная часть массы галактики принадлежит темным внешним частям гало. Отсутствие гравитационного микролинзирования в гало (обсуждаемого в разд. 9.2) служит некоторым свидетельством в пользу того, что эта масса не обязательно сосредоточена в темных звездах, однако при этом по-прежнему остается возможность, что большая часть галактического вещества относится к барионной материи. Мы не станем углубляться в этот вопрос, поскольку в формировании галактик задействованы процессы охлаждения, требующие наличия барионной материи такого же типа, как и та, что заключена в звездах, так что мы можем лишь ожидать, что значение  $M/L$  для галактик будет близко к его значению для Вселенной в целом, если вещество Вселенной является главным образом барионным.

Используя для определения плотности массы Вселенной значение  $M/L$ , полученное из теоремы вириала для скоплений галактик, мы не можем огра-

<sup>162)</sup> T. R. Lauer, *Astrophys. J.* **292**, 104 (1985); J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics* (Princeton University Press, Princeton, 1987).

<sup>163)</sup> N. A. Bahcall, L. M. Lubin, and V. Dorman, *Astrophys. J.* **447**, L81 (1995).

<sup>164)</sup> V. C. Rubin, W. K. Ford, and N. Thonnard, *Astrophys. J.* **225**, L107; **238**, 471 (1980).

<sup>165)</sup> M. Persic and P. Salucci, *Astrophys. J. Supp.* **99**, 501 (1995); M. Persic, P. Salucci, and F. Stel, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **281**, 27P (1996).

ничиться светимостью на единицу объема скопления, поскольку источником большей части света Вселенной являются «полевые» галактики, не входящие в состав скоплений. Вместо этого, предположив, что полевым галактикам сопутствует такое же количество темной материи, как и галактикам в составе скоплений (что обосновывается в работе из сноски 163), мы можем найти  $\Omega_m$ , используя значение  $M/L$  для скоплений вместе с оценочным значением плотности полной светимости  $\mathcal{L}$ , оценив полную плотность массы как

$$\rho_m = \left( \frac{M}{L} \right) \mathcal{L}. \quad (1.9.9)$$

Поскольку значения абсолютной светимости, полученные из значений видимой светимости и красных смещений, ведут себя как  $H_0^{-2}$ , а расстояния, выведенные из красных смещений, ведут себя как  $H_0^{-1}$ , то плотность полной светимости Вселенной, вычисляемая путем добавления абсолютной светимости галактик на единицу объема, ведет себя как  $H_0^{-2}/(H_0^{-1})^3 = H_0$ . Например, оценки<sup>166)</sup>, сделанные в 1999 г., дают  $\mathcal{L} = 2 \pm 0,2 \times 10^8 h L_\odot \text{ Мпк}^{-3}$ . Для вычисления  $\Omega_m$  удобно записать это как отношение критической плотности массы к плотности светимости:

$$\frac{\rho_{0,\text{крит}}}{\mathcal{L}} = \frac{(1390 \pm 140) h M_\odot}{L_\odot}.$$

(Здесь мы использовали значения  $M_\odot = 1,989 \times 10^{33}$  г,  $1 \text{ Мпк} = 3,0857 \times 10^{24}$  см и  $\rho_{0,\text{крит}} = 1,878 \times 10^{-29} h^2 \text{ г/см}^3$ .) Принимая  $M/L = (213 \pm 53) h M_\odot / L_\odot$ , получаем

$$\Omega_m = \frac{M/L}{\rho_{0,\text{крит}}/\mathcal{L}} = 0,15 \pm 0,02 \pm 0,04,$$

где источником первой погрешности является значение  $\mathcal{L}$ , а второй — значение  $M/L$ . Важно отметить, что этот результат не зависит от значения постоянной Хаббла, поскольку и  $\mathcal{L} M/L$ , и  $\rho_{0,\text{крит}}$  ведут себя как  $H_0^2$ .

Эта оценка значения  $\Omega_m$  несколько меньше той, которая получена из соотношения «красное смещение — светимость» для сверхновых и из анизотропии реликтового излучения, которая будет обсуждаться в разд. 2.6 и гл. 7. Тем не менее в одном все эти оценки сходятся:  $\Omega_m$  определенно меньше единицы.

## B. Рентгеновская светимость скоплений галактик

Состоит ли темная материя скоплений галактик из обычных ядер и электронов? Мы можем найти отношение доли  $\Omega_b$  критической плотности, обеспечиваемой барионным веществом (ядрами и электронами), к доле  $\Omega_m$ , отвечающей за все виды нерелятивистского вещества, изучая рентгеновское излучение скоплений галактик, поскольку рентгеновские лучи порождаются

<sup>166)</sup> S. Folkes et al., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **308**, 459 (1999); M. L. Blanton et al., *Astron. J.* **121**, 2358 (2001).

только столкновением обычных барионных частиц. Поскольку в такие процессы столкновения вовлечены пары частиц барионного вещества, абсолютная рентгеновская светимость на единицу собственного объема имеет вид

$$\mathcal{L}_p = \Lambda(T_b) \rho_b^2, \quad (1.9.10)$$

где  $T_b$  и  $\rho_b$  — температура и плотность барионного вещества, а  $\Lambda(T)$  — некоторая известная функция температуры и фундаментальных постоянных. Барионная плотность удовлетворяет уравнению гидростатического равновесия, которое (в предположении сферической симметрии) вытекает из баланса давления и гравитационных сил, действующих на барионы в небольшой области площадью  $A$  между радиусами  $r$  и  $r + \delta r$ :

$$A(p_b(r + \delta r) - p_b(r)) = -\frac{A \delta r \rho_b(r) G}{r^2} \int_0^r 4\pi r'^2 \rho_m(r') dr',$$

или, сокращая множители  $A$  и  $\delta r$  и используя уравнение идеального газа  $p_b = k_B T_b \rho_b / m_b$ ,

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{k_B T_b(r) \rho_b(r)}{m_b} \right) = -\frac{G \rho_b(r)}{r^2} \int_0^r 4\pi r'^2 \rho_m(r') dr',$$

где  $\rho_m(r)$  — полная плотность массы,  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $m_b$  — характеристическая масса газа барионов, а  $r$  — собственное расстояние до центра скопления. Умножая на  $r^2 / \rho_b(r)$  и дифференцируя по  $r$ , получаем

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{r^2}{\rho_b(r)} \frac{d}{dr} \left( \frac{k_B T_b(r) \rho_b(r)}{m_b} \right) \right] = -4\pi G r^2 \rho_m(r). \quad (1.9.11)$$

Если мы предположим, что распределение скоростей частиц холодной темной материи (или любых частиц, преобладающих в темном межгалактическом веществе) изотропно (такое предположение нельзя назвать хорошо обоснованным), то такие же выкладки можно применить и к этим частицам, так что их плотность  $\rho_t = \rho_m - \rho_b$  будет удовлетворять нелинейному дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{r^2}{\rho_t(r)} \frac{d}{dr} \left( \frac{k_B T_t(r) \rho_t(r)}{m_t} \right) \right] = -4\pi G r^2 \rho_m(r), \quad (1.9.12)$$

где  $T_t(r)$  и  $m_t$  — температура и масса частиц темной материи. Располагая хорошими данными о рентгеновском излучении и зная расстояние до источника, можно было бы измерить плотность рентгеновской светимости  $\mathcal{L}_p(r)$  и (используя рентгеновский спектр) температуру барионов  $T_b(r)$  в каждой точке скопления, а затем применить уравнение (1.9.10), чтобы найти плотность барионов  $\rho_b(r)$  в каждой точке, и уравнение (1.9.11), чтобы найти полную плотность массы в каждой точке. Затем можно было бы вычислить

относительную плотность барионов  $\rho_b/\rho_m$  и, при наличии интереса, использовать уравнение (1.9.12), чтобы рассчитать дисперсию скоростей  $k_B T_t(r)/m_t$  для темной материи.

На практике обычно необходима некоторая модель скопления. В простейшей модели рассматривается *изотермальная сфера*: принимается, что температуры  $T_b$  и  $T_t$  не зависят от положения — по крайней мере около центра скопления, откуда приходит большая часть рентгеновского излучения. Часто предполагается также, что за концентрацию темной материи отвечают те же гравитационные эффекты, что и за концентрацию горячего межгалактического газа в скоплении, так что плотности  $\rho_b(r)$  и  $\rho_m(r)$  одинаковы с точностью до постоянного множителя, который представляет собой отношение  $\Omega_b/\Omega_m$  вклада барионов ко всему нерелятивистскому веществу в масштабе Вселенной.

---

Считается, что эти гравитационные эффекты — так называемая бурная релаксация<sup>167)</sup>, вызываемая тесным сближением структур вещества, гравитационное притяжение которых не может быть представлено как взаимодействие с гладким усредненным гравитационным полем. Конденсация галактик из этой смеси требует включения совершенно иных охлаждающих процессов, которые способны оказать влияние только на барионный газ, благодаря чему для галактик снижается относительная доля темной материи и отношение массы к свету.

---

Сопоставление уравнений (1.9.11) и (1.9.12) показывает, что  $\rho_b(r)$  и  $\rho_t(r)$  взаимно пропорциональны, а значит, пропорциональны и  $\rho_m(r)$ , если дисперсии скоростей для темной материи и горячего межгалактического газа одинаковы:

$$\frac{k_B T_b}{m_b} = \frac{k_B T_t}{m_t} \equiv \sigma^2. \quad (1.9.13)$$

Из уравнений (1.9.11) и (1.9.12) следует, что

$$\rho_m(r) = \rho_m(0)F\left(\frac{r}{r_0}\right), \quad (1.9.14)$$

где  $F(0) \equiv 1$ ;  $r_0$  — радиус ядра (скопления), который традиционно определяют как

$$r_0 \equiv \sqrt{\frac{9\sigma^2}{4\pi G\rho_m(0)}}, \quad (1.9.15)$$

а  $F(u)$  — функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{du} \left( \frac{u^2}{F(u)} \frac{dF(u)}{du} \right) = -9u^2 F(u). \quad (1.9.16)$$

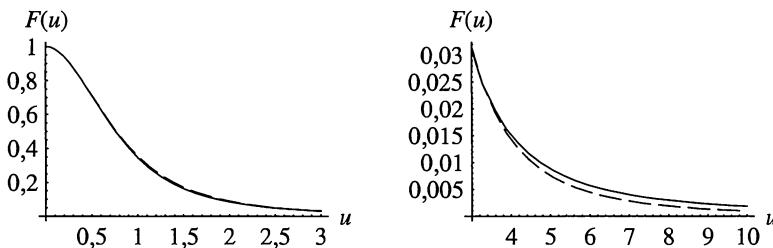
---

<sup>167)</sup> D. Lynden-Bell, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **136**, 101 (1967).

Мы должны наложить также граничное условие, требующее аналитичности  $\rho_m$  по координатам  $X$  в точке  $X = 0$ , что для функции, зависящей только от  $r$ , означает, что в окрестности  $r = 0$  она разлагается в степенной ряд по  $r^2$ , так что  $F(u)$  в окрестности  $u = 0$  может быть представлена степенным рядом по  $u^2$ :  $F(u) = 1 + O(u^2)$ . При этом граничном условии уравнение (1.9.16) определяет единственную функцию<sup>168)</sup>, которая при малых  $u$  аппроксимируется выражением<sup>169)</sup>

$$F(u) \simeq (1 + u^2)^{-3/2}. \quad (1.9.17)$$

Решение уравнения (1.9.16) вместе с аппроксимацией (1.9.17) показано на рис. 1.7.



**Рис. 1.7.** Решение уравнения (1.9.16) (сплошная кривая) и его приближение (1.9.17) (пунктирная кривая). При малых значениях  $u$  на графике слева эти две кривые практически неразличимы

При больших  $u$  функция  $F(u)$  приближается к точному решению  $2/(9u^2)$ . Если взять ее буквально в таком виде, интеграл для полной массы будет расходиться при больших  $r$ , и это говорит о том, что допущение о постоянстве  $\sigma^2$  перестает быть справедливым при некотором достаточно большом радиусе. Часто функцию  $F(u)$  выбирают в виде<sup>170)</sup>

$$F(u) = (1 + u^2)^{-3\beta/2},$$

где  $\beta$  — показатель степени порядка единицы.

Кроме того, уравнение (1.9.11) имеет решение

$$\rho_6(r) = \rho_6(0) F\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (1.9.18)$$

с той же самой функцией  $F(u)$  и тем же радиусом ядра  $r_0$ . Мы можем измерить радиус ядра по рентгеновскому изображению скопления, а  $\sigma^2$  определить из рентгеновского спектра, что позволяет использовать уравнение (1.9.15)

<sup>168)</sup> Таблицу значений функции  $F(u)$  можно найти, например, в J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics* (Princeton University, Princeton, 1987): Table 4.1.

<sup>169)</sup> I. R. King, *Astron. J.* **67**, 471 (1962).

<sup>170)</sup> A. Cavaliere and R. Fusco-Fermiano, *Astron. Astrophys.* **49**, 137 (1976).

для определения плотности  $\rho_m(0)$  всего нерелятивистского вещества в центре (скопления). Затем из полной рентгеновской светимости, которая при указанных приближениях (и с использованием (1.9.10)) равна

$$L_p \equiv \int d^3x \mathcal{L}_p = 4\pi\Lambda(T_6)r_0^3\rho_b(0)^2\mathcal{I}, \quad (1.9.19)$$

где

$$\mathcal{I} \equiv \int_0^\infty u^2 F^2(u) du, \quad (1.9.20)$$

можно найти плотность  $\rho_b(0)$  барионного вещества в центре (скопления). Хотя решение уравнения (1.9.16) приводит к бесконечному значению массы, оно дает конечную полную рентгеновскую светимость с  $\mathcal{I} = 0,1961$ . (Приближение (1.9.17) привело бы к значению  $\mathcal{I} = \pi/16 = 0,1963$ .)

Для скопления с красным смещением  $z$  радиус ядра  $r_0$ , выведенный из наблюдений углового размера скопления, будет пропорционален расстоянию по угловому диаметру  $d_y(z)$ , тогда как температура и дисперсия скоростей, полученные из рентгеновского спектра, не зависят от предполагаемого расстояния. Следовательно, значение полной плотности вещества  $\rho_m(0)$  в центре, даваемое уравнением (1.9.15), будет пропорционально  $1/d_y^2(z)$ . С другой стороны, абсолютная рентгеновская светимость  $L_p$ , полученная из видимой рентгеновской светимости, будет (как и все абсолютные светимости) пропорциональна предполагаемому значению  $d_\Phi^2(z)$  — квадрату фотометрического расстояния, так что при  $r_0 \propto d_y$  плотность барионов  $\rho_b(0)$  в центре, даваемая уравнением (1.9.19), окажется пропорциональной  $[d_\Phi^2(z)/d_y^3(z)]^{1/2}$ . Таким образом, зависимость значения отношения плотностей в центре, полученного из наблюдений за данным скоплением с красным смещением  $z$ , от предполагаемого расстояния до скопления будет иметь вид

$$\frac{\rho_b(0)}{\rho_m(0)} \propto d_\Phi(z)d_y^{1/2}(z) = (1+z)^2d_y^{3/2}(z), \quad (1.9.21)$$

где мы использовали соотношение (1.4.12) между фотометрическим расстоянием и расстоянием по угловому диаметру.

При  $z \ll 1$  мы имеем  $d_y(z) \simeq d_\Phi(z) \simeq z/H_0$ , и, в соответствии с формулой (1.9.21), значение  $\rho_b(0)/\rho_m(0)$ , полученное из наблюдений за скоплениями с малыми красными смещениями, будет пропорционально предполагаемому значению  $H_0^{-3/2}$ . Считается, что большая часть барионной массы скопления галактик относится к горячему газу за пределами галактик, и если бы мы допустили, что отношение этой массы к полной массе является таким же, как для Вселенной в целом<sup>171)</sup>, то мы должны были бы прийти к одному

<sup>171)</sup> Эта точка зрения обоснована в работе S. D. M. White, J. F. Navarro, A. E. Evrard, and C. S. Frenk, *Nature* **366**, 429 (1993). Вычисления, подкрепляющие это предположение, приведены в разд. 8.3.

и тому же значению  $\rho_b(0)/\rho_m(0)$ , равному  $\Omega_b/\Omega_m$ , для всех скоплений, вне зависимости от того, какое значение  $H_0$  мы предполагаем, однако это значение  $\Omega_b/\Omega_m$  будет пропорционально предполагаемому значению  $H_0^{-3/2}$ . Например, Шиндлер<sup>172)</sup> цитирует ряд исследований, которые дают для  $\rho_b(0)/\rho_m(0)$  значения 0,14, 0,11, 0,12 и 0,12 при  $H_0 = 65$  (км/с)/Мпк; если мы возьмем среднее значение 0,12 в качестве величины  $\Omega_b/\Omega_m$  для Вселенной при  $H_0 = 65$  (км/с)/Мпк, то для общей постоянной Хаббла получим

$$\frac{\Omega_b}{\Omega_m} \simeq 0,06h^{-3/2}, \quad (1.9.22)$$

где  $h$ , как обычно, — постоянная Хаббла в единицах 100 (км/с)/Мпк. Отсюда мы можем с большой долей уверенности сделать вывод, что *только небольшая часть массы скоплений галактик относится к барионной форме материи, способной испускать рентгеновское излучение*.

С другой стороны, изучая скопления в диапазоне красных смещений, охватывающем не только малые значения, мы не получим единого значения  $\rho_b(0)/\rho_m(0)$ , если не ограничимся значениями  $d_y(z)$ , правильным образом зависящими от  $z$ . Как отмечалось в разд. 1.6, наблюдения скоплений были использованы в этом ключе, чтобы получить зависимость  $d_y$  от  $z$ .

Следует упомянуть о том, что компьютерное моделирование, в котором скопления галактик рассматриваются как сосредоточение нестолкивающихся частиц, не выявляет свидетельств в пользу существования центрального ядра<sup>173)</sup>, но указывает на то, что плотность темной материи при малых расстояниях  $r$  от центра должна расходиться как  $r^{-1}$  или  $r^{-3/2}$ . С другой стороны, было показано<sup>174)</sup>, что плотность барионного газа в состоянии гидростатического равновесия в гравитационном поле распределенной подобным образом темной материи показывает наличие ядра, предсказываемого уравнением (1.9.18). В любом случае распределение плотности темной материи и барионного газа будет одинаковым на расстояниях от центра, превышающих  $r_0$ .

Как мы увидим в разд. 3.2, можно вывести значение  $\Omega_b h^2$  из данных о распространенности дейтерия и других легких изотопов, что вместе с формулой (1.9.22) позволяет получить значение  $\Omega_m h^{1/2}$ . Есть еще несколько других методов оценки  $\Omega_m$  или  $\Omega_m h^2$ , которые мы обсудим в разных местах книги: использование гравитационных линз (разд. 9.3), эффект Сюняева—Зельдовича (разд. 2.5) и анизотропия реликтового излучения (разд. 2.6 и 7.2);

<sup>172)</sup> S. Schindler, *Space Science Reviews* **100**, 299 (2002), ed. P. Jetzer, K. Pretzl, and R. von Steiger (Kluwer) [astro-ph/0107028].

<sup>173)</sup> J. F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. M. White, *Astrophys. J.* **462**, 563 (1996) [astro-ph/9508025]; **490**, 493 (1997) [astro-ph/9610188]; T. Fukushige and J. Makino, *Astrophys. J.* **477**, L9 (1997) [astro-ph/9610005]; B. Moore et al., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **499**, L5 (1998).

<sup>174)</sup> N. Makino, S. Sasaki, and Y. Suto, *Astrophys. J.* **497**, 555 (1998). См. также Y. Suto, S. Sasaki, and M. Makino, *Astrophys. J.* **509**, 544 (1998); E. Komatsu and U. Seljak, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **327**, 1353 (2001).

последний метод позволяет получить также значение  $\Omega_b h^2$ . В дополнение к этому, есть методы<sup>175)</sup>, основанные на эволюции скоплений галактик, космических течениях, корреляции скоплений и т. п., которые тесно связаны с подробностями динамических теорий формирования структуры Вселенной.

## 1.10

### Межгалактическое поглощение

- Оптическая глубина • Резонансное поглощение • Поглощение на длине волны 21 см**
- **Поглощение на линии Лайман- $\alpha$  • Владина Ганна—Петерсона • Анализ Алкока—Пачинского**

Некоторая часть того космического газа нуклонов и электронов, при конденсации которого возникли первые галактики и скопления галактик, по-прежнему должна находиться в межгалактическом пространстве. Атомы или молекулы этого газа можно обнаружить по резонансному поглощению света или радиоволн, идущих от удаленных галактик или квазаров, но считается, что большая часть этого газа была ионизирована светом первого поколения давно исчезнувших горячих массивных звезд, которые иногда называют звездами популяции III. Похоже, что некоторые квазары сформировались до завершения этой ионизации, что дает нам возможность наблюдать межгалактический газ благодаря резонансному поглощению света от этих очень удаленных квазаров.

Допустим, что атомные переходы в удаленном источнике порождают луч света частоты  $\nu_1$ , покидающий источник в момент времени  $t_1$  и прибывающий на Землю с частотой  $\nu_0$  в момент времени  $t_0$ . В момент времени  $t$  в ходе своего путешествия этот луч света благодаря красному смещению имеет частоту  $\nu_1 a(t_1)/a(t)$ , так что если межгалактическая среда поглощает свет частоты  $\nu$  с интенсивностью (относительно собственного времени)  $\Lambda(\nu, t)$  и при этом не испускает света, то интенсивность светового луча  $I(t)$  спадает в соответствии с уравнением

$$\dot{I}(t) = -\Lambda \left( \frac{\nu_1 a(t_1)}{a(t)}, t \right) I(t).$$

Однако если температура  $T(t)$  межгалактического газа отлична от нуля, то благодаря процессу индуцированного излучения к лучу света будут добавляться фотоны, причем скорость добавления фотонов описывается формулой

<sup>175)</sup> См. обзоры в N. A. Bahcall, *Astrophys. J.* **535**, 593 (2000) [astro-ph/0001076]; M. Turner, *Astrophys. J.* **576**, L101 (2002) [astro-ph/0106035]; S. Schindler, *op. cit.*; K. A. Olive, лекция, прочитанная в Институте передовых теоретических исследований в области физики элементарных частиц (Theoretical Advanced Study Institute on Elementary Particle Physics), Боулдер, июнь 2002 [astro-ph/0301505].

Эйнштейна<sup>176)</sup>  $\exp(-h\nu/(k_B T))\Lambda(\nu, t)$ , так что интенсивность света будет подчиняться уравнению

$$\dot{I}(t) = - \left[ 1 - \exp \left( - \frac{h\nu_1 a(t_1)}{k_B T(t)a(t)} \right) \right] \Lambda \left( \frac{\nu_1 a(t_1)}{a(t)}, t \right) I(t). \quad (1.10.1)$$

Тогда наблюдаемая с Земли интенсивность будет равна

$$I(t_0) = \exp(-\tau) I(t_1), \quad (1.10.2)$$

где  $\tau$  — оптическая глубина:

$$\tau = \int_{t_1}^{t_0} \left[ 1 - \exp \left( - \frac{h\nu_1 a(t_1)}{k_B T(t)a(t)} \right) \right] \Lambda \left( \frac{\nu_1 a(t_1)}{a(t)}, t \right) dt. \quad (1.10.3)$$

Скорость поглощения описывается формулой

$$\Lambda(\nu, t) = n(t)\sigma(\nu), \quad (1.10.4)$$

где  $\sigma(\nu)$  — сечение поглощения для частоты  $\nu$ , а  $n(t)$  — плотность числа поглощающих атомов (в расчете на собственный объем). Сечение поглощения часто имеет резкий пик на некоторой частоте  $\nu_p$ , так что поглощение происходит только в моменты времени, близкие к  $t_p$ , описываемому формулой

$$a(t_p) = \frac{\nu_1 a(t_1)}{\nu_p}. \quad (1.10.5)$$

Следовательно, оптическую глубину можно приближенно записать в виде

$$\tau \simeq n(t_p) \left[ 1 - \exp \left( - \frac{h\nu_p}{k_B T(t_p)} \right) \right] \int \sigma \left( \frac{\nu_1 a(t_1)}{a(t)} \right) dt.$$

Беря в качестве переменной интегрирования частоту вместо времени, мы можем записать это в виде

$$\tau \simeq n(t_p) \left[ 1 - \exp \left( - \frac{h\nu_p}{k_B T(t_p)} \right) \right] \left[ \frac{a(t_p)}{\dot{a}(t_p)} \right] \mathcal{I}_p, \quad (1.10.6)$$

где интеграл

$$\mathcal{I}_p \equiv \frac{1}{\nu_p} \int \sigma(\nu) d\nu \quad (1.10.7)$$

берется по небольшому диапазону частот, охватывающему линию поглощения. Единственный член формулы для  $\tau$ , зависящий от выбора космологической модели, — хаббловская скорость расширения  $\dot{a}(t_p)/a(t_p)$  в момент поглощения, для которой из соотношений (1.5.19) и (1.5.38) получаем

$$\frac{\dot{a}(t_p)}{a(t_p)} = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K(1+z_p)^2 + \Omega_m(1+z_p)^3 + \Omega_\text{u}(1+z_p)^4}, \quad (1.10.8)$$

---

<sup>176)</sup> A. Einstein, *Phys. Z.* **18**, 121 (1917).

где  $z_p = a(t_0)/a(t_p) - 1 = \nu_p/\nu_0 - 1$  — красное смещение в том месте, где происходит резонансное поглощение. Для источника с красным смещением  $z$  поглощение происходит в диапазоне наблюдаемых частот  $\nu_0 = \nu_1/(1+z)$ , который определяется из условия того, что определяемое соотношением (1.10.5) время  $t_p$  должно находиться между  $t_1$  и  $t_0$ :

$$\nu_p(1+z) \leq \nu_0 \leq \nu_p. \quad (1.10.9)$$

Так, в 1959 г. Филд<sup>177)</sup> предложил искать эффекты поглощения на радиочастотах для перехода на линии 21 см в атомах водорода, вызванные переходами между сверхтонкими состояниями с нулевым и единичным спином в  $1s$ -состоянии межгалактического водорода. В этом случае  $\nu_p = 1420$  МГц, так что в радиоспектре галактики Лебедь А с красным смещением  $z = 0,056$  должен наблюдаваться связанный с поглощением провал (1.10.9) между 1342 МГц и 1420 МГц. К сожалению, температура нейтрального водорода в межгалактическом пространстве значительно превышает  $h\nu_p/k_B = 0,068$  К, а потому оптическая глубина (1.10.6) подавляется множителем  $\simeq 0,068$  К/ $T(t_p)$ . Никаких признаков связанного с поглощением провала в спектре обнаружено не было. Можно надеяться, что в будущем новое поколение низкочастотных радиотелескопов с хорошим угловым разрешением откроет возможность использовать процессы излучения и поглощения на волне 21 см при больших красных смещениях для изучения как структурного роста, так и первичных возмущений плотности, которые послужили отправной точкой роста<sup>178)</sup>. Например, радиотелескоп LOFAR (Low Frequency ARray) к 2010 г. должен позволить исследовать излучение на длине волны 21 см от источников с красным смещением между 5 и 15 с хорошей чувствительностью и высоким угловым разрешением<sup>179)</sup>.

В настоящее время зондирование атомов межгалактического водорода гораздо лучше проводить путем исследования поглощения фотонов в переходе Лайман- $\alpha$  между основным  $1s$ -состоянием и возбужденным  $2p$ -состоянием — явление, известное как эффект Ганна—Петерсона<sup>180)</sup>. Резонансная частота этого перехода находится в ультрафиолетовом диапазоне,  $\nu_p = 2,47 \times 10^{15}$  Гц, что соответствует длине волны 1215 Å; однако для источников с красным смещением  $z > 1,5$  нижний край провала (1.10.9) на земной поверхности будет наблюдаваться на длине волны выше 3000 Å — в видимой или инфракрасной части спектра. В этом случае  $h\nu_p/k_B = 118\,000$  К, что, весьма вероятно, выше

<sup>177)</sup> G. Field, *Astrophys. J.* **129**, 525 (1959).

<sup>178)</sup> A. Loeb and M. Zaldarriaga, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 211301 (2004) [astro-ph/0312134]; S. Furlanetto, S. P. Oh, and F. Briggs, *Phys. Rep.* **433**, 181 (2006) [astro-ph/0608032].

<sup>179)</sup> H. J. A. Röttgering et al., *Cosmology, Galaxy Formation, and Astroparticle Physics on the Pathway to the SKA*, eds. H.-R. Klöckner et al. [astro-ph/0610596].

<sup>180)</sup> J. E. Gunn and B. A. Peterson, *Astrophys. J.* **142**, 1633 (1965). См. также I. S. Shklovsky, *Astron. Zh.* **41**, 408 (1964); P. A. G. Scheuer, *Nature* **207**, 963 (1965).

температуры межгалактической среды, и тогда множитель

$$1 - \exp\left(-\frac{h\nu_p}{k_B T(t_p)}\right)$$

в (1.10.6) можно принять равным единице. При этом интеграл (1.10.7) имеет значение  $4,5 \times 10^{-18} \text{ см}^2$ , так что соотношение (1.10.6) для оптической глубины над нижним краем провала поглощения (1.10.9) дает

$$\tau_{\nu_0=\nu_p/(1+z)} = \left( \frac{n(t_p)}{2,4h \times 10^{-11} \text{ см}^{-3}} \right) \times \\ \times (\Omega_\Lambda + \Omega_K(1+z)^2 + \Omega_m(1+z)^3 + \Omega_i(1+z)^4)^{-1/2}, \quad (1.10.10)$$

где  $h$ , как и прежде, постоянная Хаббла в единицах  $100 \text{ (км/с)/Мпк}$ . Например, если бы доля  $f$  барионов во Вселенной в момент времени, соответствующий  $z = 5$ , находилась в форме нейтральных атомов межгалактического водорода, и  $\Omega_b h^2 = 0,02$ , то плотность числа атомов водорода при  $z = 5$  была бы равной  $4,8f \times 10^{-5} \text{ см}^{-3}$ . Если взять  $h = 0,65$ ,  $\Omega_\Lambda = 0,7$ ,  $\Omega_m = 0,3$  и  $\Omega_K = \Omega_i = 0$ , то оптическая плотность (1.10.10) составила бы  $3,8f \times 10^5$ . Таким образом, при этих параметрах нейтральный межгалактический водород, составляющий долю барионного вещества  $f \gg 2,6 \times 10^{-6}$ , полностью блокировал бы любой свет от источников, расположенных далее чем  $z = 5$  с частотой выше линии Лайман- $\alpha$  с поправкой на красное смещение. Очевидно, эффект Ганна—Петерсона снабжает нас весьма чувствительным способом обнаружения нейтральных атомов водорода даже в малых пропорциях.

На протяжении многих лет поиски связанного с поглощением провала на линии Лайман- $\alpha$  не приводили к успеху. В спектрах квазаров обнаруживаются многочисленные линии поглощения Лайман- $\alpha$ , образующие то, что иногда называют «лесами Лайман- $\alpha$ », происхождение которых связывают с облаками нейтральных атомов водорода на линии взгляда, однако для квазаров вплоть до  $z \approx 5$  не было найдено никаких признаков общего подавления частот выше смещенной в красную сторону частоты Лайман- $\alpha^{181)}$ , к которому привело бы наличие даже малой доли  $f$  барионного вещества в форме нейтральных атомов водорода в межгалактическом пространстве. Затем в 2001 г. в спектре квазара SDSSp J103027.10+052455.0, открытого в ходе исследовательского проекта Sloan Digital Sky Survey, были обнаружены явные признаки полного подавления света в диапазоне длин волн от значения сразу под смещенной длиной волны Лайман- $\alpha$ ,  $8845 \text{ \AA}$ , вниз вплоть до  $8450 \text{ \AA}$ , указывающие на значительную долю  $f$  барионов в форме нейтральных атомов межгалактического водорода при красных смещениях выше<sup>182)</sup>  $8450/1215 - 1 = 5,95$  (см. рис. 1.8). Таким образом, красное смещение порядка 6 может отмечать

<sup>181)</sup> A. Songalia, E. Hu, L. Cowie, and R. McMahon, *Astrophys. J.* **525**, L5 (1999).

<sup>182)</sup> R. H. Becker et al., *Astron. J.* **122**, 2850 (2001) [astro-ph/0108097]. Сведения о поглощении нейтральным водородом при нескольких меньших красных смещениях см. в S. G. Djorgovski et al.,

конец «темных веков», в течение которых поглощение света нейтральными атомами водорода делало Вселенную непрозрачной для излучения с частотами выше частоты Лайман- $\alpha$ , сдвинутой на красное смещение. Дальнейшие свидетельства в пользу такого вывода найдены в спектрах интенсивных источников гамма-излучения, известных как гамма-барстера, при больших красных смещениях<sup>183)</sup>.

Это не означает, что весь или хотя бы почти весь водород Вселенной при  $z > 6$  находился в форме нейтральных атомов. Как мы видели, даже небольшая концентрация нейтрального водорода способна вызвать связанный с поглощением провал в спектре удаленных квазаров. В действительности, как мы узнаем из гл. 7, исследования реликтового излучения снабдили нас определенными свидетельствами в пользу того, что водород стал преимущественно ионизированным при красных смещениях, заметно превышающих  $z \approx 6$ , — возможно, около  $z \approx 10$ .

Облака нейтрального водорода при красных смещениях  $z < 6$ , которые порождают леса Лайман- $\alpha$ , могут снабдить нас независимым способом измерения  $\Omega_m$  и  $\Omega_\Lambda$ . Идея этого способа восходит к статье Алкока и Пачинского<sup>184)</sup>, опубликованной в 1979 г. Допустим, мы наблюдаем светящийся объект с красным смещением  $z$ , простирающийся на собственное расстояние  $D_\perp$  перпендикулярно линии взгляда и на собственное расстояние  $D_{||}$  вдоль линии взгляда. Согласно определению расстояния по угловому диаметру, этот объект стягивает угол

$$\Delta\theta = \frac{D_\perp}{d_y(z)}. \quad (1.10.11)$$

Помимо этого, когда мы наблюдаем излучение всего объекта в один и тот же момент времени  $t_0$ , разница между моментами времени  $t_1$ , в которые свет был испущен дальней и ближней точками, составит  $\Delta t_1 = D_{||}$ . Красное смещение равно  $a(t_0)/a(t_1) - 1$ , так что абсолютное значение разницы между красным смещением дальней и ближней точек объекта окажется равным

$$\Delta z = \frac{a(t_0)}{a^2(t_1)} \dot{a}(t_1) \Delta t_1 = (1 + z) H(z) D_{||}, \quad (1.10.12)$$

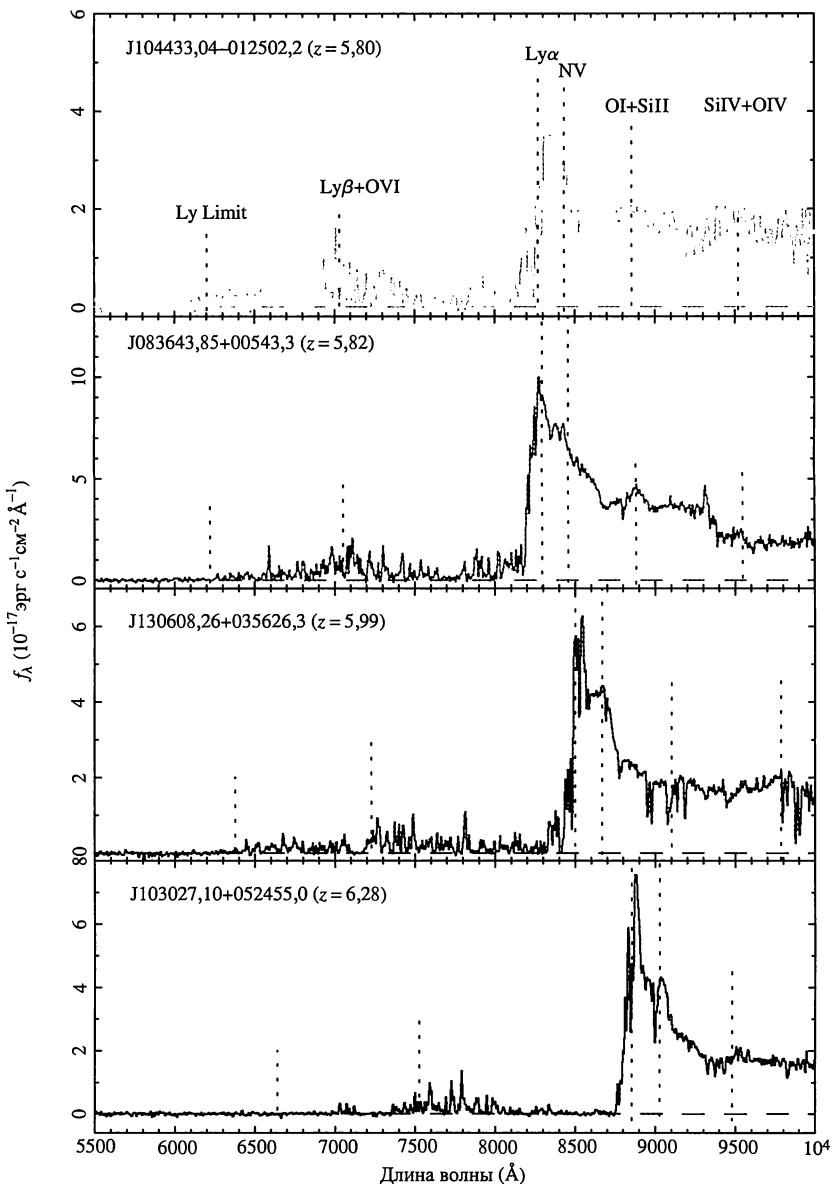
где  $H(z) \equiv \dot{a}(t_1)/a(t_1)$  — постоянная Хаббла в момент испускания света. Для отношения этих величин получаем:

$$\frac{\Delta z}{\Delta\theta} = (1 + z) H(z) d_y(z) \left( \frac{D_{||}}{D_\perp} \right). \quad (1.10.13)$$

*Astrophys. J.* **560**, L5 (2001) [astro-ph/0108069]. См. также X. Fan et al., *Astrophys. J.* **123**, 1247 (2002) [astro-ph/0111184].

<sup>183)</sup> T. Totani et al., *Publ. Astron. Soc. Pacific* **58**, 485 (2006) [astro-ph/0512154].

<sup>184)</sup> C. Alcock and B. Paczyński, *Nature* **281**, 358 (1979).



**Рис. 1.8.** Наблюдаемая интенсивность в зависимости от длины волны для четырех квазаров с большими красными смещениями (из R. H. Becker et al., *Astron. J.* **122**, 2850 (2001) [astro-ph/0108097]). Вертикальные пунктирные линии указывают сдвинутые с учетом красного смещения длины волн для различных спектральных линий. В направлении квазара с  $z = 6,28$  интенсивность спадает до нуля с точностью проведения эксперимента непосредственно слева от линии Лайман- $\alpha$  с  $8845 \text{\AA}$  — особенность, которая не наблюдается у квазара с  $z = 5,99$ , что указывает на распространение областей практически полной ионизации между красными смещениями в диапазоне от 5,99 до 6,28

Теперь нужно лишь использовать соотношение (1.5.19), чтобы записать  $H(z)$  в виде

$$\begin{aligned} H(z) &= \sqrt{\left(\frac{8\pi G}{3}\right)\left(\rho_{\text{M}0}(1+z)^3 + \rho_{\text{B}} + \rho_{\text{u}0}(1+z)^4\right) - \frac{K}{a_0^2}(1+z)^2} = \\ &= H_0 \sqrt{\Omega_{\text{M}}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda} + \Omega_{\text{u}}(1+z)^4 + \Omega_K(1+z)^2}, \end{aligned} \quad (1.10.14)$$

и применить соотношения (1.4.12) и (1.5.45), чтобы записать  $d_y(z)$  в виде

$$d_y(z) = \frac{1}{(1+z)H_0\Omega_K^{1/2}} \operatorname{sh} \left[ \Omega_K^{1/2} \int_{1/(1+z)}^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{\Omega_{\Lambda} + \Omega_K x^{-2} + \Omega_{\text{M}} x^{-3} + \Omega_{\text{u}} x^{-4}}} \right]. \quad (1.10.15)$$

Постоянная Хаббла  $H_0$  сокращается — и мы получаем результат, который зависит только от  $z$ ,  $D_{\parallel}/D_{\perp}$  и величин  $\Omega$ :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta z}{\Delta \theta} &= \left( \frac{D_{\parallel}}{D_{\perp}} \right) \Omega_K^{-1/2} \sqrt{\Omega_{\text{M}}(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda} + \Omega_{\text{u}}(1+z)^4 + \Omega_K(1+z)^2} \times \\ &\times \operatorname{sh} \left[ \Omega_K^{1/2} \int_{1/(1+z)}^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{\Omega_{\Lambda} + \Omega_K x^{-2} + \Omega_{\text{M}} x^{-3} + \Omega_{\text{u}} x^{-4}}} \right]. \end{aligned} \quad (1.10.16)$$

В частности, если мы знаем, что объект сферический (например, сферическое скопление галактик), то  $D_{\parallel}/D_{\perp} = 1$ , и мы можем измерить  $\Delta z$  и  $\Delta \theta$ , чтобы получить не зависящее от модели условие для величин  $\Omega$ , не беспокоясь об эволюционных эффектах и межгалактическом поглощении.

К сожалению, найти сферические объекты с большими красными смещениями не так легко. Однако есть различные объекты, для которых *сферически симметричными являются функции распределения*. В частности, распределение полевых галактик предположительно обладает сферической симметрией относительно любой точки пространства, а потому было предложено применить метод Алкока—Пачинского к галактикам для определения космологической постоянной<sup>185)</sup>. Вместо этого метод Алкока—Пачинского был применен<sup>186)</sup> к распределению квазаров, измеренному в проекте 2dF QSO Redshift Survey<sup>187)</sup>. В предположении  $K = 0$  этот анализ привел к значению  $\Omega_{\Lambda} = 0,71_{-0,17}^{0,09}$ .

<sup>185)</sup> W. E. Ballinger, J. A. Peacock, and A. F. Heavens, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **281**, 877 (1996).

<sup>186)</sup> P. J. Outram et al., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **348**, 745 (2004) [astro-ph/0310873].

<sup>187)</sup> S. M. Croom et al., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **349**, 1397 (2004); доступно по адресу [www.2dfquasar.org](http://www.2dfquasar.org)

Недавно идею Алкока—Пачинского применили к функции распределения облаков Лайман- $\alpha$ <sup>188)</sup>. Как уже говорилось выше, это межгалактические облака, содержащие нейтральные атомы водорода, которые поглощают свет от более удаленных квазаров на линии взгляда в процессе переходов  $1s \rightarrow 2p$ , что выглядит как темные линии в спектре квазара на длине волны  $1215(1+z)$  Å для облаков с красным смещением  $z$ . Допустим, мы измеряем плотность числа  $N(z, \hat{n})$  для облаков Лайман- $\alpha$  с различными красными смещениями  $z$  в разных направлениях  $\hat{n}$ . Если предположить наличие в распределении облаков Лайман- $\alpha$  сферической симметрии, то среднее значение произведения плотностей чисел этих облаков в двух близлежащих точках с красными смещениями  $z$  и  $z + \Delta z$  (при  $\Delta z \ll 1$ ) и направлениями  $\hat{n}$  и  $\hat{n} + \Delta\hat{n}$ , разделенными малым углом  $\Delta\theta$ , будет функцией только  $z$  и собственного расстояния между этими точками, аналитической по компонентам вектора, разделяющего эти компоненты, так что при небольших значениях разделяющих величин это среднее значение можно записать в виде

$$\langle N(z, \hat{n})N(z + \Delta z, \hat{n} + \Delta\hat{n}) \rangle \simeq \langle N^2(z, \hat{n}) \rangle \left[ 1 - \frac{D_{\perp}^2 + D_{\parallel}^2}{L^2(z)} \right], \quad (1.10.17)$$

где  $D_{\perp}$  и  $D_{\parallel}$  задаются соотношениями (1.10.11) и (1.10.12), а  $L$  — некоторая корреляционная длина. В терминах наблюдаемых величин  $\Delta z$  и  $\Delta\theta$  это можно записать как

$$\langle N(z, \hat{n})N(z + \Delta z, \hat{n} + \Delta\hat{n}) \rangle \simeq \langle N^2(z, \hat{n}) \rangle \left[ 1 - \frac{\Delta z^2}{L_z^2(z)} - \frac{\Delta\theta^2}{L_{\theta}^2(z)} \right], \quad (1.10.18)$$

где  $L_z$  и  $L_{\theta}$  — корреляционные длины для красного смещения и угла:

$$L_{\theta}(z) = \frac{L(z)}{d_y(z)}, \quad L_z(z) = L(z)(1+z)H(z). \quad (1.10.19)$$

Измеряя это произведение для различных направлений и красных смещений, мы можем вывести значение отношения корреляционных длин, которое не зависит от  $L$ :

$$\begin{aligned} \frac{L_z(z)}{L_{\theta}(z)} &= \Omega_K^{-1/2} \sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_{\Lambda} + \Omega_i(1+z)^4 + \Omega_K(1+z)^2} \times \\ &\times \operatorname{sh} \left[ \Omega_K^{1/2} \int_{1/(1+z)}^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{\Omega_{\Lambda} + \Omega_K x^{-2} + \Omega_m x^{-3} + \Omega_i x^{-4}}} \right]. \end{aligned} \quad (1.10.20)$$

Этот метод был применен<sup>189)</sup> к пяти парам близких квазаров с красными смещениями в диапазоне от 2,5 до 3,5 и разделяющими углами в диапазоне

<sup>188)</sup> L. Hui, A. Stebbins, and S. Burles, *Astrophys. J.* **511**, L5 (1999); P. McDonald and J. Miralda-Escudeé, *Astrophys. J.* **518**, 24 (1999); W.-C. Lin and M. L. Norman, беседа на встрече по теоретической астрофизике в Южной Калифорнии, Санта-Барбара, октябрь 2002 г. [astro-ph/0211177]; P. McDonald, *Astrophys. J.* **585**, 34 (2003).

<sup>189)</sup> A. Lidz, L. Hui, A. P. S. Croots, and M. Zaldarriaga, [astro-ph/0309204] (не опубликовано).

от 33 до 180 угловых секунд. Столь скучная выборка накладывает лишь очень слабые ограничения на величины  $\Omega$ , но она исключает вариант  $\Omega_\Lambda = 0$  с уровнем ошибки в 2 стандартных отклонения.

## 1.11

### Подсчеты числа источников

**Числа vs  $z$  и  $\ell$  • Эволюция • Обзор радиоисточников**

Равномерное распределение источников с гладким распределением абсолютной светимости в обычном евклидовом пространстве приводит к единственному распределению видимой светимости. Если на единицу объема приходится  $N(L)dL$  источников с абсолютной светимостью между  $L$  и  $L + dL$ , то число  $n(>\ell)$  источников, наблюдаемых с видимой светимостью выше  $\ell$ , задается соотношением

$$n(>\ell) = \int_0^\infty N(L) dL \int_0^{\sqrt{L/(4\pi\ell)}} 4\pi r^2 dr = \frac{1}{3\sqrt{4\pi\ell^{3/2}}} \int_0^\infty L^{3/2} N(L) dL. \quad (1.11.1)$$

Поэтому, каким бы ни было распределение абсолютной светимости, мы ожидаем, что  $n(>\ell) \propto \ell^{-3/2}$ .

В космологической ситуации в этот анализ необходимо внести несколько изменений.

1. Вместо элемента объема  $r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$  здесь берется элемент собственного объема  $(\det g^{(3)})^{1/2} dr d\theta d\phi$ , где  $g_{ij}^{(3)} \equiv a^2 \tilde{g}_{ij}$  — трехмерная метрика с ненулевыми компонентами

$$g_{rr}^{(3)} = \frac{a^2}{1 - Kr^2}, \quad g_{\theta\theta}^{(3)} = a^2 r^2, \quad g_{\phi\phi}^{(3)} = a^2 r^2 \sin^2 \theta,$$

так что

$$dV = \frac{a^3(t)r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (1.11.2)$$

2. Видимая светимость связана с абсолютной светимостью соотношением

$$\ell = \frac{L}{4\pi d_\Phi(z)}, \quad (1.11.3)$$

где  $d_\Phi(z)$  — фотометрическое расстояние (1.4.3).

3. Во всех космологических моделях (за исключением стационарной) плотность числа источников меняется со временем, даже если это происходит в чистом виде за счет космического расширения.

4. Зачастую мы можем измерить красное смещение  $z$ , равно как и видимую светимость.

Для числа источников с красным смещением между  $z$  и  $z+dz$  и видимой светимостью между  $\ell$  и  $\ell+d\ell$  соотношение (1.11.2) дает

$$n(z, \ell) dz d\ell = 4\pi \mathcal{N}(t, L) dL \frac{a^3(t)r^2 dr}{\sqrt{1-Kr^2}}, \quad (1.11.4)$$

где  $\mathcal{N}(t, L)dL$  — число источников в собственном объеме в момент времени  $t$  с абсолютной светимостью между  $L$  и  $L+dL$ ;  $t$  и  $z$  связаны соотношением  $1+z = a(t_0)/a(t)$ , а  $t$  и  $r$  — соотношением (1.2.2):

$$\int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1-Kr'^2}}. \quad (1.11.5)$$

Используем (1.11.5) и выразим дифференциал  $dr$  через  $dt$ , а затем  $dt$  через  $dz$ :

$$\frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} = -\frac{dt}{a(t)} = \frac{dz}{H(z)a_0},$$

где  $H(z) \equiv \dot{a}(t)/a(t)$  и  $a_0 \equiv a(t_0)$ . Напомним, что для Вселенной, в которой есть излучение, вещества и постоянная энергия вакуума, соотношение (1.5.41) дает

$$H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K(1+z)^2 + \Omega_M(1+z)^3 + \Omega_n(1+z)^4}.$$

Сокращая  $dz$  в уравнении (1.11.4), получаем

$$n(z, \ell) d\ell = \frac{4\pi \mathcal{N}(t(z), L) r^2(z) a_0^2 dL}{(1+z)^3 H(z)}.$$

Далее используем (1.11.3), чтобы (при фиксированном  $z$ ) получить

$$dL = 4\pi d_\Phi^2(z) d\ell,$$

после чего сокращение  $d\ell$  дает нам

$$n(z, \ell) = \frac{16\pi^2 \mathcal{N}(t(z), 4\pi d_\Phi^2(z)\ell) d_\Phi^4(z)}{H(z)(1+z)^5}, \quad (1.11.6)$$

где мы использовали (1.4.3), чтобы выразить  $a_0 r$  через  $d_\Phi$ .

В частности, если мы возьмем выборку источников, которые не эволюционируют со временем  $t(z)$ , то для временной зависимости плотности числа  $\mathcal{N}$  получим простую пропорциональность  $a^{-3} \propto (1+z)^3$ :

$$\mathcal{N}(t(z), L) = (1+z)^3 \mathcal{N}_0(L). \quad (1.11.7)$$

Если все члены выборки обладают достаточной яркостью, чтобы быть видимыми при красном смещении  $z$ , то полное число источников, наблюдаемых с красным смещением между  $z$  и  $z + dz$ , будет равно  $n(z)dz$ , где

$$n(z) \equiv \int_0^{\infty} n(z, \ell) d\ell = \frac{4\pi N_0 d_{\phi}^2(z)}{H(z)(1+z)^2}, \quad (1.11.8)$$

где  $d_{\phi}(z)$  задается соотношением (1.5.45), а

$$N_0 \equiv \int_0^{\infty} N_0(L) dL. \quad (1.11.9)$$

В принципе, даже если мы не знаем  $N_0$  или  $H_0$ , но располагаем точными измерениями  $n(z)$ , мы можем соотнести наблюдаемую форму этой функции с формулой (1.11.8), чтобы найти величины  $\Omega$ .

При таком использовании (1.11.8) есть несколько очевидных опасностей. Прежде всего, необходимо не упустить из виду источники с большим красным смещением и, как следствие, низкой видимой светимостью. Кроме того, эволюция числа источников может внести дополнительную зависимость от времени испускания света  $t$ , а значит, от  $z$ . В 1986 г. Ло и Спиллар<sup>190)</sup> предприняли исследование числа галактик как функции красного смещения. Красные смещения при этом измерялись фотометрически (то есть по светимости в различных цветах, а не по сдвигу конкретных спектральных линий), что, вообще говоря, приводит к менее достоверным результатам. Сопоставляя свои результаты с соотношением (1.11.8) для случая  $\Omega_K = \Omega_i = 0$  (так что  $\Omega_\Lambda + \Omega_m = 1$ ), они пришли к выводу, что  $\Omega_\Lambda/\Omega_m = 0.1^{-0.4}_{+0.2}$ . К настоящему моменту стало понятно, что нельзя пренебрегать эволюцией источников, красное смещение которых достаточно велико, для того чтобы величина  $n(z)$  стала чувствительной к космологическим параметрам, и этот результат для  $\Omega_\Lambda/\Omega_m$  был отвергнут<sup>191)</sup>.

Полезные результаты можно получить, принимая во внимание эволюцию. Одна группа<sup>192)</sup> применила результаты подсчета числа очень тусклых галактик<sup>193)</sup> как функции видимой светимости для оценки свободных параметров в модели эволюции светимости галактик (в предположении, что число галактик в расчете на координатный объем постоянно), а затем использовала эту модель вместе с данными исследования красных смещений<sup>194)</sup> в диапазоне до  $z \simeq 0.47$ , чтобы заключить, что  $\Omega_m$  мала, а  $\Omega_\Lambda$  находится в диапазоне

<sup>190)</sup> E. D. Loh, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2865 (1986); E. D. Loh and E. J. Spillar, *Astrophys. J.* **284**, 439 (1986).

<sup>191)</sup> Обсуждение перспектив измерения  $\Omega_\Lambda$  в исследованиях красных смещений см. в работе W. E. Ballinger, J. A. Peacock, and A. F. Heavens, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **282**, 877 (1996).

<sup>192)</sup> M. Fukugita, F. Takahara, K. Yamashita, and Y. Yoshii, *Astrophys. J.* **361**, L1 (1990).

<sup>193)</sup> J. A. Tyson, *Astron. J.* **96**, 1 (1988).

<sup>194)</sup> T. J. Broadhurst, R. S. Ellis, and T. Shanks, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **235**, 827 (1988).

от 0,5 до 1. Позже были выполнены еще несколько исследований<sup>195)</sup> числа галактик при различных красных смещениях, которые приводят к важным результатам, касающимся эволюции галактик, и при использовании динамических моделей способны дать информацию о  $\Omega_m$  и  $\Omega_\Lambda$ <sup>196)</sup>. Представляется, однако, что подсчеты числа галактик приносят больше пользы в качестве инструмента изучения эволюции галактик, а не для точного определения космологических параметров. Ярким примером использования этого подхода<sup>197)</sup> стал предпринятый Ликской обсерваторией поиск галактик с красным смещением  $z$  в диапазоне примерно от 7 до 8, результатом которого стало обнаружение в лучшем случае всего одной галактики, тогда как, по оценкам, при условии справедливости соотношения (1.11.7), исходя из количества наблюдаемых (при столь же консервативных критериях отбора) галактик с красным смещением  $z \approx 6$ , число обнаруженных галактик с красным смещением в диапазоне примерно от 7 до 8 должно было бы составлять десять. Отсюда вытекает, что в формировании светящихся галактик должен был произойти скачок при красных смещениях в промежутке от 6 до 7. Это хорошо согласуется с обсуждавшимся в разд. 1.10 выводом о том, что ионизация межгалактического водорода в значительной степени завершилась при красном смещении порядка 6 — предположительно из-за ультрафиолетового излучения массивных звезд, сформировавшихся примерно в это время.

\* \* \*

Исторически первым важным приложением подсчетов числа галактик стали исследования радиоисточников, для которых информация о красном смещении, вообще говоря, недоступна. Эти исследования производились на фиксированной частоте получения  $\nu$ , которая соответствует переменной частоте испускания  $\nu(1+z)$ , поэтому на подсчет числа источников влияет зависимость распределения источников по внутренней мощности излучения от частоты.

Если источник с красным смещением  $z$  излучает мощность<sup>198)</sup>  $P(\nu) d\nu$  в диапазоне частот между  $\nu$  и  $\nu + d\nu$ , то получаемая в начале координат мощ-

<sup>195)</sup> G. Efstathiou, R. S. Ellis, B. A. Peterson, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **232**, 431 (1988); J. Loveday, B. A. Peterson, G. Efstathiou, and S. J. Maddox, *Astrophys. J.* **390**, 338 (1992); L. da Costa, в *Proceedings of the Conference on Evolution of Large Scale Structure*, Garching, August 1998 [astro-ph/9812258]; S. Borgani, P. Rosati, P. Tozzi, and C. Norman, *Astrophys. J.* **517**, 40 (1999) [astro-ph/9901017]; S. J. Oliver, в *Highlights of the ISO Mission: Special Scientific Session of the IAU General Assembly*, eds. D. Lemke et al. (Kluwer) [astro-ph/9901272]; M. Colless, в *Publ. Astron. Soc. Australia* [astro-ph/9911326]; S. Rawlings, astro-ph/0008067.

<sup>196)</sup> W. J. Percival et al., *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **327**, 1297 (2001) [astro-ph/0105252]; S. Borgani et al., *Astrophys. J.* **561**, 13 (2001) [astro-ph/0106428].

<sup>197)</sup> R. J. Bouwens and G. D. Illingworth, *Nature* **443**, 189 (2006).

<sup>198)</sup> В ГиК величина  $P$  определялась как излучаемая мощность в расчете на телесный угол, тогда как тут это мощность, излучаемая во всех направлениях.

нность на единицу площади антенны между частотами  $\nu$  и  $\nu + d\nu$  составляет

$$S(\nu) d\nu = \frac{P(\nu(1+z)) d\nu (1+z)}{4\pi d_\Phi^2(z)}. \quad (1.11.10)$$

Спектр многих радиоисточников является «прямым», т. е.

$$P(\nu) \propto \nu^{-\alpha}, \quad (1.11.11)$$

где спектральный показатель  $\alpha$ , как правило, находится примерно между 0,7 и 0,8. Это позволяет существенно упростить соотношение (1.11.10):

$$S(\nu) d\nu = \frac{P(\nu) d\nu}{4\pi d_\Phi^2(z)(1+z)^{\alpha-1}}. \quad (1.11.12)$$

С этого момента и далее мы будем считать наблюдаемую частоту фиксированной и писать  $S(\nu) = S$  и  $P(\nu) = P$ . Сокращая  $d\nu$  в (1.11.12), получаем

$$S = \frac{P}{4\pi d_\Phi^2(z)(1+z)^{\alpha-1}}. \quad (1.11.13)$$

Если в момент времени  $t$  на единицу собственного объема приходится  $N(P, t) dP$  источников с мощностью между  $P$  и  $P+dP$ , то число наблюдаемых источников с мощностью выше  $S$  в расчете на площадь антенны равно

$$n(>S) = \int_0^\infty dP \int N(P, t) \frac{4\pi r^2 a^3(t) dr}{\sqrt{1-Kr^2}}, \quad (1.11.14)$$

где верхний предел интеграла по  $r$  задается условием

$$a_0^2 r^2 (1+z)^{1+\alpha} < \frac{P}{4\pi S}. \quad (1.11.15)$$

Разумеется,  $r$ ,  $z$  и  $t$  связаны знакомыми соотношениями:

$$\int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1-Kr'^2}} = \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}, \quad (1+z) = \frac{a(t_0)}{a(t)}. \quad (1.11.16)$$

Эти выкладки упростятся, если мы предположим, что зависимость плотности числа источников от времени может быть параметризована следующим образом:

$$N(P, t) = N(P) \left( \frac{a(t)}{a_0} \right)^\beta \quad (1.11.17)$$

Например, если источники не эволюционируют, не возникают и не разрушаются, то  $\beta = -3$ , тогда как в стационарной космологической модели  $\beta = 0$ .

Соотношение (1.11.14) принимает вид

$$n(>S) = a_0^3 \int_0^\infty N(P) dP \int \frac{4\pi r^2 (1+z)^{-\beta-3} dr}{\sqrt{1-Kr^2}}, \quad (1.11.18)$$

с той же самой зависимостью (1.11.15) верхнего предела интегрирования по  $r$  от  $P/S$ .

Координата  $r$  выражается через  $z$  степенным рядом (1.4.8):

$$a_0 H_0 r = z - \frac{1}{2}(1+q_0)z^2 + \dots . \quad (1.11.19)$$

Тогда мы можем преобразовать интеграл по  $r$  в интеграл по  $z$  с помощью соотношения

$$a_0 H_0 dr = dz - [1 - (1+q_0)z + \dots], \quad (1.11.20)$$

и верхний предел интегрирования по  $z$  будет задаваться формулой

$$z^2 [1 + z(\alpha - q_0) + \dots] < \frac{PH_0^2}{4\pi S},$$

или, иначе,

$$z < \sqrt{\frac{PH_0^2}{4\pi S}} \left[ 1 - \frac{1}{2}(\alpha - q_0) \sqrt{\frac{PH_0^2}{4\pi S}} + \dots \right]. \quad (1.11.21)$$

Тогда формула (1.11.18) принимает вид

$$\begin{aligned} n(>S) = \frac{4\pi}{H_0^3} \int_0^\infty N(P) dP & \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{PH_0^2}{4\pi S} \right)^{3/2} \left( 1 - \frac{3}{2}(\alpha - q_0) \left( \frac{PH_0^2}{4\pi S} \right)^{1/2} + \dots \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \left( \frac{PH_0^2}{4\pi S} \right)^2 (\beta + 5 + 2q_0) + \dots \right], \end{aligned}$$

или, после приведения подобных слагаемых,

$$n(>S) = \frac{1}{3\sqrt{4\pi} S^{3/2}} \int_0^\infty P^{3/2} N(P) dP \left[ 1 - \frac{3}{4}(5 + \beta + 2\alpha) \left( \frac{PH_0^2}{4\pi S} \right)^{1/2} + \dots \right]. \quad (1.11.22)$$

Мы видим, что в состав  $n(>S)$  входит слагаемое со знакомой зависимостью  $S^{-3/2}$ , а также поправка, пропорциональная  $S^{-2}$ , с коэффициентом, пропорциональным  $5 + \beta + 2\alpha$ . Примечательно, что этот коэффициент не зависит от  $q_0$  и  $K$ . В стандартной космологии без эволюции источников  $\beta = -3$  и, как уже упоминалось,  $\alpha = 0,75$ , так что  $5 + \beta + 2\alpha = 3,5$ . Хотя точное значение коэффициента остается неопределенным, оно совершенно точно положительное, и это означает, что для тусклых источников  $n(>S)$  должно спадать

медленнее, чем  $S^{-3/2}$ . Это никак не соответствует наблюдениям<sup>199)</sup>. На протяжении многих лет известно, что при  $S > 5 \times 10^{-26}$  Вт м<sup>-2</sup>/Гц функция числа источников  $N(>S)$  спадает быстрее, чем  $S^{-3/2}$ . Отсюда неизбежно следует вывод, что число радиоисточников в расчете на сопутствующий объем сокращается с показателем  $\beta < -6,5$ . Подсчет числа радиоисточников полезен для изучения этой эволюции, но не для измерения космологических параметров.

С другой стороны, в стационарной космологической модели (обсуждавшейся в разд. 1.5) мы имеем  $\beta = 0$ , так что коэффициент  $5 + \beta + 2\alpha \approx 6,5$ , и предсказываемое число  $N(>S)$  спадает по  $S$  еще медленнее, усугубляя несоответствие экспериментальным данным по сравнению со Стандартной космологической моделью без эволюции источников. В этом случае нет никакой возможности спасти ситуацию, апеллируя к эволюции, поскольку сама суть стационарной модели состоит в том, что в среднем эволюция отсутствует. Это наблюдение показало несостоятельность стационарной модели еще до открытия реликтового излучения.

## 1.12

### Квинтэссенция

**Теории скалярного поля • Степенной потенциал • Следящее решение • Двухпараметрические модели**

До сих пор при расчетах скорости расширения Вселенной мы принимали во внимание только нерелятивистскую материю, излучение и постоянную энергию вакуума. Похоже, что энергия вакуума не только гораздо меньше того, что дают оценки по порядку величины на основе квантовой теории поля, но и всего лишь в несколько раз выше нынешней плотности вещества. Это привело к масштабным спекуляциям на тему о том, что энергия вакуума в действительности непостоянна; в настоящий момент она может быть мала потому, что Вселенная стара. Переменную во времени энергию вакуума иногда называют *квинтэссенцией*<sup>200)</sup>.

Естественный способ ввести в рассмотрение переменную энергию вакуума — допустить существование одного или более скалярных полей, от которых зависит энергия вакуума и ожидаемые значения которых для Вселенной в целом меняются со временем. Скалярные поля такого типа играют ключевую роль в современной теории слабых и электромагнитных взаимодействий и вводятся в рассмотрение также в инфляционных теориях, о чём мы будем говорить в гл. 4 и 10.

<sup>199)</sup> Список масштабных исследований радиоисточников и ссылки на оригинальную литературу см. в ГиК, разд. 14.8.

<sup>200)</sup> Обзоры со ссылками на оригинальную литературу см. в работах B. Ratra and P. J. E. Peebles, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 559 (2003); E. V. Linder, 0704.2064.

Для простоты возьмем единственное действительное скалярное поле  $\varphi(\mathbf{x}, t)$ . Здесь мы будем иметь дело с полями, которые мало меняются на пространственно-временных масштабах, характерных для элементарных частиц, поэтому действие для такого поля будет включать в себя минимальное количество пространственно-временных производных:

$$I_\varphi = - \int d^4x \sqrt{-\det g} \left[ \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\lambda} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\kappa} + V(\varphi) \right], \quad (1.12.1)$$

без указания конкретного вида потенциальной функции  $V(\varphi)$ . Нас здесь интересует случай метрики Робертсона—Уокера и скалярное поле, которое зависит только от времени, но не от положения. В этом случае формулы (B.66) и (B.67) для плотности энергии и давления скалярного поля примут вид:

$$\rho_\varphi = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + V(\varphi), \quad (1.12.2)$$

$$p_\varphi = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - V(\varphi). \quad (1.12.3)$$

Отсюда немедленно следует, что  $(1+w)\rho_\varphi \geq 0$ , где  $w \equiv p_\varphi/\rho_\varphi$ , так что до тех пор, пока  $\rho_\varphi \geq 0$ , в этой модели  $w \geq -1$  и катастрофа с фантомной энергией, обсуждавшаяся в разд. 1.6, не будет иметь места.

Уравнение сохранения энергии (1.1.32) запишется в виде

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 \quad (1.12.4)$$

(здесь, как обычно,  $H(t) \equiv \dot{a}(t)/a(t)$ ), что совпадает с уравнением поля, выводимым из действия (1.12.1). Это уравнение описывает частицу единичной массы, движущуюся в потенциале  $V(\varphi)$  с одномерной координатой  $\varphi$  и диссипативной силой  $-3H\dot{\varphi}$ . Это поле будет стремиться к более низким значениям  $V(\varphi)$  и придет в конце концов к состоянию покоя, если сумеет достичь любого значения поля, при котором  $V(\varphi)$  имеет хотя бы локальный минимум. К сожалению, мы не знаем ни одной причины для того, чтобы значение  $V(\varphi)$  в стационарном состоянии было непременно малым.

Тем не менее можно получить потенциалы с рядом привлекательных свойств, если скорректировать потенциал на аддитивную постоянную, чтобы в стационарной точке он обращался в нуль. Первым и самым простым примером будет потенциал<sup>201)</sup>

$$V(\varphi) = M^{4+\alpha} \varphi^{-\alpha}, \quad (1.12.5)$$

где показатель  $\alpha$  положителен, но в остальном произволен, а  $M$  — постоянная размерности массы (мы принимаем  $\hbar = c = 1$ ), благодаря которой  $V(\varphi)$  имеет

<sup>201)</sup> P. J. E. Peebles and B. Ratra, *Astrophys. J.* **325**, L17 (1988); B. Ratra and P. J. E. Peebles, *Phys. Rev. D* **37**, 3406 (1988); C. Wetterich, *Nucl. Phys.* **B302**, 668 (1988). Модели квинтэссенции с потенциалом глубоко исследованы в работах I. Zlatev, L. Wang, and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 896 (1999); P. J. Steinhardt, L. Wang, and I. Zlatev, *Phys. Rev. D* **59**, 123504 (1999).

размерность плотности энергии. Нет никаких особых причин считать, что потенциал должен иметь именно такую форму, и в частности, нам неизвестны какие-либо доводы в пользу исключения аддитивной постоянной (в том числе эффектов квантовых флуктуаций всех других полей), которая привела бы к ненулевому значению потенциала в стационарной точке, при  $\varphi = \infty$ . Тем не менее изучение следствий, вытекающих из этой конкретной модели квинтэссенции, может пролить свет на некоторые вопросы.

Каков бы ни был потенциал, необходимо принять допущение, что в достаточно ранние моменты времени плотность  $\rho_\varphi$  была значительно меньше плотности энергии излучения  $\rho_i$ , поскольку, как мы увидим в разд. 3.2, любой заметный прирост плотности энергии в эпоху космологического нуклеосинтеза привел бы к более высокой распространенности гелия по сравнению с наблюдаемой. В эти ранние времена плотность энергии излучения (включая частицы вроде нейтрино с массами меньше  $k_B T$ ) также выше плотности энергии для нерелятивистского вещества, так что уравнение (1.5.34) дает  $a(t) \propto t^{1/2}$  и, следовательно,  $H = 1/(2t)$ . Уравнение поля (1.12.4) с потенциалом (1.12.5) принимает вид

$$\ddot{\varphi} + \frac{3}{2t}\dot{\varphi} - \alpha M^{4+\alpha}\varphi^{-\alpha-1} = 0. \quad (1.12.6)$$

Это уравнение имеет решение

$$\varphi = \left( \frac{\alpha(2+\alpha)^2 M^{4+\alpha} t^2}{6+\alpha} \right)^{1/(2+\alpha)} \quad (1.12.7)$$

Как  $\dot{\varphi}^2$ , так и  $V(\varphi)$  ведут себя как  $t^{-2\alpha/(2+\alpha)}$ , следовательно, в очень ранние времена плотность  $\rho_\varphi$  должна была быть ниже, чем  $\rho_i$ , которая ведет себя как  $t^{-2}$ . Это решение не единственно, но является аттрактором в том смысле, что любое другое решение, которое оказывается достаточно близко от него, с ростом  $t$  будет подходить к нему все ближе и ближе.

Чтобы убедиться в этом, обратите внимание на то, что небольшое возмущение  $d\varphi$  решения (1.12.7) удовлетворяет условию

$$0 = \delta\ddot{\varphi} + \frac{3}{2t}\delta\dot{\varphi} + \alpha(1+\alpha)M^{4+\alpha}\varphi^{-\alpha-2}\delta\varphi = \delta\ddot{\varphi} + \frac{3}{2t}\delta\dot{\varphi} + \frac{(6+\alpha)(1+\alpha)}{(2+\alpha)^2 t^2}\delta\varphi.$$

У этого уравнения есть два независимых решения вида

$$\delta\varphi \propto t^\gamma, \quad \gamma = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{(6+\alpha)(1+\alpha)}{(2+\alpha)^2}}.$$

При  $\alpha > 0$  квадратный корень будет мнимым, так что оба решения для  $\delta\varphi$  спадают с ростом  $t$  как  $t^{-1/4}$ , тогда как само по себе  $\varphi$  возрастает.

По этой причине частное решение уравнения (1.12.6), которое при  $t \rightarrow 0$  исходит себя как (1.12.7), называют *следящим решением*. Нет никаких особых физических причин требовать, чтобы начальные условия для скалярного поля были такими, чтобы скалярное поле в настоящий момент пришло к следующему решению (набор таких начальных условий называют областью притяжения аттрактора), однако поскольку это требование могло бы сделать нынешнюю эволюцию скалярного поля нечувствительной к начальным условиям, имеется практический смысл в создании модели квинтэссенции с всего лишь двумя свободными параметрами:  $M$  и  $\alpha$ .

Мало что меняется, когда плотность энергии излучения падает ниже плотности энергии нерелятивистского вещества. Следующее решение для скалярного поля продолжает расти как  $t^{2/(2+\alpha)}$  (хотя и с другим постоянным множителем), так что  $\dot{\varphi}^2$  и  $V(\varphi)$  по-прежнему спадают как  $t^{-2\alpha/(2+\alpha)}$ . Однако уменьшение  $\rho_m$  и  $\rho_i$  происходит быстрее — как  $t^{-2}$  и  $t^{-8/3}$  соответственно, — так что в конце концов  $\rho_m$  и  $\rho_i$  окажутся меньше  $\rho_\varphi$ . Любопытно, что значение  $\varphi$ , при котором  $\rho_\varphi$  совпадает с  $\rho_m$ , не зависит от неизвестной постоянной  $M$ . Пока в расширении преобладает вещество,  $\rho_m$  задается соотношением (1.5.31) как  $1/(6\pi G t^2)$ , в то время как (1.12.2), (1.12.5) и (1.12.7) дают  $\rho_\varphi \approx M^{2(4+\alpha)/(2+\alpha)} t^{-2\alpha/(2+\alpha)}$ , так что момент времени  $t_k$ , в который  $\rho_\varphi = \rho_m$ , примерно равен

$$t_k \approx M^{-(4+\alpha)/2} G^{-(2+\alpha)/4}. \quad (1.12.8)$$

Подставляя это в формулу (1.12.7), получаем

$$\varphi(t_k) \approx G^{-1/2}. \quad (1.12.9)$$

Когда  $\rho_m$  оказывается заметно меньше  $\rho_\varphi$ , уравнение движения для  $\varphi(t)$  принимает вид

$$\ddot{\varphi} + \sqrt{24\pi G \rho_\varphi} \dot{\varphi} - \alpha M^{4+\alpha} \varphi^{-\alpha-1} = 0, \quad (1.12.10)$$

где  $\rho_\varphi$  задается соотношением (1.12.2). Следующее решение в эту эпоху сложным образом зависит от времени, но по прошествии достаточного времени (возможно, позже настоящего момента) снова становится простым. Мы можем предположить, что демпфирующее слагаемое в этом уравнении, пропорциональное  $\dot{\varphi}$ , в конечном итоге приведет к замедлению роста  $\varphi$ , так что  $\dot{\varphi}^2$  станет меньше  $V(\varphi)$ ; мы можем также выдвинуть предположение, что инерциальное слагаемое, пропорциональное  $\ddot{\varphi}$ , станет пренебрежимо малым по сравнению с демпфирующим и потенциальным членами. (Как описано в гл. 4 и 10, такие условия типа «медленного скатывания» играют важную роль в теории инфляции.) Уравнение (1.12.10) принимает вид

$$\sqrt{24\pi G M^{4+\alpha} \varphi^{-\alpha}} \dot{\varphi} = \alpha M^{4+\alpha} \varphi^{-\alpha-1},$$

откуда

$$\dot{\varphi} = \frac{\alpha M^{2+\alpha/2} \varphi^{-\alpha/2-1}}{\sqrt{24\pi G}}. \quad (1.12.11)$$

Решением этого уравнения будет

$$\varphi = M \left( \frac{\alpha(2 + \alpha/2)t}{\sqrt{24\pi G}} \right)^{1/(2+\alpha/2)} \quad (1.12.12)$$

---

Вообще говоря, здесь может потребоваться перенос начала отсчета времени, чтобы избежать появления постоянной интегрирования, которая может добавиться к  $t$ .

---

Теперь мы можем проверить приближения, использованные при выводе уравнения (1.12.11), решение которого мы получили. Из соотношения (1.12.12) мы видим, что  $\dot{\varphi}^2 \propto t^{-(2+\alpha)/(2+\alpha/2)}$  при  $V'(\varphi) \propto t^{-\alpha/(2+\alpha/2)}$ , так что член кинетической энергии в (1.12.2) на больших временах действительно становится малым по сравнению с членом потенциальной энергии. Помимо этого,  $\ddot{\varphi} \propto t^{-(3+\alpha)/(2+\alpha/2)}$  при  $V'(\varphi) \propto t^{-(1+\alpha)/(2+\alpha/2)}$ , так что и инерциальный член в (1.12.10) становится малым по сравнению с потенциальным членом на больших временах. Тем самым формула (1.12.12) дает разумное асимптотическое решение уравнения (1.12.10) при  $t \rightarrow \infty$ . Численные расчеты показывают, что это не просто решение при  $t \rightarrow \infty$ , а асимптотическая форма, к которой сходится следящее решение при  $t \rightarrow \infty$ .

При доминировании  $\rho_\varphi \propto t^{-\alpha/(2+\alpha/2)}$  в скорости расширения Вселенной в поздние времена мы получаем  $\dot{a}/a \propto t^{-\alpha/2(2+\alpha/2)}$ , так что

$$\ln a \propto t^{2/(2+\alpha/2)}. \quad (1.12.13)$$

Это напоминает порождаемый космологической постоянной рост  $a$ , где  $\ln a \propto t$ , только здесь рост происходит медленнее. Разница между параметром замедления и значением  $-1$  для расширения, в котором преобладает космологическая постоянная, исчезает как  $t^{-(2+\alpha)/(2+\alpha/2)}$ . Обратите внимание на то, что с ростом времени плотности излучения и вещества спадают как  $1/a^4$  и  $1/a^3$  соответственно, а кривизна спадает как  $1/a^2$ ; все это происходит гораздо быстрее по сравнению со степенным законом сокращения  $\rho_\varphi$ , так что в скорости расширения в поздние эпохи действительно преобладает  $\rho_\varphi$ , что подтверждает корректность вывода (1.12.10).

Мы пришли к выводу, что, по крайней мере в некотором диапазоне начальных условий, потенциал (1.12.5) приводит к такой картине расширения, в которой в ранние времена преобладает излучение, затем вещество, а в поздние времена доминирующее положение занимает скалярное поле. Однако чтобы прийти к согласию с наблюдениями, мы вынуждены произвольным образом исключить большой постоянный член, который мог бы возникнуть в (1.12.5), а также подогнать значение  $M$  таким образом, чтобы критический момент времени (1.12.8), в который значения  $\rho_\varphi$  и  $\rho_m$  совпадают, был близок к настоящему  $t_0 \approx 1/H_0$ . А именно, соотношение (1.12.8) показывает, что нам требуется значение

$$M^{4+\alpha} \approx G^{-1-\alpha/2} H_0^2 \quad (1.12.14)$$

ляя постоянного множителя в  $V(\varphi)$ . Для этого, однако, нет никаких известных причин.

Несколько групп наблюдателей в настоящий момент планируют программы исследований, задача которых — выяснить, действительно ли плотность энергии вакуума постоянна, как в случае введения космологической постоянной, или же она меняется с течением времени. В ходе реализации этих программ предполагается сопоставить наблюдаемые фотометрические расстояния (или расстояния по угловому диаметру) с формулой, полученной путем замены члена  $\Omega_\Lambda$  в подкоренном выражении в (1.5.45) зависящим от времени членом темной энергии. Эти наблюдения в действительности не предполагают измерения текущего значения  $w_0$  величины  $w$ , а тем более текущих значений ее производных  $\dot{w}_0$ ,  $\ddot{w}_0$  и т. д., поскольку для этих целей необходима исключительная точность измерений фотометрических расстояний и расстояний по угловому диаметру при малых красных смещениях. Вместо этого будут выполнены измерения с умеренной точностью, но в весьма широком диапазоне красных смещений. Чтобы сравнить результаты таких измерений с теорией, нужна модель изменения темной энергии со временем. В одном из подходов к построению такой модели предполагается, что  $w$  просто постоянна или, возможно, линейно меняется со временем или с изменением красного смещения, однако мы не располагаем физической моделью, которая приводила бы к такому поведению<sup>202)</sup>. Представляется более предпочтительным сравнивать результаты наблюдений с моделью скалярного поля, приводящей к потенциальному, который (со всеми причитающимися оговорками о ее естественности) по крайней мере предлагает возможную физическую модель изменения темной энергии<sup>203)</sup>. Поскольку подобные наблюдения сложны, будет оправданным рассматривать модели скалярного поля, включающие в себя всего два параметра, которые мы при желании можем выразить в терминах  $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$  (предполагая, что пространство-время является плоским, и пренебрегая плотностью энергии излучения) и  $w_0$ .

Одна из возможностей состоит в предположении о том, что на протяжении позднего  $e$ -фолдинга<sup>204)</sup> (т. е.  $e$ -кратного расширения Вселенной) скалярное поле  $\varphi$  принимает значения, для которых потенциал  $V(\varphi)$  меняется медленно. Если бы потенциал  $V(\varphi)$  был постоянным, мы бы получили постоянную энергию вакуума с  $w = -1$ , и единственным параметром, который необходимо измерить, стала бы  $\Omega_\Lambda$ . Для двухпараметрической подгонки

<sup>202)</sup> Другие предположения о форме  $w$  как функции красного смещения, способной имитировать модели скалярного поля, рассмотрены в работах J. Weller and A. Albrecht, *Phys. Rev. D* **65**, 103512 (2002); E. V. Linder, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 091301 (2003) [astro-ph/0208512].

<sup>203)</sup> Этот подход использован в работах D. Huterer and H. V. Peiris, *Phys. Rev. D* **75**, 083502 (2007) [astro-ph/0610427]; R. Crittenden, E. Majerotto, and F. Piazza, [astro-ph/0702003].

<sup>204)</sup> Термин  $e$ -folding ( $e$ -фолдинг) означает увеличение в  $e$  раз, где  $e$  — основание натурального логарифма. — Прим. ред. перев.

мы можем принять, что  $V(\varphi)$  меняется линейно по  $\varphi$ :

$$V(\varphi) = V_0 + (\varphi - \varphi_0)V'_0. \quad (1.12.15)$$

Это верно при условии, что относительное изменение  $V'(\varphi)$  за временной интервал порядка  $1/H_0$  является малым, то есть  $|V''_0\dot{\varphi}_0| \ll H_0|V'_0|$ .

Уравнение поля (1.12.4) можно представить в удобной безразмерной форме, заменяя зависимую переменную  $t$  и независимую переменную  $\varphi$  безразмерными переменными  $x$  и  $\omega$ , которые задаются соотношениями

$$x \equiv H_0\sqrt{\Omega_m}t, \quad \omega \equiv \frac{8\pi G V(\varphi)}{3\Omega_m H_0^2}. \quad (1.12.16)$$

Так как  $V$  линейно по  $\varphi$ , мы имеем

$$\dot{\varphi} = \frac{3\Omega_m H_0^2 \dot{\omega}}{8\pi G V'_0} = \frac{3\Omega_m^{3/2} H_0^3}{8\pi G V'_0} \frac{d\omega}{dx}.$$

Тогда уравнение (1.12.4) принимает вид

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} + 3\mathcal{H}\frac{d\omega}{dx} + \lambda = 0, \quad (1.12.17)$$

где  $\lambda$  — безразмерный параметр:

$$\lambda \equiv \frac{8\pi G V_0'^2}{3H_0^4 \Omega_m^2}, \quad (1.12.18)$$

а  $\mathcal{H}$  — функция от  $\omega$  и  $d\omega/dx$ :

$$\mathcal{H} \equiv \frac{H}{H_0\sqrt{\Omega_m}} = \sqrt{(1+z)^3 + \omega + \frac{1}{2\lambda} \left( \frac{d\omega}{dx} \right)^2}. \quad (1.12.19)$$

Нам понадобится также дифференциальное уравнение для красного смещения:

$$\frac{dz}{dx} = -\mathcal{H}(1+z). \quad (1.12.20)$$

Вообще говоря, даже если бы мы переписали все производные по  $x$  через производные по  $z$ , для решения этих уравнений нам потребовались бы начальные условия для  $\omega$  и  $d\omega/dz$  при некотором первоначальном  $z$ , что вместе с  $\lambda$  привело бы к трехпараметрическому набору решений. Однако при допущении, что при больших красных смещениях в составе плотности энергии преобладает вещества, а не энергия вакуума (что, как мы увидим далее, действительно имеет место), производная  $d\omega/dx$  на достаточно позднем этапе эпохи преобладания вещества становится в большой степени нечувствительной к начальным условиям<sup>205)</sup>. При  $z \gg 1$  соотношение (1.12.19) дает

$$\mathcal{H} \rightarrow (1+z)^{3/2}, \quad (1.12.21)$$

<sup>205)</sup> R. Cahn, частное сообщение. Кан показал также, что приближенный подход с отбрасыванием в этом уравнении поля члена со второй производной плохо работает в данном контексте.

и тогда (1.12.17) и (1.12.20) имеют решение

$$1+z \rightarrow \left(\frac{3x}{2}\right)^{-2/3}, \quad \frac{d\omega}{dx} \rightarrow -\frac{\lambda x}{3}. \quad (1.12.22)$$

---

Постоянная интегрирования в решении для  $z$  вошла в определение  $x$ , задав начало отсчета времени. Постоянная интегрирования в решении для  $d\omega/dx$  была опущена, поскольку она добавляет в  $d\omega/dx$  член, затухающий с ростом времени как  $x^{-2} \propto t^{-2}$ .

---

Тогда свободными параметрами в нашем решении остаются  $\lambda$  вместе со значением  $\omega$  при некотором произвольном начальном значении  $x_1$  величины  $x$ , выбранном достаточно малым, с тем чтобы при  $x_1$  в составе плотности энергии преобладало вещество, а не энергия вакуума. (Заметьте, что постоянная  $V_0$  никогда в этих уравнениях не появляется; она вносит свой вклад в  $\omega(x_1)$ , но нет никакой необходимости выделять этот вклад.) Необходимо выбрать различные пробные значения  $\lambda$  и  $\omega(x_1)$ ; использовать (1.12.22) для вычисления  $1+z$  и  $d\omega/dx$  при  $x = x_1$ ; опираясь на эти начальные условия, проинтегрировать численно дифференциальные уравнения (1.12.17) и (1.12.20) от  $x_1$  до значения  $x_0$ , при котором  $z = 0$ ; а затем, если есть желание, вычислить значения  $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$  и текущее значение  $w_0$  отношения  $p_\phi/\rho_\phi$  для данного конкретного решения<sup>206)</sup>, используя соотношения

$$\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} = \omega(x_0) + \frac{1}{2\lambda} \left( \frac{d\omega}{dx} \right)_{x=x_0}^2, \quad w_0 = \frac{(d\omega/dx)_{x=x_0}^2 - 2\lambda\omega(x_0)}{(d\omega/dx)_{x=x_0}^2 + 2\lambda\omega(x_0)}. \quad (1.12.23)$$

Отношение темной энергии в некоторый заданный момент к ее текущему значению есть

$$\xi \equiv \frac{\rho_b(t)}{\rho_b(t_0)} = \frac{(d\omega(x)/dx)^2 + 2\lambda\omega(x)}{(d\omega/dx)_{x=x_0}^2 + 2\lambda\omega(x_0)}. \quad (1.12.24)$$

Например, если мы возьмем  $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m = 0,76$  и  $w_0 = -0,777$ , отношение  $\xi$  плотности темной энергии к ее нынешнему значению вырастет до 1,273 при  $z = 1$  и до 1,340 при бесконечном красном смещении<sup>207)</sup>. Выравнивание  $\xi(z)$  при больших  $z$  происходит потому, что рост плотности вещества при увеличивающемся красном смещении приводит к росту скорости расширения, так что диссипативное слагаемое  $3H\dot{\varphi}$  в уравнении (1.12.4) замораживает значение скалярного поля в ранние времена.

---

<sup>206)</sup> Как уже говорилось, в моделях такого рода можно получить только  $w_0 > -1$ . Чтобы сопоставить с наблюдениями случай  $w_0 < -1$ , необходимо взять модель с противоположным знаком при слагаемом с производной в действии (1.12.1). Далее можно применить подход к анализу, описанный здесь, просто произведя очевидные замены знаков в тех или иных местах.

<sup>207)</sup> Результаты численного анализа для различных значений красного смещения приведены в табл. 1.1. Для линейного потенциала эти результаты были получены Р. Каином (R. Cahn, частное сообщение).

Не следует думать, что выравнивание темной энергии при больших  $z$  для потенциала (1.12.15) означает, что в ходе анализа наблюдений темной энергии с использованием этого потенциала нужно отказаться от мысли обосновать теории квинтэссенции и что энергия вакуума в настоящий момент мала потому, что Вселенная стара. В действительности для потенциала  $V(\varphi) \propto \varphi^{-\alpha}$  при типичных начальных условиях энергия квинтэссенции сначала круто спадает, а затем выравнивается, тогда как скалярное поле медленно сходится к потенциальному, пока поле не приблизится к следующему решению, при этом если  $\alpha$  мало, то следующее решение не достигнуто до настоящего времени<sup>208)</sup>. Условие  $|V_0''\dot{\varphi}_0| \ll H_0|V_0'|$ , позволяющее трактовать этот потенциал как линейный на временах порядка  $1/H_0$ , выполняется при  $\alpha(1+\alpha)\varphi_0^{-2} \ll 8\pi G$ , что в свете соотношения (1.12.9), вероятно, имеет место при  $\alpha < 1$ .

В основу другой возможной двухпараметрической модели ложится тот же потенциал,  $V(\varphi) \propto \varphi^{-\alpha}$ , но теперь в предположении, что следующее решение достигается в некоторое раннее время (скажем, при  $z \leq 10$ ) в эпоху преобладания вещества. При таком допущении наблюдаемая история темной энергии нечувствительна к начальным условиям, так что в модели есть всего два параметра:  $M$  и  $\alpha$ . Уравнения этой модели могут быть представлены в безразмерном виде путем записи константы связи для этого потенциала в терминах безразмерного параметра  $\beta$ :

$$M^{4+\alpha} \equiv \beta \Omega_m H_0^2 (8\pi G)^{-1-\alpha/2}, \quad (1.12.25)$$

и замены зависимой переменной  $t$  и независимой переменной  $\varphi$  безразмерными переменными  $x$  и  $f$ , которые задаются соотношениями

$$t \equiv \frac{x}{H_0 \sqrt{\Omega_m}}, \quad \varphi(t) \equiv \frac{f(x)}{\sqrt{8\pi G}}. \quad (1.12.26)$$

Тогда уравнение поля (1.12.4) (без использования приближения медленного скатывания) в эпоху преобладания вещества и энергии вакуума принимает форму

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + 3\mathcal{H} \frac{df}{dx} - \alpha\beta f^{-\alpha-1} = 0, \quad (1.12.27)$$

где

$$\mathcal{H} \equiv \frac{H}{\sqrt{\Omega_m} H_0} = \sqrt{\frac{1}{6} \left( \frac{df}{dx} \right)^2 + \frac{\beta}{3} f^{-\alpha} + (1+z)^3}. \quad (1.12.28)$$

Здесь нам снова потребуется уравнение

$$\frac{dz}{dx} = -\mathcal{H}(1+z). \quad (1.12.29)$$

Поскольку соответствующее большим  $z$  решение (1.12.7) является аттрактором, начальные условия не вводят никаких новых свободных параметров;

<sup>208)</sup> P. J. Steinhardt, L. Wang, and I. Zlatev, *Phys. Rev. D* **59**, 123504 (1999).

в терминах этих безразмерных переменных начальные условия таковы, что при  $x \rightarrow 0$

$$f \rightarrow \left[ \frac{\alpha\beta(\alpha+2)^2x^2}{2(\alpha+4)} \right]^{1/(\alpha+2)}, \quad 1+z \rightarrow \left( \frac{2}{3x} \right)^{2/3} \quad (1.12.30)$$

Нам требуется проинтегрировать уравнения (1.12.27) и (1.12.29) от некоторого малого  $x$  (скажем,  $x = 0,01$ ) до значения  $x_0$ , при котором  $z = 0$ , с начальными условиями (1.12.30), а затем оценить  $\Omega_m = 1 - \Omega_\Lambda$  из условия  $\mathcal{H}(x_0) = 1/\sqrt{\Omega_m}$ . Мы можем также оценить текущее значение  $w_0$  отношения  $w = p_\varphi/\rho_\varphi$ , пользуясь формулой

$$w_0 = \frac{f'^2(x_0)f(x_0)^\alpha/(2\beta) - 1}{f'^2(x_0)f(x_0)^\alpha/(2\beta) + 1}, \quad (1.12.31)$$

а затем подставить вместо параметров  $\alpha$  и  $\beta$  величины  $\Omega_m$  и  $w_0$ . Например, если мы произвольным образом выберем  $\alpha = 1$ , то чтобы получить реалистичное значение  $\Omega_m = 0,24$ , мы должны взять  $\beta = 9,93$ , и в этом случае  $w_0 = -0,777$ . Разумеется, мы можем получить любые другие значения  $w_0$ , превышающие  $-1$ , путем выбора отличных от данного значений  $\alpha$ , а затем подстроить  $\beta$  так, чтобы получить то же самое значение  $\Omega_m$  (хотя при малом  $\alpha$  диапазон начальных условий, при которых следящее решение могло быть достигнуто достаточно давно по отношению к текущему моменту, относительно узок). Например, для  $\alpha = 1/2$  мы должны взять  $\beta = 7,82$ , чтобы получить  $\Omega_m = 0,24$ , и в этом случае расчеты дадут нам  $w_0 = -0,87$ . (Касательно случая  $w < -1$  см. сноска 206.) Отношения темной энергии к ее текущему значению, рассчитанные подобным образом для  $\Omega_m = 0,24$  и  $w_0 = -0,777$ , приведены в табл. 1.1 вместе со значениями, вычисленными при таком же выборе  $\Omega_m$  и  $w_0$  для случаев постоянного  $w$  и для линейного потенциала (1.12.15). Модель

Таблица 1.1

Отношение темной энергии к ее текущему значению для следящего решения с потенциалом (1.12.5) и для линейного потенциала (1.12.15), вычисленное для случая  $\Omega_m = 1 - \Omega_\Lambda = 0,24$  и  $w_0 = -0,777$ , в сопоставлении с результатами при постоянном  $w = -0,777$

$z$	Следящее решение	Линейный потенциал	Постоянное $w$
0	1	1	1
0,1	1,067	1,062	1,066
0,5	1,347	1,200	1,312
1	1,712	1,273	1,590
2	2,469	1,318	2,086
3	3,224	1,331	2,528
$\gg 1$	$\gg 1$	1,340	$\gg 1$

следующего решения и линейная модель, очевидно, представляют противоположные друг другу крайние допущения о зависимости темной энергии от времени, но обе они выглядят гораздо лучше обоснованными физически по сравнению с допущением о постоянном значении  $w$ .

## 1.13

### Горизонты

**Горизонт частиц • Горизонт событий**

В современных космологических теориях могут возникать горизонты двух различных типов: одни ограничивают те расстояния, на которых можно наблюдать прошлые события, а другие — расстояния, на которых когда-либо будет возможно наблюдать будущие события. Риндлер назвал их соответственно *горизонтом частиц* и *горизонтом событий*<sup>209)</sup>.

В соответствии с уравнением (1.2.2), если Большой взрыв начался в момент времени  $t = 0$ , то наибольшее значение  $r_{\max}(t)$  радиальной координаты в метрике Робертсона—Уокера, откуда наблюдатель в момент времени  $t$  может получить сигналы, распространяющиеся со скоростью света, задается условием

$$\int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^{r_{\max}(t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (1.13.1)$$

Таким образом, мы имеем дело с горизонтом частиц до тех пор, пока интеграл  $\int dt/a(t)$  не перестанет сходиться в точке  $t = 0$ . В общепринятых космологических теориях он сходится; каким бы ни был вклад вещества или энергии вакуума в настоящее время, весьма вероятно, что в ранние времена в составе плотности энергии преобладало излучение, а в этом случае  $a(t) \propto t^{1/2}$  и интеграл сходится. Собственное расстояние для горизонта определяется из соотношений (1.1.15) и (1.13.1) в виде

$$d_{\max}(t) = a(t) \int_0^{r_{\max}(t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}. \quad (1.13.2)$$

Например, в эпоху преобладания излучения  $a(t) \propto t^{1/2}$ , так что  $d_{\max}(t) = 2t = 1/H$ . Если заглянуть достаточно далеко в эпоху преобладания вещества, то большая часть значения интеграла по времени из формулы (1.13.1) возникает за период времени, когда  $a(t) \propto t^{2/3}$ , так что  $d_{\max}(t) \simeq 3t = 2/H$ . В настоящее время значение интеграла по  $t'$  определяется периодом, когда

<sup>209)</sup> W. Rindler, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **116**, 663 (1956).

и расширении преобладали вещества и энергия вакуума, а также, возможно, кривизна. В соответствии с (1.5.41) расстояние до горизонта частиц в настоящий момент равно

$$d_{\max}(t_0) = \frac{1}{H_0} \int_0^1 \frac{dx}{x^2 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_K x^{-2} + \Omega_M x^{-3}}}. \quad (1.13.3)$$

В гл. 4 мы увидим, что наступлению эры преобладания излучения, возможно, предшествовал момент времени, когда во Вселенной не было ничего, кроме энергии вакуума, и в этом случае расстояние до горизонта частиц в действительности было бы бесконечным. Однако до тех пор, пока мы говорим о наблюдениях с помощью телескопов, соотношение (1.13.3) задает собственное расстояние, дальше которого мы заглянуть не можем.

Точно так же, как есть прошлые события, которые мы не можем увидеть, есть, возможно, и события, которые мы никогда не увидим. Снова возвращаясь к уравнению (1.2.2), получаем, что если в момент времени  $T$  происходит повторный коллапс Вселенной, то наибольшее значение  $r_{\max}$  координаты  $r$ , откуда наблюдатель сможет получить распространяющиеся со скоростью света сигналы, испущенные в любой момент времени после  $t$ , задается условием

$$\int_t^T \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^{r_{\max}(t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (1.13.4)$$

Даже при условии бесконечности будущего, если интеграл  $\int dt/a(t)$  сходится при  $t = \infty$ , возникнет горизонт событий, описываемый соотношением

$$\int_t^\infty \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^{r_{\max}(t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (1.13.5)$$

Поскольку сопутствующим источникам соответствует фиксированное значение  $r$ , условие  $r < r_{\max}$  вводит ограничение на случившиеся в момент времени  $t$  события, которые мы когда-либо сможем наблюдать. В случае, когда повторного коллапса Вселенной не происходит, собственное расстояние до горизонта событий задается формулой

$$d_{\max}(t) = a(t) \int_0^{r_{\max}(t)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = a(t) \int_t^\infty \frac{dt'}{a(t')}. \quad (1.13.6)$$

В отсутствие космологической постоянной  $a(t)$  растет как  $t^{2/3}$ , и интеграл расходится, так что горизонт событий не возникает. Но при наличии космологической постоянной  $a(t)$  будет в конечном итоге расти как  $\exp(Ht)$  с постоянным  $H = H_0 \Omega_\Lambda^{1/2}$ , и появляется реальный горизонт событий, который

приближается к значению  $d_{\max}(\infty) = 1/H$ . С течением времени все источники света за пределами нашей гравитационно связанный локальной группы выйдут за пределы этого расстояния и станут ненаблюдаемыми. То же самое верно и в теории квинтэссенции, описанной в предыдущем разделе. В этом случае  $a(t)$  в конце концов возрастает как  $\exp(\text{постоянная} \times t^{2/(2+\alpha/2)})$ , и интеграл (1.13.6) снова сходится при любом  $\alpha \geq 0$ .

Если источник имеет радиальную координату  $r$  в системе координат Робертсона—Уокера с началом отсчета в месте нашего расположения, то мы имеем радиальную координату  $r$  в системе координат Робертсона—Уокера с началом отсчета в месте расположения этого источника. Отсюда следует, что соотношения (1.13.4) и (1.13.5) задают также максимальную радиальную координату, до которой мы способны добраться, начав путешествие в момент времени  $t$ .

## Глава 2

# РЕЛИКТОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

До середины 1960-х гг. крупнейшим источником информации о структуре и эволюции Вселенной, безусловно, были наблюдения красного смещения и расстояний до удаленных галактик, обсуждавшиеся в предыдущей главе. В 1965 г. состоялось открытие реликтового излучения — почти изотропного микроволнового космического фона, снабдившего нас богатым набором новых космологических данных. После обзора открытия реликтового излучения и связанных с этим ожиданий мы исследуем в данной главе некоторые следствия. В данной главе мы сможем бросить лишь беглый взгляд на анизотропность этого излучения. В гл. 7 мы вернемся к этой весьма важной теме, опираясь на анализ эволюции космологических возмущений, представленный в гл. 5 и 6, а в гл. 10 рассмотрим источники этих возмущений в очень ранней Вселенной.

---

### 2.1

#### Предвосхищение и открытие реликтового излучения

**Излучение черного тела • Ранние гипотезы • Открытие • Формула Рэлея—Джинса • Линии поглощения CN • Воздушные шары и ракеты • COBE и FIRAS • Плотность энергии • Плотность числа частиц • Влияние на космическое излучение**

В расширяющейся жидкости давление совершают работу за счет тепловой энергии, извлекаемой из жидкости. Поскольку Вселенная расширяется, мы ожидаем, что в прошлом вещество было более горячим, а также более плотным по сравнению с настоящим моментом. Если мы заглянем достаточно далеко назад во времени, мы увидим эпоху, когда температура была слишком высокой, чтобы электроны могли находиться в связанном состоянии в атомах. В достаточно раннем прошлом быстрые столкновения фотонов со свободными электронами поддерживали излучение в тепловом равновесии с плотным горячим веществом. Плотность числа фотонов в тепловом равновесии с веществом при температуре  $T$  в диапазоне частот фотонов между  $\nu$  и  $\nu + d\nu$  описывается формулой *спектра черного тела*:

$$n_T(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}, \quad (2.1.1)$$

где  $h$  — исходная постоянная Планка (впервые появившаяся в формуле, эквивалентной данной), а  $k_B$  — постоянная Больцмана.

---

Напомним, что мы используем систему единиц с  $c = 1$ .

---

С течением времени вещество становилось более холодным и менее плотным, и в конце концов излучение стало распространяться свободно, однако *его спектр сохранил ту же форму*. Это можно легко увидеть, если сделать предельное допущение о том, что в некоторый момент времени  $t_{\text{п. р.}}$  излучение внезапно перешло от теплового равновесия с веществом к свободному распространению. (Нижний индекс «п. р.» обозначает «последнее рассеяние».) При этом допущении фотон, который имел частоту  $\nu$  в некоторый более поздний момент времени  $t$ , когда фотоны уже путешествовали свободно, должен был иметь частоту  $\nu a(t)/a(t_{\text{п. р.}})$  в тот момент, когда излучение вышло из состояния равновесия с веществом, а потому плотность числа фотонов с частотами между  $\nu$  и  $\nu + d\nu$  в момент времени  $t$  должна иметь вид

$$n(\nu, t) d\nu = \left( \frac{a(t_{\text{п. р.}})}{a(t)} \right)^3 n_{T(t_{\text{п. р.}})} \left( \frac{\nu a(t)}{a(t_{\text{п. р.}})} \right) d\left( \frac{\nu a(t)}{a(t_{\text{п. р.}})} \right), \quad (2.1.2)$$

где множитель  $(a(t_{\text{п. р.}})/a(t))^3$  возникает из-за «разбавления» фотонов в силу расширения Вселенной. Подставляя формулу (2.1.1) в соотношение (2.1.2), мы видим, что все множители красного смещения  $a(t)/a(t_{\text{п. р.}})$  сокращаются, за исключением того, который стоит в показателе экспоненты, так что плотность числа фотонов в момент времени  $t$  задается соотношением

$$n(\nu, t) d\nu = \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T(t)}\right) - 1} = n_{T(t)}(\nu) d\nu, \quad (2.1.3)$$

где

$$T(t) = T(t_{\text{п. р.}}) \frac{a(t_{\text{п. р.}})}{a(t)}. \quad (2.1.4)$$

Следовательно, даже после того, как фотоны вышли из состояния равновесия с веществом, их плотность описывается кривой, имеющей форму спектра черного тела, только со сдвигом благодаря красному смещению температурой (2.1.4).

Этот вывод, очевидно, не претерпит изменений, если переход от непрозрачности к прозрачности происходил в течение конечного временного интервала, при этом взаимодействие фотонов с веществом на протяжении этого интервала времени ограничивалось процессами упругого рассеяния, при которых частоты фотонов не менялись. Это весьма хорошее приближение. В разд. 2.3 мы увидим, что последнее взаимодействие фотонов с веществом

имело место в тот период времени, когда космическая температура  $T$  составляла 3000 К и когда наиболее важным взаимодействием, очевидно, было упругое рассеяние фотонов электронами, при котором относительный сдвиг частоты фотонов имел порядок  $k_B T/(m_e c^2) \approx 3 \times 10^{-7}$ . В следующем разделе мы покажем, что в силу большой энтропии фотонов этот малый сдвиг частоты фотонов в процессах упругого рассеяния и относительно редких неупругих взаимодействиях фотонов с атомами водорода практически не оказывал влияния на спектр фотонов.

Первыми, кто осознал тот факт, что Вселенная должна быть в настоящий период времени наполнена излучением черного тела, стали Георгий Гамов и его сотрудники в конце 1940-х гг.<sup>1)</sup> Первые правдоподобные оценки нынешней температуры этого излучения были сделаны в 1950 г. Ральфом Альфером и Робертом Германом<sup>2)</sup>. Рассматривая космологический нуклеосинтез, который мы обсудим в разд. 3.2, они получили для текущей температуры значение 5 К. В последующие десятилетия эта работа была практически забыта, пока в 1965 г. группа исследователей из Принстона не приступила к поиску космического фонового излучения, оставшегося от раннего периода жизни Вселенной. Они имели лишь очень приблизительные представления о том, какой температуры следует ожидать. Эти представления опирались на расчеты нуклеосинтеза, выполненные П. Дж. Э. Пиблзом и предполагавшие значение 10 К<sup>3)</sup>. Прежде чем они сумели завершить свой эксперимент, реликтовое излучение было открыто Арно Пензиасом и Робертом Уилсоном в ходе изучения фоновых шумов радиотелескопа<sup>4)</sup>. Работа Пензиаса и Уилсона была опубликована вместе со статьей принстонской группы<sup>5)</sup>, разъяснявшей потенциальное значение этого открытия для космологии<sup>6)</sup>.

Исходно Пензиас и Уилсон могли сообщить лишь, что температура антенны на длине волны 7,5 см составила  $3,5 \pm 1,0$  К, подразумевая, что интенсивность излучения на этой конкретной длине волны согласуется с формулой (2.1.1)

<sup>1)</sup> G. Gamow, *Phys. Rev.* **70**, 572 (1946); R. A. Alpher, H. A. Bethe, and G. Gamow, *Phys. Rev.* **73**, 803 (1948); G. Gamow, *Phys. Rev.* **74**, 505 (1948); R. A. Alpher and R. C. Herman, *Nature* **162**, 774 (1948); R. A. Alpher, R. C. Herman, and G. Gamow, *Phys. Rev.* **74**, 1198 (1948); *ibid.* **75**, 332A (1949); *ibid.* **75**, 701 (1949); G. Gamow, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 367 (1949); R. A. Alpher, *Phys. Rev.* **74**, 1577 (1948); R. A. Alpher and R. C. Herman, *Phys. Rev.* **75**, 1089 (1949).

<sup>2)</sup> R. A. Alpher and R. C. Herman, *Rev. Mod. Phys.* **22**, 153 (1950).

<sup>3)</sup> Эта работа так и не была опубликована. В книге А. Guth, *The Inflationary Universe* (Perseus Books, Reading, MA, 1997) утверждается, что статья Пиблза была отвергнута журналом The Physical Review — по всей видимости, из-за высокого доверия к более ранней работе Р. Альфера, Г. Гамова и Р. Германа. Содержание как этой более ранней работы, так и последующей работы Пиблза и соавторов кратко описано в разд. 3.2.

<sup>4)</sup> A. A. Penzias and R. W. Wilson, *Astrophys. J.* **142**, 419 (1965).

<sup>5)</sup> R. H. Dicke, P. J. E. Peebles, P. G. Roll, and D. T. Wilkinson, *Astrophys. J.* **142**, 414 (1965).

<sup>6)</sup> Более подробную историю этих событий можно найти в книгах А. Guth, *op. cit.*, и S. Weinberg, *The First Three Minutes* (Basic Books, New York, 1977; второе издание: 1993; переведена на русский язык, последнее на текущий момент русскоязычное издание: Вайнберг С. Первые три минуты. М.: Эксмо, 2011).

при данной температуре. Разумеется, отсюда нельзя сделать вывод, что они наблюдали излучение черного тела. Затем Ролл и Уилкинсон<sup>7)</sup> измерили интенсивность излучения на длине волны 3,2 см и нашли, что температура антены составляет  $3,0 \pm 0,5$  К — в согласии с тем, чего можно было бы ожидать для излучения черного тела при температуре, измеренной Пензиасом и Уилсоном. В последующие несколько лет другие радиоастрономы провели множество измерений на других длинах волн. Эти измерения также приводили к антенной температуре около 3 К на изучаемых длинах волн с постепенно улучшавшейся погрешностью, достигшей значения порядка 0,2 К. Однако и это не позволяло считать установленным фактом, что фоновое излучение по своей природе является излучением черного тела, поскольку все указанные измерения проводились на длинах волн больше 0,3 см, где распределение энергии черного тела  $\hbar\nu n_T(\nu)$  при  $T \approx 3$  К имеет максимум. При столь больших длинах волн экспоненты мал и соотношение (2.1.1) дает

$$\hbar\nu n_T(\nu) \simeq 8\pi\nu^2 k_B T. \quad (2.1.5)$$

Это формула Рэлея—Джинса из классической статистической механики, однако она описывает длинноволновое распределение энергии излучения в различных ситуациях, более общих, чем излучение черного тела. К примеру, для излучения черного тела, «разбавленного» расширением, которое сохраняет энергию отдельных фотонов, тоже верно  $\hbar\nu n(\nu) \propto \nu^2$  при низких частотах<sup>8)</sup>. Чтобы подтвердить, что реликтовое излучение действительно описывается формулой для излучения черного тела, необходимо увидеть хотя бы начало экспоненциального спада  $n_T(\nu)$  на длинах волн короче 0,3 см.

Это было сложной задачей, поскольку для волн короче примерно 0,3 см атмосфера Земли становится все более и более непрозрачной. Однако еще в 1941 г., задолго до открытия Пензиаса и Уилсона, было проведено измерение температуры излучения на длине волны 0,264 см. Между звездой ζ Змееносца и Землей находится облако холодного молекулярного газа, поглощение света в котором приводит к появлению в спектре звезды темных линий. В 1941 г. У. С. Адамс<sup>9)</sup>, следуя идею Эндрю Маккеллара, обнаружил две темные линии в спектре ζ Змееносца, которые могли указывать на поглощение света цианом (CN) в молекулярном облаке. Первую линию, наблюдавшуюся на длине волны 3874,62 Å, можно приписать поглощению света при переходе из основного состояния CN с угловым моментом  $J = 0$  к компоненте первого колебательно возбужденного состояния с  $J = 1$ . В то же время вторая

<sup>7)</sup> P. G. Roll and D. T. Wilkinson, *Phys. Rev. Lett.* **16**, 405 (1966).

<sup>8)</sup> Падающий на земную поверхность солнечный свет дает весьма хороший пример «разбавленного» излучения черного тела; оно описывается формулой Планка (2.1.1) при температуре  $T \approx 6000$  К — температура на поверхности Солнца, но в правой части формулы (2.1.1) при этом возникает множитель  $(R_\odot/r)^2$ , где  $R_\odot$  — радиус Солнца, а  $r$  — расстояние от Солнца до Земли.

<sup>9)</sup> W. S. Adams, *Astrophys. J.* **93**, 11 (1941).

линия,  $3874,00 \text{ \AA}$ , представляла поглощение при переходе из вращательно возбужденного основного колебательного состояния  $J = 1$  к компоненте  $J = 2$  первого колебательно возбужденного состояния<sup>10)</sup>. Отсюда Маккеллар сделал вывод<sup>11)</sup> о том, что некоторая доля молекул CN в облаке находится в первой возбужденной вращательной компоненте основного колебательного состояния, которое находится выше истинного основного состояния  $J = 0$  на величину  $\hbar c/(0,264 \text{ см})$ . Отсюда он получил оценку эквивалентной молекулярной температуры  $2,3 \text{ К}$ . Конечно, он не знал о том, что возбуждение молекул CN происходит благодаря излучению, тем более — благодаря излучению черного тела. После открытия Пензиаса и Уилсона несколько астрофизиков<sup>12)</sup> независимо отметили, что этот старый результат Адамса—Маккеллара можно объяснить излучением с температурой черного тела в окрестности  $3 \text{ К}$  на длине волны  $0,264 \text{ см}$ . Теоретический анализ показал, что возбуждение вращательного состояния ничем иным объяснить невозможно<sup>13)</sup>. Такая интерпретация в дальнейшем была подтверждена продолжительными наблюдениями этой и других линий поглощения CN, а также CH и CH<sup>+</sup> в спектре звезды ζ Змееносца и других звезд<sup>14)</sup>.

То, что реликтовое излучение имеет спектр излучения черного тела, стало подтверждаться наблюдениями на длинах волн меньше  $0,3 \text{ см}$  в верхних слоях космической атмосферы, выполненных с аэростатов и ракетных зондов. На протяжении ряда лет имелись некоторые указания на то, что на таких коротких волнах наблюдаемые значения находятся выше значений, которые дает формула для черного тела. Было совершенно ясно, что необходимо выполнить измерения в космическом пространстве, однако это было сложной задачей; чтобы измерить абсолютное значение интенсивности микроволнового излучения, требуется сопоставить получаемое из космоса излучение с тем, которое испускает жидкий гелий в холодной загрузке, а он быстро испаряется. Наконец планковский характер спектра микроволнового фона был надежно установлен в 1990-х гг. с помощью спектрофотометра FIRAS на борту спутника COBE (от COsmic Background Explorer — Исследователь Космического Фона), запущенного в ноябре 1989 г.<sup>15)</sup> Когда в январе 1990 г. на заседании Американского

<sup>10)</sup> Сегодня известны более точные значения длин волн для этих двух линий:  $3874,608$  и  $3873,998 \text{ \AA}$ . Есть еще одна линия на длине волны  $3875,763 \text{ \AA}$ , порождаемая переходом вращательно возбужденного основного колебательного состояния  $J = 1$  к компоненте  $J = 0$  первого колебательно возбужденного состояния.

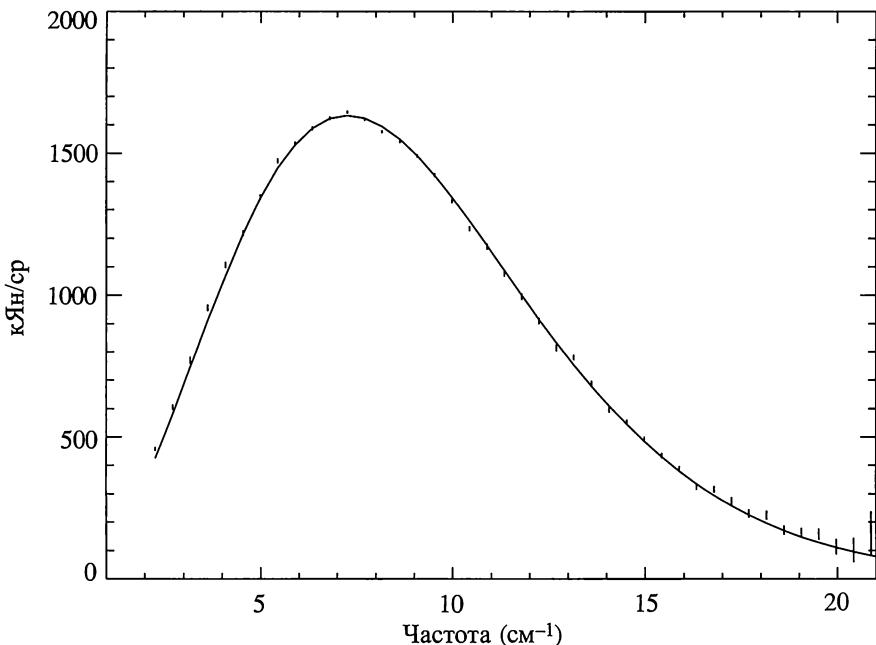
<sup>11)</sup> A. McEllar, *Publ. Dominion Astrophys. Observatory (Victoria, B. C.)* 7, 251 (1941).

<sup>12)</sup> G. Field, G. H. Herbig, and J. L. Hitchcock, *Astron. J.* **71**, 161 (1966); G. Field and J. L. Hitchcock, *Phys. Rev. Lett.* **16**, 817 (1966); *Astrophys. J.* **146**, 1 (1966); N. J. Woolf, цитируется в P. Thaddeus and J. F. Clauser, *Phys. Rev. Lett.* **16**, 819 (1966); И. С. Шкловский, *Астрономический циркуляр*, №364 (1966).

<sup>13)</sup> G. Field, G. H. Herbig, and J. L. Hitchcock, *Astron. J.* **71**, 161 (1966); P. Thaddeus and J. F. Clauser, *Phys. Rev. Lett.* **16**, 819 (1966).

<sup>14)</sup> Резюме этой ранней работы со ссылками на оригинальную литературу см. в ГиК, табл. 15.1.

<sup>15)</sup> J. C. Mather et al., *Astrophys. J.* **354**, 237 (1990).



**Рис. 2.1.** Сравнение дипольной составляющей (обсуждаемой в разд. 2.4) интенсивности излучения, наблюдавшегося спектрофотометром FIRAS на борту спутника COBE, со спектром черного тела при температуре 2,728 К (из D. J. Fixsen et al., *Astrophys. J.* **478**, 576 (1996) [astro-ph/9605054]). По вертикальной оси отложена интенсивность в кЯн на стерадиан (1 кЯн составляет  $10^{-23} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1} \cdot \text{Гц}^{-1}$ ); по горизонтальной оси отложена обратная длина волн в  $\text{см}^{-1}$ . Экспериментальная погрешность  $1\sigma$  в измерении интенсивности указана тонкими вертикальными черточками; погрешность в измерении длин волн пренебрежимо мала

астрономического общества Дж. К. Мазер показал слайд, демонстрирующий согласие наблюдаемого спектра с планковским спектром черного тела, ему аплодировали стоя. Было установлено, что фоновое излучение в диапазоне длин волн от 0,5 см до 0,05 см имеет спектр, близкий к спектру черного тела<sup>16)</sup>. На рис. 2.1 наблюдаемые данные сопоставлены со спектром черного тела. Шесть лет последующих исследований привели к значению температуры  $2,725 \pm 0,002$  К (с доверительной вероятностью 95 %)<sup>17)</sup>. Наблюдения на длинах волн между 3 см и 75 см и на длине волны 0,03 см также находятся в полном согласии с формулой Планка при этой температуре<sup>18)</sup>.

<sup>16)</sup> J. C. Mather et al., *Astrophys. J.* **420**, 439 (1994).

<sup>17)</sup> J. C. Mather, D. J. Fixsen, R. A. Shafer, C. Mosier, and D. T. Wilkinson, *Astrophys. J.* **512**, 511 (1999). В обзоре 1999 г. G. F. Smoot, в *Proc. 3K Cosmology Conf.*, eds. A. Melchiorri et al. [astro-ph/9902027], приводится значение температуры  $2,7377 \pm 0,0038$  К (доверительная вероятность 95 %), однако обычно цитируются результаты Мазера с соавторами.

<sup>18)</sup> См. обзор в G. Sironi et al., в *Proc. Third Sakharov Conf. — Moscow 2002* [astro-ph/0301354].

Плотность энергии для этого излучения описывается формулой

$$\int_0^{\infty} h\nu n(\nu) d\nu = a_B T^4, \quad (2.1.6)$$

где  $a_B$  — постоянная энергии излучения; в системе единиц СГС она имеет значение

$$a_B = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^3} = 7,56577(5) \times 10^{-15} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3} \cdot \text{град}^{-4}. \quad (2.1.7)$$

Выбирая  $T = 2,725$  К, получаем эквивалентную плотность массы (возвращаясь к единицам с  $c = 1$ ):

$$\rho_{\gamma 0} = a_B T_{\gamma 0}^4 = 4,64 \times 10^{-34} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}.$$

Вычисляя отношение этой величины к критической плотности (1.5.28), получаем

$$\Omega_{\gamma} \equiv \frac{\rho_{\gamma 0}}{\rho_{0,\text{крит}}} = 2,47 \times 10^{-5} h^{-2}. \quad (2.1.8)$$

В разд. 3.1 мы увидим, что фотонам сопутствуют нейтрино и антинейтрино трех различных видов, что дает полную плотность энергии излучения (для безмассовых или почти безмассовых частиц)

$$\rho_{\text{и}0} = \left[ 1 + 3 \left( \frac{7}{8} \right) \left( \frac{4}{11} \right)^{4/3} \right] \rho_{\gamma 0} = 7,80 \times 10^{-34} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \quad (2.1.9)$$

или, другими словами, с учетом (1.5.28),

$$\Omega_{\text{i}} \equiv \frac{\rho_{\text{и}0}}{\rho_{0,\text{крит}}} = 4,15 \times 10^{-5} h^{-2}. \quad (2.1.10)$$

Мы видим, что  $\rho_{\text{и}0}$  намного меньше критической плотности массы, необходимой для того, чтобы получить  $K = 0$ , и намного меньше даже плотности массы обычного вещества в звездах. Это та причина, по которой мы в общем случае пренебрегаем величиной  $\Omega_{\text{i}}$  при вычислении фотометрических расстояний как функций красного смещения.

С другой стороны, даже в настоящее время плотность числа фотонов является относительно большой. Соотношение (2.1.1) дает<sup>19)</sup>

$$n_{\gamma 0} = \int_0^{\infty} \frac{8\pi\nu^2 d\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} = \frac{30\zeta(3)}{\pi^4} \frac{a_B T^3}{k_B} =$$

<sup>19)</sup> В формуле (2.1.1) использована дзета-функция Римана

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z},$$

где  $n$  — целые числа,  $z = x + iy$ ;  $x > 1$ . — Прим. ред. перев.

$$= 0,3702 \frac{a_B T^3}{k_B} = 20,28 [T(\text{в кельвинах})]^3 \text{см}^{-3}, \quad (2.1.11)$$

где  $\zeta(3) = 1,202057 \dots$ . При  $T = 2,725$  К отсюда получается текущая плотность числа фотонов

$$n_{\gamma 0} = 410 \text{ фотонов/см}^3. \quad (2.1.12)$$

Это гораздо выше нынешней плотности числа нуклонов  $n_b$ , даваемой соотношением

$$n_b = \frac{3\Omega_6 H_0^2}{8\pi G m_h} = 1,123 \times 10^{-5} \Omega_6 h^2 \text{ нуклонов/см}^3. \quad (2.1.13)$$

Обе величины,  $n_\gamma$  и  $n_b$ , изменяются со временем как  $a^{-3}(t)$ , так что отношение  $n_\gamma/n_b$  было одним и тем же по меньшей мере на протяжении всего того периода времени, когда фотоны распространялись свободно.

\* \* \*

Реликтовое космическое излучение — явление, открытия которого ждали очень долго, но которое было трудно пронаблюдать. Протон из космических лучей умеренной энергии, соударяясь с фотоном, может привести лишь к рассеянию последнего — процесс, интенсивность которого пропорциональна квадрату постоянной тонкой структуры  $\alpha \simeq 1/137$ . Однако если протон обладает достаточно большой энергией, то становится возможным также превращение протона в  $\pi$ -мезон в ходе реакций  $\gamma + p \rightarrow \pi^0 + p$  или  $\gamma + p \rightarrow \pi^+ + n$  — процессы, интенсивность которых пропорциональна  $\alpha$ , а не  $\alpha^2$ . Предполагая, что космические лучи высокой энергии приходят к нам извне нашей Галактики, мы можем ожидать провала в спектре протонов из космических лучей при таких энергиях, когда эффективное сечение для этих процессов становится заметным<sup>20)</sup>. Хотя некоторые пионы могут возникнуть при более низких энергиях, эффективный порог задается значением полной энергии  $W$  исходных протона и фотона в системе центра масс, равным  $m_\Delta = 1232$  МэВ — массе пион-нуклонного резонанса со спиновой четностью  $3/2^+$  и изоспином  $3/2$ . Энергия в системе центра масс равна

$$W = \sqrt{\left(q + \sqrt{p^2 + m_p^2}\right)^2 - |\mathbf{q} + \mathbf{p}|^2} \simeq \sqrt{2qp(1 - \cos \theta) + m_p^2}, \quad (2.1.14)$$

где  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{p}$  — первоначальные импульсы фотона и протона ( $p \gg m_p \gg q$ ), а  $\theta$  — угол между ними. Тогда пороговое условие  $W > m_\Delta$  требует, чтобы

$$qp(1 - \cos \theta) > m_\Delta^2 - m_p^2. \quad (2.1.15)$$

<sup>20)</sup> K. Greisen, *Phys. Rev. Lett.* **16**, 748 (1966); Г. Т. Зацепин, В. А. Кузьмин, *Письма в ЖЭТФ*, **4**, 114 (1966) (англ. пер.: G. T. Zatsepin and V. A. Kuzmin, *Sov. Phys. JETP Lett.* **4**, 78 (1966)); F. W. Stecker, *Phys. Rev. Lett.* **21**, 1016 (1968).

Типичная энергия фотона из спектра излучения черного тела при температуре  $T_{\gamma 0} = 2,725\text{K}$  составляет  $\rho_{\gamma 0}/n_{\gamma 0} \simeq 6 \times 10^{-4}$  эВ, а наибольшее значение выражения  $1 - \cos \theta$  равно 2, так что эффективный порог примерно задается энергией протона

$$p_{\text{порог}} \approx \frac{m_{\Delta}^2 - m_p^2}{2\rho_{\gamma 0}/n_{\gamma 0}} \simeq 10^{20} \text{ эВ.} \quad (2.1.16)$$

Этот эффект не так легко увидеть. Поток протонов с энергиями между  $E$  и  $E + dE$  в космических лучах ведет себя примерно как  $E^{-3} dE$ , а потому протонов со столь высокой энергией (2.1.16) весьма мало: примерно один на квадратный километр в год с энергией выше  $10^{19}$  эВ и 0,01 на квадратный километр в год с энергией выше  $10^{20}$  эВ. При таких пропорциях непосредственное наблюдение становится очевидно невозможным, и космические лучи приходится изучать косвенно, наблюдая на поверхности Земли мощные ливни фотонов и порождаемых ими заряженных частиц. Помимо этого, распределение фотонов по энергиям и направлениям является гладким, и искать следует не резкий вырез при  $10^{20}$  эВ, а провал ниже кривой  $E^{-3}$  в области вокруг этого значения энергии<sup>21)</sup>. Детектор Akeno Giant Air Shower Array<sup>22)</sup> не обнаружил никаких следов такого эффекта, однако последующий анализ этого и других наблюдений показал наличие искомого эффекта<sup>23)</sup>. Более свежие свидетельства в пользу наличия такого провала принес эксперимент High Resolution Fly's Eye<sup>24)</sup>. В 2006 г. эта исследовательская группа объявила об «отчетливом подавлении» первичного спектра космических лучей при энергии  $6 \times 10^{19}$  эВ — как и ожидалось<sup>25)</sup>.

## 2.2

### Эпоха равновесия

**Энтропия в расчете на один барион • Баланс излучения и вещества • Разделение энергии**

Как уже упоминалось в предыдущем разделе, если мы заглянем достаточно далеко назад во времени, то совершенно определенно увидим эпоху, когда температура и плотность были настолько высокими, что излучение и вещество находились в состоянии теплового равновесия. Сейчас мы изучим эту

<sup>21)</sup> См., например, I. F. M. Albuquerque and G. F. Smoot, *Astroparticle Phys.* **25**, 375 (2006) [astro-ph/0504088].

<sup>22)</sup> M. Takeda et al. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1163 (1998).

<sup>23)</sup> J. N. Bahcall and E. Waxman, *Phys. Lett.* **B556**, 1 (2003) [hep-ph/0206217].

<sup>24)</sup> R. U. Abbasi et al., *Phys. Rev. Lett.* **92**, 151101 (2004) [astro-ph/0208243]; *Phys. Lett.* **B619**, 271 (2005) [astro-ph/0501317].

<sup>25)</sup> G. B. Thompson, для HiRes Collaboration, в *Proc. Quarks'06 Conf.* [astro-ph/0609403]; R. U. Abbasi et al., astro-ph/0703099.

эпоху, перепрыгнув тот промежуточный период времени, в течение которого излучение покидало состояние равновесия с веществом и который станет темой следующего раздела.

Как мы видели в предыдущем разделе, при свободном расширении фотонов частотное распределение сохраняет формулу планковского спектра черного тела (2.1.1), но с температурой, спадающей как  $1/a(t)$ . С другой стороны, распределение импульсов для нерелятивистских частиц вроде электрона или нуклона при свободном расширении сохраняет форму распределения Максвелла—Больцмана,

$$n(p) dp \sim \exp\left(\frac{-p^2}{2mk_B T}\right),$$

однако поскольку (как показывает соотношение (1.1.23)) импульс любой частицы при расширении Вселенной уменьшается как  $1/a$ , температура распределения Максвелла—Больцмана снижается как  $1/a^2(t)$ . Если излучение находится в равновесии с веществом, что возобладает? Будет ли температура снижаться как  $1/a(t)$ , как  $1/a^2(t)$  или каким-то более сложным образом?

Спор решается демократическим путем — по принципу «одна частица — один голос». Поскольку фотонов гораздо больше, чем электронов или нуклонов, фотоны побеждают — и температура спадает почти в точности как  $1/a(t)$ .

Мы можем более подробно разобраться в этом, применяя второй закон термодинамики. В состоянии равновесия и энтропия, и число барионов (которое при температурах  $\ll 10^{13}$  К представляет собой число протонов и нейтронов) в любом сопутствующем объеме постоянно, так что их отношение — энтропия в расчете на один барион — также будет постоянным. Энтропию в расчете на один барион удобно записать в виде  $k_B \sigma$ , где  $k_B$  — постоянная Больцмана, а  $\sigma$  безразмерно. Второй закон термодинамики говорит нам, что эта величина удовлетворяет соотношению

$$d(k_B \sigma) = \frac{d(\epsilon/n_b) + p d(1/n_b)}{T}, \quad (2.2.1)$$

где  $n_b$  — плотность числа барионов (а значит,  $1/n_b$  — объем, занимаемый одним барионом),  $\epsilon$  — плотность тепловой энергии, а  $p$  — давление. Для простоты рассмотрим идеальный газ фотонов и нерелятивистских частиц (главным образом протонов, ядер гелия и электронов) с фиксированным (порядка единицы) числом  $\mathcal{N}$  нерелятивистских частиц в расчете на один барион. Тогда

$$\epsilon = a_B T^4 + \frac{3}{2} n_b \mathcal{N} k_B T, \quad p = \frac{1}{3} a_B T^4 + n_b \mathcal{N} k_B T, \quad (2.2.2)$$

где  $a_B$  — постоянная энергии излучения (2.1.7). Вот решение уравнения (2.2.1):

$$\sigma = \frac{4a_B T^3}{3n_b k_B} + \mathcal{N} \ln \left( \frac{T^{3/2}}{n_b C} \right), \quad (2.2.3)$$

где  $C$  — произвольная постоянная интегрирования. В состоянии теплового равновесия величина  $\sigma$  остается неизменной.

В предыдущем разделе мы видели, что первый член в соотношении (2.2.3) в настоящее время превышает  $10^8$ . (Сопоставьте (2.1.12) и (2.1.13).) Примем допущение, что эта величина была значительно больше единицы и тогда, когда фотоны находились в равновесии с веществом. Поскольку в эту эпоху параметр  $\sigma$  был постоянным, это означает, что отношение  $T^3/n_b$  в эпоху равновесия также оставалось практически неизменным, если только не произошло колоссального изменения величины  $T^{3/2}/n_b$ . Например, если в какой-то момент времени в течение эпохи равновесия первый член в (2.2.3) имел порядок  $10^8$ , то для его изменения хотя бы на 0,01 % из неизменности  $\sigma$  вытекает необходимость изменения величины  $T^{3/2}/n_b$  на множитель  $e^{10000/N}$ . Мы не собираемся рассматривать здесь столь чудовищные отношения плотностей или температур, так что можем просто сделать вывод, что величина  $T^3/n_b$  при тепловом равновесии практически постоянна. В предыдущем разделе мы видели также, что это отношение было неизменным и тогда, когда фотоны распространялись свободно, и тогда, когда их взаимодействие с веществом целиком сводилось к абсолютно упругому томсоновскому рассеянию. Отсюда следует, что это отношение было очень близко к постоянному на протяжении всего рассматриваемого здесь периода — с самого его начала и вплоть до настоящего времени. Если мы по определению положим постоянную  $C$  в соотношении (2.2.3) равной значению  $T^{3/2}/n_b$  в некий typicalный момент времени эпохи равновесия, то энтропия в расчете на барион на протяжении этой эпохи может быть выбрана в виде

$$\sigma = \frac{4a_B T^3}{3n_b k_B} = \frac{3,60 n_{\gamma 0}}{n_{b0}} = 1,31 \times 10^8 h^{-2} \Omega_b^{-1}. \quad (2.2.4)$$

Сохранение барионного числа говорит нам о постоянстве  $n_b a^3$ , так что из неизменности (2.2.3) вытекает  $T \propto 1/a$ .

---

Попутно заметим, что если бы первый член в (2.2.3) имел порядок  $10^{-8}$ , вместо того чтобы быть больше  $10^8$ , то постоянным при тепловом равновесии должен был бы оставаться логарифм во втором члене, и в этом случае мы получили бы  $T \propto n_b^{2/3} \propto a^{-2}$  — результат, ожидаемый в случае преобладания частиц в тепловой эволюции.

---

Теперь мы можем понять, почему спектр черного тела с  $T \propto 1/a$  сохраняется при выходе фотонов из равновесия с веществом, даже если мы принимаем в расчет небольшие неупругие эффекты вроде потерь энергии электрона за счет отдачи в фотон-электронном рассеянии. Эффективный обмен энергией фотонов с веществом прекращается при  $\Gamma_\gamma < H$ , где  $H \equiv \dot{a}/a$ , а  $\Gamma_\gamma$  — темп, с которым фотон теряет или приобретает энергию  $k_B T$  при рассеянии на электронах (будет вычислен позже). Однако темп  $\Gamma_e$ , с которым теряет или

приобретает энергию  $k_B T$  отдельный электрон при рассеянии на фотонах, больше  $\Gamma_\gamma$  на множитель  $n_\gamma/n_e > 10^8$ , так что когда  $\Gamma_\gamma$  оказывается ниже  $H$ , мы все еще имеем  $\Gamma_e \gg H$ . Таким образом, вместо спада кинетических энергий электронов по закону  $1/a^2$ , как было бы при свободном расширении, электроны продолжают оставаться в тепловом равновесии с фотонами. В то же время температура фотонов в равновесии с веществом ведет себя как  $1/a$  и, как мы видели в предыдущем разделе, продолжает снижаться как  $1/a$  и тогда, когда взаимодействие с веществом прекращается, а потому на протяжении всего этого периода температура электронов также спадает как  $1/a$ , и последние несколько обменов энергией между электронами и фотонами не влияют на распределение энергии фотонов.

В соответствии с результатами, которые цитировались в предыдущем разделе, текущее значение отношения эквивалентной плотности массы фотонов и нейтрино к полной плотности массы вещества  $\rho_{\text{и}0} = \Omega_{\text{и}} \rho_{0,\text{крит}}$  составляет

$$\frac{\rho_{\text{и}0}}{\rho_{\text{м}0}} = \frac{\Omega_{\text{и}}}{\Omega_{\text{м}}} = 4,15 \times 10^{-5} \Omega_{\text{м}}^{-1} h^{-2}. \quad (2.2.5)$$

Как мы видели выше, плотность энергии фотонов и нейтрино менялась как  $T^4 \propto a^{-4}$  даже до того, как началось свободное распространение фотонов, тогда как плотность лишенного давления вещества менялась как  $a^{-3}$ , а значит,  $\rho_{\text{и}}/\rho_{\text{м}}$  менялось как  $1/a \propto T$ . Поэтому плотность энергии фотонов и нейтрино была эквивалентна плотности энергии вещества при температуре

$$T_{\text{ЭКВ}} = \frac{T_{\gamma0} \Omega_{\text{м}}}{\Omega_{\text{и}}} = 6,56 \times 10^4 \text{ К} \times \Omega_{\text{м}} h^2, \quad (2.2.6)$$

а в более ранние времена  $\rho_{\text{и}}$  была выше  $\rho_{\text{м}}$ . Для  $\Omega_{\text{м}} h^2 \simeq 0,15$  величина  $T_{\text{ЭКВ}}$  составляет примерно  $10^4$  К.

Хотя столкновения не могут повлиять на *распределение* энергии фотонов, пока количество фотонов гораздо больше количества заряженных частиц, при достаточно высоких температурах соударения могут радикально изменить энергию отдельно взятого фотона. Любопытно выяснить, в какой момент фотоны перестали обмениваться энергиами порядка  $k_B T$  с электронами. Частота, с которой любой отдельно взятый фотон рассеивается электронами, есть  $\Lambda_\gamma = \sigma_T n_e c$ , где  $n_e$  — плотность числа электронов, а  $\sigma_T = 0,66525 \times 10^{-24} \text{ см}^{-2}$  — поперечное сечение томсоновского рассеяния — упругого рассеяния фотонов нерелятивистскими электронами. Как мы увидим в разд. 3.2, 76 % вещества Вселенной в эту эпоху составлял ионизированный водород, а остальное — гелий, находившийся в полностью ионизированном состоянии при температурах выше 20 000 К, так что при соотношениях «один электрон на нуклон» для водорода и «половина электрона на нуклон» для гелия фактическое число электронов в расчете на один нуклон составляет  $0,76 + (1/2)0,24 = 0,88$ , а плотность числа электронов при температуре  $T$  равна  $n_e \simeq 0,88 n_b = 0,88 n_{b0} (T/T_{\gamma0})^3$ , где ноль в нижнем индексе, как обычно,

указывает на значение в текущий момент времени. С использованием соотношения (2.1.13) частота рассеяния фотона электронами запишется в виде

$$\Lambda_\gamma = 0,88n_{60} \left( \frac{T}{T_{\gamma 0}} \right)^3 \sigma_T c = 1,97 \times 10^{-19} \text{ с}^{-1} \times \Omega_6 h^2 \left( \frac{T}{T_{\gamma 0}} \right)^3 \quad (2.2.7)$$

Однако это не та частота, которая отвечает за эффективность энергетического обмена между веществом и излучением. Фотон с энергией, значительно меньшей, чем  $m_e c^2$ , при соударении с нерелятивистским электроном передает ему импульс, равный по порядку величины его собственному импульсу — как правило, это примерно  $k_B T$  (в системе единиц с  $c = 1$ ), а значит, приобретает или теряет энергию порядка  $(k_B T)^2/m_e$ . (Это согласуется с (С.20) при  $\omega \approx k_B T \ll m_e c^2$ .) Следовательно, скорость передачи энергии порядка  $k_B T$  между заданным фотоном и электронами равна частоте соударений, умноженной на долю энергии  $k_B T$ , передаваемой при одном соударении:

$$\Gamma_\gamma \simeq \left( \frac{k_B T}{m_e} \right) \Lambda_\gamma \approx 9,0 \times 10^{-29} \text{ с}^{-1} \times \Omega_6 h^2 \left( \frac{T}{T_{\gamma 0}} \right)^4 \quad (2.2.8)$$

Нам следует сопоставить это со скоростью расширения Вселенной. В качестве предварительного допущения примем, что в тот момент времени, который нас здесь интересует, в составе плотности Вселенной преобладали фотоны и нейтрино, а не вещество; в этом случае скорость расширения Вселенной есть

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_m T^4}{T_{\gamma 0}^4}} = 2,1 \times 10^{-20} \text{ с}^{-1} \times \left( \frac{T}{T_{\gamma 0}} \right)^2. \quad (2.2.9)$$

Следовательно,  $\Gamma_\gamma$  превышало  $H$  до тех пор, пока температура не упала до значения порядка

$$T_{\text{замерзания}} = 1,5 \times 10^4 \text{ К} \times (\Omega_6 h^2)^{-1/2}. \quad (2.2.10)$$

При  $\Omega_6 h^2 \simeq 0,02$  это составляет около  $10^5$  К.

---

Сопоставление с (2.2.6) показывает, что при правдоподобных значениях  $\Omega_m h^2$  и  $\Omega_6 h^2$  — например,  $\Omega_m h^2 \simeq 0,15$  и  $\Omega_6 h^2 \simeq 0,02$ , — мы получаем  $T_{\text{замерзания}} = T_{\text{экв}}$ , так что температура (2.2.10) была достигнута тогда, когда в расширении Вселенной все еще доминировало излучение, как мы и предполагали выше.

---

После того как температура упала ниже примерно  $10^5$  К, сколь-либо значимый обмен энергией между фотонами и электронами прекратился, однако частота упругого рассеяния (2.2.7) при этой температуре была все еще приблизительно в  $10^5$  раз больше, чем  $H$ . Если бы соотношение (2.2.7) оставалось справедливым, то  $\Lambda_\gamma$  должно было бы превышать  $H$  вплоть до гораздо более

низких значений температуры. При  $3 \text{ K} \ll T \ll 10^4 \text{ K}$  во Вселенной преобладало вещество, так что

$$H = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_m T^3}{T_{\gamma 0}^3}} = 3,3 \times 10^{-18} \text{ c}^{-1} \times \sqrt{\Omega_m h^2} \left( \frac{T}{T_{\gamma 0}} \right)^{3/2}$$

Эта величина стала равной частоте (2.2.7) при температуре

$$T \simeq 18 \text{ K} \times \frac{(\Omega_m h^2)^{1/3}}{(\Omega_b h^2)^{2/3}},$$

или около 130 К для  $\Omega_m h^2 = 0,15$  и  $\Omega_b h^2 = 0,02$ , и до этого момента каждый фотон был бы многократно рассеян электронами при каждом удвоении  $a(t)$ . Это отличается от реального хода событий, потому что когда температура стала достаточно низкой для того, чтобы электроны и ядра могли соединиться и образовать нейтральные атомы, частота упругого рассеяния  $\Lambda_\gamma$  резко упала ниже значения (2.2.7). Как мы увидим в следующем разделе, это случилось при температуре около 3000 К, которая отметила собой конец эпохи быстрого рассеяния фотонов электронами.

## 2.3

### Рекомбинация и последнее рассеяние

**Распределение Максвелла—Больцмана • Формула Саха • Распад  $n = 2$  в  $n = 1$  • Анализ Пиблза • Вероятность Лайман-с убегания • Уравнение для скорости • Дробная ионизация • Непрозрачность • Приближение Джонса—Вайза**

В предыдущем разделе мы видели, что эффективный обмен энергией между фотонами и электронами прекращается, когда температура расширяющейся Вселенной падает до значения примерно  $10^5$  К. После этого рассеяние фотонов свободными электронами продолжается, но без заметных потерь и приобретений энергии, и прекращается тогда, когда свободные электроны становятся связанными в атомах водорода и гелия и прекращают рассеивать фотоны. Этот процесс связывания называется *рекомбинацией*<sup>26)</sup>. Посмотрим, когда именно это происходит.

Начало наших вычислений относится к моменту времени, достаточно раннему для того, чтобы протоны, электроны, атомы водорода и атомы гелия находились в тепловом равновесии при температуре излучения. В равновес-

<sup>26)</sup> Приставка «ре-» в слове «рекомбинация» может вводить в заблуждение: до этого момента электроны и протоны никогда не были объединены в атомы. В астрофизике это слово стало стандартным термином для обозначения захвата электронов атомами.

иом газе при температуре  $T$  плотность числа любых нерелятивистских невырожденных частиц вида  $i$  описывается формулой Максвелла—Больцмана:

$$n_i = g_i (2\pi\hbar)^{-3} \exp\left(\frac{\mu_i}{k_B T}\right) \int d^3 q \exp\left[-\left(m_i + \frac{q^2}{2m_i}\right)\frac{1}{k_B T}\right], \quad (2.3.1)$$

где  $m_i$  — масса частицы,  $g_i$  — число ее спиновых состояний, а  $\mu_i$  — характеристика газа, известная как *химический потенциал* частиц вида  $i$ . (Обобщение формулы (2.3.1), охватывающее релятивистские эффекты и вырождение, приводится в следующей главе.) Свойство химических потенциалов, которое делает полезной эту формулу, состоит в том, что они неизменны в любой быстро протекающей реакции в газе. В нашем случае частицами являются протоны, электроны и атомы водорода в любом связанном состоянии, так что  $i$  пробегает значения  $p$ ,  $e$ ,  $1s$ ,  $2s$ ,  $2p$  и т. д.

Как уже упоминалось, около 24 % массы ранней Вселенной приходилось на ядра гелия, однако атомы гелия являются гораздо болееочно связанными по сравнению с атомами водорода, так что в интересующий нас момент времени — скажем,  $T < 4400$  К — практически весь гелий был «заперт» в форме нейтральных атомов и потому не играл тут никакой роли.

Спин электрона и протона равен  $1/2$ , так что  $g_p = g_e = 2$ , тогда как у основного  $1s$ -состояния атома водорода есть два сверхтонких состояния со спинами 0 и 1, так что  $g_{1s} = 1 + 3 = 4$ . Сперва реакции рекомбинации и ионизации  $p + e \rightleftharpoons H_{1s}$  происходили очень быстро посредством каскадов излучательных переходов между возбужденными состояниями, так что химические потенциалы удовлетворяли соотношению

$$\mu_p + \mu_e = \mu_{1s}. \quad (2.3.2)$$

Фотоны могут с легкостью возникать и исчезать в реакциях вида  $e + p \rightleftharpoons e + p + \gamma$ , так что их химические потенциалы устраняются.

Интегралы в (2.3.1) равны

$$(2\pi\hbar)^{-3} \int d^3 p \exp\left(-\frac{p^2}{2mk_B T}\right) = \left(\frac{mk_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2},$$

так что закон сохранения (2.3.2) приводит к соотношению

$$\frac{n_{1s}}{n_p n_e} = \left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{-3/2} \exp\left(\frac{B_1}{k_B T}\right), \quad (2.3.3)$$

где  $B_1 \equiv m_p + m_e - m_H = 13,6$  эВ — энергия связи основного  $1s$ -состояния водорода. (Мы игнорируем здесь разницу между массой водорода и массой

протона везде, кроме показателя экспоненты.) Помимо этого, зарядовая нейтральность космического вещества требует выполнения условия

$$n_e = n_p. \quad (2.3.4)$$

Далее, в состоянии равновесия плотность числа атомов водорода в любом из возбужденных состояний отличается в меньшую сторону от плотности числа в основных состояниях множителем порядка  $\exp(-\Delta E/(k_B T))$ , где  $\Delta E$  — энергия возбуждения, которая никак не меньше разницы в энергии связи между основными состояниями водорода  $n = 1$  и  $n = 2$ , составляющей 10,6 эВ.

---

Возбужденные состояния имеют тот же химический потенциал, что и основное состояние, поскольку в равновесии атомы могут быстро переходить из одного состояния в другое, испуская и поглощая фотоны.

---

Для температур ниже 4200 К этот экспоненциальный множитель меньше  $6 \times 10^{-13}$ , так что мы можем в качестве хорошего приближения пренебречь наличием возбужденных атомов водорода, пока поддерживается состояние равновесия. Как мы увидим в разд. 3.2, вещество к моменту рекомбинации примерно на 76 % состояло из нейтрального и ионизированного водорода, так что мы можем принять

$$n_p + n_{1s} = 0,76n_6, \quad (2.3.5)$$

где  $n_6$  — плотность числа барионов (т. е., при интересующих нас здесь температурах, плотность числа нейтронов и протонов). Следовательно, относительная ионизация водорода  $X \equiv n_p/(n_p + n_{1s})$  удовлетворяет *уравнению Саха*:

$$X(1 + SX) = 1, \quad (2.3.6)$$

где

$$S \equiv \frac{(n_p + n_{1s})n_{1s}}{n_p^2} = 0,76n_6 \left( \frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{-3/2} \exp \left( \frac{B_1}{k_B T} \right). \quad (2.3.7)$$

Можно считать, что в равновесном состоянии относительная ионизация становится малой, когда температура падает ниже значения  $B_1/k_B = 157894$  К, однако даже в равновесии рекомбинация заметно запаздывает из-за малого значения коэффициента при экспоненте в (2.3.7). Для  $n_6 = n_{60}(T/T_{\gamma 0})^3$  и  $n_{60}$  из (2.1.3) имеем

$$S = 1,747 \times 10^{-22} e^{157894/T} T^{3/2} \Omega_6 h^2, \quad (2.3.8)$$

где  $h$  — снова постоянная Хаббла в единицах 100 (км/с)/Мпк, а  $T$  — температура в кельвинах. Эта функция чрезвычайно быстро меняется в окрестностях единицы, так что уравнение Саха дает резко выраженную температуру рекомбинации, как показано в табл. 2.1. Из этой таблицы мы видим, что равновесное значение ионизации спадает с 97 % при  $T = 4200$  К до менее 1 % при  $T = 3000$  К.

Таблица 2.1

Равновесная ионизация водорода  $X$   
при различных значениях температуры  $T$  и  $\Omega_6 h^2$

$T, \text{ K}$	$\Omega_6 h^2 = 0,01$	$\Omega_6 h^2 = 0,02$	$\Omega_6 h^2 = 0,03$
4500	0,999	0,998	0,997
4200	0,990	0,981	0,971
4000	0,945	0,900	0,863
3800	0,747	0,634	0,565
3600	0,383	0,290	0,244
3400	0,131	0,094	0,078
3200	0,0337	0,0240	0,0196
3000	0,00693	0,00491	0,00401
2800	0,00112	0,00079	0,00065
2,725	$2,8 \times 10^{-12571}$	$2,0 \times 10^{-12571}$	$1,6 \times 10^{-12571}$

Эти выкладки дают нам правильный порядок величины для температуры резкого спада относительной ионизации, однако в деталях они неверны, поскольку в действительности равновесие нарушается для нижних уровней ионизации. Фотон, испущенный при захвате свободного электрона протоном с переходом в основное состояние, обладает энергией, более чем достаточной для ионизации другого атома водорода, так что этот процесс не порождает результирующего снижения ионизации. Подобно этому, фотон, испущенный электроном при падении с высокой орбиты атома водорода с главным квантовым числом  $n \geq 3$  в основное состояние, обладает более чем достаточной энергией для того, чтобы поднять электрон из основного состояния в возбужденное состояние  $n = 2$  в каком-либо другом атоме водорода, так что и этот процесс не ведет к результирующему приросту числа электронов в основном состоянии. Основное состояние водорода достигается, как правило, путем формирования возбужденных состояний  $H^*$  в ходе реакции  $e + p \rightarrow H^* + \gamma$  с последующим каскадом радиационных распадов до возбужденного состояния  $n = 2$ . Завершающий переход из возбужденного  $2p$ -состояния в основное  $1s$ -состояние с испусканием единственного фотона Лайман- $\alpha$  подавляется тем же явлением, которое препятствует переходу свободных электронов или электронов из высших возбужденных состояний в основное состояние: лаймановский фотон не сливаются с фоном теплового излучения — он обладает большим резонансным сечением возбуждения другого атома водорода из основного состояния в первое возбужденное состояние, откуда тот в боль-

шансов случася рационализируется (что отражено в малых равновесных числах для атомов водорода в возбужденных состояниях). Однако в космологии этот процесс не является в конце концов абсолютно безрезультатным, поскольку испущенный каким-то одним атомом лаймановский фотон обладает энергией, едва достаточной для возбуждения другого атома водорода из основного состояния в возбужденное  $2p$ -состояние, и если этот фотон не вступит во взаимодействие с другим атомом достаточно быстро, космологическое красное смещение уведет его энергию за пределы линии резонанса, после чего ему перестанет хватать энергии для возбуждения атомов водорода в основном состоянии. Однако даже при этом формирование основного состояния посредством радиационного распада из  $2p$ -состояния столь непродуктивно, что мы обязаны рассмотреть более медленные маршруты формирования основного состояния — такие, как формирование возбужденного  $2s$ -состояния, которое может распадаться до основного состояния только путем испускания двух фотонов, ни один из которых не обладает энергией, достаточной для возбуждения атома водорода в основном состоянии. Когда ионизация становится малой, темп этих реакций больше не может конкурировать со скоростью расширения Вселенной, и ионизация больше не спадает настолько быстро, как в состоянии теплового равновесия<sup>27)</sup>.

Все это довольно сложный вопрос, однако основные черты процесса рекомбинации разглядеть не так трудно. Мы будем использовать следующие приближения:

1. Столкновения атомов водорода и излучательные переходы между состояниями этих атомов происходят достаточно быстро для того, чтобы все состояния атомов находились в равновесии друг с другом при температуре излучения  $T$ , за исключением основного  $1s$ -состояния, которое, как уже упоминалось, достигается только посредством медленных либо малопродуктивных процессов.

Отсюда следует, что плотность числа состояний  $n\ell$  водорода с главным квантовым числом  $n$  ( $n > 1$ ) и орбитальным угловым моментом  $\ell$  можно выразить в терминах плотности числа любого одного состояния — скажем,

<sup>27)</sup> Классической работой на эту тему является статья P. J. E. Peebles, *Astrophys. J.* **153**, 1 (1968). См. также Ya. B. Zel'dovich, V. G. Kurt, and R. A. Sunyaev, *Soviet Physics JETP* **28**, 146 (1969). На момент написания книги наиболее тщательный (из известных мне) анализ был проведен в работах S. Seager, D. D. Sasselov, and D. Scott, *Astrophys. J.* **523**, L1 (1999); *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **128**, 407 (2000) [astro-ph/9909275]. Поправки порядка процента от вычисленных значений, возникающие из-за дополнительных переходов и стимулированного излучения, найдены в V. K. Dubrovich and S. I. Grachev, *Astron. Lett.* **31**, 359 (2005) [astro-ph/051672]; J. Chluba and R. A. Sunyaev, *Astron. Astrophys.* **446**, 39 (2006) [astro-ph/0508144]; W. Y. Wong and D. Scott, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **375**, 1441 (2007) [astro-ph/0610691]. Возможные применения наблюдения реликтового излучения к устранению этих неопределенностей обсуждаются в A. Lewis, J. Weller, and R. Battye, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **373**, 561 (2006) [astro-ph/0606552]. Ради простоты я буду принимать те же приближения, что и Пиблз, но использую метод «вероятности убегания», обсуждавшийся в работе Seager et al., который, как мне представляется, является более непосредственным и легче обосновывается.

$1s$ -состояния<sup>28)</sup>:

$$n_{nl} = (2\ell + 1)n_{2s} \exp\left(\frac{B_n - B_2}{k_B T}\right), \quad (2.3.9)$$

где  $B_n$  — энергия связи<sup>29)</sup> состояния с главным квантовым числом  $n$ .

2. Результирующая скорость изменения популяции атомов водорода в  $1s$ -состоянии дается скоростью радиационных распадов из  $2s$ - и  $2p$ -состояний за вычетом скорости возбуждения к этим состояниям из  $1s$ -состояния. В соответствии с обсуждением выше, мы предполагаем, что все прочие процессы, ведущие к основному состоянию, компенсируются ионизацией или повторным возбуждением других атомов испущенными фотонами.

Поскольку рекомбинация происходит при столкновении электронов с протонами, она сокращает число  $n_e a^3$  свободных электронов в сопутствующем объеме  $a^3$  со скоростью  $\alpha(T) n_p n_e a^3$ , пропорциональной как  $n_p = n_e$ , так и  $n_e a^3$  с коэффициентом  $\alpha(T)$ , зависящим только от температуры, но не от  $n_e$  или  $a$ .

Мы не включаем в рассмотрение рекомбинацию непосредственно в основное состояние, поскольку ее эффект гасится ионизацией других атомов посредством испущенного фотона, так что  $\alpha(T)$  — то, что астрофизики называют «коэффициентом рекомбинации для случая Б».

Если оставить за рамками также ионизацию из основного состояния, которая просто компенсирует рекомбинацию в основное состояние, то ионизация из возбужденных состояний водорода увеличивает число  $n_e a^3$  со скоростью, которая образуется суммой членов, пропорциональных  $n_{nl} a^3$  с  $n > 1$ , где коэффициенты пропорциональности зависят только от температуры. Соотношение (2.3.9) описывает все  $n_{nl}$  с  $n > 1$  как пропорциональные  $n_{2s}$  с коэффициентами, также зависящими только от температуры, так что ионизация увеличивает число электронов в сопутствующем объеме  $a^3$  со скоростью, которую можно записать в виде  $\beta(T) n_{2s} a^3$ , где  $\beta(T)$  — функция только от температуры, но не от  $a$ ,  $n_e$  или каких-либо из  $n_{nl}$ . Собирая все эти скорости вместе, получаем

$$\frac{d}{dt}(n_e a^3) = -\alpha n_e^2 a^3 + \beta n_{2s} a^3.$$

<sup>28)</sup> Эта формула неприменима к атомам водорода в очень высоких возбужденных состояниях, где радиусы настолько велики, а энергии связи настолько малы, что их нельзя рассматривать как свободные частицы. См., например, D. Mihalas, *Stellar Atmospheres*, 2nd edition (Freeman, San Francisco, 1978).

<sup>29)</sup> Мы пренебрегаем здесь тонкой структурой, сверхтонкой структурой и лэмбовскими сдвигами, которые приводят к появлению очень слабой зависимости энергий связи от  $\ell$  и от полного (включающего в себя спин) углового момента  $j$ .

Деление на постоянную величину  $na^3$  (где  $n \equiv n_p + n_H = n_p + \sum_{n\ell} n_{n\ell} = 0,76n_6$ ) дает

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{n_e}{n} \right) = -\frac{\alpha n_e^2}{n} + \frac{\beta n_{2s}}{n}. \quad (2.3.10)$$

Далее, эта величина должна обнуляться в условиях равновесия, где (в силу того, что переходы  $e + p \rightleftharpoons 2s$  происходят быстро) мы вместо (2.3.3) имеем

$$\frac{n_{2s}}{n_e^2} = \left( \frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{-3/2} \exp \left( \frac{B_2}{k_B T} \right),$$

так что коэффициенты в (2.3.10) связаны соотношением

$$\frac{\beta}{\alpha} = \left( \frac{n_e^2}{n_{2s}} \right)_{\text{равновесие}} = \left( \frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{B_2}{k_B T} \right). \quad (2.3.11)$$

Чтобы извлечь пользу из (2.3.10), мы должны привязать  $n_{2s}$  к  $n$  — полной плотности числа протонов и атомов водорода.

3. Изменение полного числа возбужденных атомов водорода в сопутствующем объеме  $1/n$  происходит настолько более медленно по сравнению с отдельными радиационными процессами, что итоговый прирост этого числа за счет рекомбинации и реконизации водорода компенсируется итоговым сокращением благодаря переходам в  $1s$ -состояние и из него.

То есть,

$$\alpha n_e^2 - \beta n_{2s} = (\Gamma_{2s} + 3P\Gamma_{2p})n_{2s} - \mathcal{E}n_{1s}, \quad (2.3.12)$$

где  $\Gamma_{2s}$  и  $\Gamma_{2p}$  — скорости процессов радиационного распада  $2s \rightarrow 1s + \gamma + \gamma$  и  $2p \rightarrow 1s + \gamma$  соответственно<sup>30)</sup>;  $P$  — вероятность того, что лаймановский фотон, испущенный при распаде  $2p \rightarrow 1s + \gamma$ , уйдет бесконечно далеко, не возбудив никакой другой атом водорода из  $1s$ -состояния обратно в  $2p$ -состояние (будет вычислена ниже);  $\mathcal{E}$  — скорость, с которой атомы водорода в  $1s$ -состоянии возбуждаются в  $2s$ - и  $2p$ -состояния, без учета тех, которые возбуждены в  $2p$ -состояние лаймановскими фотонами, испущенными при распадах  $2p \rightarrow 1s + \gamma$ , — их мы учли с помощью множителя  $P$ . (Множитель 3 в (2.3.12) возникает благодаря условию  $n_{2p} = 3n_{2s}$ , вытекающему из (2.3.9).) Отсюда получаем необходимую нам формулу для  $n_{2s}$ :

$$n_{2s} = \frac{\alpha n_e^2 + \mathcal{E}n_{1s}}{\Gamma_{2s} + 3P\Gamma_{2p} + \beta}. \quad (2.3.13)$$

Нас будут интересовать температуры  $T \ll (B_2 - B_3)/k_B = 21\,900$  К, так что в соответствии с формулой (2.3.9) все  $n_{n\ell}$  с  $n > 2$  будут намного меньше  $n_{2s}$ ,

<sup>30)</sup> Мы пренебрегаем процессом  $2p \rightarrow 1s + \gamma + \gamma$ , который гораздо медленнее процесса  $2s \rightarrow 1s + \gamma + \gamma$ .

а значит, полное число атомов водорода с хорошей точностью дается соотношением

$$n_H = n_{1s} + n_{2s} + n_{2p} = n_{1s} + 4n_{2s}. \quad (2.3.14)$$

Следовательно, в соотношении (2.3.13) мы можем избавиться от  $n_{1s}$ , заменив его на  $n_H$ , так что

$$n_{2s} = \frac{\alpha n_e^2 + \mathcal{E} n_H}{\Gamma_{2s} + 3P\Gamma_{2p} + \beta + 4\mathcal{E}}. \quad (2.3.15)$$

Далее, в равновесии число атомов водорода в  $1s$ -состоянии будет постоянным, так что коэффициенты в правой части (2.3.12) (задающей результирующую скорость прироста плотности числа атомов водорода в основном состоянии) должны быть связаны соотношением

$$\frac{\mathcal{E}}{\Gamma_{2s} + 3P\Gamma_{2p}} = \left( \frac{n_{2s}}{n_{1s}} \right)_{\text{равновесие}} = \exp \left( -\frac{B_1 - B_2}{k_B T} \right). \quad (2.3.16)$$

Подставляя (2.3.15) и (2.3.16) в (2.3.10), получаем уравнение скорости в более полезном виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{n_e}{n} \right) &= \frac{\Gamma_{2s} + 3P\Gamma_{2p}}{(\Gamma_{2s} + 3P\Gamma_{2p}) \left[ 1 + 4 \exp \left\{ -\frac{B_1 - B_2}{k_B T} \right\} \right] + \beta} \times \\ &\times \left( - \left[ 1 + 4 \exp \left\{ -\frac{B_1 - B_2}{k_B T} \right\} \right] \frac{\alpha n_e^2}{n} + \exp \left\{ -\frac{B_1 - B_2}{k_B T} \right\} \frac{\beta n_H}{n} \right). \end{aligned}$$

При интересующих нас температурах множитель  $1 + 4 \exp \{ -(B_1 - B_2)/(k_B T) \}$  можно заменить единицей. Используя (2.3.11) и определение относительной ионизации  $X \equiv n_e/n = n_p/n = 1 - n_H/n$ , получаем в конечном итоге

$$\frac{dX}{dt} = \left( \frac{\Gamma_{2s} + 3P\Gamma_{2p}}{\Gamma_{2s} + 3P\Gamma_{2p} + \beta} \right) \alpha n (-X^2 + S^{-1}(1 - X)), \quad (2.3.17)$$

где  $S(T)$  — функция (2.3.7), появляющаяся в уравнении Саха. Обратите внимание, что при постоянной температуре этому условию удовлетворяло бы любое решение уравнения Саха (2.3.6). В действительности  $X$  всегда больше значения, даваемого уравнением Саха, так что соотношение (2.3.17) описывает монотонно спадающую относительную ионизацию. Первый множитель в (2.3.17) описывает подавление рекомбинации, которое имеет место, когда переходы из  $2s$ - и  $2p$ -состояний в основное состояние происходят медленнее, чем рекон ionизация атома.

Осталось вычислить вероятность выживания фотона  $P$ . В общих чертах она описывается формулой

$$P(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \mathcal{P}(\omega) \exp \left[ - \int_t^{\infty} dt' n_{1s}(t') c \sigma \left( \frac{\omega a(t)}{a(t')} \right) \right], \quad (2.3.18)$$

где  $\mathcal{P}(\omega) d\omega$  — вероятность того, что фотон, испущенный при переходе  $2p \rightarrow 1s$ , имеет энергию между  $\hbar\omega$  и  $\hbar(\omega+d\omega)$ , нормированная таким образом, что  $\int \mathcal{P}(\omega) d\omega = 1$ , а  $\sigma(\omega)$  — сечение возбуждения  $1s \rightarrow 2p$  фотоном с энергией  $\hbar\omega$ . Множитель  $a(t)/a(t')$  возникает из-за космологического красного смещения фотона. Сечение реакции дается формулой Брейта—Вигнера<sup>31)</sup>:

$$\sigma(\omega) = \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{2\pi^2 \Gamma_{2p}}{k_\alpha^2}\right) \mathcal{P}(\omega), \quad (2.3.19)$$

где  $k_\alpha$  — среднее волновое число  $(B_1 - B_2)/(\hbar c)$  лаймановского фотона, испущенного при переходе  $2p \rightarrow 1s$ . Плотность вероятности здесь равна

$$\mathcal{P}(\omega) = \frac{\Gamma_{2p}}{2\pi} \frac{1}{(\omega - \omega_\alpha)^2 + \Gamma_{2p}^2/4}, \quad (2.3.20)$$

где  $\omega_\alpha$  — круговая частота  $ck_\alpha$ , соответствующая волновому числу  $k_\alpha$ .

Если фотон вообще оказывается захваченным, то это происходит за время, много меньшее характерного времени расширения Вселенной, так что мы можем приравнять плотность  $n_{1s}(t')$  в уравнении (2.3.18) к  $n_{1s}(t)$ . Сечение  $\sigma(\omega)$  меняется очень быстро с изменением  $\omega$ , поэтому мы не можем пренебречь зависимостью  $a(t)$  от времени, однако мы можем считать скорость расширения постоянной при интегрировании по  $t'$ , так что

$$\frac{a(t)}{a(t')} = 1 - H(t)(t' - t), \quad \text{где } H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}.$$

Удобно заменить переменную интегрирования в показателе экспоненты в (2.3.18) с  $t'$  на  $\omega' = (1 - H(t)(t' - t))\omega$ , после чего соотношение (2.3.18) принимает вид

$$P(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \mathcal{P}(\omega) \exp \left[ -\frac{3\pi^2 \Gamma_{2p} n_{1s}(t)c}{\omega H(t) k_\alpha^2} \int_{-\infty}^{\omega} d\omega' \mathcal{P}(\omega') \right]. \quad (2.3.21)$$

Функция  $\mathcal{P}(\omega)$  пренебрежимо мала везде, за исключением  $\omega$ , близких к  $\omega_\alpha$ , так что в множителе  $1/\omega$  в аргументе экспоненты (но не в верхнем пределе интеграла по  $\omega'$ , который круто возрастает от нуля до единицы при  $\omega$  в окрестности  $\omega_\alpha$ ) мы можем заменить  $\omega$  значением  $\omega_\alpha$ . Теперь интеграл по  $\omega$  становится тривиальным и дает нам

$$P(t) = F \left( \frac{3\pi^2 \Gamma_{2p} n_{1s}(t)c}{\omega_\alpha H(t) k_\alpha^2} \right), \quad (2.3.22)$$

<sup>31)</sup> См., например, S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1995, 1996, 2000) [далее цитируемая как КТП] (имеется русский перевод: С. Вайнберг, *Квантовая теория поля*. Т. 1, 2 — М.: Физматлит, 2003. Т. 3 — М.: ФАЗИС, 2002; страницы указаны по оригинальному изданию. — Прим. перев.): т. I, формула (3.8.16). Множитель  $3/2$  обусловлен количеством  $2\ell+1 = 3$   $2p$ -состояний углового момента и числом 2 спиновых состояний фотона. Если принять в расчет спины электрона и протона, то числитель будет равен 12, а знаменатель 8, но отношение останется тем же.

где

$$F(x) \equiv \frac{1 - e^{-x}}{x}. \quad (2.3.23)$$

Скорость лаймановских  $\alpha$ -переходов<sup>32)</sup> равна  $\Gamma_{2p} = 4,699 \times 10^8 \text{ с}^{-1}$ , а потому аргумент функции  $F(x)$  в (2.3.22) очень велик. К примеру, если мы возьмем  $\Omega_m h^2 = 0,15$  и  $\Omega_b h^2 = 0,01$ , то при  $T < 6000 \text{ К}$  аргумент  $x$  превысит 10. Следовательно, для интересующих нас температур здесь мы можем опустить экспоненциальный член в (2.3.23) и найти

$$P = \frac{\omega_\alpha H k_\alpha^2}{3\pi^2 \Gamma_{2p} n_{1s} c} = \frac{8\pi H}{3\lambda_\alpha^3 \Gamma_{2p} n_{1s}}, \quad (2.3.24)$$

где  $\lambda_\alpha = 1215,682 \times 10^{-8} \text{ см}$  — длина волны лаймановских  $\alpha$ -фотонов, при этом проясняется смысл аргумента  $t$  в (2.3.22). Мы видим, что величина  $3P\Gamma_{2p}$  в уравнении для скорости ионизации (2.3.17) не зависит от  $\Gamma_{2p}$ :

$$3P\Gamma_{2p} = \frac{8\pi H}{\lambda_\alpha^3 n_{1s}}. \quad (2.3.25)$$

При таком результате для  $P$  уравнение (2.3.17) принимает тот же вид, что и уравнение для скорости ионизации, которое другим путем получил Пиблз<sup>33)</sup>. В этом уравнении мы можем приближенно считать, что при интересующих нас температурах, которые значительно меньше  $(B_1 - B_2)/k_B = 118\,420 \text{ К}$ , отношение  $n_{1s}/n_{2s}$ , хотя и имеет меньшее значение, чем при тепловом равновесии, все же значительно превышает единицу, так что мы можем заменить  $n_{1s}$  величиной  $n_H = (1 - X)n$ . Мы также заменим время на температуру в качестве независимой переменной с помощью соотношения

$$\frac{dt}{dT} = -\frac{1}{HT}. \quad (2.3.26)$$

Тогда уравнение для скорости (2.3.17) принимает вид

$$\frac{dX}{dT} = \frac{\alpha n}{HT} \left( 1 + \frac{\beta}{\Gamma_{2s} + \frac{8\pi H}{\lambda_\alpha^3 n(1-X)}} \right)^{-1} \left( X^2 - \frac{1-X}{S} \right). \quad (2.3.27)$$

Теперь мы должны подставить сюда некоторые числа. При вычислении скорости расширения мы должны принимать в расчет как плотность энергии нерелятивистского вещества, так и плотность энергии фотонов и нейтрино. Однако при тех температурах, при которых нейтрино играют важную роль, их

<sup>32)</sup> W. L. Wiese, M. W. Smith, and B. M. Glennon, *Atomic Transition Probabilities*. Vol. I, National Standard Reference Data Series NBS 4 (1966).

<sup>33)</sup> P. J. E. Peebles, *Astrophys. J.* 153, 1 (1968).

массы преисбрежимо малы, и для температур  $T > 30$  К мы можем пренебречь энергий вакуума, так что

$$H = H_0 \left[ \Omega_m \left( \frac{T}{T_{\gamma 0}} \right)^3 + \Omega_i \left( \frac{T}{T_{\gamma 0}} \right)^4 \right]^{1/2} = \\ = 7,204 \times 10^{-19} T^{3/2} \sqrt{\Omega_m h^2 + 1,523 \times 10^{-5} T} \text{ с}^{-1}, \quad (2.3.28)$$

где  $T$  во всех численных выражениях измеряется в кельвинах. Плотность числа (атомов) для ионизированного и неионизированного водорода равна

$$n = 0,76 \times \frac{3H_0^2 \Omega_6}{8\pi G m_p} \left( \frac{T}{T_{\gamma 0}} \right)^3 = 4,218 \times 10^{-7} \Omega_6 h^2 T^3 \text{ см}^{-3}. \quad (2.3.29)$$

Скорость двухфотонного распада  $2s$ -состояния равна<sup>34)</sup>

$$\Gamma_{2s} = 8,22458 \text{ с}^{-1}. \quad (2.3.30)$$

Коэффициент при плотности числа протонов в выражении для темпа рекомбинации электронов, использованный Пиблзом<sup>35)</sup>, равен

$$\alpha = 2,84 \times 10^{-11} T^{-1/2} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}.$$

Появления множителя  $T^{-1/2}$  здесь следовало ожидать исходя из того, что сечение экзотермических реакций вроде  $e + p \rightarrow \text{H} + \gamma$ , как правило, содержит множитель<sup>36)</sup> «скорость<sup>-1</sup>». В действительности  $\alpha$  отражает цепочку реакций более сложную, чем просто радиационный захват электрона, в том числе каскад радиационных распадов к  $2s$ - и  $2p$ -состояниям, а потому и температурная зависимость  $\alpha$  является более сложной. Разнообразные подробные численные расчеты эффективного темпа рекомбинации в  $2s$ - и  $2p$ -состояния можно приближенно заменить простой формулой<sup>37)</sup>:

$$\alpha = \frac{1,4377 \times 10^{-10} T^{-0,6166} \text{ см}^3 \cdot \text{с}^{-1}}{1 + 5,085 \times 10^{-3} T^{0,5300}}. \quad (2.3.31)$$

Значение  $\beta$  выражается через  $\alpha$  с помощью (2.3.11):

$$\beta = \left( \frac{m_e k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{B_2}{k_B T} \right) \alpha = 2,4147 \times 10^{15} \text{ см}^{-3} \times T^{3/2} e^{-39474/T} \alpha. \quad (2.3.32)$$

Наконец, функция  $S[T]$  задается соотношением (2.3.8).

<sup>34)</sup> S. P. Goldman, *Phys. Rev. A* **40**, 1185 (1989). Пиблз использовал более раннее значение  $8,227 \text{ с}^{-1}$ , приведенное в L. Spitzer and J. L. Greenstein, *Astrophys. J.* **114**, 407 (1951).

<sup>35)</sup> W. J. Boardman, *Astrophys. J. Suppl.* **9**, 185 (1964).

<sup>36)</sup> См., например, КТП, том 1, с. 157.

<sup>37)</sup> D. Péquignot, P. Petjean, and C. Boisson, *Astron. Astrophys.* **251**, 680 (1991). Здесь учтен общий «подгоночный множитель» 1,14, рекомендуемый в S. Seager, D. D. Sasselov, and D. Scott, *Astrophys. J.* **523**, L1 (1999). Формула (2.3.31) находится в хорошем согласии с последующими вычислениями из D. G. Hummer, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **268**, 109 (1994).

**Таблица 2.2**

Ионизация водорода  $X$ , вычисленная с помощью уравнения (2.3.27), и время  $t$  падения температуры от значения  $10^6$  К до значения  $T$ , вычисленное с помощью уравнения (2.3.26). В столбцах с 4 по 6 приведены результаты для различных значений  $\Omega_6 h^2$  при  $\Omega_m h^2 = 0,15$ . В последнем столбце приведены результаты для значений параметров  $\Omega_6 h^2 = 0,02238$ ,  $\Omega_m h^2 = 0,13229$ , использованных в разд. 7.2 для сопоставления итогов аналитических и численных расчетов анизотропии реликтового излучения

$z$	$T$ , К	$t$ , лет	$X_{\Omega_6 h^2=0,01}$	$X_{\Omega_6 h^2=0,02}$	$X_{\Omega_6 h^2=0,03}$	$X$ (разд. 7.2)
1550	4226	202 600	0,992	0,984	0,977	0,982
1500	4090	213 200	0,976	0,958	0,943	0,954
1450	3954	225 900	0,935	0,902	0,878	0,895
1400	3818	239 800	0,861	0,815	0,780	0,805
1350	3681	255 200	0,759	0,703	0,659	0,690
1300	3545	272 000	0,645	0,580	0,529	0,564
1250	3409	290 600	0,526	0,456	0,402	0,437
1200	3273	311 300	0,409	0,339	0,289	0,321
1150	3136	334 600	0,299	0,236	0,194	0,220
1100	3000	360 400	0,205	0,154	0,122	0,142
1050	2864	389 600	0,129	0,0928	0,0721	0,0846
1000	2728	422 600	0,0752	0,0520	0,0396	0,0470
950	2591	460 500	0,0405	0,0270	0,0203	0,0243
900	2455	503 600	0,0210	0,0136	0,0101	0,0121
800	2183	611 400	0,00662	0,00387	0,00276	0,00339
700	1910	761 300	0,00319	0,00174	0,00120	0,00150
600	1638	977 700	0,00203	0,00107	0,000731	0,00920
500	1365	$1,312 \times 10^6$	0,00147	0,000762	0,000517	0,000653
400	1093	$1,872 \times 10^6$	0,00114	0,000585	0,000395	0,000499
250	684	$3,922 \times 10^6$	0,000829	0,000423	0,000285	0,000361
100	275	$1,604 \times 10^7$	0,000632	0,000321	0,000216	0,000273
50	139	$4,535 \times 10^7$	0,000579	0,000294	0,000197	0,000250
10	30,0	$4,568 \times 10^8$	0,000537	0,000272	0,000183	0,000231

В табл. 2.2 приведены значения  $X[T]$ , вычисленные<sup>38)</sup> с помощью дифференциального уравнения (2.3.27) с входными данными (2.3.28)–(2.3.32) (и (2.3.8) для  $S[T]$ ) при  $\Omega_m h^2 = 0,15$  для некоторого диапазона значений  $\Omega_b h^2$ . Начальные условия выбраны таким образом, чтобы  $X[T]$  получалось посредством решения уравнения Саха (2.3.6) для теплового равновесия при самой высокой из рассматриваемых температур, в качестве которой мы выбрали  $T = 4226$  К (т. е.  $z = 1550$ ); это достаточно высокое значение для того, чтобы тепловое равновесие было хорошим приближением (поскольку равновесное значение  $X$  очень близко к единице, при том что истинное значение должно находиться между единицей и равновесным значением), но в то же время слишком низкое для того, чтобы какая-либо часть гелия все еще оставалась в ионизированном состоянии.

---

До падения температуры ниже 20 000 К практически весь гелий был дважды ионизированным, и вплоть до температуры 4400 К заметная часть гелия оставалась в однократно ионизированном состоянии.

---

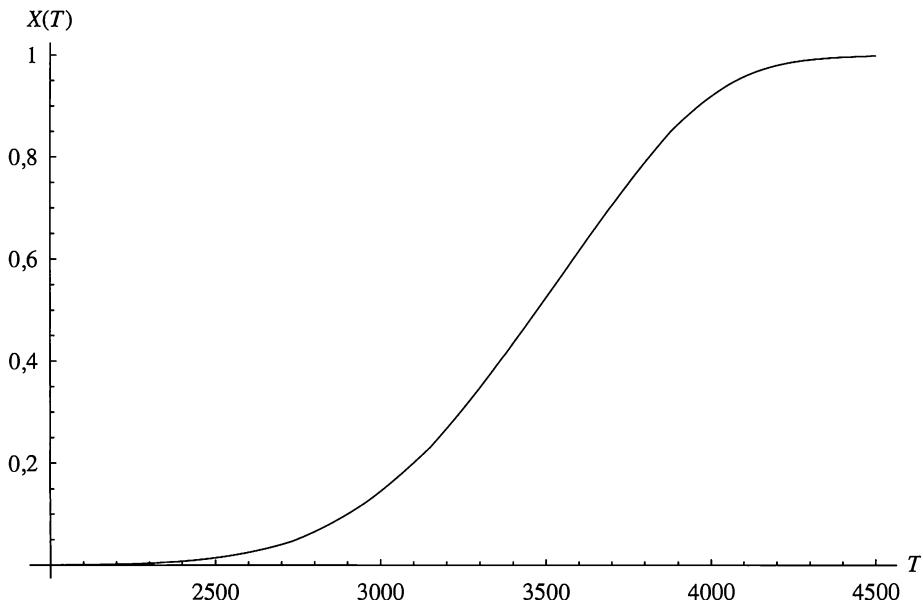
Действительное значение  $X[4226]$  несколько выше равновесного значения, однако с точностью до трех значащих цифр мы не окажем никакого влияния на результат при более низких температурах, если увеличим предполагаемое значение  $X[4226]$  на некоторую небольшую величину — скажем, между 0,984 и 0,99 при  $\Omega_b h^2 = 0,02$ .

Сравнение табл. 2.1 и 2.2 показывает, что при малых значениях  $\Omega_b h^2$ , рассматриваемых здесь, уравнение Саха перестает быть хорошим приближением для относительной ионизации, как только равновесная ионизация спадает заметно ниже единицы. В частности, в то время как в равновесном случае относительная ионизация снижается до исчезающе малых величин при температурах ниже 2000 К, ионизация, вычисленная из (2.3.27), при низких температурах выравнивается и асимптотически сходится к малому, но ненулевому значению из-за того, что встречи небольшого количества оставшихся свободными протонов и электронов становятся все более и более редкими. Эта остаточная ионизация играет важную роль в процессе формирования первых звезд.

Относительная ионизация, получаемая из (2.3.17) при принятых ныне значениях космологических параметров, показана также на рис. 2.2. В масштабе этого графика результаты неотличимы от полученных посредством более трудоемких вычислений в работах Сигера, Сасселова и Скотта<sup>39)</sup>, за исключением температур выше 4300 К, когда вклад электронов от ионизированного гелия (проигнорированный в (2.3.17)) был все еще значительным.

<sup>38)</sup> Я благодарен Д. Дайкусу за проведенные численные расчеты. Вычисления были прекращены при  $z = 10$ , поскольку в более поздние времена водород реионизируется первым поколением звезд, а скорость расширения становится подверженной влиянию энергии вакуума.

<sup>39)</sup> S. Seager, D. D. Sasselov, and D. Scott, *Astrophys. J.* **523**, L1 (1999); *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **128**, 407 (2000) [astro-ph/9909275].



**Рис. 2.2.** Относительная ионизация, полученная из уравнения для скорости ионизации (2.3.17), как функция температуры (в кельвинах) при  $\Omega_m h^2 = 0,132$ ,  $\Omega_b h^2 = 0,0224$

Наиболее важным приложением этих результатов для относительной ионизации является расчет *непрозрачности*  $\mathcal{O}(T)$  — вероятности того, что фотон, существовавший в момент времени  $t(T)$ , когда температура равнялась  $T$ , испытал хотя бы еще одно рассеяние до настоящего момента времени. Эта вероятность задается соотношением

$$\mathcal{O}(T) = 1 - \exp \left( - \int_{t(T)}^{t_0} c \sigma_T n_e(t) dt \right) \quad (2.3.33)$$

и растет от оклонулевых значений при низкой температуре, когда интеграл в показателе экспоненты мал, до значений, близких к единице, при высоких температурах, когда этот интеграл становится большим.

Удобно преобразовать интеграл по времени в интеграл по температуре, снова используя соотношение (2.3.26):

$$\mathcal{O}(T) = 1 - \exp \left( -c \sigma_T \int_{2,725}^T \frac{n_e(T') dT'}{H(T') T'} \right). \quad (2.3.34)$$

Мы используем соотношение (2.3.28) для  $H$  и принимаем  $n_e = Xn$ , где  $n$  дается соотношением (2.3.29), так что

$$\mathcal{O}(T) = 1 - \exp \left( -c \sigma_T \int_{2,725}^T \frac{n_e(T') dT'}{H(T') T'} \right) =$$

$$= 1 - \exp \left( - \int_{2,725}^T \frac{0,01168 \Omega_6 h^2 T'^{1/2} X(T') dT'}{\sqrt{\Omega_m h^2 + 1,523 \times 10^{-5} T'}} \right). \quad (2.3.35)$$

При изучении анизотропии реликтового излучения нас особенно интересует момент, когда наблюдаемые сегодня фотоны последний раз испытали рассеяние. Вероятность того, что последнее рассеяние фотона произошло до того, как температура снизилась до значения  $T$ , равна  $1 - \mathcal{O}(T)$ , а вероятность того, что последнее рассеяние случилось после того, как температура продолжила падать до значения  $T - dT$ , есть  $\mathcal{O}(T - dT)$ , так что вероятность того, что последнее рассеяние фотона произошло при температуре между  $T$  и  $T - dT$ , равна

$$1 - (1 - \mathcal{O}(T)) - \mathcal{O}(T - dT) = \mathcal{O}'(T) dT. \quad (2.3.36)$$

Функция непрозрачности  $\mathcal{O}(T)$  монотонно растет с ростом температуры от  $\mathcal{O} = 0$  при  $T = T_0$  до  $\mathcal{O} \rightarrow 1$  при  $T \rightarrow \infty$ , так что  $\mathcal{O}'(T)$  — положительно нормированное распределение вероятности с единичным интегралом. Значения  $\mathcal{O}'(T)$  для  $\Omega_m h^2 = 0,15$  и диапазона значений  $\Omega_6 h^2$  приведены в табл. 2.3. Распределение  $\mathcal{O}'(T)$  имеет пик при температуре  $T_{\text{п.р.}}$  со среднеквадратичным отклонением  $\sigma$ ; значения обеих величин приведены в двух последних строках табл. 2.3.

\* \* \*

Полезно отметить приближение для относительной ионизации, использованное в работе Джонса и Вайза<sup>40)</sup>, хотя оно не применялось при расчетах значений в табл. 2.2 и 2.3. В равновесном состоянии относительная ионизация зависит только от температуры и  $\Omega_6 h^2$ . Но в тот момент, когда уравнение Саха перестает давать хорошее приближение для относительной ионизации, последняя начинает зависеть не только от  $\Omega_6 h^2$ , но также и от  $\Omega_m h^2$ . Выведенное ниже приближение показывает, что при достаточно низких температурах относительная ионизация зависит от  $\Omega_6 h^2$  и  $\Omega_m h^2$  главным образом через мультиплективный множитель  $(\Omega_m h^2)^{1/2}/(\Omega_6 h^2)$ , тогда как непрозрачность  $\mathcal{O}'(T)$  от этих параметров практически не зависит.

Чтобы вывести это приближение, прежде всего отметим, что при падении относительной ионизации ниже равновесного значения член  $(1 - X)/S$  в квадратных скобках в (2.3.27) (который в равновесном состоянии был бы равен  $X^2$ ) становится гораздо меньше  $X^2$ . Сравнение табл. 2.2 и 2.3 показывает, что при  $T < 3400$  К в правдоподобном диапазоне космологических параметров мы имеем дело именно с этим случаем. При таких температурах мы можем пренебречь также плотностью энергии излучения по сравнению с плотностью массы, так что скорость расширения (2.3.28) принимает простой вид  $7,2 \times 10^{-19} \sqrt{\Omega_m h^2} \text{ с}^{-1}$ . Помимо этого, при температурах в диапазоне

<sup>40)</sup> B. J. T. Jones and R. F. Wyse, *Astron. Astrophys.* **149**, 144 (1985).

Таблица 2.3

Нормированное распределение вероятности  $\mathcal{O}'(T)$  температуры последнего рассеяния как функция температуры  $T$  (в кельвинах), вычисленное из (2.3.35). В столбцах со 2 по 4 приведены результаты при различных значениях  $\Omega_6 h^2$  для  $\Omega_M h^2 = 0,15$ . В последнем столбце приведены результаты для значений параметров  $\Omega_6 h^2 = 0,02238$ ,  $\Omega_M h^2 = 0,13229$ , использованных в разд. 7.2 для сопоставления итогов аналитических и численных расчетов анизотропии реликтового излучения. В двух последних строках указаны параметры подгонки  $\mathcal{O}'(T)$  к гауссовой кривой  $\exp [-(T - T_{\text{п.р.}})^2 / (2\sigma^2)] / (\sigma\sqrt{2\pi})$ , найденные приравниванием  $T_{\text{п.р.}}$  к температуре, при которой  $\mathcal{O}'$  максимально, а  $1/(\sigma\sqrt{2\pi})$  — к значению  $\mathcal{O}'$  в этом максимуме

$T$ , К	$\mathcal{O}'_{\Omega_6 h^2=0,01}$	$\mathcal{O}'_{\Omega_6 h^2=0,02}$	$\mathcal{O}'_{\Omega_6 h^2=0,03}$	$\mathcal{O}'$ (разд. 7.2)
4000	$6,80 \times 10^{-7}$	$5,39 \times 10^{-10}$	$1,08 \times 10^{-12}$	$5,75 \times 10^{-11}$
3500	$2,26 \times 10^{-4}$	$4,12 \times 10^{-5}$	$1,15 \times 10^{-5}$	$2,53 \times 10^{-5}$
3400	0,000451	0,000152	0,000069	0,000112
3300	0,000759	0,000412	0,000262	0,000345
3200	0,00109	0,000826	0,000664	0,000759
3100	0,00132	0,00127	0,00118	0,00124
3000	0,00139	0,00155	0,00157	0,00156
2900	0,00127	0,00154	0,00164	0,00158
2800	0,00102	0,00130	0,00142	0,00135
2700	0,000746	0,000965	0,00107	0,00101
2600	0,000502	0,000650	0,000721	0,000680
2500	0,000320	0,000411	0,000455	0,000429
2000	$4,66 \times 10^{-5}$	$5,16 \times 10^{-5}$	$5,39 \times 10^{-5}$	$5,25 \times 10^{-5}$
1000	$9,50 \times 10^{-6}$	$9,76 \times 10^{-6}$	$9,87 \times 10^{-6}$	$9,84 \times 10^{-6}$
$T_{\text{п.р.}}$ , К	3017	2954	2930	2941
$\sigma$ , К	287	253	241	248

от 3400 К вниз до 2000 К эффективная скорость  $2p$ -распада  $3P\Gamma_{2p}$  меньше скорости  $2s$ -распада, в то время как при  $T < 2000$  К скорость реконионизации  $\beta$  меньше не только  $3P\Gamma_{2p}$ , но и  $\Gamma_{2s}$ , так что при любых температурах ниже  $T < 3400$  К соотношение (2.3.27) имеет вид

$$\frac{dX}{dT} = f(T)X^2, \quad (2.3.37)$$

где

$$f(T) = \frac{\alpha n}{HT} \left( 1 + \frac{\beta}{\Gamma_{2s}} \right)^{-1} = \frac{\Omega_6 h^2}{(\Omega_m h^2)^{1/2}} g(T), \quad (2.3.38)$$

причем  $g(T)$  — функция только температуры:

$$g(T) = \frac{84,2T^{-0,1166}}{1 + 5,085 \times 10^{-3} T^{0,53} + 4,22 \times 10^4 T^{0,8834} e^{-39474/T}}. \quad (2.3.39)$$

Решение уравнения (2.3.37) имеет вид

$$X(T) \simeq \left( X(3400)^{-1} + \frac{\Omega_6 h^2}{(\Omega_m h^2)^{1/2}} \int_T^{3400} g(T') dT' \right)^{-1} \quad (2.3.40)$$

Сопоставление этой формулы с результатами, приведенными в табл. 2.2 для  $\Omega_m h^2 = 0,15$  и  $\Omega_6 h^2 = 0,02$ , показывает, что введенная этим приближением ошибка возрастает до 25 % с падением температуры от 3400 К до  $\simeq 2500$  К, а затем снижается до менее чем 10 % при  $T < 1400$  К. Для температур ниже примерно 2600 К значения относительной ионизации настолько меньше, чем при 3400 К, что мы можем пренебречь членом  $X(3400)^{-1}$  в знаменателе (2.3.40), не порождая сколь-либо заметной дополнительной ошибки и получая в итоге

$$X(T) \simeq \frac{(\Omega_m h^2)^{1/2}}{\Omega_6 h^2} \left( \int_T^{3400} g(T') dT' \right)^{-1}, \quad (2.3.41)$$

так что при достаточно низких температурах  $X(T)$  пропорциональна  $\frac{\sqrt{\Omega_m h^2}}{\Omega_6 h^2}$ , что мы и намеревались показать. Изучение табл. 2.2 подтверждает, что для  $T < 1700$  К при фиксированном  $\Omega_m h^2 = 0,15$  относительная ионизация действительно с удовлетворительной точностью обратно пропорциональна  $\Omega_6 h^2$ , однако в окрестности 3000 К это уже не будет хорошим приближением.

Поразительно, что значения  $\mathcal{O}'(T)$  слабо зависят от  $\Omega_6 h^2$  при  $T < 3200$  К. Причина этого, как указывают Джонс и Вайз<sup>41)</sup>, состоит в том, что при температурах, достаточно низких для того, чтобы можно было пренебречь плотностью энергии излучения, соотношение (2.3.35) приводит к пропорциональности между  $\ln [1 - \mathcal{O}(T)]$  и отношением  $\Omega_6 h^2 / \sqrt{\Omega_m h^2}$ , умноженным на интеграл от  $T^{1/2} X(T)$ , тогда как приближенная формула (2.3.41) при низких температурах дает пропорциональную зависимость  $X(T)$  от  $\sqrt{\Omega_m h^2 / (\Omega_6 h^2)}$ , так что при достаточно низких температурах  $\mathcal{O}(T)$ , а следовательно, и  $\mathcal{O}'(T)$  не зависят ни от  $\Omega_6 h^2$ , ни от  $\Omega_m h^2$ . Табл. 2.3 показывает, что при правдоподобных значениях космологических параметров температура  $T_{\text{n.p.}}$  последнего рассеяния всегда близка к 3000 К с разбросом порядка 10 % (в смысле среднеквадратичного отклонения).

<sup>41)</sup> B. J. T. Jones and R. F. Wyse, *Astron. Astrophys.* **149**, 144 (1985).

**2.4****Дипольная анизотропия**

- Угловое распределение температуры • Открытие U2 • Измерения COBE и WMAP**  
**• Кинематический квадруполь**

В предыдущих разделах этой главы мы рассматривали реликтовое излучение как совершенно изотропное и однородное. Это, безусловно, хорошее приближение. Более того, при открытии реликтового излучения в 1965 г. важным свойством фонового излучения, позволившим Пензиасу и Уилсону отделить его от излучения земной атмосферы, было то, что микроволновой фон выглядел неизменным при смене направления.

Конечно, реликтовое излучение все же подвержено небольшим вариациям в зависимости от направления, но они слишком малы, чтобы Пензиас и Уилсон могли их заметить. Данные, которыми нас снабжают отступления от полной изотропности реликтового излучения, относятся к наиболее важной информации об эволюции Вселенной. В этом разделе мы имеем дело с самыми простыми и раньше всего обнаруженными отступлениями от изотропности *наблюдаемого* фонового излучения, порождаемыми движением Земли. В двух следующих разделах рассматривается анизотропия, возникающая благодаря рассеянию фотонов межгалактическими электронами в скоплениях галактик, а также первичная анизотропия, оставшаяся от ранних периодов жизни Вселенной.

В той мере, в какой реликтовое излучение само по себе является полностью однородным и изотропным, оно предоставляет связанную со всей Вселенной систему отсчета, относительно которой мы можем измерять пекуллярные скорости отдельных галактик. Чтобы проанализировать результаты измерений, полученные благодаря реликтовому излучению для нашей собственной Галактики, полезно рассмотреть плотность  $N_\gamma(\mathbf{p})$  фотонов в фазовом пространстве, которая определяется следующим образом: на единицу пространственного объема в объеме  $d^3p$  импульсного пространства с центром в точке  $\mathbf{p}$  приходится  $N_\gamma(\mathbf{p}) d^3p$  фотонов *каждой* поляризации (с левой и правой круговыми поляризациями). Поскольку  $|\mathbf{p}| = h\nu/c$ , а объем импульсного пространства между частотами  $\nu$  и  $d\nu$  равен  $4\pi h^3 \nu^2 d\nu/c^3$ , то соотношение (2.1.1) дает

$$N_\gamma(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \frac{n_T(c|\mathbf{p}|/h)}{4\pi h^3 \nu^2/c^3} = \frac{1}{h^3} \frac{1}{\exp [|\mathbf{p}|c/(kT)] - 1}. \quad (2.4.1)$$

---

Введя множитель  $1/2$ , мы приняли во внимание тот факт, что  $n_T$  включает в себя *оба* возможных состояния поляризации фотона.

---

Это, конечно, та плотность, которая может быть измерена наблюдателем, покоящимся относительно фонового излучения. И объем фазового простран-

ства, и количество фотонов являются лоренци-инвариантными величинами, так что  $N_\gamma$  — скаляр в том смысле, что преобразования Лоренца к движущейся относительно фонового излучения системе отсчета, преобразующие  $\mathbf{p}$  в  $\mathbf{p}'$ , преобразуют также  $N_\gamma$  в  $N'_\gamma$ , где

$$N'_\gamma(\mathbf{p}') = N_\gamma(\mathbf{p}). \quad (2.4.2)$$

Если Земля совершает движение в направлении третьей оси со скоростью  $\beta$  (в единицах  $c$ ), и  $\mathbf{p}$  — импульс фотона в системе отсчета, покоящейся относительно реликтового излучения, а  $\mathbf{p}'$  — импульс фотона, измеренный с Земли, то

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ |\mathbf{p}| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \beta\gamma \\ 0 & 0 & \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_2 \\ p'_3 \\ |\mathbf{p}'| \end{pmatrix}, \quad (2.4.3)$$

где, как обычно,  $\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{-1/2}$ . В частности,

$$|\mathbf{p}| = \gamma(1 + \beta \cos \theta)|\mathbf{p}'|, \quad (2.4.4)$$

где  $\theta$  — угол между  $\mathbf{p}'$  и третьей осью. Следовательно,

$$N'_\gamma(p') = \frac{1}{h^3} \frac{1}{\exp \left[ |\mathbf{p}'|c/(kT') \right] - 1}, \quad (2.4.5)$$

где температура является функцией угла между направлением фотона и скоростью Земли:

$$T' = \frac{T}{\gamma(1 + \beta \cos \theta)}. \quad (2.4.6)$$

Поскольку мы ожидаем, что наша Галактика движется со скоростью несколько сотен километров в секунду, сопоставимой с пекуллярными скоростями относительно среднего хаббловского потока, наблюдаемыми для других галактик, а Солнечная система движется с аналогичной скоростью относительно Галактики, то можно считать, что  $\beta$  имеет порядок примерно  $10^{-3}$ , а в этом случае величина  $\gamma$  по существу равна единице. Видимая температура будет наиболее высокой при наблюдении фотонов, приходящих с того направления, в котором движется Земля и для которого  $\cos \theta = -1$ ; она будет выше внутренней температуры на небольшую величину  $\beta_{\text{Земли}}$ . Наименьшую температуру мы будем наблюдать для фотонов, движущихся в том же направлении, что и Земля, — для них  $\cos \theta = +1$  и температура уменьшается на ту же самую небольшую величину.

Этот эффект впервые наблюдался в 1969 г. с помощью наземного радиометра, однако в то время было возможно измерить только компоненту скорости Земли при фиксированном склонении  $\delta = +32^\circ$ ; она составила

160 км/с в направлении, соответствующем данному склонению и прямому восхождению  $13^{\circ}$ <sup>42)</sup>. Полный вектор скорости был определен в 1977 г. группой из Беркли<sup>43)</sup>, которая использовала измерения, произведенные с самолета U2, выполнившего полеты выше основной толщи земной атмосферы. Наши знания об этом явлении значительно обогатились благодаря измерениям спутника COBE. Группа исследователей на приборе FIRAS (Far Infrared Absolute Spectrophotometer — спектрофотометр в далеком инфракрасном диапазоне)<sup>44)</sup> получила для максимального прироста температуры  $\Delta T$  значение  $3,372 \pm 0,014$  мК (с доверительной вероятностью 95 %) в направлении с галактическими координатами<sup>45)</sup>  $\ell = 264^{\circ}, 14 \pm 0^{\circ}, 30$ ,  $b = 48^{\circ}, 26 \pm 0^{\circ}, 30$ ; на приборе DMR (Differential Microwave Radiometer — дифференциальный микроволновой радиометр)<sup>46)</sup> было получено значение  $\Delta T = 3,353 \pm 0,024$  мК (с доверительной вероятностью 95 %) в направлении с галактическими координатами  $\ell = 264^{\circ}, 26 \pm 0^{\circ}, 33$ ,  $b = 48^{\circ}, 22 \pm 0^{\circ}, 13$ , соответствующем прямому восхождению  $11^{\circ}12^{\mathrm{m}}, 2 \pm 0^{\mathrm{m}}, 8$  и склонению  $-7^{\circ}, 06 \pm 0^{\circ}, 16$ .

Совсем недавно в ходе эксперимента на спутнике WMAP<sup>47)</sup> (подробно обсуждается в гл. 7) для максимального прироста температуры было получено значение  $3,346 \pm 0,017$  мК в направлении  $\ell = 263^{\circ}, 85 \pm 0^{\circ}, 1$ ,  $b = 48^{\circ}, 25 \pm 0^{\circ}, 04$ . Эти результаты указывают на движение Солнечной системы примерно в направлении скопления Девы, имеющего галактические координаты  $\ell \approx 284^{\circ}$  и  $b \approx 74^{\circ}$ , со скоростью  $(0,00335)c/(2,725) = 370$  км/с. Для сравнения вращение Галактики обусловливает скорость Земли относительно центра Галактики примерно 215 км/с в более или менее противоположном направлении. Принимая это в расчет, получаем для результирующей скорости локальной группы галактик<sup>48)</sup> относительно реликтового фона значение  $627 \pm 22$  км/с в направлении ( $\ell = 276^{\circ} \pm 3^{\circ}$ ,  $b = 30^{\circ} \pm 3^{\circ}$ ) между скоплениями Гидры и Центавра.

Раскладывая соотношение (2.4.6) в степенной ряд по  $\beta$ , мы можем записать температурный сдвиг как сумму полиномов Лежандра:

$$\Delta T \equiv T' - T = T \left[ -\frac{\beta^2}{6} - \beta P_1(\cos \theta) + \frac{2\beta^2}{3} P_2(\cos \theta) + \dots \right]. \quad (2.4.7)$$

Поскольку  $\beta = 370$  км/с  $\cdot c^{-1} = 0,0013$  — малая величина, температурный сдвиг является преимущественно дипольным, однако в соотношении (2.4.7)

<sup>42)</sup> E. K. Conklin, *Nature* **222**, 971 (1969).

<sup>43)</sup> G. F. Smoot, M. V. Gorenstein, and R. A. Muller, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 898 (1977).

<sup>44)</sup> D. J. Fixsen et al., *Astrophys. J.* **473**, 576 (1996).

<sup>45)</sup> Галактическая координата  $b$  — угол между линией взгляда и плоскостью нашей Галактики, так что северный галактический полюс находится в направлении  $b = 90^{\circ}$ ; галактическая координата  $\ell$  — азимутальный угол вокруг оси вращения нашей Галактики, так что центр Галактики расположен в направлении  $\ell = 0^{\circ}$ .

<sup>46)</sup> C. L. Bennett et al., *Astrophys. J.* **464**, L1 (1996).

<sup>47)</sup> C. L. Bennett et al., *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 1 (2003).

<sup>48)</sup> G. F. Smoot, C. L. Bennett, A. Kogut, J. Aymon, C. Backus et al., *Astrophys. J.* **371**, L1 (1991); A. Kogut, C. Lineweaver, G. F. Smoot, C. L. Bennett, A. Banday et al., *Astrophys. J.* **419**, 1 (1993).

появляется также «кинематический квадрупольный» член, который не намного меньше внутреннего квадрупольного члена температуры (обсуждается в разд. 2.6).

## 2.5

### Эффект Суняева—Зельдовича

**Уравнение Компанейца • Спектральный сдвиг • Использование вместе с рентгеновской светимостью**

Еще один вклад в анизотропию реликтового излучения вносит рассеяние этого излучения электронами межгалактического пространства в скоплениях галактик на линии взгляда. Это явление известно как *эффект Суняева—Зельдовича*<sup>49)</sup>. Формула (С.26) (уравнение Компанейца) из приложения С показывает, что рассеяние реликтового излучения нерелятивистским<sup>50)</sup> электронным газом изменяет наблюдаемый коэффициент заполнения для фотонов  $N(\omega)$  (определенный таким образом, что  $4\pi\omega^2 N(\omega) d\omega$  — число фотонов в каждом из двух состояний поляризации с энергией между  $\hbar\omega$  и  $\hbar\omega + d\omega$ ) при энергии фотона  $\hbar\omega \ll m_e c^2$  со скоростью (в системе единиц СГС)

$$\dot{N}(\omega) = \frac{n_e \sigma_T}{m_e c \omega^2} \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ k_B T_e \omega^4 \frac{\partial N(\omega)}{\partial \omega} + \hbar \omega^4 N(\omega) (1 + N(\omega)) \right],$$

где  $\sigma_T$  — сечение томсоновского рассеяния,  $n_e$  — плотность числа электронов, а  $T_e$  — температура электронов. Эту формулу можно напрямую использовать при вычислении скорости изменения коэффициента заполнения  $N(\omega)$  однородного изотропного фотонного газа посредством взаимодействия с максвелл-больцмановским распределением электронов при температуре  $T_e$ . В той задаче, которой мы занимаемся сейчас, нас интересует другое: что меняется в том, как выглядит для нас реликтовое излучение, из-за рассеяния облаком электронов на линии взгляда. В этом контексте мы перепишем уравнение Компанейца в виде

$$\frac{\partial}{\partial \ell} N(\omega, \ell) = \frac{n_e(\ell) \sigma_T}{m_e c^2 \omega^2} \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ k_B T_e(\ell) \omega^4 \frac{\partial N(\omega, \ell)}{\partial \omega} + \hbar \omega^4 N(\omega, \ell) (1 + N(\omega, \ell)) \right], \quad (2.5.1)$$

где  $\ell$  — координата, соответствующая собственному расстоянию вдоль линии взгляда, проходящей сквозь облако.

<sup>49)</sup> Ya. B. Zel'dovich and R. A. Sunyaev, *Astrophys. Space Sci.* **4**, 301 (1969); R. A. Sunyaev and Ya. B. Zel'dovich, *Comm. Astrophys. Space Phys.* **2**, 66 (1970); **4**, 173 (1972).

<sup>50)</sup> Ионизированный газ в скоплениях галактик является горячим, так что релятивистскими поправками нельзя пренебречь, хотя они и будут малыми; см. Y. Rephaeli, *Astrophys. J.* **445**, 33 (1995); A. Challinor and A. Lasenby, *Astrophys. J.* **499**, 1 (1998); N. Itoh, U. Kohyama, and S. Nozawa, *Astrophys. J.* **502**, 7 (1998).

Ионизированная плазма в скоплениях галактик, как правило, находится при температурах выше  $10^6$  градусов, так что  $k_B T_e$  намного больше типичной энергии фотона  $\hbar\omega$ , которая для реликтового излучения находится в пределах от  $10^{-4}$  эВ до  $10^{-3}$  эВ. В этом случае уравнение (2.5.1) упрощается до

$$\frac{\partial}{\partial \ell} N(\omega, \ell) = \frac{n_e(\ell) \sigma_T k_B T_e(\ell)}{m_e c^2 \omega^2} \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \omega^4 \frac{\partial N(\omega, \ell)}{\partial \omega} \right). \quad (2.5.2)$$

Теперь это линейное дифференциальное уравнение, которое можно решить точно<sup>51)</sup>, однако обычно в этом нет необходимости, поскольку облако электронов является оптически тонким. В этом случае уравнение (2.5.2) говорит нам, что изменение коэффициента заполнения при прохождении излучения сквозь облако есть просто

$$\Delta N(\omega) = y \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \omega^4 \frac{\partial N(\omega)}{\partial \omega} \right), \quad (2.5.3)$$

где  $y$  — безразмерный параметр

$$y \equiv \frac{\sigma_T}{m_e c^2} \int d\ell n_e(\ell) k_B T_e(\ell), \quad (2.5.4)$$

интеграл берется вдоль линии взгляда, проходящей через облако. Для излучения черного тела при температуре  $T_\gamma$  имеем

$$N(\omega) = \frac{1}{\exp \left( \frac{\hbar\omega}{k_B T_\gamma} \right) - 1}. \quad (2.5.5)$$

Подставляя это в уравнение (2.5.3), получаем

$$\Delta N = y \left( \frac{-x + (x^2/4) \coth(x/2)}{\text{sh}^2(x/2)} \right), \quad (2.5.6)$$

где  $x \equiv \hbar\omega/(k_B T_\gamma)$ . Мы видим, что рассеяние, вообще говоря, изменяет форму распределения энергии фотонов, а не только эффективную температуру. Характерная зависимость от  $\omega$  в соотношении (2.5.6) в принципе позволяет радиоастрономам отличить анизотропные эффекты, вызванные эффектом Сюняева—Зельдовича, от первичной анизотропии, которая будет обсуждаться в разд. 2.6 и гл. 7.

Однако в той части спектра, которая описывается формулой Рэлея—Джинса, где  $x \ll 1$ , соотношение (2.5.6) дает  $\Delta N \rightarrow -2y/x$ , тогда как формула (2.5.5)

<sup>51)</sup> Ya. B. Zel'dovich and I. D. Novikov, *Relativistic Astrophysics, Vol. 2: The Structure and Evolution of the Universe*, пер. L. Fishbone (University of Chicago Press, Chicago, 1983): формула (8.7.3). (Оригинал издан в одном томе: Зельдович Я. Б., И. Д. Новиков. Релятивистская астрофизика. М.: Наука, 1967. — Прим. перев.)

приводит к  $N \rightarrow 1/x$ , так что форма спектра сохраняется, а относительное изменение температуры фотона равно

$$\frac{\Delta T_\gamma}{T_\gamma} = \frac{\Delta N}{N} = -2y. \quad (2.5.7)$$

То, что рассеяние фотонов электронным облаком с гораздо более высокой температурой приводит к *понижению* температуры фотонов, может показаться удивительным, но это происходит только в той части спектра, которая подчиняется закону Рэлея—Джинса. Вдалеке от пика в спектре черного тела, где  $x \gg 1$ , соотношения (2.5.5) и (2.5.6) дают для  $\Delta N/N$  *положительное* значение  $yx^2$ ; охлаждение, наблюдаемое в области Рэлея—Джинса, происходит благодаря переносу фотонов от низких энергий к высоким. В самом деле, формула (2.5.3) показывает, что

$$\int \Delta N(\omega) \omega^2 d\omega$$

обнуляется, так что рассеяние электронным облаком сохраняет общее число получаемых нами фотонов.

Формула (2.5.7) дает относительное изменение температуры фотонов, наблюдавшееся при низких частотах в результате рассеяния облаком электронов, которое обычно связано с неким скоплением галактик. Если скопление имеет красное смещение  $z$ , то как  $T_\gamma$ , так и  $\Delta T_\gamma$  уменьшаются благодаря появлению множителя  $(1+z)^{-1}$ , однако отношение этих величин не зависит от  $z$ , а также от постоянной Хаббла и других космологических параметров — по крайней мере до тех пор, пока эти величины не потребуются для оценки  $n_e$  и собственных длин. Температуру электронов  $T_e$  можно измерить путем наблюдения светимости скопления как функции длины волны фотона (подправленной таким образом, чтобы устранился эффект космологического красного смещения), и результат не будет зависеть от красного смещения скопления или от  $H_0$ , однако собственная длина вдоль линии взгляда должна быть выведена из углового размера скопления и углового расстояния  $d_y$ , которое обратно пропорционально  $H_0$ , так что плотность электронов, вычисленная на основе измерений параметра Сюняева—Зельдовича  $y$ , пропорциональна принятому значению  $H_0$ .

Можно извлечь пользу из результатов измерения эффекта Сюняева—Зельдовича, скомбинировав их с измерениями рентгеновской светимости скопления галактик<sup>52)</sup>. Сечение<sup>53)</sup>  $d\sigma$  тормозного излучения фотонов с энергией между  $\hbar\omega$  и  $\hbar(\omega + d\omega)$  (где  $\hbar\omega$  сравнимо с  $m_e v^2/2$ , но не чрезвычайно близко

<sup>52)</sup> J. Silk and S. D. M. White, *Astrophys. J.* **226**, L103 (1978); A. Cavaliere, L. Danese, and G. de Zotti, *Astron. Astrophys.* **75**, 322 (1979). Обзор см. в M. Birkinshaw, *Phys. Rep.* **310**, 97 (1999).

<sup>53)</sup> См., например, V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz, and L. P. Pitaevskii, *Quantum Electrodynamics, 2nd edition*, пер. J. B. Sykes and J. S. Bell (Pergamon, Oxford, 1982) (4-е издание оригинала: *Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питайевский Л. П. Теоретическая физика. Т. IV. Квантовая электродинамика*. М.: Физматлит, 2002. — Прим. перев.).

к нему) в столкновениях нерелятивистских электронов, имеющих скорость  $v$  ( $1/137 \ll v \ll 1$ ), и медленных атомных ядер пропорционально  $v^{-2} dw/\omega$ ; плотность протонов равна плотности электронов;  $v$ , как правило, имеет порядок  $(k_B T/m_e)^{1/2}$ ; в итоге темп, с которым антенна радиуса  $R$  принимает фотонами тормозного излучения с длиной волны  $\lambda$  в указанном диапазоне энергий с телесным углом разрешения  $(\lambda/R)^2$ , приходящие из оптически тонкого облака плазмы с температурой электронов  $T_e$  и плотностью числа электронов  $n_e$ , равен

$$\frac{R^2}{d_y^2} d_y^2 \left( \frac{\lambda}{R} \right)^2 \int d\ell \langle v \, d\sigma \rangle n_e^2 \sim \lambda^2 \left( \frac{d\omega}{\omega} \right) \int d\ell T_e^{-1/2} n_e^2. \quad (2.5.8)$$

Следовательно, значение  $n_e$ , полученное из результатов измерения рентгеновской светимости и углового размера скопления, пропорционально принятому значению  $H_0^{1/2}$ . Требование согласованности значения  $n_e$ , выведенного из рентгеновской светимости, со значением, полученным из эффекта Сюняева—Зельдовича, позволяет тем самым оценить  $H_0$ . Например, исследование двух скоплений галактик с  $z \simeq 0,55$  (где  $d_y$  вычислялось в предположении, что  $\Omega_m = 0,3$ , а  $\Omega_\Lambda = 0,7$ ) дало значение постоянной Хаббла, равное  $63_{-9}^{+12} \pm 21$  (км/с)/Мпк, где первая погрешность является статистической, вторая — систематической и обе приведены с доверительной вероятностью 68 %<sup>54)</sup>. Любые измерения такого рода настолько зависят от допущений о форме скопления галактик и неравномерности распределения электронов, что данные измерений эффекта Сюняева—Зельдовича и рентгеновской светимости, вероятно, гораздо более полезны в качестве источника информации о скоплениях галактик, чем как способ уточнения постоянной Хаббла. В одном отношении эффект Сюняева—Зельдовича вызывает досаду: он помешает будущим измерениям корреляций между первичными флуктуациями температуры при очень малом угловом разнесении<sup>55)</sup>. Однако вместе с какой-либо моделью формирования структуры (вроде обсуждаемой в гл. 8) наблюдения эффекта Сюняева—Зельдовича в малых угловых корреляциях флуктуаций температуры реликтового излучения могут снабдить нас полезной космологической информацией<sup>56)</sup>. Данные наблюдения подобных малоугловых корреляций<sup>57)</sup> уже были интерпретированы как следствие эффекта Сюняева—Зельдовича<sup>58)</sup>.

<sup>54)</sup> E. D. Reese et al., *Astrophys. J.* **533**, 38 (2000).

<sup>55)</sup> Y. Rephaeli, *Astrophys. J.* **245**, 351 (1981); S. Cole and N. Kaiser, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **233**, 637 (1988).

<sup>56)</sup> E. Komatsu and T. Kitayam, *Astrophys. J.* **526**, L1 (1999).

<sup>57)</sup> B. S. Mason et al., *Astrophys. J.* **591**, 540 (2003).

<sup>58)</sup> E. Komatsu and U. Seljak, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **336**, 1256 (2002); J. R. Bond et al., *Astrophys. J.* **626**, 12 (2005).

## 2.6

## Первичные флуктуации реликтового излучения: беглый взгляд

Коэффициенты парциальных волн  $a_{\ell m}$  • Мультипольные коэффициенты  $C_\ell$  • Космическая дисперсия • Эффект Сакса—Вольфе • Спектр Гаррисона—Зельдовича • Доплеровские флуктуации • Внутренние температурные флуктуации • Интегрированный эффект Сакса—Вольфе • Наблюдения COBE

В двух предыдущих разделах мы рассматривали анизотропию реликтового излучения, источником которой служат явления, происходящие в поздней Вселенной: движение Земли относительно реликтового фона и рассеяние света межгалактическими электронами в скоплениях галактик на линии взгляда. Теперь мы обращаемся к общим анизотропическим эффектам, включая чрезвычайно показательную *первичную* анизотропию, которые обязаны своим появлением ранней Вселенной<sup>59)</sup>.

Удобно разложить разницу  $\Delta T(\hat{n})$  между температурой микроволнового излучения, наблюдаемой в направлении единичного вектора  $\hat{n}$ , и текущим средним значением температуры  $T_0$  по сферическим гармоникам  $Y_\ell^m(\hat{n})$ :

$$\Delta T(\hat{n}) \equiv T(\hat{n}) - T_0 = \sum_{\ell m} a_{\ell m} Y_\ell^m(\hat{n}), \quad T_0 \equiv \frac{1}{4\pi} \int d^2 \hat{n} T(\hat{n}), \quad (2.6.1)$$

где суммирование по  $\ell$  ведется по всем положительным целым числам, а суммирование по  $m$  — по целым числам в пределах от  $-\ell$  до  $\ell$ . Поскольку  $\Delta T(\hat{n})$  вещественно, коэффициенты  $a_{\ell m}$  должны удовлетворять условию вещественности:

$$a_{\ell m}^* = a_{\ell -m}. \quad (2.6.2)$$

---

Мы определяем сферические функции таким образом, что  $Y_\ell^m(\hat{n})^* = Y_\ell^{-m}(\hat{n})$ .

---

Как мы видели в разд. 2.4, движение Земли вносит в  $\Delta T(\hat{n})$  анизотропию, которая в хорошем приближении пропорциональна  $P_1(\cos \theta) \propto Y_1^0(\theta, \phi)$  (где ось  $z$  смотрит в направлении движения Земли), так что основным членом  $a_{\ell m}$ , который порождается этим эффектом, будет тот, для которого  $\ell = 1$  и  $m = 0$ .

Коэффициенты  $a_{\ell m}$  отражают не только то, что происходило во время последнего рассеяния, но и конкретное положение Земли во Вселенной. никакая космологическая теория не в состоянии рассказать нам об этом. Наибольший космологический интерес представляют *средние* величины, которые

<sup>59)</sup> P. J. E. Peebles and J. T. Yu, *Astrophys. J.* **162**, 815 (1970); R. A. Sunyaev and Ya. B. Zel'dovich, *Astrophys. Space Sci.* **7**, 20 (1970); Ya. B. Zel'dovich, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **160**, 1 (1972).

можно рассматривать как полученные либо усреднением по различным возможным положениям, либо усреднением по историческим событиям, сформировавшим данную конкретную картину флуктуаций. Эргодическая теорема, описанная в приложении D, показывает, что при разумных допущениях эти два вида средних величин совпадают. Эти средние мы будем обозначать так:  $\langle \dots \rangle$ . Как обсуждается в гл. 10, для эффектов анизотропии, возникающих благодаря квантовым флуктуациям в процессе инфляции, это те средние по историческим событиям, которые связаны с квантовомеханическими ожидаемыми значениями. Мы вскоре вернемся к вопросу о том, как использовать линейные наблюдений, которые выполнены из *одного* положения во Вселенной, порожденной *одной* конкретной цепью событий, чтобы больше узнать об этих средних величинах, однако прежде мы должны ввести некоторые обозначения.

Мы предполагаем, что Вселенная в среднем инвариантна относительно вращений, так что все средние величины  $\langle \Delta T(\hat{n}_1) \Delta T(\hat{n}_2) \Delta T(\hat{n}_3) \dots \rangle$  являются инвариантными при вращениях функциями направлений  $\hat{n}_1$ ,  $\hat{n}_2$  и т. д. В частности,  $\langle \Delta T(\hat{n}) \rangle$  не зависит от  $\hat{n}$ . Поскольку величина  $\Delta T(\hat{n})$  определена как отклонение температуры от значения, усредненного по всем направлениям, то среднее этой величины по всем направлениям  $\int \Delta T(\hat{n}) d^2\hat{n}/(4\pi)$  равно нулю. Усредняя по положениям наблюдателя, получаем  $\int \langle \Delta T(\hat{n}) \rangle d^2\hat{n} = 0$ , так что, поскольку  $\langle \Delta T(\hat{n}) \rangle$  не зависит от  $\hat{n}$ , эта величина также равна нулю.

Простейшей нетривиальной количественной характеристикой анизотропии реликтового излучения является среднее произведение двух  $\Delta T$ . Инвариантность относительно вращений требует, чтобы произведение двух коэффициентов  $a$  имело вид

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'} \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{m-m'} C_\ell, \quad (2.6.3)$$

поскольку в этом случае среднее значение произведения двух  $\Delta T$  будет инвариантным относительно вращений:

$$\langle \Delta T(\hat{n}) \Delta T(\hat{n}') \rangle = \sum_{\ell m} C_\ell Y_\ell^m(\hat{n}) Y_\ell^{-m}(\hat{n}') = \sum_\ell C_\ell \left( \frac{2\ell+1}{4\pi} \right) P_\ell(\hat{n} \cdot \hat{n}'), \quad (2.6.4)$$

где  $P_\ell$  — обычные полиномы Лежандра. Зная левую часть, мы можем отыскать  $C_\ell$ , обратив преобразование Лежандра:

$$C_\ell = \frac{1}{4\pi} \int d^2\hat{n} d^2\hat{n}' P_\ell(\hat{n} \cdot \hat{n}') \langle \Delta T(\hat{n}) \Delta T(\hat{n}') \rangle. \quad (2.6.5)$$

Вместо соотношения (2.6.3) мы можем дать другое, эквивалентное ему определение мультипольных коэффициентов  $C_\ell$ :

$$\langle a_{\ell m} a_{\ell' m'}^* \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} C_\ell,$$

которое показывает, что  $C_\ell$  вещественны и положительны. Для гауссовых (в смысле описания, данного в приложении E) возмущений  $\Delta T$ , зная  $C_\ell$ , мы располагаем всем необходимым, чтобы найти средние значения всех произведений  $\Delta T$ .

Конечно, мы не можем провести усреднение по положениям, из которых наблюдается реликтовое излучение. В действительности мы наблюдаем величину, усредненную по  $t$ , а не по положениям:

$$C_\ell^{\text{набл}} \equiv \frac{1}{2\ell+1} \sum_m a_{\ell m} a_{\ell -m} = \frac{1}{4\pi} \int d^2 \hat{n} d^2 \hat{n}' P_\ell(\hat{n} \cdot \hat{n}') \Delta T(\hat{n}) \Delta T(\hat{n}'). \quad (2.6.6)$$

Относительная разница между интересными для космологии  $C_\ell$  и наблюдаемыми  $C_\ell^{\text{набл}}$  известна как *космическая дисперсия*. К счастью, для гауссовых возмущений средний квадрат космической дисперсии уменьшается с ростом  $\ell$ . Среднеквадратичная относительная разница равна

$$\left\langle \left( \frac{C_\ell - C_\ell^{\text{набл}}}{C_\ell} \right)^2 \right\rangle = 1 - 2 + \frac{1}{(2\ell+1)^2 C_\ell^2} \sum_{mm'} \langle a_{\ell m} a_{\ell -m} a_{\ell m'} a_{\ell -m'} \rangle. \quad (2.6.7)$$

Если  $\Delta T$  подчиняется распределению Гаусса, то же верно и для мультипольных коэффициентов (но *не* для квадратичных по  $a_{\ell m}$  величин вроде  $C_\ell$ ). Отсюда следует, что<sup>60)</sup>

$$\begin{aligned} \langle a_{\ell m} a_{\ell -m} a_{\ell m'} a_{\ell -m'} \rangle &= \langle a_{\ell m} a_{\ell -m} \rangle \langle a_{\ell m'} a_{\ell -m'} \rangle + \\ &+ \langle a_{\ell m} a_{\ell m'} \rangle \langle a_{\ell -m} a_{\ell -m'} \rangle + \langle a_{\ell m} a_{\ell -m'} \rangle \langle a_{\ell -m} a_{\ell m'} \rangle. \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

Используя соотношение (2.6.3), находим, что первый член в правой части (2.6.8) вносит в сумму (2.6.7) вклад, равный  $(2\ell+1)^2 C_\ell^2$ , а второй и третий члены — вклад  $(2\ell+1) C_\ell^2$  для каждого, так что

$$\left\langle \left( \frac{C_\ell - C_\ell^{\text{набл}}}{C_\ell} \right)^2 \right\rangle = \frac{2}{2\ell+1}. \quad (2.6.9)$$

Это накладывает ограничение на ту точность, с которой мы можем измерить  $C_\ell$  при малых значениях  $\ell$ . С другой стороны, тот же анализ показывает, что при  $\ell \neq \ell'$

$$\left\langle \left( \frac{C_\ell - C_\ell^{\text{набл}}}{C_\ell} \right) \left( \frac{C_{\ell'} - C_{\ell'}^{\text{набл}}}{C_{\ell'}} \right) \right\rangle = 0, \quad (2.6.10)$$

<sup>60)</sup> Негауссовые члены в распределении вероятностей для анизотропии проявили бы себя как ненулевые средние произведений нечетных количеств  $a_{\ell m}$ , а также как поправки к формулам вроде (2.6.8) для средних произведений четных количеств  $a_{\ell m}$ . Подобные негауссовые члены возникают как в ранней Вселенной, так и в относительно поздние времена. Обзор см. в N. Bartolo, E. Komatsu, S. Matarrese, and A. Riotto, *Phys. Rep.* **402**, 103 (2004). Негауссовые члены, порождаемые квантовыми флуктуациями в процессе инфляции, были вычислены в приближении древесного графа в работе J. Maldacena, *J. High Energy Phys.* 05 (2003) 013. Влияние петлевых графов рассмотрено в S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **72**, 043514 (2005) [hep-ph/0506236]; *Phys. Rev. D* **74**, 023508 (2006) [hep-ph/0605244]; K. Chaicherdsakul, *Phys. Rev. D* **75**, 063522 (2007) [hep-th/0611352]. Относительно вклада на поздних временах см. M. Liguori, F. K. Hansen, E. Komatsu, S. Matarrese, and A. Riotto, *Phys. Rev. D* **73**, 043505 (2006) [astro-ph/0509098]. Слабость анизотропных эффектов в реликтовом излучении указывает на то, что любые негауссовые члены, скорее всего, являются малыми. Вплоть до настоящего момента не найдено экспериментальных свидетельств в пользу наличия таких членов.

так что флуктуации  $C_\ell^{\text{набл}}$  относительно плавно меняющейся величины  $C_\ell$  для различных  $\ell$  не коррелируют друг с другом. Это означает, что если мы измерили  $C_\ell^{\text{набл}}$  для всех  $\ell$  в некотором диапазоне  $\Delta\ell$ , где  $C_\ell$  действительно меняется слабо, то возникающая благодаря космической дисперсии погрешность в значении  $C_\ell$ , полученном в этом диапазоне, уменьшается на множитель  $1/\sqrt{\Delta\ell}$ . Но даже при этом результаты измерения  $C_\ell$  для  $\ell < 5$ , вероятно, мало что могут рассказать нам о космологии. Кроме того, измерения при  $\ell > 2000$  искажаются динамическими эффектами вроде эффекта Сюняева—Зельдовича, обсуждавшегося в предыдущем разделе. К счастью, при значениях  $\ell$  между 5 и 2000 в  $C_\ell$  содержится много структурной информации, которая может снабдить нас бесценными сведениями космологического характера.

Есть несколько источников первичной анизотропии реликтового излучения:

1. Внутренние флуктуации температуры в электрон-нуклон-фотонной плазме во время последнего рассеяния<sup>61)</sup> при красных смещениях около 1090.
2. Эффект Доплера, возникающий из-за флуктуаций скоростей в плазме при последнем рассеянии.
3. Гравитационное красное или голубое смещение, вызванное флуктуациями гравитационного потенциала при последнем рассеянии. Этот эффект известен как *эффект Сакса—Вольфе*<sup>62)</sup>.
4. Гравитационные красные или голубые смещения, возникающие благодаря зависящим от времени флуктуациям гравитационного потенциала между временем последнего рассеяния и настоящим моментом.

---

Зависимость флуктуаций от времени является необходимым требованием: фотон, попавший в не зависящую от времени потенциальную яму, выходя из нее, потеряет всю набранную при попадании туда энергию.

---

Это явление известно под несколько сбивающим с толку названием «*интегральный эффект Сакса—Вольфе*».

Правильный учет этих эффектов требует привлечения общей теории относительности. Это станет нашей темой в гл. 5–7. С другой стороны, с того момента, как температура упала ниже  $10^4$  K, и до момента, когда энергия

<sup>61)</sup> Строго говоря, в приближении внезапного спада непрозрачности при фиксированной температуре  $T_{\text{п.р.}} \simeq 3000$  K то, что мы наблюдаем, — не внутренние температурные флуктуации, а вытекающие из них флуктуации красного смещения  $z_{\text{п.р.}}$  для последнего рассеяния. Поскольку невозмущенная температура  $\bar{T}(t)$  ведет себя как  $1/a(t)$ , то значение  $a_{\text{п.р.}}$ , при котором полная температура  $\bar{T}(t) + \delta T(t)$  достигает фиксированного значения  $T_{\text{п.р.}}$ , смещается на величину  $\delta a_{\text{п.р.}}$  таким образом, что  $-(t_{\text{п.р.}}/a_{\text{п.р.}})\delta a_{\text{п.р.}} + \delta T(t_{\text{п.р.}}) = 0$ . Наблюданная температура (если оставить в стороне все прочие эффекты) есть  $T_{\text{п.р.}} a(t_{\text{п.р.}})/a_0$ , так что в первом порядке относительное смещение составляет  $T_{\text{п.р.}} \delta a_{\text{п.р.}}/(a_0 T_0) = \delta T(t_{\text{п.р.}}) a_{\text{п.р.}}/(a_0 T_0) = \delta T(t_{\text{п.р.}})/T_{\text{п.р.}}$  — в точности как если бы мы наблюдали внутренние флуктуации температуры.

<sup>62)</sup> R. K. Sachs and A. M. Wolfe, *Astrophys. J.* **147**, 73 (1967).

вакуума стала важной при красных смещениях порядка единицы, гравитационное поле Вселенной с хорошей степенью приближения определялось холодной темной материей, к которой можно применять методы ньютоновской физики. Поэтому в данном вводном разделе мы сосредоточимся на эффекте Сакса—Вольфе и интегральном эффекте Сакса—Вольфе, которые при малых  $\ell$  (меньше примерно 40) оказывают преобладающее влияние на мультипольные коэффициенты  $C_\ell$ . О вкладе доплеровского эффекта и внутренних флуктуаций температуры мы сделаем в этом разделе лишь несколько предварительных замечаний.

Рассматривая эффект Сакса—Вольфе и интегральный эффект Сакса—Вольфе, мы возвращаемся к ньютоновскому подходу в космологии, очерченному соотношениями (1.5.21)–(1.5.27). Этот подход к трактовке возмущений в однородной изотропной космологии представлен в приложении F. В данный момент нам нужны только результаты этого анализа: возмущение гравитационного потенциала, выраженное как функция сопутствующей координаты  $x$ , является *не зависящей от времени* функцией  $\delta\phi(x)$ . Это возмущение вызывает два эффекта. Во-первых, это обычное гравитационное красное смещение: частота и, следовательно, энергия фотона, испущенного в точке  $x$  в момент последнего рассеяния, будут смещены на малую величину  $\delta\phi(x)$ , так что температура, наблюдаемая нами в направлении  $\hat{n}$ , окажется смещенной относительно средней величины по всей небесной сфере на величину

$$\left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)_1 = \delta\phi(\hat{n}r_{\text{п. р.}}). \quad (2.6.11)$$

Здесь  $r_{\text{п. р.}}$  — радиальная координата поверхности последнего рассеяния, задаваемая соотношением (1.5.44) в виде

$$r_{\text{п. р.}} = \frac{1}{\Omega_K^{1/2} H_0 a(t_0)} \operatorname{sh} \left[ \Omega_K^{1/2} \int_{1/(1+z_{\text{п. р.}})}^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_\Lambda x^4 + \Omega_K x^2 + \Omega_m x + \Omega_i}} \right], \quad (2.6.12)$$

где  $\Omega_K = 1 - \Omega_\Lambda - \Omega_m - \Omega_i$ ;  $z_{\text{п. р.}}$  — красное смещение последнего рассеяния;  $t_0$  — настоящий момент времени. Возмущение гравитационного потенциала изменяет также на малую величину  $\delta\phi(x)$  темп расширения Вселенной, а поскольку во Вселенной с преобладанием вещества температура спадает как  $a^{-1} \propto t^{-2/3}$ , то это приводит к сдвигу значения красного смещения, при котором Вселенная достигает температуры  $\simeq 3000$  К последнего рассеяния, на относительную величину

$$\left( \frac{\delta z}{1+z} \right)_{T=3000\text{K}} = - \left( \frac{\delta a(t)}{a(t)} \right)_{T=3000\text{K}} = \left( \frac{\dot{a}}{a} \right)_{T=3000\text{K}} \delta\phi(r_{\text{п. р.}} \hat{n}) t_{\text{п. р.}} = \frac{2}{3} \delta\phi(r_{\text{п. р.}} \hat{n}).$$

Если пренебречь всеми прочими влияниями, то температура, наблюдаемая в направлении  $\hat{n}$ , будет равна значению 3000 К, деленному на  $1+z$ , так что

малое смещение в  $1+z$  приводит к относительному изменению наблюдаемой температуры на величину

$$\left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)_2 = -\frac{2}{3} \delta\phi(\hat{n}r_{\text{п. п.}}). \quad (2.6.13)$$

Сумма смещений (2.6.11) и (2.6.13) описывает эффект Сакса—Вольфе:

$$\left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)_{\text{СВ}} = \frac{1}{3} \delta\phi(\hat{n}r_{\text{п. п.}}). \quad (2.6.14)$$

Множитель  $1/3$  будет получен в гл. 7 как результат более тщательного релятивистского анализа.

Удобно записать  $\delta\phi(\mathbf{x})$  как преобразование Фурье:

$$\delta\phi(\mathbf{x}) = \int d^3q e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \delta\phi_{\mathbf{q}}. \quad (2.6.15)$$

Мы воспользуемся хорошо известным разложением Лежандра для экспоненты:

$$e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = \sum_{\ell} (2\ell + 1) i^{\ell} P_{\ell}(\hat{q} \cdot \hat{n}) j_{\ell}(qr), \quad (2.6.16)$$

где  $j_{\ell}$  — сферические функции Бесселя, определяемые через обычные функции Бесселя  $J_{\nu}$  соотношением

$$j_{\ell}(z) \equiv \left( \frac{\pi}{2z} \right)^{1/2} J_{\ell+1/2}(z).$$

Тогда формула (2.6.14) дает

$$\left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)_{\text{СВ}} = \frac{1}{3} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1) i^{\ell} \int d^3q \delta\phi_{\mathbf{q}} j_{\ell}(qr_{\text{п. п.}}) P_{\ell}(\hat{q} \cdot \hat{n}). \quad (2.6.17)$$

Теперь нам необходимо разобраться в том, как вычисляется среднее значение произведения двух относительных сдвигов температуры в двух различных направлениях. Хотя  $\delta\phi(\mathbf{x})$  зависит от положения, наблюдаемое распределение вероятности для  $\delta\phi(\mathbf{x})$  в различных частях Вселенной инвариантно относительно пространственных сдвигов и вращений. Отсюда, среди прочего, вытекает, что

$$\langle \delta\phi_{\mathbf{q}} \delta\phi_{\mathbf{q}'} \rangle = \mathcal{P}_{\phi}(q) \delta^3(\mathbf{q} + \mathbf{q}'), \quad (2.6.18)$$

где  $\mathcal{P}_{\phi}(q)$  — функция только абсолютной величины  $\mathbf{q}$ .

---

Дельта-функция нужна здесь потому, что  $\langle \delta\phi(\mathbf{x}) \delta\phi(\mathbf{y}) \rangle$  должно быть функцией только  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ .

---

Поскольку  $\delta\phi(\mathbf{x})$  вещественна, ее фурье-образ удовлетворяет условию вещественности  $\delta\phi_{\mathbf{q}}^* = \delta\phi_{-\mathbf{q}}$ , которое вместе с соотношением (2.6.18) говорит нам, что  $\mathcal{P}_\phi(q)$  вещественна и положительна.

Теперь, используя формулы (2.6.17) и (2.6.18) вместе с правилом отражения  $P_\ell(-z) = (-1)^\ell P_\ell(z)$  и свойством ортогональности полиномов Лежандра

$$\int d\Omega_{\hat{q}} P_\ell(\hat{n} \cdot \hat{q}) P_{\ell'}(\hat{n}' \cdot \hat{q}) = \left( \frac{4\pi}{2\ell + 1} \right) \delta_{\ell\ell'} P_\ell(\hat{n} \cdot \hat{n}'), \quad (2.6.19)$$

получаем

$$\langle \Delta T(\hat{n}) \Delta T(\hat{n}') \rangle_{\text{СВ}} = \frac{4\pi T_0^2}{9} \sum_{\ell} (2\ell + 1) P_\ell(\hat{n} \cdot \hat{n}') \int_0^\infty q^2 dq \mathcal{P}_\phi(q) j_\ell^2(qr_{\text{п.п.}}), \quad (2.6.20)$$

или, сравнивая с (2.6.4),

$$C_{\ell, \text{СВ}} = \frac{16\pi^2 T_0^2}{9} \int_0^\infty q^2 dq \mathcal{P}_\phi(q) j_\ell^2(qr_{\text{п.п.}}). \quad (2.6.21)$$

В той мере, в какой гравитационный потенциал порождается холодной темной материи в отсутствие давления, дифференциальное уравнение для  $\delta\phi$  не включает в себя градиенты, так что в дифференциальное уравнение для фурье-образа не входит волновой вектор  $\mathbf{q}$  (см. (F.12) и (F.18)). Тогда источником зависимости  $\delta\phi_{\mathbf{q}}$  от  $\mathbf{q}$  могут быть только начальные условия для этих дифференциальных уравнений<sup>63)</sup>. По этой причине будет вполне естественным попробовать принять гипотезу о том, что  $\mathcal{P}_\phi(q)$  имеет простой вид — скажем, степенной функции от  $q$ . Показатель степени в этом случае принято записывать в форме  $n - 4$ :

$$\mathcal{P}_\phi(q) = N_\phi^2 q^{n-4}, \quad (2.6.22)$$

где  $N_\phi^2$  — положительная постоянная. Тогда мы можем воспользоваться стандартной формулой

$$\int_0^\infty j_\ell^2(s) s^{n-2} ds = \frac{2^{n-4} \pi \Gamma(3-n) \Gamma(\ell + \frac{n-1}{2})}{\Gamma^2(\frac{4-n}{2}) \Gamma(\ell + 2 - \frac{n-1}{2})} \quad (2.6.23)$$

и найдем, что при  $\ell < 100$  соотношение (2.6.21) дает

$$C_{\ell, \text{СВ}} \rightarrow \frac{16\pi^3 2^{n-4} \Gamma(3-n) r_{\text{п.п.}}^{1-n} N_\phi^2 T_0^2}{9 \Gamma^2(\frac{4-n}{2})} \frac{\Gamma(\ell + \frac{n-1}{2})}{\Gamma(\ell + 2 - \frac{n-1}{2})}. \quad (2.6.24)$$

<sup>63)</sup> Это неверно даже для эффекта Сакса—Вольфе, если  $q$  столь велико, что  $q/a$  становится больше  $H$  прежде, чем в плотности Вселенной начинает преобладать холодная материя. Как мы увидим в гл. 7, эта оговорка существенна для  $C_{\ell, \text{СВ}}$  только при  $\ell > 100$ .

В частности, еще до открытия первичных флуктуаций реликтового излучения уже имелись некоторые общие предположения о величинах  $n$  и  $N$ , в основе которых лежало не реликтовое излучение, а крупномасштабная структура материи, наблюдавшаяся относительно близко к текущему моменту. Возмущение  $\delta\rho$  полной плотности массы связано с эффектом Сакса—Вольфе уравнением Пуассона, которое дает

$$a^{-2}\nabla^2\delta\phi = 4\pi G \delta\rho, \quad (2.6.25)$$

где множитель  $a^{-2}(t)$  появляется из-за соотношения  $\mathbf{X} = a(t)\mathbf{x}$  для собственных расстояний (см. (F.12)). Выражая фурье-образ  $\delta\rho$  через фурье-образ  $\delta\phi$ , мы находим корреляционную функцию для флуктуаций плотности:

$$\langle \delta\rho(\mathbf{x}, t) \delta\rho(\mathbf{x}', t') \rangle = (4\pi G a(t) a(t'))^{-2} \int d^3q q^4 \mathcal{P}_\phi(q) e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}. \quad (2.6.26)$$

Применение этой формулы к измерению  $\mathcal{P}_\phi$  обсуждается в гл. 8. На данном этапе достаточно отметить, что результаты наблюдений корреляционной функции плотности давно привели к предположению, что  $\mathcal{P}_\phi$  имеет так называемую форму Гаррисона—Зельдовича<sup>64)</sup> с  $n = 1$  и что  $N_\phi \approx 10^{-5}$ . Как мы увидим в гл. 10, из инфляционных теорий следует общее предсказание о том, что  $n$  близка к единице, но не равна ей в точности. При  $n = 1$  мы получим результат, обладающий масштабной инвариантностью в том смысле, что он не зависит от  $r_{\text{п.р.}}$ :

$$C_\ell, \text{св} \rightarrow \frac{8\pi^2 N_\phi^2 T_0^2}{9\ell(\ell + 1)}. \quad (2.6.27)$$

По этой причине экспериментальные данные об анизотропии реликтового излучения обычно представляют в форме графиков с осями  $\ell(\ell + 1)C_\ell$  и  $\ell$ .

Что можно сказать о других вкладах в  $C_\ell$ ? Для динамики фотон-нуклон-электронной плазмы важны градиенты давления, так что при оценке вклада эффекта Доплера и внутренних флуктуаций температуры мы вынуждены иметь дело с дифференциальными уравнениями, куда существенным образом входит волновое число  $q$ . Каким бы ни было рассматриваемое возмущение, мы всегда можем записать его в виде фурье-интеграла вроде (2.6.15) и воспользоваться формулой (2.6.16), чтобы выразить  $e^{i\mathbf{q} \cdot \hat{n} r_{\text{п.р.}}}$  как ряд полиномов Лежандра  $P_\ell(\hat{q} \cdot \hat{n})$  с коэффициентами, пропорциональными  $j_\ell(qr_{\text{п.р.}})$ . Тогда для интеграла по  $q$  определяющими будут значения  $q$  порядка  $\ell/r_{\text{п.р.}}$  в случае  $\ell \gg 1$ .

---

Это наиболее интересный случай, поскольку соотношение (2.6.9) показывает, что только при  $\ell \gg 1$  можно пренебречь космической дисперсией при измерении  $C_\ell$ .

---

<sup>64)</sup> E. R. Harrison, *Phys. Rev.* **D1**, 2726 (1970); Ya. B. Zel'dovich, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **160**, 1P (1972).

Это происходит потому, что при  $\ell \gg 1$  сферические функции Бесселя  $j_\ell(z)$  имеют пик в точке  $z \simeq \ell$ . А именно, для  $\nu \equiv \ell + 1/2 \rightarrow \infty$  и  $z \rightarrow \infty$  при фиксированном и отличном от единицы  $\nu/z$  мы имеем

$$j_\ell(z) \rightarrow \begin{cases} 0, & z < \nu, \\ z^{-1/2}(z^2 - \nu^2)^{-1/4} \cos \left[ \sqrt{z^2 - \nu^2} - \nu \arccos \left( \frac{\nu}{z} \right) - \frac{\pi}{4} \right], & z > \nu. \end{cases} \quad (2.6.28)$$

Следовательно, при больших  $\ell$  коэффициент  $C_\ell$  отражает главным образом поведение фурье-компонент возмущений с  $q \approx \ell/r_{\text{п.р.}}$ . К этому можно прийти и другим путем: физическое волновое число в момент времени  $t_{\text{п.р.}}$  есть  $\mathbf{k}_{\text{п.р.}} \equiv \mathbf{q}/a(t_{\text{п.р.}})$  (поскольку мерой собственных расстояний в этот момент является  $a(t_{\text{п.р.}})\mathbf{x}$ ), так что  $C_\ell$  при больших  $\ell$  отражает поведение возмущений с  $k_{\text{п.р.}} \approx \ell/d_y$ , где  $d_y$  — расстояние по угловому диаметру до поверхности последнего рассеяния

$$d_y \equiv r_{\text{п.р.}} a(t_{\text{п.р.}}) = \frac{1}{\Omega_K^{1/2} H_0 (1 + z_{\text{п.р.}})} \operatorname{sh} \left[ \Omega_K^{1/2} \int_{\frac{1}{1+z_{\text{п.р.}}}}^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_\Lambda x^4 + \Omega_K x^2 + \Omega_M x + \Omega_i}} \right] \quad (2.6.29)$$

с учетом  $1 + z_{\text{п.р.}} \equiv a(t_0)/a(t_{\text{п.р.}})$ .

Для физических волновых чисел  $q/a$ , намного меньших скорости расширения  $H$ , любое единичное возмущение подчиняется дифференциальному уравнению, которое по сути дела не зависит от волнового числа  $q$ , так что источником любой зависимости возмущения от  $q$  являются начальные условия.

---

Отношения различных возмущений, таких как  $\delta\phi_q$  или  $\delta\rho_q$ , разумеется, могут зависеть от  $q$ .

---

Про такие возмущения говорят, что они находятся «за горизонтом», поскольку длина волны существенно превышает расстояние до горизонта (строго говоря, расстояние до «горизонта частиц»), которое, как мы видели в разд. 1.13, по порядку величины равно примерно  $1/H$ . В течение эпох преобладания излучения или вещества отношение  $q/a$  спадало как  $t^{-1/2}$  или  $t^{-2/3}$ , тогда как  $H$  уменьшалось быстрее — как  $1/t$ , так что возмущения, находившиеся за горизонтом в ранние времена, последовательно входили в пределы горизонта, причем те, которые имели большие волновые числа, входили раньше.

Относительно расстояния до горизонта нам следует быть несколько более точными. Во время последнего рассеяния во Вселенной по большей части преобладало вещество, так что, как показано в разд. 1.13, расстояние до горизонта в это время составляло примерно  $2/H(t_{\text{п.р.}})$ . Однако это максимальное собственное расстояние, которое мог покрыть свет с начала нынешней фазы

расширения Вселенной. Как мы увидим в гл. 5 и 6, преобладающими возмущениями в плазме нуклонов, электронов и фотонов, имеющими отношение к анизотропии реликтового излучения, являются звуковые волны, так что мы должны принять во внимание более низкую скорость звука. В течение эпохи, предшествовавшей рекомбинации, когда излучение и вещество находились в тепловом равновесии, скорость звука составляла  $v_{\text{зв}} = (\delta r \rho)^{1/2}$ , где  $\delta r$  и  $\delta \rho$  — бесконечно малые вариации давления и плотности в *адиабатической* флуктуации. При возмущениях такого рода энтропия в расчете на барион остается невозмущенной:

$$0 = \delta \sigma \propto \delta \left( \frac{\epsilon}{n_b} \right) + p \delta \left( \frac{1}{n_b} \right),$$

где  $\epsilon$  — плотность тепловой энергии,  $n_b$  — плотность числа барионов, а  $p$  — давление. Как мы видели в разд. 2.2, фотонов настолько больше, чем барионов, что как в  $\epsilon$ , так и в  $p$  преобладает излучение:

$$\epsilon = a_B T^4, \quad p = \frac{1}{3} a_B T^4,$$

а следовательно, для адиабатических возмущений

$$3 \frac{\delta T}{T} = \frac{\delta n_b}{n_b} = \frac{\delta \rho_b}{\rho_b}, \quad (2.6.30)$$

где  $\rho_b$  — плотность барионной массы. Это дает скорость звука

$$v_{\text{зв}} = \left( \frac{4a_B T^3 \delta T / 3}{\delta \rho_b + 4a_B T^3 \delta T} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{3(1+R)}}, \quad (2.6.31)$$

где  $R \equiv 3\rho_b/(4a_B T^4)$ . Поскольку  $\rho_b \propto a^{-3}$ , а  $T \propto a^{-1}$ , то мы имеем  $R \propto a$  и, следовательно,  $dt = dR/(HR)$ , или, более подробно,

$$dt = \frac{dR}{RH_0 \sqrt{\Omega_m(R_0/R)^3 + \Omega_i(R_0/R)^4}} = \frac{R dR}{H_0 \sqrt{\Omega_m R_0^{3/2} \sqrt{R_{\text{экв}} + R}}},$$

где  $R_{\text{экв}} \equiv \Omega_i R_0 / \Omega_m = 3\Omega_i \Omega_b / (4\Omega_m \Omega_\gamma)$  — значение  $R$  при эквивалентности вещества и излучения. Тогда расстояние до акустического горизонта равно

$$\begin{aligned} d_{\text{гор}} \equiv a_{\text{п.п.}} \int_0^{t_{\text{п.п.}}} \frac{dt}{a \sqrt{3(1+R)}} &= R_{\text{п.п.}} \int_0^{t_{\text{п.п.}}} \frac{dt}{R \sqrt{3(1+R)}} = \\ &= \frac{2}{H_0 \sqrt{3R_{\text{п.п.}} \Omega_m (1+z_{\text{п.п.}})^{3/2}}} \ln \left( \frac{\sqrt{1+R_{\text{п.п.}}} + \sqrt{R_{\text{экв}} + R_{\text{п.п.}}}}{1 + \sqrt{R_{\text{экв}}}} \right), \end{aligned} \quad (2.6.32)$$

где  $R_{\text{п.п.}} = 3\Omega_b/4\Omega_\gamma(1+z_{\text{п.п.}})$  — значение  $R$  при последнем рассеянии. Градиенты начинают иметь значение, когда  $k_{\text{п.п.}} \approx 1/d_{\text{гор}}$ , а поскольку в интеграле по волновому числу в  $C_\ell$  преобладают  $k_{\text{п.п.}} \approx \ell/d_y$ , то градиенты становятся

важными, когда  $\ell$  достигает значения  $\ell_{\text{гор}}$ , где  $\ell_{\text{гор}} \equiv d_y/d_{\text{гор}}$ . Обе величины  $d_y$  и  $d_{\text{гор}}$  пропорциональны  $1/H_0$ , так что  $H_0$  в их отношении сокращается.

Для грубой оценки  $\ell_{\text{гор}}$  заметим, что  $d_y$  пропорционально  $(1+z_{\text{п.р.}})^{-1}$ , тогда как  $d_{\text{гор}}$  пропорционально  $(1+z_{\text{п.р.}})^{-3/2}$ , так что  $\ell_{\text{гор}}$  имеет порядок  $(1+z_{\text{п.р.}})^{1/2} = 33$ . Чтобы получить более точную оценку, возьмем за отправную точку значения космологических параметров, которые предполагаются наблюдениями за сверхновыми и исследованиями космологического нуклеосинтеза (обсуждается в разд. 3.2):  $\Omega_m = 0,26$ ,  $\Omega_\Lambda = 0,74$ ,  $\Omega_b = 0,043$ . Это дает нам  $R_{\text{п.р.}} = 0,62$ ,  $R_{\text{экв}} = 0,21$ ,  $d_y = 3,38H_0^{-1}(1+z_{\text{п.р.}})^{-1}$  и  $d_{\text{гор}} = 1,16H_0^{-1}(1+z_{\text{п.р.}})^{-3/2}$ , а следовательно,  $\ell_{\text{гор}} = 2,9\sqrt{1+z_{\text{п.р.}}} = 96$ .

Теперь мы можем определить относительный вклад в  $C_\ell$  других явлений, помимо эффекта Сакса—Вольфе:

- **Эффект Доплера.** Как любое векторное поле, скорость плазмы можно разложить на градиент некоего скаляра и «векторный» член с нулевой дивергенцией. В приложении F показано, что векторный член спадает как  $1/a$ , так что в возмущениях преобладают продольные моды, для которых скорость является градиентом скаляра. Поэтому мы можем ожидать, что вклад эффекта Доплера в интеграл по волновым числам  $q$  для  $\Delta T/T_0$  будет при малых волновых числах подавляться множителем порядка  $k_{\text{п.р.}}d_{\text{гор}}$ . В гл. 7 мы увидим, что пропорциональность вектору  $k_{\text{п.р.}}$  приводит к тому, что вклад эффекта Доплера не накладывается на вклад эффекта Сакса—Вольфе, так что для мультипольных порядков  $\ell \ll \ell_{\text{гор}}$  вклад эффекта Доплера будет меньше эффекта Сакса—Вольфе на множитель порядка  $[(\ell/d_y)d_{\text{гор}}]^2 = \ell^2/\ell_{\text{гор}}^2$ .

- **Внутренние флуктуации температуры.** Как мы уже видели благодаря соотношению (2.6.30), внутренние относительные флуктуации температуры во время последнего рассеяния составляют одну треть от внутренних относительных возмущений плотности плазмы. Как обсуждается в гл. 5 и 6, те возмущения, которые, как считается, преобладают за пределами горизонта, являются адиабатическими в том смысле, что относительное возмущение плотности плазмы равно относительному возмущению  $\delta\rho/\bar{\rho}$  полной плотности вещества. Однако возмущение полной плотности вещества связано с возмущением гравитационного потенциала уравнением Пуассона (2.6.25), которое при вычислении для времени последнего рассеяния дает значение фурье-образа

$$\delta\rho_{\mathbf{q}}(t_{\text{п.р.}}) = -\frac{q^2}{4\pi G a^2(t_{\text{п.р.}})} \delta\phi_{\mathbf{q}} = -\frac{k_{\text{п.р.}}^2}{4\pi G} \delta\phi_{\mathbf{q}},$$

где, как и прежде,  $k_{\text{п.р.}} = q/a(t_{\text{п.р.}})$ . Помимо этого, средняя полная плотность массы  $\bar{\rho}(t_{\text{п.р.}})$  при последнем рассеянии связана с размером горизонта  $d_{\text{гор}}$  соотношением

$$\bar{\rho}(t_{\text{п.р.}}) \simeq \frac{3H^2(t_{\text{п.р.}})}{8\pi G} \approx \frac{1}{2\pi G d_{\text{гор}}^2},$$

так что по порядку величины внутреннее относительное возмущение температуры связано с возмущением гравитационного потенциала формулой

$$\frac{\delta T(t_{\text{п. р.}})}{\bar{T}(t_{\text{п. р.}})} = \frac{\delta \rho(t_{\text{п. р.}})}{3\bar{\rho}(t_{\text{п. р.}})} \approx k_{\text{п. р.}}^2 d_{\text{топ}}^2 \delta\phi_q. \quad (2.6.33)$$

Тем самым, мы ожидаем, что вклад внутренних флюктуаций температуры в интеграл по волновым числам  $q$  для  $\Delta T/T_0$  будет при малых волновых числах подавляться множителем  $k_{\text{п. р.}}^2 d_{\text{топ}}^2$ . Тогда *интерференция* этого вклада с членом Сакса—Вольфе вносит вклад в  $C_\ell$  при  $\ell \ll \ell_{\text{топ}}$ , который, как и вклад эффекта Доплера, меньше вклада эффекта Сакса—Вольфе на множитель порядка  $|(\ell/d_y) d_{\text{топ}}|^2 \equiv \ell^2/\ell_{\text{топ}}^2$ .

---

Следует отметить, что различие между эффектом Сакса—Вольфе и влиянием внутренних температурных флюктуаций зависит от того, каким образом задана временная координата. Сделанные здесь нерелятивистские оценки в релятивистской трактовке глав 5–7 отвечали бы использованию того, что называется координатами в ньютоновской калибровке.

---

- **Интегральный эффект Сакса—Вольфе.** Как уже говорилось, в той мере, в какой  $\delta\phi$  является действительно не зависящей от времени, интегральный эффект Сакса—Вольфе отсутствует. Голубое смещение, вызванное падением фотона в не зависящую от времени гравитационную потенциальную яму на линии взгляда, будет скомпенсировано красным смещением, когда фотон покинет яму<sup>65)</sup>. В действительности возмущения гравитационного поля не являются строго не зависящими от времени — как потому, что в течение некоторого времени после последнего рассеяния излучение продолжает вносить в гравитационное поле вклад, которым нельзя пренебречь, так и потому, что в более поздние времена необходимы поправки к ньютоновской трактовке энергии вакуума, представленные в приложении F. Интегральный эффект Сакса—Вольфе в поздние времена влияет главным образом на  $C_\ell$  с  $\ell$  меньше примерно 10.

Таким образом, разумно предполагать, что при  $10 < \ell < 50$  основной вклад в  $C_\ell$  вносит эффект Сакса—Вольфе.

Если не считать наблюдения анизотропных эффектов, соответствующих  $\ell = 1$  и вызываемых движением Земли через реликтовое излучение, впервые анизотропия реликтового излучения была обнаружена спутником COBE в 1992 г.<sup>66)</sup> В этом эксперименте небо сканировалось двумя микроволновыми антеннами, разделенными углом в  $60^\circ$ , на частотах 31,5, 53 и 90 ГГц около

<sup>65)</sup> Есть также анизотропия, порождаемая зависящими от времени флюктуациями гравитационного потенциала космологических неоднородностей (таких как скопления холодной темной материи), что известно как эффект Риса—Скьямы; M. J. Rees and D. W. Sciama, *Nature* **217**, 511 (1968). Предполагается, что этот эффект мал; см. U. Seljak, *Astrophys. J.* **460**, 549 (1996). По поводу возможных сильных влияний локальной структуры см. A. Rakić, S. Räsänen, and D. J. Schwarz, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **363**, L27 (2006) [astro-ph/0601445].

<sup>66)</sup> G. F. Smoot et al., *Astrophys. J.* **396**, L1 (1992).

минимума излучения нашей Галактики и максимума планковского распределения для 2,7 К. Данные 1992 г. показали, что среднеквадратичные флуктуации температуры по углу составляют  $30 \pm 5$  мК, а их угловое распределение согласуется с  $n = 1$ . Четыре года спустя с помощью тех же инструментов были измерены<sup>67)</sup> значения  $C_\ell$  для  $\ell$  в диапазоне от 2 до 40. При  $\ell \geq 3$  результаты укладывались в зависимость от  $\ell$ , описываемую соотношением (2.6.24) со значением  $n = 1,13_{-0,4}^{+0,3}$ , которое согласуется с величиной  $n = 1$  для так называемого спектра Гаррисона—Зельдовича. Этот результат часто записывают как

$$C_\ell = \frac{24\pi Q^2}{5\ell(\ell+1)}, \quad (2.6.34)$$

где  $Q$  — величина, известная как *квадрупольный момент*. При подборе значений  $C_\ell$  для  $10 \leq \ell \leq 40$  результаты COBE 1996 г. дают  $Q = 18 \pm 1,4$  мК. Сопоставляя (2.6.34) и (2.6.27), мы видим, что

$$N_\phi = \sqrt{\frac{27}{5\pi}} \frac{Q}{T_0} = (8,7 \pm 0,7) \times 10^{-6}. \quad (2.6.35)$$

Поразительно, что, как можно судить по видимому отсутствию двухточечных корреляций при углах больше примерно  $60^\circ$ , для  $\ell = 2$  и  $\ell = 3$  мультипольные коэффициенты оказались гораздо меньше тех значений, которых можно было ожидать при экстраполяции<sup>68)</sup> соотношения (2.6.34), полученного подбором значений для  $\ell \geq 4$ . Расхождение с экспериментальными данными становится еще более глубоким, если принять во внимание интегральный эффект Сакса—Вольфе. С тех пор этот результат был подтвержден измерениями спутника WMAP<sup>69)</sup>, которые обсуждаются в гл. 7. Весьма вероятно, что это расхождение возникает благодаря комбинации зашумлений переднего плана и космической дисперсии<sup>70)</sup>, которая при  $\ell = 2$  в соответствии с (2.6.9) составляет 63 %.

Мы вынуждены отложить обсуждение расчета  $C_\ell$  при больших  $\ell$ , за пределами применимости соотношения (2.6.34), до гл. 7, поскольку сначала нам потребуется разработать общерелятивистскую теорию космологических флуктуаций, что мы сделаем в гл. 5 и 6. В гл. 7 мы вернемся также к наблюдениям последнего десятилетия, благодаря которым были уточнены и распространены на большие значения  $\ell$  результаты спутника COBE.

<sup>67)</sup> C. L. Bennett et al., *Astrophys. J.* **464**, L1 (1996) [astro-ph/9601067]; A. Kogut et al., *ibid.*, L5 (1996) [astro-ph/9601066]; K. M. Górski et al., *ibid.*, L11 (1996) [astro-ph/9601063]; G. Hinshaw et al., *ibid.*, L17 (1996) [astro-ph/9601058]; E. L. Wright et al., *ibid.*, L21 (1996) [astro-ph/9601059].

<sup>68)</sup> G. Hinshaw et al., *Astrophys. J.* **464**, L25 (1996) [astro-ph/9601061].

<sup>69)</sup> D. N. Spergel et al., *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 175 (2003).

<sup>70)</sup> G. Efstathiou, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **346**, L26 (2003) [astro-ph/0306431]; A. Slosar, U. Seljak, and A. Makarov, *Phys. Rev. D* **69**, 123003 (2004) [astro-ph/0403073]; A. Slosar and U. Seljak, *Phys. Rev. D* **70**, 083002 (2004); G. Hinshaw et al., *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **170**, 288 (2007).

## Глава 3

# РАННЯЯ ВСЕЛЕННАЯ

До сих пор мы изучали период истории Вселенной, в течение которого температура излучения уменьшилась с чуть более  $10^4$  К до современного значения 2,725 К. Теперь мы хотим обратиться к эпохе, когда температура составляла примерно  $10^4$  К, задолго до того, как плотность энергии излучения стала меньше плотности энергии барионов и холодной темной материи. Мы перенесемся в ту эпоху, когда температура была выше  $10^{10}$  К, когда имелось большое количество электрон-позитронных пар, находящихся в тепловом равновесии с нейтрино, и даже еще дальше, настолько, насколько позволит нам текущее понимание физических законов.

---

### 3.1

## Температурная история

**Плотность энтропии • Распределения Ферми—Дирака и Бозе—Эйнштейна • Время против температуры • Эффективное число сортов • Отщепление нейтрино • Разогрев за счет электрон-позитронной аннигиляции • Массы нейтрино и химические потенциалы**

Сначала давайте изучим историю уменьшения температуры ранней Вселенной. В этом разделе будет рассматриваться только тот период, когда значение температуры находилось между  $10^4$  К и  $10^{11}$  К и было достаточно малым, чтобы рождение мюон-антимюонных и адрон-антиадронных пар больше не происходило в ощутимых количествах.

Следующие два обстоятельства существенно упрощают нашу задачу. Первое состоит в том, что в течение этой эпохи частота столкновений фотонов с электронами и другими заряженными частицами настолько превышала скорость расширения Вселенной, что можно считать, что фотоны и заряженные частицы находились в тепловом равновесии, а их общая температура постепенно снижалась. В достаточно ранние периоды в тепловом равновесии с фотонами и заряженными частицами находились даже нейтрино, а также, возможно, частицы холодной темной материи; позже, после прекращения быстрых столкновений с другими частицами, их можно рассматривать как отдельные свободные частицы. Другое обстоятельство таково, что плотность числа барионов (строго говоря, плотность числа барионов минус плотность

числа антибарионов) настолько меньше плотности числа фотонов, что химическим потенциалом, соответствующим барионному числу, можно пренебречь. В следующем разделе вклад барионов будет учтен. Помимо этого, поскольку отношение числа электронов к числу протонов в настоящее время очень мало, разумно предположить, что *суммарное* число лептонов во Вселенной (плотность числа лептонов всех видов минус плотность числа антилептонов), приходящихся на один фотон, всегда было очень мало. Это означает, что даже при температурах порядка  $10^{10}$  К, когда электрон-позитронные пары имелись в большом количестве, плотность энергии и давление не были просто пропорциональны  $T^4$ , а плотность энтропии не была просто пропорциональна  $T^3$  — эти величины являлись некоторыми функциями  $s(T)$ ,  $\rho(T)$  и  $p(T)$ , зависящими только от температуры. (Возможность значительной величины суммарного лептонного числа обсуждается в конце этого раздела.)

Прежде чем изучать историю развития Вселенной в течение этой эпохи, следует кратко рассмотреть термодинамику и статистическую механику вещества подобно типа, которое находится в тепловом равновесии с ничтожно малыми химическими потенциалами. Из условия теплового равновесия следует, что энтропия сопутствующего объема фиксирована:

$$s(T)a^3 = \text{const.} \quad (3.1.1)$$

Второй закон термодинамики гласит, что любое медленное изменение, переводящее систему из равновесного состояния при температуре  $T$  с объемом  $V$  в равновесное состояние при температуре  $T + dT$  с объемом  $V + dV$ , приводит к изменению энтропии по формуле<sup>1)</sup>

$$d(s(T)V) = \frac{d(\rho(T)V) + p(T) dV}{T}. \quad (3.1.2)$$

Приравнивая коэффициенты при  $dV$ , получаем формулу для плотности энтропии

$$s(T) = \frac{\rho(T) + p(T)}{T}. \quad (3.1.3)$$

Также, приравнивая коэффициенты при  $VdT$  и пользуясь соотношением (3.1.3), получаем закон сохранения энергии:

$$T \frac{dp(T)}{dT} = \rho(T) + p(T). \quad (3.1.4)$$

---

Например, для излучения имеем  $p(T) = \rho(T)/3$ , поэтому уравнение (3.1.4) приводит к закону Стефана—Больцмана  $\rho = a_B T^4$ , где  $a_B$  это константа, которая не может быть определена на основе только термодинамического анализа; тогда

---

<sup>1)</sup> Уравнение (3.1.2) представляет собой так называемое *основное уравнение термодинамики для равновесных процессов*, получающееся из первого и второго начал термодинамики. Подробнее см.: Базаров И. П. Термодинамика. М.: Высшая школа, 1983. С. 56. — Прим. ред. перев.

уравнение (3.1.3) задает плотность энтропии излучения  $s(T) = 4a_B T^3/3$ . Именно поэтому в разд. 2.2 утверждалось, что константа  $\sigma k_B = 4a_B T^3/(3n_0)$  имеет смысл энтропии излучения на один барион.

---

При равных количествах частиц и античастиц, значение плотности  $n(p) dp$  типов фермионов (например, электронов) или бозонов (например, фотонов) массы  $m$ , импульс которых лежит в интервале от  $p$  до  $p + dp$ , задается распределением Ферми—Дирака или Бозе—Эйнштейна (с равным нулю химическим потенциалом)

$$n(p, T) = \frac{4\pi g p^2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{\sqrt{p^2 + m^2}}{k_B T}\right) \pm 1}, \quad (3.1.5)$$

где  $g$  — это число спиновых состояний частицы и античастицы, знак «+» соответствует фермионам, а «—» — бозонам. Например, для фотонов  $g = 2$  (разумеется,  $m = 0$ ), потому что у фотонов есть две поляризации, и они сами для себя античастицы, а для электронов и позитронов  $g = 4$ , потому что у них может быть два спиновых состояния, к тому же электроны и позитроны являются разными типами частиц. Плотность энергии и давление частицы массы  $m$  задаются интегралами<sup>2)</sup>

$$\rho(T) = \int_0^\infty n(p, T) dp \sqrt{p^2 + m^2}, \quad (3.1.6)$$

$$p(T) = \int_0^\infty n(p, T) dp \frac{p^2}{3\sqrt{p^2 + m^2}}. \quad (3.1.7)$$

Плотность энтропии такой частицы определяется соотношением (3.1.3) в виде

$$s(T) = \frac{1}{T} \int_0^\infty n(p, T) dp \left( \sqrt{p^2 + m^2} + \frac{p^2}{3\sqrt{p^2 + m^2}} \right). \quad (3.1.8)$$

В частности, для безмассовой частицы из (3.1.6) следует

$$\rho(T) = g \int_0^\infty \frac{4\pi g p^3 dp}{(2\pi\hbar)^3} \left( \frac{1}{\exp[p/(k_B T)] \pm 1} \right) = \begin{cases} \frac{ga_B T^4}{2} & \text{бозоны,} \\ \frac{7ga_B T^4}{16} & \text{фермионы,} \end{cases} \quad (3.1.9)$$

<sup>2)</sup> Выражение (3.1.6) непосредственно следует из определения  $n(p, T)$ , тогда выражение (3.1.7) может быть выведено из (3.1.4). Либо оба выражения (3.1.6) и (3.1.7) могут быть получены из (B.41) и (B.43).

разумеется,  $p(T) = \rho(T)/3$  и  $s(T) = 4\rho(T)/(3T)$ . Другими словами, каждый сорт частиц и каждый спин безмассовых фермионов дают вклад в плотность энергии, давление и плотность энтропии, совпадающий со вкладом от каждой поляризации фотонов, за исключением множителя  $7/8$ .

Пока сохраняется тепловое равновесие, изменение температуры со временем задается уравнением сохранения энтропии (3.1.1) и уравнением Эйнштейна для гравитационного поля, в котором пренебрегли кривизной,

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G\rho(T)}{3}. \quad (3.1.10)$$

Комбинация двух уравнений дает

$$t = - \int \frac{s'(T) dT}{s(T)\sqrt{24\pi G\rho(T)}} + \text{const.} \quad (3.1.11)$$

---

Знак минус возникает после извлечения квадратного корня из  $\dot{T}^2$  и соответствует убыванию температуры со временем.

---

В частности, на протяжении любой эпохи, в которой доминантной составляющей Вселенной является ультрарелятивистский идеальный газ, плотности энтропии и энергии имеют вид

$$s(T) = \frac{2\mathcal{N}a_B T^3}{3}, \quad (3.1.12)$$

$$\rho(T) = \frac{\mathcal{N}a_B T^4}{2}, \quad (3.1.13)$$

где  $\mathcal{N}$  — это число сортов частиц, которое учитывает каждую частицу и античастицу, а также каждый спин по отдельности, причем для фермионов возникает дополнительный множитель  $7/8$ . Тогда уравнение (3.1.11) принимает вид

$$t = \sqrt{\frac{3}{16\pi G\mathcal{N}a_B}} \frac{1}{T^2} + \text{const.} \quad (3.1.14)$$

Опираясь на полученные знания, давайте положим начало отсчета нашей истории в момент времени, когда температура составляла примерно  $10^{11}$  К, что находится в диапазоне  $m_\mu \gg k_B T \gg m_e$ . Даже если в этот момент времени температура была недостаточной для осуществления реакции  $\nu_\mu + e \rightarrow \mu + \nu_e$  или  $\nu_\tau + e \rightarrow \tau + \nu_e$ , нейтрино  $\nu_\mu$ ,  $\nu_\tau$  и антинейтрино все равно находились в тепловом равновесии посредством реакций с нейтральными токами, подобно рассеянию нейтрино на электроне или  $e^+ + e^- \rightleftharpoons \nu + \bar{\nu}$ . Следовательно, в этот момент времени Вселенную составляли фотоны с двумя спиновыми состояниями, плюс три сорта нейтрино и их антинейтрино, каждое из которых находилось в одном спиновом состоянии, плюс электроны и позитроны,

каждый из которых находился в двух спиновых состояниях, все они ультраполятивистские и находятся в равновесии, что приводит к

$$\mathcal{N} = 2 + \frac{7}{8}(6 + 4) = \frac{43}{4}, \quad (3.1.15)$$

так что уравнение (3.1.14) в единицах СГС принимает вид

$$t = \sqrt{\frac{3c^2}{172\pi G a_B}} \frac{1}{T^2} + \text{const} = 0,994 \text{ с} \left( \frac{T}{10^{10} \text{ К}} \right)^{-2} + \text{const}. \quad (3.1.16)$$

Например, если отбросить мюоны и положить массу электрона равной нулю, температура падает с  $10^{12}$  К до  $10^{11}$  К за 0,0098 с, и еще 0,98 с требуется для уменьшения до  $10^{10}$  К.

При температуре примерно  $10^{10}$  К нейтрино выходят из равновесии с другими частицами и начинают распространяться без ограничений. Сечение рассеяния слабого взаимодействия для рассеяния нейтрино на электроне составляет приблизительно  $\sigma_{wk} \approx (\hbar G_{wk} k_B T)^2$ , где  $G_{wk} \simeq 1,16 \times 10^{-5}$  ГэВ $^{-2}$  — это константа связи слабого взаимодействия, а фактор  $\hbar^2$  добавлен в целях пересчета величины с размерностью (энергия) $^{-2}$  в величину с размерностью сечения рассеяния, (длина) $^2$ . (Напомним, что используются единицы  $c = 1$ .) Плотность числа электронов при температуре выше  $10^{10}$  К приблизительно равна  $n_e \approx (k_B T / \hbar)^3$ , поэтому частота столкновений нейтрино с электронами при таких температурах равна

$$\Gamma_\nu = n_e \sigma_{wk} \approx \frac{G_{wk}^2 (k_B T)^5}{\hbar}.$$

Эту формулу можно сравнить со скоростью расширения, которая в эпоху излучения имеет порядок

$$H \approx \sqrt{\frac{G (k_B T)^4}{\hbar^3}},$$

где фактор  $\hbar^{-3}$  добавлен в целях пересчета величины с размерностью (энергия) $^4$  в величину с размерностью плотности массы, масса/(длина) $^3$ . Таким образом, отношение частоты столкновений к скорости расширения равно

$$\frac{\Gamma_\nu}{H} \approx G_{wk}^2 \sqrt{\frac{\hbar}{G}} (k_B T)^3 \simeq \left( \frac{T}{10^{10} \text{ К}} \right)^3.$$

Следовательно, при температурах выше  $10^{10}$  К нейтрино рассеиваются достаточно быстро, чтобы по-прежнему оставаться в тепловом равновесии. Это лишь немногим больше, чем  $m_e/k_B$ , поэтому при меньших температурах электроны и позитроны быстро выходят из состояния теплового равновесия, частота столкновений быстро падает ниже  $G_{wk}^2 (k_B T)^5 / \hbar$ , откуда следует, что отношение  $\Gamma_\nu/H$  быстро становится меньше единицы. Тогда нейтрино начинают свободно распространяться, при этом (как обсуждалось в разд. 2.1)

распределение плотности числа частиц  $n_\nu$  по-прежнему имеет вид (3.1.5), с температурой  $T_\nu \propto 1/a$ .

При более низких температурах необходимо учитывать ненулевую массу электрона, поэтому теперь температура  $T$  электронов, позитронов, и фотонов (которые по-прежнему находятся в тепловом равновесии друг с другом) падает по закону, отличному от  $1/a$ . С другой стороны, свободно распространяющиеся безмассовые нейтрино удовлетворяют импульсному распределению Ферми—Дираха<sup>3)</sup>, температура в котором по-прежнему падает как  $1/a$ . Поэтому теперь необходимо различать температуру фотонов  $T$  и температуру нейтрино  $T_\nu$ .

Плотность энтропии фотонов, электронов и позитронов равна

$$s(T) = \frac{4a_B T^3}{3} + \frac{4}{T} \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \left( \sqrt{p^2 + m_e^2} + \frac{p^2}{3\sqrt{p^2 + m_e^2}} \right) \times \\ \times \frac{1}{\exp\left(\frac{\sqrt{p^2 + m_e^2}}{k_B T}\right) + 1} = \frac{4a_B T^3}{3} \mathcal{S}\left(\frac{m_e}{k_B T}\right), \quad (3.1.17)$$

где, вспоминая что  $a_B = \pi^2 k_B^4 / (15\hbar^3)$ ,

$$\mathcal{S}(x) \equiv 1 + \frac{45}{2\pi^4} \int_0^\infty y^2 dy \left( \sqrt{y^2 + x^2} + \frac{y^2}{3\sqrt{y^2 + x^2}} \right) \frac{1}{\exp\left(\sqrt{y^2 + x^2}\right) + 1}. \quad (3.1.18)$$

Закон сохранения энтропии (3.1.1) говорит, что  $a^3 T^3 \mathcal{S}(m_e/(k_B T))$  является константой и поэтому  $T_\nu \propto 1/a$ , т. е.  $T_\nu$  пропорциональна  $T \mathcal{S}^{1/3}(m_e/(k_B T))$ . При  $k_B T \gg m_e$  рассматриваемые температуры были равны, и

$$\mathcal{S}(0) = 1 + 2\frac{7}{8} = \frac{11}{4}, \quad (3.1.19)$$

поэтому

$$T_\nu = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T \mathcal{S}^{1/3}\left(\frac{m_e}{k_B T}\right). \quad (3.1.20)$$

Отношение  $T/T_\nu$  выросло от почти единичного значения при  $T > 10^{11}$  К до значения 1,008 при  $T = 10^{10}$  К и до 1,346 при  $T = 10^9$  К. Чтобы найти

<sup>3)</sup> Это не совсем так; процессы со слабым взаимодействием, например  $e^- + e^+ \rightarrow \nu + \bar{\nu}$ , даже при температурах ниже  $10^{10}$  К несколько видоизменяют распределение нейтрино. См. A. D. Dolgov, S. H. Hansen, and D. V. Semikoz, *Nucl. Phys. B* **503**, 426 (1997); **543**, 269 (1999); G. Mangano, G. Miele, S. Pastor, and M. Peloso, *Phys. Lett. B* **534**, 8 (2002). Обзор представлен в A. D. Dolgov, *Phys. Rep.* **370**, 333 (2002). Слабые взаимодействия приводят к возникновению теплового контакта между нейтрино и плазмой, которая нагревается за счет аннигиляции электрон-позитронных пар, поэтому данный эффект немножко увеличивает плотность энергии нейтрино на величину, которая обычно представляется как увеличение эффективного числа сортов нейтрино, от 3 до 3.04. В последующем изложении этот эффект не учитывается.

асимптотическое значение  $T/T_\nu$ , не проделывая компьютерные вычисления, отметим, что  $\mathcal{S}(\infty) = 1$ , поэтому при  $k_B T \ll m_e$  из уравнения (3.1.20) следует, что

$$\frac{T}{T_\nu} \rightarrow \left( \frac{11}{4} \right)^{1/3} = 1,401. \quad (3.1.21)$$

В частности, в настоящее время, когда  $T = 2,725$  К, температура нейтрино равна 1,945 К. К сожалению, по всей видимости, какие-либо возможности измерить такой нейтринный фон пока отсутствуют.

С учетом трех ароматов нейтрино и антинейтрино полная плотность энергии в течение этого периода равна

$$\rho(T) = 6 \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{a_B T_\nu^4}{2} + a_B T^4 + 4 \int_0^\infty \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \frac{\sqrt{p^2 + m_e^2}}{\exp\left(\frac{\sqrt{p^2 + m_e^2}}{k_B T}\right) + 1} = a_B T^4 \mathcal{E}\left(\frac{m_e}{k_B T}\right), \quad (3.1.22)$$

где

$$\mathcal{E}(x) = 1 + \frac{21}{8} \left( \frac{4}{11} \right)^{4/3} \mathcal{S}^{4/3}(x) + \frac{30}{\pi^4} \int_0^\infty \frac{y^2 \sqrt{y^2 + x^2} dy}{\exp(\sqrt{y^2 + x^2}) + 1}. \quad (3.1.23)$$

Подставляя в уравнение (3.1.11) выражения (3.1.17) и (3.1.22), находим

$$\begin{aligned} t &= \int \left( \frac{(m_e/(k_B T)) \mathcal{S}'(m_e/(k_B T))}{\mathcal{S}(m_e/(k_B T))} - 3 \right) \frac{dT}{T \sqrt{24\pi G a_B T^4 \mathcal{E}(m_e/(k_B T))}} = \\ &= t_e \int \left( 3 - \frac{x \mathcal{S}'(x)}{\mathcal{S}(x)} \right) \mathcal{E}^{-1/2}(x) x dx, \end{aligned} \quad (3.1.24)$$

где  $x = m_e/(k_B T)$ , а в единицах СГС

$$t_e \equiv \left( \frac{24\pi G c^6 a_B m_e^4}{k_B^4} \right)^{-1/2} = 4,3694 \text{ с.} \quad (3.1.25)$$

В табл. 3.1 представлены значения  $T/T_\nu$  и времени, необходимого для уменьшения температуры до  $T$  (вычисленного с помощью (3.1.11)), для разных значений  $T$ .

После окончания эпохи электрон-позитронной аннигиляции, основной вклад в плотность энергии Вселенной в течение длительного времени обеспечивался ультрарелятивистскими фотонами, нейтрино и антинейтрино, поэтому в течение этого периода  $s(T) \propto T^3$ , и

$$\rho(T) = a_B T^4 + \frac{7}{8} \cdot 3 \cdot a_B T_\nu^4 = a_B T^4 \left[ 1 + \frac{7}{8} \cdot 3 \cdot \left( \frac{4}{11} \right)^{4/3} \right] = \frac{3,363 a_B T^4}{2}. \quad (3.1.26)$$

Таким образом, в течение этого периода эффективное число сортов частиц равно  $\mathcal{N} = 3,363$ . С помощью уравнения (3.1.14) получается следующая фор-

Таблица 3.1

Отношение электрон-фотонной температуры  $T$  к температуре нейтрино  $T_\nu$  и время, необходимое для уменьшения температуры от  $10^{11}$  К до  $T$ , для разных значений  $T$

$T$ , К	$T/T_\nu$	$t$ , с
$10^{11}$	1,000	0
$6 \times 10^{10}$	1,000	0,0177
$3 \times 10^{10}$	1,001	0,101
$2 \times 10^{10}$	1,002	0,239
$10^{10}$	1,008	0,998
$6 \times 10^9$	1,022	2,86
$3 \times 10^9$	1,080	12,66
$2 \times 10^9$	1,159	33,1
$10^9$	1,345	168
$3 \times 10^8$	1,401	1980
$10^8$	1,401	$1,78 \times 10^4$
$10^7$	1,401	$1,78 \times 10^6$
$10^6$	1,401	$1,78 \times 10^8$

мula в СГС единицах:

$$t = \sqrt{\frac{3c^2}{3,363 \cdot 16 \cdot \pi a_B G}} \frac{1}{T^2} + \text{const} = 1,78 \text{ с} \left( \frac{T}{10^{10} \text{ К}} \right)^{-2} + \text{const.} \quad (3.1.27)$$

Например, время, необходимое для остывания Вселенной с температуры  $10^9$  К (когда основная масса электронов и позитронов проаннигирировала) до температуры  $10^8$  К, составляет  $1,78 \times 10^4$  с, или 4,9 часов.

Согласно формуле (3.1.27) время, необходимое для падения температуры от существенно более высоких значений до значения  $10^6$  К, составляет  $1,78 \times 10^8$  с, или 5,64 года. При меньших температурах необходимо учитывать плотность энергии нерелятивистского вещества, и формула (3.1.27) перестает быть справедливой. В разд. 2.3 мы видели, что при  $\Omega_M h^2 = 0,15$  должно пройти еще 360 000 лет, прежде чем Вселенная остынет до температуры 3000 К последнего рассеяния.

\* \* \*

До сих пор в этом разделе мы предполагали, что нейтрино безмассовы, а суммарное число нейтрино каждого из трех типов (т. е. число нейтрино минус число антинейтрино) значительно меньше числа фотонов. В общем

случае идеального газа частиц с массой  $m$  число  $n(p)dp$  частиц с импульсом в интервале от  $p$  до  $p + dp$  задается распределением Ферми—Дирака или распределением Бозе—Эйнштейна

$$n(p, T, \mu) dp = \frac{4\pi gp^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{\sqrt{p^2 + m^2} - \mu}{k_B T}\right) \pm 1}, \quad (3.1.28)$$

где  $\mu$  — это химический потенциал рассматриваемых частиц, величина, которая сохраняется в любой из быстро происходящих реакций при условии теплового равновесия, величина  $g$  — это опять число спиновых состояний данной частицы и ее античастицы, знак «+» для фермионов, знак «-» для бозонов. В случае нулевого химического потенциала данная формула сводится к (3.1.5) и задает плотность числа частиц (2.3.1) в случае нерелятивистских частиц, импульс которых  $p \ll m$  и  $k_B T \ll m$ . На протяжении всей рассматриваемой в этом разделе эпохи, электроны и позитроны быстро аннигилируют в фотоны, поэтому их химические потенциалы равны друг другу и противоположны по знаку, вследствие чего мы полагаем, что полный электрический заряд равен нулю и, пренебрегая малым числом барионов, приходящихся на один фотон, можно прийти к выводу, что химические потенциалы электронов и позитронов были намного меньше  $k_B T$ . При температурах, когда нейтрино и антинейтрино находились в тепловом равновесии с электронами, позитронами и фотонами, такие реакции как  $e^+ + e^- \rightleftharpoons \nu_i + \bar{\nu}_i$  происходили очень быстро (индекс  $i$  нумерует три типа нейтрино), поэтому химический потенциал  $\mu_i$  для нейтрино каждого типа был равен и противоположен по знаку химическому потенциалу соответствующих антинейтрино. Однако если не предполагать равенства нулю суммарного числа нейтрино (или лептонов), то *a priori* не существует никакой причины, почему  $\mu_i$  должны быть меньше  $k_B T$ .

Если массы нейтрино меньше 1 эВ, то тогда при рассматриваемых в этом разделе температурах ими можно пренебречь. Наблюдения осциляций между различными ароматами нейтрино от Солнца, ядерных реакторов и в космических лучах показывают<sup>4)</sup>, что две *разности* квадратов масс трех типов нейтрино определенной массы (являющиеся комбинациями нейтрино с электронным, мюонным и тау ароматами) равны значению  $8,0_{-0,3}^{+0,4} \times 10^{-5}$  эВ<sup>2</sup> и значению между 1,9 и 3,0, умноженному на  $10^{-3}$  эВ<sup>2</sup>. Таким образом, все массы нейтрино намного меньше 1 эВ при условии, что отсутствует крайнее вырождение, однако нет никаких причин ожидать подобного. Если вырождение есть, тогда исходя из отсутствия аномалий в низкоэнергетическом бета-распаде трития, их общая масса должна быть меньше 2 эВ. Независимо от того, есть вырождение или нет, отсюда со всей очевидностью следует, что все три типа нейтрино (если их не более трех) имеют массы значительно меньше 1 МэВ,

<sup>4)</sup> W.-M. Yao *et al.* (Particle Data Group), *J. Phys. G.* 33, 1 (2006).

и поэтому на момент выхода из теплового равновесия с электронами и позитронами при температуре порядка  $10^{10}$  К они являлись ультрарелятивистскими частицами. После выхода из теплового равновесия, импульс нейтрино спадает по закону  $1/a$  (как показано в разд. 1.1), поэтому если химический потенциал нейтрино был пренебрежимо мал, то их распределение по импульсам осталось таким же, как для фотонов, с той лишь разницей, что вместо знака « $-$ » в знаменателе функции распределения будет знак « $+$ », с температурой уменьшенной в  $(4/11)^{1/3}$  число раз. Таким образом, как только  $k_B T$  становится меньше наименьшей из масс нейтрино, плотность их энергии становится

$$n_\nu \sum_\nu m_\nu = \frac{3}{11} \cdot n_\gamma \sum_\nu m_\nu.$$

---

Для значений  $k_B T$ , намного больших массы нейтрино, интеграл от плотности числа спиновых состояний фермионов равен  $3/4$  соответствующего интеграла для бозонов, и после отделения нейтрино  $T_\nu^3 = (4/11)T_\gamma^3$ .

---

При ненулевом химическом потенциале плотность энергии становится больше. Согласие между теорией (с безмассовыми нейтрино) и наблюдениями анизотропий реликтового излучения, обсуждающейся в разд. 2.6 и 7.2, а в случае крупномасштабной структуры — в гл. 8, свидетельствует о том, что сумма трех масс нейтрино меньше чем 0,68 эВ (с достоверностью 95 %)<sup>5)</sup>, поэтому если массы вырождены, то общая масса будет меньше 0,23 эВ. Этот результат противоречит наблюдениям безнейтринного двойного бета-распада в эксперименте Гейдельберг—Москва<sup>6)</sup>, из которого следует, что значение суммы масс нейтрино больше чем 1,2 эВ<sup>7)</sup>. Пока что не представилось возможности подтвердить результаты по двойному бета-распаду, и в настоящее время разумно продолжать пренебрегать массами нейтрино.

Если пренебречь массами нейтрино, то плотность энергии, давление и плотность суммарного числа нейтрино и антинейтрино типа  $i$  (или лептонов) равны

$$\begin{aligned} \rho_i &= 3p_i = \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int p^3 dp \left[ \frac{1}{\exp\left(\frac{p - \mu_i}{k_B T}\right) + 1} + \frac{1}{\exp\left(\frac{p + \mu_i}{k_B T}\right) + 1} \right] = \\ &= 4\pi \frac{(k_B T)^4}{(2\pi\hbar)^3} \mathcal{P}\left(\frac{\mu_i}{k_B T}\right), \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

<sup>5)</sup> D. N. Spergel *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **170**, 377 (2007) [astro-ph/0603449].

<sup>6)</sup> H. V. Klapdor-Kleingroth, I. V. Krivosheina, A. Dietz and O. Chkvorets, *Phys. Lett. B* **586**, 198 (2004).

<sup>7)</sup> A. de la Macorra, A. Melchiorri, P. Serra, and R. Bean, *Astropart. Phys.* **27**, 406 (2007) [astro-ph/0608351].

$$n_i = \frac{4\pi}{(2\pi\hbar)^3} \int p^2 dp \left[ \frac{1}{\exp\left(\frac{p - \mu_i}{k_B T}\right) + 1} - \frac{1}{\exp\left(\frac{p + \mu_i}{k_B T}\right) + 1} \right] = \\ = 4\pi \frac{(k_B T)^3}{(2\pi\hbar)^3} \mathcal{M}\left(\frac{\mu_i}{k_B T}\right), \quad (3.1.30)$$

где

$$\mathcal{P}(x) \equiv \int_0^\infty [(e^{y-x} + 1)^{-1} + (e^{y+x} + 1)^{-1}] y^3 dy, \quad (3.1.31)$$

$$\mathcal{M}(x) \equiv \int_0^\infty [(e^{y-x} + 1)^{-1} - (e^{y+x} + 1)^{-1}] y^2 dy. \quad (3.1.32)$$

Ранее мы убедились, что при температурах выше  $10^{10}$  К плотность энергии фотонов и электрон-позитронных пар составляет  $11a_B T^4/4$ , а давление есть одна треть от плотности, поэтому плотность полной энергии и давление задаются выражением

$$\rho = 3p = T^4 \left[ \frac{11a_B}{4} + \frac{4\pi k_B^4}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{i=e, \mu, \tau} \mathcal{P}\left(\frac{\mu_i}{k_B T}\right) \right]. \quad (3.1.33)$$

Из уравнения сохранения энергии (1.5.20) следует, что при таких условиях величина  $\rho a^4$  постоянна, а сохранение числа нейтрино каждого типа приводит к тому, что постоянны  $n_i a^3$ . Поскольку  $\rho$  и  $n_i$  по разному зависят от химических потенциалов, это приводит к тому, что отношения  $\mu_i/(k_B T)$  остаются неизменными по мере расширения Вселенной в данную эпоху, а также  $T \propto 1/a$ , как и в случае нулевого химического потенциала.

Когда температура опускается ниже  $10^{10}$  К, температура фотонов и электрон-позитронных пар больше не изменяется по закону  $1/a$ , однако мы убедились, что в этот момент нейтрино и антинейтрино начинают распространяться без ограничений. Импульс каждого нейтрино  $p$  изменяется как  $1/a$ , и тогда вид распределения Ферми–Дирака для каждого типа безмассовых нейтрино остается неизменным, с температурой  $T_\nu \propto 1/a$  и постоянными  $\mu_i/(k_B T)$ , также как до отделения. Мы приходим к выводу, что с хорошей точностью  $T_\nu \propto 1/a$  и каждое  $\mu_i \propto 1/a$  на протяжении всей рассматриваемой здесь эпохи.

Единственный эффект отличия от нуля химического потенциала в вычислениях этого раздела будет в том, что он приведет к росту плотности полной энергии и, как следствие, сокращению временного масштаба. Для не равного нулю  $\mu$  значения функции  $\mathcal{P}(\mu/(k_B T))$  больше  $\mathcal{P}(0) = 7\pi^4/60$ , поэтому если  $\mu_i \neq 0$ , то  $\rho_i > 7\pi^2(k_B T)^4/120(\hbar)^3 = (7/8)a_B T^4$ . В частности, если  $|\mu_i| \gg k_B T$ ,

то  $\mathcal{P}(\mu_i/(k_B T)) \simeq (\mu_i/(k_B T))^4/4$ , поэтому  $\rho_i \simeq \pi(\mu_i)^4/(2\pi\hbar)^3 \gg a_B T^4$ , и эти нейтрино (или антинейтрино, в случае больших значений  $\exp[-\mu_i/(k_B T)]$ ) дают основной вклад в плотность энергии Вселенной, по-крайней мере, до перехода к эпохе нерелятивистского вещества и излучения. Рассмотрение распределения (3.1.28) показывает, что для химического потенциала  $\mu \gg k_B T$  функция фермионного распределения  $n(p, T, \mu) dp$  для частиц с энергиями меньше чем  $\mu$  равна  $4\pi g p^2 dp/(2\pi\hbar)^3$  и быстро спадает для более высоких энергий, что является указанием на то, что все уровни энергии фермионов вплоть до  $\mu$  заполнены, а последующие уровни пустуют. Это соответствует случаю полной вырожденности нейтрино<sup>8)</sup>. Эксперименты по бета-распаду трития  ${}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + e^- + \bar{\nu}_e$  показывают, что  $|\mu_e|$  меньше нескольких эВ, потому что иначе, в силу поглощения вырожденных космических нейтрино в реакциях  $\nu_e + {}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + e^-$  при  $\mu_e > 0$ , в электронном спектре будет прибавка выше ожидаемого граничного значения  $m({}^3\text{H}) - m({}^3\text{He})$ , а в случае  $\mu_e < 0$  принцип исключения Паули приведет к углублению электронного спектра на несколько эВ ниже ожидаемого граничного значения, когда энергии антинейтрино меньше нескольких эВ, в результате чего возникает море вырожденных антинейтрино.

---

Отсутствие углубления в несколько эВ в граничной точке ожидаемого электронного спектра устанавливает ограничение на массу электронного нейтрино в несколько эВ.

---

Таким образом, возникает верхний предел независящей от времени величины  $|\mu_e|/(k_B T)$  порядка  $10^4$ , который значительно меньше, чем верхний предел, который будет установлен в следующем разделе, на основе рассмотрения космологического нуклеосинтеза.

## 3.2

---

### Космологический нуклеосинтез

**Конверсия нейтрон — протон** • **Равновесные ядерные распространенности** • **Действие «бутилочное горлышко»** • **Распространенность гелия** • **Распространенность дейтерия** • **Распространенность  ${}^3\text{He}$**  • **Распространенность лития** •  $\Omega_b h^2$

Мы установили температурную историю Вселенной от температур выше  $10^{10}$  К вплоть переходной температуры  $\approx 10^4$  К, проигнорировав при этом присутствие небольшого количества нуклонов (и небольшое количественное

---

<sup>8)</sup> Возможность вырожденности космических нейтрино была высказана в работе S. Weinberg, *Phys. Rev.* **128**, 1457 (1962).

превосходство электронов над позитронами). Теперь давайте рассмотрим, что происходит с нуклонами на протяжении этой эпохи<sup>9)</sup>.

Слабые взаимодействия допускают превращение нейтрона в протон посредством шести процессов:

$$n + \nu \rightleftharpoons p + e^-, \quad n + e^+ \rightleftharpoons p + \bar{\nu}, \quad n \rightleftharpoons p + e^- + \bar{\nu}. \quad (3.2.1)$$

---

Здесь  $\nu$  — это  $\nu_e$ ; другие нейтриноные ароматы вклада не дают.

---

В данном диапазоне температур  $k_B T \ll m_n$ , поэтому фактически нуклоны можно рассматривать как покоящиеся. Таким образом, начальные и конечные энергии лептонов связаны простыми соотношениями:

$$\begin{aligned} E_e - E_\nu &= Q \quad \text{для} \quad n + \nu \rightleftharpoons p + e^-, \\ E_\nu - E_e &= Q \quad \text{для} \quad n + e^+ \rightleftharpoons p + \bar{\nu}, \\ E_\nu + E_e &= Q \quad \text{для} \quad n \rightleftharpoons p + e^- + \bar{\nu}, \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

где

$$Q = m_n - m_p = 1,293 \text{ МэВ.} \quad (3.2.3)$$

<sup>9)</sup> История этих вычислений была описана мной в книге *Первые три минуты* (The First Three Minutes. Basic Books, 1977, 1988). Вкратце, первое вычисление космологического нуклеосинтеза было предпринято Ральфом Альфером, Георгием Гамовым и Робертом Германом в конце 1940-х годов; см. ГиК, гл. 15, сноски 51 и 52. В этой работе предполагалось, что нуклоны возникают в виде отдельных нейтронов, которые затем превращаются в протоны посредством нейтронного бета-распада. Впоследствии было замечено, что превращение нейтронов в протоны и наоборот происходит в основном в двухчастичных процессах и высокая скорость этих процессов в очень ранние времена привела к тому, что нуклоны распределяются так: 50% нейтронов и 50% протонов, см. C. Hayashi, *Prog. Theor. Phys. (Japan)* **5**, 224 (1950). Исходя из этого, современное вычисление эволюции отношения нейтронов к протонам было представлено в R. A. Alpher, J. W. Follin, Jr., and R. C. Herman, *Phys. Rev.* **92**, 1347 (1953), однако полученные результаты не применялись для изучения вопроса о космологическом нуклеосинтезе. Некоторые авторы отмечали, что распространенность гелия во Вселенной слишком велика, чтобы объясняться исключительно нуклеосинтезом в звездах; см. G. Burbidge, *Pub. Astron. Soc. Pacific* **70**, 83 (1958); F. Hoyle and R. J. Tayler, *Nature* **203**, 1108 (1964). Теория космологического нуклеосинтеза в современном виде была развита в работе P. J. E. Peebles, *Astron. J.* **146**, 542 (1966). (Похожие вычисления, проведенные в работе Ya. B. Zel'dovich, *Adv. Astron. Astrophys.* **3**, 241 (1965), были неизвестны на Западе до последнего времени.) Впоследствии, вычисления нуклеосинтеза были расширены с учетом большего количества нуклидов и реакций, см. R. V. Wagoner, W. A. Fowler, and F. Hoyle, *Astrophys. J.* **148**, 3 (1967), а также учтены многие малые поправки, см. D. A. Dicus, E. W. Kolb, A. M. Gleeson, E. C. G. Sudarshan, V. L. Teplitz, and M. S. Turner, *Phys. Rev. D* **26**, 2694 (1982). Современные обзоры этого вопроса представлены Г. Стейгманом в *Measuring and Modeling the Universe — Carnegie Observatories Astrophysics Series, Vol. 2*, ed. W. Freedman (Cambridge University Press, Cambridge, UK) [astro-ph/0307244]; в *The Local Group as an Astrophysical Laboratory — Proceedings of the May 2003 STScI Symposium* [astro-ph/0308511]; в *Chemical Abundances and Mixing in Stars in the Milky Way and its Satellites - Proceedings of the ESO/Arcetri Workshop*, eds. L. Pasquini and S. Randich (Springer-Verlag) [astro-ph/0501591]; и *Int. J. Mod. Phys. E* **15**, 1 (2006) [astro-ph/0511534]. Обсуждения с акцентом на аналитические вычисления представлены в книге ГиК, разд. 15.7, и в V. Mukhanov, *Int. J. Theor. Phys.* **43**, 669 (2004) [astro-ph/0303073].

Выражения для суммарной скорости процессов превращения отдельного нейтрона в протон или протона в нейтрон принимают вид

$$\lambda(n \rightarrow p) = A \int \left(1 - \frac{m_e^2}{(Q+q)^2}\right)^{1/2} \frac{(Q+q)^2 q^2 dq}{\left[1 + \exp\left(\frac{q}{k_B T_\nu}\right)\right] \left[1 + \exp\left(-\frac{Q+q}{k_B T}\right)\right]}, \quad (3.2.4)$$

$$\lambda(p \rightarrow n) = A \int \left(1 - \frac{m_e^2}{(Q+q)^2}\right)^{1/2} \frac{(Q+q)^2 q^2 dq}{\left[1 + \exp\left(-\frac{q}{k_B T_\nu}\right)\right] \left[1 + \exp\left(\frac{Q+q}{k_B T}\right)\right]}, \quad (3.2.5)$$

где<sup>10)</sup>

$$A \equiv \frac{G_{wk}^2 (1 + 3g_A^2) \cos^2 \theta_K}{2\pi^3 \hbar}, \quad (3.2.6)$$

и область определения интегралов по  $q$  задается от  $-\infty$  до  $+\infty$ , исключая интервал от  $q = -Q - m_e$  до  $q = -Q + m_e$ , в котором квадратный корень становится мнимым. Данные скорости учитывают принцип Паули в присутствии частично заполненных морей лептонов. Например, сечение рассеяния процесса  $n + e^+ \rightarrow p + \bar{\nu}$  равно  $2\pi^2 \hbar^3 A E_\nu^2 / v_e$ , плотность числа позитронов каждой спиральности с импульсом, принимающим значения в интервале от  $p_e$  до  $p_e + dp_e$ , равна

$$4\pi p_e^2 dp_e (2\pi \hbar)^{-3} \left[ \exp\left(\frac{E_e}{k_B T}\right) + 1 \right]^{-1}$$

а доля незаполненных антинейтринных уровней с энергией  $E_\nu$  равна

$$1 - \left[ \exp\left(\frac{E_\nu}{k_B T_\nu}\right) + 1 \right]^{-1} = \left[ \exp\left(-\frac{E_\nu}{k_B T_\nu}\right) + 1 \right]^{-1},$$

так что суммарная скорость в расчете на один нейтрон в процессе  $n + e^+ \rightarrow p + \bar{\nu}$  равна

$$\lambda(n + e^+ \Rightarrow p + \bar{\nu}) = A \int_0^\infty E_\nu^2 p_e^2 dp_e \left[ \exp\left(\frac{E_e}{k_B T_\nu}\right) + 1 \right]^{-1} \left[ \exp\left(-\frac{E_\nu}{k_B T_\nu}\right) + 1 \right]^{-1}$$

<sup>10)</sup> Здесь  $G_{wk} = 1,16637(1) \times 10^{-5}$  ГэВ<sup>-2</sup> — это константа связи слабого взаимодействия, измеренная на основе значения скорости процесса распада  $\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$ ;  $g_A = 1,257$  — константа связи аксиального вектора в бета-распаде, измеренная на основе значения скорости распада нейтрона;  $\theta_K$  — угол Кабиббо,  $\cos \theta_K = 0,9745(6)$ , измеренный на основе скорости бета-распада О<sup>14</sup> и других  $0^+ \rightarrow 0^+$  переходов.

Производя замену переменных к  $q \equiv -E_\nu = -Q - E_e$ , мы видим, что эта частная скорость на самом деле является частью интеграла (3.2.4), определенном на интервале от  $q = -\infty$  до  $q = -Q - m_e$ . Аналогичным образом, та часть интеграла, которая определена на интервале от  $q = -Q + m_e$  до  $q = 0$ , соответствует процессу распада нейтрона  $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$  при  $q = -E_\nu$ , а та часть интеграла, которая определена на интервале от  $q = 0$  до  $q = +\infty$ , возникает из процесса  $n + \nu \rightarrow p + e^-$  при  $q = E_\nu$ . Похожие замечания также справедливы для интеграла (3.2.5).

Зная, в принципе, скорости (3.2.4)–(3.2.5), можно вычислить изменение доли  $X_n$  нейронов по отношению ко всем нуклонам с помощью дифференциального уравнения

$$\frac{dX_n}{dt} = -\lambda(n \rightarrow p)X_n + \lambda(p \rightarrow n)(1 - X_n). \quad (3.2.7)$$

В качестве проверки отметим, что для независящей от времени температуры  $T$ , равной  $T_\nu$ , отношение двух скоростей (3.2.4) и (3.2.5) будет равно

$$\frac{\lambda(p \rightarrow n)}{\lambda(n \rightarrow p)} = \exp\left(-\frac{Q}{k_B T}\right) \quad \text{при } T = T_\nu. \quad (3.2.8)$$

Отсюда следует, что в этом случае уравнение (3.2.7) будет иметь ожидаемое при тепловом равновесии независящее от времени стационарное решение:

$$\frac{X_n}{X_p} = \frac{X_n}{1 - X_n} = \exp\left(-\frac{Q}{k_B T}\right). \quad (3.2.9)$$

Именно неравенство  $T$  и  $T_\nu$ , вместе с временной зависимостью этих температур, приводит к отклонениям  $X_n/X_p$  от равновесного значения (3.2.9).

Для  $k_B T \gg Q$  интегралы (3.2.4) и (3.2.5) можно вычислить, положив  $T_\nu = T$  и  $Q = m_e = 0$ , поэтому в этом случае

$$\begin{aligned} \lambda(n \rightarrow p) = \lambda(p \rightarrow n) &= A \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{q^4 dq}{\left[1 + \exp\left(\frac{q}{k_B T}\right)\right] \left[1 + \exp\left(-\frac{q}{k_B T}\right)\right]} = \\ &= \frac{7}{15} \pi^4 A (k_B T)^5 = 0,400 \text{ с}^{-1} \left(\frac{T}{10^{10} \text{ К}}\right)^5 \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Для сравнения, время  $t$  падения температуры  $T$  с более высоких значений определяется уравнением (3.1.16) как  $0,99 \text{ с} \times (T/10^{10} \text{ К})^{-2}$ . Помимо этого,  $H \simeq 1/(2t)$ . Тем самым, отношение  $\lambda/H$  равно

$$\frac{\lambda}{H} \simeq 0,8 \times \left(\frac{T}{10^{10} \text{ К}}\right)^3 \quad (3.2.11)$$

При  $T > 1,1 \times 10^{10}$  К его значение больше 1. Верно то, что температуры вблизи этой нижней границы не сильно превышают  $Q/k_B$ , и  $T_\nu$  в данную эпоху не равно в точности  $T$ , поэтому между скоростями  $\lambda(n \rightarrow p)$  и  $\lambda(p \rightarrow n)$  нет точного совпадения, и ни одна из них не задается именно уравнением (3.2.10). Тем не менее, уравнение (3.2.10) определяет порядок величины этих скоростей в заданном диапазоне температур, поэтому можно по-прежнему считать, что  $\lambda(n \rightarrow p)/H$  и  $\lambda(p \rightarrow n)/H$  велики для рассматриваемых температур. Это означает, что при температуре выше чем примерно  $3 \times 10^{10}$  К, начальное значение  $X_n$  задается условием, что правая часть уравнения (3.2.7) должна обращаться в ноль:

$$X_n \rightarrow \frac{\lambda(p \rightarrow n)}{\lambda(p \rightarrow n) + \lambda(n \rightarrow p)}. \quad (3.2.12)$$

Если  $X_n$  будет меньше или больше этого значения, то правая часть уравнения (3.2.7) будет большой, и, соответственно, положительной или отрицательной, что быстро приведет  $X_n$  к значению (3.2.12). При  $T > 10^{10}$  К температура нейтрино составляла примерно 1 % от фотонно-электронно-позитронной температуры, так что при данных температурах отношение скоростей задается (3.2.8). Таким образом, при температурах  $T > 3 \times 10^{10}$ , когда доля нейтронов определяется формулой равновесия (3.2.12), она задается простым выражением

$$X_n = \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{Q}{k_B T}\right)}. \quad (3.2.13)$$

Крайне важно, что при высоких температурах данное отношение фиксировано условием равенства нулю лептонного химического потенциала, поэтому нет необходимости делать *a priori* допущения насчет начального отношения нейтронов к протонам. В табл. 3.2 собраны результаты численного интегрирования уравнения (3.2.7) с начальным условием (3.2.13)<sup>11)</sup>.

Ранее мы убедились, что при  $k_B T > m_e$  отношения  $\lambda(p \rightarrow n)/H$  и  $\lambda(n \rightarrow p)/H$  изменяются примерно как  $T^3$ , поэтому у эпохи равновесия было весьма резкое окончание, когда имело место неравенство  $\lambda \gg H$ , а температура принимала значения в интервале между  $3 \times 10^{10}$  К и  $10^{10}$  К. Чуть позже, при температурах в интервале от  $10^{10}$  К до  $3 \times 10^9$  К, скорости двухчастичных и трехчастичных процессов перехода нейтрона в протон становятся исчезающими, в частности, благодаря исчезновению электрон-позитронных пар. Переходы нейтронов в протоны продолжают происходить в основном в процессах нейтронного распада со средним временем жизни  $\tau_n$

<sup>11)</sup> Эти результаты несколько отличаются от приведенных в табл. 15.5 книги ГиК, потому что в 1972 году было известно лишь два типа нейтрино, а сейчас мы считаем, что существует три типа безмассовых нейтрино, что при заданной температуре приводит к увеличению скорости расширения. Помимо этого, мы используем современное значение 1,257 константы связи аксиального вектора в бета-распаде в уравнении (3.2.6) вместо значения 1,8 в книге ГиК.

Таблица 3.2

Доля нейтронов  $X_n$  как функция температуры или времени  
(образование сложных ядер не учитывается)

$T, \text{ K}$	$t, \text{ с}$	$X_n$
$10^{12}$	0,0001	0,4962
$3 \times 10^{11}$	0,0011	0,4875
$10^{11}$	0,0099	0,4626
$3 \times 10^{10}$	0,1106	0,3798
$10^{10}$	1,008	0,2386
$3 \times 10^9$	12,67	0,1654
$1,3 \times 10^9$	91,09	0,1458
$1,2 \times 10^9$	110,2	0,1425
$1,1 \times 10^9$	135,1	0,1385
$10^9$	168,1	0,1333
$9 \times 10^8$	212,7	0,1268
$8 \times 10^8$	274,3	0,1182
$7 \times 10^8$	362,6	0,1070
$6 \times 10^8$	496,3	0,0919
$3 \times 10^8$	1980	0,0172
$10^8$	17 780	$3,07 \times 10^{-10}$

равным  $885,7 \pm 0,9$  с, поэтому доля нейтронов становится пропорциональной  $\exp(-t/\tau_n)$ . Это подтверждается с помощью сопоставления представленных в табл. 3.2 численных значений убывающей экспоненты с наблюдаемыми данными по распаду нейтрона, из чего получается

$$X_n \rightarrow 0,1609 \exp\left(\frac{-t}{885,7 \text{ с}}\right). \quad (3.2.14)$$

В итоге переходы нейтронов в протоны прекратились при образовании сложных ядер, внутри которых нейтроны стабильны. Рассмотрим этот процесс и заметим, что при тепловом (химическом) равновесии плотность числа типов ядер  $i$  задается формулами, аналогичными (2.3.1):

$$n_i = g_i e^{\mu_i/(k_B T)} \left( \frac{2\pi m_i k_B T}{h^2} \right)^{3/2} e^{-m_i/(k_B T)}, \quad (3.2.15)$$

где  $m_i$  — это масса ядра  $i$  и  $g_i$  — число его спиновых состояний. Если эти ядра могут быстро образоваться из  $Z_i$  протонов и  $A_i - Z_i$  нейтронов, то химический потенциал ядер типа  $i$  равен

$$\mu_i = Z_i \mu_p + (A_i - Z_i) \mu_n. \quad (3.2.16)$$

Неизвестный нуклонный химический потенциал можно исключить, вводя следующие величины:

$$\frac{n_i}{n_p^{Z_i} n_n^{A_i - Z_i}} = \frac{g_i}{2^{A_i}} A_i^{3/2} \left( \frac{2\pi m_N k_B T}{h^2} \right)^{3(1-A_i)/2} e^{B_i/(k_B T)}, \quad (3.2.17)$$

где  $B_i$  — это энергия связи, определяемая из соотношения

$$m_i = Z_i m_p + (A_i - Z_i) m_n - B_i. \quad (3.2.18)$$

---

При выводе уравнения (3.2.17) мы пренебрегли энергией связи и разницей масс протона и нейтрана за пределами экспоненты.

---

Уравнение (3.2.17) может быть выражено через безразмерные отношения

$$X_i \equiv \frac{n_i}{n_N}, \quad X_p \equiv \frac{n_p}{n_N}, \quad X_n \equiv \frac{n_n}{n_N}, \quad (3.2.19)$$

где  $n_N$  обозначает здесь плотность *всех* нуклонов. Тогда

$$X_i = \frac{g_i}{2} X_p^{Z_i} X_n^{A_i - Z_i} A_i^{3/2} \epsilon^{A_i - 1} e^{B_i/(k_B T)}, \quad (3.2.20)$$

где  $\epsilon$  является безразмерной величиной

$$\begin{aligned} \epsilon &\equiv \frac{1}{2} n_N h^3 (2\pi m_N k_B T)^{-3/2} = \\ &= 2,96 \times 10^{-11} \left( \frac{a}{10^{-10} a_0} \right)^{-3} \left( \frac{T}{10^{10} \text{ K}} \right)^{-3/2} \Omega_6 h^2, \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

в которой

$$n_N = 3\Omega_6 H_0^2 \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 \frac{1}{8\pi G m_N}$$

— это плотность числа нуклонов, свободных или связанных. В течение рассматриваемого периода (после электрон-позитронной аннигиляции) температура  $T$  изменяется по закону  $1/a$ , поэтому соотношение (3.2.21) можно представить в виде

$$\epsilon = 1,46 \times 10^{-12} \left( \frac{T}{10^{10} \text{ K}} \right)^{+3/2} \Omega_6 h^2. \quad (3.2.22)$$

В рассматриваемом диапазоне температур коэффициент  $\epsilon$  очень мал, поэтому при равновесии ядра разновидности  $i$  практически отсутствуют до тех пор, пока температура не упадет до значения

$$T_i \simeq \frac{B_i}{k(A_i - 1)|\ln \epsilon|}. \quad (3.2.23)$$

При  $\Omega_6 H^2 \simeq 0,02$  эта температура равна  $0,75 \times 10^9$  К для дейтерия,  $1,4 \times 10^9$  К для  $H^3$ ,  $1,3 \times 10^9$  К для  $He^3$  и  $3,1 \times 10^9$  К для  $He^4$ , причем зависимость от  $\Omega_6 H^2$  очень слаба. Энергия связи одного нуклона в случае более тяжелых ядер сравнима с энергией связи в  $He^4$ , поэтому у них похожие значения  $T_i$ .

Если тепловое и химическое равновесие действительно поддерживается, пока температура падает с примерно  $10^{10}$  К до значений ниже  $10^9$  К, то в течение этого периода первыми возникнут  $He^4$  и более тяжелые ядра, затем  $He^3$  и  $H^3$  (которые впоследствии через бета-распад тоже распадутся до  $He^3$ ) и, наконец,  $H^2$ . Однако имеет место совсем другая картина. Плотность в этот период слишком мала для осуществления любых реакций кроме двухчастичных, она не может сравниться со скоростью расширения, поэтому ядра образуются посредством цепочки двухчастичных процессов: сначала  $p + n \rightarrow d + \gamma$ , затем  $d + d \rightarrow H^3 + p$  и  $d + d \rightarrow He^3 + n$ , потом  $d + H^3 \rightarrow He^4 + n$  и  $d + He^3 \rightarrow He^4 + p$ , а также более медленные процессы с участием фотонов.

Первый шаг не вызывает никаких затруднений. Скорость образования дейтерия в расчете на один нейтрон равна

$$\begin{aligned} \lambda_d &= 4,55 \times 10^{-20} \text{ см}^3/\text{с} \times n_p = 511 \text{ с}^{-1} \left( \frac{a}{10^{-9} a_0} \right)^{-3} X_p \Omega_6 h^2 = \\ &= 2,52 \times 10^4 \text{ с}^{-1} \left( \frac{T}{10^{10} \text{ К}} \right)^3 X_p \Omega_6 h^2. \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

Умножив это выражение на время (3.1.27), получаем

$$\lambda_d t \simeq 4,5 \times 10^4 \left( \frac{T}{10^{10} \text{ К}} \right) X_p \Omega_6 h^2, \quad (3.2.25)$$

и эта величина остается значительно больше единицы, пока температура не упадет ниже  $10^9$  К. Поэтому распространенность дейтерия в течение рассматриваемого периода с хорошей точностью задается его равновесным значением, которое, в соответствии с уравнением (3.2.20), равно

$$X_d = 3\sqrt{2} X_p X_n \epsilon e^{B_d/(k_B T)}. \quad (3.2.26)$$

Проблема в том, что в силу малости энергии связи дейтерия, температура  $T_d \approx 0,7 \times 10^9$  К достаточно мала, поэтому дейтроны встречаются редко в течение длительного времени, пока имеется избыток  $He^4$  в тепловом равновесии. Если дейтроны редки, скорости процессов с участием двух дейtronов  $d + d \rightarrow H^3 + p$  и  $d + d \rightarrow He^3 + n$  в расчете на один дейtron малы, что препятствует дальнейшему нуклеосинтезу.

Редкость дейтронов не влияет на скорость в расчете на один дейtron в радиоактивных процессах, подобных  $p + d \rightarrow \text{He}^3 + \gamma$  и  $n + d \rightarrow \text{H}^3 + \gamma$ , эти реакции учитываются в современных вычислениях нуклеосинтеза, однако их характерные сечения рассеяния малы.

Когда температура окончательно опустилась ниже  $T_d$ , оставшиеся нейтроны оказались очень быстро вовлечены в самый сильносвязанный из легких элементов,  $\text{He}^4$ . Дальнейший космологический нуклеосинтез был заблокирован по причине отсутствия стабильных ядер с атомным весом 5 или 8.

В звездах подобная блокада преодолевается<sup>12)</sup> коротким образованием нестабильных ядер  $\text{Be}^8$  при столкновениях двух ядер  $\text{He}^4$ , за которым следует резонансный захват другого ядра  $\text{He}^4$  с последующим образованием  $\text{C}^{12}$  в возбужденном состоянии, однако доступное время в ранней Вселенной было недостаточным, чтобы подобный механизм имел эффект.

Таким образом, с хорошей точностью, весовая доля  $Y$  атомов  $\text{He}^4$ , образовавшихся в ранней Вселенной, в точности равна удвоенному значению<sup>13)</sup> доли всех нуклонов  $X_n$ , являющихся нейtronами в то время, когда дейтерий начинает быть достаточно распространенным, и начинается процесс образования тяжелых ядер.

На самом деле, это происходит при температуре несколько выше  $T_d$ . На первом шаге образования тяжелых элементов из дейтерия идут реакции  $d + d \rightarrow \text{H}^3 + p$  и  $d + d \rightarrow \text{He}^3 + n$ . Это экзотермические процессы, поэтому при начальной скорости  $v \rightarrow 0$  их сечения рассеяния пропорциональны  $1/v$ . Для рассматриваемых в этом разделе температур имеем

$$\langle \sigma(d + d \rightarrow \text{H}^3 + p)v \rangle \simeq 1,8 \times 10^{-17} \text{ см}^3/\text{с},$$

$$\langle \sigma(d + d \rightarrow \text{He}^3 + n)v \rangle \simeq 1,6 \times 10^{-17} \text{ см}^3/\text{с},$$

так что суммарная скорость этих процессов в расчете на один дейtron равна<sup>14)</sup>

$$\Lambda = [\langle \sigma(d + d \rightarrow \text{H}^3 + p)v \rangle + \langle \sigma(d + d \rightarrow \text{He}^3 + n)v \rangle] X_d n_N \simeq$$

$$\simeq 1,9 \times 10^7 \left( \frac{T}{10^{10} \text{ K}} \right)^3 (\Omega_b h^2) X_d \text{ с}^{-1}.$$

<sup>12)</sup> E. E. Salpeter, *Astrophys. J.* **115**, 326 (1952).

<sup>13)</sup> Чуть более подробно: если есть  $n_{\text{He}}$  ядер гелия и  $n_{\text{H}}$  ядер водорода на единицу собственного объема, масса гелия на единицу собственного объема в атомных массовых единицах равна  $4n_{\text{He}}$ , а полная масса на единицу собственного объема равна  $4n_{\text{He}} + n_{\text{H}}$ , поэтому относительный избыток по весу гелия равен  $Y = 4n_{\text{He}}/(4n_{\text{He}} + n_{\text{H}})$ . Однако, числа протонов и нейtronов на единицу собственного объема равны  $n_p = 2n_{\text{He}} + n_{\text{H}}$  и  $n_n = 2n_{\text{He}}$ , поэтому доля нуклонов, являющихся нейtronами, равна  $X_n = 2n_{\text{He}}/(4n_{\text{He}} + n_{\text{H}})$ . Следовательно,  $Y = 2X_n$ .

<sup>14)</sup> V. Mukhanov, см. сноску 9.

Это выражение можно сравнить со скоростью расширения, которая после электрон-позитронной аннигиляции задается уравнением (3.1.27) в виде  $H = 1/(2t) = 0,28(T/10^{10} \text{ K})^2 \cdot \text{с}^{-1}$ , поэтому для  $T$  в окрестности  $10^9 \text{ K}$  имеем  $\Lambda = H$ ,  $X_d \simeq 1,2 \times 10^{-7}/(\Omega_6 h^2)$ , что составляет  $0,6 \times 10^{-5}$  при  $\Omega_6 h^2 = 0,02$ . Это значение достигается в состоянии теплового равновесия при температуре  $\sim 10^9 \text{ K}$ , причем зависимость от  $\Omega_6 h^2$  мала, поэтому нуклеосинтез начался примерно при  $10^9 \text{ K}$ , а не при  $0,75 \times 10^9 \text{ K}$ . Согласно табл. 3.2 это произошло в момент времени  $t = 168 \text{ с}$ , так что, основываясь на формуле (3.2.14), распространенность образовавшегося в это время гелия по весу составляла примерно

$$Y_p \simeq 2 \times 0,1609 \times \exp(-168/885) \simeq 0,27.$$

(Индексом  $p$  принято обозначать «первичный».) Чем больше плотность нуклонов, тем выше температура начала нуклеосинтеза, и поэтому на распад нейтрона до начала нуклеосинтеза отводилось все меньше времени, что в конце концов привело к большому содержанию  $\text{He}^4$ . Результаты современных вычислений, как правило, приводятся для разных значений отношения количества нуклонов к количеству протонов  $\eta$ , которое согласно формулам (2.1.12) и (2.1.13) связано с  $\Omega_6 h^2$  следующим соотношением

$$\Omega_6 h^2 = 3,65\eta \times 10^7,$$

так что, например, значение  $\Omega_6 h^2 = 0,02$  соответствует  $\eta = 5,5 \times 10^{-10}$ .

---

Плотность нуклонов при заданной температуре может быть выражена через  $\eta$  без использования современной температуры реликтового излучения, и по этой причине  $\eta$  являлся более удобным параметром нежели  $\Omega_6 h^2$  вплоть до 1990-х годов, пока не были проведены точные измерения температуры реликтового излучения.

---

Подробные вычисления<sup>15)</sup> приводят к  $Y_p = 0,232$  при  $\eta = 2 \times 10^{-10}$  и  $Y_p = 0,240$  при  $\eta = 4 \times 10^{-10}$ .

Отношение первичного гелия к первичному водороду возникает на основе спектроскопического исследования НП областей (области ионизованного водорода) в которых содержатся небольшие количества «металлов» (элементов, отличных от водорода или гелия), особенно в голубых компактных галактиках, в которых еще не образовалось много звезд. Проведенные в 1990-х годах наблюдения разделялись на те, в которых возникали меньшие значения<sup>16)</sup>  $Y_p = 0,234 \pm 0,002 \pm 0,005$ , и те, в которых возникали более высокие значения<sup>17)</sup>  $Y_p = 0,243 \pm 0,003$ . Даже при таком разногласии среди наблюдателей было очевидно, что избыток гелия соответствует горячей Вселенной

<sup>15)</sup> R. E. Lopez and M. S. Turner, *Phys. Rev. D* **59**, 103502 (1999) [astro-ph/9807279].

<sup>16)</sup> K. A. Olive and G. Steigman, *Astrophys. J. Suppl.* **97**, 49 (1995); K. A. Olive, E. Skillman, and G. Steigman, *Astrophys. J.* **483**, 788 (1997).

<sup>17)</sup> Y. I. Izotov, T. X. Thuan, and V. A. Lipovetsky, *Astrophys. J.* **435**, 647 (1994); *Astrophys. J. Suppl.* **108**, 1 (1997); Y. I. Izotov and T. X. Thuan, *Astrophys. J.* **497**, 227 (1998); 500, 188 (1998).

с  $\eta$  в диапазоне от  $10^{-10}$  до  $5 \times 10^{-10}$ . Более современные наблюдения НП областей вместе с новыми атомными данными, которые используются для интерпретации спектроскопических наблюдений, привели к более точному значению<sup>18)</sup>:  $Y_p = 0,2477 \pm 0,0029$ , что соответствует  $\eta = (5,813 \pm 1,81) \times 10^{-10}$ . Неопределенность в значениях  $\eta$ , возникающих в наблюдениях распространенности гелия, по-прежнему достаточно велика, потому что  $Y_p$  крайне слабо зависит от отношения числа барийонов к числу фотонов.

Данные по распространенноти гелия более полезны в качестве теста скорости расширения, чем для измерений значения  $\eta$ . Например, если бы у безмассовых нейтрино, которые выходят из теплового равновесия при температурах от  $10^{11}$  К до  $10^{10}$  К, существовало четыре аромата, то при температуре ниже  $3 \times 10^9$  К эффективное число типов частиц вместо 3,363 было бы равно  $2 + (7/8) \cdot 8 \cdot (4/11)^{4/3} = 3,817$ , так что необходимое время для падения температуры с  $3 \times 10^9$  К до любого более низкого значения было бы уменьшено умножением на фактор  $\sqrt{3,363/3,817} = 0,94$ . Сокращение времени достижения заданной температуры увеличивает долю нейтронов при этой температуре, и, следовательно, увеличивает распространенность гелия, образовавшегося во время нуклеосинтеза при температуре  $T \simeq 10^9$  К. Именно сокращение временного масштаба на интервале температур от  $3 \times 10^{10}$  К до  $3 \times 10^9$  К, когда идет процесс уменьшения числа электрон-позитронных пар, оказывает наибольшее влияние на распространенность гелия. Подробные вычисления показывают<sup>19)</sup>, что для каждого дополнительного типа нейтрино данный эффект увеличивает  $Y$  на величину 0,01276 при  $\eta = 10^{-10}$  и на величину 0,01369 при  $\eta = 5 \times 10^{-10}$ . Согласие между теорией и наблюдениями распространенности гелия определило верхний предел в четыре аромата легких нейтрино до того, как этот предел был аккуратно измерен и оказался равным трем в измерениях ширины  $Z^0$  распада, часть которого обусловлена ненаблюдаемыми процессами  $Z^0 \rightarrow \nu + \bar{\nu}$ .

---

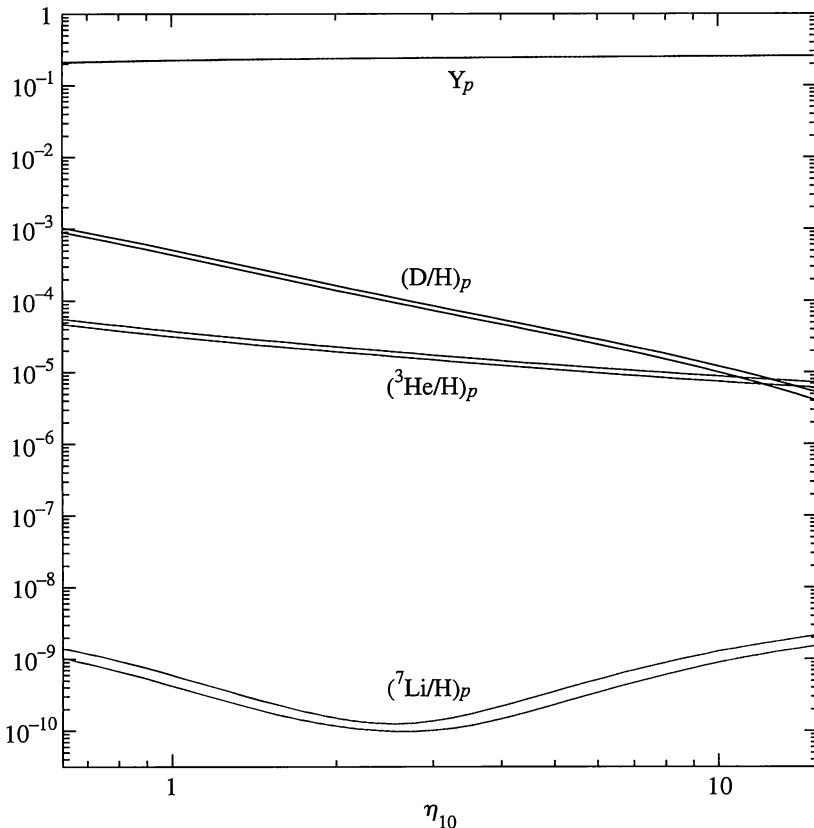
Строго говоря, ширина  $Z^0$  задает число нейтрино с массами меньше чем  $m_Z/2 = 45,6$  ГэВ, а избыточность гелия определяется числом нейтрино с массами меньше чем примерно 1 МэВ.

---

Хотя число ароматов легких нейтрино теперь достоверно известно на основе измерений распада  $Z^0$  и это число не превышает трех, могут существовать другие легкие частицы, оставшиеся со времен ранней Вселенной, которые дают вклад в скорость расширения, и для них распространенность гелия по-прежнему задает содержательные верхние пределы.

<sup>18)</sup> A. Peimbert, M. Peimbert, and V. Luridiana, *Astrophys. J.* **565**, 668 (2002); V. Luridiana, A. Peimbert, M. Peimbert, and M. Cerviño, *Astrophys. J.* **592**, 846 (2003); M. Peimbert, V. Luridiana, and A. Peimbert, *Astrophys. J.* **667**, (2007) [astro-ph/0701580].

<sup>19)</sup> R. E. Lopez and M. S. Turner, см. сноска 15.



**Рис. 3.1.** Расчетная распространенность первичных дейтерия,  $\text{He}^3$  и  $\text{Li}^7$  по отношению к водороду и доля  $Y_p$  первичной массы  $\text{He}^4$  в массе Вселенной как функции от  $\eta_{10} = 10^{10}\eta$ , где  $\eta$  — отношение нуклонов к протонам во Вселенной в настоящий момент. Ширина показанных полосок указывает на неопределенность в скоростях ядерных реакций. Взято в G. Steigman, *Int. J. Mod. Phys. E* 15, 1 (2006) [astro-ph/0511534]

Эффективность ядерных реакций, посредством которых гелий образуется из свободных нейтронов при  $T \approx 10^9$  К, была далека от идеальной, в результате чего оставалось небольшое количество отходов<sup>20)</sup>, что-то вроде недогоревших огарков, в виде легких элементов  $\text{H}^2$ ,  $\text{H}^3$ ,  $\text{He}^3$ ,  $\text{Li}^7$  и  $\text{Be}^7$ . Ядра  $\text{H}^3$  впоследствии распались до  $\text{He}^3$  посредством  $\beta^+$  распада, а ядра  $\text{Be}^7$ , захватив электрон, распались до  $\text{Li}^7$ , в результате чего появились  $\text{H}^2$ ,  $\text{He}^3$  и  $\text{Li}^7$ , а также протоны и  $\text{He}^4$ . Расчетные значения распространенности разных элементов показаны на рис. 3.1.

Чем выше плотность барионов, тем более полным будет вовлечение нейтронов в  $\text{He}^4$ , и, следовательно, меньше окончательная распространен-

<sup>20)</sup> Прочитированные ниже расчетные избыточные значения приводятся в работе S. Burles, K. M. Nollett, and M. S. Turner, *Astrophys. J.* 552, L1 (2001).

ность дейтерия. Мы уже убедились в том, что нуклеосинтез начался при  $X_d \simeq 1,2 \times 10^{-7}/(\Omega_6 h^2)$ , или  $X_d \simeq 0,6 \times 10^{-5}$  при  $\Omega_6 h^2 = 0,02$ . В течение непродолжительного времени доля дейтерия продолжала расти, по мере того как температура падала, а экспонента в формуле (3.2.26) росла, но затем  $X_d$  снова уменьшился, потому что использование свободных нейтронов в дейтерии уменьшило фактор  $X_n$  в формуле (3.2.26), и дейтерий превратился в  $\text{H}^3$  и  $\text{He}^3$ , а потом в  $\text{He}^4$ . Окончательные результаты вычислений, представленные на рис. 3.1, не сильно отличаются от доли дейтерия  $X_d \simeq 1,2 \times 10^{-7}/(\Omega_6 h^2)$ , найденной нами при температуре  $T = 10^9$  К, в частности, они указывают на сильный спад при растущих значениях  $\Omega_6 h^2$ .

Измерение распространенности дейтерия усложняется тем фактом, что его энергия связи мала, в результате чего он легко распадается внутри звезд. Таким образом, любое измерение задает нижний предел распространенности первичного дейтерия и, следовательно, верхний предел плотности барионов.

В прошлом существовали различные способы измерения отношения дейтерия к водороду:

1. *Межзвездная среда.* Спектроскопические исследования межзвездной среды привели к отношению<sup>21)</sup> дейтерия к водороду  $(1,60 \pm 0,09^{+0,05}_{-0,10}) \times 10^{-5}$ .
2. *Солнечный ветер.* На Солнце дейтерий превратился в  $\text{He}^3$ , прежде чем оно вышло на главную последовательность, поэтому считается, что измерения  $\text{He}^3$  в солнечном ветре и метеоритах дадут полное до-солнечное значение для  $\text{He}^3$  и дейтерия. Вычитание распространенности  $\text{He}^3$ , полученной другими способами, дало<sup>22)</sup> отношение дейтерия к водороду  $(2,6 \pm 0,6 \pm 1,4) \times 10^{-5}$ .
3. *Юпитерианская атмосфера.* Спектроскопические исследования атмосферы Юпитера дали<sup>23)</sup> отношение дейтерия к водороду  $(5 \pm 2) \times 10^{-5}$ .

Относительно недавно стало возможным измерить отношение дейтерия к водороду в очень ранней межгалактической среде посредством наблюдения линий поглощения дейтерия и водорода в спектре квазизвездных объектов, вызванного поглощением внутри межгалактических облаков с большим красным смещением<sup>24)</sup>. В 2003 году результаты нескольких лет наблюдений линий поглощения дейтерия и водорода в спектрах четырех квазизвездных объектов (КЗО) были объединены с результатами для еще одного КЗО<sup>25)</sup>; полученные

<sup>21)</sup> J. L. Linsky *et al.*, *Astrophys. J.* **402**, 694 (1993); **451**, 335 (1995).

<sup>22)</sup> K. A. Olive, лекции на «Advanced School on Cosmology and Particle Physics», Пеньискола, Испания, июнь 1998 г., и «Theoretical and Observational Cosmology Summer School», Каржез, Франция, август 1998 г., [astro-ph/9901231], а также ссылки внутри статьи.

<sup>23)</sup> H. B. Niemann *et al.* *Science* **272**, 846 (1996).

<sup>24)</sup> Обзор ранних результатов приводится у K. A. Olive, сноска 16; S. Sarker, доклад на конференции «Second International Workshop on Dark Matter in Astro- and Particle Physics», Гейдельберг, ФРГ, июль 1998 г., [astro-ph/0302006].

<sup>25)</sup> D. Kirkman, D. Tytler, N. Suzuki, J. M. O'Meara, and D. Lubin, *Astrophys. J. Suppl.* **149**, 1 (2003) [astro-ph/0302006], см. также цитирование внутри статьи.

Таблица 3.3

Пять квазизвездных объектов (КЗО), в спектрах которых наблюдались линии поглощениядейтерия и водорода; красное смещение межгалактических облаков, ответственных за поглощение; отношения чисел атомов дейтерия и водорода в этих облаках, полученные на основе относительных величин линий поглощений, сноска 25. (Наблюдательные неопределенности соответствуют одному стандартному отклонению)

КЗО	$z$	D/H
PKS 1937–1009	3,572	$3,25 \pm 0,3 \times 10^{-5}$
Q1009+299	2,504	$3,98_{-0,67}^{+0,59} \times 10^{-5}$
HS 0105+1619	2,536	$2,54 \pm 0,23 \times 10^{-5}$
Q1243+3047	2,525675	$2,42_{-0,25}^{+0,35} \times 10^{-5}$
Q2206–199	2,0762	$1,65 \pm 0,35 \times 10^{-5}$

данные представлены в табл. 3.3. Самое точное обнаруженное значение отношения дейтерия к водороду оказалось равным  $2,78_{-0,38}^{+0,44} \times 10^{-5}$ , из него следует отношение барионов к фотонам  $(5,9 \pm 0,5) \times 10^{-10}$ , которое соответствует

$$\Omega_b h^2 = 0,0214 \pm 0,0020.$$

Даже для  $H_0$  в пределах 50 (км/с)/Мпк было очевидно, что  $\Omega_b$  сильно меньше, чем вклад всего нерелятивистского вещества в критическую плотность, значение которой, как мы убедились, определяется из исследований галактических скоплений как  $\Omega_m = 0,2$  и как  $\Omega_m = 0,3$  — из зависимости красного смещения от расстояния для сверхновых Ia. Именно это расхождение изначально привело к указанию на существование небарионной темной материи во Вселенной.

Данное расхождение еще более усилилось после измерений анизотропии релактивистского излучения. Как будет видно в разд. 7.2, эти измерения позволяют вывести значения  $\Omega_b h^2 = 0,0223_{-0,0009}^{+0,0007}$  и  $\Omega_m h^2 = 0,127_{-0,013}^{+0,007}$ , которые указывают, что плотность полной массы в 5–6 раз превышает плотность обычного барионного вещества. Природа недостающей материи обсуждается в разд. 3.4.

Распространенность первичного  $\text{He}^3$ , по аналогии с дейтерием, является монотонно убывающей функцией от отношения барионов к фотонам. На основании продолжительных исследований галактических HII областей и планетарных туманностей в 2002 году<sup>26)</sup> был сделан вывод, что отношение  $\text{He}^3/\text{H}$  в межзвездном пространстве меньше чем  $1,1 \pm 0,2 \times 10^{-5}$ , что согласуется со значением  $1,04 \pm 0,6 \times 10^{-5}$ , вычисленным при  $\Omega_b h^2 = 0,0214$ . Однако в отличие от дейтерия,  $\text{He}^3$  в звездах одновременно порождается и уничтожается, поэтому не ясно, означает ли наблюдаемое межзвездное содержание

<sup>26)</sup> T. M. Bania, R. T. Rood, and D. S. Balser, *Nature* **415**, 54 (2002).

распространенность первичного  $\text{He}^3$ . Действительно, считалось, что звезды с малой массой должны впрыскивать в межзвездное пространство большое количество  $\text{He}^3$ , в случае чего очевидное согласие между наблюдаемым значением в межзвездной среде и значением, ожидаемым в космологическом нуклеосинтезе, фактически будет означать расхождение<sup>27)</sup>. Это очевидное расхождение может быть устранено в результате подробных расчетов<sup>28)</sup> перемещения  $\text{He}^3$  внутри звезд с малой массой, что является указанием на то, что данные звезды испускают не так уж много  $\text{He}^3$ .

Часть  $\text{Li}^6$  образуется космологически, но в таких малых количествах (его распространенность примерно в  $10^{-13}$ – $10^{-14}$  раз меньше распространенности водорода), что его, как правило, не рассматривают в качестве полезного кандидата для проверки космологических теорий<sup>29)</sup>. Гораздо большее внимание уделяется  $\text{Li}^7$ . Его распространенность имеет более сложную зависимость от отношения барионов к фотонам, потому что  $\text{Li}^7$  образовался двумя разными способами: напрямую, в реакциях  $\text{H}^3 + \text{He}^4 \rightarrow \text{Li}^7 + \gamma$ , и косвенно, сперва  $\text{He}^3 + \text{He}^4 \rightarrow \text{Be}^7 + \gamma$ , а потом  $e^- + \text{Be}^7 \rightarrow \nu + \text{Li}^7$ . При росте барионной плотности количество  $\text{Li}^7$ , образованного напрямую, сначала растет, а потом падает, потому что  $\text{Li}^7$  начинает распадаться в реакциях  $p + \text{Li}^7 \rightarrow \text{He}^4 + \text{He}^4$ . В конце концов начинают преобладать косвенные реакции и распространенность  $\text{Li}^7$  опять увеличивается. Минимум отношения  $\text{Li}^7$  к водороду вычислен и полученное значение примерно равно  $2 \times 10^{-10}$ , оно достигается когда отношение барионов к фотонам составляет примерно  $3 \times 10^{-10}$ , что соответствует  $\Omega_b h^2 = 0,01$ . В 2000 году сообщалось<sup>30)</sup>, что наблюдаемое значение отношения  $\text{Li}^7/\text{H}$  равно  $2,07^{+0,015}_{-0,04} \times 10^{-10}$ , что достаточно близко к минимуму. Последующее исследование<sup>31)</sup> 63 карликовых звезд в гало нашей Галактики дало для отношения  $\text{Li}^7/\text{H}$  значение, равное  $(2,37 \pm 0,05) \times 10^{-10}$ . И тот, и другой результат дают значение, меньшее предсказываемого значения  $3 \times 10^{-10}$  при  $\Omega_b h^2 = 0,0214$ , однако вполне правдоподобно, что несмотря на образование  $\text{Li}^7$  в звездах и при взаимодействии космических лучей с веществом, явления переноса в звездных атмосферах сократили распространенность  $\text{Li}^7$ . Наблюдения содержания  $\text{Li}^7$  в звездах с разными температурами в шаровидном скоплении NGC 6397 привели к результатам, находящимся в согласии с теорией конвекционного сокращения  $\text{Li}^7$  с предполагаемым начальным отношением  $\text{Li}^7/\text{H}$ , равным ожидаемому значению  $3 \times 10^{-10}$  (вычисленному для значения  $\Omega_b h^2$ , возникающего из оценки распространенности дейтерия

<sup>27)</sup> N. Hata *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 3977 (1995); K. A. Olive *et al.*, *Astrophys. J.* **444**, 680 (1995).

<sup>28)</sup> P. P. Eggleton, D. S. P. Dearborn, and J. C. Lattanzio, *Science* **314**, 1580 (2006).

<sup>29)</sup> Обзор представлен в работе E. Vangioni-Flam, M. Cassé, R. Cayrel, J. Audouze, M. Spite, and F. Spite, *New Astron.* **4**, 245 (1999).

<sup>30)</sup> T. K. Suzuki, Y. Yoshii, and T. C. Beers, *Astrophys. J.* **540**, 99 (2000) [astro-ph/0003164]. Более ранние наблюдения представлены в работах M. Spite and F. Spite, *Nature* **297**, 483 (1982); S. G. Ryan, J. E. Norris, and T. C. Beers, *Astrophys. J.* **523**, 654 (1999).

<sup>31)</sup> J. Melendez and I. Ramirez, *Astrophys. J.* **615**, L33 (2004).

и анизотропии реликтового излучения)<sup>32)</sup>. Если не принимать во внимание ситуацию Li<sup>7</sup>/H, то на данный момент имеется полное согласие между наблюдениями распространенности легких элементов и вычислениями космологического нуклеосинтеза, в которых значение  $\Omega_b h^2$  берется из наблюдения анизотропии реликтового излучения.

Хотя плотность барионной массы, возникающая на основе рассмотрения космологического нуклеосинтеза и реликтового излучения значительно меньше плотности полной массы, она все же существенно больше плотности барионного вещества, наблюдавшегося в звездах и светящейся межзвездной среде<sup>33)</sup>. Часть этой темной барионной материи расположена в межгалактическом пространстве, однако считается, что значительная доля находится в галактиках, в виде коричневых карликов и водородных облаков<sup>34)</sup>. Однако это скорее вопрос астрофизики галактик, а не космологии.

### 3.3

## Бариосинтез и лептосинтез

**Условия Сахарова • Задержанный распад • Электрослабое несохранение • Лептогенезис • Механизм Аффлека—Дайна • Равновесный нуклеосинтез**

В предыдущем разделе мы видели, что отношение нуклонов к фотонам  $\eta$  во время нуклеосинтеза имеет исчезающее малое значение  $\simeq 5 \times 10^{-10}$ . В ранние времена, когда температура составляла примерно 10<sup>13</sup> К, нуклоны еще не образовались из составляющих夸克ов, и находящихся в тепловом равновесии夸к-анти夸ковых пар было примерно столько же, сколько фотонов. Однако из закона сохранения барионного числа (одна треть от числа夸ков минус число анти夸ков) во время процесса аннигиляции следует, что до аннигиляции должно иметься небольшое превышение числа夸ков над числом анти夸ков, примерно порядка  $\eta$  в расчете на один фотон, и поэтому когда все анти夸ки проаннигилируют с夸ками, некоторые夸ки останутся и примут участие в образовании нуклонов. Также есть небольшое превышение числа электронов над числом позитронов, для сохранения зарядовойнейтральности Вселенной. Предположительно, существует компенсирующее превышение числа антинейтрино над числомнейтрино, так что плотность суммарного лептонного числа (плотность числа электронов, мюонов, таупов, инейтрино минус плотность числа их античастиц) равна нулю, однако, по всей видимости, более естественно считать, что небольшой дисбаланс между лептонами и антилептонами, сравнимый с преобладанием夸ков над анти夸ками, также существовал до лептон-антилептонной аннигиляции.

<sup>32)</sup> A. J. Korn *et al.*, *Nature* **442**, 657 (2006) [astro-ph/0608201].

<sup>33)</sup> M. Fukugita, C. J. Hogan, and P. J. E. Peebles, *Astrophys. J.* **503**, 518 (1998).

<sup>34)</sup> Например, см. работу M. Roncadelli, *Recent Research Devel. Astron. & Astrophys.* **1**, 407 (2003).

Такие исчезающие малые расхождения в количестве кварков и антикварков, а также лептонов и антилептонов, могут быть объяснены, если плотности барионного и лептонного чисел возникли в результате физических процессов во Вселенной, которая в некоторый достаточно ранний момент времени содержала равное число частиц и античастиц всех сортов. Тогда можно надеяться вычислить  $\eta$  из первых принципов и понять, почему оно настолько мало. В 1967 году Сахаров<sup>35)</sup> сформулировал три необходимых условия:

1. Очевидно, для того, чтобы во Вселенной, в которой изначально присутствует равное количество частиц и античастиц всех типов, возникало превышение числа барионов над числом антибарионов или неравное число лептонов и антилептонов, должен существовать некоторый физический процесс, нарушающий закон сохранения барионного числа или лептонного числа.

2. Вселенная с равным числом частиц и античастиц каждого типа (а также импульсом и спиральностью) инвариантна относительно операторов симметрии С (перестановка частиц с античастицами) и СР (перестановка частиц с античастицами, сопровождающаяся изменением знака всех трехмерных пространственных векторов), при этом состояние, в котором барионы преобладают над антибарионами или лептоны над антилептонами, очевидно, не является инвариантным относительно С или СР<sup>36)</sup>. Следовательно, для образования подобного состояния некоторый физический процесс должен нарушать инвариантность относительно С и СР. Верно утверждение, что независимо от того, сохраняются С и/или СР или нет, любая релятивистская квантовая теория поля будет инвариантна относительно СРТ-симметрии<sup>37)</sup>, которая является одновременной перестановкой частиц и античастиц, сопровождающейся изменением знака всех трехмерных пространственных векторов, а также изменением направления течения времени, однако это не препятствует появлению барионного или лептонного числа, потому что симметрия относительно обращения времени Т нарушается расширением Вселенной.

3. Несколько менее очевидно то, что для возникновения состояния с превышением числа барионов над числом антибарионов или дисбаланса лептонов и антилептонов из состояния с равным числом частиц и античастиц, тепловое (а также химическое) равновесие во Вселенной в некоторый момент должно было быть нарушено. Это объясняется тем, что в состоянии теплового равновесия, если закон сохранения числа барионов и/или лептонов теряет силу, и все сохраняющиеся величины, такие как электрический заряд, становятся равными нулю, то поскольку химические потенциалы обязаны сохраняться в любой реакции, они все обязаны обратиться в ноль. СРТ-симметрия означает, что даже если С и СР не сохраняются, то массы частиц

<sup>35)</sup> A. D. Sakharov, *JETP Lett.* 5, 24 (1967).

<sup>36)</sup> В русскоязычной литературе С называется *операцией зарядового сопряжения*, Р — *операцией пространственной инверсии*, а СР — *комбинированной СР-четностью*. — Прим. ред. перев.

<sup>37)</sup> См. КТП, том 1, разд. 5.8.

и их античастиц в точности равны друг другу, поэтому при зануляющихся химических потенциалах частицы и античастицы будут иметь одинаковые функции распределения, такие как (3.1.28) с  $\mu = 0$  в случае идеального газа. Таким образом, каковы бы ни были скорости различных процессов, ни барионное, ни лептонное число не возникнет<sup>38)</sup>. Исключение из этой аргументации приведено в конце этого раздела.

Теперь мы знаем, что все три условия выполняются:

(1) Прямого экспериментального доказательства нарушения сохранения барионного числа не существует, однако согласно современным взглядам на Стандартную модель элементарных частиц, ожидается, что очень слабое нарушение все же есть. Согласно этим взглядам, Стандартная модель не является фундаментальной теорией, от которой можно ожидать, что она содержит только те взаимодействия, константы связи которых либо безразмерны, либо пропорциональны положительным степеням массы, так что все возникающие в Стандартной модели бесконечности могут быть устраниены при перенормировке этих констант связи. Точнее, теперь мы думаем, что Стандартная модель — это эффективная теория поля, справедливая при энергиях, значительно меньших, чем некоторый фундаментальный масштаб масс  $M$ , который может быть планковской массой  $M_p = G^{-1/2} = 1,22 \times 10^{19}$  ГэВ, или, возможно, масштабом энергий  $\approx 10^{15} - 10^{16}$  ГэВ, на котором три независимые (подходящим образом нормированные) калибровочные константы связи Стандартной модели оказываются равны друг другу. Можно ожидать, что такая эффективная теория будет содержать все возможные взаимодействия, допустимые калибровочными симметриями сильного, слабого, и электромагнитного взаимодействий, однако все, за исключением конечного числа таких констант связи, будут иметь отрицательные массовые размерности. Таким образом, эти «неперенормируемые» взаимодействия подавлены степенями  $E/M$  при энергиях  $E \ll M$ . Далее, калибровочные симметрии Стандартной модели не допускают неподавленных взаимодействий между кварками и лептонами, которые нарушают законы сохранения барионного или лептонного числа, поэтому вполне правдоподобно, что с хорошей точностью барионное или лептонное число будет автоматически сохраняться при энергиях  $E \ll M$ , даже если законы сохранения барионного и лептонного чисел не выполняются для той или иной физики, которую описывает фундаментальная теория при энергиях порядка  $M$ . Иначе говоря, законы сохранения барионного и лептонного чисел могут соответствовать всего лишь «случайным» симметриям. В этом случае нет причины исключать подавленные взаимодействия, которые нарушают закон сохранения барионного и лептонного чисел. Минимальным подавленным взаимодействием такого типа является взаимодействие с участием двух лептонных дуплетов и двух скалярных дуплетов, они подавлены

<sup>38)</sup> Более детальное рассмотрение и ссылки на предыдущие обсуждения приведены в работе S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 850 (1978).

фактором  $M^{-1}$  и нарушают сохранение лептонного, но не барионного числа, или взаимодействие, подавленное фактором  $M^{-2}$  с участием трех кварковых полей и одного лептонного поля, в котором нарушается сохранение числа как лептонов, так и барионов<sup>39)</sup>. (Помимо этого, как будет видно в дальнейшем, в стандартной электрослабой теории имеется квантово-механическое нарушение сохранения барионного и лептонного чисел.) Есть экспериментальное доказательство существования первого, но не второго взаимодействия. Для константы связи порядка  $1/(10^{16} \text{ ГэВ})$ , когда нейтральные скалярные поля заменяются значениями своих вакуумных ожиданий, это взаимодействие приводит к массе нейтрино порядка  $10^{-2} \text{ эВ}$ , что хорошо согласуется с результатами экспериментов по нейтринным осцилляциям.

---

Существование отличных от нуля масс нейтрино означает, что посредством преобразования Лоренца нейтрино со спиральностью  $+1/2$ , которым обычно приписывается лептонное число  $+1$ , могут быть переведены в нейтрино со спиральностью  $-1/2$  и лептонным числом  $-1$ .

---

Второе взаимодействие будет приводить к процессу распада типа  $p \rightarrow \pi^0 + e^+$ , со скоростью распада порядка  $m_p^5/(M^4\hbar)$ . До сих пор такие события не были зафиксированы, но вполне может быть, что их не так-то легко обнаружить.

(2) В 1957 году было обнаружено нарушение инвариантности относительно С, а в 1964 году было обнаружено нарушение инвариантности относительно СР<sup>40)</sup>.

(3) Расширение Вселенной стремится нарушить тепловое равновесие, либо потому что понижение температуры заставляет скорости реакций снижаться ниже скорости расширения, либо потому что, по мере остывания, Вселенная испытывает фазовые переходы первого рода, аналогичные конденсации водяного пара или замерзанию воды. Хотя само по себе это не приводит к нарушению сохранения барионного и лептонного чисел, оно открывает две-ри физическим процессам, нарушающим данные законы сохранения, а также сохранение С- и СР-четностей, что приводит к дисбалансу между барионами и антибарионами и/или между лептонами и антилептонами.

Приведенные выше рассуждения направлены исключительно на демонстрацию того, что ненулевые космологические барионные и лептонные числа вполне могут возникать в результате некоторых физических процессов. Остается найти теорию, которая может предсказывать наблюдаемое отношение барионов к фотонам<sup>41)</sup>. Существует несколько теорий такого типа.

<sup>39)</sup> Обзор этих результатов, а также ссылки на оригинальные статьи представлены в КТП, том 2, разд. 21.5.

<sup>40)</sup> См. КТП, том 1, разд. 3.3.

<sup>41)</sup> Самые первые попытки в этом направлении представлены в работах M. Yoshimura, *Phys. Rev. Lett.* **41**, 281 (1978); **42**, 746(E) (1979); S. Dimopoulos and L. Susskind, *Phys. Rev. D* **18**, 4500 (1979);

### 1. Запаздывающий распад тяжелых частиц<sup>42)</sup>

Предположим, что имеются тяжелые  $X$ -частицы, для которых существуют два разных канала распада, с барионными числами  $B_1$  и  $B_2$  и лептонными числами  $L_1$  и  $L_2$ , а коэффициенты ветвления распада равны  $r$  и  $1 - r$ .

Например, в некоторых теориях Великого объединения присутствуют «лекто-кварки» с массами порядка  $10^{15}$  ГэВ, которые распадаются либо в два кварка с барионным числом  $2/3$  и лептонным числом ноль, либо в антилептон и антикварк с барионным числом  $-1/3$  и лептонным числом  $-1$ .

Соответствующая античастица будет распадаться по двум каналам с барионными числами  $-B_1$  и  $-B_2$  и лептонными числами  $-L_1$  и  $-L_2$ , а коэффициенты ветвления будут равны  $\bar{r}$  и  $1 - \bar{r}$ .

Из инвариантности относительно СРТ следует, что любая частица и ее античастица имеют одинаковые *суммарные* скорости реакции, но так как сохранение С и СР нарушено, частицы и античастицы могут иметь различные коэффициенты ветвления в разных каналах распада.

Тогда выражение для среднего полного барионного числа, возникающего при распаде одной  $X$ -частицы и при распаде одной соответствующей античастицы имеет вид

$$\Delta B = rB_1 + (1 - r)B_2 - \bar{r}B_1 - (1 - \bar{r})B_2 = (r - \bar{r})(B_1 - B_2), \quad (3.3.1)$$

для лептонного числа справедливо аналогичное соотношение.

Точно также может существовать некоторая тяжелая  $N$  частица, совпадающая со своей собственной античастицей, которая распадается с коэффициентом ветвления  $r$  в канале с барионным числом  $B_1$ , лептонным числом  $L_1$  и с коэффициентом ветвления  $1 - r$ , в антиканале — с барионным числом  $-B_1$  и лептонным числом  $-L_1$ . Каждый распад в среднем порождает барионное число

$$\Delta B = rB_1 - (1 - r)B_1, \quad (3.3.2)$$

для лептонного числа справедливо аналогичное соотношение. Если С и СР-симметрии нарушаются, то тогда возможно, что  $r \neq 1 - r$ , поэтому могут возникнуть суммарные барионное и лептонное числа. Например, в некоторых теориях Великого объединения присутствуют нейтральные фермионы, которые распадаются в скалярные частицы и лептоны и в их античастицы,

*Phys. Lett.* **81B**, 416 (1979); A. Yu. Ignatiev, N. V. Krasnikov, V. A. Kuzmin, and A. N. Tavkhelidze, *Phys. Lett.* **76B**, 436 (1978); B. Toussaint, S. B. Treiman, F. Wilczek, and A. Zee, *Phys. Rev. D* **19**, 1036 (1978); J. Ellis, M. K. Gaillard, and D. V. Nanopoulos, *Phys. Lett.* **80B**, 360 (1979); **82B**, 464(E) (1979).

<sup>42)</sup> S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 850 (1979).

что приводит к возникновению суммарного лептонного числа при условии, что коэффициенты ветвления этих каналов отличны друг от друга.

В состоянии равновесия такие процессы не приводят к возникновению какого-либо суммарного барионного или лептонного числа, потому что обращение процесса распада уменьшает барионное и лептонное числа ровно на величину, возникшую в результате распада. Условия теплового равновесия будут оставаться нарушенными до тех пор, пока  $H$  будет превышать скорость распада  $X$ -частиц, однако до тех пор, пока  $k_B T$  больше масс всех участвующих частиц, независимо от скоростей различных процессов, расширение будет сохранять равновесный вид распределений всех частиц с температурой красного смещения  $T \propto 1/a$ . В особенности, если  $k_B T$  по-прежнему остается больше масс всех частиц, когда  $H \equiv \dot{a}/a$  становится меньше скорости распада  $\Gamma_X$ , то в обратном процессе возникнут ровно столько  $X$ -частиц, сколько распалось. С другой стороны, если в некоторый момент времени  $H \approx \Gamma_X$  величина  $k_B T$  была меньше массы  $m_X$  частицы  $X$ , то Больцмановский фактор  $\exp[-m_X/(k_B T)]$  заблокирует обратный процесс, и  $X$ -частицы и античастицы исчезнут, что приведет к суммарному барионному числу  $(r - \bar{r})(B_1 - B_2)$  на каждую исходную пару тяжелой частицы и античастицы.

Это произойдет при условии, что  $k_B T \leq m_X$  при температуре, соответствующей  $H = \Gamma_X$ . Можно сделать оценку (положив здесь  $\hbar = c = 1$ )

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G a_B T^4 (\mathcal{N}/2)}{3}} = 1,66(k_B T)^2 \frac{\mathcal{N}^{1/2}}{m_P}, \quad (3.3.3)$$

где  $m_P \equiv G^{-1/2} = 1,22 \times 10^{19}$  ГэВ и  $\mathcal{N}$  является полным числом состояний спиральности всех элементарных частиц и античастиц, с дополнительным фактором  $7/8$  для фермионов.

---

Здесь предполагается, что при данных температурах основной вклад в плотность энергии Вселенной обеспечивается большим числом  $\mathcal{N}$  сортов ультрарелятивистских частиц, а не из самих  $X$ -частиц.

---

Скорость распада  $X$ -частиц будет составлять  $m_X$  умноженную на некоторый безразмерный параметр  $\alpha_X$ , который характеризует силу взаимодействий, ответственных за процесс распада и число его каналов. Следовательно, распады частиц становятся существенными при температуре  $T_X$ , задаваемой выражением

$$k_B T_X \approx \sqrt{\frac{\alpha_X m_X m_P}{\mathcal{N}^{1/2}}}. \quad (3.3.4)$$

Чтобы оно было меньше  $m_X$ , необходимо иметь

$$m_X \geq \mathcal{N}^{-1/2} \alpha_X m_P. \quad (3.3.5)$$

Это достаточно сильный нижний предел на  $m_X$ . Например, если  $X$ -частицы распадаются посредством обычных электрослабых взаимодействий, то  $\alpha_X \approx 10^{-2}$ , поэтому если  $\mathcal{N} \approx 100$  необходимо, чтобы  $m_X$  было больше, чем примерно  $10^{16}$  ГэВ. С точки зрения теорий, объединяющих сильное и электрослабое взаимодействия, это вполне разумное значение массы.

Предполагая данное условие выполненным, можно легко оценить величину  $\eta$  на основе соотношения (3.3.1). При температурах значительно выше массы тяжелых частиц, плотность числа пар  $X$ -частиц и античастиц совпадает по порядку величины с плотностью числа фотонов. Плотность энтропии (температура измеряется в единицах энергии,  $k_B = 1$ ) в этот момент равна по порядку величины  $\mathcal{N}$ , умноженному на плотность числа фотонов, поэтому отношение плотности числа пар  $X$  и  $\bar{X}$  к плотности энтропии по порядку величины равно  $1/\mathcal{N}$ . Когда условие (3.3.4) выполнено, отношение барионного числа к плотностям энтропии после исчезновения этих пар будет по порядку величины равно  $(r - \bar{r})(B_1 - B_2)/\mathcal{N}$ . Плотность энтропии изменяется как  $a^{-3}$ , и, при условии, что барионное число в дальнейшем сохраняется, плотность барионного числа тоже сохраняется, откуда следует, что отношение барионного числа к энтропии будет оставаться неизменным. Поскольку современная плотность энтропии совпадает по порядку величины с плотностью числа фотонов, и в настоящее время только нуклоны являются барионами, без антинуклонов, то ожидается, что отношение нуклонов к фотонам равно

$$\eta \approx \frac{(r - \bar{r})(B_1 - B_2)}{\mathcal{N}}. \quad (3.3.6)$$

Обычно разница  $B_1 - B_2$  порядка единицы (в упомянутом выше примере с лептокварком она равна единице), но разность  $r - \bar{r}$  как правило очень мала, по причине слабого нарушения СР-симметрии, а также потому, что из СРТ-теоремы следует, что в низшем порядке возмущений  $r = \bar{r}$ . Точное значение  $r - \bar{r}$  сильно зависит от выбора конкретной модели, однако значения  $\eta$  желаемого порядка  $5 \times 10^{-10}$  возникают вполне естественным образом<sup>43)</sup>. Реализация этой идеи в инфляционных теориях сталкивается с определенными трудностями, и, как будет видно в гл. 10, это приводит к общему требованию, чтобы температура никогда не принимала достаточно высоких значений, необходимых для возникновения частиц с массами, удовлетворяющими (3.3.5).

## 2. Непертурбативное нарушение сохранения барионного и лептонного чисел в электрослабой теории

В Стандартной модели слабого, электромагнитного и сильного взаимодействий барионное и лептонное числа автоматически сохраняются во всех порядках пертурбативной теории; однако если учесть определенные непертурбативные эффекты, то сохранение нарушается<sup>44)</sup>. Это приводит к реакциям,

<sup>43)</sup> D. V. Nanopoulos and S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **20**, 2484 (1979).

<sup>44)</sup> G. 't Hooft, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 8 (1976). Также см. КТП, том 2, разд. 23.5.

в которых происходит нарушение сохранения барионного и лептонного чисел, однако при низких температурах они подавлены фактором  $\exp(-8\pi^2/g^2) \simeq 10^{-162}$ , где  $g$  — это константа связи  $SU(2)$  электрослабого взаимодействия. Эта исчезающее малая экспонента на самом деле определяет коэффициент проницаемости барьера, возникающий при квантово-механическом туннелировании сквозь барьер между топологически различными конфигурациями калибровочных полей. При высоких температурах, примерно выше 300 ГэВ, тепловые флуктуации допускают переход *над* барьером, и экспоненциальное подавление пропадает<sup>45)</sup>. Тем не менее, сами по себе эти реакции не приводят к достаточному суммарному барионному числу, потому что они происходят во время практически идеального теплового равновесия<sup>46)</sup>, а также потому что они подавлены малыми параметрами, связанными с необходимостью нарушить СР симметрию и сохранение барионного и лептонного чисел<sup>47)</sup>.

### 3. Лептогенезис<sup>48)</sup>

Несмотря на то, что сами по себе непертурбативные эффекты электрослабых взаимодействий, описанные в предыдущем параграфе, не дают способа подсчета наблюдаемого отношения числа барионов к числу фотонов, с их помощью можно перевести плотность космологического лептонного числа в плотность барионного числа, и наоборот. Единственные по-настоящему сохраняющиеся квантовые числа в  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  Стандартной модели соответствуют калибровочным симметриям — электрослабый изоспиновый генератор  $T_3$ , электрослабый гиперзаряд  $Y$  (определенный таким образом, чтобы электрический заряд в единицах  $e$  был равен  $T_3 - Y$ ) и пара генераторов  $SU(3)$  калибровочной группы квантовой хромодинамики, а также  $B - L$ , суммарное барионное число минус суммарное лептонное число, которое сохраняется по причине сокращения фейнмановских диаграмм, содержащих кварковые и лептонные петли. Это создает дальнейшие затруднения для предложения о том, что наблюдаемая плотность барионного числа во Вселенной образовалась при распаде лептокварка на два кварка, лептон и антикварк. Хотя значения  $B$  и  $L$  в этих каналах различаются, значения  $B - L$  совпадают

<sup>45)</sup> V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov, and M. E. Shaposhnikov, *Phys. Lett.* **155B**, 36 (1985). Основной вклад в переход между полевыми конфигурациями осуществляется некоторыми промежуточными полевыми конфигурациями, известными как сфероны; см. N. S. Manton, *Phys. Rev. D* **28**, 2019 (1983); F. R. Klinkhamer and N. S. Manton, *Phys. Rev. D* **30**, 2212 (1984); R. F. Dashen, B. Hasslacher, and A. Neveu, *Phys. Rev. D* **10**, 4138 (1974).

<sup>46)</sup> Отсутствие в электрослабой теории фазовых переходов первого рода показано в работе K. Kajantie, M. Laine, K. Rummukainen, and M. Shaposhnikov, *Nucl. Phys. B* **466**, 189 (1996); K. Rummukainen, M. Tsypin, K. Kajantie, and M. Shaposhnikov, *Nucl. Phys. B* **532** (1998); F. Csikor, Z. Fodor, and J. Heitger, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 21 (1999); см. также ссылки на более ранние работы внутри указанных статей.

<sup>47)</sup> M. E. Shaposhnikov, *JETP Lett.* **44**, 465 (1986); *Nucl. Phys. B* **287**, 757 (1987).

<sup>48)</sup> M. Fukugita and T. Yanagida, *Phys. Lett. B* **174**, 45 (1986). См. обзор в работе W. Buchmüller, R. D. Peccei, and T. Yanagida, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **55**, 311 (2005) [hep-ph/0502169].

(равны 2/3). Следовательно, если при рождении Вселенной число частиц и число античастиц всех типов совпадают, то даже если в результате распада лептокварка возникает равные, ненулевые плотности барионного и лептонного чисел, то все по-настоящему сохраняющиеся величины будут равны нулю, поэтому когда при низких температурах устанавливается тепловое равновесие, то оно будет с нулевыми значениями всех химических потенциалов. (Будет показано далее.) В таком состоянии число частиц совпадает с числом античастиц, и следовательно, плотности  $B$  и  $L$ , а также  $B - L$  равны нулю.

С другой стороны, если какая-нибудь тяжелая частица (подобно ранее упомянутой  $N$  частице) распадается в ранней Вселенной таким образом, что возникает отличная от нуля плотность  $B - L$ , то эта разность будет сохраняться в течение всего периода теплового равновесия, хотя относительные плотности  $B$  и  $L$  могут изменяться. В целом, какая бы комбинация барионного и лептонного чисел ни возникла при распаде тяжелой частицы, *и даже если будет возникать только лептонное число*, следует ожидать, что в следующий за этим период теплового равновесия значения плотностей барионного и лептонного числа будут сравнимы друг с другом.

Данное утверждение можно подкрепить конкретными вычислениями<sup>49)</sup>. Предположим, что в состоянии теплового равновесия есть набор сохраняющихся квантовых чисел  $Q_a$ , таких как  $T_3$ ,  $Y$  и  $B - L$ . Также предположим, что имеется несколько сортов  $i$  частиц, находящихся в тепловом равновесии, например, кварки, лептоны и т. д., причем значение квантового числа  $Q_a$  для каждого из них равно  $q_{ai}$ . В состоянии теплового равновесия, химические потенциалы  $\mu_i$  рассматриваемых частиц обязаны сохраняться во всех реакциях, что приводит к требованию их линейной зависимости от сохраняющихся квантовых чисел:

$$\mu_i = \sum_a q_{ai} \mu_a, \quad (3.3.7)$$

с коэффициентами  $\mu_a$ , которые можно рассматривать как химические потенциалы для разных сохраняющихся величин. Отсюда следует, что плотности числа частиц разных сортов могут быть представлены в виде функций от  $\mu_a$  и температуры, и данные соотношения можно использовать при вычислении плотностей  $n_a$  различных сохраняющихся квантовых чисел в виде функций от  $\mu_a$  и температуры. Однако существует ровно столько же  $n_a$ , сколько  $\mu_a$ , поэтому данные соотношения можно обратить, разрешив их относительно  $n_a$  и температуры; с помощью этих соотношений можно вычислить плотность всего чего угодно в виде функции от  $n_a$  и температуры, включая плотность несохраняющихся величин, таких как барионное или лептонное числа, которые не принадлежат набору  $Q_a$ .

В нашем случае, при температурах выше  $10^{16}$  К, все частицы Стандартной модели становятся ультрарелятивистскими, поэтому их массами можно

<sup>49)</sup> J. A. Harvey and M. S. Turner, *Phys. Rev. D* **42**, 3344 (1990).

пренебречь. Тогда плотность числа частиц типа  $i$  принимает вид

$$n_i = \frac{g_i}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{d^3 p}{e^{(p-\mu_i)/(k_B T)} \mp 1} = 4\pi g_i \left(\frac{k_B T}{2\pi\hbar}\right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^{(x-\mu_i)/(k_B T)} \mp 1}, \quad (3.3.8)$$

где  $g_i$  — это число спиральностей (а также другие источники вырождения) для каждого типа, выбирается знак « $-$ » для бозонов и « $+$ » — для фермионов. Плотность числа античастиц  $\bar{n}_i$  будет определяться такой же формулой, но  $\mu_i$  заменяется на  $-\mu_i$ , так что разница задается выражением

$$n_i - \bar{n}_i = 8\pi g_i \left(\frac{k_B T}{2\pi\hbar}\right)^3 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_i}{k_B T}\right) \int_0^\infty \frac{x^2 e^x dx}{e^{2x} \mp 2e^x \operatorname{ch} [\mu_i/(k_B T)] + 1}. \quad (3.3.9)$$

В рассматриваемой ситуации дисбаланс между частицами и античастицами всех сортов мал, поэтому для всех типов частиц  $|\mu_i| \ll k_B T$ . В этом случае

$$n_i - \bar{n}_i = 8\pi g_i \left(\frac{k_B T}{2\pi\hbar}\right)^3 \frac{\mu_i}{k_B T} \int_0^\infty \frac{x^2 e^x dx}{(e^x \mp 1)^2}. \quad (3.3.10)$$

Интеграл по  $x$  равен  $\pi^2/3$  для бозонов и  $\pi^2/6$  для фермионов, поэтому его можно переписать как

$$n_i - \bar{n}_i = f(T) \tilde{g}_i \mu_i, \quad (3.3.11)$$

где

$$f(T) \equiv \frac{4\pi^3}{3} \frac{(k_B T)^2}{(2\pi\hbar)}, \quad (3.3.12)$$

а  $\tilde{g}_i$  — это число спиновых состояний, причем для бозонов возникает дополнительный множитель 2. С учетом суммы (3.3.7) соотношение (3.3.11) принимает вид

$$n_i - \bar{n}_i = f(T) \tilde{g}_i \sum_a q_{ai} \mu_a. \quad (3.3.13)$$

В частности, плотность сохраняющегося квантового числа  $Q_a$  равна

$$n_a = \sum_i q_{ai} (n_i - \bar{n}_i) = f(T) \sum_b M_{ab} \mu_b, \quad (3.3.14)$$

где  $M$  является матрицей

$$M_{ab} \equiv \sum_i \tilde{g}_i q_{ai} q_{bi}. \quad (3.3.15)$$

Эта матрица положительно определена (в том смысле, что для любого набора вещественных чисел  $\xi_a$  справедливо  $\sum_{ab} M_{ab} \xi_a \xi_b > 0$ , когда все  $\xi_a$  отличны от нуля), и поэтому существует обратная матрица  $M^{-1}$ . Таким образом,

соотношение (3.3.14) можно обратить и выразить  $\mu_a = \sum_b M_{ab}^{-1} n_b / f(T)$ . Подставляя полученное выражение в (3.3.13), находим

$$n_i - \bar{n}_i = \sum_{ab} \tilde{g}_i q_{ai} M_{ab}^{-1} n_b \quad (3.3.16)$$

для любого типа частиц  $i$ . В частности, заметим, что если плотности  $n_b$  всех сохраняющихся квантовых чисел равны нулю, то, как упоминалось ранее, существует равное число частиц и античастиц каждого типа.

Чтобы рассмотреть случай, когда некоторые сохраняющиеся величины, такие как  $B - L$ , имеют отличные от нуля плотности, следует вычислить матрицу  $M_{ab}$ . Частицы Стандартной модели перечислены в табл. 3.4. Для  $N_g$  поколений кварков и лептонов и  $N_d$  скалярных дуплетов независимыми элементами матрицы  $M_{ab}$  будут

$$M_{B-L B-L} = \frac{13N_g}{3}, \quad M_{B-L Y} = -\frac{8N_g}{3}, \quad M_{Y Y} = \frac{10N_g}{3} + N_d. \quad (3.3.17)$$

Нет необходимости знать те элементы этой матрицы, которые содержат  $T_3$ , потому что сумма значений  $T_3$  обращается в ноль для всех частиц с любым заданным значением  $B - L$  и  $Y$ , так что  $M_{B-L T_3} = M_{Y T_3} = 0$ . Таким образом,

**Таблица 3.4**

Частицы Стандартной модели с числом  $\tilde{g}$  спиральностей и цветных состояний (для бозонов возникает дополнительный фактор 2), а также значения барионного числа, лептонного числа и калибровочных квантовых чисел. Показаны только одно «поколение» кварков и лептонов и только один дуплет скалярных полей. Нижние индексы  $L$  и  $R$  обозначают спиральности кварков  $u$  и  $d$  и лептонов  $\nu$  и  $e$ . Античастицы отдельно не показываются, фотон и  $Z^0$  не приводятся, потому что они совпадают со своими античастицами и поэтому не дают вклада в плотности квантовых чисел. По причинам, указанным в тексте, цветные квантовые числа не приводятся

Частица	$\tilde{g}$	$B$	$L$	$T_3$	$Y$
$u_L$	3	1/3	0	1/2	-1/6
$d_L$	3	1/3	0	-1/2	-1/6
$u_R$	3	1/3	0	0	-2/3
$d_R$	3	1/3	0	0	1/3
$\nu_L$	1	0	1	1/2	1/2
$e_L$	1	0	1	-1/2	1/2
$e_R$	1	0	1	0	1
$W^+$	4	0	0	1	0
$\varphi^+$	2	0	0	1/2	-1/2
$\varphi^0$	2	0	0	-1/2	-1/2
глюоны	4	0	0	0	0

матрица  $M_{ab}$  является блочно-диагональной, с блоками  $2 \times 2$ , индексы  $a$  и  $b$  которых принимают значения  $B - L$  и  $Y$ . В качестве следствия получается, что без явного вычисления  $M_{T_3 T_3}$  можно найти следующие элементы:

$$M_{B-L B-L}^{-1} = \frac{10N_g}{3D} + \frac{N_d}{D}, \quad M_{B-L Y}^{-1} = \frac{8N_g}{3D}, \quad M_{Y Y}^{-1} = \frac{13N_g}{3D}, \quad (3.3.18)$$

где  $D$  — это детерминант

$$D = \frac{22N_g^2}{3} + \frac{13N_g N_d}{3}. \quad (3.3.19)$$

---

Точно также нет никакой необходимости учитывать цветные квантовые числа, так как сумма по ним равна нулю для всех частиц с любым заданным значением  $B - L$  и  $Y$ .

---

Таким образом, если  $B - L$  является единственным сохраняющимся квантовым числом, плотность которого отлична от нуля, то из (3.3.16) и (3.3.18) следует, что плотность барионного числа в тепловом равновесии равна

$$\begin{aligned} n_B &\equiv \sum_i B_i(n_i - \bar{n}_i) = \sum_i \tilde{g}_i B_i ((B - L)_i M_{B-L B-L}^{-1} + Y_i M_{Y B-L}^{-1}) n_{B-L} = \\ &= \left( \frac{4}{3} M_{B-L B-L}^{-1} - \frac{2}{3} M_{Y B-L}^{-1} \right) N_g n_{B-L} = \left( \frac{8N_g + 4N_d}{22N_g + 13N_d} \right) n_{B-L}. \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

Например, в минимальном экспериментально достижимом случае с  $N_g = 3$  и  $N_d = 1$  получается  $n_B = (28/79)n_{B-L}$ . В любом случае, оказывается, что  $n_B$  имеет тот же порядок величины, что и  $n_{B-L}$ , как и ожидалось. Причина малости  $n_B/n_Y$  в данном сценарии может объясняться малостью нарушения СР-симметрии в процессе распада тяжелых частиц, вышедших из состояния теплового равновесия, в результате которого возникает отличная от нуля плотность  $B - L$ .

#### 4. Механизм Аффлека—Дайна<sup>50)</sup>

Нарушение сохранения барионного числа может происходить в неравновесной динамике скалярного поля, которое обладает отличным от нуля барионным числом. Сохранение барионного числа и СР-инвариантности должно быть нарушено в лагранжиане скалярного поля. Мотивация изучения подобных теорий диктуется суперсимметрией, которая в данной книге не рассматривается.

---

<sup>50)</sup> L. Affleck and M. Dine, *Nucl. Phys. B* **249**, 361 (1985); M. Dine, L. Randall, and S. Thomas, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 398 (1995); *Nucl. Phys. B* **458**, 291 (1996).

## 5. Равновесный синтез барионов

Нарушение СРТ при расширении Вселенной означает, что часть гамильтониана теории, меняющая знак при С и СР преобразованиях, может иметь нечеловеческие вакуумные значения  $\Delta E_i$  в состоянии с единственным барионом типа  $i$  и, конечно же, противоположное вакуумное значение  $-\Delta E_i$  в состоянии с соответствующим антибарионом. Тогда даже если Вселенная изначально находится в состоянии с нулевым барионным числом, то при попадании в состояние теплового равновесия, в котором не сохраняющие барионное число процессы происходят с большой скоростью, несмотря на то, что связанный с барионным числом химический потенциал отсутствует, разница в энергиях барионов и антибарионов даст суммарное барионное число. Когда процессы с несохраняющимся барионным числом станут неэффективными, останется результатирующая плотность барионного числа, убывающая как  $a^{-3}$ . Пока сохраняющие барионное число процессы происходят достаточно быстро, одночастичное распределение будет иметь вид, соответствующий тепловому равновесию, однако теперь барионный химический потенциал будет отличен от нуля.

Для теорий такого типа предположим, что для расширяющейся Вселенной существует общий класс слагаемых в лагранжиане следующего вида:

$$\Delta\mathcal{L}(x) = -\sqrt{-\det g} V_\mu(x) J_6^\mu(x), \quad (3.3.21)$$

где  $V_\mu(x)$  — это классическое векторное поле,  $J_6^\mu(x)$  — это ток, соответствующий барионному числу (для которого  $J_6^0(x)$  — барионная плотность, она не инвариантна относительно С и СР). Было выдвинуто два предположения: векторное поле может иметь вид  $V_\mu = M^{-1}\partial_\mu\varphi$ , где  $\varphi$  — это некоторое скалярное поле<sup>51)</sup> и  $M$  обозначает некоторую большую массу; либо векторное поле может иметь вид  $V_\mu = M^{-2}\partial_\mu R$ , где  $R$  — это скалярная кривизна<sup>52)</sup>, а  $M$  — опять некоторая большая масса. В любом случае, изотропность и однородность метрики Робертсона—Уокера требует равенства  $V_i$  нулю, а  $V_0$  должна быть функцией только времени. Тогда данное взаимодействие сдвигает энергию состояния одной частицы типа  $i$  с барионным числом  $b_i$  на величину  $\Delta E_i = V_0(t)b_i$ . В тепловом (а также химическом) равновесии плотность барионного числа будет

$$n_6(t) = \sum_i b_i g_i \int \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \left[ \exp\left(\frac{\sqrt{p^2 + m_i^2} + b_i V_0(t)}{k_B T(t)}\right) \mp 1 \right]^{-1}, \quad (3.3.22)$$

где сумма по  $i$  берется по всем типам частиц (и античастиц);  $g_i$  и  $b_i$  — это число спиновых состояний и барионное число частицы типа  $i$ ; верхний

<sup>51)</sup> A. G. Cohen and D. B. Kaplan, *Phys. Lett. B* **199**, 251 (1987). Возникновение барионного числа подавляется быстрыми осцилляциями скалярного поля; см. работу A. Dolgov, K. Freese, R. Rangarajan, and M. Srednicki, *Phys. Rev. D* **56**, 6155 (1997) [hep-ph/9610405].

<sup>52)</sup> H. Davoudiasl, R. Kitano, G. D. Kribs, H. Murayama, and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 201301 (2004).

и нижний знаки в квадратных скобках, как всегда, выбираются для бозонов и фермионов соответственно. Если не сохраняющие барионное число процессы внезапно прекратятся в некоторый момент времени  $t_1$ , то тогда плотность барионного числа будет

$$n_6(t) = \left( \frac{a(t_1)}{a(t)} \right)^3 \sum_i b_i g_i \int \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \left[ \exp \left( \frac{\sqrt{p^2 + m_i^2} + b_i V_0(t_1)}{k_B T(t_1)} \right) \mp 1 \right]^{-1} \quad (3.3.23)$$

Безусловно, для  $V_0 = 0$  взаимное сокращение вкладов барионов и антибарионов вынуждает данное выражение обращаться в ноль. Поскольку известно, что соотношение барионы/энтропия мало, ожидается, что  $V_0(t_1)$  будет мало; в первом порядке по  $V_0(t_1)$  плотность барионного числа для  $t > t_1$  будет

$$n_6(t) = - \left( \frac{a(t_1)}{a(t)} \right)^3 \frac{V_0(t_1)}{k_B T(t_1)} \sum_i b_i^2 g_i \times \\ \times \int \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \exp \left( \frac{\sqrt{p^2 + m_i^2}}{k_B T(t_1)} \right) \left[ \exp \left( \frac{\sqrt{p^2 + m_i^2}}{k_B T(t_1)} \right) \mp 1 \right]^{-2} \quad (3.3.24)$$

Похожий механизм также может описывать синтез лептонов.

Решающее подтверждение правильности любой теории синтеза барионов будет состоять в успешном предсказании современного значения отношения числа барионов к числу фотонов.

### 3.4

---

## Холодная темная материя

**Кластер Пуля • Распространенность WIMPs с преобладанием левых частиц • Счастливы • Поиски WIMPs • Аннигиляционное гамма-излучение • Аксионы и аксино**

В разд. 3.2. мы убедились, что рассмотрение космологического нуклеосинтеза приводит к заключению, что большая часть массы во Вселенной сосредоточена *не* в обычной барионной материи, т. е. в атомах и электронах. В гл. 7 будет видно, что данный вывод получает значительную поддержку на основе наблюдений анизотропии реликтового излучения. Таким образом, возникает вопрос — если частицы, из которых состоит большинство массы во Вселенной, не являются барионами, то что они тогда?

Нам известно, что эта материя темная, в том смысле, что она слабо взаимодействует с излучением: так как мы ее не наблюдаем, как и не наблюдаем существенной потери кинетической энергии, необходимой для оседания в галактических дисках, по аналогии с обычным барионным веществом. В част-

ности, это означает, что такие частицы должны быть электрически нейтральными<sup>53)</sup>. Детальное изучение динамики галактических кластеров свидетельствует о том, что частицы темной материи также обязаны быть холодными, т. е. их скорости сильно нерелятивистские<sup>54)</sup>.

Изучение двойного галактического скопления 1E0657–558 (кластер Пуля,  $z=0,296$ ) привело к прямому наглядному доказательству существования темной материи, которая не участвует в не-гравитационных взаимодействиях сама с собой или с обычной барионной материи<sup>55)</sup>. Галактики этого скопления в основном сгруппированы в две различные подсистемы, а разгоряченный газ (наблюдаемый посредством испускаемого им рентгеновского излучения) сконцентрирован между ними. Интерпретация такова, что эти два галактических скопления в прошлом столкнулись. Галактики, у которых шанс испытать близкое столкновение был небольшим, в основном продолжили движение по изначальным траекториям, а облака разгоряченного газа двух галактических скоплений столкнулись и остались вблизи центра двойного скопления. Полная плотность вещества в 1E0657–558 выясняется посредством наблюдения гравитационного отклонения света от более удаленных галактик, расположенных на одном луче зрения с двойным скоплением. (Гравитационное линзирование обсуждается в гл. 9.) Таким способом было обнаружено, что большая часть вещества в 1E0657–558 никак не связана с разгоряченным газом, но ведет себя аналогично тому, как галактики образуют две подсистемы, очевидным образом прошедшие друг сквозь друга, не испытав ощутимого взаимодействия. Отношение массы разгоряченного газа к массе всего вещества оценивается как 1/6, что совпадает со значением  $\Omega_b/\Omega_m$ , найденным ранее в измерениях распространенности дейтерия и фотометрического расстояния в зависимости от красного смещения или на основании анизотропии реликтового излучения.

Теория элементарных частиц предлагает несколько кандидатов на роль частиц, из которых состоит холодная темная материя.

### **A. Слабовзаимодействующие массивные частицы (WIMPs<sup>56)</sup>)**

Массивные частицы могут сохраняться вплоть до настоящего времени в том случае, если они обладают некоторым сохраняющимся аддитивным

<sup>53)</sup> Масс-спектроскопия, т. е. анализ заряженных частиц, содержащихся в образцах вещества согласно отношению их массы к заряду, накладывает особенно сильные ограничения на плотность числа заряженных стабильных частиц любого типа, которые могли остаться после Большого взрыва. Обнаружено, что число электрически заряженных экзотических частиц с массами от 6 до 330 ГэВ составляет лишь  $10^{-21}$  от числа нуклонов, см.: P. F. Smith and J. R. J. Bennett, *Nucl. Phys. B* **149**, 525 (1979).

<sup>54)</sup> P. J. E. Peebles, *Astrophys. J.* **263**, L1 (1983); G. R. Blumenthal, S. M. Faber, J. R. Primack, and M. J. Rees, *Nature* **311**, 517 (1984).

<sup>55)</sup> D. Clowe *et al.*, *Astrophys. J.* **648**, L109 (2006) [astro-ph/0608407].

<sup>56)</sup> WIMP — Weak Interacting Massive Particle — слабовзаимодействующие массивные частицы.

или мультиликативным квантовым числом. Если имеется некоторый, соответствующий этому квантовому числу ненулевой химический потенциал, то конечно же, после того, как все античастицы (или частицы) аннигилируют, некоторые частицы (или античастицы) должны остаться. Но даже если для этих частиц существуют отличные от нуля химические потенциалы, такие что исходные плотности числа частиц и античастиц равны, если они могут аннигилировать только со своими античастицами, то как только их плотности чисел становятся достаточно малы, частота столкновений в итоге становится слишком мала, чтобы обеспечить дальнейшее уменьшение плотности<sup>57)</sup>. Чтобы отличать такие частицы от других частиц, которые могут возникать в процессе аннигиляции, мы будем называть их L-частицами<sup>58)</sup> и предполагать, что они находятся в тепловом и химическом равновесии в течение периода аннигиляции. Для L-частиц и их античастиц скорость аннигиляции в расчете на одну частицу равна  $n\langle\sigma v\rangle$ , где  $n$  — это плотность их числа,  $\langle\sigma v\rangle$  — среднее значение произведения сечений рассеяния при аннигиляции на относительную скорость. Отсюда следует, что скорость уменьшения числа L-частиц в сопутствующем объеме  $a^3$  равна  $na^3 \times n\langle\sigma v\rangle$ . Также существует  $n$ -независимая скорость рождения пар частица-античастица из фона, находящегося в тепловом равновесии. Поскольку это должно сбалансировать скорость аннигиляции при условии, что все находится в тепловом равновесии, в целом приходящаяся на объем  $a^3$  скорость рождения должна быть равна  $n_{\text{равн}}^2 a^3 \langle\sigma v\rangle$ , где  $n_{\text{равн}}$  — это равновесная плотность L-частиц и их античастиц. Таким образом, изменение числа  $na^3$  L-частиц и их античастиц в сопутствующем объеме  $a^3$  задается уравнением Больцмана

$$\frac{d(na^3)}{dt} = -(n^2 - n_{\text{равн}}^2)a^3\langle\sigma v\rangle. \quad (3.4.1)$$

Для очень высоких температур при  $k_B T \gg m_L$  равновесная плотность  $n_{\text{равн}}$  изменяется как  $T^3$ , а  $T$  изменяется как  $1/a$ , поэтому уравнение (3.4.1) имеет решение  $n = n_{\text{равн}}$ . В итоге, когда температура опускается ниже массы L-частиц, равновесная плотность уменьшается настолько, что вклад в уравнение (3.4.1), отвечающий за рождение частиц, становится исчезающе мал, поэтому

$$\frac{d(na^3)}{dt} = -n^2 a^3 \langle\sigma v\rangle. \quad (3.4.2)$$

Решение уравнения (3.4.2) имеет вид

$$\frac{1}{n(t)a^3(t)} = \text{const} + \int \frac{\langle\sigma v\rangle dt}{a^3(t)},$$

<sup>57)</sup> B. W. Lee and S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 165 (1977); D. D. Dicus, E. W. Kolb, and V. L. Teplitz, *Phys. Rev. Lett.* **39**, 168 (1977); E. W. Kolb and K. A. Olive, *Phys. Rev. D* **33**, 1202 (1986).

<sup>58)</sup> От английского «left-over», остаточный. — Прим. перев.

иначе говоря,

$$n(t)a^3(t) = \frac{n(t_1)a^3(t_1)}{1 + n(t_1)a^3(t_1) \int_{t_1}^t \langle \sigma v \rangle a^{-3}(t') dt'},$$

где  $t_1$  — это любой удобный момент времени, выбранный достаточно поздним, чтобы при  $t' > t_1$  вкладом в (3.4.1), отвечающим за рождение частиц, можно было пренебречь.

Важно отметить, что при  $t \rightarrow \infty$  интеграл в знаменателе сходится. Когда основной вклад в плотность энергии возникает за счет релятивистских частиц, знаменатель  $a^3(t)$  растет по закону  $t^{3/2}$ , причем впоследствии, когда основной вклад возникает от нерелятивистских частиц и/или вакуумной энергии, он растет еще быстрее. Помимо этого, если аннигиляция возможна из состояний с нулевым орбитальным угловым моментом, то при низких энергиях  $\sigma v$  стремится к постоянному значению, так что его тепловое среднее  $\langle \sigma v \rangle$  стремится к постоянному значению при низких температурах, откуда следует, что это выполняется и в более поздние времена. При падении температуры вклад состояний с высшими орбитальными угловыми моментами уменьшается, поэтому если аннигиляция s-волны запрещена правилами отбора, то рассматриваемый интеграл сходится еще быстрее. Поскольку он сходится, число частиц в движущемся объеме  $a^3$  стремится к конечному пределу:

$$n(t)a^3(t) \rightarrow \frac{n(t_1)a^3(t_1)}{1 + n(t_1)a^3(t_1) \int_{t_1}^{\infty} \langle \sigma v \rangle a^{-3}(t') dt'}. \quad (3.4.3)$$

Будем считать, что аннигиляция L-частиц и античастиц происходит, когда основной вклад в плотность Вселенной обеспечивается релятивистскими частицами, так что  $a \propto 1/T$ , а время задается уравнением (3.1.14):

$$dt = -2\sqrt{\frac{3}{16\pi G \mathcal{N} a_B}} \frac{dT}{T^3},$$

или, с помощью формулы  $a_B = \pi^2 k_B^4 / 15$  с  $\hbar = c = 1$ ,

$$dt = -\sqrt{\frac{45}{4\pi^3 G \mathcal{N}}} m_L^{-2} \frac{dx}{x^3}, \quad (3.4.4)$$

где  $x \equiv k_B T / m_L$ . Таким образом, уравнение (3.4.1) принимает вид

$$\frac{du(x)}{dx} = B[u^2(x) - u_{\text{равн}}^2(x)], \quad (3.4.5)$$

где  $u(x)$  — это искомая безразмерная величина

$$u \equiv \frac{n}{(k_B T)^3}, \quad (3.4.6)$$

$u_{\text{равн}}(k_B T/m_L)$  — это ее равновесное значение,  $B$  — безразмерный параметр:

$$B = \sqrt{\frac{45}{4\pi^3 G N}} m_L \langle \sigma v \rangle. \quad (3.4.7)$$

Остаточное значение  $n/(k_B T)^3$  зависит только от  $B$  и от спина L-частиц, которые необходимо знать, чтобы вывести формулу для  $u_{\text{равн}}$ :

$$u_{\text{равн}}(x) = \frac{2s_L + 1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{4\pi y^2 dy}{\exp(\sqrt{x^{-2} + y^2}) \pm 1}, \quad (3.4.8)$$

где  $y \equiv p/(k_B T)$ , и как обычно, выбор знака «+» соответствует фермионам, а знака «-» — бозонам.

Например, при  $k_B T \ll m_L$  тяжелые частицы становятся нерелятивистскими, и среднее значение сечения рассеяния аннигиляции при низких энергиях, умноженное на скорость, постоянно:

$$\langle \sigma v \rangle = \frac{G_{\text{wk}}^2 m_L^2 \mathcal{F}}{2\pi}, \quad (3.4.9)$$

где  $G_{\text{wk}} = 1,1664 \times 10^{-5}$  ГэВ $^{-2}$  — константа слабого взаимодействия,  $\mathcal{F}$  — поправочный множитель, отвечающий за число каналов аннигиляции и другие подробности взаимодействий, вызывающих аннигиляцию. Находим:

$$B = 1,59 \times 10^8 (m_L [\text{ГэВ}])^3 \mathcal{F} N^{-1/2}. \quad (3.4.10)$$

Решения уравнения (3.4.5) при разных значениях  $B$  и  $s_L = 1/2$  показаны на рис. 3.2. Мы видим, что  $u(x)$  резко падает с  $B$ -независимого значения при  $x > 1$  до  $B$ -зависимого значения при  $x < 0,01$ .

Для масс  $m_L$  порядка нескольких ГэВ величина  $B$  достаточно велика, и для таких значений (и  $s_L = 1/2$ ) асимптотическое значение  $u$  хорошо аппроксимируются (см. сноску 57):

$$u(0) \simeq 6,1 B^{-0,95}. \quad (3.4.11)$$

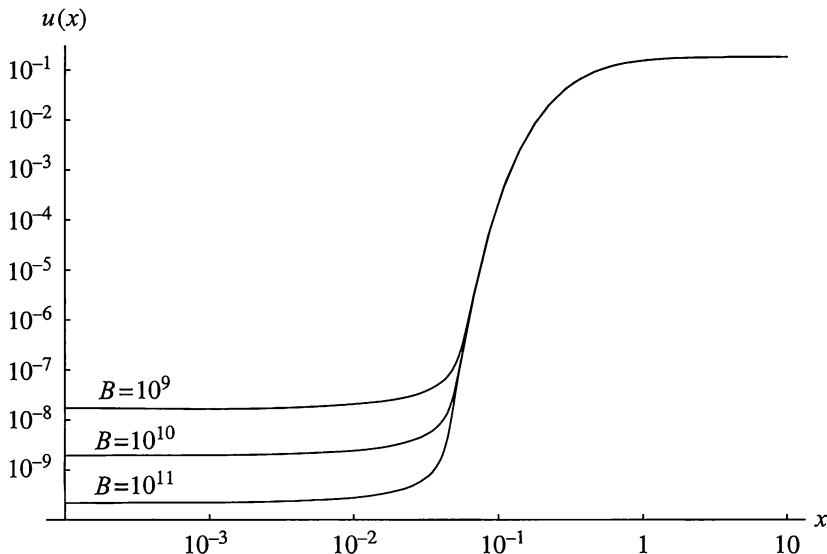
---

Когда второе слагаемое в знаменателе формулы (3.4.3) много меньше единицы, значение  $u(0) \propto B^{-1}$  соответствует нашим ожиданиям.

---

Тогда современная плотность массы таких тяжелых частиц и античастиц (вспоминая, что электрон-позитронная аннигиляция увеличивает фотонную температуру на фактор  $(11/4)^{1/3}$ ) равна

$$\rho_L = 2m_L u(0) \left( \frac{4}{11} \right) (k_B T_{\gamma 0})^3 = (2,15 \times 10^{-28} \text{ г/см}^3) (m_L [\text{ГэВ}])^{-1,85} \left( \frac{\mathcal{F}}{\sqrt{N}} \right)^{-0,95}, \quad (3.4.12)$$



**Рис. 3.2.** Функция  $u(x) \equiv n/(k_B T)^3$  от  $x \equiv k_B T/m_L$  для частицы темной материи со спином 1/2 и массой  $m_L$  при различных значениях параметра  $B$ , задаваемого формулой (3.4.7)

или, по другому,

$$\Omega_L \equiv \frac{8\pi G \rho_L}{3H_0^2} = 11,5 h^{-2} (m_L [\text{ГэВ}])^{-1,85} \left( \frac{\mathcal{F}}{\sqrt{\mathcal{N}}} \right)^{-0,95} \quad (3.4.13)$$

Отметим, что  $\Omega_L$  — это убывающая функция  $m_L$ , потому как тяжелые L-частицы аннигилируют эффективнее легких частиц. Если предположить, что остаточные тяжелые частицы составляют большинство плотности космической массы, то  $\Omega_m \simeq \Omega_L$ , и поэтому

$$m_L \left( \frac{\mathcal{F}}{\sqrt{\mathcal{N}}} \right)^{0,51} \simeq 3,7 (\Omega_m h^2)^{-0,54} \text{ ГэВ}, \quad (3.4.14)$$

равное 10 ГэВ при  $\Omega_m h^2 = 0,15$ . С другой стороны, данное значение является нижним пределом массы таких частиц.

Кстати, в том случае, когда суммарное барионное число во Вселенной равно нулю, аналогичные доводы применимы к аннигиляции нуклонов и антинуклонов. Очевидно, что разница теперь в том, что  $\langle \sigma v \rangle$  по порядку величины приблизительно равно  $m_\pi^{-2}$ , а не  $G_{\text{wk}}^2 m_L^2$ . Таким образом, плотность остаточных барион-антибарионных пар можно оценить, приняв  $m_L = m_N$ ,  $\mathcal{N} \approx 10$  и заменяя  $\mathcal{F}$  в выражении (3.4.13) на  $2\pi m_\pi^{-2}/(G_{\text{wk}}^2 m_N^2) = 2,7 \times 10^{12}$ , так что (3.4.13) приведет к параметру барион-антибарионной плотности  $\Omega_{B+\bar{B}} h^2 \approx 6 \times 10^{-11}$ . Это значительно меньше современного наблюдаемого значения параметра плотности барионов, что исключает возможность того,

что окружающие нас барионы не успели проаннигилировать в изначально барион-антибарион симметричной Вселенной, после чего они каким-то образом оказались отделены от антибарионов.

Теперь давайте вернемся к холодной темной материи. Изначально считалось, что L-частицами могут быть тяжелые нейтрино. Они не могли принадлежать ни одному из трех известных типов нейтрино, которые, как обсуждалось в конце разд. 3.1, имеют массы, не превышающие по порядку величины 1 эВ, однако могло существовать четвертое поколение очень тяжелых лептонов, для которых смешивание с известными лептонами было исчезающе малым. Масса нового тяжелого нейтрино должна была быть больше  $m_Z/2 = 45$  ГэВ, для того чтобы блокировать распад  $Z^0$  на тяжелое нейтрино и антинейтрино. В противном случае прекрасное согласие между теорией и экспериментом по измерению полной скорости распада частицы  $Z^0$  оказалось бы нарушено. Если бы L-частицы были тяжелыми нейтрино, то поправочный множитель  $\mathcal{F}$  в уравнении (3.4.9) оказался бы порядка числа сортов частиц, на которые могут распадаться L-частицы. Если очень приблизительно предположить, что  $\mathcal{F} \approx \mathcal{N} \approx 100$ , то выражение (3.4.13) даст  $\Omega_L h^2 \leq 10^{-3}$ . Поэтому сомнительно, что новые тяжелые нейтрино могут составлять холодную темную материю.

Наиболее правдоподобным кандидатом на роль L-частиц является одна из новых частиц, обусловленных суперсимметрией<sup>59)</sup>. Во многих суперсимметрических теориях есть мультипликативное сохраняющееся число  $R$ , принимающее значение +1 для всех известных частиц Стандартной модели и -1 для их суперпартнеров.

---

Мультипликативное сохранение означает, что *произведение R* для всех частиц в начальном и конечном состояниях любой реакции совпадают.

---

Помимо прочего, из данного закона сохранения следует, что легчайшая частица с  $R = -1$  (которую часто называют LSP, от light supersymmetric particle) *стабильна*, хотя две такие частицы могут аннигилировать в обычные частицы с  $R = +1$ . Для того, чтобы судить, какая из частиц является легчайшей частицей с  $R = -1$ , необходимо различать два возможных способа нарушения суперсимметрии<sup>60)</sup>. В обоих подходах суперсимметрия спонтанно нарушается непертурбативными эффектами в некотором скрытом секторе частиц с типичной большой массой  $M_S$ , взаимодействующих посредством некоторого сильного взаимодействия, которое не чувствуется известными частицами Стандартной модели или их суперпартнерами. Нарушение суперсимметрии в скрытом секторе также приводит к возникновению массы у гравитино  $m_g \approx \sqrt{G}M_S^2$  (суперпартнер гравитона со спином 3/2).

<sup>59)</sup> Эта и другие возможности обсуждаются в подробном обзоре G. Bertone, D. Hooper, and J. Silk, *Phys. Rep.* **405**, 279 (2005) [hep-ph/0404175].

<sup>60)</sup> См. КТП, том 3, разд. 28.3.

В рамках первого подхода нарушения суперсимметрии передаются частичкам Стандартной модели и их суперпартнерам посредством электрослабого или обычного сильного взаимодействий Стандартной модели. В этом случае  $M_S$  будет порядка  $100 \text{ ГэВ} \div 100 \text{ ТэВ}$ , масса гравитино не будет превышать величину порядка 1 эВ. Легчайшими частицами с  $R = -1$  будут гравитино, которые слишком легки, чтобы быть составляющими холодной темной материи. Даже если когда-то гравитино находились в равновесии с другими частицами и не распались или не аннигилировали, то с помощью таких же доводов, как в разд. 3.1, заключаем, что плотность их числа была бы сейчас меньше плотности фотонов примерно в  $2/\mathcal{N}$  раз, где  $\mathcal{N}$  — эффективное число состояний релятивистских частиц в тот момент времени, когда гравитино вышли из состояния теплового равновесия. Параметр плотности энергии фотонов с типичной энергией  $k_B T_{\gamma 0}$  определяется уравнением (2.1.8) как  $\Omega_\gamma h^2 = 2,47 \times 10^{-5}$ , поэтому для того, чтобы гравитино составляли холодную темную материю с  $\Omega_m h^2 = 0,15$ , масса гравитино должна быть порядка  $0,15 \mathcal{N} k_B T_{\gamma 0} / (2\Omega_\gamma h^2)$ , которая для  $\mathcal{N} \approx 100$  составляет примерно 70 эВ<sup>61)</sup>. Таким образом, не похоже, чтобы при таком способе нарушения симметрии гравитино составляли холодную темную материю, хотя полностью такую возможность исключать нельзя. Предположительно, все частицы с  $R = -1$ , следующие по массе после самых легких, распались за несколько миллиардов лет на гравитино и обычные частицы, поэтому они тоже не могут составлять холодную темную материю.

---

Скорость распада на релятивистские гравитино со спиральностями  $\pm 3/2$  будет подавлена в  $G$  раз, но частицы с  $R = -1$  могут распадаться на гравитино со спиральностями  $\pm 1/2$  со скоростью, подавленной лишь фактором  $M_S^{-2}$  и калибровочными константами связи Стандартной модели в некоторой степени.

---

Нарушение суперсимметрии в другом подходе осуществляется гравитационным полем и его суперпартнерами, и поскольку эти взаимодействия очень слабы, то соответственно  $M_S$  должно быть большим, по порядку величины от  $10^{11}$  до  $10^{13}$  ГэВ. Масса гравитино будет величиной такого же порядка, как и массы суперпартнеров известных частиц Стандартной модели, поэтому оно может быть, а может и не быть легчайшей частицей с  $R = -1$ .

Если легчайшая частица с  $R = -1$  не является гравитино, то она может быть либо снейтрино (спин равен 0, суперпартнер нейтрино), либо нейтралино (спин равен  $1/2$ , суперпартнер для некоторой комбинации нейтрального калибровочного и скалярного бозонов в Стандартной модели<sup>62)</sup>). Какая бы из перечисленных частиц ни была самой легкой, процесс распада будет вовлекать обмен частицей с  $R = -1$ , масса которой  $\tilde{M}$ , как ожидается, будет при-

<sup>61)</sup> В работе H. Pagels and J. R. Primack, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 223 (1982) было впервые отмечено условие на массу гравитино меньше чем 1 кэВ, чтобы не возникало  $\Omega_m \gg 1$ .

<sup>62)</sup> S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 387 (1983).

близительно порядка 1 ТэВ. Следовательно, ее амплитуда аннигиляции (помимо факторов 2 и  $\pi$ ) будет порядка  $g^2/\tilde{M}^2$ , где  $g$  является типичной константой электрослабого взаимодействия. Это меньше чем константа связи слабого взаимодействия на множитель порядка  $m_W^2/\tilde{M}^2$ , поэтому фактор ветвления  $\mathcal{F}$  в постоянной скорости аннигиляции (3.4.9) будет порядка  $m_W^4 \mathcal{N}_A/\tilde{M}^4 \approx \approx 10^{-4} \mathcal{N}_A$ , где  $\mathcal{N}_A$  — это число каналов аннигиляции. Выбирая  $\mathcal{N}_A/\sqrt{\mathcal{N}} \approx 1$ , из уравнения (3.4.14) находим, что легчайшая частица с  $R = -1$  (если это не гравитино) будет составлять холодную темную материю с  $\Omega_m h^2 \simeq 0,15$ , в том случае если ее масса будет порядка 1 ТэВ. Приведенные рассуждения аналогичны оценкам масс суперпартнеров частиц Стандартной модели в типичных суперсимметричных моделях, что является обстоятельством, в значительной степени вселяющим надежду на то, что частицы темной материи будут обнаружены в экспериментах с высокими энергиями на ускорителях.

Космологические рассмотрения исключают возможность того, что в данном подходе к нарушению суперсимметрии легчайшей частицей с  $R = -1$  будет гравитино. В отличие от частиц Стандартной модели, гравитино имеет двухчастичную амплитуду аннигиляции, пропорциональную двум множителям<sup>63)</sup> константы связи гравитационного взаимодействия  $\sqrt{G}$ , поэтому скорость аннигиляции пропорциональна  $G^2$ , вследствие чего она слишком мала, чтобы аннигиляция играла какую-либо значительную роль в уменьшении плотности числа гравитино. Если бы сейчас, в силу аннигиляции частиц после отделения гравитино, плотность числа гравитино была, скажем 1 % от плотности числа фотонов, то, как мы убедились, современная плотность массы гравитино не будет превышать космологических ограничений, если масса гравитино меньше приблизительно 100 эВ. Это полностью противоречит массам гравитино, предсказываемым в теориях гравитации, посредством которых происходит нарушение суперсимметрии. Однако если гравитино не являются легчайшими частицами с  $R = -1$ , тогда они могут распадаться, что приводит к уменьшению текущей величины плотности массы до приемлемых значений, даже если масса отдельного гравитино достаточно велика<sup>64)</sup>. Взаимодействие гравитино с другими полями пропорционально  $\sqrt{G}$ , поэтому из размерных соображений скорость распада покоящегося гравитино  $\Gamma_g$  приблизительно равна величине порядка  $G m_g^3$ . Сравним со скоростью расширения Вселенной, которая при температуре  $T$  равна по порядку величины  $\sqrt{G}(k_B T)^4$ . (Множители порядка 10–100 здесь игнорируются, включая те, которые содержат константы связи негравитационных взаимодействий и число типов частиц.) При уменьшении температуры Вселенной до значения  $k_B T \approx m_g$ ,

<sup>63)</sup> Это не относится к фактору  $\sqrt{G}$ , входящему в формулу для массы гравитино, потому что он умножается на масштаб нарушения суперсимметрии: для нарушения суперсимметрии, осуществляемого посредством гравитационных полей данный масштаб очень велик, что приводит к массе гравитино, сравнимой с массой других суперсимметричных частиц.

<sup>64)</sup> S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 223 (1982).

при котором гравитино становятся сугубо нерелятивистскими, отношение их скорости распада к скорости расширения по порядку величины равно  $\sqrt{G} m_g = m_g/m_{\text{планк}} \ll 1$ , поэтому распады гравитино существенны только тогда, когда гравитино становятся нерелятивистскими. Как мы уже убедились, плотность их числа будет порядка  $(k_B T)^3$ , поэтому плотность энергии гравитино будет порядка  $m_g (k_B T)^3$ , что больше плотности энергии порядка  $(k_B T)^4$  для фотонов и других релятивистских частиц, находящихся в тепловом равновесии при температуре  $T$ , поэтому она дает определяющий вклад в фоновое гравитационное поле, контролирующее скорость расширения Вселенной. Таким образом, скорость расширения при таких условиях по порядку величины равна  $\sqrt{G m_g (k_B T)^3}$ , и распад гравитино становится существенным, когда она сравнивается со скоростью распада гравитино порядка  $G m_g^3$ , что происходит при температуре

$$k_B T_g \approx G^{1/3} m_g^{5/3}.$$

После распада энергия гравитино должна преобразоваться в энергию фотонов и других релятивистских частиц, поэтому температура  $T'_g$  после распада связана с вычисленной выше температурой  $T_g$  условием сохранения энергии

$$m_g T_g^3 \approx T'_g{}^4,$$

откуда следует

$$k_B T'_g \approx G^{1/4} m_g^{3/2}.$$

В частности, поскольку  $k_B T_g \ll m_g$ , имеем  $T'_g \gg T_g$ . Если бы  $T_g$  было меньше температуры  $T_h \simeq 0,1$  МэВ, при которой протекает космологический нуклеосинтез, то до его начала по-прежнему был бы избыток нейтрино, что привело бы к более высокой плотности энергии и, следовательно, к более высокой скорости расширения. Тогда для распада свободных нейтронов, до того как они будут захвачены сложными ядрами, останется меньше времени, и следовательно во время нуклеосинтеза возникнет больше гелия. Помимо этого впоследствии отношение плотностей фотонов к плотности протонов возрастет за счет распада гравитино, поэтому данное отношение во время нуклеосинтеза будет значительно меньше, чем предсказывают обычные оценки на основе текущей температуры реликтового излучения. Далее, посредством ядерных реакций большее количество нейтронов окажется внутри гелия, и современная распространенность дейтерия будет меньше. Таким образом, текущее соответствие между теорией и наблюдениями распространенности гелия и дейтерия во Вселенной будет нарушено. Проблемы можно избежать, если  $T_g > 0,1$  МэВ, однако также можно потребовать выполнения значительно более слабого условия  $T'_g > 0,4$  МэВ, потому как тогда, после распада гравитино, температура будет достаточно высока и избыток гелия исчезнет, и пока произойдет повторное охлаждение Вселенной, нуклеосинтез начнется заново. Данное условие сводится к  $m_g > 10$  ТэВ. Этот предел на  $m_g$  соответствует масштабу нарушения суперсимметрии  $M_S > 10^{11}$  ГэВ при  $m_g \approx \sqrt{G} M_S^2$ .

Возможно, что космические WIMPs можно будет обнаружить в наблюдениях отдачи после упругих столкновений с атомными ядрами<sup>65)</sup>, например, в рассеянии тяжелых нейтрино посредством слабого взаимодействия нейтральных токов<sup>66)</sup>. Подобные исследования проводятся рядом коллабораций: DAMA<sup>67)</sup>, CRESST<sup>68)</sup>, EDELWEISS<sup>69)</sup>, UK Dark Matter<sup>70)</sup>, CDMS<sup>71)</sup> и WARP<sup>72)</sup>. Предполагая, что WIMPs находятся в более-менее неподвижном состоянии в гало нашей Галактики, движение Солнечной системы сквозь гало порождает «ветер» WIMPs, скорость  $v_w$  которого равна приблизительно 220 км/с. При соударении ядра массы  $Am_N$  с WIMP массы  $m_w \gg Am_N$ , движущимся с этой скоростью, ядро испытает отскок с типичной скоростью порядка  $v_w$ , вследствие чего его кинетическая энергия будет порядка  $Am_N v_w^2 / 2 \approx 100 A$  эВ. Такие отскоки можно обнаружить в измерениях ионизации атомов отскакивающими ядрами, или в наблюдениях излученного этими атомами света, или в измерениях вибраций в кристаллической решетке детектора. Значение массовой плотности  $\rho_h$  в гало нашей Галактики вблизи Земли оценивается из наблюдений движения звезд приблизительно как 0,3 ГэВ/см<sup>3</sup>, что для плотности числа WIMPs с массой  $m_w$  дает  $\rho_h/m_w$ , из чего скорость упругого рассеяния может быть вычислена для любых предполагаемых значений массы WIMP и его сечения рассеяния. При этом отсутствие наблюдаемых отскоков ядер исключает из рассмотрения некоторую область плоскости перечного сечения рассеяния для  $m_w$ .

Величайшая проблема для подобного рода экспериментов состоит в отделении настоящих WIMPs от фона, создаваемого естественной радиоактивностью и космическими лучами. Самое лучшее, на что можно надеяться в получении помощи при отделении искомых событий от фона, это использовать движение Земли вокруг Солнца<sup>73)</sup>. Орбитальное движение Земли добавляет к скорости ветра WIMPs примерно 15 км/с летом и вычитает такую же величину зимой (хотя это зависит от используемой модели гало), поэтому можно ожидать 7 % сезонную модуляцию настоящих WIMP-событий. Коллаборация

<sup>65)</sup> Обзор текущих экспериментов приведен в работах Y. Ramachers, *Nucl. Phys. B. Proc. Suppl.* [astro-ph/0211500]; G. Chardin, in *Cryogenic Particle Detection*, ed. C. Ens (Springer, Heidelberg, 2005) [astro-ph/0411503]; R. J. Gaitskell, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **54**, 315 (2004); J. Ellis, K. Olive, Y. Santoso, and V. C. Spanos, *Phys. Rev. D* **71**, 095007 (2005) [hep-ph/0502001]; K. Freese, *Nucl. Instrum. Meth. A* **559**, 337 (2006) [astro-ph/0508279]; L. Baudis, *Int. J. Mod. Phys. A* **21**, 1925 (2006) [astro-ph/0511805].

<sup>66)</sup> A. Drucker and L. Stodolsky, *Phys. Rev. D* **30**, 2295 (1985); M. Goodman and E. Witten, *Phys. Rev. D* **31**, 3059 (1985).

<sup>67)</sup> R. Bernabei *et al.*, *Phys. Lett. B* **480**, 23 (2000).

<sup>68)</sup> G. Angloher *et al.*, *Astropart. Phys.* **23**, 325 (2005) [astro-ph/0408006].

<sup>69)</sup> V. Sanglard *et al.*, *Phys. Rev. D* **71**, 122002 (2005) [astro-ph/0503265].

<sup>70)</sup> G. J. Alner *et al.*, *Astropart. Phys.* **23**, 444 (2005).

<sup>71)</sup> D. S. Akerib *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 211301 (2004) [astro-ph/0405033], and [astro-ph/0507190].

<sup>72)</sup> P. Benetti *et al.*, [astro-ph/0701286].

<sup>73)</sup> A. K. Drucker, K. Freese, and D. N. Spergel, *Phys. Rev. D* **33**, 3495 (1986); K. Freese, J. A. Frieman, and A. Gould, *Phys. Rev. D* **37**, 3388 (1988).

DAMA (DArk MAtter) сообщила об измерении именно такой модуляции, однако почти вся область плоскости поперечного сечения рассеяния для  $m_w$ , которая соответствуют такому наблюдению, оказалась впоследствии исключена (на основе другой схемы наблюдений) коллаборацией CDMS (Cold Dark Matter Search). На данный момент экспериментально установлен верхний предел на эффективное сечение рассеяния примерно от  $10^{-42}$  до  $10^{-43} \text{ см}^2$  при  $m_w > 50 \text{ ГэВ}$ . При  $m_w < 50 \text{ ГэВ}$  этот предел значительно выше, при этом точное значение зависит от распределения WIMPs в галактическом гало<sup>74)</sup>.

---

Для сравнения: ожидается, что эффективное сечение для низкоэнергетического рассеяния нейтралино на нуклонах в суперсимметричных теориях будет меньше чем примерно  $10^{-41} \text{ см}^2$ .

---

Помимо этого существует возможность косвенного обнаружения WIMPs в наблюдениях гамма-излучения или других частиц, возникающих при аннигиляции пар WIMPs в областях с высокой WIMP-концентрацией<sup>75)</sup>. Гамма-излучение задерживается земной атмосферой, поэтому WIMPs должны быть обнаружены в ливнях заряженных частиц, возникающих в атмосфере, например, с помощью черенковского излучения этих частиц или на гамма-телескопах, установленных на метеорологических зондах или спутниках на орбите за пределами земной атмосферы. Если WIMP-WIMP аннигиляция порождает только пару гамма-квантов, то каждый из них будет обладать энергией, равной массе WIMP, что приведет к совершенно четкому указанию на существование WIMP. Пока что не было обнаружено никаких указаний на подобного рода монохроматическое гамма-излучение. Безусловно, помимо гамма-излучения, аннигиляция может порождать другие частицы или частицы, распад которых порождает гамма-излучение, но в любом случае это приведет к непрерывному спектру гамма-излучения, который будет гораздо труднее обрабатывать в целях поиска частот, характерных для WIMP-аннигиляции. Коллаборации Cangaroo-II<sup>76)</sup> и атмосферный черенковский детектор HESS<sup>77)</sup> сообщили об обнаружении источников гамма-излучения с очень разными непрерывными спектрами практически в центре нашей галактики, которые можно интерпретировать как возникающие при аннигиляции WIMPs с массой примерно 1 ТэВ или 19 ТэВ, соответственно.

Идущее из галактического центра монохроматическое гамма-излучение регистрировалось в течение десятилетий, но его энергия составляла 511 кэВ, что соответствует аннигиляции электрон-позитронных пар, а не WIMP-WIMP

<sup>74)</sup> A. Bottino, F. Donato, N. Fornengo, and S. Scopel, *Phys. Rev. D* **72**, 083521 (2005) [[hep-ph/0508270](#)].

<sup>75)</sup> См. обзор в работе P. Gondolo, [[hep-ph/0501134](#)].

<sup>76)</sup> K. Tsuchiya *et al.*, *Astrophys. J.* **606**, L115 (2004) [[astro-ph/0403592](#)].

<sup>77)</sup> D. Horns, *Phys. Lett. B* **607**, 225 (2005). Однако см. F. Aharonian, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 221102 (2006).

аннигиляции. В 1970 году два поднятых на метеорологических зондах гамма-детектора обнаружили существование спектральной линии гамма-излучения вблизи 500 кэВ, идущего приблизительно из центра нашей Галактики<sup>78)</sup>. С тех пор точность этого наблюдения была значительно повышена с помощью спутника INTEGRAL (английская аббревиатура International Gamma-Ray Astrophysics Laboratory)<sup>79)</sup>, который обнаружил спектральную линию гамма-излучения, идущего из галактического центра, с энергией 511 кэВ с разбросом значений примерно 3 кэВ. Возможно, что данная линия объясняется распадом относительно легких WIMPs на электрон-позитронные пары, при этом позитроны теряют энергию на ионизацию, после чего они аннигилируют с окружающими электронами<sup>80)</sup>.

Есть также сообщения об избытке позитронов в космических лучах, обнаруженному в эксперименте HEAT<sup>81)</sup>, который может объясняться, а может и нет, WIMP-аннигиляцией. Совсем недавно было предложено, что наблюдаемый спутником WMAP избыток микроволнового излучения по направлению из центра нашей Галактики может возникать при синхротронном излучении релятивистских электронов и позитронов, порождаемых WIMP-аннигиляцией<sup>82)</sup>.

Пока слишком рано делать какие-то определенные выводы на основе любого из перечисленных выше экспериментов, рассматривающих WIMPs как возможные частицы темной материи.

## B. Аксионы и аксино

Аксионы<sup>83)</sup> — это легкие нейтральные частицы, возникновение которых неизбежно<sup>84)</sup> при спонтанном нарушении симметрии в модели, предложен-ной для объяснения отсутствия нарушения СР-инвариантности непертурбативными эффектами сильных взаимодействий. Для наших текущих целей нам надо знать лишь то, что определяющая часть эффективного действия (с  $\hbar = c = 1$ ), описывающего акционное поле  $\varphi$ , принимает вид (B.63) с потенциалом  $V(\varphi) = m_a^2 \varphi^2/2$ :

$$I[\varphi] = \int d^4x \sqrt{-\det g} \left( -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \frac{1}{2} m_a^2 \varphi^2 \right). \quad (3.4.15)$$

<sup>78)</sup> W. N. Johnson, III, F. R. Harnden, Jr., and R. C. Haymes, *Astrophys. J.* **172**, L1 (1972).

<sup>79)</sup> P. Jean *et al.*, *Astron. Astrophys.* **407**, 55 (2003) [astro-ph/0309484]; J. Knöldlseder *et al.*, *Astron. Astrophys.* **411**, 457 (2003) [astro-ph/0309442]; E. Churazov *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **357**, 1377 (2005) [astro-ph/0411351]; J. Knöldlseder *et al.*, *Astron. Astrophys.* **441**, 513 (2005) [astro-ph/0506026]; G. Weidenspointer *et al.*, *Astron. Astrophys.* **450**, 1013 (2006) [astro-ph/0601673].

<sup>80)</sup> C. Boehm, D. Hooper, J. Silk, M. Casse, and J. Paul, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 1301 (2004) [astro-ph/0309686].

<sup>81)</sup> S. W. Barwick *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 390 (1995); *Astrophys. J.* **482**, L191 (1997).

<sup>82)</sup> D. Hooper, D. P. Finkbeiner, and G. Dobler, 0705.3655.

<sup>83)</sup> См. КТП, том 2, разд. 23.6. Также см. обзорную статью P. Sikivie в *Axiions — Lecture Notes in Physics*, ed. M. Kuster (Springer-Verlag, to be published) [astro-ph/0610440].

<sup>84)</sup> S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 223 (1978); F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **40**, 279 (1978).

Масса аксиона  $m_a$  является сложной функцией температуры, однако для температур ниже  $10^{12}$  К она принимает известное постоянное значение, связанное с масштабом энергий  $M$ , на котором нарушается симметрия Печчеи—Квинн:

$$m_{a0} = \frac{F_\pi m_\pi}{M} \frac{\sqrt{m_d m_u}}{m_d + m_u} \simeq \frac{13 \text{ МэВ}}{M [\text{ГэВ}]} \quad (3.4.16)$$

---

Здесь  $F_\pi = 184$  — амплитуда распада пиона,  $m_d$  и  $m_u$  — массы  $d$ -кварка и  $u$ -кварка, возникающие в лагранжиане квантовой хромодинамики, для которого  $m_d/m_u \simeq 1,85$ .

---

В исходной модели Печчеи—Квинн<sup>85)</sup>  $M$  имела порядок масштаба нарушения электрослабой симметрии  $M \approx 100$  ГэВ, но вскоре было осознано, что такое значение не соответствует экспериментальным данным. Аксионные поля взаимодействуют с обычной материей через множитель  $\partial_\mu \varphi / M$ , так что при  $M \geq 100$  ГэВ аксионы взаимодействуют настолько слабо, что они без потерь энергии покидают активную зону реакторов или внутренности звезд. Скорость рождения аксионов пропорциональна  $1/M^2$ , поэтому отсутствие наблюдаемых эффектов эмиссии аксионов от звезд и ядерных реакторов устанавливает *нижний* предел для  $M$ , и следовательно, верхний предел для  $m_a$ . В частности, пределы скорости охлаждения красных гигантов посредством аксионной эмиссии дают<sup>86)</sup>  $M > 10^7$  ГэВ, а наблюдения сверхновой SN1987A указывают<sup>87)</sup>, что  $M > 10^{10}$  ГэВ. Впоследствии было предложено обобщение модели Печчеи—Квинн<sup>88)</sup>, в которой  $M$  является произвольным параметром. Как будет показано, космологические рассмотрения обеспечивают нас *верхним* пределом на  $M$ <sup>89)</sup>, что вместе с вышеупомянутыми нижними пределами оставляет узкое окно для допустимых значений.

Предполагается, что космологическое аксионное поле пространственно однородно<sup>90)</sup>. Для метрики Робертсона—Уокера плотность энергии и давле-

<sup>85)</sup> R. D. Peccei and H. Quinn, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 1440 (1977); *Phys. Rev. D* **16**, 1791 (1977).

<sup>86)</sup> D. A. Dicus, E. W. Kolb, V. I. Teplitz, and R. V. Wagoner, *Phys. Rev. D* **18**, 1829 (1978); *Phys. Rev. D* **22**, 839 (1980).

<sup>87)</sup> Обзоры представлены в работах M. S. Turner, *Phys. Rep.* **197**, 67 (1990); G. G. Raffelt, *Phys. Rep.* **198**, 1 (1990); P. Sikivie, см. сноску 83.

<sup>88)</sup> J. E. Kim, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 103 (1979); M. Dine, W. Fischler, and M. Srednicki, *Phys. Lett. 104B*, 199 (1981); M. B. Wise, H. Georgi, and S. L. Glashow, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 402 (1981).

<sup>89)</sup> J. Preskill, M. B. Wise, and F. Wilczek, *Phys. Lett. 120B*, 127 (1983); L. F. Abbott and P. Sikivie, *Phys. Lett. 120B*, 127 (1983); M. Dine and W. Fischler, *Phys. Lett. 120B*, 137 (1983). Обзоры см. в работах J. E. Kim, *Phys. Rep.* **150**, 1 (1987); M. S. Turner, *Phys. Rep.* **197**, 68 (1990).

<sup>90)</sup> Компоненты с ненулевым волновым числом несомненно присутствуют, но их плотность энергии убывает быстрее плотности энергии пространственно однородного когерентного поля  $\varphi(t)$ .

ния определяются уравнениями (B.66) и (B.67) в виде

$$\rho_a = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m_a^2\varphi^2, \quad p_a = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}m_a^2\varphi^2, \quad (3.4.17)$$

так что соотношение (1.1.32), выражающее закон сохранения энергии (либо уравнение Эйлера—Лагранжа, полученное непосредственно из действия (3.4.15)), приводит к полевому уравнению

$$\ddot{\varphi} + 3H(t)\dot{\varphi} + m_a^2(t)\varphi = 0. \quad (3.4.18)$$

В ранние времена  $H(t) \gg m_a(t)$ , поэтому членом с  $m_a(t)$  можно пренебречь, тогда уравнение (3.4.18) имеет решения  $\dot{\varphi} = \text{const}$  и  $\dot{\varphi} \propto 1/a^3$ . Отбросив сингулярное решение, мы видим, что в ранние времена  $\varphi(t)$  заморожена на значении  $\varphi_0$ , которое (без тонкой подстройки), как ожидается, будет порядка  $M$ . Позже, когда  $H(t)$  станет меньше  $m_a(t)$ , функция  $\varphi(t)$  начинает быстро осциллировать, так что в этом случае уравнение (3.4.18) может быть решено с помощью ВКБ-приближения

$$\varphi(t) \rightarrow \varphi_1 \left( \frac{a(t_1)}{a(t)} \right)^{3/2} \cos \left( \int_0^t m_a(t) dt + \alpha \right), \quad (3.4.19)$$

где  $t_1$  — момент времени, в который  $H(t_1) = m_{a0}$ ,  $\varphi_1$  — константа порядка  $\varphi_0 \approx M$ , а  $\alpha$  — фаза, определение которой требует более тщательного анализа, которого, к счастью, можно избежать.

---

Например, если  $m_a(t)$  имеет постоянное значение  $m_{a0}$  и в рассматриваемую эру во Вселенной преобладает излучение, то  $\varphi_1 = 2^{3/2}\pi^{-1/2}\Gamma(5/4)$ ,  $\varphi_0 = 1,446\varphi_0$  и  $\alpha = -3\pi/8$ .

---

Поскольку  $a(t)$  при  $m_a \gg H$  изменялась гораздо более медленно, чем фаза косинуса, то плотность энергии в поздние времена задается уравнением (3.4.17) как

$$\rho_a(t) \rightarrow \frac{1}{2}m_a^2\varphi_1^2 \left( \frac{a(t_1)}{a(t)} \right)^3 \quad (3.4.20)$$

Для пролонгации этой формулы вплоть до современной эпохи заметим, что если в момент  $t_1$  во Вселенной преобладало излучение, причем  $\mathcal{N}_1$  — это эффективное число сортов с массами сильно меньше  $k_B T(t_1)$  (учитывая каждое спиновое состояние частиц и античастиц по отдельности, плюс дополнительный фактор  $7/8$  для фермионов), то фотонная температура в настоящее время равна

$$T_{\gamma 0} = \mathcal{N}_1^{1/3} T(t_1) \frac{a(t_1)}{a(t_0)},$$

где фактор  $\mathcal{N}_1^{1/3}$  был вставлен для учета нагревания фотонов при аннигиляции частиц и античастиц в промежуток времени между  $t_1$  и  $t_0$ . Температуру  $T(t_1)$  можно определить заметив, что скорость расширения в момент времени  $t_1$  равна

$$m_a \equiv H(t_1) = \sqrt{\frac{8\pi G \mathcal{N}_1 a_B T^4 / 2}{3}} = \sqrt{\frac{4\pi^3 G \mathcal{N}_1}{45}} (k_B T_1)^2.$$

Тогда, подставляя эту формулу в выражение (3.4.20), получим современную величину акционной плотности энергии:

$$\rho_a(t_0) \simeq \frac{1}{2} m_a^{1/2} \mathcal{N}_1^{-1/4} \varphi_0^2 \left( \frac{4\pi^3 G}{45} \right)^{3/4} (k_B T_{\gamma 0})^3. \quad (3.4.21)$$

Ожидается, что  $\varphi_0$  того же порядка величины, что и масштаб нарушения симметрии  $M$ , поэтому, воспользовавшись соотношением (3.4.16) и исключая все множители порядка единицы, получим

$$\rho_a \approx \frac{F_\pi^2 m_\pi^2 G^{3/4} (k_B T_{\gamma 0})^3}{m_a^{3/2}} \quad (3.4.22)$$

Аналогично, из выражения для плотности акционов следует, что акционная доля  $\Omega_a$  критической плотности равна

$$\Omega_a h^2 \approx \left( \frac{m_a}{10^{-5} \text{ эВ}} \right)^{-3/2} \quad (3.4.23)$$

Так как акционное поле пространственно однородно, то при  $m_a \gg H$  его энергия принимает вид энергии практически неподвижной массивной частицы. Если всю холодную темную материю составляют лишь одни акционы, то  $m_a \approx 10^{-5}$  эВ, что соответствует  $M \approx 10^{12}$  ГэВ. Иначе, данные числа задают нижний предел на  $m_a$  и верхний предел на  $M$ .

Акционы слишком слабо взаимодействуют, чтобы быть обнаруженными в процессах, аналогичных отскокам от ядер, с помощью которых ищут WIMP-частицы. Одна из возможностей состоит в наблюдении превращения космических акционов в фотоны в интенсивных магнитных полях<sup>91)</sup>. С помощью этого подхода уже был выяснен предел на параметры акционов, которые могли бы порождаться Солнцем<sup>92)</sup>. Ожидается, что акционное поле  $\varphi(x)$  будет взаимодействовать с электромагнитным полем вида  $g_{a\gamma} \varphi \mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ , где  $g_{a\gamma}$  порядка  $\alpha/(2\pi M)$ , так что солнечные фотонны могут преобразовываться в акционы в присутствии сильных электрических полей около атомных ядер, и такие солнечные акционы потом будут обратно превращаться в фотонны в интенсивных полях, создаваемых в лаборатории. Такие фотонны не были обнаружены,

<sup>91)</sup> P. Sikivie, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1415 (1983); *Phys. Rev. D* **32**, 2988 (1985).

<sup>92)</sup> K. Zioutas *et al.* (CERN Axion Solar Telescope collaboration), *Phys. Rev. Lett.* **94**, 121301 (2005) [hep-ex/0411033].

что говорит о том, что для аксионов с массой меньше чем 0,02 эВ, параметр  $|g_{a\gamma}| < 1,16 \times 10^{-10}$  ГэВ $^{-1}$ , что является более сильным ограничением, по сравнению со значениями, возникавшими в предыдущих экспериментах такого рода<sup>93)</sup>. В исследованиях другого характера, в эксперименте<sup>94)</sup> ADMX (аббревиатура английского названия «Axion Dark Matter Experiment»), для поиска аксионов в гало нашей Галактики была использована микроволновая кавитация и получены верхние пределы на акционную плотность в узком диапазоне масс  $(1,98\text{--}2,17) \times 10^{-6}$  эВ. Ни один из этих экспериментов не противоречит акционным моделям темной материи, однако приемлемое улучшение чувствительности подобного рода экспериментов может привести либо к отказу от этих моделей, либо к обнаружению аксионов.

В суперсимметричных теориях суперпартнером аксиона будет частица со спином 1/2 — *аксино*, которая, возможно будет легчайшей частицей с  $R = -1$ , и поэтому стабильной. Аксино могут возникать как в результате нетеплового рождения<sup>95)</sup>, при распаде других частиц с  $R = -1$ , так и в результате теплового рождения<sup>96)</sup>. По всей видимости, аксино является еще одним правдоподобным кандидатом на роль частиц холодной темной материи.

---

<sup>93)</sup> Этот и предыдущие эксперименты рассматриваются в работе G. G. Raffelt, contribution to *XI International Workshop on Neutrino Telescopes*, [hep-ph/0504152].

<sup>94)</sup> L. D. Duffy *et al.*, *Phys. Rev. D* **74**, 012006 (2006) [astro-ph/0603108] и ссылки на более ранние работы, приведенные там.

<sup>95)</sup> L. Covi, J. E. Kim, and L. Roszkowski, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4180 (1999).

<sup>96)</sup> L. Covi, H. B. Kim, J. E. Kim, and L. Roszkowski, *J. High Energy Phys.* **0105**, 033 (2001) [hep-ph/0101009]; A. Brandenburg and F. D. Steffen, *J. Cosm. & Astropart. Phys.* **0408**, 008 (2004) [hep-ph/0405158].

## Глава 4

# ИНФЛЯЦИЯ

Обсуждение в предыдущих трех главах позволяет нам с некоторой долей уверенности говорить о ходе эволюции Вселенной с периода электрон-позитронной аннигиляции по настоящее время. Насчет более ранних эпох у нас были только предположения. В последнюю четверть века эти предположения были сконцентрированы вокруг идеи, что эре доминирования излучения, на протяжении которой масштабный фактор Робертсона—Уокера  $a(t)$  рос по закону  $\sqrt{t}$ , предшествовала более ранняя эпоха инфляции, когда основной вклад в плотность энергии Вселенной определялся медленно меняющейся вакуумной энергией, а фактор  $a(t)$  рос более-менее экспоненциально. Сама возможность предшествующего экспоненциального расширения была замечена несколькими авторами<sup>1)</sup>, но в первое время привлекла мало внимания. Именно Аллан Гут<sup>2)</sup> впервые выяснил, чем может быть привлекательна идея инфляции, и тем самым побудил интерес к ней.

Гут заметил, что в некоторой модели Великого объединения, которую он рассматривал (совместно с Генри Тайем), скалярные поля могут реализовывать локальный минимум потенциала, соответствующий состоянию с ненарушенной симметрией Великого объединения. В этом случае, пока Вселенная расширялась, энергия пустого пространства оставалась постоянной, приводя к постоянной скорости расширения, что, в свою очередь, означало экспоненциальный рост  $a(t)$ . В конечном счете подобная инфляция должна была быть остановлена прохождением сквозь квантово-механический барьер, после чего скалярные поля начали бы скатываться вниз по потенциалу, в направлении глобального минимума, который соответствует современной Вселенной. Само по себе это наблюдение не могло быть немедленным результатом особой важности. Однако Гут догадался, что существование эпохи инфляции решает одну из выдающихся проблем в космологии, упомянутой в разд. 1.5. Она известна как «проблема плоскостности»: почему в ранней Вселенной кривизна пространства была настолько мала? Вскоре Гут также обнаружил, что инфляция решает другие космологические затруднения, причем он и не подозревал, что часть из них таковыми являются. Эти вопросы, а также «проблема плоскостности» будут обсуждаться в разд. 4.1.

<sup>1)</sup> A. A. Starobinsky, *JETP Lett.* **30**, 682 (1979); *Phys. Lett. B* **91**, 99 (1980); D. Kazanas, *Astrophys. J.* **241**, L59 (1980); K. Sato, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **195**, 467 (1981).

<sup>2)</sup> A. Guth, *Phys. Rev. D* **23**, 347 (1981). Гут рассказывает историю этой работы в книге *The Inflationary Universe: The Quest for a New Theory of Cosmic Origins* (Helix Books/Addison Wesley, 1997).

Гут и другие исследователи быстро осознали, что его версия инфляции имеет неустранимый недостаток, который будет описан в разд. 4.2. «Старая инфляция» Гута вскоре была заменена «новой инфляцией» Андрея Линде<sup>3)</sup>, Андреаса Альбрехта и Пауля Штейнхардта<sup>4)</sup>. Существенным элементом теорий новой инфляции стало почти экспоненциальное расширение во время медленного скатывания на «дно» потенциальной ямы одного или нескольких скалярных полей, что является основным предметом обсуждения в разд. 4.2. На основе этого явления возникли сценарии «хаотической инфляции» и «вечной инфляции», а также другие варианты, часть из которых будут коротко описаны в разд. 4.3.

Пока что детальные свойства инфляции неизвестны, а сама идея инфляции остается лишь гипотезой, хотя все более правдоподобной. Помимо классических проблем, решенных инфляцией в самом начале, у нее появился один существенный экспериментальный успех: предсказание некоторых свойств флуктуаций реликтового излучения и крупномасштабной структуры Вселенной. Мы обратимся к этим вопросам в гл. 10, после рассмотрения эволюции флуктуаций в гл. 5 и 6, обсуждения наблюдений этих флуктуаций в гл. 7 и 8 и в разд. 9.5.

## 4.1

---

### Три вопроса

#### Плоскость • Горизонты • Монополи

В этом разделе будут описаны три классических космологических проблемы и рассмотрен тот объем знаний теории инфляции, который необходим для решения каждой из них. С этой целью просто предположим, что ранняя Вселенная прошла сквозь стадию экспоненциального расширения, и не будем заботиться о том, как именно это происходило.

#### A. Плоскость

В разд. 1.6 и 1.8 мы видели, что наблюдаемое соотношение между красным смещением и расстоянием для сверхновых типа Ia, а также измерения возраста самых старых звезд находятся в согласии с обращением в ноль параметра пространственной кривизны  $\Omega_K$ , хотя ненулевой кривизны можно добиться варьированием  $\Omega_m$ . Учет данных по флуктуациям температуры реликтового излучения, обсуждающийся в разд. 7.2, приводит к выбору  $\Omega_K = 0$ . Хотя имеется возможность небольших отличий  $\Omega_K$  от нуля, по всей видимости можно считать, что на основе этих наблюдений  $|\Omega_K| < 1$ . Однако

<sup>3)</sup> A. D. Linde, *Phys. Lett. B* **108**, 389 (1982); **114**, 431 (1982); *Phys. Rev. Lett.* **48**, 335 (1982).

<sup>4)</sup> A. Albrecht and P. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1220 (1982).

$\Omega_K$  является современным значением безразмерного, зависящего от времени параметра кривизны  $-K/(a^2 H^2) = -K/\dot{a}^2$  при постоянном  $K$ . С того момента, как температура упала до  $10^4$  К, и по настоящее время  $a(t)$  возрастила как  $t^{2/3}$ , поэтому  $|K|/\dot{a}^2$  также росла как  $t^{2/3} \propto T^{-1}$ . Таким образом, если  $|\Omega_K| < 1$ , то при  $10^4$  К значение параметра кривизны не могло превышать  $10^{-4}$ . Раньше  $a(t)$  возрастил как  $t^{1/2}$ , поэтому  $|K|/\dot{a}^2$  возрастила как  $t \propto T^{-2}$ . Чтобы  $|K|/\dot{a}^2$  при  $10^4$  К не превышала примерно  $10^{-4}$ , необходимо, чтобы  $|K|/\dot{a}^2$  была самое большое примерно  $10^{16}$  при температуре  $T \approx 10^{10}$  К электрон-позитронной аннигиляции (грубо говоря, это начало периода переходов нейтрон-протон, который привел к наблюдаемой распространенности гелия) и даже еще меньше в более ранние времена<sup>5)</sup>. Никакого противоречия здесь нет — нет никакой причины, почему кривизна не должна быть очень малой — однако такие явления, по возможности, требуют своего объяснения.

Гутом было осознано, что отношение  $\dot{a}/a$  во время инфляции должно оставаться примерно постоянным, поэтому  $|K|/(a^2 H^2)$  будет убывать более или менее как  $a^{-2}$ . Поэтому чтобы понять, почему в самом начале Большого взрыва пространство было настолько плоским, нет никакой необходимости делать какие-то произвольные предположения; если Большому взрыву с преобладанием излучения предшествовал значительный период инфляции, то кривизна в начале Большого взрыва неизбежно будет крайне мала.

С количественной точки зрения предположим, что Вселенная началась с периода инфляции, во время которого  $a(t)$  возрос на некоторый большой фактор  $e^N$ , после чего последовал период доминирования излучения, который продолжался до тех пор, пока не установился баланс вещества и излучения, затем, в свою очередь, наступил период преобладания вещества и, наконец, установилось преобладание вакуумной энергии. Если значение  $|K|/(a^2 H^2)$  было порядка единицы, то в момент времени  $t_I$  в конце инфляции  $|K|/(a^2 H^2)$  будет иметь значение  $|K|/(a_I^2 H_I^2)$  порядка  $e^{-2N}$  (где  $a_I$  и  $H_I$  — это масштабный фактор в метрике Робертсона—Уокера и текущая скорость расширения соответственно), так что в настоящее время будем иметь

$$|\Omega_K| = \frac{|K|}{a_0^2 H_0^2} = e^{-2N} \left( \frac{a_I H_I}{a_0 H_0} \right)^2 \quad (4.1.1)$$

Таким образом, проблемы плоскостности можно избежать, если расширение во время инфляции ограничено снизу:

$$e^N > \frac{a_I H_I}{a_0 H_0}. \quad (4.1.2)$$

Для оценки этого предела будет сделано несколько рискованное предположение, что масштабный фактор Вселенной и скорость расширения с момента окончания инфляции вплоть до начала эры доминирования излучения

<sup>5)</sup> R. H. Dicke and P. J. E. Peebles, in *General Relativity — An Einstein Centenary Survey*, eds. S. Hawking and W. Israel (Cambridge University Press, 1979).

практически не меняются, так что

$$a_I H_I \simeq a_1 H_1, \quad (4.1.3)$$

где нижний индекс 1 означает начало эры доминирования излучения. Можно выразить расширение Вселенной  $a_0/a_1$  с начала эры доминирования излучения в терминах отношений скоростей расширения, заметив, что на протяжении всех периодов доминирования излучения и вещества скорость расширения была

$$H = \frac{H_{\text{EQ}}}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\frac{a_{\text{EQ}}}{a}\right)^3 + \left(\frac{a_{\text{EQ}}}{a}\right)^4},$$

где  $a_{\text{EQ}} = a_0 \Omega_{\text{и}} / \Omega_{\text{м}}$  и  $H_{\text{EQ}} = \sqrt{2\Omega_{\text{м}}} H_0 (a_0/a_{\text{EQ}})^{3/2}$  — это масштабный фактор и скорость расширения с момента наступления равновесия между веществом и излучением. Выбор  $a = a_1 \ll a_{\text{EQ}}$  дает

$$H_1 = \frac{H_{\text{EQ}}}{\sqrt{2}} \left(\frac{a_{\text{EQ}}}{a_1}\right)^2 \quad (4.1.4)$$

Исключая с помощью этого соотношения  $a_1$ , предел (4.1.2) можно привести к более полезному виду

$$e^N > \left(\frac{\Omega_{\text{м}} a_{\text{EQ}}}{a_0}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{H_1}{H_0}} = \Omega_{\text{и}}^{1/4} \sqrt{\frac{H_1}{H_0}} = \left(\Omega_{\text{и}} \frac{\rho_1}{\rho_{0,\text{крит}}}\right)^{1/4} = \frac{[\rho_1]^{1/4}}{0,037 h \text{ эВ}}, \quad (4.1.5)$$

где  $\rho_1$  — это плотность энергии в начале эры доминирования излучения, а  $\rho_{0,\text{крит}} = [3,00 \times 10^{-3} \text{ эВ}]^4 h^2$  — критическая плотность (1.5.28).

Для дальнейшего продвижения необходима какая-нибудь идея о том, какой может быть плотность энергии в конце инфляции. Успех теории космологического нуклеосинтеза показывает, что  $\rho_1$  не может быть меньше плотности энергии в момент начала переходов нейтрон-протон, примерно  $[1 \text{ МэВ}]^4$ . В таком случае из уравнения (4.1.5) при  $h = 0,7$  следует, что во время инфляции Вселенная расширилась по меньшей мере в  $4 \times 10^7$  раз, что составляет 17  $e$ -кратностей. Исходя из другой крайности, не ожидается, что  $\rho_1$  будет больше, чем планковская плотность энергии  $G^{-2} = [1,22 \times 10^{19} \text{ ГэВ}]^4$ , в случае чего из уравнения (4.1.5) при  $h = 0,7$  следует, что расширение во время инфляции произошло не менее, чем в  $5 \times 10^{29}$  раз, или 68  $e$ -кратностей. В разд. 10.3 будут приведены некоторые соображения в пользу того, что  $\rho_1$  имеет порядок  $[2 \times 10^{16} \text{ ГэВ}]^4$  при этом  $e^N$  для  $h = 0,7$  будет по-меньшей мере  $8 \times 10^{26}$ , так что  $N > 62$ .

Это наименее убедительный аргумент в пользу инфляции, потому что малое значение  $|K|/\dot{a}^2$  в прошлом может быть объяснено предположением (которое часто делалось задолго до того, как услышали об инфляции), что пространство совершенно плоское, так что  $K = 0$  сейчас и всегда. С другой стороны, как будет обсуждаться в разд. 4.3, инфляция приводит к интересной

возможности, что на больших расстояниях Вселенная совсем не является однородной и изотропной, и что очевидная плоскость метрики — это не более, чем итог инфляции.

Это было бы простым совпадением, если бы инфляция в точности продолжалась на протяжении нужного числа  $e$ -кратностей, так чтобы  $|K|/\dot{a}^2$  уменьшилось в течение инфляции от начального значения порядка единицы ровно настолько, чтобы ее последующий рост во время периодов доминирования излучения и затем вещества привел обратно к современному значению порядка единицы. Более правдоподобно, что современное значение  $|\Omega_K|$  будет либо много больше, либо много меньше единицы, и поскольку из наблюдений следует, что вариант «много больше» не реализуется, в инфляционных теориях считается, что  $|\Omega_K| \ll 1$ .

Однако из такого типа рассуждений также следует, что вакуумная энергия много меньше современного значения плотности вещества, но мы знаем, что это не так.

## В. Горизонты

С самого начала наблюдаемая высокая степень изотропности реликтового излучения стала проблемой. Напомним, что размер горизонта Вселенной в период доминирования вещества или излучения равен по порядку величины  $t$  и во время последнего рассеяния имел порядок величины  $d_{\text{гор}} \approx H_0^{-1}(1+z_{\text{п.р.}})^{-3/2}$ , поскольку фактор  $a(t)$  с момента последнего рассеяния возрастал по закону  $t^{2/3}$  (см. формулу (2.6.32)). Также, согласно формуле (2.6.29), расстояние по угловому диаметру до поверхности последнего рассеяния  $d_y$  имеет порядок  $H_0^{-1}(1+z_{\text{п.р.}})^{-1}$ , поэтому теперь горизонт в момент последнего рассеяния образует угол порядка  $d_{\text{гор}}/d_y \approx (1+z_{\text{п.р.}})^{-1/2}$  радиан, что для  $z_{\text{п.р.}} \simeq 1100$  составляет примерно  $1,6^\circ$ . Таким образом, во Вселенной в период доминирования вещества или излучения никакое физическое воздействие не могло сгладить начальные неоднородности и свести точки с красным смещением  $z_{\text{п.р.}}$ , разделенные на более чем несколько степеней, к одинаковой температуре, в противоположность практически идеальной изотропности реликтового излучения на больших угловых масштабах, наблюдаемой с момента открытия фонового излучения. Инфляция дает этому объяснение: во время инфляционной эпохи часть Вселенной, которую мы можем наблюдать, занимала крошечный объем, и с тех пор было предостаточно времени, чтобы все находящееся внутри этого объема распределилось однородно.

Чтобы разобраться в том, что все это значит для инфляционного расширения, сперва из разд. 1.13 вспомним, что собственный размер горизонта в момент времени  $t_{\text{п.р.}}$  последнего рассеяния равен

$$d_{\text{гор}}(t_{\text{п.р.}}) \equiv a(t_{\text{п.р.}}) \int_{t_*}^{t_L} \frac{dt}{a(t)}, \quad (4.1.6)$$

где  $t_*$  (возможно, равное  $-\infty$ ) задает начало инфляционной эпохи. Ранее мы убедились, что вклад в этот интеграл в периоды преобладания вещества или излучения слишком мал, чтобы учесть изотропность реликтового излучения, поэтому будем предполагать, что основной вклад обеспечивается в эпоху инфляции. Для определенности предположим, что во время инфляции  $a(t)$  возрастал экспоненциально со скоростью  $H_I$ , так что

$$a(t) = a(t_*) \exp [H_I(t - t_*)] = a_I \exp [-H_I(t_I - t)],$$

где  $t_I$  — это опять время завершения инфляции, и  $a_I = a(t_I)$ . Для числа  $e$ -кратного расширения во время инфляции  $\mathcal{N} \equiv H_I(t_I - t_*)$  из формулы (4.1.6) получаем

$$d_{\text{роп}}(t_{\text{п. р.}}) = \frac{a(t_{\text{п. р.}})}{a_I H_I} [e^{\mathcal{N}} - 1]. \quad (4.1.7)$$

Если надеяться хоть как-то решить проблему горизонта, необходимо иметь  $e^{\mathcal{N}} \gg 1$ , поэтому слагаемым  $-1$  в квадратных скобках выражения (4.1.7) можно пренебречь.

Для объяснения высокой степени изотропности реликтового излучения на больших угловых масштабах необходимо  $d_{\text{роп}}(t_{\text{п. р.}}) > d_y(t_{\text{п. р.}})$ , где  $d_y(t_{\text{п. р.}})$  — это расстояние по угловому диаметру до поверхности последнего рассеяния. Согласно формуле (2.6.29)

$$d_y(t_{\text{п. р.}}) \approx \frac{a(t_{\text{п. р.}})}{H_0 a_0}. \quad (4.1.8)$$

Тогда условие изотропности реликтового излучения принимает вид

$$e^{\mathcal{N}} > \frac{a_I H_I}{a_0 H_0}. \quad (4.1.9)$$

Оно совпадает с условием (4.1.2) решения проблемы плоскостности. Если снова сделать допущение, что между окончанием инфляционной эры и началом эры доминирования излучения не происходит ничего существенного, и воспользоваться соотношением (4.1.3), то для решения проблемы горизонта снова следует положить  $\mathcal{N} > 17$  при  $\rho_1 \simeq [1 \text{ МэВ}]^4$ ;  $\mathcal{N} > 62$  при  $\rho_1 \simeq [2 \times 10^{16} \text{ ГэВ}]^4$  и  $\mathcal{N} > 68$  при  $\rho_1 \simeq G^{-2}$ . В гл. 10 будет показано, что независимо от того, сколько  $e$ -кратностей, 17, 62 или 68, требуется для решения проблемы горизонта, с помощью наблюдений неоднородностей в современной Вселенной может быть получено только число  $e$ -кратностей к моменту окончания инфляции.

Следует отметить, что время  $t_{\text{п. р.}}$  последнего рассеяния не входит в предельную формулу (4.1.9) для числа  $\mathcal{N}$ , поэтому это так же является условием того, что все небо при любом красном смещении  $z < z_{EQ}$  находилось внутри горизонта в тот момент времени, когда был испущен наблюдаемый теперь свет с таким красным смещением. Действительно, неравенство (4.1.9) также является условием того, что размер горизонта в настоящее время должен превышать размер наблюдаемой Вселенной, составляющий примерно  $1/H_0$ .

### С. Монополи

Локальная симметрия в теориях Большого объединения с некоторой (пока не установленной. — Прим. ред. перев.) простой группой симметрии при энергии  $M \approx 10^{16}$  ГэВ спонтанно нарушается до калибровочной симметрии Стандартной модели с группой  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . Во всех таких случаях нарушающие симметрию скалярные поля можно собрать в скрученные конфигурации с ненулевым магнитным зарядом, которые нельзя распрямить никаким непрерывным процессом<sup>6)</sup>. Это создает проблему для некоторых космологических моделей<sup>7)</sup>. До этого фазового перехода скалярные поля обязательно будут нескоррелированы на расстояниях, которые превышают размер горизонта, т. е. самое дальнее расстояние, которое может пройти свет с момента начальной сингулярности. В стандартной теории Большого взрыва в ранний момент времени  $t$  расстояние до горизонта было порядка  $t \approx (G(k_B T)^4)^{-1/2}$  (где  $G \simeq (10^{19}$  ГэВ) $^{-2}$  — это ньютоновская постоянная), поэтому плотность числа монополей, рожденных к тому моменту, когда температура опустится до  $M/k_B$ , будет порядка  $t^{-3} \approx (GM^4)^{3/2}$ , что меньше плотности числа фотонов  $\approx M^3$  при  $T \approx M/k_B$  на фактор порядка  $(GM^2)^{3/2}$ . При  $M \approx 10^{16}$  ГэВ этот фактор имеет порядок  $10^{-9}$ . Если монополи не смогли найти друг друга и проаннигилировать, то это отношение будет оставаться примерно постоянным вплоть до настоящего времени, однако в современную эпоху на один нуклон приходится по меньшей мере  $10^9$  реликтовых фотонов, откуда следует, что один монополь приходится на один нуклон, и это совершенно не соответствует наблюдениям.

Это потенциальное противоречие стало одним из факторов, побудивших интерес к инфляционным космологическим моделям. В таких моделях период экспоненциального расширения, имевший место до рождения монополей, значительно расширяет горизонт, а экспоненциальное расширение, произошедшее после рождения монополей (но до рождения фотонов в эпоху разогрева), сильно уменьшает отношение плотности числа монополей к плотности числа фотонов. Если быть точнее, поиски монополей в железной руде, морской воде и пр. показывают, что число монополей меньше чем  $10^{-6}$  на один грамм, или примерно  $10^{-30}$  монополей на один нуклон, и, следовательно, меньше чем  $10^{-39}$  монополей на один фотон<sup>8)</sup>.

Даже если масса монополей была бы сравнима с  $10^{19}$  ГэВ, с такой распространенностью монополей их вклад в плотность массы Вселенной был бы пренебрежимо мал.

<sup>6)</sup> См. обсуждение в книге КТП, том 2, разд. 23.3.

<sup>7)</sup> Ya. B. Zel'dovich and M. Yu. Khlopov, *Phys. Lett. B* **79**, 239 (1978); J. Preskill, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 1365 (1979). См. обзор в работе J. Preskill, *Annual Rev. Nucl. Part. Science* **34**, 461 (1984).

<sup>8)</sup> См. обзор в работе Particle Data Group, *Phys. Lett. B* **582**, 1001 (2004).

Чтобы инфляция уменьшила соотношение между монополями и фотонами в  $10^{-30}$  раз, размер горизонта должен быть увеличен в  $10^{10}$  раз (в некоторый момент времени, предшествующий разогреву, в результате которого появились фотоны). Это означает, что размер горизонта  $e^{\mathcal{N}/H_1}$  после инфляции должен быть больше предыдущей оценки  $(GM^4)^{-1/2}$  как минимум в  $10^{10}$  раз. При  $H_1 \approx (GM^4)^{1/2}$ , требуется, чтобы число  $\mathcal{N}$   $e$ -кратностей превышало  $\ln 10^{10} = 23$ . Безусловно, другое возможное решение проблемы монополей таково, что инфляция заканчивается при температуре ниже масштаба Великого объединения  $M$ , поэтому группа симметрий Великого объединения никогда не нарушалась. Даже еще более простая возможность, не имеющая отношения к инфляции, состоит в том, что может не существовать простой калибровочной группы, которая спонтанно нарушается до калибровочной группы  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$  Стандартной модели.

Из рассмотренных выше трех проблем наиболее серьезной является проблема горизонта. Как мы видели, существуют возможные решения проблемы плоскостности и монополей, не обращающиеся к инфляции. Также любое количество  $e$ -кратностей, решающее проблему горизонта, автоматически решает не только проблему плоскостности, но и проблему монополей. Если эра доминирования излучения начинается с плотности энергии  $\rho_1 > [10^{15} \text{ ГэВ}]^4$ , то для того, чтобы инфляция решала проблемы плоскостности и горизонта, в течение инфляционного расширения необходимо достичь по меньшей мере 59  $e$ -кратностей, и этого более чем достаточно, чтобы избежать проблемы монополей, а если  $\rho_1 < [10^{15} \text{ ГэВ}]^4$ , то монополей в обычной картине Великого объединения вообще не будет возникать.

## 4.2

---

### Медленная инфляция

**Формирование пузырей • Новая инфляция • Условия медленного скатывания • Степенной потенциал • Экспоненциальный потенциал • Повторный разогрев**

В первой статье Гута инфляция замышлялась как отсроченный фазовый переход первого рода, при котором скалярное поле изначально было захвачено локальным минимумом некоторого потенциала, после чего просочилось сквозь потенциальный барьер и скатилось к настоящему минимуму потенциала. Вскоре было осознано<sup>9)</sup>, что такой подход не работает по причине того, что будет названо проблемой мягкого выхода. Переход из сверхохлажденной фазы исходного «ложного вакуума» в фазу «истинного вакуума» с более низкой энергией не может происходить повсеместно одновременно; это происходит

<sup>9)</sup> S. W. Hawking, I. G. Moss, and J. M. Stewart, *Phys. Rev. D* **26**, 2681 (1982); A. H. Guth and E. J. Weinberg, *Nucl. Phys. B* **212**, 321 (1983).

местами, в маленьких пузырьках истинного вакуума, которые быстро расширяются и становятся фоном для ложного вакуума, в котором скалярные поля будут по-прежнему находиться в локальном минимуме<sup>10)</sup>, подобно капелькам воды, образующимся в переохлажденном водяном паре. Проблема в том, что скрытая теплота, высвобождаемая при фазовом переходе, сосредоточена на стенках, в то время как внутренность пузырьков остается пустой, поэтому единственное место концентрации энергии, которая впоследствии перейдет в современные составляющие Вселенной, будет в высшей степени неоднородно и анизотропно. Сперва Гут считал, что пузырьки в инфляционной космологии объединяются, образовав современную более-менее однородную Вселенную, однако этого не происходит; поскольку фоновое пространство с ложным вакуумом продолжает испытывать инфляцию, стены пузырьков слишком быстро удаляются друг от друга, чтобы слиться в единое целое.

Вскоре версия инфляции Гута была вытеснена версией, авторами которой стали Линде, а также Альбрехт и Штейнхардт, известной как «новая инфляция»<sup>11)</sup>. Изначально новая инфляция была сформулирована как частная модель нарушения симметрии Великого объединения посредством механизма нарушения симметрии, введенного Е. Вайнбергом и С. Коулменом<sup>12)</sup>. С помощью этого механизма потенциал для скалярного поля с нулевой температурой искусственно модифицируется так, чтобы его вторая производная в точке  $\varphi = 0$  была равна нулю. Тогда однопетлевые радиационные поправки приводят к потенциальному, равному известному фактору, умноженному на  $\varphi^4 \ln(\varphi/M)$ , где  $M$  — это свободная константа; изменение значения  $M$  влечет изменение константы связи взаимодействия  $\varphi^4$ . Этот потенциал имеет неустойчивую стационарную точку  $\varphi = 0$  и минимум в точке  $\varphi_0 = M e^{-1/4}$ . При конечной температуре в потенциале также присутствует квадратичный вклад, пропорциональный  $T^2 \varphi^2$ , который делает стационарную точку  $\varphi = 0$  локальным минимумом. Фазовый переход по-прежнему осуществляется посредством образования пузырьков, однако при низких температурах высота потенциального барьера очень мала, поэтому начальное значение скалярного поля  $\varphi$  внутри пузырька практически равно нулю. Затем поле медленно скатывается в потенциальную яму, подобно тому, как обсуждалось в разд. 1.12, а в это время Вселенная (включая данный пузырек) испытывает экспоненциальное расширение. В конце концов энергия поля трансформируется в заполняющие пузырек обычные частицы. Считается, что наша наблюдаемая Вселенная занимает малую часть одного из таких пузырьков.

Оказалось, что следствия новых теорий инфляции зависят в первую очередь от медленного скатывания скалярного поля после образования пузырька,

<sup>10)</sup> Описание этого процесса и ссылки на оригинальные статьи по образованию пузырьков в квантовой теории поля, см. КТП, том 2, разд. 23.8.

<sup>11)</sup> A. D. Linde, *Phys. Lett. B* **108**, 389 (1982); **114**, 431 (1982); *Phys. Rev. Lett.* **48**, 335 (1982); A. Albrecht and P. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1220 (1982).

<sup>12)</sup> S. Coleman and E. Weinberg, *Phys. Rev. D* **7**, 1888 (1973).

а не от самого процесса формирования пузырька. Действительно, важные аспекты инфляции не требуют каких-либо предположений насчет Великого объединения или механизма Коулмена—Э. Вайнберга. Единственное, что требуется предположить, — это существование скалярного поля  $\varphi$ , известного как инфлатон, который в некоторый ранний момент времени принимает значение, при котором потенциал  $V(\varphi)$  велик, но практически постоянен. Сначала это скалярное поле «катится» очень медленно вниз по потенциальному, так что постоянная Хаббла убывает достаточно медленно, и прежде чем поле инфлатона как-либо существенно изменится, во Вселенной происходит более-менее экспоненциальная инфляция.

С количественной точки зрения напомним, что плотность энергии (B.66) и давление (B.67) пространственно однородного скалярного поля  $\varphi(t)$  с потенциалом  $V(\varphi)$  в пространстве-времени Робертсона—Уокера имеют вид ( $\hbar = c = 1$ )

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi), \quad p = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V(\varphi),$$

так что уравнение сохранения энергии  $\dot{\rho} = -3H(\rho + p)$  принимает вид

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0, \quad (4.2.1)$$

где  $H \equiv \dot{a}/a$  — это зависящая от времени скорость расширения, которая в эпоху преобладания энергии скалярного поля равна

$$H = \sqrt{\frac{8\pi G\rho}{3}} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \left( \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi) \right)}. \quad (4.2.2)$$

На основании уравнений (4.2.1) и (4.2.2) можно получить очень полезную формулу для  $\dot{H}$ . Вычисляя производную по времени от квадрата уравнения (4.2.2) и применяя (4.2.1), получим

$$2H\dot{H} = \frac{8\pi G}{3} (\dot{\varphi}\ddot{\varphi} + V'(\varphi)\dot{\varphi}) = -8\pi G H\dot{\varphi}^2,$$

откуда следует

$$\dot{H} = -4\pi G\dot{\varphi}^2. \quad (4.2.3)$$

Далее, для почти экспоненциального расширения относительное изменение  $|\dot{H}/H|(1/H)$  по  $H$  в течение времени расширения  $1/H$  должно быть значительно меньше единицы, т. е. необходимо неравенство

$$|\dot{H}| \ll H^2. \quad (4.2.4)$$

С помощью уравнений (4.2.3) и (4.2.2) отсюда получаем

$$\dot{\varphi}^2 \ll |V(\varphi)|. \quad (4.2.5)$$

В качестве следствия возникает  $p \simeq -\rho$ , а также

$$H \simeq \sqrt{\frac{8\pi GV(\varphi)}{3}}. \quad (4.2.6)$$

Помимо этого обычно предполагается, что относительное изменение  $|\ddot{\varphi}/\dot{\varphi}|(1/H)$  по  $\dot{\varphi}$  в течение времени расширения  $1/H$  значительно меньше единицы, т. е.

$$|\ddot{\varphi}| \ll H|\dot{\varphi}|. \quad (4.2.7)$$

Тогда можно отбросить инерциальный член  $\ddot{\varphi}$  в уравнении (4.2.1), которое в этом случае принимает вид

$$\dot{\varphi} = -\frac{V'(\varphi)}{3H} = -\frac{V'(\varphi)}{\sqrt{24\pi GV(\varphi)}}. \quad (4.2.8)$$

Относительное изменение скорости расширения  $H$  за время расширения  $1/H$  будет равно

$$\left| \frac{\dot{H}}{H^2} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{8\pi G}} \left| \frac{V'(\varphi)\dot{\varphi}}{V^{3/2}(\varphi)} \right| = \frac{1}{16\pi G} \left( \frac{V'(\varphi)}{V(\varphi)} \right)^2, \quad (4.2.9)$$

поэтому расширение Вселенной будет определяться большим количеством  $e$ -кратностей, если

$$\left| \frac{V'(\varphi)}{V(\varphi)} \right| \ll \sqrt{16\pi G}. \quad (4.2.10)$$

Согласно уравнению (4.2.8), условие того, что потенциал будет удовлетворять неравенству (4.2.5), принимает вид

$$\left| \frac{V'(\varphi)}{V(\varphi)} \right| \ll \sqrt{24\pi G}, \quad (4.2.11)$$

выполнение которого обеспечивается неравенством (4.2.10). Помимо этого, из уравнения (4.2.8) следует, что

$$\ddot{\varphi} = -\frac{V''(\varphi)\dot{\varphi}}{3H} + \frac{V'(\varphi)\dot{H}}{3H^2} = \frac{V''(\varphi)V'(\varphi)}{9H^2} - \frac{V'^3}{48\pi GV^2}. \quad (4.2.12)$$

Неравенство (4.2.10) гарантирует, что абсолютное значение последнего слагаемого в правой части многое меньше  $|V'(\varphi)|$ , поэтому условие того, что  $|\ddot{\varphi}|$  должно быть многое меньше  $|V'(\varphi)|$ , принимает вид  $|V''(\varphi)| \ll 9H^2$ , или, иначе говоря,

$$\left| \frac{V''(\varphi)}{V(\varphi)} \right| \ll 24\pi G. \quad (4.2.13)$$

Неравенства (4.2.10) и (4.2.13) являются двумя условиями «плоскостности», необходимыми для медленного скатывания  $\varphi$  и  $\dot{\varphi}$ . В принципе, возможно, что второе условие плоскости (4.2.13) может не выполняться для потен-

циала, удовлетворяющего первому условию плоскостности (4.2.10), но так обычно не бывает, и, в частности, невозможно для простых потенциалов, обсуждаемых далее.

Как правило, при таких условиях расширение не является строго экспоненциальным, но легко может становиться экспоненциально большим. Предположим, что в течение некоторого временного интервала поле  $\varphi(t)$  сдвигается с некоторого начального значения  $\varphi_1$  к конечному значению  $\varphi_2$ , с  $0 < V(\varphi_2) < V(\varphi_1)$ , при этом считается, что оба неравенства (4.2.10) и (4.2.13) выполнены в заданной области значений поля  $\varphi$ . В течение этого периода масштабный фактор метрики Робертсона—Уокера возрастет на фактор

$$\frac{a(t_2)}{a(t_1)} = \exp \left[ \int_{t_1}^{t_2} H dt \right] = \exp \left[ \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{H d\varphi}{\dot{\varphi}} \right] \simeq \exp \left[ - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left( \frac{8\pi G V(\varphi)}{V'(\varphi)} \right) d\varphi \right]. \quad (4.2.14)$$

В рассматриваемом диапазоне потенциал положителен и убывает по мере того, как  $\varphi(t)$  изменяется от  $\varphi_1$  до  $\varphi_2$ , поэтому показатель экспоненты в соотношении (4.2.14) положителен. Из неравенства (4.2.10) следует, что этот показатель значительно больше  $\sqrt{4\pi G}|\varphi_1 - \varphi_2|$ , поэтому данное условие плоскостности гарантирует, что в любом временном интервале, в котором  $\varphi$  изменяется на величину, по-меньшей мере сравнимую с  $1/\sqrt{4\pi G} = 3,4 \times 10^{18}$  ГэВ, возникает большое количество  $e$ -кратностей.

Важно отметить, что такие большие значения скалярного поля неизбежно приводят к противоречиям в классической картине гравитации, на которой строится наш анализ. Условие, позволяющее пренебречь квантовыми гравитационными эффектами таково, что плотность энергии должна быть значительно меньше планковской плотности энергии:

$$|V(\varphi)| \ll (4\pi G)^{-2}. \quad (4.2.15)$$

Даже если  $\varphi$  сравнимо с планковской массой  $\approx G^{-1/2}$ , этому условию можно удовлетворить, предполагая, что  $V(\varphi)$  пропорционален достаточно малой константе связи. Ни условия плоскостности (4.2.10), (4.2.13), ни рост масштабного фактора  $a(t)$  (4.2.14) при заданном изменении  $\varphi(t)$  не зависят от значения такой константы связи.

В зависимости от формы потенциала условия плоскостности (4.2.10) и (4.2.13) могут приводить либо к условиям на начальное значение скалярного поля, либо на параметры самого потенциала. В качестве примера первого типа рассмотрим степенной потенциал

$$V(\varphi) = g\varphi^\alpha, \quad (4.2.16)$$

где  $g$  и  $\alpha$  — произвольные вещественные параметры, однако предполагается, что  $g > 0$  и  $|\alpha|$  велико, но не на порядки величины больше единицы. Тогда условия плоскостности (4.2.10) и (4.2.13) одновременно удовлетворяются

при  $|\varphi| \gg 1/\sqrt{4\pi G}$ , независимо от значения константы связи  $g$ . Из формулы (4.2.14) следует, что число  $e$ -кратностей расширения для скалярного поля с начальным значением  $\varphi_1$  и много меньшим конечным значением равно  $4\pi G\varphi_1^2/\alpha$ , поэтому, например, для  $\alpha = 4$  получаем 62  $e$ -кратности, необходимых для избежания проблемы горизонта при инфляции, заканчивающейся при температуре  $2 \times 10^{16}$  ГэВ/ $k_B$ , если  $|\varphi_1| > \sqrt{62/(\pi G)}$ . С другой стороны, для этого потенциала условие отсутствия квантовых эффектов (4.2.15) действительно накладывает ограничение сверху на  $|g|$ . Например, в случае  $\alpha = 4$  потенциал (4.2.16) будет удовлетворять условию (4.2.15), если  $g \ll (\sqrt{4\pi G}|\varphi|)^{-4}$ , поэтому, когда  $|\varphi|$  достаточно велико, чтобы давать 62  $e$ -кратных экспоненциальных расширений, квантовых эффектов не будет при  $g \ll 5 \times 10^{-6}$ . Необходимости иметь очень малую константу связи можно избежать в теориях, содержащих больше одного скаляра, например в теориях «гибридной инфляции»<sup>13)</sup>, в которых эффективное самодействие одного скаляра очень мало, потому что другое скалярное поле имеет очень маленькую массу и, следовательно, небольшое вакуумное ожидание.

Есть хорошо известный пример совсем иного типа, когда уравнения (4.2.1) и (4.2.2) можно решить точно; это экспоненциальный потенциал<sup>14)</sup>:

$$V(\varphi) = g e^{-\lambda\varphi}, \quad (4.2.17)$$

где константы  $g$  и  $\lambda$  произвольны. Легко проверить, что равенства (4.2.1) и (4.2.2) можно удовлетворить, выбирая<sup>15)</sup>

$$\varphi(t) = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{8\pi G g \epsilon^2 t^2}{3 - \epsilon} \right) \quad (4.2.18)$$

и

$$a \propto t^{1/\epsilon}, \quad H = \frac{1}{\epsilon t}, \quad (4.2.19)$$

где  $\epsilon$  — это безразмерная положительная величина

$$\epsilon \equiv \frac{\lambda^2}{16\pi G}. \quad (4.2.20)$$

Условия плоскостности (4.2.10) и (4.2.13) принимают вид  $\epsilon \ll 1$  и  $\epsilon \ll 3/2$  соответственно, поэтому их одновременное выполнение имеет место тогда

<sup>13)</sup> A. D. Linde, *Phys. Lett. B* **259**, 38 (1991); *Phys. Rev. D* **49**, 748 (1994) [astro-ph/9307002].

<sup>14)</sup> L. F. Abbott and M. B. Wise, *Nucl. Phys. B* **244**, 541 (1984); F. Lucchin and S. Matarrese, *Phys. Rev. D* **32**, 1316 (1985); *Phys. Lett. B* **164**, 282 (1985); D. H. Lyth and E. D. Stewart, *Phys. Lett. B* **274**, 168 (1992).

<sup>15)</sup> Это точное решение при любых значениях  $t$ , однако оно не является общим. Поскольку уравнение (4.2.1) — это дифференциальное уравнение второго порядка, оно обладает двухпараметрическим набором решений. Частное решение (4.2.18) является аттрактором, общее решение стремится к нему при больших  $t$ .

и только тогда, когда

$$\epsilon \ll 1, \quad (4.2.21)$$

без каких-либо ограничений на значения  $g$  или  $\varphi$ . Данное точное решение полезно в качестве проверки приближенных вычислений в случае более общих потенциалов. Например, выражение (4.2.18) можно сравнить с решением приближенного уравнения (4.2.8), которое в случае экспоненциального потенциала равно

$$\varphi(t) = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{8\pi G g \epsilon^2 t^2}{3} \right). \quad (4.2.22)$$

Очевидно, что при  $\epsilon \ll 1$  различием между этим решением и точным решением (4.2.18) можно пренебречь. Аналогично, возрастание масштабного фактора в метрике Робертсона—Уокера на временном интервале от  $t_1$  до  $t_2$ , когда значение скалярного поля уменьшается от  $\varphi_1$  до  $\varphi_2$ , равно

$$\frac{a(t_2)}{a(t_1)} = \left( \frac{t_2}{t_1} \right)^{1/\epsilon} = e^{(\varphi_2 - \varphi_1)\lambda/(2\epsilon)}, \quad (4.2.23)$$

что в точности совпадает с результатом «медленного скатывания» (4.2.14) в случае экспоненциального потенциала.

В этих теориях предполагается, что когда кривая потенциала  $V(\varphi)$  опустится достаточно низко, неравенства (4.2.10) и (4.2.13) в целом перестанут выполняться, и  $\varphi$  начинает испытывать затухающие осцилляции около минимума  $V(\varphi)$ , соответствующего современному значению  $\varphi_0$ . В итоге  $\varphi$  приблизится к  $\varphi_0$  достаточно близко, так что потенциал можно приближенно считать квадратичным:

$$V(\varphi) = \frac{1}{2} m^2 (\varphi - \varphi_0)^2. \quad (4.2.24)$$

---

Чтобы учесть современное малое значения вакуумной энергии, необходимо предположить, что по причинам, остающимся до сих пор совершенно загадочными, минимальное значение потенциала очень близко к нулю.

---

Это очень походит на теорию поля безспиновой частицы массы  $m$  с ничтожно малой скоростью. Для завершения инфляции необходимо присутствие некоторого взаимодействия скалярного поля инфлатона с другими полями, включая поля обычной материи и излучения, так чтобы плотность энергии инфлатона убывала по закону

$$\rho_\varphi(t) = \rho_\varphi(t_I) \left( \frac{a(t_I)}{a(t)} \right)^3 e^{-\Gamma(t-t_I)}, \quad (4.2.25)$$

где  $\Gamma$  — это скорость распада кванта  $\varphi$  на другие частицы, а  $t_I$  выбирается в качестве начала осцилляций инфлатона и его распада. Этот период эволюции

инфлатона известен как *разогрев*<sup>16)</sup>. Считается, что именно в этот период образовалась наблюдаемая в современной Вселенной энтропия<sup>17)</sup>.

Плотность энергии  $\rho_m$  частиц, на которые распалось  $\varphi$ , удовлетворяет уравнению сохранения, подобному (1.1.32), однако с учетом поправки от потока энергии при инфляции:

$$\dot{\rho}_m + 3H(\rho_m + p_m) = \Gamma\rho_\varphi. \quad (4.2.26)$$

Для определенности будем считать, что продукты распада инфлатона являются ультрарелятивистскими, так что  $p_m = \rho_m/3$ . Тогда решение уравнения (4.2.26) равно

$$\rho_m(t) = \frac{\rho_\varphi(t_I)\Gamma a^3(t_I)}{a^4(t)} \int_{t_I}^t a(t') e^{-\Gamma(t' - t_I)} dt'. \quad (4.2.27)$$

В современных моделях инфляции это является источником всего вещества и излучения в современной Вселенной.

---

Используя это соотношение, важно иметь в виду возможность *параметрического усиления* плотности  $\rho_\varphi(t_I)$ , т. е. значения вакуумного ожидания скалярного поля могут приводить к росту массы поля инфлатона  $\varphi$  и тем самым увеличивать плотность его энергии<sup>18)</sup>.

---

Начальное значение плотности энергии вещества (4.2.27) равно нулю при  $t = t_I$ , потом оно растет и в конце концов убывает, потому что при расширении Вселенной плотность падает. Имеет смысл найти значение  $\rho_m(t)$  в точке максимума, потому что отсюда следует максимальная когда-либо достигнутая температура, которая контролирует различные типы реликтов — холодную темную материю, барионы, монополи, аксионы — оставшиеся со времен ранней Вселенной. Данная максимальная плотность может быть легко вычислена в двух крайних случаях, для  $\Gamma \gg H(t_I)$  и  $\Gamma \ll H(t_I)$ .

Для  $\Gamma \gg H(t_I)$  с помощью последовательных интегрирований по частям выражение (4.2.27) можно представить в виде ряда по  $H(t_I)/\Gamma$ :

$$\rho_m(t) = \rho_\varphi(t_I) \left( \frac{a(t_I)}{a(t)} \right)^4 \left( 1 + \frac{H(t_I)}{\Gamma} + \dots \right). \quad (4.2.28)$$

Мы видим, что в этом случае  $\rho_m$  практически мгновенно возрастает до значения  $\rho_\varphi(t_I)$ , после чего убывает с обычным фактором  $a^{-4}$ , так что в этом случае

<sup>16)</sup> Термин «разогрев» исторически возник в ранних теориях инфляции, когда предполагалось, что медленное скатывание поля инфлатона при нулевой температуре следует за периодом с высокой температурой.

<sup>17)</sup> A. D. Dolgov and A. D. Linde, *Phys. Lett.* **116B**, 329 (1982); L. F. Abbott, E. Farhi, and M. B. Wise, *Phys. Lett.* **117B**, 29 (1982).

<sup>18)</sup> L. Kofman, A. D. Linde, and A. A. Starobinsky, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 3195 (1994); *Phys. Rev. D* **56**, 3258 (1997).

вся энергия поля инфлатона в конце инфляции переходит в обычное вещество и излучение. Именно таким было предположение, сделанное в предыдущем разделе при выводе нижних пределов на число  $e$ -кратностей инфляции.

Для  $\Gamma \ll H(t_I)$  максимальное значение  $\rho_m(T)$  достигается, когда экспонента  $e^{-\Gamma(t'-t_I)}$  в выражении (4.2.27) еще не начала убывать. (Этот факт будет проверяться ниже.) Положив этот фактор равным единице, получаем

$$\rho_m(t) \simeq \frac{\rho_\varphi(t_I)\Gamma a^3(t_I)}{a^4(t)} \int_{t_I}^t a(t') dt'. \quad (4.2.29)$$

На этот раз, основной вклад в плотность энергии Вселенной по-прежнему обеспечивается инфлатоном, так что  $a(t) = a(t_I)(t/t_I)^{2/3}$ , и выражение (4.2.29) принимает вид

$$\rho_m(t) \simeq \frac{3}{5}\Gamma t_I \rho_\varphi(t_I) \left(\frac{t_I}{t}\right)^{8/3} \left[ \left(\frac{t}{t_I}\right)^{5/3} - 1 \right]. \quad (4.2.30)$$

Здесь максимум достигается при  $(8/3)^{3/5}t_I$ , что попутно подтверждает, что с учетом предположения  $\Gamma \ll H(t_I) = 2/(3t_I)$  показателем экспоненты в (4.2.27) в точке максимума можно по-прежнему пренебречь. Для такого максимального значения плотность материи равна

$$\rho_{m,\max} = \left(\frac{3}{8}\right)^{8/5} \Gamma t_I \rho_\varphi(t_I) = 0,139 \left(\frac{\Gamma}{H(t_I)}\right) \rho_\varphi(t_I). \quad (4.2.31)$$

В этом случае максимальная плотность энергии в начале эпохи излучения будет значительно меньше плотности энергии поля инфлатона в конце инфляции.

## 4.3

### Хаотическая инфляция, вечная инфляция

**Условие вечной инфляции • Условие хаотичной инфляции**

Вскоре было осознано, что некоторые модели «новой инфляции» действительно влекут за собой бесконечное рождение раздувающихся пузырьков<sup>19)</sup>. Такое поведение стало называться «вечной инфляцией»<sup>20)</sup>. В качестве одного примера рассмотрим скалярное поле инфлатона, когда в некоторой точке

<sup>19)</sup> P. J. Steinhardt, in *The Very Early Universe — Proceedings of the Nuffield Workshop*, 1982, eds. G. W. Gibbon, S. W. Hawking, and S. T. C. Siklos (Cambridge University Press, 1983): 251; A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* 27, 2848 (1983).

<sup>20)</sup> Обзор этого и других вариантов инфляции дан в А. Guth, доклад, сделанный на *Pritzker Symposium on the Status of Inflationary Cosmology*, January 1999, [astro-ph/0002188]; А. Linde, *J. Phys. Conf. Ser.* 24, 151 (2005) [hep-th/0503195].

пространства оно оказывается в неустойчивом равновесии (как в верхней точке горба потенциала), тогда вероятность того, что поле инфлатона по-прежнему будет находиться в этом состоянии по истечению времени  $t$ , убывает по закону  $e^{-\gamma t}$ . Однако объем, в котором скалярное поле находится в этом состоянии, увеличивается как  $e^{+3Ht}$ , поэтому, пока  $3H > \gamma$ , объем пространства, в котором по-прежнему будет происходить инфляция, будет вечно экспоненциально расти.

Ранее предполагалось, что изначально скалярное поле не зависит от положения в пространстве, за исключением малых флуктуаций, которые более подробно будут рассмотрены в гл. 10. Вскоре после появления механизма новой инфляции, возможности инфляционной теории значительно выросли и улучшились, после того как Линде<sup>21)</sup> предложил теорию «хаотической инфляции», в которой начальные значения одного или нескольких скалярных полей случайным образом зависят от положения в пространстве. Местами можно обнаружить области пространства, внутри которых поле инфлатона принимает почти однородное значение, для которого потенциал удовлетворяет условиям медленного скатывания (4.2.10) и (4.2.13), как например значительно превышающее планковскую массу значение в случае степенного потенциала. Тогда в таких областях будет происходить инфляция, при условии, что изначально размер области достаточно велик.

Требование достаточно большого размера однородных областей необходимо, потому что лагранжиан скалярного поля (B.63) содержит слагаемое с пространственными производными, которое для неоднородного скалярного поля приводит к вкладу  $-a^{-2}\nabla^2\varphi$  в левую часть уравнения (4.2.1). Чтобы данное слагаемое не стало помехой при анализе медленного скатывания из предыдущего раздела необходимо, чтобы масштаб  $L$  собственных расстояний, на котором  $\varphi$  принимает приблизительно постоянное начальное значение, был больше  $|\varphi/V'(\varphi)|^{1/2}$ . Например, для потенциала  $V(\varphi) = g\varphi^4$  это условие имеет вид

$$L \gg \frac{1}{2\sqrt{g}|\varphi|} = \left( \frac{1}{g(4\pi G)^2\varphi^4} \right)^{1/2} (\sqrt{\pi G} \varphi) \sqrt{4\pi G}. \quad (4.3.1)$$

Из теоретико-полевого условия (4.2.15) следует, что первый множитель намного больше единицы, а из условия медленности скатывания (4.2.10) следует, что второй множитель тоже много больше единицы, так что размер области должен сильно превышать значение третьего множителя, который по сути является планковской длиной. Такие относительно большие однородные области могут быть достаточно редки, однако никакого аргумента против этой гипотезы нет, потому что жизнь может возникать только после Больших взрывов, берущих начало вот в таких вот областях.

Достаточно большая область раздуется до огромных размеров, и для наблюдателей, находящихся глубоко внутри нее, она будет казаться однородной

<sup>21)</sup> A. D. Linde, *Phys. Lett.* **129B**, 177 (1983).

и изотропной. Таким образом, хаотическая инфляция решает загадку, которая не считалась таковой, даже когда разрабатывались первые инфляционные теории. Она объясняет не только почему пространство с метрикой Робертсона—Уокера, внутри которого мы живем, в прошлом было совершенно плоским; она также объясняет, почему мы вообще живем в пространстве с метрикой Робертсона—Уокера. К сожалению, достаточно трудно представить способ, которым мы когда-либо сможем наблюдать расположенные за пределами нашего раздувшегося пузыря части Вселенной. Возможно, что справедливость идеи хаотической инфляции будет подтверждена будущим прогрессом в фундаментальной физике, который может выявить существование подходящего поля инфлатона, а не астрономическими наблюдениями.

Даже если значение скалярного поля внутри некоторой области пространства было достаточно большим для запуска инфляции с медленным скатыванием, квантовые флуктуации на участках меньшего размера внутри данной области приведут впоследствии к еще большим значениям поля инфлатона, так что в этих участках начнется ранняя стадия инфляции<sup>22)</sup>. Таким образом, хаотическая инфляция также оказывается еще и вечной.

---

<sup>22)</sup> A. D. Linde, *Mod. Phys. Lett. A* **1**, 81 (1986); *Phys. Lett. B* **175**, 395 (1986); A. S. Goncharov, A. D. Linde, and V. F. Mukhanov, *Int. J. Mod. Phys. A* **2**, 561 (1987); A. D. Linde, D. A. Linde, and A. Mezhlumian, *Phys. Rev. D* **49**, 1783 (1994) [gr-qc/9306035].

# Глава 5

## ОБЩАЯ ТЕОРИЯ МАЛЫХ ФЛУКТУАЦИЙ

В большинстве вопросов, рассмотренных в предыдущих главах, Вселенная считалась изотропной и однородной, с гравитационным полем, описываемым метрикой Робертсона—Уокера. Разумеется, такой подход является приближенным и упускает из виду многие самые интересные явления во Вселенной: галактические скопления, галактики, звезды, нас. Теперь мы переходим к анализу таких отклонений от однородности и изотропности.

В данной главе фундамент подобного анализа будет заложен посредством вывода общих релятивистских уравнений, описывающих малые флуктуации, а также на основе общих заключений относительно следствия этих уравнений. В гл. 6 построенный формализм будет применен к эволюции структур, начиная с эры доминирования излучения вплоть до настоящего времени. В гл. 7 и 8 полученные в гл. 6 результаты будут применены к наблюдаемым флуктуациям реликтового излучения, а также к росту структур. В гл. 9 рассматривается гравитационное линзирование, которое в перспективе может стать наилучшим способом анализа крупномасштабной структуры темной материи. Рассмотрение в этих главах происходит на общем уровне, независимо от конкретных предположений насчет инфляционной эпохи, предшествующей эре доминирования излучения. Затем, в гл. 10, будут изучены выводы инфляционных теорий на основе вычислений, проведенных с 6 по 9 главы. Некоторые читатели захотят сразу же перейти к гл. 6, используя данную главу в качестве справочника полезных формул; другим читателям будет лучше прочесть все главы последовательно.

---

### 5.1

#### Полевые уравнения

**Возмущенный тензор Риччи • Возмущенный тензор энергии-импульса • Скалярные моды • Векторные моды • Тензорные моды**

Существенным свойством проводимого в этой главе анализа является предположение, что в течение практически всей истории развития Вселенной все отклонения от однородности и изотропии были малы, так что их можно рассматривать как возмущения первого порядка<sup>1)</sup>. Поскольку наблюдаемая

---

<sup>1)</sup> Изучение космологических флуктуаций первого порядка было начато в работе E. Lifshitz, *J. Phys. USSR* **10**, 116 (1946). Теория классических поправок второго рода была разработана

Вселенная практически однородна, и ее пространственная кривизна либо равна нулю, либо пренебрежимо мала вплоть до настоящего времени, будем считать, что невозмущенная метрика является метрикой Робертсона—Уокера (1.1.11) постоянной кривизны  $K = 0$ . (Эффекты от возможной конечной кривизны во времена, близкие к современным, будут включены при изложении в главах с 7 по 9, где они становятся существенными.) Тогда полная возмущенная метрика имеет вид

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (5.1.1)$$

где  $\bar{g}_{\mu\nu}$  — это невозмущенная метрика Робертсона—Уокера с  $K = 0$

$$\bar{g}_{00} = -1, \quad \bar{g}_{i0} = \bar{g}_{0i} = 0, \quad \bar{g}_{ij} = a^2(t)\delta_{ij}, \quad (5.1.2)$$

а  $h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}$  является малым возмущением.

---

С этого момента черта над любой величиной будет обозначать ее невозмущенное значение.

---

Возмущение для обратной матрицы произвольной матрицы  $M$  равно

$$\delta M^{-1} = -M^{-1}(\delta M)M^{-1},$$

так что возмущение обратной метрики имеет вид

$$h^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\nu} - \bar{g}^{\mu\nu} = -\bar{g}^{\mu\rho}\bar{g}^{\nu\sigma}h_{\rho\sigma} \quad (5.1.3)$$

с компонентами

$$h^{ij} = -a^{-4}h_{ij}, \quad h^{i0} = a^{-2}h_{i0}, \quad h^{00} = -h_{00}. \quad (5.1.4)$$

Отметим присутствие знака « $-$ » в последнем равенстве в (5.1.3); в наших обозначениях возмущение  $\delta g^{\mu\nu}$  метрики  $g^{\mu\nu}$  не задается простым использованием невозмущенной метрики для поднятия индексов у  $\delta g_{\mu\nu}$ .

Возмущение метрики приводит к возмущению аффинной связности

$$\delta\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \frac{1}{2}\bar{g}^{\mu\rho}(-2h_{\rho\sigma}\bar{\Gamma}^\sigma_{\nu\lambda} + \partial_\lambda h_{\rho\nu} + \partial_\nu h_{\rho\lambda} - \partial_\rho h_{\lambda\nu}). \quad (5.1.5)$$

При  $K = 0$  ненулевые компоненты невозмущенной аффинной связности задаются выражениями (1.1.17)–(1.1.19) в виде

$$\bar{\Gamma}_{j0}^i = \bar{\Gamma}_{0j}^i = \frac{\dot{a}}{a}\delta_{ij}, \quad \bar{\Gamma}_{ij}^0 = a\dot{a}\delta_{ij}.$$

---

в K. Tomita, *Prog. Theor. Phys.* **37**, 831 (1967); **45**, 1747 (1970); **47**, 416 (1971). Недавние исследования приведены в работах K. Tomita, *Phys. Rev. D* **71**, 3504 (2005); N. Bartolo, S. Matarrese, and A. Riotto, *J. Cosm. & Astropart. Phys.* **0606**, 024 (2006) [astro-ph/0604416].

Таким образом, формула (5.1.5) приводит к следующему виду компонент возмущенной аффинной связности:

$$\delta\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2a^2} (-2a\dot{a}h_{i0}\delta_{jk} + \partial_k h_{ij} + \partial_j h_{ik} - \partial_i h_{jk}), \quad (5.1.6)$$

$$\delta\Gamma_{j0}^i = \frac{1}{2a^2} \left( -\frac{2\dot{a}}{a} h_{ij} + \dot{h}_{ij} + \partial_j h_{i0} - \partial_i h_{j0} \right), \quad (5.1.7)$$

$$\delta\Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2} (2a\dot{a}\delta_{ij}h_{00} - \partial_j h_{i0} - \partial_i h_{j0} + \dot{h}_{ij}), \quad (5.1.8)$$

$$\delta\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2a^2} (2\dot{h}_{i0} - \partial_i h_{00}), \quad (5.1.9)$$

$$\delta\Gamma_{i0}^0 = \frac{\dot{a}}{a} h_{i0} - \frac{1}{2} \partial_i h_{00}, \quad (5.1.10)$$

$$\delta\Gamma_{00}^0 = -\frac{1}{2} \dot{h}_{00}. \quad (5.1.11)$$

В особенности нам понадобится

$$\delta\Gamma_{\lambda\mu}^\lambda = \partial_\mu \left( \frac{1}{2a^2} h_{ii} - \frac{1}{2} h_{00} \right).$$

Чтобы выписать уравнения Эйнштейна, необходимо знать возмущение тензора Риччи

$$\delta R_{\mu\kappa} = \frac{\partial \delta\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \delta\Gamma_{\mu\kappa}^\lambda}{\partial x^\lambda} + \delta\Gamma_{\mu\nu}^\eta \bar{\Gamma}_{\kappa\eta}^\nu + \delta\Gamma_{\kappa\eta}^\nu \bar{\Gamma}_{\mu\nu}^\eta - \delta\Gamma_{\mu\kappa}^\eta \bar{\Gamma}_{\nu\eta}^\nu - \delta\Gamma_{\nu\eta}^\nu \bar{\Gamma}_{\mu\kappa}^\eta \quad (5.1.12)$$

с компонентами

$$\begin{aligned} \delta R_{jk} &= -\frac{1}{2} \partial_j \partial_k h_{00} - (2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) \delta_{jk} h_{00} - \frac{1}{2} a\dot{a}\delta_{jk} \dot{h}_{00} + \\ &+ \frac{1}{2a^2} (\nabla^2 h_{jk} - \partial_i \partial_j h_{ik} - \partial_i \partial_k h_{ij} + \partial_j \partial_k h_{ii}) - \\ &- \frac{1}{2} \ddot{h}_{jk} + \frac{\dot{a}}{2a} (\dot{h}_{jk} - \delta_{jk} \dot{h}_{ii}) + \frac{\dot{a}^2}{a^2} (-2h_{jk} + \delta_{jk} h_{ii}) + \frac{\dot{a}}{a} \delta_{jk} \partial_i h_{i0} + \\ &+ \frac{1}{2} (\partial_j \dot{h}_{k0} + \partial_k \dot{h}_{j0}) + \frac{\dot{a}}{2a} (\partial_j h_{k0} + \partial_k h_{j0}), \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

$$\begin{aligned} \delta R_{0j} &= \delta R_{j0} = \frac{\dot{a}}{a} \partial_j h_{00} + \frac{1}{2a^2} (\nabla^2 h_{j0} - \partial_j \partial_i h_{i0}) - \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} \right) h_{j0} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{a^2} (\partial_j h_{kk} - \partial_k h_{kj}) \right], \end{aligned} \quad (5.1.14)$$

$$\delta R_{00} = \frac{1}{2a^2} \nabla^2 h_{00} + \frac{3\dot{a}}{2a} \dot{h}_{00} - \frac{1}{a^2} \partial_i \dot{h}_{i0} + \frac{1}{2a^2} \left[ \ddot{h}_{ii} - \frac{2\dot{a}}{a} \dot{h}_{ii} + 2 \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} \right) h_{ii} \right]. \quad (5.1.15)$$

В общем случае уравнения Эйнштейна (B.71) можно привести к виду

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G S_{\mu\nu}, \quad (5.1.16)$$

где

$$S_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\sigma} T_{\rho\sigma}. \quad (5.1.17)$$

Космологическую постоянную можно учесть, включив в  $T_{\mu\nu}$  слагаемое, пропорциональное  $g_{\mu\nu}$  с постоянным коэффициентом.

Возмущение тензора энергии-импульса и метрики приводит к возмущению тензора источника  $S_{\mu\nu}$ :

$$\delta S_{\mu\nu} = \delta T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \delta T^\lambda_\lambda - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} \bar{T}^\lambda_\lambda. \quad (5.1.18)$$

Мы не предполагаем, что ингредиенты Вселенной образуют идеальную жидкость, однако вращательная и трансляционная инвариантность *невозмущенного* тензора энергии-импульса  $\bar{T}^{\mu\nu}$  требует, чтобы он имел вид, как в случае идеальной жидкости (B.42):

$$\bar{T}_{\mu\nu} = \bar{p} \bar{g}_{\mu\nu} + (\bar{p} + \bar{\rho}) u_\mu u_\nu, \quad (5.1.19)$$

где  $\bar{\rho}(t)$ ,  $\bar{p}(t)$  и  $\bar{u}^\mu$  — это, соответственно, невозмущенные плотность энергии, давление и 4-вектор скорости с компонентами  $\bar{u}^0 = 1$  и  $\bar{u}^i = 0$ . Кроме этого, используя невозмущенные уравнения Эйнштейна (1.5.17) и (1.5.18),  $\bar{\rho}$  и  $\bar{p}$  можно записать в терминах масштабного фактора метрики Робертсона—Уокера и его производных

$$\bar{\rho} = \frac{3}{8\pi G} \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right), \quad \bar{p} = -\frac{1}{8\pi G} \left( \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right). \quad (5.1.20)$$

В частности, отсюда следует, что след невозмущенного тензора энергии-импульса равен

$$\bar{T}^\lambda_\lambda = 3\bar{p} - \bar{\rho} = -\frac{3}{4\pi G} \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right).$$

Таким образом, из соотношения (5.1.18) следует, что

$$\delta S_{jk} = \delta T_{jk} - \frac{a^2}{2} \delta_{jk} \delta T^\lambda_\lambda + \frac{3}{8\pi G} \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) h_{jk}, \quad (5.1.21)$$

$$\delta S_{j0} = \delta T_{j0} + \frac{3}{8\pi G} \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) h_{j0}, \quad (5.1.22)$$

$$\delta S_{00} = \delta T_{00} + \frac{1}{2} \delta T^\lambda_\lambda + \frac{3}{8\pi G} \left( \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) h_{00}. \quad (5.1.23)$$

Тогда уравнения Эйнштейна (5.1.16) принимают вид

$$\begin{aligned} -8\pi G \left( \delta T_{jk} - \frac{a^2}{2} \delta_{jk} \delta T^\lambda_\lambda \right) &= -\frac{1}{2} \partial_j \partial_k h_{00} - 2(2\dot{a}^2 + a\ddot{a}) \delta_{jk} h_{00} - \\ &- \frac{1}{2} a\dot{a} \delta_{jk} \dot{h}_{00} + \frac{1}{2a^2} (\nabla^2 h_{jk} - \partial_i \partial_j h_{ik} - \partial_i \partial_k h_{ij} + \partial_j \partial_k h_{ii}) - \\ &- \frac{1}{2} \ddot{h}_{jk} + \frac{\dot{a}}{2a} (\dot{h}_{jk} - \delta_{jk} \dot{h}_{ii}) + \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3\ddot{a}}{a} \right) h_{jk} + \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \delta_{jk} h_{ii} + \\ &+ \frac{\dot{a}}{a} \delta_{jk} \partial_i h_{i0} + \frac{1}{2} (\partial_j \dot{h}_{k0} + \partial_k \dot{h}_{j0}) + \frac{\dot{a}}{2a} (\partial_j h_{k0} + \partial_k h_{j0}), \end{aligned} \quad (5.1.24)$$

$$\begin{aligned} -8\pi G \delta T_{j0} &= \frac{\dot{a}}{a} \partial_j h_{00} + \frac{1}{2a^2} (\nabla^2 h_{j0} - \partial_j \partial_i h_{i0}) + \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2\ddot{a}}{a} \right) h_{j0} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{a^2} (\partial_j h_{kk} - \partial_k h_{kj}) \right], \end{aligned} \quad (5.1.25)$$

$$\begin{aligned} -8\pi G \left( \delta T_{00} + \frac{1}{2} \delta T^\lambda_\lambda \right) &= \frac{1}{2a^2} \nabla^2 h_{00} + \frac{3\dot{a}}{2a} \dot{h}_{00} - \frac{1}{a^2} \partial_i \dot{h}_{i0} + \\ &+ \frac{1}{2a^2} \left[ \ddot{h}_{ii} - \frac{2\dot{a}}{a} \dot{h}_{ii} + 2 \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\ddot{a}}{a} \right) h_{ii} \right] + 3 \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a} \right) h_{00}. \end{aligned} \quad (5.1.26)$$

Компоненты тензора энергии-импульса удовлетворяют условию сохранения  $T^\mu_{;\nu,\mu} = 0$ , которое в первом порядке теории возмущений приводит к выражению

$$\partial_\mu \delta T^\mu_\nu + \bar{\Gamma}^\mu_{\mu\lambda} \delta T^\lambda_\nu - \bar{\Gamma}^\lambda_{\mu\nu} \delta T^\mu_\lambda + \delta \Gamma^\mu_{\mu\lambda} \bar{T}^\lambda_\nu - \delta \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \bar{T}^\mu_\lambda = 0, \quad (5.1.27)$$

в котором возмущения тензора энергии-импульса  $\delta T^\mu_\nu$ , со смешанными индексами могут быть вычислены с помощью

$$\delta T^\mu_\nu = \bar{g}^{\mu\lambda} (\delta T_{\lambda\nu} - h_{\lambda\kappa} \bar{T}^\kappa_\nu). \quad (5.1.28)$$

Выбирая пространственную компоненту  $j$  индекса  $\nu$ , получаем закон сохранения импульса

$$\partial_0 \delta T^0_j + \partial_i \delta T^i_j + \frac{2\dot{a}}{a} \delta T^0_j - a\dot{a} \delta T^j_0 - (\bar{\rho} + \bar{p}) \left( \frac{1}{2} \partial_j h_{00} - \frac{\dot{a}}{a} h_{j0} \right) = 0, \quad (5.1.29)$$

выбирая временную компоненту индекса  $\nu$ , получаем закон сохранения энергии

$$\partial_0 \delta T^0_0 + \partial_i \delta T^i_0 + \frac{3\dot{a}}{a} \delta T^0_0 - \frac{\dot{a}}{a} \delta T^i_i - \left( \frac{\bar{\rho} + \bar{p}}{2a^2} \right) \left( -\frac{2\dot{a}}{a} h_{ii} + \dot{h}_{ii} \right) = 0. \quad (5.1.30)$$

Как отмечается в приложении В, эти законы сохранения не являются независимыми соотношениями и могут быть получены из полевых уравнений Эйнштейна. Однако часто удобно использовать любой из двух или оба вместе

вместо первого или второго полевого уравнения. Также в часто встречающемся случае, когда ингредиентами Вселенной являются невзаимодействующие друг с другом жидкости (например, одна жидкость — это холодная темная материя, а другая — это обычное вещество и излучение), эти законы сохранения выполняются для каждой жидкости *по отдельности*, причем информация об этом не может быть получена на основе полевых уравнений.

Полученные до сих пор результаты отталкивающие сложны. К счастью, пространственная изотропия и однородность невозмущенной метрики и тензора энергии-импульса позволяют упростить эти результаты, разложив возмущения на скаляры, бездивергентные векторы и бездивергентные бесследовые симметричные тензоры, которые не смешиваются друг с другом в уравнениях движения или законах сохранения. Возмущение метрики можно всегда привести к виду<sup>2)</sup>

$$h_{00} = -E, \quad (5.1.31)$$

$$h_{i0} = a \left( \frac{\partial F}{\partial x^i} + G_i \right), \quad (5.1.32)$$

$$h_{ij} = a^2 \left( A \delta_{ij} + \frac{\partial^2 B}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial C_i}{\partial x^j} + \frac{\partial C_j}{\partial x^i} + D_{ij} \right), \quad (5.1.33)$$

где возмущения  $A$ ,  $B$ ,  $C_i$ ,  $D_{ij} = D_{ji}$ ,  $E$ ,  $F$  и  $G_i$  — это функции  $\mathbf{x}$  и  $t$ , удовлетворяющие условиям

$$\frac{\partial C_i}{\partial x^i} = \frac{\partial G_i}{\partial x^i} = 0, \quad \frac{\partial D_{ij}}{\partial x^i} = 0, \quad D_{ii} = 0. \quad (5.1.34)$$

Чтобы провести аналогичное разложение тензора энергии-импульса, для начала заметим, что в случае идеальной жидкости

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (\rho + p)u_\mu u_\nu, \quad (5.1.35)$$

где

$$g^{\mu\nu} u_\mu u_\nu = -1. \quad (5.1.36)$$

Вспоминая, что  $\bar{u}_i = 0$  и  $\bar{u}_0 = -1$ , из условия нормировки (5.1.36) находим

$$\delta u^0 = \delta u_0 = \frac{h_{00}}{2}, \quad (5.1.37)$$

а  $\delta u_i$  является независимой динамической переменной.

---

<sup>2)</sup> Чтобы убедиться в этом, определим  $F$ ,  $A$  и  $B$  в качестве решений

$$\nabla^2 F = a^{-1} \partial_i h_{i0}, \quad \nabla^2 A + \nabla^4 B = a^{-2} \partial_i \partial_j h_{ij} \quad \text{и} \quad 3A + \nabla^2 B = a^{-2} h_{ii},$$

затем определим  $C_i$  в качестве решения

$$\nabla^2 C_i = a^{-2} \partial_j h_{ij} - \partial_i [A + \nabla^2 B],$$

после чего с помощью соотношений (5.1.32) и (5.1.33) определим  $G_i$  и  $D_{jk}$ .

Отметим, что  $\delta u^\mu \equiv \delta(g^{\mu\nu}u_\nu)$  не задается  $\bar{g}^{\mu\nu}\delta u_\nu$ .

Тогда возмущение первого порядка для тензора энергии-импульса идеальной жидкости равно

$$\begin{aligned}\delta T_{ij} &= \bar{p}h_{ij} + a^2\delta_{ij}\delta p, \\ \delta T_{i0} &= \bar{p}h_{i0} - (\bar{\rho} + \bar{p})\delta u_i, \\ \delta T_{00} &= -\bar{\rho}h_{00} + \delta\rho.\end{aligned}\quad (5.1.38)$$

Вообще, всегда можно представить возмущенный тензор энергии-импульса в таком же виде, как и возмущенную метрику. Заметим, что в общем случае  $\delta\rho$  определяется как для идеальной жидкости, т. е. как разность между  $\delta T_{00}$  и  $-\bar{\rho}h_{00}$ , но  $\delta\rho$  не обязательно получается варьированием температуры и химических потенциалов в формуле, определяющей плотность  $\rho$  применительно к тепловому равновесию. Также в общем случае возмущение скорости  $\delta u_i$ , умноженное на  $\bar{\rho} + \bar{p}$ , определяется, как и для идеальной жидкости, в виде разности между  $-\delta T_{i0}$  и  $\bar{p}h_{i0}$ , и  $\delta u_i$  разлагается на градиент скалярного потенциала скорости  $\delta u$  и бездивергентный вектор  $\delta u_i^V$ . Наконец,  $a^2\delta p$  определяется как коэффициент при  $\delta_{ij}$  в разности между  $\delta T_{ij}$  и  $\bar{p}h_{ij}$ , опять без предположения о том, что  $\delta p$  есть результат варьирования температуры и химических потенциалов в формуле, задающей  $p$  в случае теплового равновесия. Остальные члены в  $\delta T_{ij}$ , обозначенные как  $\partial_i\partial_j\pi^S$ ,  $\partial_i\pi_j^V + \partial_j\pi_i^V$  и  $\pi_{ij}^T$ , представляют собой радиационные поправки к тензору инерции. В силу этого запишем

$$\delta T_{ij} = \bar{p}h_{ij} + a^2(\delta_{ij}\delta p + \partial_i\partial_j\pi^S + \partial_i\pi_j^V + \partial_j\pi_i^V + \pi_{ij}^T), \quad (5.1.39)$$

$$\delta T_{i0} = \bar{p}h_{i0} - (\bar{\rho} + \bar{p})(\partial_i\delta u + \delta u_i^V), \quad (5.1.40)$$

$$\delta T_{00} = \bar{\rho}h_{00} + \delta\rho, \quad (5.1.41)$$

где  $\pi_i^V$ ,  $\pi_{ij}^T$  и  $\delta u_i^V$  удовлетворяют условиям, аналогичным условиям (5.1.34), которым удовлетворяют  $C_i$ ,  $D_{ij}$  и  $G_i$ :

$$\partial_i\pi_i^V = \partial_i\delta u_i^V = 0, \quad \partial_i\pi_{ij}^T = 0, \quad \pi_{ii}^T = 0. \quad (5.1.42)$$

Еще раз: эти формулы можно воспринимать как определения величин  $\delta\rho$ ,  $\delta p$  и  $\delta u_i \equiv \partial_i\delta u + \delta u_i^V$ , а также членов  $\pi^S$ ,  $\pi^V$  и  $\pi^T$  *анизотропной инерции*, характеризующих отклонения от тензора энергии-импульса для идеальной жидкости. Возмущенные смешанные компоненты (5.1.28) тензора энергии-импульса, которые необходимы в записи законов сохранения, теперь принимают вид

$$\begin{aligned}\delta T^i{}_j &= \delta_{ij}\delta p + \partial_i\partial_j\pi^S + \partial_i\pi_j^V + \partial_j\pi_i^V + \pi_{ij}^T, \\ \delta T^i{}_0 &= a^{-2}(\bar{\rho} + \bar{p})(a\partial_iF + aG_i - \partial_i\delta u - \delta u_i^V), \\ \delta T^0{}_i &= (\bar{\rho} + \bar{p})(\partial_i\delta u + \delta u_i^V), \quad \delta T^0{}_0 = -\delta\rho, \\ \delta T^\lambda{}_\lambda &= 3\delta p - \delta\rho + \nabla^2\pi^S.\end{aligned}\quad (5.1.43)$$

Используя вышеприведенные разложения и еще раз уравнения (5.1.20), находим, что уравнения поля Эйнштейна (5.1.24)–(5.1.26) и законы сохранения (5.1.29) и (5.1.30) разбиваются на три класса связанных уравнений.

### Скалярные (продольные) моды

Эти моды самые сложные, они вовлекают восемь скаляров:  $E$ ,  $F$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $\delta\rho$ ,  $\delta p$ ,  $\pi^S$  и  $\delta u$ . Часть уравнения (5.1.24), пропорциональная  $\delta_{jk}$ , дает

$$\begin{aligned} -4\pi Ga^2[\delta\rho - \delta p - \nabla^2\pi^S] = & \frac{1}{2}a\dot{a}\dot{E} + (2\dot{a}^2 + a\ddot{a})E + \frac{1}{2}\nabla^2A - \frac{1}{2}a^2\ddot{A} - \\ & - 3a\dot{a}\dot{A} - \frac{1}{2}a\dot{a}\nabla^2\dot{B} + \dot{a}\nabla^2F. \end{aligned} \quad (5.1.44)$$

Часть (5.1.24) вида  $\partial_j\partial_k S$  (где  $S$  — это произвольный скаляр) дает

$$\partial_j\partial_k[16\pi Ga^2\pi^S + E + A - a^2\ddot{B} - 3a\dot{a}\dot{B} + 2a\dot{F} + 4\dot{a}F] = 0. \quad (5.1.45)$$

Часть (5.1.25) вида  $\partial_j S$  (где  $S$  снова является произвольным скаляром) дает

$$8\pi Ga(\bar{\rho} + \bar{p})\partial_j\delta u = -\dot{a}\partial_jE + a\partial_j\dot{A}. \quad (5.1.46)$$

Уравнение (5.1.25) дает

$$\begin{aligned} -4\pi G(\delta\rho + 3\delta p + \nabla^2\pi^S) = & -\frac{1}{2a^2}\nabla^2E - \frac{3\dot{a}}{2a}\dot{E} - \frac{1}{a}\nabla^2\dot{F} - \frac{\dot{a}}{a^2}F + \\ & + \frac{3}{2}\ddot{A} + \frac{3\dot{a}}{a}\dot{A} - \frac{3\ddot{a}}{a}E + \frac{1}{2}\nabla^2\ddot{B} + \frac{\dot{a}}{a}\nabla^2\dot{B}. \end{aligned} \quad (5.1.47)$$

Часть закона сохранения импульса (5.1.29), являющаяся производной  $\partial_j$ , равна

$$\partial_j\left[\delta p + \nabla^2\pi^S + \partial_0[(\bar{\rho} + \bar{p})\delta u] + \frac{3\dot{a}}{a}(\bar{\rho} + \bar{p})\delta u + \frac{1}{2}(\bar{\rho} + \bar{p})E\right] = 0, \quad (5.1.48)$$

а условие сохранения энергии (5.1.30) имеет вид

$$\begin{aligned} \delta\dot{p} + \frac{3\dot{a}}{a}(\delta\rho + \delta p) + \nabla^2\left[-a^{-1}(\bar{\rho} + \bar{p})F + a^{-2}(\bar{\rho} + \bar{p})\delta u + \frac{\dot{a}}{a}\pi^S\right] + \\ + \frac{1}{2}(\bar{\rho} + \bar{p})\partial_0[3A + \nabla^2B] = 0. \end{aligned} \quad (5.1.49)$$

В соотношениях (5.1.48) и (5.1.49)  $\delta\rho$ ,  $\delta p$  и  $\pi^S$  являются элементами возмущения полного тензора энергии-импульса, однако такие же уравнения справедливы для каждого ингредиента Вселенной, который не обменивается импульсом и энергией с другими ингредиентами.

### Векторные (вращательные) моды

Эти моды содержат четыре бездивергентных вектора:  $G_i$ ,  $C_i$ ,  $\delta u_i^V$  и  $\pi_i^V$ . Часть уравнения (5.1.24) вида  $\partial_k V_j$  (где  $V_j$  — это произвольный вектор, удовлетворяющий  $\partial_j V_j = 0$ ) дает

$$\partial_k [16\pi G a^2 \pi_j^V - a^2 \ddot{C}_j - 3a\dot{a}\dot{C}_j + a\dot{G}_j + 2\dot{a}G_j] = 0, \quad (5.1.50)$$

а часть уравнения (5.1.25) вида  $V_j$  (где  $V_j$  снова является произвольным вектором, удовлетворяющим  $\partial_j V_j = 0$ ) дает

$$8\pi G(\bar{\rho} + \bar{p})a \delta u_j^V = \frac{1}{2} \nabla^2 G_j - \frac{a}{2} \nabla^2 \dot{C}_j. \quad (5.1.51)$$

Имеющая вид бездивергентного вектора часть закона сохранения импульса (5.1.29) равна

$$\nabla^2 \pi_j^V + \partial_0 [(\bar{\rho} + \bar{p}) \delta u_j^V] + \frac{3\dot{a}}{a} (\bar{\rho} + \bar{p}) \delta u_j^V = 0. \quad (5.1.52)$$

В частности, для идеальной жидкости  $\pi_i^V = 0$ , и из уравнения (5.1.52) следует, что  $(\bar{\rho} + \bar{p}) \delta u_j^V$  затухает по закону  $1/a^3$ . В этом случае уравнения (5.1.50) и (5.1.51) подразумевают, что величина  $G_j - a\dot{C}_j$  (которая, как будет видно в разд. 5.3, является единственной физически существенной комбинацией компонент метрики для векторного возмущения) затухает по закону  $1/a^2$ . По причине затухания, векторные моды не играют большой роли в космологии.

### Тензорные (радиационные) моды

Эти моды включают в себя только два бесследовых бездивергентных симметричных тензора:  $D_{ij}$  и  $\pi_{ij}^T$ . В этом случае имеется лишь одно уравнение: та часть уравнения (5.1.24), которая имеет вид бездивергентного бесследового тензора, представляет собой волновое уравнение для гравитационного излучения:

$$-16\pi G a^2 \pi_{ij}^T = \nabla^2 D_{ij} - a^2 \ddot{D}_{ij} - 3a\dot{a}\dot{D}_{ij}. \quad (5.1.53)$$

Приведенные выше уравнения для скалярных, векторных и тензорных возмущений не образуют полный набор. Отчасти это происходит потому, что все еще имеется произвол в преобразованиях координат, того же порядка что и физические возмущения. В разд. 5.3 станет видно, как данный произвол зафиксировать выбором «калибровки».

Но даже после того, как калибровочные поля зафиксированы, если давление  $p$  и анизотропную инерцию  $\pi^S$  не выразить как функции от плотности энергии  $\rho$ , то уравнения для скалярных мод все равно не будут образовывать полный набор. Так происходит, например, для такого ингредиента Вселенной, как холодная темная материя, частицы которой имеют пренебрежимо малые скорости и не взаимодействуют с другими составляющими. Для таких составляющих можно просто положить  $p$  и  $\pi^S$  равными нулю. Ситуация становится чуть более сложной для ингредиентов Вселенной, скоростями частиц которых

уже нельзя пренебречь, но которые участвуют в столкновениях, достаточно частых для установления локального теплового равновесия. В таких случаях, модой  $\pi^S$  можно пренебречь, и если частицы являются ультрарелятивистскими, то  $p$  — это просто  $\rho/3$ . Даже там, где частицы умеренно релятивистские, давление при тепловом равновесии, как правило, можно представить как функцию от  $\rho$  и от одной или более плотностей числа частиц  $n$ , которые удовлетворяют условию сохранения тока  $nu^\mu$

$$(nu^\mu)_{;\mu} = 0. \quad (5.1.54)$$

Из этого условия следует, что невозмущенная плотность числа частиц удовлетворяет  $\bar{n} \propto a^{-3}$ , а соответствующее возмущение подчиняется уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\delta n}{\bar{n}} \right) + \frac{1}{a^2} \nabla^2 \delta u + \frac{1}{2} (3\dot{A} + \nabla^2 \dot{B}) - \frac{1}{a} \nabla^2 F = 0. \quad (5.1.55)$$

Если  $p$  выражается как функция от  $\rho$  и  $n$ , после фиксации калибровки в полевых уравнениях и законах сохранения уравнения (5.1.48), (5.1.49) и (5.1.55) образуют полный набор уравнений для скалярных мод.

Аналогично, даже после фиксации калибровки, уравнения для векторных и тензорных мод не образуют полный набор до тех пор, пока не получены формулы для  $\pi_i^V$  и  $\pi_{ij}^T$ , соответственно. Для идеальных жидкостей, для которых  $\pi_i^V = \pi_{ij}^T = 0$ , такой проблемы нет.

В общем случае локальное тепловое равновесие отсутствует и необходимо вычислять  $\delta\rho$ ,  $\delta p$ ,  $\pi^S$ ,  $\pi_i^V$  и  $\pi_{ij}^T$ , отслеживая изменения распределения положений и импульсов отдельных частиц, которые удовлетворяют уравнениям Больцмана. Уравнения Больцмана для фотонов и нейтрино выводятся в приложении Н и используются в гл. 6 и 7.

## 5.2

---

### Разложение Фурье и стохастические начальные условия

**Решения в виде плоских волн • Стохастические параметры • Корреляционные функции • Разложение по спиральностям**

Для упрощения рассмотрения давайте в полном объеме воспользуемся симметриями изучаемой задачи. Мы уже воспользовались вращательной симметрией поля и законами сохранения при классификации возмущений на скалярные, векторные и тензорные моды; далее в текущем разделе вращательная симметрия будет применена еще раз. Уравнения также обладают симметрией относительной пространственных трансляций, которые наиболее продуктивно используются при переходе к фурье-компонентам возмущений. Пока возмущения считаются бесконечно малыми, нет никаких соотношений между

фурье-компонентами с различными волновыми числами. К тому же, лишь начальные условия, а не сами уравнения, зависят от направления сопутствующего волнового вектора  $\mathbf{q}$ .

Давайте сначала рассмотрим как это работает в случае скалярных мод. Поскольку невозмущенные метрика, плотность энергии, и т. п. не зависят от положения в пространстве, общее решение для соответствующих возмущенных величин может быть записано в виде суперпозиции плоских волн, пространственные зависимости которых задаются множителями  $\exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})$ , где  $\mathbf{q}$  — это вещественный волновой вектор, по которому происходит интегрирование. Коэффициент перед  $\exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})$  в каждом скалярном возмущении  $A(\mathbf{x}, t)$ ,  $B(\mathbf{x}, t)$  и т. д. является решением системы обыкновенных дифференциальных уравнений с временной независимой переменной, которые получаются заменой  $\partial/\partial x^j$  на  $iq_j$  в уравнениях из разд. 5.1. Полученные таким образом дифференциальные уравнения зависят от  $q \equiv |\mathbf{q}|$ , но не от направления  $\mathbf{q}$ , поэтому решение можно записать в виде суперпозиций независимых нормальных мод, нумерованных индексом  $q$ , каждая из которых характеризуется набором возмущений  $A_{nq}(t)$ ,  $B_{nq}(t)$  и т. д. с общим нормировочным множителем  $\alpha_n(\mathbf{q})$ , у которого дискретный индекс  $n$  нумерует различные независимые решения. Эти нормировочные множители зависят от начальных условий, которые, конечно же, не являются вращательно инвариантными — иначе не было бы звезд и галактик — поэтому  $\alpha_n(\mathbf{q})$  зависят от направления  $\mathbf{q}$ , но при этом решения  $A_{nq}(t)$ ,  $B_{nq}(t)$  можно выбрать зависящими только от  $q \equiv |\mathbf{q}|$ . Значит, записываем

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}, t) &= \sum_n \int d^3 q \alpha_n(\mathbf{q}) A_{nq}(t) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}, \\ B(\mathbf{x}, t) &= \sum_n \int d^3 q \alpha_n(\mathbf{q}) B_{nq}(t) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

и точно таким же образом (с таким же  $\alpha_n(\mathbf{q})$ ) выписываются выражения для  $E$  и  $F$ , а также для  $\delta\rho$ ,  $\delta p$ ,  $\delta u$ ,  $\pi^S$  и для любых других вращательных скаляров.

Далее, как обсуждалось в разд. 2.6, ожидается, что скалярные переменные  $A(\mathbf{x}, t)$ ,  $B(\mathbf{x}, t)$  и т. д. должны быть стохастическими, характеризуемыми средними своих произведений. Решения  $\{A_{nq}(t), B_{nq}(t)\}$  являются обычными фиксированными функциями, а не стохастическими переменными, поэтому стохастическая природа скалярных переменных заложена в стохастичности начальных условий, отраженной в множителях  $\alpha_n(\mathbf{q})$ . При предположении, что скалярные переменные подчиняются гауссовым распределениям того типа, что обсуждаются в Приложении E, все средние скалярных величин могут быть выражены в терминах билинейных средних  $\langle A(\mathbf{x}, t)A(\mathbf{y}, t) \rangle$ ,  $\langle A(\mathbf{x}, t)B(\mathbf{y}, t) \rangle$  и т. д. Давайте рассмотрим среднее от произведения любых двух вещественных скалярных величин  $X(\mathbf{x}, t)$  и  $Y(\mathbf{y}, t)$ . Очень полезным

оказывается воспользоваться соотношениями для  $X$  вида (5.2.1) и комплексно сопряженными соотношениями для  $Y$ , так что

$$\langle X(\mathbf{x}, t) Y(\mathbf{y}, t) \rangle = \sum_{nm} \int d^3 q \int d^3 q' X_{nq}(t) Y_{mq}^*(t) \langle \alpha_n(\mathbf{q}) \alpha_m^*(\mathbf{q}') \rangle e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} e^{-i\mathbf{q}' \cdot \mathbf{y}}.$$

Мы предполагаем, что хотя начальные условия не являются трансляционно инвариантными, они описываются трансляционно инвариантной функцией распределения вероятности, поэтому  $\langle X(\mathbf{x}, t) Y(\mathbf{y}, t) \rangle$  должны быть функцией только  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ . Отсюда немедленно следует, что  $\langle \alpha_n(\mathbf{q}) \alpha_m^*(\mathbf{q}') \rangle$  должны быть пропорциональны дельта-функции,  $\delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$ . Кроме того, хотя начальные условия не являются вращательно инвариантными, также предполагается, что они описываются вращательно инвариантным распределением вероятности, поэтому функция от  $\mathbf{q}$ , на которую умножается дельта-функция, может зависеть только от абсолютного значения волнового вектора  $q \equiv |\mathbf{q}|$ , а не от его направления. Значит, можно записать

$$\langle \alpha_n(\mathbf{q}) \alpha_m^*(\mathbf{q}') \rangle = \mathcal{P}_{nm}(q) \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}'). \quad (5.2.2)$$

Тем самым,

$$\langle X(\mathbf{x}, t) Y(\mathbf{y}, t) \rangle = \sum_{nm} \int d^3 q X_{nq}(t) Y_{mq}^*(t) \mathcal{P}_{nm}(q) \exp[i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})]. \quad (5.2.3)$$

Задача теории космологических флуктуаций состоит из двух частей: нахождение решений дифференциальных уравнений  $A_{nq}(t)$ ,  $B_{nq}(t)$  и т. д. при подходящих предположениях относительно ингредиентов Вселенной и вычисление спектральных функций  $\mathcal{P}_{nm}(q)$  в теории происхождения флуктуаций в очень ранней Вселенной.

Рассмотрение соотношения (5.2.2) немедленно показывает, что  $\mathcal{P}_{nm}(q)$  является эрмитовой матрицей

$$\mathcal{P}_{nm}^*(q) = \mathcal{P}_{mn}(q) \quad (5.2.4)$$

и положительной в смысле

$$\sum_{nm} \mathcal{P}_{nm}(q) \xi_n \xi_m^* > 0 \quad (5.2.5)$$

для любого набора комплексных чисел  $\xi_n$  (или функций от  $q$ ), не все из которых равны нулю.

Как правило, для произвольного выбора независимых решений нет никакой причины, почему  $\mathcal{P}_{nm}(q)$  должна быть диагональной, поэтому в общем случае между различными модами возникнет интерференция. Однако иногда удобно выбрать решения таким образом, что  $\mathcal{P}_{nm}(q)$  просто равно  $\delta_{nm}$ . Чтобы увидеть, что это возможно всегда, вспомним теорему из линейной алгебры, которая утверждает, что положительную и эрмитову матрицу  $\mathcal{P}_{nm}(q)$  можно привести к виду

$$\mathcal{P}_{nm}(q) = \sum_r Z_{nr}(q) Z_{mr}^*(q), \quad (5.2.6)$$

где  $Z_{nr}(q)$  — это некоторая квадратная матрица,  $r$  пробегает те же значения, что и  $n$  (т. е. в матричных обозначениях  $\mathcal{P} = ZZ^\dagger$ ). Тогда независимые решения можно переопределить следующим образом:

$$\tilde{A}_{rq}(t) \equiv \sum_n Z_{nr}(q) A_{nq}(t), \quad \tilde{B}_{rq}(t) \equiv \sum_n Z_{nr}(q) B_{nq}(t), \text{ etc.}$$

с учетом соответствующего переопределения нормировочных множителей

$$\alpha_n(q) \equiv \sum_n Z_{nr}(q) \tilde{\alpha}_r(q)$$

выбранных так, что

$$A(\mathbf{x}, t) = \sum_r \int d^3 q \tilde{\alpha}_r(\mathbf{q}) \tilde{A}_{rq}(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}},$$

и точно таким же образом (с таким же  $\tilde{\alpha}_r(\mathbf{q})$ ) выписываются выражения для  $B$ ,  $E$  и  $F$ , а также для  $\delta\rho$ ,  $\delta p$ ,  $\delta u$  и т. д. Преимущество такого переопределения состоит в том, что теперь интересующие нас билинейные средние принимают вид

$$\langle \tilde{\alpha}_r(\mathbf{q}) \tilde{\alpha}_s^*(\mathbf{q}') \rangle = \delta_{rs} \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}'). \quad (5.2.7)$$

Этот результат требует доказательства. Для решений  $\tilde{A}_{rq}(t)$  и т. д., выбранных таким образом, что  $\tilde{\alpha}_r(\mathbf{q})$  удовлетворяет соотношению (5.2.7), различные моды нескоррелированы. А именно, любое билинейное среднее является суммой по отдельным модам. Например,

$$\langle A(\mathbf{x}, t) A(\mathbf{y}, t) \rangle = \sum_r \int d^3 q e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} |\tilde{A}_{rq}(t)|^2. \quad (5.2.8)$$

Следовательно, задача вычисления спектральной функции  $\mathcal{P}_{nm}(q)$  становится задачей нахождения правильной линейной комбинации решений, для которых выполняется соотношение (5.2.7).

Между прочим, если известны средние  $\langle \alpha_n \alpha_m^* \rangle$ , то не возникает проблем с вычислением средних  $\langle \alpha_n \alpha_m \rangle$ , потому что  $\alpha_n$  удовлетворяет условию вещественности. Для доказательства этого отметим, что дифференциальные уравнения на  $A_{nq}(t)$ ,  $B_{nq}(t)$  и т. д. вещественны, поэтому набор комплексных сопряжений  $A_{nq}^*(t)$ ,  $B_{nq}^*(t)$  и т. д. для решения с индексом  $n$  также является решением, и поэтому может быть представлен в виде набора линейных комбинаций  $\sum_m c_{nm}(q) A_{mq}(t)$ ,  $\sum_m c_{nm}(q) B_{mq}(t)$  и т. д.

---

Безусловно, в случае вещественного решения  $c_{nm}(q) = \delta_{nm}$ .

---

Функции  $A(\mathbf{x}, t)$ ,  $B(\mathbf{x}, t)$  вещественны, поэтому, взяв комплексное сопряжение соотношения (5.2.1) и заменяя переменную интегрирования  $\mathbf{q}$  на  $-\mathbf{q}$ ,

получаем

$$\sum_n \alpha_n^*(\mathbf{q}) c_{nm}(q) = \alpha_m(-\mathbf{q}). \quad (5.2.9)$$

В частности, отсюда следует, что

$$\langle \alpha_n(\mathbf{q}) \alpha_m(\mathbf{q}') \rangle = \sum_l \mathcal{P}_{nl}(q) c_{lm}(q) \delta^3(\mathbf{q} + \mathbf{q}').$$

Теперь перейдем к рассмотрению тензорных мод. Они полностью характеризуются бесследовым, бездивергентным, симметричным тензором  $D_{ij}(\mathbf{x}, t)$ .

---

Тензор энергии-импульса  $\pi_{ij}^T(\mathbf{x}, t)$  не является независимой динамической переменной, но в разд. 6.6 будет видно, что он задается линейным функционалом от  $\dot{D}_{ij}$  — точнее говоря, решением линейного интегрального уравнения, в котором  $\dot{D}_{ij}$  является неоднородным слагаемым.

---

Если записать  $D_{ij}$  в виде интеграла Фурье

$$D_{ij}(\mathbf{x}, t) = \int d^3 q e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \mathcal{D}_{ij}(\mathbf{q}, t), \quad (5.2.10)$$

то фурье-образ  $\mathcal{D}$  должен удовлетворять условиям

$$\mathcal{D}_{ij} = \mathcal{D}_{ji}, \quad \mathcal{D}_{ii} = 0, \quad q_i \mathcal{D}_{ij} = 0. \quad (5.2.11)$$

Для заданного вектора  $\mathbf{q}$  существуют две независимые, удовлетворяющие этим условиям матрицы. Например, для  $\mathbf{q}$ , лежащего в направлении третьей оси, соотношения (5.2.11) переписываются в виде

$$\mathcal{D}_{11} = -\mathcal{D}_{22}, \quad \mathcal{D}_{12} = \mathcal{D}_{21}, \quad \mathcal{D}_{33} = \mathcal{D}_{3i} = 0, \quad (5.2.12)$$

так что все  $\mathcal{D}_{ij}$  могут быть выражены в терминах двух независимых компонент  $\mathcal{D}_{11}$  и  $\mathcal{D}_{12}$ .

---

Эти компоненты часто обозначаются как  $h^+ = \mathcal{D}_{11}$  и  $h^\times = \mathcal{D}_{12}$ .

---

Удобно классифицировать возможные  $\mathcal{D}_{ij}$  на основе их трансформационных свойств относительно вращения на угол  $\theta$  вокруг третьей оси<sup>3)</sup>. Легко видеть (с учетом (5.2.12). — Прим. ред. перев.), что при таком вращении

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{11} &\rightarrow \cos^2 \theta \mathcal{D}_{11} + \cos \theta \sin \theta \mathcal{D}_{12} + \sin \theta \cos \theta \mathcal{D}_{21} + \sin^2 \theta \mathcal{D}_{22} = \\ &= \cos 2\theta \mathcal{D}_{11} + \sin 2\theta \mathcal{D}_{12}, \end{aligned}$$

---

<sup>3)</sup> Например, см. ГиК, разд. 10.2.

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{12} \rightarrow & \cos^2 \theta \mathcal{D}_{12} - \cos \theta \sin \theta \mathcal{D}_{11} + \sin \theta \cos \theta \mathcal{D}_{22} - \sin^2 \theta \mathcal{D}_{21} = \\ & = -\sin 2\theta \mathcal{D}_{11} + \cos 2\theta \mathcal{D}_{12},\end{aligned}$$

или, более компактно,

$$\mathcal{D}_{11} \mp i\mathcal{D}_{12} \rightarrow e^{\pm 2i\theta} [\mathcal{D}_{11} \mp i\mathcal{D}_{12}]. \quad (5.2.13)$$

По этой причине говорят, что линейные комбинации  $\mathcal{D}_{11} \mp i\mathcal{D}_{12}$  обладают *спиральностями*  $\pm 2$ .

Волна со спиральностью  $\lambda$  состоит из квантов, угловой момент которых лежит в направлении движения и равен  $\hbar\lambda$ .

Мы будем записывать  $\mathcal{D}_{ij}(\mathbf{q}, t)$  в виде суммы по спиральностям:

$$\mathcal{D}_{ij}(\mathbf{q}, t) = \sum_{\lambda=\pm 2} e_{ij}(\hat{q}, \lambda) \mathcal{D}(\mathbf{q}, \lambda, t), \quad (5.2.14)$$

где для  $\mathbf{q}$  в направлении третьей оси

$$e_{11}(\hat{z}, \pm 2) = -e_{22}(\hat{z}, \pm 2) = \mp ie_{12}(\hat{z}, \pm 2) = \mp ie_{21}(\hat{z}, \pm 2) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e_{i3} = e_{3i} = 0, \quad (5.2.15)$$

а для  $\hat{q}$  во всех остальных направлениях  $e_{ij}(\hat{q}, \pm 2)$  определяется применением к каждому из индексов  $i$  и  $j$  стандартного вращения, переводящего направление вдоль третей оси в направление вдоль  $\hat{q}$ .

Для  $\mathbf{q}$  в направлении третьей оси комбинация  $\mathcal{D}_{11}(\mathbf{q}, t) \mp i\mathcal{D}_{12}(\mathbf{q}, t)$  пропорциональна  $\mathcal{D}(\mathbf{q}, \pm 2, t)$ , поэтому согласно правилу преобразования (5.2.13) вращение вокруг направления  $\mathbf{q}$  на угол  $\theta$  приводит к изменению  $\mathcal{D}(\mathbf{q}, \pm 2, t)$  на множитель  $\exp(\pm 2i\theta)$ . Направление вдоль третьей оси ничем не выделено, и поэтому все то же справедливо для  $\mathbf{q}$ , лежащего в любом направлении.

Величины  $\mathcal{D}(\mathbf{q}, \lambda, t)$  в равенстве (5.2.14) подчиняются независящему от  $\lambda$  полевому уравнению второго порядка (5.1.53), в котором лапласиан  $\nabla^2$  заменен на  $-q^2 \equiv -\mathbf{q}^2$ :

$$\ddot{\mathcal{D}}(\mathbf{q}, \lambda, t) + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\mathcal{D}}(\mathbf{q}, \lambda, t) + \frac{q^2}{a^2} \mathcal{D}(\mathbf{q}, \lambda, t) = 16\pi G \pi^T(\mathbf{q}, \lambda, t), \quad (5.2.16)$$

где  $\pi^T(\mathbf{q}, \lambda, t)$  — это фурье-образ тензорной части тензора анизотропной инерции:

$$\pi_{ij}^T(\mathbf{x}, t) = \sum_{\lambda=\pm 2} \int d^3 q e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} e_{ij}(\hat{q}, \lambda) \pi^T(\mathbf{q}, \lambda, t). \quad (5.2.17)$$

Как уже отмечалось,  $\pi^T(\mathbf{q}, \lambda, t)$  — это независимый от спиральности линейный функционал от  $\mathcal{D}(\mathbf{q}, \lambda, t)$ . Таким образом, так же как в отсутствие

анизотропной инерции, есть два независимых решения (различаемые индексом  $N$ ), которые, за исключением нормировочных множителей  $\beta$ , не зависят от  $\lambda$  и от направления  $\mathbf{q}$ . Следовательно, можно записать

$$\mathcal{D}(\mathbf{q}, \lambda, t) = \sum_N \beta_N(\mathbf{q}, \lambda) \mathcal{D}_{Nq}(t) \quad (5.2.18)$$

и

$$\pi^T(\mathbf{q}, \lambda, t) = \sum_N \beta_N(\mathbf{q}, \lambda) \pi_{Nq}^T(t), \quad (5.2.19)$$

где суммирование производится по индексу  $N$ , нумерующему два независимых решения  $\mathcal{D}_{Nq}(t)$  полевого уравнения

$$\ddot{\mathcal{D}}_{Nq}(t) + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\mathcal{D}}_{Nq}(t) + \frac{q^2}{a^2}\mathcal{D}_{Nq}(t) = 16\pi G \pi_{Nq}^T(t). \quad (5.2.20)$$

Собирая вместе (5.2.10), (5.2.14) и (5.2.18), получим

$$\mathcal{D}_{ij}(\mathbf{x}, t) = \sum_{N, \lambda} \int d^3 q e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} e_{ij}(\hat{q}, \lambda) \beta_N(\mathbf{q}, \lambda) \mathcal{D}_{Nq}(t). \quad (5.2.21)$$

Нормировочные множители  $\beta_N(\mathbf{q}, \lambda)$  типа  $\alpha_n(\mathbf{q})$  являются стохастическими переменными. Контролирующая эти множители трансляционная инвариантность распределения вероятности приводит к тому, что  $\langle \beta_N(\mathbf{q}, \lambda) \beta_{N'}^*(\mathbf{q}', \lambda') \rangle$  пропорционально  $\delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$ . При вращении вокруг  $\mathbf{q}$  на угол  $\theta$  произведение  $\beta_N(\mathbf{q}, \lambda) \beta_{N'}^*(\mathbf{q}, \lambda')$  изменяется на множитель  $\exp[i\theta(\lambda - \lambda')]$ , так что вращательная инвариантность распределения вероятности приводит к тому, что  $\langle \beta_N(\mathbf{q}, \lambda) \beta_{N'}^*(\mathbf{q}', \lambda') \rangle$  также пропорционально  $\delta_{\lambda \lambda'}$ . В большинстве случаев мы еще будем предполагать, что распределение вероятности инвариантно относительно действия оператора  $P$  пространственной инверсии. Данный оператор меняет направление импульса на противоположное, но при этом оставляет без изменения угловой момент, поэтому его действие приводит к смене знака у спиральности. Вследствие чего, принимая во внимание требование инвариантности относительно пространственных инверсий, за исключением множителя  $\delta_{\lambda \lambda'}$ , среднее значение  $\langle \beta_N(\mathbf{q}, \lambda) \beta_{N'}^*(\mathbf{q}', \lambda') \rangle$  не зависит от спиральности<sup>4)</sup>. Таким образом, получаем

$$\langle \beta_N(\mathbf{q}, \lambda) \beta_{N'}^*(\mathbf{q}', \lambda') \rangle = \mathcal{P}_{NN'}^{\text{грав}}(q) \delta_{\lambda \lambda'} \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}'). \quad (5.2.22)$$

<sup>4)</sup> Такое же заключение следует из предположения, что распределение вероятности инвариантно относительно  $C\bar{P}$ , где  $C$  — это оператор зарядового сопряжения. В природе ни  $P$ , ни  $C\bar{P}$  не являются точными симметриями, однако  $C\bar{P}$ -инвариантность является более точным приближением, чем  $P$ -инвариантность. Произведение  $CPT$  (где  $T$  — это обращение направления времени) является точной симметрией в квантовой теории поля, однако в расширяющейся Вселенной  $T$ -инвариантность нарушается.

Из трансляционной и вращательной инвариантности также следует, что корреляция между нормировочными множителями скалярных и тензорных мод отсутствует:

$$\langle \beta_N(\mathbf{q}, \lambda) \alpha_n^*(\mathbf{q}') \rangle = 0. \quad (5.2.23)$$

Также как и в случае скалярных мод, всегда можно так выбрать две тензорные моды, чтобы  $\mathcal{P}_{NN'}^{ grav}(q)$  было просто  $\delta_{NN'}$ , однако, чтобы выяснить, какая именно линейная комбинация мод обладает этим свойством, необходимо знать распределение вероятности, описывающее начальные условия. Среднее произведения двух тензорных возмущений задается соотношениями (5.2.21) и (5.2.22) в виде

$$\langle D_{ij}(\mathbf{x}, t) D_{kl}(\mathbf{y}, t) \rangle = \sum_{NN'} \int d^3 q \mathcal{P}_{NN'}^{ grav}(q) e^{i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \times \prod_{ij, kl} (\hat{q}) \mathcal{D}_{Nq}(t) \mathcal{D}_{N'q}(t), \quad (5.2.24)$$

где<sup>5)</sup>

$$\prod_{ij, kl} (\hat{q}) \equiv \sum_{\lambda} e_{ij}(\hat{q}, \lambda) e_{kl}^*(\hat{q}, \lambda) = \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ij} \hat{q}_k \hat{q}_l + \delta_{kl} \hat{q}_i \hat{q}_j - \delta_{ik} \hat{q}_j \hat{q}_l - \delta_{il} \hat{q}_j \hat{q}_k - \delta_{jk} \hat{q}_i \hat{q}_l - \delta_{jl} \hat{q}_i \hat{q}_k + \hat{q}_i \hat{q}_j \hat{q}_k \hat{q}_l. \quad (5.2.25)$$

Формулы типа (5.2.24) и (5.2.3) будут использованы в разд. 7.4 при рассмотрении реликтового излучения.

В разд. 5.4. будет видно, что анизотропная инерция  $\pi_{Nq}$  становится ничтожно мала на протяжении эпохи, в которой физическое волновое число  $q/a$  намного меньше, чем скорость расширения  $\dot{a}/a$ . В этом случае одна тензорная мода начинает доминировать. В отсутствие анизотропной инерции гравитационное волновое уравнение (5.2.20) в пределе  $q/a \ll H$  принимает вид

$$\ddot{\mathcal{D}}_{Nq}(t) + 3 \frac{\dot{a}}{a} \dot{\mathcal{D}}_{Nq}(t) = 0.$$

Уравнение имеет два очевидных решения:

$$\mathcal{D}_{1q}(t) = 1, \quad \mathcal{D}_{2q}(t) = \int_t^{\infty} \frac{dt'}{a^3(t')}.$$

---

Интеграл во втором решении расходится, потому что в эру доминирования излучения  $a(t) \propto t^{1/2}$  и растет еще быстрее в эры доминирования вещества и вакуума.

---

<sup>5)</sup> Можно получить окончательную формулу для  $\Pi_{ij, kl}(\hat{q})$ , если воспользоваться условиями, что  $\Pi_{ij, kl}(\hat{q})$  — это тензорная функция от  $\hat{q}$ , симметричная по  $i$  и  $j$ ,  $k$  и  $l$ , такая что  $\Pi_{ij, kl}(\hat{q}) = \Pi_{kl, ij}^*(\hat{q})$  и  $\hat{q}_i \Pi_{ij, kl}(\hat{q}) = 0$ , и показать, что  $\Pi_{ij, kl}(\hat{q})$  пропорционально выражению в правой части формулы (5.2.25). Константа пропорциональности может быть найдена с помощью соотношений (5.2.15), если выбрать  $\hat{q}$  в направлении третьей оси и положить все  $i, j, k, l$  равными 1.

Поскольку в поздние времена  $\mathcal{D}_{2q}(t) \rightarrow 0$ , при типичных начальных условиях гравитационные волны в конце концов будут подавлены первым решением. Поэтому в данном случае для вычисления билинейного среднего типа (5.2.24) необходимо знать только  $\mathcal{P}_{11}^{\text{грав}}(q)$ . В качестве альтернативы можно выбрать  $\mathcal{D}_{1q}(t)$  равным постоянной  $\mathcal{D}_q^r$  (верхний индекс « $r$ » обозначает «за горизонтом») при условии, что  $\mathcal{P}_{11}^{\text{грав}}(q) = 1$ . В разд. 5.4 будет видно, что аналогичные комментарии обычно справедливы и в случае скалярных мод.

## 5.3

---

### Выбор калибровки

- Калибровочные преобразования • Ньютоновская калибровка • Синхронная калибровка
- Конверсия • Другие калибровки

Полученные в разд. 5.1 уравнения имеют два неудовлетворительных свойства. Во-первых, даже после упрощений, возникающих при разложении этих уравнений на скалярные, векторные и тензорные моды, уравнения для скалярных мод по-прежнему остаются жутко сложными. Во-вторых, среди решений этих уравнений есть нефизические скалярные и векторные моды, соответствующие просто преобразованию координат в невозмущенных метрике Робертсона—Уокера и тензоре энергии-импульса. Можно исключить вторую проблему и упростить первую с помощью фиксации системы координат, выбирая подходящие условия для полной возмущенной метрики и/или тензора энергии-импульса. В этом разделе мы будем рассматривать зависящие от координат возмущения  $A(x, t)$ ,  $B(x, t)$  и т. д., однако все полученные здесь результаты также будут верны для фурье-компонент  $A_{nq}(t)$ ,  $B_{nq}(t)$  и т. д., если каждый лапласиан просто заменить на  $-q^2$ .

Рассмотрим преобразование пространственно-временных координат

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x), \quad (5.3.1)$$

где  $\epsilon^\mu(x)$  малы в том же смысле, в каком малы  $h_{\mu\nu}$ ,  $\delta\rho$  и другие возмущения. При таком преобразовании метрический тензор преобразуется к виду

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\lambda\kappa}(x) \frac{\partial x^\lambda}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\kappa}{\partial x'^\nu}. \quad (5.3.2)$$

Вместо того чтобы работать с преобразованиями, которые изменяют координаты и невозмущенные поля, а также возмущения этих полей, более удобно работать с так называемыми *калибровочными преобразованиями*, действующими только на возмущения полей. С этой целью, совершив преобразование координат (5.3.1), мы изменим обозначения для координат, убрав штрих у аргумента, а все изменение метрики  $g_{\mu\nu}(x)$  сведем к изменению возмущения

$h_{\mu\nu}(x)$ . Тогда полевые уравнения будут инвариантными относительно калибровочного преобразования  $h_{\mu\nu}(x) \rightarrow h_{\mu\nu}(x) + \Delta h_{\mu\nu}(x)$ , где

$$\Delta h_{\mu\nu}(x) \equiv g'_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x), \quad (5.3.3)$$

причем невозмущенная метрика Робертсона—Уокера  $\bar{g}_{\mu\nu}(x)$  не меняется; для остальных возмущений выписываются соответствующие калибровочные преобразования. В первом порядке по  $\epsilon^\mu(x)$  и  $h_{\mu\nu}(x)$  выражение (5.3.3) принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta h_{\mu\nu}(x) &= g'_{\mu\nu}(x') - \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\lambda} \epsilon^\lambda(x) - g_{\mu\nu}(x) = \\ &= -\bar{g}_{\lambda\mu}(x) \frac{\partial \epsilon^\lambda(x)}{\partial x^\nu} - \bar{g}_{\lambda\nu}(x) \frac{\partial \epsilon^\lambda(x)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \bar{g}_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\lambda} \epsilon^\lambda(x), \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

или, чуть более подробно,

$$\Delta h_{ij} = -\frac{\partial \epsilon_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \epsilon_j}{\partial x^i} + 2a\dot{a}\delta_{ij}\epsilon_0, \quad (5.3.5)$$

$$\Delta h_{i0} = -\frac{\partial \epsilon_i}{\partial t} - \frac{\partial \epsilon_0}{\partial x^i} + 2\frac{\dot{a}}{a}\epsilon_i, \quad (5.3.6)$$

$$\Delta h_{00} = -2\frac{\partial \epsilon_0}{\partial t}, \quad (5.3.7)$$

где все величины берутся в точке пространства-времени в *одной системе координат*, а индексы опускаются и поднимаются с помощью метрики Робертсона—Уокера, так что  $\epsilon_0 = -\epsilon^0$  и  $\epsilon_i = a^2\epsilon^i$ . Полевые уравнения будут инвариантны только в том случае, когда одинаковое калибровочное преобразование применяется ко всем тензорам, и в частности к тензору энергии-импульса, так что следует выполнять преобразование  $\delta T_{\mu\nu}(x) \rightarrow \delta T_{\mu\nu}(x) + \Delta \delta T_{\mu\nu}(x)$ , где  $\Delta \delta T_{\mu\nu}(x)$  задается формулой<sup>6)</sup>, аналогичной (5.3.4):

$$\Delta \delta T_{\mu\nu} = -\bar{T}_{\lambda\mu}(x) \frac{\partial \epsilon^\lambda(x)}{\partial x^\nu} - \bar{T}_{\lambda\nu}(x) \frac{\partial \epsilon^\lambda(x)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \bar{T}_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\lambda} \epsilon^\lambda(x), \quad (5.3.8)$$

или более подробно

$$\Delta \delta T_{ij} = -\bar{p} \left( \frac{\partial \epsilon_i}{\partial x^j} + \frac{\partial \epsilon_j}{\partial x^i} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (a^2 \bar{p}) \delta_{ij} \epsilon_0, \quad (5.3.9)$$

$$\Delta \delta T_{i0} = -\bar{p} \frac{\partial \epsilon_i}{\partial t} + \bar{p} \frac{\partial \epsilon_0}{\partial x^i} + 2\bar{p} \frac{\dot{a}}{a} \epsilon_i, \quad (5.3.10)$$

$$\Delta \delta T_{00} = 2\bar{p} \frac{\partial \epsilon_0}{\partial t} + \dot{\bar{p}} \epsilon_0. \quad (5.3.11)$$

<sup>6)</sup> Правые части выражений (5.3.4) и (5.3.8) известны как *производные Ли* метрики и тензора энергии-импульса, соответственно. Обсуждение производных Ли приводится в ГиК, разд. 10.9 и 12.3.

Отметим, что для обозначения возмущения используется  $\delta$ , а  $\Delta$  обозначает здесь приращение возмущения при калибровочном преобразовании.

Чтобы представить рассмотренные выше калибровочные преобразования в терминах скалярных, векторных и тензорных компонент, введенных в разд. 5.1, необходимо разложить пространственную часть  $\epsilon^\mu$  на градиент пространственного скаляра плюс бездивергентный вектор:

$$\epsilon_i = \partial_i \epsilon^S + \epsilon_i^V, \quad \partial_i \epsilon_i^V = 0. \quad (5.3.12)$$

Тогда преобразования (5.3.5)–(5.3.7) и (5.3.9)–(5.3.11) задают калибровочные преобразования компонент возмущения метрики, определенных выражениями (5.1.31)–(5.1.33):

$$\begin{aligned} \Delta A &= \frac{2\dot{a}}{a} \epsilon_0, & \Delta B &= -\frac{2}{a^2} \epsilon^S, & \Delta C_i &= -\frac{1}{a^2} \epsilon_i^V, & \Delta D_{ij} &= 0, \\ \Delta E &= 2\dot{\epsilon}_0, & \Delta F &= \frac{1}{a} \left( -\epsilon_0 - \dot{\epsilon}^S + \frac{2\dot{a}}{a} \epsilon^S \right), & \Delta G_i &= \frac{1}{a} \left( -\dot{\epsilon}_i^V + \frac{2\dot{a}}{a} \epsilon_i^V \right) \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

в случае возмущений давления, плотности энергии и потенциала скоростей, (5.1.39)–(5.1.41), калибровочные преобразования имеют вид

$$\Delta \delta p = \dot{\bar{p}} \epsilon_0, \quad \Delta \delta \rho = \dot{\bar{\rho}} \epsilon_0, \quad \Delta \delta u = -\epsilon_0. \quad (5.3.14)$$

Другие ингредиенты тензора энергии-импульса калибровочно-инвариантны:

$$\Delta \pi^S = \Delta \pi_i^V = \Delta \pi_{ij}^T = \Delta \delta u_i^V = 0. \quad (5.3.15)$$

В частности, отметим, что условия  $\pi^S = \pi_i^V = \pi_{ij}^T = 0$  для идеальной жидкости и условие  $\delta u_i^V = 0$  для потенциального (т. е. безвихревого) потока являются калибровочно-инвариантными.

Чтобы сделать полевые уравнения калибровочно-инвариантными, следует сделать аналогичные преобразования всех остальных составляющих этих уравнений. Например, произвольный 4-скаляр  $s(x)$ , для которого справедливо  $s'(x') = s(x)$  при любом четырехмерном преобразовании координат, будет преобразовываться как  $\Delta s(x) \equiv s'(x) - s(x) = s'(x) - s'(x')$ , что в первом порядке по возмущениям дает

$$\Delta s(x) = s(x) - s(x') = -\frac{\partial \bar{s}(t)}{\partial x^\mu} \epsilon^\mu(x) = \dot{\bar{s}}(t) \epsilon_0. \quad (5.3.16)$$

Эта формула справедлива, например, для плотности числа частиц  $n$  или для скалярного поля  $\varphi$ . Для идеальной жидкости  $p$  и  $\rho$  по определению являются скалярами, и калибровочные преобразования (5.3.14) для  $\delta p$  и  $\delta \rho$  являются специальными случаями преобразования (5.3.16). Аналогичным образом, в случае идеальной жидкости калибровочное преобразование (5.3.14) для  $\delta u$  может быть выведено из векторного закона преобразования для  $u_\mu$ . Поскольку калибровочные свойства  $\delta \rho$ ,  $\delta p$ ,  $\delta u$  и т. д. не зависят от законов сохранения,

выражения (5.3.14) и (5.3.15) справедливы для каждого отдельного ингредиента Вселенной во всех тех случаях, когда тензор энергии-импульса представим в виде суммы слагаемых, отвечающих разным ингредиентам Вселенной, даже если слагаемые, отвечающие каждому ингредиенту по отдельности не сохраняются.

Калибровочные степени свободы можно исключить либо ограничившись рассмотрением только калибровочно-инвариантных величин<sup>7)</sup>, либо фиксируя калибровку. Возникающие в уравнении (5.1.53) тензорные величины  $\pi_{ij}^T$  и  $D_{ij}$  уже калибровочно-инвариантны, и нет никакой необходимости или возможности накладывать калибровку. Уравнения (5.1.50)–(5.1.52) для векторных величин  $\pi_i^V$ ,  $\delta u_i^V$ ,  $C_i$  и  $G_i$  можно переписать в терминах калибровочно-инвариантных величин  $\pi_i^V$ ,  $\delta u_i^V$  и  $\tilde{G}_i \equiv G_i - a\dot{C}_i$ , или фиксировать калибровку, выбрав  $\epsilon_i^V$  так, чтобы либо  $C_i$ , либо  $G_i$  обращались в ноль.

---

Отметим, что  $\tilde{G}_i$  — это векторное поле, которое, как было показано в разд. 5.1, в отсутствие анизотропной инерции затухает по закону  $1/a^2$ .

---

Для скалярных возмущений более удобным выбором является фиксация калибровки. Есть несколько часто используемых возможностей.

### A. Ньютоновская калибровка

Здесь  $\epsilon^S$  выбирается так, чтобы  $B = 0$ , после чего  $\epsilon_0$  выбирается так, чтобы  $F = 0$ . Оба выбора единственны, поэтому после наложения ньютоновской калибровки калибровочный произвол пропадает. В рассматриваемой калибровке  $E$  и  $A$  обычно записывают в виде

$$E \equiv 2\Phi, \quad A \equiv -2\Psi, \quad (5.3.17)$$

так что (теперь рассматриваем только скалярные возмущения) компоненты возмущенной метрики равны

$$g_{00} = -1 - 2\Phi, \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ij} = a^2 \delta_{ij} [1 - 2\Psi]. \quad (5.3.18)$$

Тогда гравитационные полевые уравнения (5.1.44)–(5.1.47) принимают вид

$$-4\pi Ga^2 [\delta\rho - \delta p - \nabla^2 \pi^S] = a\dot{a}\dot{\Phi} + (4\dot{a}^2 + 2a\ddot{a})\Phi - \nabla^2 \Psi + a^2 \ddot{\Psi} + 6a\dot{a}\dot{\Psi}, \quad (5.3.19)$$

$$-8\pi Ga^2 \partial_i \partial_j \pi^S = \partial_i \partial_j [\Phi - \Psi], \quad (5.3.20)$$

$$4\pi G a(\bar{\rho} + \bar{p}) \partial_i \delta u = -\dot{a}\partial_i \Phi - a\partial_i \dot{\Psi}, \quad (5.3.21)$$

$$4\pi G (\delta\rho + 3\delta p + \nabla^2 \pi^S) = +\frac{1}{a^2} \nabla^2 \Phi + \frac{3\dot{a}}{a} \dot{\Phi} + 3\ddot{\Psi} + \frac{6\dot{a}}{a} \dot{\Psi} + \frac{6\ddot{a}}{a} \Phi, \quad (5.3.22)$$

---

<sup>7)</sup> J. M. Bardeen, *Phys. Rev. D* 22, 1882 (1980).

а законы сохранения импульса и энергии (5.1.48) и (5.1.49) выражаются в виде (помимо мод с нулевым волновым числом)

$$\delta p + \nabla^2 \pi^S + \partial_0 [(\bar{\rho} + \bar{p}) \delta u] + \frac{3\dot{a}}{a} (\bar{\rho} + \bar{p}) \delta u + (\bar{\rho} + \bar{p}) \Phi = 0, \quad (5.3.23)$$

$$\delta \dot{\rho} + \frac{3\dot{a}}{a} (\delta \rho + \delta p) + \nabla^2 \left[ a^{-2} (\bar{\rho} + \bar{p}) \delta u + \frac{\dot{a}}{a} \pi^S \right] - 3(\bar{\rho} + \bar{p}) \dot{\Psi} = 0. \quad (5.3.24)$$

В частности, из уравнения (5.3.20) следует, что  $\Phi$  и  $\Psi$  не являются физически независимыми полями; они отличаются на слагаемое, возникающее из анизотропной части тензора энергии-импульса, например, в случае идеальной жидкости, когда  $\pi^S = 0$ , они эквивалентны. Возмущение плотности числа сортов частиц, полное число которых сохраняется, будет удовлетворять соотношению (5.1.55), которое в ньютоновской калибровке принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\delta n}{\bar{n}} \right) + \frac{1}{a^2} \nabla^2 \delta u - 3\dot{\Psi} = 0. \quad (5.3.25)$$

При заданном уравнении состояния для  $p$  как функции от  $\rho$  (если  $p$  также зависит от других величин типа  $n$ , то для них задаются дополнительные полевые уравнения) и при заданной формуле для  $\pi^S$  в виде линейной комбинации других возмущений (таких как, например, формула  $\pi^S = 0$  в случае идеальной жидкости) уравнения (5.3.21), (5.3.23) и (5.3.24) (и, там где нужно, еще и уравнение (5.3.25)) можно рассматривать как уравнения движения для  $\Psi$ ,  $\delta u$  и  $\delta \rho$  соответственно, причем  $\Phi$  выражается через  $\Psi$  посредством уравнения (5.3.20). Вычитая умноженное на  $3/a^2$  уравнение (5.3.19) из уравнения (5.3.22) и воспользовавшись уравнениями (5.3.20) и (5.3.21) для исключения  $\pi^S$  и  $\Phi$ , находим (см. сноску 7):

$$a^3 \delta \rho - 3H a^3 (\bar{\rho} + \bar{p}) \delta u - \left( \frac{a}{4\pi G} \right) \nabla^2 \Psi = 0. \quad (5.3.26)$$

Это выражение является связью, а не уравнением движения, потому что уравнения движения (5.3.21), (5.2.23) и (5.3.24) означают, что левая часть уравнения (5.3.26) не зависит от времени, так что (5.3.26) можно наложить только в качестве начального условия.

## B. Синхронная калибровка

Здесь  $\epsilon_0$  выбирается так, чтобы  $E = 0$ , и затем  $\epsilon^S$  выбирается так, чтобы снова  $F = 0$ . Тогда, рассматривая только скалярные возмущения, полная возмущенная метрика равна

$$g_{00} = -1, \quad g_{0i} = 0, \quad g_{ij} = a^2 \left[ (1 + A) \delta_{ij} + \frac{\partial^2 B}{\partial x^i \partial x^j} \right]. \quad (5.3.27)$$

В данной калибровке полевые уравнения Эйнштейна (5.1.44)–(5.1.47) принимают вид

$$-4\pi Ga^2[\delta\rho - \delta p - \nabla^2\pi^S] = \frac{1}{2}\nabla^2A - \frac{1}{2}a^2\ddot{A} - 3a\dot{a}\dot{A} - \frac{1}{2}a\dot{a}\nabla^2\dot{B}, \quad (5.3.28)$$

$$-16\pi Ga^2\pi^S = A - a^2\ddot{B} - 3a\dot{a}\dot{B}, \quad (5.3.29)$$

$$8\pi Ga(\bar{\rho} + \bar{p})\delta u = a\dot{A}, \quad (5.3.30)$$

$$-4\pi G(\delta\rho + 3\delta p + \nabla^2\pi^S) = \frac{3}{2}\ddot{A} + \frac{3\dot{a}}{a}\dot{A} + \frac{1}{2}\nabla^2\ddot{B} + \frac{\dot{a}}{a}\nabla^2\dot{B}, \quad (5.3.31)$$

а законы сохранения импульса и энергии (5.1.48) и (5.1.49) записываются в виде

$$\delta p + \nabla^2\pi^S + \partial_0[(\bar{\rho} + \bar{p})\delta u] + \frac{3\dot{a}}{a}(\bar{\rho} + \bar{p})\delta u = 0, \quad (5.3.32)$$

$$\delta\dot{p} + \frac{3\dot{a}}{a}(\delta\rho + \delta p) + \nabla^2\left[a^{-2}(\bar{\rho} + \bar{p})\delta u + \frac{\dot{a}}{a}\pi^S\right] + \frac{1}{2}(\bar{\rho} + \bar{p})\partial_0[3A + \nabla^2B] = 0. \quad (5.3.33)$$

Отметим, что в рассматриваемой калибровке закон сохранения импульса, являющийся уравнением движения идеальной жидкости (уравнение Навье—Стокса), вообще не зависит от возмущенной метрики, а закон сохранения энергии может быть записан в виде

$$\delta\dot{p} + \frac{3\dot{a}}{a}(\delta\rho + \delta p) + \nabla^2\left[a^{-2}(\bar{\rho} + \bar{p})\delta u + \frac{\dot{a}}{a}\pi^S\right] + (\bar{\rho} + \bar{p})\psi = 0, \quad (5.3.34)$$

где

$$\psi \equiv \frac{1}{2}[3\dot{A} + \nabla^2\dot{B}] = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h_{ii}}{2a^2}\right). \quad (5.3.35)$$

Для определения траектории движения отдельных частиц необходимо знать  $A$  и  $B$ , однако влияние гравитации на идеальную или неидеальную жидкость полностью определяется величиной  $\psi$ . Рассмотрение уравнения (5.3.31) показывает, что возникает дифференциальное уравнение именно для этой комбинации скалярных полей:

$$-4\pi Ga^2(\delta\rho + 3\delta p + \nabla^2\pi^S) = \frac{\partial}{\partial t}(a^2\psi). \quad (5.3.36)$$

Помимо этого, в синхронной калибровке уравнение сохранения числа частиц (5.1.55) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\delta n}{\bar{n}}\right) + a^{-2}\nabla^2\delta u + \psi = 0. \quad (5.3.37)$$

При заданном уравнении состояния для  $p$  как функции от  $\rho$  (и, возможно,  $n$ ) и формулы, выражающей  $\pi^S$  в виде линейно комбинации других скалярных возмущений, можно воспользоваться уравнениями (5.3.32), (5.3.34), (5.3.36) (и, возможно, уравнением (5.3.37)) с целью нахождения решений для трех

независимых возмущений  $\delta u$ ,  $\delta \rho$  и  $\psi$  соответственно. По причине, указанной в разд. 5.1, остальные уравнения (5.3.28)–(5.3.30) не нужны: уравнения полного набора (5.3.28)–(5.3.33) не являются независимыми, потому что законы сохранения импульса и энергии можно вывести как следствия полевых уравнений Эйнштейна.

Если требуется знать  $A$  и  $B$ , то можно найти их из  $\psi$  и  $\delta \rho$ . Складывая вместе умноженное на 3 уравнение (5.3.28), умноженный на  $1/2$  лапласиан из уравнения (5.3.29), умноженное на  $a^2$  уравнение (5.3.31), приходим к простому соотношению

$$\nabla^2 A = -8\pi G a^2 \delta \rho + 2H a^2 \psi, \quad (5.3.38)$$

где, как обычно,  $H \equiv \dot{a}/a$ . Получив таким способом  $A$ , решая уравнение (5.3.35), из  $A$  и  $\psi$  можно найти  $B$ .

Синхронная калибровка широко использовалась в первых вычислениях эволюции возмущения в космологии, начиная с новаторской работы Лифшица в 1946 году<sup>8)</sup>. В 1980-х годах синхронная калибровка стала непопулярной, по причине обнаруженного Бардином свойства (см. сноску 7): остаточная калибровочная инвариантность остается даже после наложения условий  $E = F = 0$ . Из уравнения (5.3.13) можно видеть, что  $E$  и  $F$  не изменяются при калибровочных преобразованиях с параметрами

$$\epsilon_0(\mathbf{x}, t) = -\tau(\mathbf{x}), \quad \epsilon^S(\mathbf{x}, t) = a^2(t)\tau(\mathbf{x}) \int a^{-2}(t) dt, \quad (5.3.39)$$

где  $\tau(\mathbf{x})$  — это произвольная функция  $\mathbf{x}$ , но не  $t$ . Тем не менее, относительно такого преобразования меняются  $A$  и  $B$ :

$$\Delta A = -\frac{2\dot{a}\tau}{a}, \quad \Delta B = -2\tau \int a^{-2}(t) dt. \quad (5.3.40)$$

В частности, комбинация (5.3.35) получает приращение

$$\Delta\psi = -3\tau \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{a}}{a} \right) - a^{-2} \nabla^2 \tau. \quad (5.3.41)$$

Также приращения возмущений плотности энергии, давления и потенциала скоростей задаются соотношениями (5.3.14) и (5.3.39) в виде

$$\Delta\delta p = -\dot{\bar{p}}\tau, \quad \Delta\delta\rho = -\dot{\bar{\rho}}\tau, \quad \Delta\delta u = \tau, \quad (5.3.42)$$

при этом  $\pi^S$  остается инвариантным. Точно такие же правила преобразования справедливы для любого ингредиента Вселенной. Произвольное скалярное возмущение  $\delta s$ , типа плотности числа частиц  $\delta n$ , или возмущение скалярного поля  $\delta\varphi$  получает приращение, аналогичное приращению возмущений давления и плотности:

$$\Delta\delta s = -\dot{\bar{s}}\tau. \quad (5.3.43)$$

<sup>8)</sup> E. Lifshitz, *J. Phys. USSR* **10**, 116 (1946). См. также ГиК, разд. 15.10.

Читатель может проверить, что все уравнения (5.3.28)–(5.3.34) и (5.3.37) инвариантны относительно этих остаточных калибровочных преобразований. В таком случае для любого решения  $\psi$ ,  $\delta p$ ,  $\delta \rho$ ,  $\delta u$ ,  $\delta n$  и т. д. этих уравнений найдется другое решение  $\psi + \Delta\psi$ ,  $\delta p + \Delta\delta p$ ,  $\delta \rho + \Delta\delta \rho$ ,  $\delta u + \Delta\delta u$ ,  $\delta n + \Delta\delta n$  и т. д., и поскольку полевые уравнения линейны, это означает, что  $\Delta\psi$ ,  $\Delta\delta p$ ,  $\Delta\delta \rho$ ,  $\Delta\delta u$ ,  $\Delta\delta n$  и т. д. также являются решениями.

---

Для этого решения скалярная анизотропная инерция отсутствует, потому что  $\pi^S$  калибровочно-инвариантно.

---

Это досадное обстоятельство, потому как при поиске решений полевых уравнений мы постоянно проверяли, что наше решение соответствует физическому возмущению, а не просто изменению калибровки.

Однако это не будет затруднением, если каким-нибудь естественным образом устраниТЬ остаточную калибровочную симметрию. Именно так проходит, когда во Вселенной находится жидкость (например, холодная темная материя), отдельные частицы которой движутся со скоростями, много меньшими скорости света. В этом случае пространственно-временные компоненты тензора энергии-импульса  $T_D^{ij}$  этой жидкости ничтожно малы, поэтому в законе сохранения импульса (5.3.32) для этой жидкости можно выбрать  $\bar{p}_D = 0$ ,  $\bar{\rho}_D \propto a^{-3}$ ,  $\delta p_D = \pi_D^S = 0$ , откуда следует, что  $\delta u_D$  не зависит от времени. Согласно соотношениям (5.3.42) (которые по отдельности выполняются для каждого ингредиента Вселенной), зависящий от времени потенциал скоростей  $\delta u_D$  всегда может быть сведен к нулю с помощью остаточного калибровочного преобразования с  $\tau = -\delta u_D$ . Тогда произвол в выборе калибровки полностью пропадает. Эти свойства делают синхронную калибровку особенно удобной при рассмотрении поздних стадий космологической эволюции, когда холодная темная материя играет значительную роль.

### С. Перестановка ньютоновской и синхронной калибровок

Далее мы убедимся, что для одной эпохи вычисления удобно проводить используя ньютоновскую калибровку, а для другой эпохи удобно пользоваться синхронной калибровкой. Для согласования результатов вычислений в разных эпохах необходимо уметь переходить из одной калибровки в другую<sup>9)</sup>.

В первую очередь предположим, что сначала вычисления проводятся в ньютоновской калибровке и затем делается бесконечно малое преобразование координат  $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu$  с  $\epsilon_i = \delta_i \epsilon^S$ , так чтобы не возбуждались векторные возмущения. Согласно соотношениям (5.3.13) и (5.3.17), для того чтобы в синхронной калибровке приписать  $E$  значение  $E = 0$ , следует положить

$$\dot{\epsilon}_0 = -\Phi. \quad (5.3.44)$$

---

<sup>9)</sup> Например, см. C.-P. Ma and E. Bertschinger, *Astrophys. J.* **455**, 7 (1995).

Затем, согласно соотношениям (5.3.13), для того чтобы сохранить  $F = 0$ , следует положить

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon^S}{a^2} \right) = -\frac{\epsilon_0}{a^2}. \quad (5.3.45)$$

Компоненты пространственной части метрики в синхронной калибровке  $A$  и  $B$  задаются соотношениями (5.3.13) и (5.3.17):

$$A = -2\Psi + 2H\epsilon_0, \quad B = -\frac{2}{a^2}\epsilon^S, \quad (5.3.46)$$

где  $H \equiv \dot{a}/a$ . В частности, поле  $\psi$  равно

$$\psi = -3\dot{\Psi} + 3\frac{\partial}{\partial t}(H\epsilon_0) + \frac{\nabla^2\epsilon_0}{a^2}. \quad (5.3.47)$$

Кроме того, соотношение (5.3.14) в синхронной калибровке позволяет вычислить возмущение давления  $\delta p^s$ , возмущение плотности энергии  $\delta\rho^s$  и потенциал скоростей  $\delta u^s$ , исходя из соответствующих величин  $\delta p$ ,  $\delta\rho$  и  $\delta u$  в ньютоновской калибровке:

$$\delta p^s = \delta p + \epsilon_0 \dot{p}, \quad \delta\rho^s = \delta\rho + \epsilon_0 \dot{\rho}, \quad \delta u^s = \delta u - \epsilon_0. \quad (5.3.48)$$

Для заданного  $\Phi$  из соотношения (5.3.44) можно вычислить  $\epsilon_0$ , после чего для заданного  $\Psi$  из уравнения (5.3.47) можно получить  $\psi$ , а также в синхронной калибровке из уравнений (5.3.48) найти давление, плотность энергии и потенциал скоростей. Величина  $\epsilon_0$  определяется уравнением (5.3.44) только с точностью до независящей от времени функции координат, поэтому значения величин  $A$ ,  $B$ ,  $\psi$ ,  $\tilde{p}$ ,  $\tilde{\rho}$  и  $\tilde{u}$  в синхронной калибровке определяются с точностью до остаточного калибровочного преобразования (5.3.40)–(5.3.42).

Далее предположим, что вычисления сначала проводятся в синхронной калибровке, с метрическими полями  $A$  и  $B$ , после чего полученные результаты переводятся в ньютоновскую калибровку. Согласно уравнению (5.3.13), чтобы сделать  $g_{ij}$  пропорциональной  $\delta_{ij}$ , необходимо положить

$$\epsilon^S = \frac{a^2 B}{2}. \quad (5.3.49)$$

Тогда из уравнения (5.3.13) следует, что для сохранения  $g_{i0} = 0$  необходимо положить

$$\epsilon_0 = -\frac{a^2 \dot{B}}{2}. \quad (5.3.50)$$

Затем, воспользовавшись уравнением (5.3.13) совместно с определениями (5.3.17), получаем

$$\Phi = \dot{\epsilon}_0 = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (a^2 \dot{B}), \quad (5.3.51)$$

$$\Psi = -\frac{1}{2} \left( A + \frac{2\dot{a}}{a} \epsilon_0 \right) = -\frac{1}{2} A + \frac{a\dot{a}}{2} \dot{B}. \quad (5.3.52)$$

В противоположность предыдущему случаю, уравнения (5.3.51) и (5.3.52) приводят к единственным  $\Phi$  и  $\Psi$ . Более того, легко проверить, что результаты для  $\Phi$  и  $\Psi$  остаются неизменными если  $A$  и  $B$ , с которых мы начали, преобразуются под действием остаточной калибровочной симметрии согласно (5.3.40).

### D. Другие калибровки

При выборе калибровки нет необходимости накладывать условия только на возникающие в метрическом тензоре скалярные поля<sup>10)</sup>. Наоборот, некоторые калибровочные условия могут приводить к ограничениям на возникающие в тензоре энергии-импульса скаляры. Например, в *сопутствующей калибровке* мы выбираем  $\epsilon_0$  таким образом, чтобы  $\delta u = 0$  (для скалярных возмущений это приводит к тому, что возмущение скоростей  $\delta u^i$  обращается в ноль). В том случае, когда только «вещество» является единственным скалярным полем, как например в популярных теориях инфляции, это означает, что временная координата определяется таким образом, что в любой заданный момент времени скалярное поле равно своему невозмущенному значению, а все возмущения переносятся на компоненты метрики<sup>11)</sup>. В *калибровке постоянной плотности* мы выбираем  $\epsilon_0$ , так что  $\delta \rho = 0$ . В другом случае после фиксации  $\epsilon_0$  величину  $F$  можно обратить в ноль при подходящем выборе  $\epsilon^S$ , так что скалярные возмущения по-прежнему будут иметь компоненты  $g_{i0} = 0$ . Отметим, что хотя эта процедура фиксирует  $\epsilon_0$ , величина  $\epsilon^S$  фиксируется только с точностью до слагаемых вида  $a^2(t)\tau(x)$ , поэтому данные калибровки имеют тот же недостаток, что и синхронная калибровка — остаточную калибровочную симметрию.

---

## 5.4

### Законы сохранения за пределами горизонта

#### Величины $\mathcal{R}$ и $\zeta$ • Теорема о сохранении • Сохранение для изолированных компонентов

Считается, что возмущения, имеющие к нам непосредственное отношение, возникли в результате квантовых флуктуаций на протяжении эпохи инфляции в очень ранней Вселенной (см. гл. 10). Тот ранний период и значительно более поздний период, когда эти возмущения стали наблюдаемы,

<sup>10)</sup> Большое количество различных калибровок описано в H. Kodama and M. Sasaki, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **78**, 1 (1984).

<sup>11)</sup> Например, в работе J. Maldacena, *J. High Energy Phys.* **0305**, 013 (2003) [astro-ph/0210603] эта калибровка использовалась при вычислениях негауссовых поправок в космологические корреляции.

отстоят друг от друга на временной интервал, в течение которого описывают эволюцию возмущений уравнения известны не очень хорошо. Например, в конце эпохи инфляции был период так называемого разогрева, в течение которого энергия вакуума трансформировалась в обычное вещество и излучение, но мы не имеем ни малейшего представления, какие частицы образовались первыми, или как именно происходила трансформации энергии. Позднее предположительно наступило время, когда некоторые частицы фактически прекратили взаимодействовать с остальным веществом и излучением и стали тем, что теперь наблюдается как холодная темная материя, однако нам остается лишь гадать, где и как это произошло.

Единственная причина, по которой мы вправе использовать инфляционные теории с целью получения вообще каких-либо предсказаний о наблюдаемых возмущениях, помимо упомянутой выше неизвестности, состоит в том, что длины волн относящихся к нам возмущений были за пределами горизонта в течение периода, дляящегося с момента времени ровно перед окончанием инфляции до момента, относительно близкого современной эпохе (следовательно, включающего периоды разогрева и отделения холодной темной материи), в том смысле, что физическое волновое число  $q/a$  в течение этого периода было значительно меньше скорости расширения  $H \equiv \dot{a}/a$ . Во время инфляции  $q/a$  убывает с течением времени более-менее экспоненциально, при этом  $H$  приблизительно постоянно, поэтому все возмущения изначально удовлетворяют  $q/a \gg H$ , но в итоге лишь очень короткие длины волн удовлетворяют  $q/a \ll H$ . Затем во время эры доминирования излучения и эры доминирования вещества  $a$  возрастает как  $t^{1/2}$  или  $t^{2/3}$ , а  $H$  убывает как  $1/t$ , поэтому, за исключением больших длин волн, возмущения, удовлетворяющие  $q/a \ll H$  в конце инфляции в конце концов опять удовлетворяют  $q/a \gg H$ . В течение промежуточного периода, когда возмущения были за пределами горизонта, скалярные и тензорные флуктуации подчинялись определенным законам сохранения, которые позволяют нам связать удаленное прошлое с относительно недавним прошлым.

В дальнейшем станет видно, что для скалярных мод величина, определяемая в ньютоновской калибровке как<sup>12)</sup>

$$\mathcal{R}_q \equiv -\Psi_q + H\delta u_q \quad (5.4.1)$$

при определенных условиях сохраняется за пределами горизонта.

---

Напомним, что  $\delta u$  — это потенциал скоростей для полного тензора энергии-импульса.

---

<sup>12)</sup> Постоянство  $\mathcal{R}$  в различных специальных случаях отмечалась в работах J. M. Bardeen, *Phys. Rev. D* **22**, 1882 (1980); D. H. Lyth, *Phys. Rev. D* **31**, 1792 (1985). Обзоры можно найти в J. Bardeen, in *Cosmology and Particle Physics*, eds. Li-zhi Fang and A. Zee (Gordon & Breach, New York, 1988); A. R. Liddle and D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large Scale Structure* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000).

Аналогично, имеется другая величина<sup>13)</sup>,

$$\zeta_q \equiv -\Psi_q + \frac{\delta\rho_q}{3(\bar{\rho} + \bar{p})}, \quad (5.4.2)$$

которая, согласно (5.3.26), связана с  $\mathcal{R}_q$  как

$$\zeta_q = \mathcal{R}_q - \frac{q^2 \Psi_q}{12\pi G(\bar{\rho} + \bar{p})a^2}. \quad (5.4.3)$$

Различие между двумя приведенными выше величинами имеет относительный порядок  $(q/(aH))^2$ , поэтому для  $q/a \ll H$  величина  $\zeta_q$  сохраняется за пределами горизонта, если это верно для  $\mathcal{R}_q$ .

Важность  $\mathcal{R}_q$  в указанных в сноске 12 работах состоит в том, что (как будет показано далее) она сохраняется за пределами горизонта во время инфляции, осуществляющейся одним скалярным полем. Однако для наших целей этого не достаточно. После инфляции Вселенная оказывается заполненной разными типами частиц вещества и излучения, и при таких условиях  $\mathcal{R}_q$  не обязательно сохраняется за пределами горизонта. Нам требуется теорема, утверждающая, что какими бы ни были ингредиенты Вселенной, всегда существует решение полевых уравнений, для которого  $\mathcal{R}_q$  и  $\zeta_q$  сохраняются за пределами горизонта. По причинам, обсуждаемым далее, такое решение называется «адиабатическим». Если во время инфляции космологические флуктуации описываются таким решением, то они будут продолжать описываться таким решением, а  $\mathcal{R}_q$  и  $\zeta_q$  будут постоянными до тех пор, пока возмущение находится за пределами горизонта, потому что оно является *решением* при любых обстоятельствах.

Это утверждение (и соответствующее утверждение для тензорных мод) является результатом следующей теоремы<sup>14)</sup>: независимо от содержания Вселенной существуют два независимых адиабатических физических скалярных решения полевых уравнений в ньютоновской калибровке, для которых величина  $\mathcal{R}_q$  в пределе  $q/a \ll H$  не зависит от времени, и существует одна тензорная мода, для которой тензорная амплитуда  $\mathcal{D}_q$  в пределе  $q/a \ll H$  не зависит от времени. В этом пределе одна из скалярных мод имеет  $\mathcal{R}_q \neq 0$ ; скалярные компоненты метрики равны

$$\Phi_q(t) = \Psi_q(t) = \mathcal{R}_q \left[ -1 + \frac{H(t)}{a(t)} \int_{\tau}^t a(t') dt' \right]; \quad (5.4.4)$$

<sup>13)</sup> J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt, and M. S. Turner, *Phys. Rev. D* **28**, 679 (1983). Эта величина была заново введена в работе D. Wands, K. A. Malik, D. H. Lyth, and A. R. Liddle, *Phys. Rev. D* **62**, 043527 (2000).

<sup>14)</sup> S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **67**, 123504 (2003) [astro-ph/0302326]. См. также приложение к работе S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **69**, 023503 (2004) [astro-ph/0306304].

возмущение произвольного 4-скаляра  $s(x)$  (например, плотность энергии, давление, поле инфлатона и т. д.) задается

$$\delta s_q(t) = -\frac{\mathcal{R}_q \dot{s}(t)}{a(t)} \int_{\mathcal{T}}^t a(t') dt'; \quad (5.4.5)$$

и возмущение потенциала скоростей равно

$$\delta u_q(t) = -\frac{\mathcal{R}_q}{a(t)} \int_{\mathcal{T}}^t a(t') dt', \quad (5.4.6)$$

где  $\mathcal{T}$  — это произвольный начальный момент времени, один и тот же во всех интегралах. Другая скалярная мода имеет  $\mathcal{R}_q = 0$ , и

$$\Phi_q(t) = \Psi_q(t) = \frac{C_q H(t)}{a(t)}, \quad \delta s_q(t) = -\frac{C_q \dot{s}(t)}{a(t)}, \quad \delta u_q(t) = \frac{C_q}{a(t)}, \quad (5.4.7)$$

где  $C_q$  не зависит от времени. Для  $q/a \ll H$  компоненты анизотропной инерции  $\pi_q^S$ ,  $\pi_{iq}^V$  и  $\pi_{ijq}^T$  обращаются в ноль для адиабатической скалярной моды и сохраняющейся тензорной моды, даже когда некоторые средние времена сравнимы с хаббловским временем. Это физические решения для скалярных и тензорных мод, потому что выбор ньютоновской калибровки не оставляет калибровочного произвола.

Доказательство приведенной выше теоремы основано на наблюдении, что в специальном случае пространственно однородной Вселенной пространственная часть полевых уравнений и динамических уравнений вещества и излучения в ньютоновской калибровке (наряду с условием пространственной однородности) инвариантны относительно преобразований координат *не* являющихся симметриями невозмущенной метрики<sup>15)</sup>. В ньютоновской калибровке произвольные пространственно-однородные скалярные и тензорные возмущения метрики первого порядка принимают вид

$$h_{00} = -2\Phi(t), \quad h_{i0} = 0, \quad h_{ij} = -2\delta_{ij}a^2(t)\Psi(t) + a^2(t)D_{ij}(t),$$

где  $D_{ij}$  подчинено условию  $D_{ii} = 0$ . Пространственная однородность также требует, чтобы все давления, плотности, потенциалы скоростей и т. д. были функциями только от времени. Полевые уравнения в ньютоновской калибровке для таких пространственно однородных возмущений с необходимостью инвариантны относительно калибровочных преобразований вида

<sup>15)</sup> В этом отношении доказанная здесь теорема аналогична теореме Голдстоуна в квантовой теории поля; см. J. Goldstone, *Nuovo Cimento* **9**, 154 (1961); J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **127**, 965 (1962). Моды, для которых  $\mathcal{R}_q$  или  $D_q$  постоянны за пределами горизонта, играют здесь роль голдстоуновских бозонов, которые становятся свободными частицами для больших длин волн.

(5.3.4)–(5.3.7), (5.3.14)–(5.3.16), которые не изменяют условия ньютоновской калибровки и пространственной однородности. Из уравнения (5.3.7) следует, что если  $h_{00}$  остается пространственно однородной, то  $\epsilon_0$  обязано быть вида

$$\epsilon_0(\mathbf{x}, t) = \epsilon(t) + \chi(\mathbf{x}), \quad \text{так что} \quad \Delta\Phi = \dot{\epsilon}.$$

Тогда из уравнения (5.3.6) следует, что для того, чтобы  $h_{i0}$  оставались равными нулю,  $\epsilon_i$  должны иметь вид

$$\epsilon_i(\mathbf{x}, t) = a^2(t) f_i(\mathbf{x}) - a^2(t) \frac{\partial \chi(\mathbf{x})}{\partial x^i} \int \frac{dt}{a^2(t)}.$$

Из уравнения (5.3.5) в этом случае следует

$$\Delta h_{ij} = -a^2 \left( \frac{\partial f_i}{\partial x^j} + \frac{\partial f_j}{\partial x^i} \right) + 2\delta_{ij}a\dot{a}[\epsilon + \chi] + 2a^2 \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^i \partial x^j} \int \frac{dt}{a^2}.$$

Чтобы избежать в  $h_{ij}$  какой-либо  $\mathbf{x}$ -зависимости, необходимо выбрать  $\chi$  постоянной, в случае чего, сдвигая ее до  $\epsilon$ , можно положить ее равной нулю; необходимо также выбрать  $f_i$  в виде  $f_i(\mathbf{x}) = \omega_{ij}x^j$ , где  $\omega_{ij}$  — это некоторая постоянная матрица.

---

х-независимый член в  $f_i$  не будет оказывать никакого влияния на метрику и все остальное, поэтому в данном случае может быть отброшен.

---

Следовательно,

$$\Delta h_{ij} = -a^2 [\omega_{ij} + \omega_{ji}] + 2\delta_{ij}a\dot{a}\epsilon.$$

Сравнивая это выражение с (5.1.33) (с условиями ньютоновской калибровки  $B = C_i = 0$  и  $A = -2\Psi$ ), получим

$$\Delta h_{ij} = -2a^2 \delta_{ij} \Delta \Psi + a^2 \Delta D_{ij}.$$

Сопоставление слагаемых в  $\Delta h_{ij}$ , которые либо пропорциональны  $\delta_{ij}$ , либо бесследовы, приводит к выражению

$$\Delta \Psi = \frac{1}{3} \omega_{ii} - H\epsilon, \quad \Delta D_{ij} = -\omega_{ij} - \omega_{ji} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \omega_{kk}.$$

---

Отметим, что антисимметричный вклад в  $\omega_{ij}$  не будет играть никакой роли, потому что невозмущенная метрика инвариантна относительно трехмерных вращений.

---

Соответствующие калибровочные преобразования величин, появляющихся в тензоре энергии-импульса и в скалярах общего вида, задаются уравнениями (5.3.14)–(5.3.16). Поскольку  $\{h_{\mu\nu}, T_{\mu\nu}\}$  и  $\{h_{\mu\nu} + \Delta h_{\mu\nu}, T_{\mu\nu} + \Delta T_{\mu\nu}\}$

одновременно являются решениями полевых уравнений и уравнений, выражающих законы сохранения, их разность также должна быть подобным решением. Отсюда возникает вывод, что всегда существует пространственно однородное решение полевых уравнений и уравнений, выражающих законы сохранения в ньютонаовской калибровке, со скалярными возмущениями вида

$$\Psi = H\epsilon - \frac{\omega_{ii}}{3}, \quad \Phi = -\dot{\epsilon}, \quad (5.4.8)$$

$$\delta p = -\dot{\bar{p}}\epsilon, \quad \delta\rho = -\dot{\bar{\rho}}\epsilon, \quad \delta u = \epsilon, \quad \pi^S = 0 \quad (5.4.9)$$

и в более общем случае произвольного 4-скаляра  $s$ :

$$\delta s = -\dot{s}\epsilon. \quad (5.4.10)$$

---

Читатель может проверить, что если отбросить все пространственные производные, то возмущения (5.4.8)–(5.4.10) в ньютонаовской калибровке удовлетворяют полевым уравнениям (5.3.19)–(5.3.22), уравнениям, выражающим законы сохранения (5.3.23)–(5.3.24) и (5.3.25), а также связи (5.3.26).

---

Существует также пространственно однородное решение с тензорным возмущением

$$D_{ij} \propto \omega_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\omega_{kk}, \quad \pi_{ij}^T = 0. \quad (5.4.11)$$

---

Очевидно, что это решение уравнения (5.1.53), однако оно содержит не столь очевидную информацию, что определяющие  $\pi_{ij}^T$  уравнения обязательно приводят к  $\pi_{ij}^T = 0$  при постоянном  $D_{ij}$ , даже если какие-то частоты столкновений частиц становятся сравнимы с  $H$ .

---

Аналогично, выражения (5.4.8)–(5.4.11) являются решениями для фурье-образов возмущений с нулевым волновым числом.

До сих пор  $\epsilon$  было произвольной функцией времени, а  $\omega_{ij}$  — никак не связанная с ней произвольная матрица  $3 \times 3$ . Однако именно они являются калибровочными модами с нулевым волновым числом. С другой стороны, если данные величины можно обобщить на случай ненулевого волнового числа, то они становятся физическими модами, поскольку выбор ньютонаовской калибровки не приводит к остаточным калибровочным симметриям, кроме случая нулевого волнового числа. Для тензорных мод затруднений не возникает; в этом случае нет полевых уравнений, отсутствующих при нулевом волновом числе, поэтому решение с независящим от времени  $D_{ij}$  автоматически обобщается до физических мод с ненулевым волновым числом. Однако в случае скалярных мод ситуация становится более сложной.

Для скалярных мод в пределе нулевого волнового числа полевое уравнение (5.3.20) отсутствует, поэтому для получения физической моды на возму-

щения необходимо наложить условие

$$\Phi = \Psi. \quad (5.4.12)$$

---

Условие  $\delta u = \epsilon$ , необходимое для выполнения (5.3.21) при  $q \neq 0$  уже удовлетворено, согласно соотношениям (5.4.9).

---

Подставляя выражения (5.4.8) в (5.4.12), получим дифференциальное уравнение на  $\epsilon$ :

$$\dot{\epsilon} = -H\epsilon + \frac{\omega_{kk}}{3}. \quad (5.4.13)$$

Кроме того, соотношения (5.4.8) для  $\Psi$  и (5.4.9) для  $\delta u$  приписывают величине  $\mathcal{R}$ , определенной уравнением (5.4.1), не зависящее от времени значение

$$\mathcal{R} = \frac{\omega_{kk}}{3}. \quad (5.4.14)$$

Существует общее решение уравнения (5.4.13) при  $\epsilon(t)$  с  $\mathcal{R} \neq 0$ :

$$\epsilon(t) = \frac{\mathcal{R}}{a(t)} \int_{\mathcal{T}}^t a(t') dt', \quad (5.4.15)$$

где  $\mathcal{T}$  — произвольно. Подставляя (5.4.15) в (5.4.8), получим явное решение (5.4.4) с большой длинной волны:

$$\Psi = \Phi = \mathcal{R} \left[ -1 + \frac{H(t)}{a(t)} \int_{\mathcal{T}}^t a(t') dt' \right]. \quad (5.4.16)$$

Из уравнения (5.4.9) следует

$$\frac{\dot{\delta p}}{\dot{p}} = \frac{\dot{\delta \rho}}{\dot{\rho}} = -\delta u = -\frac{\mathcal{R}}{a(t)} \int_{\mathcal{T}}^t a(t') dt', \quad (5.4.17)$$

в общем случае произвольного 4-скаляра из уравнения (5.4.10) получаем

$$\frac{\dot{\delta s}}{\dot{s}} = -\frac{\mathcal{R}}{a(t)} \int_{\mathcal{T}}^t a(t') dt'. \quad (5.4.18)$$

Поскольку для произвольного  $\mathcal{T}$  выражение (5.4.15) является решением уравнения (5.4.13) с таким же значением  $\mathcal{R}$ , разность этих двух решений с различными значениями  $\mathcal{T}$  также является решением, но с  $\mathcal{R} = 0$ . Для такого решения

$$\epsilon(t) = \frac{C}{a(t)}, \quad (5.4.19)$$

где  $\mathcal{C}$  — это другая константа, и

$$\Psi = \Phi = \frac{\mathcal{C}H(t)}{a(t)}, \quad (5.4.20)$$

$$\frac{\delta\rho}{\dot{\bar{\rho}}} = \frac{\delta p}{\dot{\bar{p}}} = -\delta u = \frac{\delta s}{\dot{\bar{s}}} = -\frac{\mathcal{C}}{a(t)}, \quad (5.4.21)$$

аналогичные выражения справедливы для отдельных ингредиентов Вселенной.

Поскольку  $a(t)$  возрастает со временем, а  $H(t)$  убывает, это затухающая мода, которая, как обычно предполагается, не играет значительной роли в поздние времена.

В частности, отметим, что эти скалярные моды имеют равные значения  $\delta\rho_\alpha/\dot{\bar{\rho}}_\alpha$  для всех отдельных ингредиентов  $\alpha$  Вселенной, независимо от того, сохраняется ли энергия по отдельности для каждого из этих ингредиентов. По этой причине такие возмущения называются *адиабатическими*<sup>16)</sup>. По той же причине любые другие решения называются *энтропийными*.

Иногда такие решения называются модами с нулевой кривизной, однако такое название вводит в заблуждение, потому что выбор  $\Phi = \Psi = 0$ , как правило, вообще не приводит к какому-нибудь решению.

Мы показали, что для достаточно малого волнового числа (на практике это означает  $q/a \ll H$ ) всегда существуют два адабатических физических решения для скалярных возмущений, которые имеют вид (5.4.16)–(5.4.18) и (5.4.20)–(5.4.21), где  $\mathcal{R}$  и  $\mathcal{C}$  являются произвольными константами, и физическое решение для тензорных возмущений, которое имеет вид (5.4.11), где  $\omega_{ij}$  это произвольная постоянная матрица. Поскольку решаемые уравнения однородны, отсюда следует, что также существуют решения этого же вида, для которых  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{C}$  и  $\omega_{ij}$  являются произвольными независящими от времени функциями  $q$ . На этом доказательство завершается<sup>17)</sup>.

<sup>16)</sup> Например, если каждый из нескольких ингредиентов (таких как электрон-позитронная плазма и фотоны) имеет плотность и давление, зависящие (даже при возмущении) только от температуры, то  $\delta\rho_\alpha(T) = \rho'_\alpha(T)\delta T$  и  $d\bar{\rho}_\alpha(T)/dt = \rho'_\alpha(T)\dot{T}$ , поэтому  $\delta\rho_\alpha/\dot{\bar{\rho}}_\alpha = \delta T/\dot{T}$ ; аналогичные выражения справедливы для давления и любого другого скаляра.

<sup>17)</sup> По видимому, существование решений, для которых  $\delta s_q/\dot{\bar{s}}$  равны для всех 4-скаляров \*\*, таких как плотности энергии, давления, и т. д. (но не точных решений (5.4.4)–(5.4.7)), широко признавалось в течение длительного времени. Интуитивный аргумент «отдельной вселенной» в пользу существования решений, для которых  $\delta\rho_{aq}/\dot{\bar{\rho}}_a$  равны для всех ингредиентов  $a$  Вселенной, был выдвинут в работе D. H. Lyth and D. Wands, *Phys. Rev. D* **68**, 103516 (2003); см. также D. Wands, K. A. Malik, D. H. Lyth, and A. R. Liddle, *Phys. Rev. D* **62**, 043627 (2000); A. R. Liddle and D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large-Scale Structure* (Cambridge University Press, 2000). Эти умозаключения были расширены за рамки теории возмущений в работе D. H. Lyth, K. A. Malik,

Данная теорема показывает, что если возникшие во время инфляции возмущения действительно содержатся в найденных выше модах в конце инфляции, то они остаются в этих модах до тех пор, пока возмущения находятся за пределами горизонта; в частности,  $\mathcal{R}_q$  и  $\mathcal{D}_q$  остаются постоянными, поскольку эти моды являются решениями уравнений независимо от того, каковы ингредиенты Вселенной. В частности, интересующие нас длины волн выходят далеко за пределы горизонта во время эпохи разогрева, которая, как считается, следует за инфляцией, поэтому, если в конце инфляции скалярные возмущения являются адиабатическими, то разогрев не может привести к появлению энтропийных возмущений<sup>18)</sup>.

Вопрос, на который эта теорема не дает ответа, таков: действительно ли возникшие во время инфляции скалярные возмущения находятся в этих модах в конце инфляции? Зачастую это зависит от того, как считать. Известно, что всегда существуют два независимых адиабатических решения дифференциальных уравнений, описывающих скалярные флуктуации, поэтому *если эти уравнения обладают не более чем двумя независимыми решениями, то любое возмущение должно быть адиабатическим*. Как будет видно в гл. 10, такой подсчет показывает, что для инфляции с одним полем инфлатона все решения являются адиабатическими.

Однако не следует думать, что если наблюдение реликтового излучения приводит только к адиабатическим возмущениям в момент последнего рассения, то в конце инфляции возмущения обязаны быть адиабатическими. В состоянии полного локального теплового равновесия, когда все сохраняющиеся квантовые числа обращаются в ноль (в теориях космологического бариосинтеза или лептосинтеза, наподобие тех, что обсуждались в разд. 3.3, обычно предполагается, что такое состояние существовало в ранние времена), существуют только две скалярные степени свободы, температура и гравитационный потенциал  $\Phi = \Psi$ . Они описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, поэтому есть ровно два независимых решения, которые обязаны быть адиабатическими, поскольку всегда существует не менее двух адиабатических решений. Таким образом, что бы ни происходило во время инфляции, если затем Вселенная в течение достаточно длительного времени находится в состоянии локального теплового рав-

---

and M. Sasaki, *J. Cosm. & Astropart. Phys.* **0505**, 004 (2005) [astro-ph/0411220]. Однако аргументы подобного рода показывают лишь то, что существует решение, удовлетворяющее этому условию при нулевом волновом числе. Как мы видели, действительно существует много таких решений при нулевом волновом числе, большинство из которых не имеет физического значения, потому что они не могут быть расширены на случай конечного волнового числа. Представленное здесь доказательство показывает, что требование того, чтобы решение могло быть расширено на случай конечного волнового числа приводит как раз к двум решениям, представленным в (5.4.4)–(5.4.7). Именно это требование делает необходимым бесконечно малое переопределение временной координаты, которое используется в аргументе «отдельной вселенной» для получения решений с нулевым волновым числом, в сопровождении бесконечно малого перемасштабирования пространственной координаты.

<sup>18)</sup> S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **70**, 043541 (2004) [astro-ph/0401313].

новесия с отличными от нуля сохраняющимися величинами, то возмущения становятся адиабатическими, оставаясь таковыми в дальнейшем, даже когда условия локального теплового равновесия больше не поддерживаются<sup>19)</sup>.

Использование законов сохранения для установления связи между различными космологическими эпохами не ограничивается ньютоновской калибровкой. Действительно,  $\zeta_q$  и  $\mathcal{R}_q$  могут быть приведены к калибровочно-инвариантному виду. Стоит лишь отметить, что согласно уравнениям (5.3.13) и (5.3.14), величины  $A/2 - H\delta\rho/\dot{\bar{\rho}}$  и  $A/2 + H\delta u$  калибровочно инвариантны, и в ньютоновской калибровке они сводятся к величинам (5.4.2) и (5.4.1) соответственно, поэтому в любой калибровке

$$\zeta_q = \frac{A_q}{2} - \frac{H\delta\rho_q}{\dot{\bar{\rho}}}, \quad \mathcal{R}_q = \frac{A_q}{2} + H\delta u_q, \quad (5.4.22)$$

конечно же, при условии, что все  $A$ ,  $\delta\rho$  и  $\delta u$  вычисляются в одной калибровке.

Например, в синхронной калибровке уравнение (5.3.38) принимает вид

$$q^2 A_q = 8\pi G a^2 \delta\rho_q - 2H a^2 \psi_q, \quad (5.4.23)$$

поэтому в этой калибровке  $\zeta_q$  и  $\mathcal{R}_q$  могут быть выражены через удобную гравитационную переменную  $\psi_q$  посредством

$$\begin{aligned} q^2 \zeta_q &= -a^2 H\psi_q + 4\pi G a^2 \delta\rho_q - \frac{q^2 H\delta\rho_q}{\dot{\bar{\rho}}}, \\ q^2 \mathcal{R}_q &= -a^2 H\psi_q + 4\pi G a^2 \delta\rho_q + q^2 H\delta u_q, \end{aligned} \quad (5.4.24)$$

конечно же, с учетом того, что  $\delta\rho_q$  и  $\delta u_q$  вычислены здесь в синхронной калибровке. Этот результат также может быть получен непосредственно исходя из формул (5.4.1) и (5.4.2) в ньютоновской калибровке с помощью правил перехода от ньютоновской калибровки к синхронной, приведенных в предыдущем разделе.

Существует удобная общая формула для скорости изменения  $\zeta_q$  и  $\mathcal{R}_q$ , справедливая при  $q/a \ll H$ , независимо от того, находятся космологические флуктуации в адиабатической mode или нет. Для вывода этой формулы воспользуемся законом сохранения энергии в ньютоновской калибровке (5.3.24), из которого при  $q/a \ll H$  следует

$$\delta\dot{\rho}_q + 3H(\delta\rho_q + \delta p_q) = 3(\bar{\rho} + \bar{p})\dot{\Psi}_q, \quad (5.4.25)$$

и соответствующий невозмущенный закон сохранения

$$\dot{\bar{\rho}} = -3H(\bar{\rho} + \bar{p}). \quad (5.4.26)$$

<sup>19)</sup> S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **70**, 083522 (2004) [astro-ph/0405397].

Далее, простыми вычислениями при  $q/a \ll H$  получаем

$$\dot{\zeta}_q = \frac{\dot{\bar{p}}\delta p_q - \dot{\bar{p}}\delta\rho_q}{3(\bar{\rho} + \bar{p})^2}. \quad (5.4.27)$$

Тогда для  $q/a \ll H$  такая же формула определяет  $\dot{\mathcal{R}}_q$ . Следует заметить, что согласно (5.3.14), величина в правой части приведенного выше уравнения калибровочно инвариантна, поэтому, вычисляя  $\dot{\bar{p}}\delta p_q - \dot{\bar{p}}\delta\rho_q$  в произвольной калибровке можно проверить, зависят  $\zeta_q$  и  $\mathcal{R}_q$  от времени или нет.

В частности, если для произвольных возмущений  $\bar{p} + \delta p$  является функцией  $F(\bar{p} + \delta p)$  только от возмущенной плотности энергии, то  $\dot{\bar{p}} = F'(\bar{p})\dot{\bar{p}}$  и  $\delta p_q = F'(\bar{p})\delta\rho_q$ , поэтому слагаемые в числителе в правой части выражения (5.4.27) сокращаются друг с другом, откуда следует, что  $\zeta_q$  и  $\mathcal{R}_q$  сохраняются за пределами горизонта, *даже если флуктуации не находятся в адиабатической моде*<sup>20)</sup>. Именно так происходит, например, если все избыточные частицы являются ультрапрелистическими, и в этом случае полное возмущенное давление равно  $1/3$  от полной возмущенной плотности энергии, либо если они движутся очень медленно, то полным возмущенным давлением можно пренебречь. С другой стороны, доказанная ранее в этом разделе теорема утверждает, что  $\zeta_q$  и  $\mathcal{R}_q$  сохраняются за пределами горизонта в адиабатических модах, даже в тех случаях (таких как инфляция с одним скалярным полем), когда возмущенное давление не задается в виде функции, зависящей только от возмущенной плотности энергии.

Выход уравнения (5.4.27) был основан исключительно на законе сохранения энергии (5.4.25) и (5.4.26) и не задействовал гравитационные полевые уравнения. Тем самым, если во Вселенной присутствует ингредиент  $\alpha$ , энергетически изолированный, в том смысле, что он не обменивается энергией с остальным веществом и излучением во Вселенной, то тогда при  $q/a \ll H$  величина

$$\zeta_{\alpha q} \equiv -\Psi_q + \frac{\delta\rho_{\alpha q}}{3(\bar{\rho}_\alpha + \bar{p}_\alpha)}, \quad (5.4.28)$$

вычисленная с помощью плотности энергии  $\rho_\alpha$  и давления  $p_\alpha$  изолированного ингредиента, подчинена калибровочно-инвариантному соотношению<sup>21)</sup>

$$\dot{\zeta}_{\alpha q} = \frac{\dot{\bar{p}}_\alpha\delta p_{\alpha q} - \dot{\bar{p}}_\alpha\delta\rho_{\alpha q}}{3(\bar{\rho}_\alpha + \bar{p}_\alpha)^2}. \quad (5.4.29)$$

<sup>20)</sup> Если полное давление является функцией только от плотности полной энергии, то три дифференциальных уравнения первого порядка (5.3.21), (5.3.23), и (5.3.24) образуют замкнутый набор уравнений для  $\Psi = \Phi$ ,  $\delta p$  и  $\delta\rho$ , так что с учетом связи (5.3.26) для этих величин обязаны существовать ровно два независимых решения, которые, таким образом, должны иметь адиабатический вид (5.4.4) и (5.4.6) или (5.4.7). Однако полное решение не обязательно адиабатическое, потому что другие 4-скаляры (такие как плотности энергии или давления отдельных компонент Вселенной) могут не задаваться уравнениями (5.4.9).

<sup>21)</sup> S. Bashinsky and U. Seljak, *Phys. Rev. D* **69**, 083002 (2004) [astro-ph/0310198].

В частности,  $\zeta_{\alpha q}$  (и следовательно  $\mathcal{R}_{\alpha q}$ ) сохраняется за пределами горизонта, если возмущенное давление изолированного ингредиента зависит только от возмущенной плотности энергии<sup>22)</sup>. (Как будет видно в разд. 6.1, на самом деле это является хорошим приближением для каждого из отдельных ингредиентов Вселенной во времена, последовавшие за падением температуры ниже примерно  $10^{10}$  К, когда нейтрино и антинейтрино перестали участвовать в значимых взаимодействиях с веществом и излучением.) В этом случае выражение (5.4.28) может рассматриваться в качестве удобной формулы для относительной флуктуации плотности за пределами горизонта в ньютонаской калибровке:

$$\frac{\delta \rho_{\alpha q}}{3(\bar{\rho}_\alpha + \bar{p}_\alpha)} = \zeta_{\alpha q} + \Psi_q, \quad (5.4.30)$$

причем  $\zeta_{\alpha q}$  не зависит от времени.

В синхронной калибровке получен следующий результат: для больших длин волн закон сохранения энергии (5.3.34) для энергетически изолированного ингредиента Вселенной принимает вид

$$\delta \dot{\rho}_{\alpha q}^s + 3H(\delta \rho_{\alpha q}^s + \delta p_{\alpha q}^s) + (\bar{\rho}_\alpha + \bar{p}_\alpha)\psi_q = 0, \quad (5.4.31)$$

где нижний индекс  $s$  обозначает синхронную калибровку. Если при этом  $p_\alpha$  либо пренебрежимо мало, либо является функцией только от  $\rho_\alpha$ , то предыдущее выражение может быть переписано как

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta \rho_{\alpha q}^s}{\bar{\rho}_\alpha + \bar{p}_\alpha} \right) = -\psi_q,$$

откуда следует

$$\frac{\delta \rho_{\alpha q}^s}{\bar{\rho}_\alpha + \bar{p}_\alpha} = - \int \psi_q dt + c_{\alpha q}. \quad (5.4.32)$$

Константы интегрирования  $c_{\alpha q}$  зависят от того, что мы выбираем в качестве нижнего предела в интеграле от  $\psi_q$ , но при этом их *разности* имеют абсолютное значение и связаны простым образом с разностями  $\zeta_{\alpha q}$ . Из калибровочных преобразований (5.3.14) и уравнения  $\dot{\bar{\rho}}_\alpha = -3H(\bar{\rho}_\alpha + \bar{p}_\alpha)$  для отдельного закона сохранения энергии следует, что для любых двух компонент Вселенной, энергия которых сохраняется по отдельности, выполнено

$$\frac{\delta \rho_{\alpha q}^s}{\bar{\rho}_\alpha + \bar{p}_\alpha} - \frac{\delta \rho_{\beta q}^s}{\bar{\rho}_\beta + \bar{p}_\beta} = \frac{\delta \rho_{\alpha q}}{\bar{\rho}_\alpha + \bar{p}_\alpha} - \frac{\delta \rho_{\beta q}}{\bar{\rho}_\beta + \bar{p}_\beta}. \quad (5.4.33)$$

Сравнивая уравнения (5.4.30) и (5.4.33), мы видим, что

$$c_{\alpha q} - c_{\beta q} = 3(\zeta_{\alpha q} - \zeta_{\beta q}). \quad (5.4.34)$$

<sup>22)</sup> D. Wands *et al.*, см. сноску 13.

В специальном случае адиабатических возмущений из соотношений (5.4.9) следует, что все величины

$$\frac{\delta\rho_{\alpha q}}{\bar{\rho}_\alpha + \bar{p}_\alpha} = -\frac{3H\delta\rho_{\alpha q}}{\dot{\bar{\rho}}_\alpha}$$

равны друг другу, и поэтому все  $\zeta_{\alpha q}$  равны друг другу и на самом деле равны  $\zeta_q$ . Тогда из (5.4.34) следует, что  $c_{\alpha q}$  также равны друг другу. Реликтовое излучение может быть использовано для измерения разности  $\zeta_{\alpha q}$  или  $c_{\alpha q}$ , до того как возмущения вернулись под горизонт, следовательно, с его помощью можно выяснить, являются ли космологические флуктуации по-настоящему адиабатическими. Вплоть до настоящего момента, как будет видно в разд. 7.2, кажется, что так оно и есть.

# Глава 6

## ЭВОЛЮЦИЯ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ

Развитый в предыдущей главе формализм теперь применим для изучения эволюции космологических флуктуаций, начиная с температуры  $\approx 10^9$  K, когда электрон-позитронная аннигиляция в основном завершилась, а нейтрино отделились от вещества и излучения, вплоть до относительно недавних времен, когда флуктуации вещества стали слишком велики, чтобы считаться возмущениями первого порядка. Наши результаты будут применяться для анализа наблюдаемых флуктуаций реликтового излучения в следующей главе и для анализа крупномасштабной структуры в гл. 8.

По причинам, обсуждавшимся в разд. 5.4, связь между эволюцией флуктуаций в эту эпоху и тем, что произошло в более ранние времена, будет заключена в нескольких параметрах, включая  $\mathcal{R}_q$  (или  $\zeta_q$ ), которые сохраняются в течение многих  $e$ -кратностей расширения, когда возмущения различных ингредиентов Вселенной все еще находились за пределами горизонта — т. е. когда физическое волновое число  $q/a$  было значительно меньше скорости расширения  $\dot{a}/a$ . Таким образом, значения этих параметров для состояний за пределами горизонта характеризуют силу различных возмущений. В гл. 10 будет видно, что именно можно понять об этих параметрах при изучении значительно более ранней эпохи инфляции, и таким же способом выяснить, что могут сообщить нам про эпоху инфляции крупномасштабная структура и флуктуации реликтового излучения.

В разд. 6.1. представлены уравнения, описывающие скалярные возмущения. Такие уравнения принимают простой гидродинамический вид для холодной темной материи и барионной плазмы, но чтобы проводить вычисления с высокой точностью, необходимо использовать уравнения Больцмана из кинетической теории, основанные на детальном распределении фотонов и нейтрино в фазовом пространстве<sup>1)</sup>. Аналитическое рассмотрение этих уравнений слишком сложно; т. е. это задача для современных компьютерных программ, таких как CMBfast<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> P. J. E. Peebles and J. T. Yu, *Astrophys. J.* **162**, 815 (1970); R. A. Sunyaev and Ya. B. Zel'dovich, *Astrophys. Space Sci.* **7**, 3 (1970).

<sup>2)</sup> Исходный код для уравнения Больцмана фотонов и нейтрино и других динамических и гравитационных уравнений, на которых основывается CMBfast, содержится в работе С.-Р. Ma and E. Bertschinger, *Astrophys. J.* **455**, 7 (1995) [astro-ph/9506072]. Важный обсуждаемый далее элемент кода был добавлен в U. Seljak and M. A. Zaldarriaga, *Astrophys. J.* **469**, 437 (1996) [astro-ph/9603033]. Также см. M. Zaldarriaga, U. Seljak, and E. Bertschinger, *Astrophys. J.* **494**, 491 (1998); M. Zaldarriaga and U. Seljak, *Astrophys. J.* **129**, 431 (2000). Программа доступна на сайте [www.cmbfast.org](http://www.cmbfast.org)

и CAMB<sup>3)</sup>. К сожалению, подобные компьютерные программы не предназначены для достижения понимания задействованных физических явлений. По этой причине последующие разделы будут содержать, помимо нескольких численных интегрирований, гидродинамические вычисления, достаточно простые для аналитического анализа и при этом вполне реалистичные, чтобы полученные решения были хорошим приближением к более точным результатам компьютерных вычислений.

Общие уравнения и начальные условия в контексте аналитического анализа скалярных мод содержатся в разд. 6.2. Затем рассмотрение скалярных мод разбивается на два режима, определяемых той или иной длиной волны: длины волн, достаточно большие, чтобы попасть под горизонт в течение эры доминирования вещества (разд. 6.3), длины волн, достаточно короткие, чтобы попасть под горизонт в течение эры доминирования излучения (разд. 6.4). В разд. 6.5 будет показано, как связать друг с другом решения, найденные для малых и больших длин волн. В разд. 6.6. рассматривается эволюция тензорных возмущений.

В гл. 7 полученные в ней решения для скалярных и тензорных мод используются для изучения анизотропии и поляризации реликтового излучения. В гл. 8 возмущения (плотности) вещества изучаются во времена, последовавшие за последним рассеянием, а полученные результаты обсуждаются в контексте наблюдений распределения вещества во Вселенной.

## 6.1

### Скалярные возмущения — кинетическая теория

**Холодная темная материя • Барионная плазма • Возмущение  $\delta n^{ij}$  матрицы плотности числа фотонов • Безразмерная матрица  $J_{ij}$  интенсивности фотонов • Уравнения Больцмана для фотонов • Функции источника для фотонов • Давление, плотность и анизотропная инерция фотонов • Решения для фотонов на линии прямой видимости • Возмущения  $\delta g_{\mu\nu}$  плотности числа нейтрино • Безразмерная интенсивность нейтрино  $J$  • Уравнения Больцмана для нейтрино • Давление, плотность и анизотропная инерция для нейтрино • Решения для нейтрино на линии прямой видимости • Уравнения гравитационного поля • Начальные условия**

Вполне вероятно, что с начала рассматриваемого здесь периода, сразу после  $e^+ - e^-$  аннигиляции при температуре  $T \approx 10^9$  К, вплоть до времени последнего рассеяния, когда  $T \simeq 3000$  К, Вселенная состояла всего из четырех компонент: фотонов, холодной темной материи, нейтрино и барионной<sup>4)</sup>

<sup>3)</sup> Эта программа основана на CMBfast и доступна на [www.camb.info](http://www.camb.info). Разработчики: A. Lewis and A. Challinor.

<sup>4)</sup> Здесь более правильно говорить о лептон-барионной плазме. — Прим. ред. перев.

плазмы, состоящей из свободных электронов, ионов и нейтральных атомов. В этом разделе будут рассмотрены возмущения скалярных мод каждой из этих четырех компонент по очереди, и с этой целью будет использоваться синхронная калибровка из разд. 5.3. Каждая возмущенная величина  $X(\mathbf{x}, t)$  (такая как  $\delta\rho$ ,  $\delta p$ ,  $A$ ,  $B$ , и т. д.) записывается в виде интеграла Фурье и суммы по модам аналогично выражениям (5.2.1):

$$X(\mathbf{x}, t) = \sum_n \int d^3 q \alpha_n(\mathbf{q}) X_{nq}(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}, \quad (6.1.1)$$

где  $\alpha_n(\mathbf{q})$  — это стохастический параметр для  $n$ -й моды. В частности, возмущение метрики в синхронной калибровке задается  $\delta g_{00} = 0$ ,  $\delta g_{i0} = 0$  и

$$\delta g_{ij}(\mathbf{x}, t) = a^2(t) \sum_n \int d^3 q \alpha_n(\mathbf{q}) [A_{nq}(t) \delta_{ij} - q_i q_j B_{nq}(t)] e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}. \quad (6.1.2)$$

---

Отметим, что  $q$  — это сопутствующее волновое число, связанное с физическим волновым числом  $k$  как  $k = q/a$ . Величину  $a$  обычно определяют таким образом, чтобы в настоящее время выполнялось  $a = 1$ , так что сопутствующее волновое число равно современному значению физического волнового числа, и в этом случае сопутствующее волновое число зачастую обозначается как  $k$ . Вместо этого мы, наоборот, не станем фиксировать нормировку  $a$ , сохранив обозначение  $k$  для физического волнового числа  $q/a$ .

---

В этом разделе будет рассматриваться одна произвольная мода, поэтому индекс  $n$  не пишется; полученные нами уравнения будут иметь ряд решений, определяющих различные моды.

### Холодная темная материя

Считается, что отдельные частицы холодной темной материи движутся слишком медленно, чтобы приводить к заметному давлению или анизотропной инерции, и, как показано в разд. 5.3, отсутствие давления или анизотропной инерции позволяет выбрать частную синхронную калибровку, в которой скорость потока холодной темной материи  $u_D^i$  обращается в ноль. Значит, координатная сетка привязана к частицам холодной темной материи таким способом, что они остаются в положении покоя, несмотря на флуктуации в гравитационном поле, в котором они движутся. Таким образом, холодная темная материя характеризуется исключительно полной плотностью  $\bar{\rho}_D(t) + \delta\rho_D(\mathbf{x}, t)$ , где невозмущенная плотность  $\bar{\rho}_D(t)$  убывает по простому закону  $a^{-3}(t)$ , а фурье-образ возмущения  $\delta\rho_D(\mathbf{x}, t)$  описывается законом сохранения энергии (5.3.34) с нулевыми давлением и скоростью:

$$\delta\dot{\rho}_{Dq} + 3H\delta\rho_{Dq} = -\bar{\rho}_D\psi_q. \quad (6.1.3)$$

---

Напомним, что  $\psi_q \equiv (3\dot{A}_q - q^2 \dot{B}_q)/2$ .

---

### Барионная плазма

Кулоновские взаимодействия электронов и атомных ядер достаточно сильны, так что всю совокупность этих частиц можно рассматривать как идеальную жидкость. В рассматриваемую эпоху электроны и ядра движутся очень медленно, поэтому давление и анизотропная инерция в барионной плазме исчезающе малы, тогда невозмущенная плотность  $\bar{\rho}_b(t)$  изменяется как  $a^{-3}(t)$ , а фурье-образ возмущения плотности описывается законом сохранения энергии (5.3.34), однако теперь потенциал поля скоростей  $\delta\rho_b(\mathbf{x}, t)$  отличен от нуля:

$$\delta\dot{\rho}_{bq} + 3H\delta\rho_{bq} - \left(\frac{q^2}{a^2}\right)\bar{\rho}_b\delta u_{bq} = -\bar{\rho}_b\psi_q. \quad (6.1.4)$$

С другой стороны, томсоновское рассеяние приводит к обмену импульсом между барионной плазмой и фотонами, поэтому именно комбинация фотонов и плазмы удовлетворяет закону сохранения импульса (5.3.32), который теперь принимает вид

$$\delta p_{\gamma q} - q^2\pi_{\gamma q}^S + [\partial_0 + 3H]\left[\bar{\rho}_b\delta u_{bq} + \frac{4}{3}\bar{\rho}_\gamma\delta u_{\gamma q}\right] = 0, \quad (6.1.5)$$

где  $\delta\rho_\gamma$  и  $\delta u_\gamma$  — это возмущения давления и потенциала поля скоростей фотонов. Данное уравнение можно рассматривать как уравнение движения барионной плазмы, где фотонные величины  $\pi_{\gamma q}^S$ ,  $p_{\gamma q}$ ,  $\delta u_{\gamma q}$  вычисляются согласно предписанию из следующего раздела.

### Фотоны

Как раз перед периодом рекомбинации плотность свободных электронов достаточно высока, так что фотоны можно описывать гидродинамически: в результате томсоновского рассеяния фотоны получают полный импульс, привязанный к полному импульсу барионной плазмы, тогда получается  $\delta u_{\gamma q} = \delta u_{bq}$  и изотропное в сопутствующей системе координат распределение импульсов, откуда следует  $\delta p_{\gamma q} = \delta\rho_{\gamma q}/3$  и  $\pi_{\gamma q}^S = 0$ . Однако для тщательного изучения фотонов во время рекомбинации необходимо рассматривать их кинематически, изучая распределение фотонов в импульсном пространстве с учетом фотонной поляризации. Как обсуждается в приложении H, это распределение задается эрмитовой матрицей плотности числа частиц  $n^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ , определенной таким образом, чтобы число фотонов в пространстве с объемом  $\prod_i dx^i$ , импульсы которых принадлежат элементу объема импульсного пространства  $\prod_i dp_i$ , с весовыми коэффициентами, равными вероятности наличия у них поляризации  $e^i$ , было равно  $e_i e_j^* n^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \prod_k dx^k dp_k$  и  $p_i n^{ij} = 0$ .

---

Векторы поляризации подчиняются условию  $g_{ij}e^i e^{j*} = 1$  и условию поперечности  $p_i e^i = 0$  и  $e_i \equiv g_{ik}e^k$ . См. дальнейшее обсуждение поляризации в приложении G.

В случае малых возмущений данное распределение удобно записывать в виде

$$n^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2} \bar{n}_\gamma(a(t)p^0(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)) \left[ g^{ij}(\mathbf{x}, t) - \frac{g^{ij}(\mathbf{x}, t)g^{jl}(\mathbf{x}, t)p_k p_l}{[p^0(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)]^2} \right] + \delta n^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad (6.1.6)$$

где

$$p^0(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \equiv \sqrt{g^{ij}(\mathbf{x}, t)p_i p_j}. \quad (6.1.7)$$

Здесь  $\bar{n}_\gamma(p)$  — это равновесная плотность числа фотонов в фазовом пространстве:

$$\bar{n}_\gamma(p) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \left[ \exp \left( \frac{p}{k_B a(t) \bar{T}(t)} \right) - 1 \right]^{-1}, \quad (6.1.8)$$

где  $\bar{T}(t)$  обозначает невозмущенную температуру барионной плазмы, а  $\delta n^{ij}$  — это малые внутренние возмущения. Первое слагаемое в выражении (6.1.6) в точности является матрицей распределения неполяризованных фотонов, находящихся в тепловом равновесии при температуре  $\bar{T}(t)$ , записанной в произвольной системе пространственных координат, поэтому  $\delta n$  содержит скорее динамическое, а не чисто геометрическое влияние возмущения метрики на распределение фотонов.

---

Отметим, что фактор  $a(t)$  в аргументе  $\bar{n}_\gamma$  в выражении (6.1.6) сокращается фактором  $a(t)$ , умноженным на  $\bar{T}(t)$  из уравнения (6.1.8); этот фактор введен потому, что в рассматриваемую эпоху  $\bar{T}(t) \propto a^{-1}(t)$ , так что согласно определению этого фактора,  $\bar{n}_\gamma$  является независящей от времени функцией своего аргумента.

---

Поскольку суммирование по поляризациям  $e_i e_j^*$  дает  $g_{ij}$ , фазовая плотность фотонов равна  $g_{ij} n^{ij}$ . Следовательно, полный тензор энергии-импульса фотонов равен

$$T_{\gamma\nu}^\mu = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \int \left( \prod_{k=1}^3 dp_k \right) g_{ij} n^{ij} \frac{p^\mu p_\nu}{p^0}. \quad (6.1.9)$$

Первое слагаемое в выражении (6.1.6) содержит возмущения первого порядка, возникающие из возмущений метрики в  $p^i = g^{ij} p_j$  и  $p^0 = -p_0 = \sqrt{g^{ij} p_i p_j}$ , в детерминанте метрики  $\det g$  и в факторе  $g_{ij}$  в  $g_{ij} n^{ij}$ . Прямыми, но громоздкими вычислениями можно показать, что все эти вклады в  $\delta T_{\gamma\nu}^\mu$  сокращаются, однако добиться этого можно более простым способом, заметив, что из уравнения (6.1.9) следует, что вклады первого слагаемого из (6.1.6) в  $\delta T_{\gamma j}^i(\mathbf{x}, t)$ ,  $\delta T_{\gamma j}^0(\mathbf{x}, t)$ ,  $\delta T_{\gamma 0}^j(\mathbf{x}, t)$  и  $\delta T_{\gamma 0}^0(\mathbf{x}, t)$  являются локальными функциями трехмерной метрики  $g_{ij}(\mathbf{x}, t)$ , которые преобразуются относительно общих преобразований пространственных координат как смешанный 3-тензор, ковариантный 3-вектор, контравариантный 3-вектор и 3-скаляр соответственно.

Однако не существует нетривиальных, локальных и зависящих от трехмерной метрики функций, которые преобразуются указанным выше способом относительно преобразований пространственных координат! Тогда остается лишь вклад от следа  $\delta n_\gamma^{ij}$ . Значит, полные возмущения первого порядка смешанных компонент тензора энергии-импульса равны

$$\delta T_{\gamma j}^i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{a^4(t)} \int \left( \prod_{k=1}^3 dp_k \right) a^2(t) \delta n_\gamma^{kk}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \frac{p_i p_j}{\sqrt{p_k p_k}}, \quad (6.1.10)$$

$$\delta T_{\gamma j}^0(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{a^3(t)} \int \left( \prod_{k=1}^3 dp_k \right) a^2(t) \delta n_\gamma^{kk}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) p_j, \quad (6.1.11)$$

$$\delta T_{\gamma 0}^0(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{a^4(t)} \int \left( \prod_{k=1}^3 dp_k \right) a^2(t) \delta n_\gamma^{kk}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \sqrt{p_k p_k}. \quad (6.1.12)$$

Очевидно, что все, что требуется для вычисления этих возмущений, — это взять интеграл от  $\delta n_\gamma^{kk}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  по фотонной энергии, с одним весовым вкладом от энергии. По этой причине вводится *безразмерная матрица интенсивностей*  $J_{ij}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t)$ , определяемая как

$$a^4(t) \bar{\rho}_\gamma(t) J_{ij}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t) \equiv a^2(t) \int_0^\infty \delta n_\gamma^{ij}(\mathbf{x}, p \hat{\mathbf{p}}, t) 4\pi p^3 dp, \quad (6.1.13)$$

где

$$\bar{\rho}_\gamma(t) \equiv a^{-4}(t) \int 4\pi p^3 \bar{n}_\gamma(p) dp$$

— невозмущенная плотность энергии фотонов. Тогда компоненты (6.1.10)–(6.1.12) принимают вид

$$\delta T_{\gamma j}^i(\mathbf{x}, t) = \bar{\rho}_\gamma(t) \int \frac{d^2 \hat{\mathbf{p}}}{4\pi} J_{kk}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t) \hat{p}_i \hat{p}_j, \quad (6.1.14)$$

$$\delta T_{\gamma j}^0(\mathbf{x}, t) = a(t) \bar{\rho}_\gamma(t) \int \frac{d^2 \hat{\mathbf{p}}}{4\pi} J_{kk}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t) \hat{p}_j, \quad (6.1.15)$$

$$\delta T_{\gamma 0}^0(\mathbf{x}, t) = -\bar{\rho}_\gamma(t) \int \frac{d^2 \hat{\mathbf{p}}}{4\pi} J_{kk}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t). \quad (6.1.16)$$

Как будет показано в уравнении (Н.37) приложения Н, возмущение  $\delta n^{ij}$  описывается уравнением Больцмана:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \delta n^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} + \frac{\hat{p}_k}{a(t)} \frac{\partial \delta n^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{\partial x^k} + \frac{2\dot{a}(t)}{a(t)} \delta n^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - \\ & - \frac{1}{4a^2(t)} p \bar{n}'_\gamma(p) \hat{p}_k \hat{p}_l \frac{\partial}{\partial t} (a^{-2}(t) \delta g_{kl}(\mathbf{x}, t)) (\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\omega_c(t) \delta n^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \frac{3\omega_c(t)}{8\pi} \int d^2 \hat{p}_1 \times \\
&\quad \times [\delta n^{ij}(\mathbf{x}, p\hat{p}_1, t) - \hat{p}_i \hat{p}_k \delta n^{kj}(\mathbf{x}, p\hat{p}_1, t) - \hat{p}_j \hat{p}_k \delta n^{ik}(\mathbf{x}, p\hat{p}_1, t) + \\
&\quad + \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}_k \hat{p}_l \delta n^{kl}(\mathbf{x}, p\hat{p}_1, t)] - \frac{\omega_c}{2a^3} p_k \delta u_{6k} \bar{n}'_\gamma(p) (\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j), \quad (6.1.17)
\end{aligned}$$

где теперь  $p \equiv \sqrt{p_i p_i}$ ,  $\hat{p} \equiv \mathbf{p}/p$ ,  $\omega_c(t)$  — это частота столкновений фотона с электронами в барионной плазме; а  $\delta u_{6k}$  — это пекулярная скорость барионной плазмы. Уравнение Больцмана для безразмерной матрицы интенсивностей можно вывести, умножив (6.1.17) на  $4\pi p^3$  и интегрируя по  $p \equiv \sqrt{p_i p_i}$ , воспользовавшись тем, что

$$4\pi \int_0^\infty p^4 \bar{n}'_\gamma(p) dp = -16\pi \int_0^\infty p^3 \bar{n}_\gamma(p) dp = -4a^4(t) \rho_\gamma(t).$$

Записывая матрицу интенсивностей и скорость плазмы через фурье-образы

$$\begin{aligned}
J_{ij}(\mathbf{x}, \hat{p}, t) &= \int d^3 q J_{ij}(\mathbf{q}, \hat{p}, t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}, \\
\delta u_{6i}(\mathbf{x}, t) &= \int d^3 q \delta u_{6i}(\mathbf{q}, t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}, \quad (6.1.18)
\end{aligned}$$

находим уравнение

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial J_{ij}(\mathbf{q}, \hat{p}, t)}{\partial t} + i \frac{\hat{p} \cdot \mathbf{q}}{a(t)} J_{ij}(\mathbf{q}, \hat{p}, t) + \alpha(\mathbf{q}) [\dot{A}_q(t) - (\mathbf{q} \cdot \hat{p})^2 \dot{B}_q(t)] (\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) = \\
&= -\omega_c(t) J_{ij}(\mathbf{q}, \hat{p}, t) + \frac{3\omega_c(t)}{8\pi} \int d^2 \hat{p}_1 \times \\
&\quad \times [J_{ij}(\mathbf{q}, \hat{p}_1, t) - \hat{p}_i \hat{p}_k J_{kj}(\mathbf{q}, \hat{p}_1, t) - \hat{p}_j \hat{p}_k J_{ik}(\mathbf{q}, \hat{p}_1, t) + \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}_k \hat{p}_l J_{kl}(\mathbf{q}, \hat{p}_1, t)] + \\
&\quad + \frac{2\omega_c(t)}{a(t)} [\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j] \hat{p}_k \delta u_{6k}(\mathbf{q}, t), \quad (6.1.19)
\end{aligned}$$

при выводе которого мы воспользовались соотношениями (5.3.27) и (6.1.2) для возмущения метрик.

Матрица интенсивностей и скорость плазмы пропорциональны стохастическому параметру  $\alpha(\mathbf{q})$  независимо от того, какая именно мода рассматривается; данный параметр содержит всю информацию о начальных условиях. Помимо этого множителя в рассматриваемой задаче нет никаких выделенных направлений, поэтому коэффициент перед  $\alpha(\mathbf{q})$  в матрице интенсивностей можно разложить в сумму слагаемых, пропорциональных двум симметричным трехмерным тензорам  $\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j$  и  $(\hat{q}_i - (\hat{q} \cdot \hat{p}) \hat{p}_i)(\hat{q}_j - (\hat{q} \cdot \hat{p}) \hat{p}_j)$ , обращающихся в ноль при свертке с  $\hat{p}_i$  или  $\hat{p}_j$ , с коэффициентами, зависящими от направлений  $\hat{q}$  и  $\hat{p}$  только через скалярное произведение  $\hat{q} \cdot \hat{p}$ . Такое разложение

обычно записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} J_{ij}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{p}}, t) = & \alpha(\mathbf{q}) \left\{ \frac{1}{2} \left( \Delta_T^{(S)}(q, \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{p}}, t) - \Delta_P^{(S)}(q, \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{p}}, t) \right) (\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) + \right. \\ & \left. + \Delta_P^{(S)}(q, \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{p}}, t) \left[ \frac{(\hat{q}_i - (\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{p}})\hat{p}_i)(\hat{q}_j - (\hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{p}})\hat{p}_j)}{1 - (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{q}})^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.1.20)$$

---

Нижние индексы  $T$  и  $P$  обозначают «температуру» и «поляризацию». Отметим, что след  $J_{ii}$  — единственное, что появляется в тензоре энергии-импульса, — пропорционален исключительно  $\Delta_T^{(S)}$ , однако необходимо следить за  $\Delta_P^{(S)}$ , потому что он связан с  $\Delta_T^{(S)}$  через уравнения динамики.

---

Подобным образом возникающий в правой части уравнения (6.1.19) интеграл по  $\hat{\mathbf{p}}$  можно выразить в терминах пары «функций источников»  $\Phi(q, t)$  и  $\Pi(q, t)$  как

$$\int \frac{d^2 \hat{\mathbf{p}}}{4\pi} J_{ij}(\mathbf{q}, \hat{\mathbf{p}}, t) = \alpha(\mathbf{q}) \left[ \delta_{ij} \Phi(q, t) + \frac{1}{2} \hat{q}_i \hat{q}_j \Pi(q, t) \right], \quad (6.1.21)$$

и, как обычно, записываем

$$\delta u_{6i}(\mathbf{q}, t) = i\alpha(\mathbf{q}) q_i \delta u_{6q}(t). \quad (6.1.22)$$

Подстановка уравнений (6.1.20)–(6.1.22) в (6.1.19) приводит к системе уравнений Больцмана для  $\Delta_T^{(S)}$  и  $\Delta_P^{(S)}$ :

$$\dot{\Delta}_P^{(S)}(q, \mu, t) + i \left( \frac{q\mu}{a(t)} \right) \Delta_P^{(S)}(q, \mu, t) = -\omega_c(t) \Delta_P^{(S)}(q, \mu, t) + \frac{3}{4} \omega_c(t) (1 - \mu^2) \Pi(q, t), \quad (6.1.23)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Delta}_T^{(S)}(q, \mu, t) + i \left( \frac{q\mu}{a(t)} \right) \Delta_T^{(S)}(q, \mu, t) = & -\omega_c(t) \Delta_T^{(S)}(q, \mu, t) - 2\dot{A}_q(t) + 2q^2 \mu^2 \dot{B}_q(t) + \\ & + 3\omega_c(t) \Phi(q, t) + \frac{3}{4} \omega_c(t) (1 - \mu^2) \Pi(q, t) + \frac{1}{a(t)} 4iq\mu\omega_c(t) \delta u_{6q}(t), \end{aligned} \quad (6.1.24)$$

где  $\Phi$  и  $\Pi$  определены соотношением (6.1.21).

Привычный метод<sup>5)</sup> решения этих уравнений Больцмана состоит в разложении  $\Delta_T^{(S)}$  и  $\Delta_P^{(S)}$  на парциальные амплитуды:

$$\Delta_T^{(S)}(q, \mu, t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{-\ell} (2\ell + 1) P_{\ell}(\mu) \Delta_{T,\ell}^{(S)}(q, t), \quad (6.1.25)$$

---

<sup>5)</sup> M. L. Wilson and J. Silk, *Astrophys. J.* **243**, 14 (1981); J. R. Bond and G. Efstathiou, *Astrophys. J.* **285**, L45 (1984); R. Crittenden, J. R. Bond, R. L. Davis, G. Efstathiou, and P. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 324 (1993); C.-P. Ma and E. Bertschinger, *Astrophys. J.* **455**, 7 (1995).

$$\Delta_P^{(S)}(q, \mu, t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{-\ell} (2\ell+1) P_\ell(\mu) \Delta_{P,\ell}^{(S)}(q, t). \quad (6.1.26)$$

С целью вывода уравнений Больцмана для парциальных амплитуд воспользуемся рекуррентными соотношениями и условиями нормировки для полиномов Лежандра

$$(2\ell+1)\mu P_\ell(\mu) = (\ell+1)P_{\ell+1}(\mu) + \ell P_{\ell-1}(\mu), \quad \int_{-1}^{+1} P_\ell^2(\mu) d\mu = \frac{2}{2\ell+1}.$$

Тогда умножение (6.1.23) и (6.1.24) на  $P_\ell(\mu)$  и интегрирование по  $\mu$  приводит к уравнениям

$$\dot{\Delta}_{P,\ell}^{(S)} + \frac{q}{a(2\ell+1)} [(\ell+1)\Delta_{P,\ell+1}^{(S)} - \ell\Delta_{P,\ell-1}^{(S)}] = -\omega_c \Delta_{P,\ell}^{(S)} + \frac{1}{2}\omega_c \Pi \left( \delta_{\ell 0} + \frac{\delta_{\ell 2}}{5} \right), \quad (6.1.27)$$

$$\dot{\Delta}_{T,\ell}^{(S)} + \frac{q}{a(2\ell+1)} [(\ell+1)\Delta_{T,\ell+1}^{(S)} - \ell\Delta_{T,\ell-1}^{(S)}] = -2\dot{A}_q \delta_{\ell 0} + 2q^2 \dot{B}_q \left( \frac{\delta_{\ell 0}}{3} - \frac{2\delta_{\ell 2}}{15} \right) - \omega_c \Delta_{T,\ell}^{(S)} + \omega_c \left( 3\Phi + \frac{1}{2}\Pi \right) \delta_{\ell 0} + \frac{1}{10}\omega_c \Pi \delta_{\ell 2} - \frac{4}{3} \frac{1}{a(t)} q \omega_c \delta u_{6q} \delta_{\ell 1}. \quad (6.1.28)$$

Функции источников можно выразить через  $\Delta_{T,\ell}^{(S)}$  и  $\Delta_{P,\ell}^{(S)}$ , если подставить (6.1.20) в (6.1.21) и воспользоваться следующей интегральной формулой, справедливой для произвольной функции  $f(\hat{q} \cdot \hat{p})$ ,

$$\frac{1}{4\pi} \int d^2 \hat{p} f(\hat{q} \cdot \hat{p}) \hat{p}_i \hat{p}_j = \mathcal{A} \delta_{ij} + \mathcal{B} \hat{q}_i \hat{q}_j,$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 d\mu f(\mu) (1 - \mu^2) = \frac{1}{6} \int_{-1}^1 d\mu f(\mu) (P_0(\mu) - P_2(\mu)), \\ \mathcal{B} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 d\mu f(\mu) (3\mu^2 - 1) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu f(\mu) P_2(\mu). \end{aligned}$$

---

Общий вид интегралов обусловлен вращательной инвариантностью, а формулы для коэффициентов получаются при свертке интеграла с  $\delta_{ij}$  и  $\hat{q}_i \hat{q}_j$  и последующем решении возникающей пары линейных уравнений на  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ .

---

Исходя из этого, можно легко вычислить два слагаемых в интеграле (6.1.21) (аргументы  $q$  и  $t$  здесь опущены):

$$\frac{1}{8\pi} \int d^2 \hat{p} (\Delta_T^{(S)}(\hat{q} \cdot \hat{p}) - \Delta_P^{(S)}(\hat{q} \cdot \hat{p})) (\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^1 d\mu (\Delta_T^{(S)}(\mu) - \Delta_P^{(S)}(\mu)) \left[ \left( \frac{1}{6} P_0(\mu) + \frac{1}{12} P_2(\mu) \right) \delta_{ij} - \frac{1}{4} P_2(\mu) \hat{q}_i \hat{q}_j \right], \\
&\frac{1}{4\pi} \int d^2 \hat{p} \Delta_P^{(S)}(\hat{q} \cdot \hat{p}) \frac{(\hat{q}_i - (\hat{q} \cdot \hat{p}) \hat{p}_i)(\hat{q}_j - (\hat{q} \cdot \hat{p}) \hat{p}_j)}{1 - (\hat{q} \cdot \hat{p})^2} = \\
&= \int_{-1}^1 d\mu \Delta_P^{(S)}(\mu) \left[ \left( \frac{1}{12} P_0(\mu) + \frac{1}{6} P_2(\mu) \right) \delta_{ij} + \left( \frac{1}{4} P_0(\mu) - \frac{1}{2} P_2(\mu) \right) \hat{q}_i \hat{q}_j \right].
\end{aligned}$$

Таким способом, воспользовавшись разложением на парциальные волны (6.1.25) и (6.1.26), находим

$$\Phi = \frac{1}{6} [2\Delta_{T,0}^{(S)} - \Delta_{P,0}^{(S)} - \Delta_{T,2}^{(S)} - \Delta_{P,2}^{(S)}], \quad (6.1.29)$$

$$\Pi = \Delta_{P,0}^{(S)} + \Delta_{T,2}^{(S)} + \Delta_{P,2}^{(S)}. \quad (6.1.30)$$

Точно таким же образом подстановка выражения (6.1.20) в (6.1.14)–(6.1.16) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned}
\delta T_{\gamma j}^i(\mathbf{x}, t) &= \bar{\rho}_\gamma(t) \int d^3 q e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \alpha(\mathbf{q}) \int_{-1}^1 d\mu \Delta_T^{(S)}(q, \mu, t) \times \\
&\times \left[ \frac{1}{6} (P_0(\mu) - P_2(\mu)) \delta_{ij} + \frac{1}{2} P_2(\mu) \hat{q}_i \hat{q}_j \right], \\
\delta T_{\gamma j}^0(\mathbf{x}, t) &= a(t) \bar{\rho}_\gamma(t) \int d^3 q e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \alpha(\mathbf{q}) \frac{\hat{q}_j}{2} \int_{-1}^1 d\mu \Delta_T^{(S)}(q, \mu, t) P_1(\mu), \\
\delta T_{\gamma 0}^0(\mathbf{x}, t) &= -\frac{1}{2} \bar{\rho}_\gamma(t) \int d^3 q e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \alpha(\mathbf{q}) \int_{-1}^1 d\mu \Delta_T^{(S)}(q, \mu, t) P_0(\mu),
\end{aligned}$$

в которых была использована формула

$$\frac{1}{4\pi} \int d^2 \hat{p} f(\hat{q} \cdot \hat{p}) \hat{p}_i = \frac{\hat{q}_i}{2} \int_{-1}^1 d\mu f(\mu) P_1(\mu).$$

Сравнивая полученные соотношения с первыми тремя уравнениями из (5.1.43) и снова пользуясь разложением на парциальные волны (6.1.25) и (6.1.26), находим

$$\delta p_{\gamma q} = \frac{\bar{\rho}_\gamma}{3} (\Delta_{T,0}^{(S)} + \Delta_{T,2}^{(S)}), \quad (6.1.31)$$

$$q^2 \pi_{\gamma q}^{(S)} = \bar{\rho}_\gamma \Delta_{T,2}^{(S)}, \quad (6.1.32)$$

$$\delta \rho_{\gamma q} = \bar{\rho}_\gamma \Delta_{T,0}^{(S)}, \quad (6.1.33)$$

$$\frac{1}{a} q \delta u_{\gamma q} = -\frac{3}{4} \Delta_{T,1}^{(S)}. \quad (6.1.34)$$

В качестве проверки соотношений (6.1.31)–(6.1.33) отметим, что при подстановке в последнее из уравнений (5.1.43) получаем  $\delta T_{\gamma\lambda}^\lambda = 0$ , что является необходимым условием безмассовости фотонов при любом распределении фотонных импульсов.

Из уравнений (6.1.31)–(6.1.34) следует, что для изучения космологической эволюции гравитационного поля и его влияния на другие возмущения в скалярных модах, все, что требуется знать о фотонах, — это  $\Delta_{T,\ell}^{(S)}$  при  $\ell \leq 2$ . Однако конечно же, эволюция этих трех амплитуд связывается уравнениями Больцмана (6.1.27)–(6.1.30) с  $\Delta_{T,\ell}^{(S)}$  и  $\Delta_{P,\ell}^{(S)}$  для всех целых  $\ell$ . В таких компьютерных программах, как CMBfast и CAMB, разложение на парциальные волны обрезается при достаточно больших  $\ell$ ; в последней версии CMBfast максимальное значение  $\ell$  выбирается как  $\ell_{\max} = 12$ , и в этом случае компьютер должен решить систему из  $2(\ell_{\max} + 1) = 26$  обыкновенных дифференциальных уравнений для каждого значения  $q$ , не считая других уравнений, которые описывают эволюцию барионной плазмы, холодной темной материи, нейтрино и гравитационного поля.

Как будет видно в следующей главе, интерпретация наблюдений реликтового излучения требует, чтобы при вычислении  $\Delta_{T,\ell}^{(S)}$  и  $\Delta_{P,\ell}^{(S)}$  параметр  $\ell$  пробегал много больше 1000 значений. Изначально это было сделано посредством прямого использования уравнений Больцмана (6.1.27) и (6.1.28) (см. сноску 5), однако для каждой теоретической модели потребовались часы и даже дни компьютерного времени. Взамен этого, значительное улучшение возникло с предложением использовать формальное решение уравнения Больцмана (6.1.19) в виде «радиального» интеграла<sup>6)</sup>, который в матричных обозначениях принимает вид

$$\begin{aligned} J_{ij}(\mathbf{q}, \hat{p}, t) = & \alpha(\mathbf{q}) \int_{t_1}^t dt' \exp \left( -i \mathbf{q} \cdot \hat{p} \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} - \int_{t'}^t dt'' \omega_c(t'') \right) \times \\ & \times \left[ -(\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) (\dot{A}_q(t') - (\hat{p} \cdot \mathbf{q})^2 \dot{B}_q(t')) + \frac{3\omega_c(t')}{2} (\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) \Phi(q, t') + \right. \\ & + \left. \frac{3\omega_c(t')}{4} \Pi(q, t') (\hat{q}_i - \hat{p}_i (\hat{q} \cdot \hat{p})) (\hat{q}_j - \hat{p}_j (\hat{q} \cdot \hat{p})) + \frac{2\omega_c(t')}{a(t')} [\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j] \hat{p}_k \delta u_k(\mathbf{q}, t') \right] + \end{aligned}$$

<sup>6)</sup> U. Seljak and M. A. Zaldarriaga, *Astrophys. J.* **469**, 437 (1996) [astro-ph/9603033].

$$+ J_{ij}(\mathbf{q}, \hat{p}, t_1) \exp \left( -i\mathbf{q} \cdot \hat{p} \int_{t_1}^t \frac{dt'}{a(t')} - \int_{t_1}^t dt' \omega_c(t') \right), \quad (6.1.35)$$

где  $t_1$  — это произвольный начальный момент времени. Если выбрать  $t_1$  достаточно ранним, до рекомбинации, так чтобы  $\omega_c(t_1) \gg H(t_1)$ , а в качестве  $t$  взять в любой момент времени после рекомбинации, то последним слагаемым в (6.1.35) можно пренебречь, и в итоге получается

$$\begin{aligned} J_{ij}(\mathbf{q}, \hat{p}, t) = & \alpha(\mathbf{q}) \int_{t_1}^t dt' \exp \left( -i\mathbf{q} \cdot \hat{p} \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} - \int_{t'}^t dt'' \omega_c(t'') \right) \times \\ & \times \left[ -(\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) (\dot{A}_q(t') - (\hat{p} \cdot \mathbf{q})^2 \dot{B}_q(t')) + \frac{3\omega_c(t')}{2} (\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) \Phi(q, t') + \right. \\ & + \frac{3\omega_c(t')}{4} \Pi(q, t') (\hat{q}_i - \hat{p}_i (\hat{q} \cdot \hat{p})) (\hat{q}_j - \hat{p}_j (\hat{q} \cdot \hat{p})) + \\ & \left. + \frac{2\omega_c(t')}{a(t')} [\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j] \hat{p}_k \delta u_k(\mathbf{q}, t') \right]. \end{aligned} \quad (6.1.36)$$

В терминах температуры и амплитуды поляризации, задаваемых разложением (6.1.20), радиальный интеграл принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta_T^{(S)}(q, \mu, t) = & \Delta_P^{(S)}(q, \mu, t) + 2 \int_{t_1}^t dt' \exp \left( -iq\mu \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} - \int_{t'}^t \omega_c(t'') dt'' \right) \times \\ & \times \left[ -\dot{A}_q(t') + \mu^2 q^2 \dot{B}_q(t') + \frac{3}{2} \omega_c(t') \Phi(q, t') + \frac{2iq\omega_c(t')}{a(t')} \delta u_q(t') \right], \end{aligned} \quad (6.1.37)$$

$$\Delta_P^{(S)}(q, \mu, t) = \frac{3}{4}(1 - \mu^2) \int_{t_1}^t dt' \exp \left( -iq\mu \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} - \int_{t'}^t \omega_c(t'') dt'' \right) \omega_c(t') \Pi(q, t'), \quad (6.1.38)$$

где  $\delta u_q$  — это потенциал поля скорости для скаляра, определенный соотношением  $\delta u_k(\mathbf{q}, t) = iq_k u_q(t)$ . Вычислив  $\Phi$  и  $\Pi$  из уравнений (6.1.29) и (6.1.30), выражения (6.1.37) и (6.1.38) можно использовать для вычисления  $\Delta_{T,\ell}^{(S)}$  и  $\Delta_{P,\ell}^{(S)}$  для сколько угодно больших значений  $\ell$ .

---

Помимо этого, можно воспользоваться уравнением (6.1.36) в качестве замены парциального разложения при вычислении источников  $\Phi$  и  $\Pi$ . Интегрирование (6.1.36) по  $\hat{p}$  приводит к интегральным уравнениям<sup>7)</sup>: выражениям для  $\Phi(q, t)$

<sup>7)</sup> S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **74**, 063517 (2006) [astro-ph/0607076]; D. Baskaran, L. P. Grishchuk, and A. G. Polnarev, *Phys. Rev. D* **74**, 063517 [gr-qc/0605100].

и  $\Pi(q, t)$  в виде интегралов от  $t_1$  до  $t$ , в которых подынтегральное выражение является линейной функцией от  $\Phi(q, t')$  и  $\Pi(q, t')$  при  $t' < t$ . Этот подход будет применен к тензорным модам в разд. 6.6.

---

### Нейтрино

Плотность числа  $n_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  каждого типа безмассовых нейтрино (или антинейтрино) в фазовом пространстве может быть удобным способом представлена в терминах внутреннего возмущения  $\delta n_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  формулой наподобие (6.1.6):

$$n_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \bar{n}_\nu(a(t)p^0(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)) + \delta n_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad (6.1.39)$$

где  $\bar{n}_\nu$  — это равновесная фазовая плотность нейтрино каждого типа:

$$\bar{n}_\nu(p) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \left[ \exp \left( \frac{p}{k_B a(t) \bar{T}(t)} \right) + 1 \right]^{-1} \quad (6.1.40)$$

Как показано в приложении Н, возмущение  $\delta n_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  подчиняется такому же уравнению Больцмана, как и фазовая плотность  $a^2(t)n_\gamma^{kk}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  фотонов, если не принимать в расчет то, что при температурах  $T \ll 10^{10}$  К пропорциональные частоте столкновений слагаемые отсутствуют:

$$0 = \frac{\partial \delta n_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} + \frac{\hat{p}_k}{a(t)} \frac{\partial \delta n_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{\partial x^k} - \frac{1}{2} p \bar{n}'_\nu(p) \hat{p}_k \hat{p}_l \frac{\partial}{\partial t} (a^{-2}(t) \delta g_{kl}(\mathbf{x}, t)). \quad (6.1.41)$$

Вклад каждого типа нейтрино в возмущения тензора энергии-импульса задается формулами (6.1.10)–(6.1.12), в которых все  $\delta n_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  нужно заменить на  $a^2(t)n_\gamma^{kk}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ . Еще раз: все, что нам нужно, — это безразмерная, зависимая от направлений интенсивность, определяемая формулой, подобной (6.1.13):

$$a^4(t) \bar{\rho}_\nu(t) J(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t) \equiv N_\nu \int_0^\infty \delta n_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) 4\pi p^3 dp, \quad (6.1.42)$$

где  $N_\nu$  — это число типов нейтрино, антинейтрино считаются отдельно, и  $\bar{\rho}_\nu \equiv N_\nu a^{-4} \int 4\pi p^3 \bar{n}_\nu(p) dp$ . Тогда полный вклад в тензор энергии-импульса от нейтрино и антинейтрино равен

$$\delta T_{\nu j}^i(\mathbf{x}, t) = \bar{\rho}_\nu(t) \int \frac{d^2 \hat{\mathbf{p}}}{4\pi} J(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t) \hat{p}_i \hat{p}_j, \quad (6.1.43)$$

$$\delta T_{\nu j}^0(\mathbf{x}, t) = a(t) \bar{\rho}_\nu(t) \int \frac{d^2 \hat{\mathbf{p}}}{4\pi} J(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t) \hat{p}_j, \quad (6.1.44)$$

$$\delta T_{\nu 0}^0(\mathbf{x}, t) = -\bar{\rho}_\nu(t) \int \frac{d^2 \hat{\mathbf{p}}}{4\pi} J(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t), \quad (6.1.45)$$

в точности так же, как в соотношениях (6.1.14)–(6.1.16). Вращательная и трансляционная инвариантность позволяет представить  $J(\mathbf{x}, \hat{p}, t)$  в виде интеграла Фурье

$$J(\mathbf{x}, \hat{p}, t) = \int \alpha(\mathbf{q}) \Delta_{\nu}^{(S)}(q, \hat{q} \cdot \hat{p}, t) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} d^3 q. \quad (6.1.46)$$

Чтобы получить уравнение Больцмана для  $\Delta_{\nu}^{(S)}$ , выражение (6.1.41) умножается на  $4\pi|\mathbf{p}|^3$  и затем интегрируется по  $|\mathbf{p}|$ , в итоге

$$\frac{\partial \Delta_{\nu}^{(S)}(q, \mu, t)}{\partial t} + i \frac{q\mu}{a(t)} \Delta_{\nu}^{(S)}(q, \mu, t) = -2\dot{A}_q(t) + 2q^2\mu^2 \dot{B}_q(t). \quad (6.1.47)$$

В таких компьютерных программах, как CMBfast, уравнение Больцмана для нейтрино, а также для фотонов, решается методом разложения на парциальные волны. Записываем:

$$\Delta_{\nu}^{(S)}(q, \mu, t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{-\ell} (2\ell+1) P_{\ell}(\mu) \Delta_{\nu, \ell}^{(S)}(q, t). \quad (6.1.48)$$

Подставляя это выражение в (6.1.46) и затем в (6.1.43)–(6.1.45), после чего сравнив полученные результаты с первыми тремя соотношениями (5.1.43), получаем для нейтрино возмущенное давление, скалярную анизотропную инерцию, возмущенную плотность энергии и потенциал поля скоростей:

$$\delta p_{\nu q}(t) = \frac{\bar{\rho}_{\nu}(t)}{3} \left( \Delta_{\nu, 0}^{(S)}(q, t) + \Delta_{\nu, 2}^{(S)}(q, t) \right), \quad (6.1.49)$$

$$q^2 \pi_{\nu q}^S(t) = \bar{\rho}_{\nu}(t) \Delta_{\nu, 2}^{(S)}(q, t), \quad (6.1.50)$$

$$\delta \rho_{\nu q}(t) = \bar{\rho}_{\nu}(t) \Delta_{\nu, 0}^{(S)}(q, t), \quad (6.1.51)$$

$$q \delta u_{\nu q}(t) = -\frac{3}{4} \Delta_{\nu, 1}^{(S)}(q, t). \quad (6.1.52)$$

Чтобы получить уравнения Больцмана для парциальных амплитуд, выражение (6.1.47) умножается на  $P_{\ell}(\mu)$  и затем интегрируется по  $\mu$ :

$$\begin{aligned} \Delta_{\nu, \ell}^{(S)}(q, t) + \frac{q}{a(2\ell+1)} & \left[ (\ell+1) \Delta_{\nu, \ell+1}^{(S)}(q, t) - \ell \Delta_{\nu, \ell-1}^{(S)}(q, t) \right] = \\ & = -2\dot{A}_q(t) \delta_{\ell 0} + q^2 \dot{B}_q(t) \left( \frac{2\delta_{\ell 0}}{3} - \frac{4\delta_{\ell 2}}{15} \right). \end{aligned} \quad (6.1.53)$$

В текущей версии CMBfast это уравнение обрезается при максимальном значении  $\ell$ , равном 25. Вместо того, чтобы опираться на урезанное разложение по парциальным волнам, возможно записать решение (здесь это не просто

формальное решение) уравнения (6.1.47) в виде другого радиального интеграла:

$$\begin{aligned} \Delta_{\nu}^{(S)}(q, \mu, t) = & -2 \int_{t_1}^t \exp \left( -iq\mu \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} \right) (\dot{A}_q(t') - \mu^2 q^2 \dot{B}_q(t')) + \\ & + \Delta_{\nu}^{(S)}(q, \mu, t_1) \exp \left( -iq\mu \int_{t_1}^t \frac{dt'}{a(t')} \right), \end{aligned} \quad (6.1.54)$$

где  $t_1$  — это произвольный начальный момент времени. Если  $t_1$  берется в некоторый момент времени после того, как нейтрино вышли из состояния теплового равновесия с барионной плазмой, но при этом достаточно ранний, чтобы возмущения гравитационного поля еще не имели возможности исказить нейтринное распределение, то  $\Delta_{\nu}^{(S)}(q, \mu, t_1)$  обусловлено исключительно температурным возмущением в момент  $t_1$ :

$$\Delta_{\nu}^{(S)}(q, \mu, t_1) = 4 \left[ \frac{\delta T_q(t_1)}{\bar{T}(t_1)} + i \frac{\mu q \delta u_q(t_1)}{a(t_1)} \right], \quad (6.1.55)$$

где второе слагаемое в квадратных скобках возникает благодаря эффекту Доплера, вызванному течением электрон-позитрон-фотонной плазмы.

Интегралы по направлениям в соотношениях (6.1.43)–(6.1.45) можно вычислить аналитически; для этой цели нам понадобятся следующие формулы:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2 \hat{p}}{4\pi} \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}_k \hat{p}_l e^{-i \hat{p} \cdot \mathbf{v}} = & (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{kj}) \frac{j_2(v)}{v^2} - \\ - & (\delta_{ij} \hat{v}_k \hat{v}_l + \delta_{ik} \hat{v}_j \hat{v}_l + \delta_{il} \hat{v}_k \hat{v}_j + \delta_{jk} \hat{v}_i \hat{v}_l + \delta_{jl} \hat{v}_k \hat{v}_i + \delta_{kl} \hat{v}_i \hat{v}_j) \frac{j_3(v)}{v} + \hat{v}_i \hat{v}_j \hat{v}_k \hat{v}_l j_4(v), \end{aligned} \quad (6.1.56)$$

$$\int \frac{d^2 \hat{p}}{4\pi} \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}_k e^{-i \hat{p} \cdot \mathbf{v}} = -i (\delta_{ij} \hat{v}_k + \delta_{jk} \hat{v}_i + \delta_{ki} \hat{v}_j) \frac{j_2(v)}{v} + i \hat{v}_i \hat{v}_j \hat{v}_k j_3(v), \quad (6.1.57)$$

$$\int \frac{d^2 \hat{p}}{4\pi} \hat{p}_i \hat{p}_j e^{-i \hat{p} \cdot \mathbf{v}} = \frac{\delta_{ij} j_1(v)}{v} - \hat{v}_i \hat{v}_j j_2(v), \quad (6.1.58)$$

$$\int \frac{d^2 \hat{p}}{4\pi} \hat{p}_i e^{-i \hat{p} \cdot \mathbf{v}} = -i \hat{v}_i j_1(v), \quad (6.1.59)$$

$$\int \frac{d^2 \hat{p}}{4\pi} e^{-i \hat{p} \cdot \mathbf{v}} = j_0(v), \quad (6.1.60)$$

где  $v \equiv |\mathbf{v}|$ , а  $j_\ell(v)$  — это обычная сферическая функция Бесселя. Снова сравнивая полученные результаты с первыми тремя соотношениями в (5.1.43), получаем для нейтрино явные формулы для возмущенного давления, скалярной анизотропной инерции, возмущенной плотности энергии и потенциала

поля скоростей<sup>8)</sup>:

$$\delta p_{\nu q}(t) = -2\bar{\rho}_\nu(t) \int_{t_1}^t dt' \left[ \dot{A}_q(t') K_1 \left( q \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} \right) - q^2 \dot{B}_q(t') K_2 \left( q \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} \right) \right], \quad (6.1.61)$$

$$q^2 \pi_{\nu q}^S(t) = -2\bar{\rho}_\nu(t) \int_{t_1}^t dt' \left[ \dot{A}_q(t') j_2 \left( q \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} \right) - q^2 \dot{B}_q(t') K_3 \left( q \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} \right) \right], \quad (6.1.62)$$

$$q\delta u_{\nu q}(t) = \frac{3a(t)}{2} \int_{t_1}^t dt' \left[ \dot{A}_q(t') j_1 \left( q \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} \right) - q^2 \dot{B}_q(t') K_4 \left( q \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} \right) \right], \quad (6.1.63)$$

$$\delta \rho_{\nu q}(t) = -2\bar{\rho}_\nu(t) \int_{t_1}^t dt' \left[ \dot{A}_q(t') j_0 \left( q \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} \right) - q^2 \dot{B}_q(t') K_5 \left( q \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} \right) \right], \quad (6.1.64)$$

где

$$K_1(v) \equiv \frac{j_1(v)}{v}, \quad (6.1.65)$$

$$K_2(v) \equiv \frac{j_2(v)}{v^2} - \frac{j_3(v)}{v}, \quad (6.1.66)$$

$$K_3(v) \equiv -\frac{2j_2(v)}{v^2} + \frac{5j_3(v)}{v} - j_4(v), \quad (6.1.67)$$

$$K_4(v) \equiv \frac{3j_2(v)}{v} - j_3(v), \quad (6.1.68)$$

$$K_5(v) \equiv \frac{j_1(v)}{v} - j_2(v). \quad (6.1.69)$$

Из-за этих формул необходимость использовать урезанные парциальные разложения для нейтрино пропадает.

### Гравитация

Остается только выписать уравнения движения для скалярных компонент метрики гравитационного поля  $\dot{A}$  и  $\dot{B}$ . (Отметим, что сами по себе  $A$  и  $B$  нигде не потребуются.) Удобно выбрать одну из этих компонент в виде урав-

<sup>8)</sup> Эти формулы также можно выписать для массивного нейтрино, см. сноску 7.

нения (5.3.31), представленную как

$$\frac{\partial}{\partial t}(a^2\psi_q) = -4\pi Ga^2(\delta\rho_{Dq} + \delta\rho_{6q} + \delta\rho_{\gamma q} + \delta\rho_{\nu q} + 3\delta p_{\gamma q} + 3\delta p_{\nu q} - q^2\pi_{\gamma q}^S - q^2\pi_{\nu q}^S), \quad (6.1.70)$$

где

$$\psi_q \equiv \frac{1}{2}(3\dot{A}_q - q^2\dot{B}_q). \quad (6.1.71)$$

Другую компоненту можно позаимствовать из уравнения (5.3.30):

$$\dot{A}_q = 8\pi G \left[ \frac{4}{3}\bar{\rho}_{\gamma}\delta u_{\gamma q} + \frac{4}{3}\bar{\rho}_{\nu}\delta u_{\nu q} + \bar{\rho}_b\delta u_{6q} \right]. \quad (6.1.72)$$

---

Напомним, что мы уже выбрали синхронную калибровку, в которой  $\delta u_{Dq} = 0$ .

---

Решив уравнение первого порядка (6.1.70) для  $\psi_q$  и воспользовавшись выражением (6.1.72) для нахождения  $\dot{A}_q$ , другую компоненту можно получить тривиальным образом с помощью определения (6.1.71) в виде

$$q^2\dot{B}_q = 3\dot{A}_q - 2\psi_q. \quad (6.1.73)$$

В итоге, с учетом обрезания парциального разложения для фотонов и нейтрино, у нас получается замкнутая система обыкновенных дифференциальных уравнений для всех возмущений, которые можно непосредственно решить на компьютере при любых заданных начальных условиях.

Для нахождения начальных условий отметим, что в достаточно ранний момент времени  $t_1$ , как раз перед эпохой рекомбинации (скажем, при  $\bar{T}(t_1) > 10^5$  К), частота столкновений фотонов с барионной плазмой настолько велика, что фотоны находятся с ней в тепловом и кинетическом равновесии. При таких условиях фотонное распределение  $\delta n^{ij}$  обусловлено исключительно температурным возмущением в первом слагаемом в (H.31), включая доплеровский сдвиг, вызванный скоростью потока фотонов, которая в равновесии точно такая же, как скорость барионной плазмы  $\delta u_b$ :

$$\delta n_{\gamma}^{ij} = -\frac{1}{2}a^{-2}(t_1)[\delta_{ij} - \hat{p}_i\hat{p}_j]n'_{\gamma}(p)p\left[\frac{\delta T(\mathbf{x}, t_1)}{\bar{T}(t_1)} + \frac{\hat{p}_k\delta u_{6k}(\mathbf{x}, t_1)}{a(t_1)}\right]. \quad (6.1.74)$$

---

Множитель  $1/a(t_1)$  в доплеровском члене в уравнении (6.1.74) объясняется в связи с (H.13).

---

Отметим, что для очень больших  $\omega_c$  коэффициенты перед  $\omega_c$  в правой части уравнения (6.1.17) должны сокращаться, что дает начальное условие, совместное с (6.1.74). Умножая на  $4\pi r^3$  и интегрируя по  $p$ , находим соответствующее

условие на  $J_{ij}$ :

$$J_{ij}(\mathbf{x}, \hat{p}, t_1) = 2[\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j] \left[ \frac{\delta T(\mathbf{x}, t_1)}{\bar{T}(t_1)} + \frac{\hat{p}_k \delta u_k(\mathbf{x}, t_1)}{a(t_1)} \right]. \quad (6.1.75)$$

Отметим, что вклады в  $J_{ij}(\mathbf{x}, \hat{p}, t_1)$  обеспечиваются исключительно скалярными и векторными, но не тензорными возмущениями.

Похожие замечания справедливы для нейтрино, если учесть, что необходимо вернуться в ранние времена, когда температура была ниже  $10^{10}$  К и нейтрино распространялись уже без ограничений, однако при этом прошло еще недостаточно времени, чтобы возмущение гравитационного поля внесло изменения в равновесную форму фазового распределения нейтрино.

Это по-прежнему делает необходимым присваивать начальные значения величинам  $A_q$ ,  $B_q$ ,  $\delta_{Dq}$ ,  $\delta_{\theta q}$ ,  $\delta u_{\theta q}$  и  $\delta T_q$ . Для этого следует вернуться в достаточно ранний момент времени так, чтобы интересующие нас волновые числа были за пределами горизонта, в том смысле что  $q/a \ll H$ . В следующем разделе искомые начальные значения будут найдены для доминантной адиабатической моды, с нормировкой, выраженной через величину  $\mathcal{R}_q$ , задаваемую в синхронной калибровке за переделами горизонта выражением (5.4.24).

## 6.2

### Скалярные возмущения — гидродинамический предел

**Гидродинамика и полевые уравнения • Адиабатические начальные условия • Неадиабатические моды • Малые и большие длины волн**

Описанная в предыдущем разделе система уравнений слишком сложна для нахождения аналитического решения. К счастью, почти до начала периода рекомбинации частота столкновений фотонов со свободными электронами была настолько велика, что электроны находились в состоянии локального теплового равновесия с барионной плазмой, и поэтому электроны в этот период допускают гидродинамическое описание, по аналогии с плазмой и холодной темной материи. Данный подход перестает быть справедливым в период рекомбинации, однако в разд. 6.4 приемлемая степень точности будет сохранена, если учесть затухание, вызванное ростом средних времен свободного пробега в эту эпоху. После рекомбинации электроны распространяются более-менее свободно, их траектории можно найти, решая соответствующие уравнения движения. Рассмотрение нейтрино более затруднительно, однако в очень ранние времена возмущения находились за пределами горизонта, поэтому в эти времена величины  $q^2 \pi_{\nu q}^S$  и  $q \delta u_{\nu q}$  пренебрежимо малы, и из уравнений (6.1.49)–(6.1.51) следует, что  $\delta \rho_{\nu q} = 3 \delta r_{\nu q}$ , точно так же, как если бы нейтрино

находились в состоянии локального теплового равновесия, а в поздние времена вещества во Вселенной стало доминировать, и нейтрино стали давать лишь малый вклад в космическое гравитационное поле.

С учетом высказанных выше пояснений, для того чтобы аналитическое рассмотрение стало возможным, в этом и последующих трех разделах будет использоваться гидродинамический подход<sup>9)</sup>. Если быть точнее, в большинстве случаев мы будем пренебречь анизотропной инерцией,  $\delta u_{\gamma q}$  приравняем  $\delta u_{bq}$  и положим  $\rho_{\nu q} = \rho_{\nu q}/3$ . Это обязательно приводит к потере точности, однако наша цель в этой главе (и в следующих двух главах) состоит не в вычислениях хода эволюции Вселенной и ее наблюдательных следствий с высокой степенью точности, которые приведут к оптимизации извлечения космологических параметров из новейших данных по реликтовому излучению и крупномасштабной структуры. Вернее будет сказать, что здесь мы хотим прояснить физику космической эволюции и выявить зависимость наблюдаемых величин от тех или иных космологических предположений. К счастью, как окажется в гл. 7, полученные нами аналитические результаты приведут к предсказаниям для анизотропии реликтового излучения, весьма похожим на полученные из вычислений, проделанных с помощью современных компьютерных программ, на основе описанных в предыдущем разделе уравнений Больцмана. Таким образом мы еще раз убедимся, что гидродинамический подход охватывает основную суть происходящего в ранней Вселенной.

С учетом рассмотренных выше предположений, фурье-образы с сопутствующим волновым числом  $q$  возмущений в синхронной калибровке описываются гравитационным полевым уравнением (5.3.36):

$$\frac{d}{dt}(a^2 \psi_q) = -4\pi G a^2 (\delta \rho_{Dq} + \delta \rho_{bq} + 2\delta \rho_{\gamma q} + 2\delta \rho_{\nu q}), \quad (6.2.1)$$

законами сохранения (5.3.34) для каждой из четырех жидкостей:

$$\delta \dot{\rho}_{\gamma q} + 4H\delta \rho_{\gamma q} - \left( \frac{4q^2}{3a^2} \right) \bar{\rho}_\gamma \delta u_{\gamma q} = -\frac{4}{3} \bar{\rho}_\gamma \psi_q, \quad (6.2.2)$$

$$\delta \dot{\rho}_{Dq} + 3H\delta \rho_{Dq} = -\bar{\rho}_D \psi_q, \quad (6.2.3)$$

$$\delta \dot{\rho}_{bq} + 3H\delta \rho_{bq} - \left( \frac{q^2}{a^2} \right) \bar{\rho}_b \delta u_{\gamma q} = -\bar{\rho}_b \psi_q, \quad (6.2.4)$$

$$\delta \dot{\rho}_{\nu q} + 4H\delta \rho_{\nu q} - \left( \frac{4q^2}{3a^2} \right) \bar{\rho}_\nu \delta u_{\nu q} = -\frac{4}{3} \bar{\rho}_\nu \psi_q \quad (6.2.5)$$

<sup>9)</sup> Другие аналитические и квазианалитические подходы к описанию эволюции флуктуаций были предложены в работах W. Hu and N. Sugiyama, *Astrophys. J.* **444**, 489 (1995); **471**, 542 (1996); V. Mukhanov, *Int. J. Theor. Phys.* **43**, 623 (2004) [astro-ph/0303072]. На мой взгляд, предлагаемый здесь метод рассмотрения более прозрачен, хотя несколько менее точен, чем подход Ху и Сугиямы, и (так как будет допускаться использование компьютера для численного счета интегралов) он более точен, чем подход Муханова.

и законами сохранения импульса (5.3.32) для фотон-барионной плазмы и нейтрино:

$$\frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{4}{3} \bar{\rho}_\gamma + \bar{\rho}_6 \right) \delta u_{\gamma q} \right] + 3H \left[ \left( \frac{4}{3} \bar{\rho}_\gamma + \bar{\rho}_6 \right) \delta u_{\gamma q} \right] = -\frac{1}{3} \delta \rho_{\gamma q}, \quad (6.2.6)$$

$$\frac{d}{dt} (\bar{\rho}_\nu \delta u_{\nu q}) + 3H \bar{\rho}_\nu \delta u_{\nu q} = -\frac{1}{4} \delta \rho_{\nu q}. \quad (6.2.7)$$

Очень удобно переписать эти уравнения в терминах безразмерных относительных возмущений<sup>10)</sup>:

$$\delta_{\alpha q} \equiv \frac{\delta \rho_{\alpha q}}{\bar{\rho}_\alpha + \bar{\rho}_\alpha}, \quad (6.2.8)$$

где индекс  $\alpha$  принимает значения  $\gamma$ ,  $D$ ,  $B$  и  $\nu$ . Учитывая, что все  $a^4 \bar{\rho}_\gamma$ ,  $a^3 \bar{\rho}_D$ ,  $a^3 \bar{\rho}_6$  и  $a^4 \bar{\rho}_\nu$  не зависят от времени, уравнения (6.2.1)–(6.2.7) теперь принимают вид

$$\frac{d}{dt} (a^2 \psi_q) = -4\pi G a^2 \left( \bar{\rho}_D \delta_{Dq} + \bar{\rho}_6 \delta_{6q} + \frac{8}{3} \bar{\rho}_\gamma \delta_{\gamma q} + \frac{8}{3} \bar{\rho}_\nu \delta_{\nu q} \right), \quad (6.2.9)$$

$$\dot{\delta}_{\gamma q} - \left( \frac{q^2}{a^2} \right) \delta u_{\gamma q} = -\psi_q, \quad (6.2.10)$$

$$\dot{\delta}_{Dq} = -\psi_q, \quad (6.2.11)$$

$$\dot{\delta}_{6q} - \left( \frac{q^2}{a^2} \right) \delta u_{\gamma q} = -\psi_q, \quad (6.2.12)$$

$$\dot{\delta}_{\nu q} - \left( \frac{q^2}{a^2} \right) \delta u_{\nu q} = -\psi_q, \quad (6.2.13)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{(1+R) \delta u_{\gamma q}}{a} \right) = -\frac{1}{3a} \delta_{\gamma q}, \quad (6.2.14)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta u_{\nu q}}{a} \right) = -\frac{1}{3a} \delta_{\nu q}, \quad (6.2.15)$$

где  $R \equiv 3\bar{\rho}_6/(4\bar{\rho}_\gamma)$ . Уравнения (6.2.1)–(6.2.7) или (6.2.9)–(6.2.15) образуют замкнутую систему из семи дифференциальных уравнений первого порядка для  $\psi_q$ , для четырех возмущений плотности и для потенциалов поля скоростей плазмы и нейтрино, так что должно быть семь независимых решений.

Прежде чем пытаться найти решения, справедливые до начала рекомбинации, в первую очередь необходимо рассмотреть накладываемые начальные условия. Эти начальные условия будут различать разные независимые решения. При достаточно ранних временах во Вселенной преобладало излучение,

<sup>10)</sup> Отметим, что это отличается от широко используемого соглашения, согласно которому  $\delta_{\alpha q}$  будет определяться как  $\delta \rho_{\alpha q}/\bar{\rho}_\alpha$ .

когда  $\bar{\rho}_m \ll \bar{\rho}_i$ , где

$$\bar{\rho}_m \equiv \bar{\rho}_D + \bar{\rho}_6, \quad \bar{\rho}_i \equiv \bar{\rho}_\gamma + \bar{\rho}_\nu, \quad (6.2.16)$$

так что с хорошей точностью  $a \propto \sqrt{t}$  и  $8\pi G \bar{\rho}_i / 3 = 1/(4t^2)$ , а  $R \ll 1$ . (Это фиксирует наше определение нуля времени.) Если взять  $a \propto \sqrt{t}$  и  $R \ll 1$ , уравнения (6.2.9)–(6.2.15) принимают вид

$$\frac{d}{dt}(t\psi_q) = -4\pi G t \left( \bar{\rho}_D \delta_{Dq} + \bar{\rho}_6 \delta_{6q} + \frac{8}{3} \bar{\rho}_\gamma \delta_{\gamma q} + \frac{8}{3} \bar{\rho}_\nu \delta_{\nu q} \right), \quad (6.2.17)$$

$$\dot{\delta}_{\gamma q} = \dot{\delta}_{6q} = -\psi_q + \left( \frac{q^2}{a^2} \right) \delta u_{\gamma q}, \quad (6.2.18)$$

$$\dot{\delta}_{Dq} = -\psi_q, \quad (6.2.19)$$

$$\dot{\delta}_{\nu q} = -\psi_q + \left( \frac{q^2}{a^2} \right) \delta u_{\nu q}, \quad (6.2.20)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta u_{\gamma q}}{\sqrt{t}} \right) = -\frac{1}{3\sqrt{t}} \delta_{\gamma q}, \quad (6.2.21)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta u_{\nu q}}{\sqrt{t}} \right) = -\frac{1}{3\sqrt{t}} \delta_{\nu q}. \quad (6.2.22)$$

В очень ранние времена возмущение находилось за пределами горизонта, в смысле  $q/(aH) \ll 1$ , однако слагаемые в уравнениях (6.2.18) и (6.2.20), пропорциональные  $q^2$ , пока не отбрасываются, потому что в некоторых модах при вычислении сохраняющейся величины  $\mathcal{R}_q$  за пределами горизонта происходят сокращения, что заставляет нас учитывать подобные слагаемые. Слагаемые в правой части уравнения (6.2.17), пропорциональные  $\bar{\rho}_D$  или  $\bar{\rho}_6$  тоже пока не отбрасываются, потому что даже предполагая, что  $\bar{\rho}_D$  и  $\bar{\rho}_6$  много меньше чем  $\bar{\rho}_\gamma$  и  $\bar{\rho}_\nu$ , мы хотим оставить открытой возможность наличия мод, в которых *относительные флюктуации* темной материи и/или барионной плотности много больше относительных флюктуаций плотностей фотонов и нейтрино.

### Мода 1

Это доминантная адиабатическая мода — адиабатическая в том смысле, что все  $\delta_{\alpha q}$  становятся равны друг другу в очень ранние времена. (Как обсуждалось в разд. 5.4, в инфляционных теориях с одним скалярным полем присутствуют только эти моды, или в случае, если когда-нибудь еще раньше Вселенная находилась в состоянии полного теплового равновесия без ненулевых сохраняющихся величин.) Рассмотрение уравнений (6.2.17)–(6.2.22) показывает, что если выбрать анзац

$$\delta_{\gamma q} = \delta_{6q} = \delta_{Dq} = \delta_{\nu q} \equiv \delta_q, \quad \delta u_{\gamma q} = \delta u_{\nu q} \equiv \delta u_q, \quad (6.2.23)$$

и если теперь в уравнении (6.2.17) отбросить барионный вклад и вклад доминирующей темной материи и рассмотреть времена, достаточно ранние, чтобы

можно было отбросить слагаемые  $q^2/a^2$  в уравнениях (6.2.18) и (6.2.20), то уравнения (6.2.18)–(6.2.22) и (6.2.17) принимают вид

$$\dot{\delta}_q = -\psi_q, \quad (6.2.24)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta u_q}{\sqrt{t}} \right) = -\frac{1}{3\sqrt{t}} \delta_q \quad (6.2.25)$$

и

$$\frac{d}{dt} (t\psi_q) = -\frac{1}{t} \delta_q. \quad (6.2.26)$$

Собирая вместе (6.2.24) и (6.2.26), получаем дифференциальное уравнение второго порядка на  $\delta_q$ :

$$\frac{d}{dt} \left( t \frac{d}{dt} \delta_q \right) - \frac{1}{t} \delta_q = 0.$$

Оно имеет два решения, с  $\delta_q \propto t$  и  $\delta_q \propto 1/t$ , и для каждого решения уравнения (6.2.24) и (6.2.25) приводят к решениям для  $\psi_q$  и  $\delta u_q$ . Растущие решения обладают  $\delta_q \propto t$  и  $\delta u_q \propto t^2$ , в результате чего мы получаем первую адиабатическую моду:

$$\delta_{\gamma q} = \delta_{6q} = \delta_{\nu q} = \delta_{Dq} = \frac{q^2 t^2 \mathcal{R}_q^r}{a^2}, \quad (6.2.27)$$

$$\psi_q = -\frac{t q^2 \mathcal{R}_q^r}{a^2}, \quad (6.2.28)$$

$$\delta u_{\gamma q} = \delta u_{\nu q} = -\frac{2t^3 q^2 \mathcal{R}_q^r}{9a^2}. \quad (6.2.29)$$

Нормировка этой моды выбрана таким образом, чтобы величина, заданная уравнением (5.4.24) в виде

$$q^2 \mathcal{R}_q \equiv -a^2 H \psi_q + 4\pi G a^2 \delta \rho_q + q^2 H \delta u_q \quad (6.2.30)$$

принимала независящее от времени значение  $q^2 \mathcal{R}_q^r$  при  $q/a \ll H$  (верхний индекс « $r$ » означает «за пределами горизонта»).

## Мода 2

Решение уравнений (6.2.24)–(6.2.26), изменяющееся по закону  $\delta_q \propto 1/t$  при  $t \rightarrow 0$ , дает второе адиабатическое решение:

$$\delta_{\gamma q} = \delta_{6q} = \delta_{\nu q} = \delta_{Dq} = \frac{\epsilon_q}{t}, \quad \psi_q = \frac{\epsilon_q}{t^2}, \quad \delta u_{\gamma q} = \delta u_{\nu q} = \frac{2\epsilon_q}{3}, \quad (6.2.31)$$

где  $\epsilon_q$  — это произвольная не зависящая от времени функция от  $q$ . Вычисление  $\mathcal{R}_q$  для этого решения сталкивается с проблемой, что первые два слагаемых в уравнении (6.2.30) для  $q^2 \mathcal{R}_q$  сокращаются в нулевом порядке по

$q^2/(a^2 H^2)$ , что дает неизвестный остаток в  $q^2 \mathcal{R}_q$  порядка  $q^2/(a^2 H^2)$ , и следовательно неизвестный вклад в  $\mathcal{R}_q$  нулевого порядка по  $q^2/(a^2 H^2)$ . К счастью, в этой моде можно найти решение уравнений (6.2.17)–(6.2.22), справедливое во всех порядках по  $q/(aH)$  при условии  $\rho_m \ll \bar{\rho}_i$ :

$$\delta_{\gamma q} = \delta_{6q} = \delta_{\nu q} = \frac{\epsilon_q}{t}, \quad \delta_{Dq} = \frac{\epsilon_q}{t} \left[ 1 - \frac{q^2}{3H^2 a^2} \ln \left( \frac{q}{Ha} \right) \right], \quad (6.2.32)$$

$$\psi_q = \frac{\epsilon_q}{t^2} \left[ 1 + \frac{2q^2 t^2}{3a^2} \right], \quad (6.2.33)$$

$$\delta u_{\gamma q} = \delta u_{\nu q} = \frac{2\epsilon_q}{3}. \quad (6.2.34)$$

Учет этих соотношений в уравнении (6.2.30) показывает, что в этой моде  $\mathcal{R}_q = 0$  во всех порядках по  $q/(aH)$  при условии, что  $\bar{\rho}_m \ll \bar{\rho}_i$ .

Остальные пять мод не являются адиабатическими, в том смысле что некоторые  $\delta_{\alpha q}$  не равны друг другу даже при  $q/a \ll H$ . Одна особенно простая мода может служить в качестве иллюстрации.

### Мода 3

$$\delta_{Dq} = \frac{\epsilon_q \bar{\rho}_6}{\bar{\rho}_6 + \bar{\rho}_D}, \quad \delta_{6q} = -\frac{\epsilon_q \bar{\rho}_D}{\bar{\rho}_6 + \bar{\rho}_D}, \quad (6.2.35)$$

$$\psi_q = 0, \quad \delta_{\gamma q} = \delta_{\nu q} = 0, \quad \delta u_{\gamma q} = \delta u_{\nu q} = 0, \quad (6.2.36)$$

где  $\epsilon_q$  опять не зависит от времени, но в остальном произвольна. Это как раз сводится к возмущению не зависящему от времени отношения плотностей барионной и темной материи и является точным решением во все времена. Это *мода постоянной кривизны*, в том смысле что  $\mathcal{R}_q = 0$ , а также  $\psi_q = 0$ .

\* \* \*

Ранее указывалось, что эти результаты применимы только во времена, достаточно ранние, чтобы  $\bar{\rho}_m \ll \bar{\rho}_i$  (и, для моды 1,  $q/a \ll H$ ). При пролонгации этих ранневременных решений на более поздние времена полезно отметить, что для всех времен до рекомбинации, разность уравнений (6.2.10) и (6.2.12) дает

$$\frac{d}{dt} (\delta_{6q} - \delta_{\gamma q}) = 0. \quad (6.2.37)$$

Мы видим, что для любого решения, удовлетворявшего адиабатическому условию  $\delta_{6q} = \delta_{\gamma q}$  в ранние времена, когда возмущение находится далеко за пределами горизонта, это соотношение

$$\delta_{6q} = \delta_{\gamma q} \quad (6.2.38)$$

будет продолжать выполняться и в дальнейшем.

Тогда уравнения (6.2.9)–(6.2.15) сводятся к

$$\frac{d}{dt}(a^2\psi_q) = -4\pi Ga^2 \left[ \bar{\rho}_D \delta_{Dq} + \left( \bar{\rho}_6 + \frac{8}{3}\bar{\rho}_\gamma \right) \delta_{\gamma q} + \frac{8}{3}\bar{\rho}_\nu \delta_{\nu q} \right], \quad (6.2.39)$$

$$\dot{\delta}_{\gamma q} - \frac{q^2}{a^2} \delta u_{\gamma q} = -\psi_q, \quad (6.2.40)$$

$$\dot{\delta}_{Dq} = -\psi_q, \quad (6.2.41)$$

$$\dot{\delta}_{\nu q} - \frac{q^2}{a^2} \delta u_{\nu q} = -\psi_q, \quad (6.2.42)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{(1+R)\delta u_{\gamma q}}{a} \right) = -\frac{1}{3a} \delta_{\gamma q}, \quad (6.2.43)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta u_{\nu q}}{a} \right) = -\frac{1}{3a} \delta_{\nu q}, \quad (6.2.44)$$

где снова  $R \equiv 3\bar{\rho}_6/(4\bar{\rho}_i)$ . Эти уравнения применяются для мод 1 и 2 во все времена до рекомбинации. В основном мы будем интересоваться модой 1, поскольку возмущения моды 2 по отношению к возмущениям моды 1 затухают с фактором  $1/t^2$  на протяжении части эры доминирования излучения, когда возмущение все еще находится за горизонтом.

Даже для редуцированного набора уравнений (6.2.39)–(6.2.44) невозможно найти аналитическое решение, которое будет справедливо для всех времен и волновых чисел. Однако эти уравнения допускают аналитическое рассмотрение в двух режимах: *длинноволновом*, когда  $q \ll q_{EQ}$ , и *коротковолновом*, когда  $q \gg q_{EQ}$ , где  $q_{EQ}$  — это волновое число, для которого в эру доминирования вещества  $q/a = H$ . Напомним, что как только инфляция закончилась,  $q/a$  убывает более медленно, чем  $H$ , так что для больших длин волн волновое число настолько мало, что  $\bar{\rho}_m$  становится равным  $\bar{\rho}_i$ , когда  $q/a$  по-прежнему много меньше  $H$ , а для коротких длин волн волновое число настолько велико, что  $q/a$  становится равным  $H$ , когда  $\bar{\rho}_m$  по-прежнему много меньше  $\bar{\rho}_i$ . Для больших длин волн можно найти аналитические решения уравнений (6.2.39)–(6.2.44) — для ранней эпохи, когда возмущение находилось за горизонтом, и для поздней эпохи, когда нерелятивистское вещество доминирует в расширении — и сплить их вместе в перекрестную эпоху, когда возмущение по-прежнему за горизонтом, а во Вселенной уже преобладает вещество. С другой стороны, для коротких длин волн можно найти аналитические решения этих уравнений в раннюю эпоху, когда во Вселенной преобладало излучение, и в позднюю эпоху, когда возмущение находилось глубоко под горизонтом, и сплить их вместе в перекрестную эпоху, когда во Вселенной все еще преобладает излучение, а возмущение уже находится глубоко под горизонтом. Эти два случая больших и малых длин волн рассматриваются в разд. 6.3 и 6.4 соответственно.

Для вычисления критического волнового числа  $q_{\text{EQ}}$ , для которого  $q/a = H$  при равенстве между веществом и излучением, напомним, что красное смещение при балансе вещества и излучения задается уравнением (2.2.5) в виде  $1 + z_{\text{EQ}} = \Omega_m/\Omega_i = \Omega_m h^2/(4,15 \times 10^{-5})$ . Из уравнения (2.2.9) следует, что значение хаббловской скорости в эпоху излучения равно  $H = 2,1 \times 10^{-20}(1+z)^2 \text{ с}^{-1}$ , однако при балансе вещества и излучения вклад вещества в плотность полной энергии увеличивает  $H$  в  $\sqrt{2}$  раз, поэтому для флуктуаций, только что попавших под горизонт при балансе вещества и излучения, физическое волновое число и хаббловская скорость в это время задаются уравнением (2.2.9) в виде

$$q_{\text{EQ}}/a_{\text{EQ}} = H_{\text{EQ}} = \sqrt{2} \times 2,1 \times 10^{-20}(1 + z_{\text{EQ}})^2 \text{ с}^{-1} = 1,72 \times 10^{-11}(\Omega_m h^2)^2 \text{ с}^{-1}.$$

Это соответствует современному значению критической физической длины волны

$$\lambda_0 \equiv \frac{2\pi}{q_{\text{EQ}}/a_0} = \frac{2\pi(1 + z_{\text{EQ}})}{q_{\text{EQ}}/a_{\text{EQ}}} = 85(\Omega_m h^2)^{-1} \text{ Мпк}. \quad (6.2.45)$$

Для сравнения, размер локального сверхскопления, оцениваемый по расстоянию между нашей Галактикой и скоплением Девы, составляет примерно 15 Мпк. Наблюдаемые сейчас возмущения на расстояниях порядка больших или меньших чем  $\lambda_{\text{EQ}}$  вошли под горизонт соответственно до или после эпохи баланса вещества и излучения. Воспользовавшись плотностью массы  $\rho_{m0}$ , задаваемой уравнениями (1.5.28) и (1.5.39), получим современное значение средней массы внутри сферы диаметра  $\lambda_0$ :

$$\frac{\pi}{6} \rho_{m0} \lambda_0^3 = 0,9 \times 10^{17} (\Omega_m h^2)^{-2} M_\odot \quad (6.2.46)$$

Это значение можно сравнить с массой большой галактики, составляющей примерно  $10^{12} M_\odot$ . Таким образом, любое имеющее отношение к образованию галактик или даже скоплений галактик возмущение во времена баланса вещества и излучения будет находиться в точности под горизонтом.

Также можно найти соответствующий критический мультиполь порядка  $\ell_{\text{EQ}}$  для анизотропий реликтового излучения. Как отмечалось в разд. 2.6, основной вклад в интеграл по волновым числам для мультипольного коэффициента  $C_\ell$  определяется сопутствующими волновыми числами порядка  $\ell/r_{\text{n.p.}}$ , где  $r_{\text{n.p.}}$  — это радиальная координата поверхности последнего рассеяния, и следовательно основной вклад в интеграл для  $C_\ell$  определяется волновыми числами порядка  $q_{\text{EQ}}$ , которые появляются под горизонтом при балансе вещества и излучения, если  $\ell$  порядка  $\ell_{\text{EQ}} = q_{\text{EQ}} r_{\text{n.p.}}$ . Это можно записать в виде

$$\ell_{\text{EQ}} = \left( \frac{q_{\text{EQ}}}{a_{\text{EQ}}} \right) \left( \frac{a_{\text{EQ}}}{a_0} \right) \left( \frac{a_0}{a_{\text{n.p.}}} \right) a_{\text{n.p.}} r_{\text{n.p.}} = \frac{H_{\text{EQ}}(1 + z_{\text{n.p.}})}{(1 + z_{\text{EQ}})} a_{\text{n.p.}} r_{\text{n.p.}},$$

где  $a_{\text{n.p.}}$  — это масштабный фактор в метрике Робертсона—Уокера в момент последнего рассеяния. Напомним, что  $H_{\text{EQ}} = \sqrt{2\Omega_m}(1+z_{\text{EQ}})^{3/2} H_0$ , и  $a_{\text{n.p.}} r_{\text{n.p.}} = d_y$  — расстояние по угловому диаметру до поверхности последнего рассеяния. Кроме

этого,  $1 + z_{\text{EQ}} = \Omega_m/\Omega_i$ . Тогда

$$\ell_{\text{EQ}} = \Omega_m \sqrt{\frac{2}{\Omega_i}} H_0 d_y (1 + z_{\text{n.p.}}). \quad (6.2.47)$$

Например, если выбрать пробные параметры  $\Omega_m = 0,26$  и  $\Omega_\Lambda = 0,74$ , то, как отмечалось в разд. 2.6,  $d_y = 3,38 H_0^{-1} (1 + z_{\text{n.p.}})^{-1}$ . Выбирая  $\Omega_i = 8,01 \times 10^{-5}$  (это соответствует  $T_0 = 2,725$  К и  $H_0 = 72$  (км/с)/Мпк), из уравнения (6.2.47) следует критический мультиполь порядка  $\ell_{\text{EQ}} = 140$ . Мультипольные коэффициенты для больших значений  $\ell$  возникают только для возмущений, вошедших под горизонт во время эры доминирования излучения.

В дальнейшем для скалярных и тензорных мод будет удобно ввести безразмерное перескальвированное волновое число

$$\kappa \equiv \frac{\sqrt{2} q}{q_{\text{Eq}}} = \frac{(q/a_0)\sqrt{\Omega_i}}{H_0 \Omega_m} = \frac{q/a_0}{0,052 \Omega_m h^2 \text{ Мпк}^{-1}}. \quad (6.2.48)$$

В длинноволновом и коротковолновом случаях имеем  $\kappa \ll 1$  и  $\kappa \gg 1$  соответственно.

Вычисления в последующих трех разделах неизбежно станут более сложны и утомительны. Возможно, полезно обозначить направление наших усилий: это уравнения (6.5.15) и (6.5.16) для возмущений плотности темной материи и гравитационного поля в течении всей эры доминирования излучения и уравнения (6.5.17) и (6.5.18) для возмущения плотности фотон-барионной плазмы и потенциала поля скоростей в течении эры доминирования вещества, вплоть до момента разделения вещества и излучения.

## 6.3

### Скалярные возмущения — длинные волны

**Эволюция очень далеко за горизонтом • Эволюция в эру доминирования материи**

Сперва рассмотрим возмущения с длинами волн, достаточно большими, чтобы в период баланса вещества и излучения они по-прежнему находились за горизонтом. Как обсуждалось в конце предыдущего раздела, такие возмущения ответственны за появление мультипольных моментов анизотропий реликтового излучения при  $\ell < 140$ . Поскольку  $q\bar{\rho}_i/(aH\bar{\rho}_m)$  постоянна во время эры доминирования излучения, когда  $a \propto \sqrt{t}$  и  $H \propto a^{-2}$ , и здесь мы предполагаем, что это отношение много меньше единицы при  $\bar{\rho}_m = \bar{\rho}_i$ , то отсюда следует, что для таких длин волн

$$\frac{q}{aH} \ll \frac{\bar{\rho}_m}{\bar{\rho}_i} \quad (6.3.1)$$

в течение всей эры доминирования излучения.

Напомним, что  $\bar{\rho}_m \equiv \bar{\rho}_D + \bar{\rho}_b$  и  $\bar{\rho}_i \equiv \bar{\rho}_\gamma + \bar{\rho}_\nu$ .

С другой стороны, в течение эры доминирования вещества, когда  $a \propto t^{2/3}$  и  $H \propto a^{-3/2}$ , именно  $q^2 \bar{\rho}_i / (a^2 \bar{\rho}_m)$  остается постоянным, и так как предполагается, что данная величина много меньше единицы при  $\bar{\rho}_m = \bar{\rho}_i$ , то для таких длин волн получаем

$$\frac{q^2}{a^2 H^2} \ll \frac{\bar{\rho}_m}{\bar{\rho}_i} \quad (6.3.2)$$

на протяжении всей эры доминирования вещества.

Мы не можем привести одну единственную аналитическую формулу для этих возмущений на протяжении всей эпохи после электрон-позитронной аннигиляции и практически до настоящего момента, но, к счастью, можно найти аналитические решения для двух периодов: первый — это эпоха, когда возмущения находятся за горизонтом, и второй — это эпоха, когда основной вклад в плотность энергии во Вселенной обеспечивается нерелятивистским веществом. (Обусловленной нейтрино анизотропной инерцией для обоих периодов можно пренебречь, потому что она пренебрежимо мала за горизонтом и не существенна, когда плотность энергии нейтрино много меньше чем плотность энергии вещества.) Для рассматриваемых длинных волн, которые по-прежнему находятся за горизонтом в тот момент времени, когда плотность вещества сравнивается с плотностью излучения, эпохи *пересекаются*. Это позволяет нам позаимствовать начальное условие для второй эпохи из результатов для первой эпохи в тот период, когда они пересекаются.

### A. За горизонтом

Самые интересные возмущения, соответствующие адиабатическим модам, описываются уравнениями (6.2.39)–(6.2.44), с относительными флуктуациями  $\delta_{\alpha q}$ , определяемыми уравнением (6.2.8), а также при  $\delta_{bq} = \delta_{\gamma q}$ . Для  $q/a \ll H$  эти уравнения принимают вид

$$\frac{d}{dt}(a^2 \psi_q) = -4\pi G a^2 \left[ \bar{\rho}_D \delta_{Dq} + \left( \bar{\rho}_b + \frac{8}{3} \bar{\rho}_\gamma \right) \delta_{\gamma q} + \frac{8}{3} \bar{\rho}_\nu \delta_{\nu q} \right], \quad (6.3.3)$$

$$\dot{\delta}_{\gamma q} = \dot{\delta}_{\nu q} = \dot{\delta}_{Dq} = -\psi_q, \quad (6.3.4)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{(1+R)\delta u_{\gamma q}}{a} \right) = -\frac{1}{3a} \delta_{\gamma q}, \quad (6.3.5)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta u_{\nu q}}{a} \right) = -\frac{1}{3a} \delta_{\nu q}. \quad (6.3.6)$$

Их можно решить аналитически, по крайней мере для некоторых описанных в предыдущем разделе, мод. Наиболее важно, что для адиабатических

решений, у которых все  $\delta_{\alpha q}$  равны за горизонтом, уравнения (6.3.3) и (6.3.4) принимают вид

$$\frac{d}{dt}(a^2\psi_q) = -4\pi Ga^2 \left[ \bar{\rho}_M + \frac{8}{3}\bar{\rho}_I \right] \delta_q, \quad (6.3.7)$$

$$\dot{\delta}_q = -\psi_q, \quad (6.3.8)$$

где

$$\delta_q \equiv \delta_{\gamma q} = \delta_{\nu q} = \delta_{\theta q} = \delta_{D q}, \quad (6.3.9)$$

и учтено, что  $\bar{\rho}_M \equiv \bar{\rho}_D + \bar{\rho}_B$  и  $\bar{\rho}_I \equiv \bar{\rho}_\gamma + \bar{\rho}_\nu$ . Подставляя (6.3.8) в (6.3.7), получаем дифференциальное уравнение второго порядка для  $\delta_q$ :

$$\frac{d}{dt} \left( a^2 \frac{d}{dt} \delta_q \right) = 4\pi Ga^2 \left[ \bar{\rho}_M + \frac{8}{3}\bar{\rho}_I \right] \delta_q. \quad (6.3.10)$$

Чтобы решить уравнение (6.3.10), очень удобно заменить зависимую переменную  $t$  на  $y \equiv a/a_{EQ} = \bar{\rho}_M/\bar{\rho}_I$ , где  $a_{EQ}$  — это масштабный фактор Робертсона—Уокера при балансе вещества и излучения. Тогда  $\bar{\rho}_M = \rho_{EQ}/y^3$  и  $\bar{\rho}_I = \rho_{EQ}/y^4$ , где  $\rho_{EQ}$  — это общая плотность вещества и излучения в период баланса. Тогда, воспользовавшись формулой Фридмана для скорости расширения, находим, что

$$\frac{d}{dt} = \frac{H_{EQ}}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{1+y}}{y} \frac{dy}{dt}, \quad (6.3.11)$$

а уравнение (6.3.10) сводится к виду

$$y\sqrt{1+y} \frac{d}{dy} \left( y\sqrt{1+y} \frac{d}{dy} \delta_q \right) - \frac{3}{2} \left( y + \frac{8}{3} \right) \delta_q = 0. \quad (6.3.12)$$

Оно имеет два независимых решения:

$$\delta^{(a)} = y^{-2} (16 + 8y - 2y^2 + y^3), \quad \delta^{(b)} = y^{-2} \sqrt{1+y}.$$

Мы ищем решение, которое, как было установлено в предыдущем разделе для моды 1, стремится к нулю по закону  $t \propto y^2$  при  $t \rightarrow 0$ , поэтому необходимо выбрать наше решение пропорциональным  $\delta^{(a)} - 16\delta^{(b)}$ , которое при  $y \rightarrow 0$  стремится к  $5y^{2/8}$ . Согласовывая нормировочный коэффициент этого решения с коэффициентом в решении (6.2.27), получаем

$$\delta_q = \frac{4q^2 \mathcal{R}_q^r}{5H_{EQ}^2 a_{EQ}^2 y^2} (16 + 8y - 2y^2 + y^3 - 16\sqrt{1+y}), \quad (6.3.13)$$

$$\delta u_{\gamma q} = -\frac{\sqrt{2}y}{3H_{EQ}(1+R)} \int_0^y \frac{dy'}{\sqrt{1+y'}} \delta_q(y'), \quad (6.3.14)$$

$$\delta u_{\nu q} = -\frac{\sqrt{2}y}{3H_{\text{EQ}}}\int_0^y \frac{dy'}{\sqrt{1+y'}}\delta_q(y'), \quad (6.3.15)$$

$$\psi_q = \frac{\sqrt{2}q^2\mathcal{R}_q^r}{5H_{\text{EQ}}a_{\text{EQ}}^2y^4}(2\sqrt{1+y}(32+8y-y^3)-64-48y). \quad (6.3.16)$$

Для такого нормировочного коэффициента величина  $\mathcal{R}_q$  за горизонтом принимает независящее от времени значение  $\mathcal{R}_q^r$ .

## В. Эра доминирования вещества

Кроме этого, уравнения (6.2.39)–(6.2.44) можно решить аналитически, когда  $\bar{\rho}_m \gg \bar{\rho}_i$ , независимо от того, находится возмущение за горизонтом или нет. Для простоты также будем предполагать, что  $\bar{\rho}_b \ll \bar{\rho}_D$ . (На самом деле, это отношение приблизительно равно 0,2.) Однако, поскольку в эру доминирования вещества  $\bar{\rho}_\gamma$  тоже много меньше  $\bar{\rho}_D$ , мы не будем предполагать, что в эту эпоху  $\bar{\rho}_b$  исчезающее мала по сравнению с  $\bar{\rho}_\gamma$ . Напомним, что в эру доминирования вещества<sup>11)</sup>  $a \propto t^{2/3}$  и  $8\pi G\bar{\rho}_m/3 = H^2 = 4/(9t^2)$ . Если в (6.2.39) удерживать только слагаемое, пропорциональное  $\bar{\rho}_D$ , но при этом ничего не предполагать насчет относительной величины  $q/a$  и  $H$ , то уравнения (6.2.39)–(6.2.44) принимают вид

$$\frac{d}{dt}(t^{4/3}\psi_q) = -\frac{2}{3}t^{-2/3}\delta_{Dq}, \quad (6.3.17)$$

$$\dot{\delta}_{\gamma q} - \frac{q^2}{a^2}\delta u_{\gamma q} = -\psi_q, \quad (6.3.18)$$

$$\dot{\delta}_{\nu q} - \frac{q^2}{a^2}\delta u_{\nu q} = -\psi_q, \quad (6.3.19)$$

$$\dot{\delta}_{Dq} = -\psi_q, \quad (6.3.20)$$

$$\frac{d}{dt}(t^{-2/3}(1+R)\delta u_{\gamma q}) = -\frac{1}{3}t^{-2/3}\delta_{\gamma q}, \quad (6.3.21)$$

$$\frac{d}{dt}(t^{-2/3}\delta u_{\nu q}) = -\frac{1}{3}t^{-2/3}\delta_{\nu q}, \quad (6.3.22)$$

где снова  $R \equiv 3\bar{\rho}_b/(4\bar{\rho}_i) \propto a$ .

Есть два решения уравнений (6.3.17) и (6.3.20), одно с  $\psi_q \propto t^{-1/3}$  и  $\delta_{Dq} \propto t^{2/3}$ , а другое с  $\psi_q \propto t^{-2}$  и  $\delta_{Dq} \propto t^{-1}$ . Для нахождения коэффициентов в этих решениях в моде 1 следует сравнить эти решения с решениями уравнений (6.3.13) и (6.3.16) в эпоху, когда справедливы оба набора решений, т. е.

<sup>11)</sup> Ноль времени в этом подразделе выбран таким образом, чтобы в эпоху вещества  $a \propto t^{2/3}$ . Другими словами, здесь  $t$  можно определить как  $2/(3H)$ .

в эпоху (она существует в силу предположения о больших длинах волн), когда  $q/a \ll H$  и  $\bar{\rho}_u \ll \bar{\rho}_M$ , т. е.  $y \gg 1$ . Уравнения (6.3.13) и (6.3.16) для моды 1 дают

$$\delta_{Dq} = \frac{4q^2 y \mathcal{R}_q^r}{5H_{EQ}^2 a_{EQ}^2} = \frac{9q^2 t^2 \mathcal{R}_q^r}{10a^2}, \quad (6.3.23)$$

$$\psi_q = \frac{-2\sqrt{2} q^2 \mathcal{R}_q^r}{5H_{EQ} a_{EQ}^2 y^{1/2}} = -\frac{3q^2 t \mathcal{R}_q^r}{5a^2}. \quad (6.3.24)$$

---

Окончательное выражение в (6.3.23)–(6.3.24) получается с использованием того, что для  $\bar{\rho}_u \ll \bar{\rho}_D$  хаббловская скорость равна  $H = 2/(3t) = H_{EQ}/(\sqrt{2}y^{3/2})$ , исключая  $H_{EQ}$ .

---

Для  $a \propto t^{2/3}$  эти выражения согласуются с решением при  $\delta_{Dq} \propto t^{2/3}$  и  $\psi_q \propto t^{-1/3}$ , и легко видеть, что мода 2 дает другое решение в эру доминирования вещества, в котором  $\psi_q \propto t^{-2}$  и  $\delta_{Dq} \propto t^{-1}$ . Мы приходим к заключению, что если мода 1 доминирует за горизонтом, то возмущение плотности темной материи и гравитационного поля задаются в эру доминирования вещества уравнениями (6.3.23) и (6.3.24).

Здесь можно сделать паузу и связать текущее рассмотрение с более элементарным изложением разд. 2.6. Если предположить, что флуктуация в ньютоновском гравитационном потенциале  $\phi(\mathbf{x}, t)$  вблизи момента последнего рассеяния подавляется флуктуациями плотности темной материи, то фурьеобраз потенциала задается с помощью уравнения Пуассона, в котором лапласиан заменяется на  $-q^2/a^2$ :

$$\delta\phi(\mathbf{q}, t) = -4\pi G \left( \frac{a^2(t)}{q^2} \right) \delta\rho_D(\mathbf{q}, t) = -4\pi G \left( \frac{a^2(t)}{q^2} \right) \bar{\rho}_D(t) \delta_{Dq}(t).$$

Воспользовавшись решением для моды 1 (6.3.23) и уравнением Фридмана

$$H^2 = \left( \frac{2}{3t} \right)^2 = \frac{8\pi G \bar{\rho}_D}{3},$$

видим, что  $\delta\phi(\mathbf{q}, t)$  принимает независящее от времени значение:

$$\delta\phi(\mathbf{q}) = -\frac{3}{5} \alpha(\mathbf{q}) \mathcal{R}_q^r.$$

Тогда

$$\langle \delta\phi(\mathbf{q}) \delta\phi(\mathbf{q}') \rangle = \mathcal{P}_\phi(q) \delta^3(\mathbf{q} + \mathbf{q}'),$$

и введенная в разд. 2.6 корреляционная функция  $\mathcal{P}_\phi$  равна

$$\mathcal{P}_\phi(q) = \frac{9}{25} |\mathcal{R}_q^r|^2.$$

Зависимость  $\mathcal{P}_\phi(q) = N_\phi^2 q^{-3}$ , полученная в разд. 2.6 с целью нахождения температурного мультипольного коэффициента  $C_\ell = 8\pi N_\phi^2 / (9\ell(\ell+1))$ , соответствует, таким образом, предположению, что  $|\mathcal{R}_q^\Gamma|^2 = N^2 q^{-3}$  при  $N_\phi^2 = 9N^2/25$ .

Даже если предположить, что гравитационное поле подавляется холодной темной материией, все равно для вычисления вклада внутренних температурных флуктуаций и эффекта Доплера в анизотропии реликтового фона в следующей главе необходимо рассматривать возмущения плотности фотонов и фотонно-барионной скорости. Уравнения (6.3.18) и (6.3.21) являются системой из двух неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка для двух неизвестных,  $\delta_{\gamma q}$  и  $\delta u_{\gamma q}$ , с возмущающим членом, пропорциональным  $\psi_q$ . Удивительно, что для  $\psi_q$ , заданного уравнением (6.3.24), у этих уравнений существует простое точное решение:

$$\delta_{\gamma q}^{(1)} = \frac{3q^2 t^2 (1 + 3R) \mathcal{R}_q^\Gamma}{5a^2(t^2 q^2/a^2 + 2R)}, \quad \delta u_{\gamma q}^{(1)} = -\frac{3t^3 q^2 \mathcal{R}_q^\Gamma}{5a^2(t^2 q^2/a^2 + 2R)}. \quad (6.3.25)$$

(Оставшиеся уравнения (6.3.19) и (6.3.22), необходимые только для вычисления нейтринных возмущений, рассматриваться не будут.)

К частному решению (6.3.25) следует добавить подходящее решение однородной версии уравнений (6.3.18) и (6.3.21),

$$\dot{\delta}_{\gamma q}^{(2)} = \frac{q^2}{a^2} \delta u_{\gamma q}^{(2)}, \quad \frac{d}{dt} (t^{-2/3} (1 + R) \delta u_{\gamma q}^{(2)}) = -\frac{1}{3} t^{-2/3} \delta_{\gamma q}^{(2)}, \quad (6.3.26)$$

или, исключая потенциал поля скоростей,

$$\frac{d}{dt} \left( t^{-2/3} (1 + R) a^2 \frac{d}{dt} \delta_{\gamma q}^{(2)} \right) + \frac{q^2}{3} t^{-2/3} \delta_{\gamma q}^{(2)} = 0, \quad (6.3.27)$$

где коэффициенты выбраны таким образом, чтобы  $\delta_{\gamma q}^{(1)} + \delta_{\gamma q}^{(2)}$  согласовывалось с найденным ранее решением за горизонтом, при  $q^2 t^2/a^2 \ll 1$ .

С помощью того факта, что в эпоху вещества  $R \propto a \propto t^{2/3}$ , можно найти общее решение уравнения (6.3.27) в виде линейной комбинации функций

$$F\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{1-16\eta}, \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{1-16\eta}, \frac{1}{2}, -R\right),$$

$$\sqrt{R} F\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{1-16\eta}, \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{1-16\eta}, \frac{3}{2}, -R\right),$$

где  $F$  — это гауссова гипергеометрическая функция (также известная как  ${}_2F_1$ ), а  $\eta$  является величиной

$$\eta \equiv \frac{3q^2 t^2}{4a^2 R},$$

не зависящей от времени в эру доминирования вещества. К сожалению, это не приводит к лучшему пониманию поведения решений. Наоборот, сейчас

будет сделано дальнейшее предположение, что длина волны лишь умеренно большая, в том смысле, что  $\eta \gg 1$ , т. е. хотя  $q$  достаточно мало, так что при балансе вещества и излучения  $q/(aH) \ll 1$ , предполагается, что оно достаточно велико, чтобы на протяжении всей эры доминирования вещества иметь

$$R \ll \frac{t^2 q^2}{a^2} \ll \frac{\bar{\rho}_m}{\bar{\rho}_u}. \quad (6.3.28)$$

Каждый элемент этого неравенства в эру доминирования вещества пропорционален  $t^{2/3}$ , поэтому если (6.3.28) выполняется в любой момент этой эпохи, то оно выполняется на протяжении всей эпохи. Данное предположение позволит найти решения уравнения (6.3.27) в терминах элементарных функций. В противоположном случае экстремально больших длин волн, когда на протяжении всей эры доминирования вещества  $t^2 q^2 / a^2 \ll R$ , общее решение уравнений (6.3.18) и (6.3.21) можно представить в виде степенного ряда по степеням  $t^2 q^2 / (a^2 R)$ . Здесь нас больше интересует случай умеренно длинных волн, потому что как будет видно в разд. 6.5, именно этот случай можно связать со случаем кратких волн посредством гладкой экстраполяции.

Для возмущений, удовлетворяющих неравенству (6.3.28), когда возмущение находится за горизонтом и некоторое время спустя заново попадает под горизонт, имеем  $R \ll 1$ . В течение периода, когда  $R \ll 1$ , однородные уравнения (6.3.26) имеют точное решение:

$$\delta_{\gamma q}^{(2)} = c_q \cos\left(\frac{\sqrt{3} qt}{a}\right) + d_q \sin\left(\frac{\sqrt{3} qt}{a}\right), \quad (6.3.29)$$

$$\delta u_{\gamma q}^{(2)} = \frac{a}{\sqrt{3} q} \left[ -c_q \sin\left(\frac{\sqrt{3} qt}{a}\right) + d_q \cos\left(\frac{\sqrt{3} qt}{a}\right) \right] \quad (6.3.30)$$

с постоянными  $c_q$  и  $d_q$ . К этому решению необходимо добавить неоднородное решение (6.3.25), в пределе  $R \ll q^2 t^2 / a^2$ :

$$\delta_{\gamma q}^{(1)} = \frac{3(1+3R)\mathcal{R}_q^r}{5}, \quad \delta u_{\gamma q}^{(1)} = -\frac{3t\mathcal{R}_q^r}{5}. \quad (6.3.31)$$

Константы  $c_q$  и  $d_q$  можно вычислить, если потребовать, что для  $qt/a \ll 1$  (согласно уравнению (6.3.28) это также означает  $R \ll 1$ ) возмущение полной фотонной плотности  $\delta_{\gamma q}^{(1)} + \delta_{\gamma q}^{(2)}$  должно стремиться к  $\delta_{Dq} \rightarrow 9q^2 t^2 \mathcal{R}_q^r / (10a^2)$ . Это дает

$$c_q = -\frac{3\mathcal{R}_q^r}{5}, \quad d_q = 0, \quad (6.3.32)$$

так что пока  $R \ll 1$ ,

$$\delta_{\gamma q}^{(2)} = -\frac{3\mathcal{R}_q^r}{5} \cos\left(\frac{\sqrt{3} qt}{a}\right). \quad (6.3.33)$$

В конце концов  $R$  перестает быть пренебрежимо малой, однако при предположении (6.3.28)  $qt/a$  станет много больше единицы, и однородные

уравнения (6.3.26) можно решить с помощью ВКБ-приближения. Рассмотрение уравнения (6.3.27) приводит к тому, что для  $qt/a \gg 1$  флуктуация плотности будет быстро осциллировать с фазой

$$\varphi \equiv \int_0^t \frac{q dt}{a\sqrt{3(1+R)}} = \frac{\sqrt{3} qt}{a\sqrt{R}} \ln(\sqrt{R} + \sqrt{1+R}). \quad (6.3.34)$$

Используя вместо  $t$  независимую переменную  $\varphi$  и вспоминая, что в течении эпохи вещества  $a \propto t^{2/3}$ , уравнению (6.3.27) можно придать следующий вид:

$$\frac{d^2\delta_{\gamma q}}{d\varphi^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{d \ln(1+R)}{d\varphi} \right) \frac{d\delta_{\gamma q}}{d\varphi} + \delta_{\gamma q} = 0.$$

В качестве решения попробуем подставить  $\mathcal{A}e^{\pm i\varphi}$ , где  $\mathcal{A}$  медленно изменяется относительно  $\varphi$ , так что второй производной от  $\mathcal{A}$  в первом слагаемом слева можно пренебречь, также можно пренебречь первой производной от  $\mathcal{A}$  во втором слагаемом слева, которая уже мала за счет фактора  $d \ln(1+R)/d\varphi$ . Это приводит к

$$\frac{d\mathcal{A}}{d\varphi} \simeq -\frac{\mathcal{A}}{4} \frac{d \ln(1+R)}{d\varphi},$$

и следовательно общие ВКБ-решения уравнения (6.3.27) равны

$$\delta_{\gamma q}^{(2\pm)} \propto (1+R)^{-1/4} e^{\pm i\varphi}.$$

Очевидно, что линейная комбинация этих решений, гладко сливающаяся с результатами при  $R \ll 1$ , получается заменой аргумента косинуса в уравнении (6.3.33) на  $\varphi$  и умножением на  $(1+R)^{-1/4}$ . Добавляя предельное значение неоднородного вклада (6.3.31), получим, что возмущения полных относительных плотностей фотонов и барионов для умеренно больших длин волн в эпоху вещества равны

$$\delta_{\gamma q} = \delta_{6q} = \frac{3\mathcal{R}_q^r}{5} [1 + 3R - (1+R)^{-1/4} \cos \varphi]. \quad (6.3.35)$$

Тогда для вычисления потенциала поля скоростей можно воспользоваться уравнениями (6.3.18) и (6.3.24):

$$\delta u_{\gamma q} = \frac{3t\mathcal{R}_q^r}{5} \left[ -1 + \frac{a}{\sqrt{3} qt(1+R)^{3/4}} \sin \varphi \right]. \quad (6.3.36)$$

---

Слагаемые в квадратных скобках порядка  $R a^2/(t^2 q^2)$  здесь отбрасываются.

---

В качестве проверки отметим, что в начале эры доминирования вещества, когда  $qt/a \ll 1$ , имеем  $R \ll 1$ , поэтому  $\varphi \rightarrow \sqrt{3}qt/a \rightarrow 0$ , и следовательно соотношение (6.3.35) приводит к  $\delta_{\gamma q} = \delta_{6q} \rightarrow 9q^2 t^2 \mathcal{R}_q^r / (10a^2)$ , в согласии с уравнением (6.3.23) и условием того, что для адиабатических мод все  $\delta_{\alpha q}$  равны за

горизонтом. Это условие справедливо для соотношения (6.3.35) даже в случае, когда неравенство (6.3.28) не выполнено до тех пор, пока  $R \ll 1$  и  $qt/a \ll 1$ .

Решения (6.3.35) и (6.3.36) для  $\delta_{\gamma q} = \delta_{6q}$  и  $\delta_{i\gamma q}$ , в случае умеренно больших длин волн, имеют силу только до момента последнего рассеяния. С другой стороны, в тех случаях, когда плотность энергии после последнего рассеяния подавляется темной материией, отделение барионной плазмы от излучения не влияет на  $\delta_{Dq}$  и  $\psi_q$ , которые будут задаваться выражениями (6.3.23) и (6.3.24) до тех пор, пока либо вакуумная энергия, либо, возможно, пространственная кривизна не станут существенными, либо возмущения не станут достаточно сильны, чтобы рассматриваться как возмущения первого порядка.

## 6.4

### Скалярные возмущения — короткие длины волн

- Эволюция в эру доминирования излучения • Эволюция глубоко внутри горизонта
- Быстрые и медленные моды • Совместимость

Теперь рассмотрим адиабатические возмущения с длинами волн, достаточно короткими, чтобы быть полностью под горизонтом во времена баланса вещества и излучения. Как обсуждалось в конце разд. 6.2, такие возмущения ответственны за появление мультипольных моментов анизотропий реликтового излучения с  $\ell \gg 140$ , а также за образование гравитационных сгущений, которые приводят к образованию структур на масштабах галактик либо галактических скоплений. Следуя таким же рассуждениям, как в начале предыдущего раздела, получаем, что в эру доминирования излучения для этих длин волн справедливо

$$\frac{q}{aH} \gg \frac{\bar{\rho}_m}{\bar{\rho}_i}, \quad (6.4.1)$$

а в эру доминирования вещества

$$\frac{q^2}{a^2 H^2} \gg \frac{\bar{\rho}_m}{\bar{\rho}_i}, \quad (6.4.2)$$

где как и прежде  $\bar{\rho}_m \equiv \rho_D + \rho_b$  и  $\bar{\rho}_i \equiv \rho_\gamma + \rho_\nu$ . В разд. 6.2 показано, что поскольку мы рассматриваем адиабатические возмущения, относительные возмущения  $\delta_{\alpha q} = \delta\rho_{\alpha q}/(\bar{\rho}_\alpha + \bar{\rho}_\alpha)$  подчиняются условию  $\delta_{6q} = \delta_{\gamma q}$ . Следовательно, данные возмущения описываются уравнениями (6.2.39)–(6.2.44). В свою очередь, мы не можем найти единственное аналитическое решение этих уравнений на протяжении всей эпохи сразу после электрон-позитронной аннигиляции до почти настоящего момента, но к счастью, можно найти аналитические решения в двух *пересекающихся* эпохах: первая эпоха, когда плотность энергии во Вселенной подавлена излучением (фотоны и нейтрино), и вторая эпоха, когда возмущения находятся полностью под горизонтом.

### A. Эра доминирования излучения

В эру доминирования излучения, когда  $\bar{\rho}_i \gg \bar{\rho}_m$ , уравнения (6.2.39)–(6.2.44) можно решить аналитически. Предварительно мы будем предполагать, что в это время флуктуации плотностей фотонов и нейтрино в правой части гравитационных полевых уравнений (6.2.39) доминируют над флуктуациями темной материи; мы проверим это предположение позже в этом разделе. В эту эпоху  $a \propto t^{1/2}$ , поэтому уравнения (6.2.39)–(6.2.44) принимают вид

$$\frac{d}{dt}(t\psi_q) = -\frac{32\pi G t}{3}(\bar{\rho}_\gamma \delta_{\gamma q} + \bar{\rho}_\nu \delta_{\nu q}), \quad (6.4.3)$$

$$\dot{\delta}_{\gamma q} - \left(\frac{q^2}{a^2}\right) \delta u_{\gamma q} = -\psi_q, \quad (6.4.4)$$

$$\dot{\delta}_{Dq} = -\psi_q, \quad (6.4.5)$$

$$\frac{d}{dt}(t^{-1/2} \delta u_{\gamma q}) = -\frac{1}{3} t^{-1/2} \delta_{\gamma q}, \quad (6.4.6)$$

$$\dot{\delta}_{\nu q} - \left(\frac{q^2}{a^2}\right) \delta u_{\nu q} = -\psi_q, \quad (6.4.7)$$

$$\frac{d}{dt}(t^{-1/2} \delta u_{\nu q}) = -\frac{1}{3} t^{-1/2} \delta_{\nu q}. \quad (6.4.8)$$

Нас интересуют адиабатические решения, для которых в ранние времена все  $\delta_{\alpha q}$  и  $\delta u_{\alpha q}$  становятся равными друг другу, поэтому поскольку рассматриваемые здесь дифференциальные уравнения одинаковы для фотонов и нейтрино, для этих адиабатических решений выполняется

$$\delta_{\gamma q} = \delta_{\nu q}, \quad \delta u_{\gamma q} = \delta u_{\nu q}.$$

Для этих мод уравнение (6.4.3) упрощается до

$$\frac{d}{dt}(t\psi_q) = -\frac{32\pi G \bar{\rho}_i t}{3} \delta_{\gamma q} = -\frac{1}{t} \delta_{\gamma q}.$$

Также предполагая, что космологические возмущения находятся в растущей адиабатической mode, mode 1, находим, что они подчиняются начальным условиям (6.2.27)–(6.2.30) при  $q/(aH) \ll 1$ :

$$\delta_{\gamma q} = \delta_{\nu q} = \delta_{\nu q} \rightarrow \frac{q^2 t^2 \mathcal{R}_q^r}{a^2}, \quad \delta_{Dq} \rightarrow \frac{q^2 t^2 \mathcal{R}_q^r}{a^2} \quad (6.4.9)$$

$$\psi_q \rightarrow -\frac{t q^2 \mathcal{R}_q^r}{a^2}, \quad \delta u_{\gamma q} = \delta u_{\nu q} \rightarrow -\frac{2 t^3 q^2 \mathcal{R}_q^r}{9 a^2}, \quad (6.4.10)$$

где  $\mathcal{R}_q^r$  — это значение  $\mathcal{R}_q$  за горизонтом. Читатель может убедиться, что решение уравнений (6.4.3)–(6.4.8), удовлетворяющее данным начальным усло-

виям, имеет вид<sup>12)</sup>

$$\delta_{\gamma q} = \delta_{6q} = \delta_{\nu q} = 3\mathcal{R}_q^r \left( \frac{2}{\Theta} \sin \Theta - \left( 1 - \frac{2}{\Theta^2} \right) \cos \Theta - \frac{2}{\Theta^2} \right), \quad (6.4.11)$$

$$\psi_q = \frac{3\mathcal{R}_q^r}{t} \left( \frac{2}{\Theta} \sin \Theta + \frac{2}{\Theta^2} \cos \Theta - \frac{2}{\Theta^2} - 1 \right), \quad (6.4.12)$$

$$\delta_{Dq} = -6\mathcal{R}_q^r \int_0^\Theta \left( \frac{2}{\vartheta^3} \sin \vartheta + \frac{2}{\vartheta^4} \cos \vartheta - \frac{2}{\vartheta^4} - \frac{1}{\vartheta^2} \right) \vartheta \, d\vartheta, \quad (6.4.13)$$

$$\delta u_{\gamma q} = \delta u_{\nu q} = 4t\mathcal{R}_q^r \left( \frac{\sin \Theta}{2\Theta} - \frac{1 - \cos \Theta}{\Theta^2} \right), \quad (6.4.14)$$

где

$$\Theta \equiv \frac{2qt}{\sqrt{3}a}. \quad (6.4.15)$$

Отметим, что относительные возмущения  $\delta_{\alpha q}$  — одинакового порядка величины при умеренных значениях  $\Theta$ . Это подтверждает отбрасывание слагаемых с веществом в (6.2.39), когда  $\bar{\rho}_i$  много больше чем  $\bar{\rho}_D$ , а  $q/(aH)$  не намного больше единицы. Условие, при котором для возмущений глубоко под горизонтом, когда  $\Theta$  становится большим, в уравнении (6.2.39) можно по-прежнему отбрасывать слагаемые с веществом, будет обсуждаться далее.

## В. Глубоко под горизонтом

Можно также найти решение уравнений (6.2.39)–(6.2.44), когда длина волны помещается под горизонтом, в смысле  $q/a \gg H$ , независимо от того, является ли  $\bar{\rho}_D$  пренебрежимо мало по сравнению с  $\bar{\rho}_i$ . При  $q/a \gg H$  можно различать два типа решений: «медленные моды», для которых временные производные дают множители порядка  $H$ , и «быстрые моды», для которых действующие на возмущения временные производные дают множители порядка  $q/a$ , а также иные члены с множителями порядка  $H$ . Уравнения (6.2.39)–(6.2.44) образуют систему дифференциальных уравнений шестого порядка, поэтому существует шесть независимых решений. Мы собираемся построить четыре независимых быстрых решения и два независимых медленных решения, поэтому можно быть уверенным, что нет решений, отличных от тех, которые мы назвали быстрыми и медленными модами.

<sup>12)</sup> Заменяя  $t$  на зависимую переменную  $\Theta$ , приводим уравнения (6.4.3), (6.4.4) и (6.4.6) к виду свободной от параметров системы дифференциальных уравнений третьего порядка для  $\delta_{\gamma q} = \delta_{6q} = \delta_{\nu q}$ ,  $\delta u_{\gamma q}/t = \delta u_{\nu q}/t$  и  $t\psi_q$ . Построив решение, согласующееся с начальными условиями (6.4.9), (6.4.10), решение уравнения (6.4.5) для  $\delta_{Dq}$  можно найти, выполнив интегрирование. Помимо нормировки, это решение для различных флуктуаций эквивалентно решению с ньютоновским потенциалом в другой калибровке в уравнении (48) статьи S. Bashinsky & E. Bertschinger *Phys. Rev. D* **65**, 123008 (2002).

### 1. Быстрые моды

До сих пор мы игнорировали анизотропную инерцию нейтрино, однако для быстро осциллирующих быстрых мод необходимо учитывать влияние продолжительного среднего свободного пробега при затухании возмущений плотности и скоростей нейтрино. При рассмотрении быстрых мод глубоко под горизонтом будем просто предполагать, что затухание позволяет игнорировать  $\delta_{\nu q}$  в уравнении (6.2.39). Переходя к другим возмущениям в быстрой моде с относительными скоростями изменения порядка  $q/a$ , из уравнения (6.2.41) получаем, что  $\delta_{Dq}$  порядка  $\psi_q/(q/a)$ , поэтому слагаемое с темной материей в правой части уравнения (6.2.39) имеет порядок

$$\frac{4\pi G a^2 \bar{\rho}_D \psi_q}{q/a} \leq \frac{3H^2 a^2 \psi_q}{2q/a},$$

а левая часть уравнения (6.2.39) порядка  $(q/a)a^2\psi_q$ , таким образом, слагаемое с темной материей меньше, чем левая часть уравнения (6.2.39) на фактор порядка  $\leq H^2/(q/a)^2$ , который глубоко под горизонтом много меньше единицы. Отбрасывая в (6.2.39) слагаемое с темной материей, мы видим, что  $\delta_{\gamma q}$  должна быть по меньшей мере порядка  $(q/a)\psi_q/H^2$ . Тогда из уравнения (6.2.43) следует, что  $\delta u_{\gamma q}$  порядка  $\delta_{\gamma q}/(q/a)$ , и поэтому по меньшей мере имеет порядок  $\psi_q/H^2$ . Тогда оба слагаемых в левой части уравнения (6.2.42) больше  $\psi_q$  на факторы порядка  $q^2/(a^2 H^2) \gg 1$ , поэтому  $\psi_q$  в правой части можно отбросить.

---

Так как длина волны мала, градиенты давления влияют на фотон-барионную плазму гораздо сильнее гравитации.

---

Следовательно, если в уравнениях (6.2.40), (6.2.43), (6.2.39) и (6.2.41) отбросить все слагаемые, подавленные факторами  $H^2/(q/a)^2$  (кроме членов, возникающих от производных  $a$ , которые подавлены лишь множителями  $H/(q/a)$ ), то эти уравнения принимают вид

$$\dot{\delta}_{\gamma q} = \frac{q^2}{a^2} \delta u_{\gamma q}, \quad (6.4.16)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{(1+R)\delta u_{\gamma q}}{a} \right) = -\frac{1}{3a} \delta_{\gamma q}, \quad (6.4.17)$$

$$\frac{d}{dt} (a^2 \psi_q) = -\frac{16\pi G a^2}{3} \bar{\rho}_\gamma (R+2) \delta_{\gamma q}, \quad (6.4.18)$$

$$\dot{\delta}_{Dq} = -\psi_q, \quad (6.4.19)$$

где, как и прежде,  $R \equiv 3\bar{\rho}_6/(4\bar{\rho}_\gamma)$ . У уравнений (6.4.16) и (6.4.17) существует два независимых решения для  $\delta_{\gamma q}$  и  $\delta u_{\gamma q}$ . Если интересоваться только быстрыми модами, то тогда при наличии этих решений уравнение (6.4.18) имеет

единственное решение для  $\psi_q$ , а уравнение (6.4.19) имеет единственное решение для  $\delta_{Dq}$ .

---

Возможные постоянные члены, которые могут быть включены в решения для  $a^2\psi_q$  или  $\delta_{Dq}$ , будут давать вклад в медленные, а не в быстрые моды.

---

Как и было обещано, вместе с двумя сильно затухающими решениями уравнений (6.2.42) и (6.2.44) для возмущений нейтрино, имеется четыре независимых быстрых моды.

Исключая  $\delta_{\gamma q}$  из уравнений (6.4.16) и (6.4.17), получаем одно дифференциальное уравнение второго порядка для  $\delta_{\gamma q}$ :

$$\frac{d}{dt} \left( a(1+R) \frac{d}{dt} \delta_{\gamma q} \right) + \frac{q^2}{3a} \delta_{\gamma q} = 0. \quad (6.4.20)$$

Если бы  $a$  и  $R$  были постоянны, то данное уравнение являлось бы волновым уравнением для звуковых волн, с физическим волновым числом  $q/a$  и скоростью<sup>13)</sup>  $v_s = 1/\sqrt{3(1+R)}$ . Если  $a$  и  $R$  изменяются с достаточно низкой относительной скоростью  $H$ , то уравнение (6.4.20) можно решить при  $q/a \gg H$  с помощью ВКБ-приближения. С этой целью вводится новая независимая переменная, фаза

$$\varphi = q \int_0^t dt \frac{1}{a\sqrt{3(1+R)}},$$

и уравнение (6.4.20) переписывается как

$$\frac{d^2 \delta_{\gamma q}}{d\varphi^2} + \frac{1}{2} \frac{d \ln (1+R)}{d\varphi} \frac{d \delta_{\gamma q}}{d\varphi} + \delta_{\gamma q} = 0.$$

Записывая  $\delta_{\gamma q} = A e^{\pm i\varphi}$ , отбрасывая  $d^2 A/d\varphi^2$  в первом слагаемом слева и отбрасывая  $dA/d\varphi$  во втором слагаемом (которое уже мало в силу присутствия фактора  $d \ln (1+R)/d\varphi$ ), находим

$$\frac{dA}{d\varphi} = -\frac{A}{4} \frac{d \ln (1+R)}{d\varphi},$$

---

<sup>13)</sup> Отметим, что условие постоянства энтропии приводит к

$$\frac{dp_6}{\bar{\rho}_6} = \frac{dp_\gamma}{\bar{\rho}_\gamma + p_\gamma} = \frac{3}{4} \frac{dp_\gamma}{\bar{\rho}_\gamma},$$

поэтому

$$v_s^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{dp_\gamma}{3(dp_\gamma + d\rho_6)} = \frac{1}{3(1+R)}.$$

поэтому ВКБ-решения равны<sup>14)</sup>

$$\delta_{\gamma q}^{\pm} = (1 + R)^{-1/4} \exp \left( \pm iq \int_0^t \frac{dt}{a\sqrt{3(1+R)}} \right). \quad (6.4.21)$$

Имеется дальнейшее усложнение, которое следует принимать во внимание в случае быстрых мод, хотя для медленных мод оно не играет роли. Амплитуда звуковой волны с физическим волновым числом  $k$ , большим обратного среднего пробега частиц в релятивистской среде, затухает при наличии вязкости и теплопроводности со скоростью, задаваемой в общем случае в виде<sup>15)</sup>

$$\Gamma = \frac{k^2}{2(\rho + p)} \left\{ \zeta + \frac{4}{3}\eta + \chi \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_n^{-1} \times \right. \\ \left. \times \left[ \rho + p - 2T \left( \frac{\partial p}{\partial T} \right)_n + v_s^2 T \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_n - \frac{n}{v_s^2} \left( \frac{\partial p}{\partial n} \right)_T \right] \right\}, \quad (6.4.22)$$

где  $\eta$ ,  $\chi$  и  $\zeta$  — это соответственно коэффициенты сдвиговой вязкости, теплопроводности и объемной вязкости, определенные в приложении B;  $v_s$  — это скорость звука;  $n$  — это произвольная плотность числа частиц, от которой могут зависеть свойства рассматриваемой жидкости; и нижние индексы обозначают величины, которые при вычислении частных производных принимают постоянные значения. Для фотон-барионной жидкости, для которой  $n$  является плотностью числа барионов, получаем  $\rho = \rho_b + \rho_\gamma$ ,  $p = \rho_\gamma/3$  с  $\rho_b \propto n$  и  $\rho_\gamma \propto T^4$ . Также, как мы видели,  $v_s = 1/\sqrt{3(1+R)}$ . Следовательно (при выборе  $k = q/a$ ), выражение для скорости затухания принимает вид

$$\Gamma = \frac{3q^2}{8a^2\bar{\rho}_\gamma(1+R)} \left\{ \zeta + \frac{4}{3}\eta + \frac{\chi TR^2}{3(1+R)} \right\}. \quad (6.4.23)$$

Коэффициенты вязкости и теплопроводности для фотонов, взаимодействующих с нерелятивистской плазмой со временем свободного пробега  $t_\gamma = 1/(\sigma T n_e)$ , равны

$$\eta = \frac{16}{45}\bar{\rho}_\gamma t_\gamma, \quad \chi T = \frac{4}{3}\bar{\rho}_\gamma t_\gamma, \quad \zeta = 0, \quad (6.4.24)$$

так что в этом случае скорость затухания равна<sup>16)</sup>

$$\Gamma = \frac{q^2 t_\gamma}{6a^2(1+R)} \left\{ \frac{16}{15} + \frac{R^2}{1+R} \right\}. \quad (6.4.25)$$

<sup>14)</sup> P. J. E. Peebles and J. T. Yu, *Astrophys. J.* **162**, 815 (1970). R. A. Sunyaev and Ya. B. Zel'dovich, *Astrophys. & Space Sci.* **7**, 3 (1970).

<sup>15)</sup> S. Weinberg, *Astrophys. J.* **168**, 175 (1971).

<sup>16)</sup> Эта скорость затухания была впервые вычислена в работе N. Kaiser, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **202**, 1169 (1983), а также выводится в приложении Н. Формулы для коэффициентов сдвига-

Эффект сводится к замене решения (6.4.2) для амплитуд быстрых мод следующим выражением:

$$\delta_{\gamma q}^{\pm} = (1 + R)^{-1/4} \exp \left( \pm iq \int_0^t \frac{dt}{a\sqrt{3(1+R)}} - \int_0^t \Gamma dt \right). \quad (6.4.26)$$

Такое затухание быстрых мод известно как *затухание Силка*<sup>17)</sup>. С учетом этого результата, решения  $\delta u_{\gamma q}^{\pm}$  для этих быстрых мод могут быть получены из уравнения (6.4.16), решения  $\psi_q^{\pm}$  могут быть получены из уравнения (6.4.18), и тогда решения  $\delta_{Dq}^{\pm}$  могут быть получены из уравнения (6.4.19).

## 2. Медленные моды

Для решений с относительной скоростью изменения порядка  $H = \mathcal{O}(1/t)$  можно, как и в случае быстрых мод, провести аналогичный подсчет степеней  $q/(aH)$ , получив при этом совершенно иные результаты. Из уравнений (6.2.41), (6.2.43) и (6.2.44) видно, что  $\delta_{Dq}$  порядка  $\psi_q/H$ , а  $\delta_{\gamma q}$  и  $\delta_{\nu q}$  соответственно имеют порядки  $H\delta u_{\gamma q}$  и  $H\delta u_{\nu q}$ . Тогда слагаемые  $\dot{\delta}_{\gamma q}$  и  $\dot{\delta}_{\nu q}$  в левых частях уравнений (6.2.40) и (6.2.42) порядка  $H^2\delta u_{\gamma q}$  и  $H^2\delta u_{\nu q}$ , и следовательно меньше чем слагаемые  $(q^2/a^2)\delta u_{\gamma q}$  и  $(q^2/a^2)\delta u_{\nu q}$  на факторы порядка  $H^2a^2/q^2$ ; эти слагаемые можно отбросить, взамен чего получаем

$$\left( \frac{q^2}{a^2} \right) \delta u_{\gamma q} = \left( \frac{q^2}{a^2} \right) \delta u_{\nu q} = \psi_q, \quad (6.4.27)$$

поэтому из уравнений (6.2.43) и (6.2.44) следует, что  $\delta_{\gamma q}$  и  $\delta_{\nu q}$  порядка  $(a^2H/q^2)\psi_q$ . Поэтому отношения фотонных и нейтринных вкладов в правой части уравнения (6.2.39) к слагаемому с темной материи имеет порядок

$$\frac{\text{фотоны \& нейтрино}}{\text{темная материя}} = \mathcal{O} \left[ \left( \frac{\bar{\rho}_6 + 8\bar{\rho}_n/3}{\bar{\rho}_D} \right) \left( \frac{a^2 H^2}{q^2} \right) \right],$$

где, как и ранее,  $\bar{\rho}_i \equiv \bar{\rho}_{\gamma} + \bar{\rho}_{\nu}$ .

---

вой вязкости и теплопроводности получаются сравнением формул (6.4.23) и (6.4.25) для скорости акустического затухания, с учетом того, что объемная вязкость обращается в ноль, потому что энергия и импульс переносятся релятивистскими частицами; см. сноску 15. Вычислена в сноской 15 скорость затухания дает правильные значения для  $\chi$  и  $\zeta$ , однако она приводит к значению  $\eta$  в 3/4 раза отличного от правильного значения, вычисленного Кайзером, и используемого в уравнении (6.4.24). Так произошло потому, что результаты сноски 15 основывались на вычислениях L. H. Thomas, *Quart. J. Math. (Oxford)* **1**, 239 (1930), в которых предполагалось изотропное рассеяние и игнорировалась поляризация фотонов. (Такое же значение  $\eta$  ранее получалось в C. Misner, *Astrophys. J.* **151**, 431 (1968).) Результаты Кайзера вычисляются с помощью правильного дифференциального сечения рассеяния для томсоновского рассеяния и с учетом фотонной поляризации, поэтому заменяют собой значение для  $\eta$ , приведенное в сноске 15 и в ГиК, гл. 15.

<sup>17)</sup> J. Silk, *Nature* **215**, 1155 (1972).

Пропорциональное  $\bar{\rho}_b$  выражение в числителе дает вклад в данное отношение, много меньший единицы, потому что  $\bar{\rho}_b/\bar{\rho}_D \approx 1/5$ , и теперь мы считаем, что  $aH/q \ll 1$ . Согласно уравнению (6.4.2), вклад пропорционального  $\bar{\rho}_i$  выражения много меньше единицы на протяжении эры доминирования вещества. Он начинает быть по-настоящему больше единицы во время эры доминирования излучения, когда отношение плотности излучения к плотности темной материи уменьшается до значения ниже критического ( $\bar{\rho}_i/\bar{\rho}_D$ )<sub>крит</sub>, задаваемого

$$\left(\frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}_D}\right)_{\text{крит}} = \left(\frac{3}{8}\right)^{1/3} \left(\frac{q}{aH} \frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}_D}\right)^{2/3} \quad (6.4.28)$$

Согласно уравнению (6.4.1), правая часть этого выражения постоянна и много больше единицы на протяжении всей эры доминирования излучения для длин волн, рассматриваемых в этом разделе, поэтому значение  $\bar{\rho}_i/\bar{\rho}_D$  уменьшиться до значения ниже критического до наступления баланса вещества и излучения.

---

То есть сильное давление вынуждает возмущения фотон-барионной плазмы оставаться достаточно малыми, так что его влияние на гравитационное поле становится пренебрежимо мало, как только  $\bar{\rho}_i/\bar{\rho}_D$  уменьшается до значений ниже критического (6.4.28), даже если плотность невозмущенного излучения сначала больше плотности темной материи.

---

С этого времени фотонными и нейтринными вкладами в уравнении (6.2.39) для медленных мод можно пренебречь, что приводит к уравнению

$$\frac{d}{dt}(a^2 \psi_q) = -4\pi G \bar{\rho}_D a^2 \delta_{Dq}. \quad (6.4.29)$$

Остальные уравнения, (6.2.41), (6.2.43) и (6.2.44), остаются без изменений:

$$\dot{\delta}_{Dq} = -\psi_q, \quad (6.4.30)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{(1+R)\delta u_{\gamma q}}{a} \right) = -\frac{1}{3a} \delta_{\gamma q}, \quad (6.4.31)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\delta u_{\nu q}}{a} \right) = -\frac{1}{3a} \delta_{\nu q}. \quad (6.4.32)$$

Подставляя (6.4.30) в (6.4.29), получаем дифференциальное уравнение второго порядка для  $\delta_{Dq}$ <sup>18)</sup>:

$$\frac{d}{dt} \left( a^2 \frac{d\delta_{Dq}}{dt} \right) = 4\pi G a^2 \bar{\rho}_D \delta_{Dq}. \quad (6.4.33)$$

---

<sup>18)</sup> Уравнение (6.4.33) впервые было получено в работе P. Mészáros, *Astron. Astrophys.* 37, 225 (1974), где флуктуации плотности энергии излучения были просто проигнорированы. Приве-

В очередной раз удобно перейти от независимой переменной  $t$  к  $y \equiv a/a_{\text{EQ}} = \bar{\rho}_m/\bar{\rho}_i$  с помощью уравнения Фридмана

$$\frac{\dot{y}^2}{y^2} = \frac{8\pi G}{3}(\bar{\rho}_m + \bar{\rho}_i) = \frac{8\pi G\rho_{\text{EQ}}}{3}(y^{-3} + y^{-4}), \quad (6.4.34)$$

где  $\rho_{\text{EQ}}$  — это значения  $\bar{\rho}_m$  и  $\bar{\rho}_i$ , когда они равны друг другу. Тогда уравнение (6.4.33) приобретает вид, в котором оно иногда известно как *уравнение Месароша*:

$$y(1+y)\frac{d^2\delta_D}{dy^2} + \left(1 + \frac{3y}{2}\right)\frac{d\delta_D}{dy} - \frac{3}{2}(1-\beta)\delta_D = 0, \quad (6.4.35)$$

где  $\beta \equiv \bar{\rho}_6/\bar{\rho}_m = \Omega_6/\Omega_m$ . Независимые решения уравнения (6.4.35) для  $\beta = 0$  были найдены Месарошем (см. сноску 18), а также Гротом и Пиблзом<sup>19)</sup>:

$$\delta_{Dq}^{(1)} = 1 + \frac{3y}{2}, \quad \delta_{Dq}^{(2)} = \left(1 + \frac{3y}{2}\right) \ln\left(\frac{\sqrt{1+y}+1}{\sqrt{1+y}-1}\right) - 3\sqrt{1+y}. \quad (6.4.36)$$

Впоследствии Ху и Сугияма<sup>20)</sup> нашли два независимых решения при произвольном  $\beta$ :

$$\delta_{Dq} \propto (1+y)^{-\alpha_{\pm}} F\left(\alpha_{\pm}, \alpha_{\pm} + \frac{1}{2}, 2\alpha_{\pm} + \frac{1}{2}; \frac{1}{1+y}\right),$$

где  $F$  — это гауссова гипергеометрическая функция, и

$$\alpha_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24\beta}}{4}.$$

Чтобы получить окончательный ответ в аналитическом виде по-прежнему будем отбрасывать пропорциональные  $\beta \equiv \bar{\rho}_6/\bar{\rho}_m \approx 1/6$  поправки и оставлять поправки, пропорциональные  $R \equiv 3\bar{\rho}_6/4\bar{\rho}_\gamma$ , поэтому будут использоваться медленные решения (6.4.36) при  $\beta = 0$ . (Поправки для конечного значения  $\beta$  обсуждаются в следующем разделе.) Имея два таких решения, последовательным использованием уравнений (6.4.30), (6.4.27) и (6.4.32) соответствующие медленные решения для  $\psi_q$ ,  $\delta u_{\gamma q}$ ,  $\delta u_{\nu q}$ ,  $\delta_{\gamma q}$  и  $\delta_{\nu q}$  можно найти единственным образом. (Возмущения нейтрино не представляют известного наблюдательного интереса.) Таким образом, мы нашли две медленных моды, что в совокупности дает шесть решений.

---

денный здесь аргумент в пользу отбрасывания возмущений плотности излучения в уравнении (6.4.33) был сформулирован в работе S. Weinberg, *Astrophys. J.* **581**, 810 (2002). Он применим только к медленной моде решения; для быстрой моды именно возмущения плотности *темной материи* становятся пренебрежимо малыми для коротких длин волн. В этой статье также содержится комментарий насчет других попыток обосновать отбрасывание возмущений плотности излучения в уравнении (6.4.33).

<sup>19)</sup> E. J. Groth and P. J. E. Peebles, *Astron. Astrophys.* **41**, 143 (1975).

<sup>20)</sup> W. Hu and N. Sugiyama, *Astrophys. J.* **471**, 542 (1996).

### С. Сшивка решений

К счастью, для коротких длин волн существует перекрытие двух эпох, в которых нами были найдены решения для  $\delta_D$  и т. д., удовлетворяющих двум условиям:  $q/a \gg \dot{a}/a$  и  $\bar{\rho}_m \ll \bar{\rho}_i$ . В этот период найденное в эру доминирования излучения решение (6.4.11)–(6.4.14) может быть разложено на быструю и медленную моды. Поскольку определенная уравнением (6.4.15) переменная  $\Theta$  теперь много больше единицы, получаем

$$\delta_{\gamma q}^{\text{быстр}} = \delta_{6q}^{\text{быстр}} = \delta_{\nu q}^{\text{быстр}} = 3\mathcal{R}_q^r \left( \frac{2}{\Theta} \sin \Theta - \left( 1 - \frac{2}{\Theta^2} \right) \cos \Theta \right) \rightarrow -3\mathcal{R}_q^r \cos \Theta, \quad (6.4.37)$$

$$\Psi_q^{\text{быстр}} = \frac{3\mathcal{R}_q^r}{t} \left( \frac{2}{\Theta} \sin \Theta + \frac{2}{\Theta^2} \cos \Theta \right) \rightarrow \frac{6\mathcal{R}_q^r}{t\Theta} \sin \Theta, \quad (6.4.38)$$

$$\delta_{Dq}^{\text{быстр}} = -6\mathcal{R}_q^r \int_{\Theta_1}^{\Theta} \left( \frac{2}{\vartheta^3} \sin \vartheta + \frac{2}{\vartheta^4} \cos \vartheta \right) \vartheta d\vartheta \rightarrow \frac{12\mathcal{R}_q^r}{\Theta^2} \cos \Theta, \quad (6.4.39)$$

$$\delta u_{\gamma q}^{\text{быстр}} = \delta u_{\nu q}^{\text{быстр}} = 4t\mathcal{R}_q^r \left( \frac{\sin \Theta}{2\Theta} + \frac{\cos \Theta}{\Theta^2} \right) \rightarrow \frac{2t\mathcal{R}_q^r}{\Theta} \sin \Theta \quad (6.4.40)$$

и

$$\delta_{\gamma q}^{\text{медл}} = \delta_{6q}^{\text{медл}} = \delta_{\nu q}^{\text{медл}} = -\frac{6\mathcal{R}_q^r}{\Theta^2}, \quad (6.4.41)$$

$$\psi_q^{\text{медл}} = -\frac{3\mathcal{R}_q^r}{t} \left( \frac{2}{\Theta^2} + 1 \right) \rightarrow -\frac{3\mathcal{R}_q^r}{t}, \quad (6.4.42)$$

$$\begin{aligned} \delta_{Dq}^{\text{медл}} &= -6\mathcal{R}_q^r \int_0^{\Theta_1} \left( \frac{2}{\vartheta^3} \sin \vartheta + \frac{2}{\vartheta^4} \cos \vartheta - \frac{2}{\vartheta^4} - \frac{1}{\vartheta^2} \right) \vartheta d\vartheta + \\ &+ 6\mathcal{R}_q^r \left( -\frac{1}{\Theta^2} + \frac{1}{\Theta_1^2} + \ln \frac{\Theta}{\Theta_1} \right) \rightarrow 6\mathcal{R}_q^r \left( -\frac{1}{2} + \gamma + \ln \Theta \right), \end{aligned} \quad (6.4.43)$$

$$\delta u_{\gamma q}^{\text{медл}} = \delta u_{\nu q}^{\text{медл}} = -\frac{4t\mathcal{R}_q^r}{\Theta^2}, \quad (6.4.44)$$

где опять  $\Theta \equiv 2qt/(\sqrt{3}a)$ ,  $\Theta_1$  является произвольной постоянной в интервале  $1 \ll \Theta_1 \ll \Theta$ , и  $\gamma = 0,5772\dots$  — это постоянная Эйлера<sup>21)</sup>.

<sup>21)</sup> Для вычисления асимптотического предела интеграла в уравнении (6.4.43) этот интеграл можно записать в виде суммы трех слагаемых, каждое из которых расходится при  $\vartheta = 0$ :

$$\int_0^{\Theta_1} \left( \frac{2}{\vartheta^3} \sin \vartheta + \frac{2}{\vartheta^4} \cos \vartheta - \frac{2}{\vartheta^4} - \frac{1}{\vartheta^2} \right) \vartheta d\vartheta = \int_0^{\Theta_1} \left( \frac{1}{\vartheta^2} \sin \vartheta + \frac{2}{\vartheta^3} \cos \vartheta - \frac{2}{\vartheta^3} \right) d\vartheta +$$

Сшивка решения в эру доминирования излучения с решением глубоко под горизонтом происходит напрямую для быстрых мод. В эру доминирования излучения, когда  $R \ll 1$ , затуханием можно пренебречь (потому что среднее время свободного пробега очень мало), и  $a \propto \sqrt{t}$ , аргумент косинуса в уравнении (6.4.37) может быть представлен в виде интеграла

$$q \int_0^t \frac{dt}{a\sqrt{3(1+R)}} \rightarrow \frac{2qt}{a\sqrt{3}} = \Theta.$$

Следовательно, линейная комбинация двух быстрых решений (6.4.26), гладко переходящих в решение (6.4.37), равна:

$$\delta_{\gamma q}^{\text{быстр}} = -\frac{3\mathcal{R}_q^\Gamma}{(1+R)^{1/4}} \exp\left(-\int_0^t \Gamma dt\right) \cos\left(\int_0^t \frac{q dt}{a\sqrt{3(1+R)}}\right). \quad (6.4.45)$$

Тогда последовательным использованием уравнений (6.4.16), (6.4.18) и (6.4.19) (опуская временную зависимость всех факторов, за исключением быстро осциллирующих синусов и косинусов), находим, что для  $q/a \gg H$ :

$$\delta u_{\gamma q}^{\text{быстр}} = \frac{a\sqrt{3}\mathcal{R}_q^\Gamma}{q(1+R)^{3/4}} \exp\left(-\int_0^t \Gamma dt\right) \sin\left(\int_0^t \frac{q dt}{a\sqrt{3(1+R)}}\right), \quad (6.4.46)$$

$$\begin{aligned} \psi_q^{\text{быстр}} &= 16\sqrt{3} \pi G \bar{\rho}_\gamma (2+R)(1+R)^{1/4} \left(\frac{a}{q}\right) \mathcal{R}_q^\Gamma \times \\ &\times \exp\left(-\int_0^t \Gamma dt\right) \sin\left(\int_0^t \frac{q dt}{a\sqrt{3(1+R)}}\right), \end{aligned} \quad (6.4.47)$$

$$\begin{aligned} \delta_{Dq}^{\text{быстр}} &= 48\pi G \bar{\rho}_\gamma (2+R)(1+R)^{3/4} \left(\frac{a}{q}\right)^2 \mathcal{R}_q^\Gamma \times \\ &\times \exp\left(-\int_0^t \Gamma dt\right) \cos\left(\int_0^t \frac{q dt}{a\sqrt{3(1+R)}}\right). \end{aligned} \quad (6.4.48)$$

Найденные решения (6.4.45)–(6.4.48) будут использоваться в разд. 8.1 при рассмотрении барионных акустических осцилляций.

---


$$+ \int_0^{\Theta_1} \left( \frac{\sin \vartheta}{\vartheta} - \frac{1}{1+\vartheta} \right) \frac{d\vartheta}{\vartheta} + \int_0^{\Theta_1} \left( \frac{1}{1+\vartheta} - 1 \right) \frac{d\vartheta}{\vartheta}.$$

При больших  $\Theta_1$  три данных интеграла стремятся соответственно к значениям  $-1/2$ ,  $1 - \gamma$  и  $-\ln \Theta_1$ , что в совокупности дает значение  $1/2 - \gamma - \ln \Theta_1$ , которое при добавлении во второй строке уравнения (6.4.43) приводит к упомянутому ранее результату.

Читатель может легко проверить, что в перекрестную эпоху, когда во Все-ленной преобладает излучение, возмущение находится глубоко под гори-зонтом и затуханием можно пренебречь, выражения (6.4.45) и (6.4.46) дают такой же ответ для  $\delta_{\gamma q}^{\text{быстро}}$  и  $\delta_{Dq}^{\text{быстро}}$ , как и выражения (6.4.37) и (6.4.40). С дру-гой стороны, решения (6.4.47) и (6.4.48) дают ответы для  $\psi_q^{\text{быстро}}$  и  $\delta_{Dq}^{\text{быстро}}$ , отличающиеся от решений (6.4.38) и (6.4.39) на фактор  $\bar{\rho}_\gamma/\bar{\rho}_i$ . Так происхо-дит потому, что при получении решений (6.4.38) и (6.4.39) на протяжении всей эры доминирования излучения нейтрино рассматривались как идеаль-ная жидкость, хотя такой подход справедлив только за горизонтом, когда анизотропной инерцией можно пренебречь, но в то же время при получении решений (6.4.47) и (6.4.48) предполагалось, что глубоко под горизонтом флуку-тации плотности нейтрино настолько подавляются анизотропной инерцией, что их можно не рассматривать в качестве источника возмущений гравита-ционного поля. Данное несоответствие — лишь небольшая плата за простоту рассмотрения этих приближений, особенно потому, как окажется позднее, что медленные вклады в  $\psi_q$  и  $\delta_{Dq}$  много больше быстрых.

Далее давайте рассмотрим медленные моды. В этом случае при сшивке решений в эру доминирования излучения и глубоко под горизонтом возникает затруднение. При получении решений (6.4.41)–(6.4.43) было предположено, что в эру доминирования излучения возмущениями плотностей барионов и темной материи в качестве источников возмущений гравитационного поля можно пренебречь, однако при изучении решений глубоко под горизонтом было обнаружено, что для медленных мод это предположение нарушается, когда отношение плотностей излучения и темной материи принимает значе-ния ниже предела (6.4.28), даже если значение этого отношения по-прежнему много больше единицы. Действительно, из решений (6.4.41) и (6.4.43) видно, что для больших  $\Theta$ ,  $\delta_{Dq}^{\text{медл}}/\delta_{\gamma q}^{\text{медл}} \rightarrow -\Theta^2 \ln \Theta$ , поэтому предположение, при котором были получены (6.4.41)–(6.4.44), перестает выполняться как толь-ко  $\Theta^2 \ln \Theta$  становится сравнимо с  $\bar{\rho}_i/\bar{\rho}_D$ , когда значение  $\bar{\rho}_\gamma/\bar{\rho}_D$  становятся меньше критического (6.4.28). Таким образом, нам следует интерполировать решения (6.4.41)–(6.4.44), справедливые в ранний период эры доминирова-ния излучения, когда  $q^2 t^2/a^2 \ll \bar{\rho}_i/\bar{\rho}_D$ , на решения в поздний период эры доминирования излучения и эры доминирования вещества, когда применимо уравнение Месароша (6.4.35).

Наиболее легко это сделать для возмущения плотности темной материи, потому что оказывается, что его зависимость от времени глубоко под гори-зонтом в эру доминирования излучения имеет тот же вид до и после того, как значение  $\bar{\rho}_i/\bar{\rho}_D$  станет меньше критического (6.4.28). До этого момента  $\delta_{Dq}^{\text{медл}}$  в эру доминирования излучения задается выражением (6.4.43). После это-го момента возмущение гравитационного поля начинает подавляться темной материей, и возмущение плотности темной материи становится линейной комбинацией решений уравнения Месароша (6.4.36), которые в эру домини-

рования излучения, когда  $y \ll 1$ , принимают вид

$$\delta_{Dq}^{(1)} \rightarrow 1, \quad \delta_{Dq}^{(2)} \rightarrow -\ln\left(\frac{y}{4}\right) - 3. \quad (6.4.49)$$

Тогда линейная комбинация этих решений, гладким образом переходящих в (6.4.43), равна

$$\delta_{Dq}^{\text{медл}} = 6\mathcal{R}_q^r \left\{ \left[ -\frac{7}{2} + \gamma + \ln\left(\frac{4q\sqrt{2}}{\sqrt{3}H_{\text{EQ}}a_{\text{EQ}}}\right) \right] \delta_{Dq}^{(1)} - \delta_{Dq}^{(2)} \right\}, \quad (6.4.50)$$

где  $H_{\text{EQ}}$  и  $a_{\text{EQ}}$  – это скорость расширения и масштабный фактор Робертсона–Уокера при балансе вещества и излучения. (Здесь мы используем  $t = 1/(2H) = y^2/(\sqrt{2}H_{\text{EQ}})$ .) Медленная часть гравитационного поля, потенциал поля скоростей для излучения и возмущения плотности излучения задаются последовательным использованием уравнений (6.4.30), (6.4.27) и (6.4.31) в следующем виде:

$$\psi_q^{\text{медл}} = -\dot{\delta}_{Dq}^{\text{медл}}, \quad (6.4.51)$$

$$\delta u_{\gamma q}^{\text{медл}} = -\left(\frac{a^2}{q^2}\right) \dot{\delta}_{Dq}^{\text{медл}}, \quad (6.4.52)$$

$$\delta_{\gamma q}^{\text{медл}} = \frac{3a}{q^2} \frac{d}{dt} \left( a(1+R) \frac{d}{dt} \delta_{Dq}^{\text{медл}} \right). \quad (6.4.53)$$

В частности, в эру доминирования излучения имеем  $y \gg 1$ ,  $\delta_{Dq}^{(1)} \rightarrow 3y/2$  и  $\delta_{Dq}^{(2)} \rightarrow 4/15y^{3/2}$ , поэтому выражения (6.4.50)–(6.4.53) принимают вид

$$\delta_{Dq}^{\text{медл}} \rightarrow \frac{9\mathcal{R}_q^r a}{a_{\text{EQ}}} \left[ -\frac{7}{2} + \gamma + \ln\left(\frac{4\kappa}{\sqrt{3}}\right) \right], \quad (6.4.54)$$

$$\psi_q^{\text{медл}} \rightarrow -\frac{6\mathcal{R}_q^r a}{a_{\text{EQ}} t} \left[ -\frac{7}{2} + \gamma + \ln\left(\frac{4\kappa}{\sqrt{3}}\right) \right], \quad (6.4.55)$$

$$\delta u_{\gamma q}^{\text{медл}} \rightarrow -\frac{6\mathcal{R}_q^r a^3}{a_{\text{EQ}} t^2 q^2} \left[ -\frac{7}{2} + \gamma + \ln\left(\frac{4\kappa}{\sqrt{3}}\right) \right], \quad (6.4.56)$$

$$\delta_{\gamma q}^{\text{медл}} \rightarrow \frac{6\mathcal{R}_q^r a^3 (1+3R)}{a_{\text{EQ}} t^2 q^2} \left[ -\frac{7}{2} + \gamma + \ln\left(\frac{4\kappa}{\sqrt{3}}\right) \right]. \quad (6.4.57)$$

Здесь мы опять ввели безразмерное перемасштабированное волновое число

$$\kappa \equiv \frac{q\sqrt{2}}{a_{\text{EQ}} H_{\text{EQ}}} = \frac{(q/a_0)\sqrt{\Omega_u}}{H_0 \Omega_m} = \frac{19,3(q/a_0) [\text{Мпк}^{-1}]}{\Omega_m h^2}, \quad (6.4.58)$$

для определения которого были использованы соотношения

$$H_{\text{EQ}} = \sqrt{2} (H_0 \sqrt{\Omega_m}) \left( \frac{a_0}{a_{\text{EQ}}} \right)^{3/2} \quad \text{и} \quad \frac{a_0}{a_{\text{EQ}}} = \frac{\Omega_m}{\Omega_u}.$$

В терминах введенного в разд. 6.2 волнового числа  $q_{\text{EQ}}$ , для которого возмущение входит под горизонт как раз при балансе вещества и излучения, получаем  $\kappa = \sqrt{2} q/q_{\text{EQ}}$ , поэтому предположение о коротких длинах волн, сделанное в этом разделе, сводится, по существу, к условию  $\kappa \gg 1$ .

Полное решение до момента рекомбинации задается сложением вкладов от быстрой и медленной мод:

$$\delta_{Dq} \rightarrow \frac{9\mathcal{R}_q^r a}{a_{\text{EQ}}} \left[ -\frac{7}{2} + \gamma + \ln \left( \frac{4\kappa}{\sqrt{3}} \right) \right] + 48\pi G \bar{\rho}_\gamma (2+R)(1+R)^{3/4} \left( \frac{a}{q} \right)^2 \mathcal{R}_q^r \times \\ \times \exp \left( - \int_0^t \Gamma dt \right) \cos \left( \int_0^t \frac{q dt}{a\sqrt{3(1+R)}} \right), \quad (6.4.59)$$

$$\psi_q \rightarrow -\frac{6\mathcal{R}_q^r a}{a_{\text{EQ}} t} \left[ -\frac{7}{2} + \gamma + \ln \left( \frac{4\kappa}{\sqrt{3}} \right) \right] + 16\sqrt{3} \pi G \bar{\rho}_\gamma (2+R)(1+R)^{1/4} \left( \frac{a}{q} \right) \mathcal{R}_q^r \times \\ \times \exp \left( - \int_0^t \Gamma dt \right) \sin \left( \int_0^t \frac{q dt}{a\sqrt{3(1+R)}} \right), \quad (6.4.60)$$

$$\delta u_{\gamma q} \rightarrow -\frac{6\mathcal{R}_q^r a^3}{a_{\text{EQ}} t q^2} \left[ -\frac{7}{2} + \gamma + \ln \left( \frac{4\kappa}{\sqrt{3}} \right) \right] + \\ + \frac{a\sqrt{3}\mathcal{R}_q^r}{q(1+R)^{3/4}} \exp \left( - \int_0^t \Gamma dt \right) \sin \left( \int_0^t \frac{q dt}{a\sqrt{3(1+R)}} \right), \quad (6.4.61)$$

$$\delta_{6q} = \delta_{\gamma q} \rightarrow \frac{6\mathcal{R}_q^r a^3 (1+3R)}{a_{\text{EQ}} t^2 q^2} \left[ -\frac{7}{2} + \gamma + \ln \left( \frac{4\kappa}{\sqrt{3}} \right) \right] - \\ - \frac{3\mathcal{R}_q^r}{(1+R)^{1/4}} \exp \left( - \int_0^t \Gamma dt \right) \cos \left( \int_0^t \frac{q dt}{a\sqrt{3(1+R)}} \right), \quad (6.4.62)$$

где  $\Gamma$  и  $\kappa$  определяются выражениями (6.4.25) и (6.4.58).

Каждое из разных возмущений (6.4.59)–(6.4.62) подавляется либо своим медленным, либо быстрым вкладом. Давайте сперва рассмотрим  $\delta_{Dq}$  и  $\psi_q$ . Сравнение решений (6.4.48) и (6.4.47) с решениями (6.4.54) и (6.4.55) показывает, что отношения быстрого и медленного вкладов в  $\delta_{Dq}$  и  $\psi_q$  следующего порядка:

$$\frac{\delta_{Dq}^{\text{быстр}}}{\delta_{Dq}^{\text{медл}}} \sim \frac{a^2 H^2}{q^2} \left( \frac{\bar{\rho}_u}{\bar{\rho}_m} \right)^2, \quad \frac{\psi_q^{\text{быстр}}}{\psi_q^{\text{медл}}} \sim \frac{aH}{q} \left( \frac{\bar{\rho}_u}{\bar{\rho}_m} \right)^2 \quad (6.4.63)$$

В этом разделе мы предполагаем, что длины волн достаточно малы, так что возмущения входят под горизонт на протяжении всей эры доминирования излучения, поэтому при балансе вещества и излучения приведенные выше

отношения много меньше единицы. Впоследствии отношение быстрого и медленного вкладов в  $\delta_{Dq}$  убывает как  $1/a^3$ , а для  $\psi_q$  это отношение убывает как  $1/a^{5/2}$ . Следовательно, выбор  $\delta_{Dq} = \delta_{Dq}^{\text{медл}}$  и  $\psi_q = \psi_q^{\text{медл}}$  на протяжении всей эры доминирования вещества является хорошим приближением. Тем не менее, поскольку быстрые вклады в (6.4.59) и (6.4.60) осцилляторно зависят от  $q$ , мы должны будем учитывать их присутствие при рассмотрении барионных акустических осцилляций в разд. 8.1.

Для вычислений анизотропий реликтового излучения нам также понадобятся  $\delta_{\gamma q}$  и  $\delta u_{\gamma q}$ . Сравнение решений (6.4.45) и (6.4.46) с решениями (6.4.57) и (6.4.56) показывает, что отношения быстрых и медленных вкладов в  $\delta_{\gamma q}$  и  $\delta u_{\gamma q}$  (помимо затухания быстрых вкладов) имеют порядок

$$\frac{\delta_{\gamma q}^{\text{быстр}}}{\delta_{\gamma q}^{\text{медл}}} \sim \frac{q^2}{a^2 H^2} \frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}_m}, \quad \frac{\delta u_{\gamma q}^{\text{быстр}}}{\delta u_{\gamma q}^{\text{медл}}} \sim \frac{q}{aH} \frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}_m}. \quad (6.4.64)$$

При попадании под горизонт данные отношения становятся много больше единицы и остаются такими до наступления баланса вещества и излучения. Затем отношение быстрых и медленных вкладов в  $\delta_{\gamma q}$  остается такого же порядка величины, в то время как для  $\delta u_{\gamma q}$  отношение быстрых и медленных вкладов убывает по закону  $1/\sqrt{a}$ . Следовательно, как только возмущение определенной длины волны возникает под горизонтом, медленный вклад в  $\delta_{\gamma q}$  становится номинально меньше быстрого вклада, а медленный вклад в  $\delta u_{\gamma q}$  становится номинально меньше быстрого вклада до наступления позднего периода эры доминирования вещества. Тем не менее, мы будем сохранять медленные вклады в дополнение к быстрым, потому что подавляющее быстрые вклады затухание на них не действует. Помимо этого, даже если медленный вклад в  $\delta_{Rq}$  относительно мал, в разд. 7.2 будет показано, что он порождает некоторый характерный эффект на графике зависимости мультипольных коэффициентов реликтового излучения  $C_\ell$  от  $\ell$ , который будет отсутствовать, если решение содержит только быстрые вклады.

## 6.5

### Скалярные возмущения — интерполяция и передаточные функции

**Точное решение для  $\bar{\rho}_6 = 0$  • Передаточные функции • Эффекты плотности и затухания для барионов**

В предыдущих двух разделах были получены аналитические решения для длин волн, достаточно больших, чтобы возникнуть под горизонтом намного позже установления баланса вещества и излучения, или достаточно коротких, чтобы возникнуть под горизонтом задолго до установления баланса вещества

и излучения. К сожалению, наш анализ не учитывает длины волн, возникающих под горизонтом примерно во время установления баланса вещества и излучения. Именно такие длины волн дают основные вклады в первый акустический пик вокруг точки  $\ell = 200$  для мультипольных коэффициентов анизотропий реликтового излучения. В этом разделе мы выясним, как получить формулы для флюктуаций, интерполирующие между решениями разд. 6.3 и 6.4, и сосредоточимся на решениях в эру доминирования вещества, которые представляют огромный наблюдательный интерес.

Можно узнать много интересного, если при построении такой интерполяции сначала рассмотреть предел ничтожно малой плотности массы барионов и ничтожно малого затухания, для которых вид решения в эру доминирования вещества может быть найден точным образом, без каких-либо ограничений на длину волны. Без учета нейтрино, уравнения для возмущений в эру доминирования вещества в этом пределе задаются для всех длин волн выражениями (6.3.17), (6.3.18), (6.3.20) и (6.3.21) при  $R = 0$ :

$$\frac{d}{dt} (t^{4/3} \psi_q) = -\frac{2}{3} t^{-2/3} \delta_{Dq}, \quad (6.5.1)$$

$$\dot{\delta}_{\gamma q} - \frac{q^2}{a^2} \delta u_{\gamma q} = -\psi_q, \quad (6.5.2)$$

$$\dot{\delta}_{Dq} = -\psi_q, \quad (6.5.3)$$

$$\frac{d}{dt} (t^{-2/3} \delta u_{\gamma q}) = -\frac{1}{3} t^{-2/3} \delta_{\gamma q}, \quad (6.5.4)$$

где  $a \propto t^{2/3}$ . У этих уравнений есть четыре независимых решения, три из которых имеют вполне простой вид.

**Решение 1:**

$$\delta_{Dq} = \frac{3q^2 t^2}{2a^2}, \quad \psi_q = -\frac{q^2 t}{a^2}, \quad \delta_{\gamma q} = 1, \quad \delta u_{\gamma q} = -t.$$

**Решение 2:**

$$\delta_{Dq} = \psi_q = 0, \quad \delta_{\gamma q} = -\cos \left( q \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{3}a} \right), \quad \delta u_{\gamma q} = \frac{a}{\sqrt{3}q} \sin \left( q \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{3}a} \right).$$

**Решение 3:**

$$\delta_{Dq} = \psi_q = 0, \quad \delta_{\gamma q} = \sin \left( q \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{3}a} \right), \quad \delta u_{\gamma q} = \frac{a}{\sqrt{3}q} \cos \left( q \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{3}a} \right).$$

Четвертое решение имеет более сложный вид; оно убывает как  $\delta_{Dq} \propto 1/t$  и  $\psi_q \propto 1/t^2$ . Как будет видно, начальные условия выполнены для линейной комбинации первых трех решений, поэтому четвертое решение здесь рассматриваться не будет.

Без потери общности можно выписать линейную комбинацию решений 1, 2 и 3, согласующуюся с решением в ранние времена, в виде, который упрощает такое согласование<sup>22)</sup>:

$$\delta_{Dq} = \frac{3q^2 t^2 \mathcal{R}_q^r \mathcal{T}(\kappa)}{10a^2}, \quad (6.5.5)$$

$$\psi_q = -\frac{3q^2 t \mathcal{R}_q^r \mathcal{T}(\kappa)}{5a^2}, \quad (6.5.6)$$

$$\delta_{\gamma q} = \delta_{\nu q} = \frac{3\mathcal{R}_q^r}{5} \left[ \mathcal{T}(\kappa) - \mathcal{S}(\kappa) \cos \left( q \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{3}a} + \Delta(\kappa) \right) \right], \quad (6.5.7)$$

$$\delta u_{\gamma q} = \delta u_{\nu q} = \frac{3t\mathcal{R}_q^r}{5} \left[ -\mathcal{T}(\kappa) + \mathcal{S}(\kappa) \frac{a}{\sqrt{3}qt} \sin \left( q \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{3}a} + \Delta(\kappa) \right) \right], \quad (6.5.8)$$

где  $\mathcal{S}(\kappa)$ ,  $\mathcal{T}(\kappa)$  и  $\Delta(\kappa)$  являются не зависящими от времени безразмерными функциями безразмерных перескоченных волновых чисел, определенных в разд. 6.2 и 6.4:

$$\kappa \equiv \frac{q\sqrt{2}}{a_{EQ} H_{EQ}} = \frac{(q/a_0)\sqrt{\Omega_i}}{H_0 \Omega_m} = \frac{19,3(q/a_0) [\text{Мпк}^{-1}]}{\Omega_m h^2}, \quad (6.5.9)$$

где  $a_{EQ}$  и  $H_{EQ}$  — это, соответственно, масштабный фактор Робертсона—Уокера и скорость расширения при балансе вещества и излучения. Они известны как *передаточные функции*.

Эти функции могут зависеть только от  $\kappa$ , потому что они должны быть независимы от нормировок пространственных координат и являются безразмерными.

Проведенное в предыдущих двух разделах разделение между длинными и короткими длинами волн может быть выражено в терминах параметра  $\kappa$ . В эпоху вещества имеем

$$t = \frac{2}{3H} = \left( \frac{2\sqrt{2}}{3H_{EQ}} \right) \left( \frac{a}{a_{EQ}} \right)^{3/2} \quad \text{и} \quad \frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}_m} = \frac{a_{EQ}}{a},$$

поэтому

$$\frac{t^2 q^2}{a^2} \frac{\bar{\rho}_i}{\bar{\rho}_m} = \frac{4\kappa^2}{9}.$$

<sup>22)</sup> С этого момента мы определяем ноль времени таким образом, чтобы в эру доминирования излучения  $a \propto t^{1/2}$ . Это определение отличается от определения нуля времени в решениях 1 и 2, в которых время определяется таким образом, чтобы в эру доминирования вещества  $a \propto t^{2/3}$ . Однако возникающее различие в интеграле  $\int_0^t dt/a$  является константой, которую можно втянуть в  $\Delta(\kappa)$ .

Следовательно,  $t^2 q^2/a^2$  много меньше или много больше  $\bar{\rho}_m/\bar{\rho}_i$ , в зависимости от того, много меньше или много больше единицы параметр  $\kappa$ .

Мы записываем линейную комбинацию решений 1, 2 и 3 в виде (6.5.5)–(6.5.8), потому что тогда у коэффициентов  $S(\kappa)$ ,  $T(\kappa)$  и  $\Delta(\kappa)$  при  $\kappa \ll 1$  получается простой вид. Для  $\bar{\rho}_6 = 0$  решения (6.3.23), (6.3.24), (6.3.35), (6.3.36), полученные ранее для умеренно больших длин волн, удовлетворяющих  $t^2 q^2/a^2 \ll \bar{\rho}_m/\bar{\rho}_i$ , или, иначе говоря, в пределе  $\kappa \ll 1$ , совместны с решениями (6.5.5)–(6.5.8), откуда следует, что в этом пределе<sup>23)</sup>

$$T(\kappa) \rightarrow 1, \quad S(\kappa) \rightarrow 1, \quad \Delta(\kappa) \rightarrow \frac{2\kappa}{\sqrt{3}}. \quad (6.5.10)$$

---

Случай экстремально больших длин волн здесь не возникает, потому что тогда требуется  $t^2 q^2/a^2 \ll R$ , а для современной эпохи мы выбираем  $R = 0$ .

---

Аналогично, для  $\bar{\rho}_6 = 0$  и  $\Gamma = 0$  решения (6.4.59)–(6.4.62) полученные ранее для коротких длин волн, удовлетворяющих  $t^2 q^2/a^2 \gg \bar{\rho}_m/\bar{\rho}_i$ , или, иначе говоря, в пределе  $\kappa \gg 1$ , совместны с решениями (6.5.5)–(6.5.8), откуда следует, что в этом пределе<sup>24)</sup>

$$T(\kappa) \rightarrow \frac{45}{2\kappa^2} \left[ -\frac{7}{2} + \gamma + \ln \left( \frac{4\kappa}{\sqrt{3}} \right) \right], \quad S(\kappa) \rightarrow 5, \quad \Delta(\kappa) \rightarrow 0. \quad (6.5.11)$$

В гл. 8 будет видно, что убывание  $T(\kappa)$  при больших  $\kappa$  очень важно для определения интенсивности флуктуаций плотности темной материи с различными длинами волн.

---

Это убывание можно понять на качественном уровне, если следовать истории развития флуктуаций плотности темной материи. Из решения (6.2.27) следует, что в ранние времена, когда во Вселенной преобладает излучение и длина волны выходит за горизонт, решение  $\delta_{Dq}$  растет как  $t$  для всех длин волн. Для  $\kappa \ll 1$  этот рост продолжается до тех пор, пока во Вселенной не начинает преобладать вещество, после чего из (6.3.13) и (6.3.23) следует, что  $\delta_{Dq}$  растет как  $t^{2/3}$ , до и после того как длина волны входит под горизонт. В противоположность

<sup>23)</sup> Предел  $2\kappa/\sqrt{3}$  для  $\Delta(\kappa)$  является разностью при  $y \equiv \bar{\rho}_m/\bar{\rho}_i$  между фазой  $\sqrt{3}qt/a = 2\kappa\sqrt{y}/\sqrt{3}$  в выражении (6.3.34) (для  $R \ll 1$ ) и фазой

$$q \int_0^t \frac{dt}{\sqrt{3}a} = \frac{2\kappa(\sqrt{1+y}-1)}{\sqrt{3}}$$

в решениях (6.5.7) и (6.5.8).

<sup>24)</sup> Этот результат для  $T(\kappa)$  приведен в работе S. Weinberg, *Astrophys. J.* **581**, 810 (2002) [astro-ph/0207375]. Тот факт, что уравнение Месароша (6.4.35) приводит к убыванию передаточных функций при большом волновом числе  $k$  по закону  $\ln(k/k^2)$  был отмечен в работе W. Hu and N. Sugiyama, *Astrophys. J.* **444**, 489 (1995).

этому, для  $\kappa \gg 1$  рост  $\delta_{Dq}$  как  $t$  продолжается только до того момента, как длина волны входит под горизонт, что в данном случае происходит в эру доминирования излучения, после чего, согласно (6.4.50),  $\delta_{Dq}$  растет по времени только логарифмически до тех пор, пока во Вселенной не наступает эра доминирования вещества, после чего, согласно (6.4.54), оно растет как  $t^{2/3}$ , точно так же, как в случае  $\kappa \ll 1$ . Конец периода линейного по  $t$  роста наступает в тот момент, когда  $q/a \approx 1/t$ , который в силу  $a \propto \sqrt{t}$  равен  $t \propto 1/q^2$ , поэтому до возникновения баланса между веществом и излучением рост пропорционален  $\ln q/q^2$ , учитывая асимптотическое поведение  $\mathcal{T}(\kappa)$ . Таким образом, малость  $\mathcal{T}(\kappa)$  при  $\kappa \gg 1$  отражает не столько убывание  $\delta_{Dq}$ , сколько неспособность  $\delta_{Dq}$  расти существенным образом в течение интервала с момента вхождения под горизонт до наступления баланса вещества и излучения.

---

Для значений  $\kappa$  порядка единицы следует найти некоторый способ связать эти два предельных случая. Это можно сделать практически «руками»; оказывается, что почти любая гладкая интерполяция между пределами  $\kappa \ll 1$  и  $\kappa \gg 1$  приводит к разумным результатам для анизотропий реликтового излучения. Для достижения большей точности нужно численно решить полную систему уравнений (6.2.9)–(6.2.15) (по-прежнему при  $\bar{\rho}_b = 0$ ) для произвольных длин волн и произвольных значений  $y \equiv \bar{\rho}_m/\bar{\rho}_i$ , потребовав выполнения начальных условий, полученных в разд. 6.1 для  $y \ll 1$ , после чего сравнить это решение для  $y \gg 1$  с решениями (6.5.5)–(6.5.8). Эти уравнения можно привести в безразмерному виду, если выбрать  $y$  в качестве независимой переменной, и записать

$$\delta_{Dq} = \kappa^2 \mathcal{R}_q^r \frac{d(y)}{4}, \quad \delta_{\gamma q} = \delta_{\nu q} = \kappa^2 \mathcal{R}_q^r \frac{r(y)}{4},$$

$$\psi_q = \frac{\kappa^2 H_{EQ}}{4\sqrt{2}} \mathcal{R}_q^r f(y), \quad \delta u_{\gamma q} = \delta u_{\nu q} = \frac{\kappa^2 \sqrt{2}}{4H_{EQ}} \mathcal{R}_q^r g(y).$$

Тогда уравнения (6.2.9)–(6.2.15) принимают вид

$$\sqrt{1+y} \frac{d}{dy} (y^2 f(y)) = -\frac{3d(y)}{2} - \frac{4r(y)}{y},$$

$$\sqrt{1+y} \frac{d}{dy} d(y) = -y f(y),$$

$$\sqrt{1+y} \frac{d}{dy} r(y) - \frac{\kappa^2}{y} g(y) = -y f(y),$$

$$\sqrt{1+y} \frac{d}{dy} \left( \frac{g(y)}{y} \right) = -\frac{1}{3} r(y).$$

В этих обозначениях начальные условия (6.2.27)–(6.2.29) имеют вид

$$d(y) \rightarrow r(y) \rightarrow y^2, \quad f(y) \rightarrow -2, \quad g(y) \rightarrow -\frac{y^4}{9}.$$

Таблица 6.1

## Скалярные передаточные функции

$\kappa$	$S$	$T$	$\Delta$	$\kappa$	$S$	$T$	$\Delta$
0,1	1,0167	0,9948	0,1207	10	3,9895	0,1608	0,3270
0,2	1,0551	0,9780	0,2240	11	4,0546	0,1440	0,3147
0,3	1,1147	0,9569	0,3156	12	4,1172	0,1298	0,2962
0,4	1,1891	0,9339	0,3852	13	4,1841	0,1178	0,2850
0,5	1,2680	0,9101	0,4423	14	4,2175	0,1075	0,2747
0,6	1,3529	0,8860	0,4800	15	4,2676	0,0985	0,2604
0,7	1,4388	0,8620	0,5148	16	4,3135	0,0907	0,2541
0,8	1,5195	0,8384	0,5336	17	4,3336	0,0838	0,2438
0,9	1,6081	0,8154	0,5531	18	4,3796	0,0777	0,2339
1,0	1,6801	0,7930	0,5637	19	4,4043	0,0723	0,2296
1,2	1,8330	0,7502	0,5784	20	4,4233	0,0675	0,2195
1,4	1,9777	0,7104	0,5854	25	4,5271	0,0496	0,1920
1,6	2,1126	0,6734	0,5842	30	4,6051	0,0383	0,1713
1,8	2,2354	0,6391	0,5782	35	4,6650	0,0305	0,1542
2,0	2,3451	0,6074	0,5700	40	4,7087	0,0249	0,1396
2,5	2,5895	0,5378	0,5537	45	4,7389	0,0209	0,1276
3,0	2,7839	0,4798	0,5334	50	4,7605	0,0177	0,1182
3,5	2,9473	0,4311	0,5094	55	4,7794	0,0153	0,1111
4,0	3,0970	0,3898	0,4854	60	4,7992	0,0134	0,1053
4,5	3,2346	0,3545	0,4659	65	4,8192	0,0118	0,0997
5,0	3,3506	0,3241	0,4509	70	4,8365	0,0105	0,0940
5,5	3,4114	0,2976	0,4367	75	4,8487	0,0094	0,0885
6,0	3,5181	0,2726	0,4203	80	4,8563	0,0084	0,0838
6,5	3,5953	0,2531	0,4029	85	4,8622	0,0077	0,0803
7,0	3,6754	0,2361	0,3884	90	4,8695	0,0070	0,0776
7,5	3,7473	0,2200	0,3782	95	4,8792	0,0064	0,0751
8,0	3,8015	0,2056	0,3695	100	4,8895	0,0059	0,0722
8,5	3,8432	0,1927	0,3590				
9,0	3,8865	0,1810	0,3465				
9,5	3,9380	0,1704	0,3350				

При вычислениях для  $y \gg 1$  численные решения этих уравнений<sup>25)</sup> сшиваются с (6.5.5)–(6.5.8) с передаточными функциями, приведенными в табл. 6.1. Анализ этой таблицы показывает, что численные решения согласуются с аналитическими (6.5.10) и (6.5.11) в пределах  $\kappa \ll 1$  и  $\kappa \gg 1$  соответственно, хотя  $\kappa$  должно быть достаточно большим до того момента, как решения выйдут на асимптотики (6.5.11).

<sup>25)</sup> Я признателен Д. Дикусу за выполнение этих численных расчетов.

Как будет видно в последующих двух главах, анизотропии реликтового излучения и корреляционная функция крупномасштабной структуры задаются интегралами, содержащими одну и более таких передаточных функций, поэтому будет полезно привести для них приближенные аналитические формулы. Д. Дикус<sup>26)</sup> нашел «формулы сшивки», которые с хорошей точностью согласуются с асимптотическими формулами (6.5.10) и (6.5.11) для  $\kappa \ll 1$  и  $\kappa \gg 1$  и в общем случае (кроме  $\Delta(\kappa)$  при больших  $\kappa$ ) согласуются с численными результатами из табл. 6.1 при промежуточном значении  $\kappa$  с погрешностью меньше 2 %:

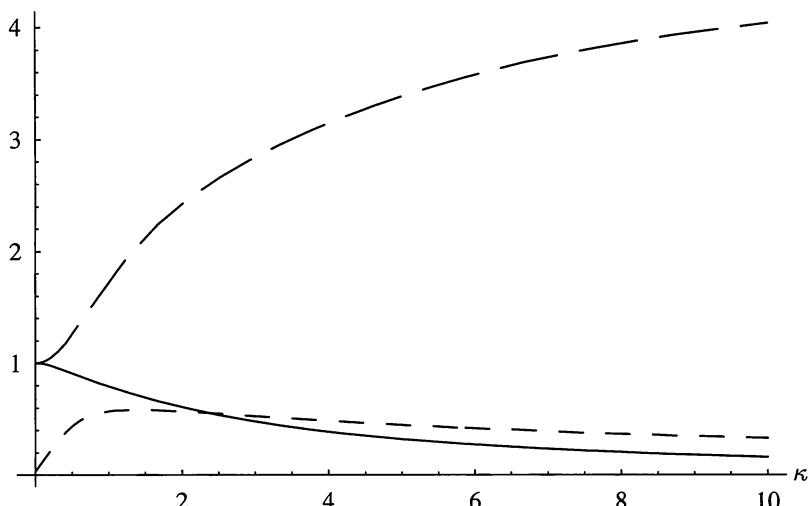
$$\mathcal{T}(\kappa) \simeq \frac{\ln[1 + (0,124\kappa)^2]}{(0,124\kappa)^2} \left[ \frac{1 + (1,257\kappa)^2 + (0,4452\kappa)^4 + (0,2197\kappa)^6}{1 + (1,606\kappa)^2 + (0,8568\kappa)^4 + (0,3927\kappa)^6} \right]^{1/2}, \quad (6.5.12)$$

$$\mathcal{S}(\kappa) \simeq \left[ \frac{1 + (1,209\kappa)^2 + (0,5116\kappa)^4 + 5^{1/2}(0,1657\kappa)^6}{1 + (0,9459\kappa)^2 + (0,4249\kappa)^4 + (0,1657\kappa)^6} \right]^2, \quad (6.5.13)$$

$$\Delta(\kappa) = \frac{(0,1547\kappa)^2 + (0,5986\kappa)^4 + (0,2578\kappa)^6}{1 + (1,723\kappa)^2 + (0,8707\kappa)^4 + (0,4581\kappa)^6 + (0,2204\kappa)^8}. \quad (6.5.14)$$

Эти передаточные функции показаны на рис. 6.1. Формула сшивки для  $\mathcal{T}(\kappa)$ , которая включает эффекты нейтринной анизотропной инерции и согласуется

Передаточная функция



**Рис. 6.1.** Передаточные функции  $\mathcal{T}(\kappa)$  (сплошная кривая),  $\mathcal{S}(\kappa)$  (кривая длинным пунктиром),  $\Delta(\kappa)$  (кривая коротким пунктиром) как функции от перескальбированного волнового числа  $\kappa$

<sup>26)</sup> D. Dicus, частное сообщение.

с численными результатами CAMB, приводится Эйзенштейном и Ху<sup>27)</sup>. Поскольку нейтринная анизотропная инерция не учитывается, результаты для функции  $\mathcal{T}(\kappa)$ , задаваемой (6.5.12) и табл. 6.1, отличаются примерно на 4 %.

Теперь следует рассмотреть, как учсть затухание и ненулевое отношение плотности барионов к плотности фотонов. Решения (6.3.23), (6.3.24) и (6.4.59), (6.4.60) показывают, что в пределах либо коротких, либо длинных волн барионы и затухание не влияют на основные вклады в  $\delta_{Dq}$  и  $\psi_q$ , поэтому в ведущем порядке можно просто воспользоваться решениями (6.5.5) и (6.5.6):

$$\delta_{Dq} = \frac{9q^2 t^2 \mathcal{R}_q^r \mathcal{T}(\kappa)}{10a^2}, \quad (6.5.15)$$

$$\psi_q = -\frac{3q^2 t \mathcal{R}_q^r \mathcal{T}(\kappa)}{5a^2}. \quad (6.5.16)$$

Затухание влияет на коротковолновые решения (6.4.61) и (6.4.62) для  $\delta u_{\gamma q}$  и  $\delta_{\gamma q}$  посредством умножения синусов и косинусов на фактор  $\exp(-\int_0^t \Gamma dt)$ . Эта экспонента отсутствует в длинноволновых решениях (6.3.36) и (6.3.35), однако в любом случае, для длинных волн она преимущественно равна единице, потому что  $\Gamma \propto q^2$ . Следовательно, для всех длин волн затухание можно учитывать с помощью простого умножения синусов и косинусов в (6.5.7) и (6.5.8) на  $\exp(-\int_0^t \Gamma dt)$ . Окончательно, для коротковолновых решений (6.4.62) и (6.4.61) и для длинноволновых решений (6.3.35) и (6.3.36), эффект от ненулевой плотности барионов сводится к умножению неосцилляторного вклада в  $\delta_{\gamma q}$  на  $1 + 3R$ , умножению косинуса в  $\delta_{\gamma q}$  на  $(1 + R)^{-1/4}$  и умножению синуса в  $\delta u_{\gamma q}$  на  $(1 + R)^{-3/4}$ , поэтому весьма правдоподобно, что конечное отношение плотностей барионов и фотонов можно учсть при любых длинах волн с помощью таких же операций в выражениях (6.5.7) и (6.5.8):

$$\delta_{\gamma q} = \delta_{6q} = \frac{3\mathcal{R}_q^r}{5} \left[ \mathcal{T}(\kappa)(1 + 3R) - (1 + R)^{-1/4} \times \right. \\ \left. \times \exp \left( - \int_0^t \Gamma dt \right) \mathcal{S}(\kappa) \cos \left( \int_0^t \frac{q dt}{a \sqrt{3(1 + R)}} + \Delta(\kappa) \right) \right], \quad (6.5.17)$$

$$\delta u_{\gamma q} = \delta_{6q} = \frac{3\mathcal{R}_q^r}{5} \left[ -t\mathcal{T}(\kappa) + \frac{a}{\sqrt{3} q(1 + R)^{3/4}} \times \right. \\ \left. \times \exp \left( - \int_0^t \Gamma dt \right) \mathcal{S}(\kappa) \sin \left( \int_0^t \frac{q dt}{a \sqrt{3(1 + R)}} + \Delta(\kappa) \right) \right]. \quad (6.5.18)$$

<sup>27)</sup> D. J. Eisenstein and W. Hu, *Astrophys. J.* **496**, 605 (1998).

Повторим еще раз: эти решения согласуются с решениями разд. 6.4 в коротковолновом режиме, они согласуются с решениями разд. 6.3 в длинноволновом режиме (для которого  $\Gamma$  пренебрежимо мало) и согласуются с решениями, найденными в этом разделе для всех длин волн в том случае, когда затуханием и плотностью барионов можно пренебречь.

Следует чуть более подробно обсудить функцию  $\mathcal{T}(\kappa)$ , ведь именно она широко известна как передаточная функция. Обычно ее записывают в виде функции от переменной  $Q$ :

$$Q \equiv \frac{q}{a_0} \times \frac{1 \text{ Мпк}}{\Omega_m h^2}, \quad (6.5.19)$$

согласно определению (6.5.9), это тоже самое, что  $\kappa/19,3$ . В этих терминах асимптотики (6.5.10) и (6.5.11) для  $\mathcal{T}(\kappa)$  принимают вид

$$\mathcal{T}(\kappa) \rightarrow \begin{cases} 1, & Q \rightarrow 0; \\ \frac{\ln(2,40Q)}{(4,07Q)^2}, & Q \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (6.5.20)$$

Численное решение уравнений для роста флуктуаций плотности темной материи описывалось при больших  $Q$  формулой<sup>28)</sup>

$$\mathcal{T}_{\text{BBKS}}(\kappa) \simeq \frac{\ln(1 + 2,34Q)}{2,34Q} [1 + 3,89Q + (16,1Q)^2 + (5,46Q)^3 + (6,71Q)^4]^{-1/4}. \quad (6.5.21)$$

При больших  $Q$  эта функция стремится к  $\ln(2,34Q)/(3,96Q)^2$ , что находится в прекрасном согласии с аналитическим решением (6.5.20). Однако следует заметить, что хотя передаточная функция BBKS (6.5.21) правильно нормируется при  $Q = 0$ , она плохо описывает поведение передаточной функции при  $Q \ll 1$ . Разложение в степенной ряд формулы (6.5.21) содержит нечетные и четные слагаемые по  $Q$ , что противоречит требованию того, чтобы эта функция была аналитической функцией 3-вектора  $\mathbf{q}$ . Формула сшивки Дикуса (6.5.12) была построена исходя из требования аналитичности по 3-векторной переменной  $\mathbf{q}$  в точке  $\mathbf{q} = 0$  и фактически согласуется с численными значениями из табл. 6.1 лучше, чем передаточная функция BBKS (6.5.21). В нашем анализе анизотропий реликтового излучения вместо формулы (6.5.21) мы будем использовать формулу сшивки (6.5.12).

Все описанное выше имело место для  $\beta \equiv \bar{\rho}_b/\bar{\rho}_m \ll 1$ , хотя мы учли достаточно заметное отношение  $R = 3\bar{\rho}_b/(4\bar{\rho}_\gamma)$ . Поправки в передаточную функцию при конечных значениях  $\beta$  составляют примерно 10 %; они были найдены аналитически<sup>29)</sup> для  $\kappa \gg 1$  в нижнем порядке по  $\beta$  и численно<sup>30)</sup> для произ-

<sup>28)</sup> J. M. Bardeen, J. R. Bond, N. Kaiser, & A. S. Szalay, *Astrophys. J.* **304**, 15 (1986).

<sup>29)</sup> S. Weinberg, сноска 23.

<sup>30)</sup> J. A. Holtzman, *Astrophys. J. Suppl.* **71**, 1 (1989).

вольного  $\kappa$  и избранных значений  $\beta$  во всех порядках по  $\beta$ . При использовании передаточной функции в вычислениях крупномасштабной структуры, как правило, используют некоторую простую модификацию формулы сшивки. Пикок и Доддс<sup>31)</sup> предположили, что на самом деле эта же формула сшивки может также быть использована при конечной плотности барионов, но при этом

$$\kappa = \frac{k\sqrt{\Omega_i}}{H_0\Omega_m} \exp(\Omega_b).$$

Это хорошо сработало для ограниченного диапазона изучаемых космологических параметров, однако передаточная функция физически не может иметь подобную зависимость от  $\Omega_b$ . Физические процессы в течение эры доминирования излучения, которые определяют передаточную функцию, ничего не могут знать о времени, в котором нам приходится измерять такие космологические параметры, как  $\rho_m$ . Помимо  $\kappa$ , передаточная функция может зависеть только от величин типа  $\beta \equiv \bar{\rho}_b/\bar{\rho}_m = \Omega_b/\Omega_m$ , которая является постоянной, или от  $\Omega_m h^2$ , которая (для известной в настоящее время температуры излучения) сообщает нам значение плотности вещества при любой заданной температуре. Действительно, Сугияма<sup>32)</sup> обратил внимание на то, что поправочный фактор  $\exp(\Omega_b)$  действительно хорошо работает только для значений  $\Omega_m$ , близких к единице. В качестве альтернативы, применимой при меньших значениях  $\Omega_m$ , он предложил поправочный фактор  $\exp(\Omega_b + \Omega_b/\Omega_m)$ , который физически невозможен по той же причине, что и  $\exp(\Omega_b)$ . Другая трудность со всеми этими предложениями состоит в том, что барионная поправка обязана исчезать для малых волновых чисел, потому что в этом случае давление пренебрежимо мало, и барионы ведут себя подобно холодной темной материи. Удовлетворяющая всем этим физическим критериям барионная поправка была предложена Эйзенштейном и Ху (см. сноску 27): передаточная функция вычисляется при  $\kappa$ , выбранном в виде

$$\kappa = \left( \frac{k\sqrt{\Omega_i}}{H_0\Omega_m} \right) \left[ \alpha + \frac{1-\alpha}{1+(0,43ks)^4} \right]^{-1}, \quad (6.5.22)$$

где

$$\alpha = 1 - 0,328 \ln(431\Omega_m h^2) \beta + 0,38 \ln(22,3\Omega_m h^2) \beta^2$$

и  $s$  задает акустический горизонт в момент времени  $t = t_{\text{п. р.}}$  последнего рассеяния, спроектированный (как и  $k$ ) в настоящее время:

$$s \equiv a(t_0) \int_0^{t_L} \frac{v_s dt}{a(t)} = (1 + z_{\text{п. р.}}) d_H,$$

где  $d_H$  задается выражением (2.6.32).

<sup>31)</sup> J. A. Peacock and S. J. Dodds, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **267**, 1020 (1994).

<sup>32)</sup> N. Sugiyama, *Astrophys. J.* **100**, 281 (1995).

---

6.6**Тензорные возмущения**

**Уравнения гравитационного поля • Уравнения Больцмана для фотонов • Функции источника для фотонов • Анизотропная инерция фотонов • Решение для фотонов на линии прямой видимости • Уравнения Больцмана для нейтрино • Анизотропная инерция для нейтрино • Решения для нейтрино на линии прямой видимости • Эволюция без затухания • Передаточные функции • Влияние затухания**

Теперь обратимся к тензорным модам. Их изучение значительно проще, чем изучение скалярных мод, поэтому если анализ скалярных мод занимает пять разделов, то аналогичное рассмотрение в случае тензорных мод займет всего один. Так же как в случае скалярных мод, начнем с того, что выпишем полный набор уравнений, которые используются в таких компьютерных программах, как CMBfast, после чего перейдем к приближенным вычислениям.

**A. Холодная темная материя и барионная плазма**

Как ранее упоминалось, частицы холодной материи и барионной плазмы движутся слишком медленно, чтобы давать вклад в анизотропную инерцию. В тензорных модах нет возмущений плотностей или потоковых скоростей, поэтому требующие изучения возмущения холодной темной материи или барионной плазмы отсутствуют.

**B. Гравитация**

Согласно обсуждению в разд. 5.1, гравитационное возмущение в тензорных модах принимает вид:

$$\delta g_{ij}(\mathbf{x}, t) = a^2 D_{ij}(\mathbf{x}, t), \quad (6.6.1)$$

где  $D_{ij}(\mathbf{x}, t)$  удовлетворяет волновому уравнению (5.1.53):

$$\ddot{D}_{ij} + 3H\dot{D}_{ij} - a^{-2}\nabla^2 D_{ij} = 16\pi G\pi_{ij}^T, \quad (6.6.2)$$

а также условиям бесследовости и поперечности

$$D_{ii} = 0, \quad \partial_i D_{ij} = 0. \quad (6.6.3)$$

В дальнейшем станет видно, что тензор анизотропной инерции  $\pi_{ij}^T$  является линейным функционалом  $\dot{D}_{ij}$ , поэтому уравнение (6.6.2) имеет два независимых решения. В течение того периода, когда возмущение находится за горизонтом, тензором анизотропной инерции  $\pi_{ij}^T$  и слагаемым  $a^{-2}\nabla^2 D_{ij}$  можно пренебречь, так что уравнение (6.6.2) принимает вид

$$\ddot{D}_{ij} + 3H\dot{D}_{ij} = 0.$$

Следовательно, одно из решений за горизонтом является постоянным, а второе убывает как интеграл  $\int a^{-3} dt$ , который в эру доминирования излучения

изменяется как  $t^{-1/2}$ . Для всех интересных волновых чисел возмущение остается за горизонтом в течение многих  $e$ -кратностей космического расширения, поэтому затухающая мода становится пренебрежимо мала и можно ограничиться рассмотрением только второй моды. Тем самым, возмущение метрики и тензор анизотропной инерции можно представить в виде

$$D_{ij}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\lambda=\pm 2} \int d^3 q e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \beta(\mathbf{q}, \lambda) e_{ij}(\hat{q}, \lambda) \mathcal{D}_q(t), \quad (6.6.4)$$

$$\pi_{ij}^T(\mathbf{x}, t) = \sum_{\lambda=\pm 2} \int d^3 q e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \beta(\mathbf{q}, \lambda) e_{ij}(\hat{q}, \lambda) \pi_q^T(t), \quad (6.6.5)$$

где  $\beta(\mathbf{q}, \lambda)$  — это стохастический параметр единственной незатухающей моды с волновым числом  $\mathbf{q}$  и спиральностью  $\lambda$ ;  $e_{ij}(\hat{q}, \lambda)$  — это соответствующий тензор поляризации, определенный в разд. 5.2, удовлетворяющий условиям  $e_{ii} = q_i e_{ij} = 0$ ; величина  $D_q(t)$  является решением волнового уравнения

$$\ddot{\mathcal{D}}_q + 3H\dot{\mathcal{D}}_q + a^{-2}q^2\mathcal{D}_q = 16\pi G\pi_q^T. \quad (6.6.6)$$

Позже мы вернемся к решению данного уравнения.

### C. Фотоны

Уравнение Больцмана для возмущения фотонной матрицы плотности  $\delta n_\gamma^{ij}(\mathbf{x}, t)$  в тензорной моде задается уравнением (H.35) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \delta n_\gamma^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} + \frac{\hat{p}_k}{a(t)} \frac{\partial \delta n_\gamma^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{\partial x^k} + \frac{2\dot{a}(t)}{a(t)} \delta n_\gamma^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - \\ & - \frac{1}{4a^2(t)} p \bar{n}'_\gamma(p) \hat{p}_k \hat{p}_l \dot{D}_{kl}(\mathbf{x}, t) (\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) = -\omega_c(t) \delta n_\gamma^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \\ & + \frac{3\omega_c(t)}{8\pi} \int d^2 \hat{p}_1 \left[ \delta n_\gamma^{ij}(\mathbf{x}, p \hat{p}_1, t) - \hat{p}_i \hat{p}_k \delta n_\gamma^{kj}(\mathbf{x}, p \hat{p}_1, t) - \right. \\ & \left. - \hat{p}_j \hat{p}_k \delta n_\gamma^{ik}(\mathbf{x}, p \hat{p}_1, t) + \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}_k \hat{p}_l \delta n_\gamma^{kl}(\mathbf{x}, p \hat{p}_1, t) \right], \end{aligned} \quad (6.6.7)$$

в котором мы воспользовались выражением (6.6.1) для возмущения метрики. Как и в случае скалярных мод, вместо  $\delta n_\gamma^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  сосредоточимся на матрице относительных интенсивностей, определенной по аналогии с выражением (6.1.13):

$$a^4(t) \bar{\rho}_\gamma(t) J_{ij}(\mathbf{x}, \hat{p}, t) \equiv a^2(t) \int_0^\infty \delta n_\gamma^{ij}(\mathbf{x}, p \hat{p}, t) 4\pi p^3 dp. \quad (6.6.8)$$

Будем искать решение в виде

$$J_{ij}(\mathbf{x}, \hat{p}, t) = \sum_{\lambda=\pm 2} \int d^3 q e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \beta(\mathbf{q}, \lambda) J_{ij}(\mathbf{q}, \hat{p}, t, \lambda). \quad (6.6.9)$$

Тогда уравнение Больцмана (6.6.7) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{ij}(\mathbf{q}, \hat{p}, t, \lambda)}{\partial t} + i \frac{\mathbf{q} \cdot \hat{p}}{a(t)} J_{ij}(\mathbf{q}, \hat{p}, t, \lambda) + \hat{p}_k \hat{p}_l e_{kl}(\hat{q}, \lambda) \dot{\mathcal{D}}_q(t) (\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) = \\ = -\omega_c(t) J_{ij}(\mathbf{q}, \hat{p}, t, \lambda) + \frac{3\omega_c(t)}{2} \left[ \mathcal{J}_{ij}(\mathbf{q}, t, \lambda) - \hat{p}_i \hat{p}_k \mathcal{J}_{kj}(\mathbf{q}, t, \lambda) - \right. \\ \left. - \hat{p}_j \hat{p}_k \mathcal{J}_{ik}(\mathbf{q}, t, \lambda) + \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}_k \hat{p}_l \mathcal{J}_{kl}(\mathbf{q}, t, \lambda) \right], \end{aligned} \quad (6.6.10)$$

где

$$\mathcal{J}_{ij}(\mathbf{q}, t, \lambda) \equiv \int \frac{d^2 \hat{p}}{4\pi} J_{ij}(\mathbf{q}, \hat{p}, t, \lambda). \quad (6.6.11)$$

Более того, поскольку  $J_{ij}(\mathbf{q}, \hat{p}, t, \lambda)$  для заданной спиральности должно быть линейной комбинацией компонент тензора поляризации  $e_{kl}(\hat{q}, \lambda)$  с одинаковыми  $\lambda$ , а  $\hat{q}_k e_{kl}(\hat{q}, \lambda)$  и  $e_{kk}(\hat{q}, \lambda)$  оба обращаются в ноль, единственный возможный вид  $\mathcal{J}_{ij}(\mathbf{q}, t, \lambda)$ , допускаемый вращательной инвариантностью, это  $e_{ij}(\hat{q}, \lambda)$ , умноженный на некоторую функцию от  $q \equiv |\mathbf{q}|$  и  $t$ . Обычно это соотношение записывается как

$$\mathcal{J}_{ij}(\mathbf{q}, t, \lambda) = -\frac{2}{3} e_{ij}(\hat{q}, \lambda) \Psi(q, t). \quad (6.6.12)$$

Наличие вращательной инвариантности позволяет записать возмущение матрицы интенсивностей в виде

$$\begin{aligned} J_{ij}(\mathbf{q}, \hat{p}, t, \lambda) = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) \hat{p}_k \hat{p}_l e_{kl}(\hat{q}, \lambda) \left( \Delta_T^{(T)}(q, \hat{p} \cdot \hat{q}, t) + \Delta_P^{(T)}(q, \hat{p} \cdot \hat{q}, t) \right) + \\ + \left( e_{ij}(\hat{q}, \lambda) - \hat{p}_i \hat{p}_k e_{kj}(\hat{q}, \lambda) - \hat{p}_j \hat{p}_k e_{ik}(\hat{q}, \lambda) + \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}_k \hat{p}_l e_{kl}(\hat{q}, \lambda) \right) \Delta_P^{(T)}(q, \hat{p} \cdot \hat{q}, t). \end{aligned} \quad (6.6.13)$$

---

Здесь верхний индекс  $T$  обозначает «тензор», а нижний индекс обозначает «температура». Коэффициенты выбраны таким образом, чтобы  $J_{ii}$  было пропорционально  $\Delta_T$ , а поляризация пропорциональна  $\Delta_P$ .

---

Третий член, пропорциональный  $(\hat{q}_i - \hat{p}_i(\hat{p} \cdot \hat{q}))(\hat{q}_j - \hat{p}_j(\hat{p} \cdot \hat{q})) \hat{p}_k \hat{p}_l e_{kl}$ , не противоречит симметрийным принципам, однако томсоновское рассеяние не приводит к такому вкладу в уравнении Больцмана. Подстановка выражения (6.6.13) в уравнение (6.6.10) приводит к отдельным уравнениям Больцмана для  $\Delta_T^{(T)}$  и  $\Delta_P^{(T)}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_T^{(T)}(q, \mu, t) + i a^{-1}(t) q \mu \Delta_T^{(T)}(q, \mu, t) = -2 \dot{\mathcal{D}}_q(t) - \omega_c(t) \Delta_T^{(T)}(q, \mu, t) + \omega_c(t) \Psi(q, t), \quad (6.6.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta_P^{(T)}(q, \mu, t) + i a^{-1}(t) q \mu \Delta_P^{(T)}(q, \mu, t) = -\omega_c(t) \Delta_P^{(T)}(q, \mu, t) - \omega_c(t) \Psi(q, t). \quad (6.6.15)$$

Функции  $\Delta_T^{(T)}$  и  $\Delta_P^{(T)}$  можно разложить по полиномам Лежандра:

$$\Delta_T^{(T)}(q, \hat{p} \cdot \hat{q}, t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{-\ell} (2\ell + 1) P_\ell(\hat{q} \cdot \hat{p}) \Delta_{T,\ell}^{(T)}(q, t), \quad (6.6.16)$$

$$\Delta_P^{(T)}(q, \hat{p} \cdot \hat{q}, t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{-\ell} (2\ell + 1) P_\ell(\hat{q} \cdot \hat{p}) \Delta_{P,\ell}^{(T)}(q, t). \quad (6.6.17)$$

Воспользовавшись известным рекуррентным соотношением

$$z P_\ell(z) = \frac{\ell + 1}{2\ell + 1} P_{\ell+1}(z) + \frac{\ell}{2\ell + 1} P_{\ell-1}(z),$$

находим, что теперь уравнения Больцмана (6.6.14) и (6.6.15) сводятся к виду

$$\dot{\Delta}_{T,\ell}^{(T)} + \frac{q}{a(2\ell + 1)} \left( (\ell + 1) \Delta_{T,\ell+1}^{(T)} - \ell \Delta_{T,\ell-1}^{(T)} \right) = (-2\dot{D}_q + \omega_c \Psi) \delta_{\ell,0} - \omega_c \Delta_{T,\ell}^{(T)}, \quad (6.6.18)$$

$$\dot{\Delta}_{P,\ell}^{(T)} + \frac{q}{a(2\ell + 1)} \left( (\ell + 1) \Delta_{P,\ell+1}^{(T)} - \ell \Delta_{P,\ell-1}^{(T)} \right) = -\omega_c \Psi \delta_{\ell,0} - \omega_c \Delta_{P,\ell}^{(T)}. \quad (6.6.19)$$

Чтобы вычислить вклад с источником  $\Psi(q, t)$  в терминах парциальных волн, сначала интегрируем выражение (6.6.13) по  $\hat{p}$ , используя при этом формулы

$$\int d^2 \hat{p} f(\hat{p} \cdot \hat{q}) \hat{p}_i \hat{p}_k e_{jk}(\hat{q}) = \frac{1}{2} e_{ij}(\hat{q}) \int d^2 \hat{p} f(\hat{p} \cdot \hat{q}) (1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2),$$

$$\int d^2 \hat{p} f(\hat{p} \cdot \hat{q}) \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}_k \hat{p}_l e_{kl}(\hat{q}) = \frac{1}{4} e_{ij}(\hat{q}) \int d^2 \hat{p} f(\hat{p} \cdot \hat{q}) (1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2)^2,$$

где  $f$  — произвольная функция от  $(\hat{p} \cdot \hat{q})$ , а  $e_{ij}$  — произвольная симметричная бесследовая матричная функция от  $\hat{q}$ , удовлетворяющая условию  $\hat{q}_i e_{ij} = 0$  и  $e_{ii} = 0$ . В результате, возникающий интеграл записывается в виде

$$\begin{aligned} \Psi(q, t) = & -\frac{3}{2} \int \frac{d^2 \hat{p}}{4\pi} \left\{ -\frac{1}{8} (1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2)^2 \Delta_T^{(T)}(q, \hat{p} \cdot \hat{q}, t) + \right. \\ & \left. + \left[ (\hat{p} \cdot \hat{q})^2 + \frac{1}{8} (1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2)^2 \right] \Delta_P^{(T)}(q, \hat{p} \cdot \hat{q}, t) \right\}. \end{aligned} \quad (6.6.20)$$

Тогда подставляя парциальные разложения (6.6.16) и (6.6.17), получаем<sup>33)</sup>:

$$\begin{aligned} \Psi(q, t) = & \frac{1}{10} \Delta_{T,0}^{(T)}(q, t) + \frac{1}{7} \Delta_{T,2}^{(T)}(q, t) + \frac{3}{70} \Delta_{T,4}^{(T)}(q, t) - \frac{3}{5} \Delta_{P,0}^{(T)}(q, t) + \\ & + \frac{6}{7} \Delta_{P,2}^{(T)}(q, t) - \frac{3}{70} \Delta_{P,4}^{(T)}(q, t). \end{aligned} \quad (6.6.21)$$

<sup>33)</sup> R. Crittenden, J. R. Bond, R. L. Davis, G. Efstathiou, and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 324 (1993) [astro-ph/9303014].

Таким образом, уравнения (6.6.18) и (6.6.19) образуют замкнутую систему линейных уравнений для парциальных амплитуд, порождаемых заданным возмущением  $D_q(t)$  гравитационного поля. Разумеется, чтобы решить эту систему, следует обрезать парциальное разложение на некотором максимуме  $\ell$ .

Искомое решение интересно само по себе, потому что мы умеем измерять анизотропии реликтового излучения. Разработанный здесь метод будет применен к изучению этих анизотропий в гл. 7. Такое решение также требуется при вычислении тензора анизотропной инерции. В тензорных модах единственный отличный от нуля вклад фотонов в тензор энергии-импульса происходит в компоненту пространство-пространство (6.1.10):

$$\begin{aligned} \delta T_{\gamma j}^i(\mathbf{x}, t) &= a^{-4}(t) \int d^3 p \, a^2(t) \delta n^{kk}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) p \hat{p}_i \hat{p}_j = \\ &= \bar{\rho}_\gamma(t) \sum_\lambda \int d^3 q \, \beta(\mathbf{q}, \lambda) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \int \frac{d^2 \hat{p}}{4\pi} J_{kk}(\mathbf{q}, \hat{p}, t, \lambda) \hat{p}_i \hat{p}_j = \\ &= \bar{\rho}_\gamma(t) \sum_\lambda \int d^3 q \, \beta(\mathbf{q}, \lambda) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} e_{kl}(\hat{q}, \lambda) \int \frac{d^2 \hat{p}}{4\pi} \Delta_T^{(T)}(q, \hat{p} \cdot \hat{q}, t) \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}_k \hat{p}_l = \\ &= \bar{\rho}_\gamma(t) \sum_\lambda \int d^3 q \, \beta(\mathbf{q}, \lambda) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} e_{ij}(\hat{q}, \lambda) \frac{1}{4} \int \frac{d^2 \hat{p}}{4\pi} \Delta_T^{(T)}(q, \hat{p} \cdot \hat{q}, t) (1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2)^2. \end{aligned} \quad (6.6.22)$$

Возмущение давления для тензорных мод отсутствует, поэтому согласно соотношениям (5.1.43), это выражение совпадает с тензором анизотропной инерции  $\pi_{ij}^T(\mathbf{x}, t)$ . Таким образом, сравнение уравнений (6.6.22) и (6.6.5) дает

$$\begin{aligned} \pi_{\gamma q}^T(t) &= \frac{\bar{\rho}_\gamma(t)}{4} \int \frac{d^2 \hat{p}}{4\pi} \Delta_T^{(T)}(q, \hat{p} \cdot \hat{q}, t) (1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2)^2 = \\ &= 2\bar{\rho}_\gamma(t) \left( \frac{1}{15} \Delta_{T,0}^{(T)}(q, t) + \frac{2}{21} \Delta_{T,2}^{(T)}(q, t) + \frac{1}{35} \Delta_{T,4}^{(T)}(q, t) \right). \end{aligned} \quad (6.6.23)$$

Наш опыт подсказывает, что для аккуратного вычисления парциальных амплитуд вплоть до  $\ell = 4$ , возникающих в уравнениях (6.6.21) и (6.6.23), необходимо решить уравнения Больцмана для парциальных амплитуд с еще большими значениями  $\ell$ , вплоть до  $\ell = 10$ . Вычислив таким образом  $\Psi$ , можно вычислить  $J_{ij}(\mathbf{q}, \hat{p}, t, \lambda)$  для очень больших значений  $\ell$  с помощью решения методом пристального всматривания уравнения (6.6.10):

$$J_{ij}(\mathbf{q}, \hat{p}, t, \lambda) = \int_{t_1}^t dt' \exp \left( -i\mathbf{q} \cdot \hat{p} \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} - \int_{t'}^t dt'' \omega_c(t'') \right) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \left[ -\hat{p}_k \hat{p}_l (\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) e_{kl}(\hat{q}, \lambda) \dot{\mathcal{D}}(t') - \omega_c(t') \Psi(q, t') \times \right. \\ & \left. \times (e_{ij}(\hat{q}, \lambda) - \hat{p}_i \hat{p}_k e_{kj}(\hat{q}, \lambda) - \hat{p}_j \hat{p}_k e_{ik}(\hat{q}, \lambda) + \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}_k \hat{p}_l e_{kl}(\hat{q}, \lambda)) \right], \quad (6.6.24) \end{aligned}$$

где  $t_1$  — это произвольный момент времени, достаточно далеко отстоящий от начала рекомбинации, так что  $\omega_c(t_1) \gg H(t_1)$ , что позволяет нам отбросить пропорциональный  $J_{ij}(\mathbf{q}, \hat{p}, t_{1,\lambda})$  вклад. В терминах амплитуд температуры и поляризации, задаваемых разложением (6.6.13), интегралы от полученных выше решений принимают вид

$$\Delta_T^{(T)}(q, \mu, t) = -\Delta_P^{(T)}(q, \mu, t) - 2 \int_{t_1}^t dt' \exp \left( -iq\mu \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} - \int_{t'}^t \omega_c(t'') dt'' \right) \dot{\mathcal{D}}_q(t'), \quad (6.6.25)$$

$$\Delta_P^{(T)}(q, \mu, t) = - \int_{t_1}^t dt' \exp \left( -iq\mu \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} - \int_{t'}^t \omega_c(t'') dt'' \right) \omega_c(t') \Psi(q, t'). \quad (6.6.26)$$

Данные интегралы также являются альтернативой использования обрезанных парциальных разложений<sup>34)</sup>. Простым аналитическим интегрированием выражения (6.6.24) по  $\hat{p}$  можно получить интегральное уравнение на  $\Psi(q, t)$ . Приравнивая коэффициенты при  $e_{ij}$  в обоих частях, получаем интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \Psi(q, t) = & \frac{3}{2} \int_{t_1}^t \exp \left( - \int_{t'}^t \omega_c(t'') dt'' \right) \times \\ & \times \left[ -2 \dot{\mathcal{D}}_q(t') K \left( q \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} \right) + \omega_c(t') F \left( q \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} \right) \Psi(q, t) \right], \quad (6.6.27) \end{aligned}$$

где  $K(v)$  и  $F(v)$  — это следующие функции:

$$K(v) \equiv \frac{j_2(v)}{v^2}, \quad F(v) \equiv j_0 - \frac{2j_1(v)}{v} + \frac{2j_2(v)}{v^2}. \quad (6.6.28)$$

Выражение (6.6.27) можно успешно решить либо последовательными итерациями, либо численными методами, подходящими для решения уравнений типа Вольтерра. Если найти таким способом  $\Psi(q, t)$ , то полная фотонная матрица интенсивностей может быть получена численным интегрированием в уравнении (6.6.24).

<sup>34)</sup> S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **74**, 063517 (2006) [astro-ph/0607076]; D. Baskaran, L. P. Grishchuk, and A. G. Polnarev, *Phys. Rev. D* **74**, 083008 (2006) [gr-qc/0605100].

### D. Нейтрино

Уравнение Больцмана для возмущения  $\delta n_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  фазовой плотности нейтрино задается уравнением (H.14) в виде

$$\frac{\partial \delta n_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} + \frac{\hat{p}_i}{a(t)} \frac{\partial \delta n_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{\partial x^i} = \frac{p \bar{n}'(p)}{2} \hat{p}_i \hat{p}_j \dot{D}_{ij}(\mathbf{x}, t), \quad (6.6.29)$$

где мы воспользовались выражением (6.6.1) для возмущения метрики. Так же как в случае скалярных мод, вместо  $\delta n_\nu$  удобнее оперировать с безразмерным возмущением интенсивности  $J$ , определяемым аналогом выражения (6.1.42):

$$a^4(t) \bar{\rho}_\nu(t) J(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t) \equiv N_\nu \int_0^\infty \delta n_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) 4\pi p^3 dp, \quad (6.6.30)$$

где  $N_\nu$  — это число типов нейтрино, подсчет антинейтрино происходит отдельно, а  $\bar{\rho}_\nu \equiv N_\nu a^{-4} \int 4\pi p^3 \bar{n}_\nu(p) dp$ . Эта величина подчиняется уравнению Больцмана:

$$\frac{\partial J(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t)}{\partial t} + \frac{\hat{p}_i}{a(t)} \frac{\partial J(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t)}{\partial x^i} = -2 \hat{p}_i \hat{p}_j \dot{D}_{ij}(\mathbf{x}, t), \quad (6.6.31)$$

где  $\dot{D}_{ij}$  задается выражением (6.6.4). Решение данного уравнения будет найдено в виде

$$J(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t) = \sum_{\lambda=\pm 2} \int d^3 q e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \beta(\mathbf{q}, \lambda) e_{ij}(\hat{\mathbf{q}}, \lambda) \hat{p}_i \hat{p}_j \Delta_\nu^{(T)}(q, \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{q}}, t). \quad (6.6.32)$$

Тогда соотношение (6.6.29) становится уравнением для  $\Delta_\nu^{(T)}$ :

$$\dot{\Delta}_\nu^{(T)}(q, \mu, t) + \frac{i q \mu}{a(t)} \Delta_\nu^{(T)}(q, \mu, t) = -2 \dot{\mathcal{D}}_q(t). \quad (6.6.33)$$

Оно может быть решено с помощью парциального разложения

$$\Delta_\nu^{(T)}(q, \mu, t) = \sum_\ell i^{-\ell} (2\ell + 1) \mathcal{P}_\ell(\mu) \Delta_{\nu, \ell}^{(T)}(q, t), \quad (6.6.34)$$

с  $\Delta_{\nu, \ell}^{(T)}$ , удовлетворяющим

$$\dot{\Delta}_{\nu, \ell}^{(T)} + \frac{q}{a(2\ell + 1)} \left( (\ell + 1) \Delta_{\nu, \ell+1}^{(T)} - \ell \Delta_{\nu, \ell-1}^{(T)} \right) = -2 \dot{\mathcal{D}}_q(t) \delta_{\ell 0}. \quad (6.6.35)$$

Разумеется, данное разложение следует обрезать на некотором более-менее произвольном максимальном значении  $\ell$ . Однако вместо этого можно найти прямое решение уравнения (6.6.33) в виде «радиального» интеграла:

$$\Delta_\nu^{(T)}(q, \mu, t) = -2 \int_{t_1}^t dt' \exp \left( -iq\mu \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} \right) \dot{\mathcal{D}}_q(t'). \quad (6.6.36)$$

Момент  $t_1$  выбирается вскоре после отделения нейтрино при температуре  $T \approx 10^{10}$  К, так что в это время распределение нейтрино по-прежнему диктуется состоянием теплового равновесия. В этом случае искажение распределения нейтрино происходит только благодаря возмущениям  $\delta T_\nu$  и  $\delta u_\nu$  нейтринной температуры и скорости потока, у которых нет тензорных компонент, поэтому нет нужды добавлять слагаемое с начальными значением времени  $\Delta_\nu^{(T)}(q, \mu, t_1)$  в правую часть уравнения (6.6.36).

Придется долго ждать, пока кто-нибудь сможет измерить угловое распределение космических нейтрино, поэтому единственная польза от вычислений  $\delta n_\nu$ , состоит в нахождении компонент тензора энергии-импульса. В тензорной моде единственной отличной от нуля компонентой является  $\delta T_{\nu j}^i$ , задаваемая такой же как для фотонов формулой (6.6.22), за тем исключением, что вместо  $\Delta_T^{(T)}$  появляется  $\Delta_\nu^{(T)}$ :

$$\begin{aligned} \delta T_{\nu j}^i(\mathbf{x}, t) &= a^{-4}(t) \int d^3 p \delta n_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) p \hat{p}_i \hat{p}_j = \\ &= \bar{\rho}_\nu(t) \sum_\lambda \int d^3 q \beta(\mathbf{q}, \lambda) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \int \frac{d^2 \hat{p}}{4\pi} J(\mathbf{q}, \hat{p}, t, \lambda) \hat{p}_i \hat{p}_j = \\ &= \bar{\rho}_\nu(t) \sum_\lambda \int d^3 q \beta(\mathbf{q}, \lambda) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} e_{kl}(\hat{q}, \lambda) \int \frac{d^2 \hat{p}}{4\pi} \Delta_\nu^{(T)}(q, \hat{p} \cdot \hat{q}, t) \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}_k \hat{p}_l = \\ &= \bar{\rho}_\nu(t) \sum_\lambda \int d^3 q \beta(\mathbf{q}, \lambda) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} e_{ij}(\hat{q}, \lambda) \frac{1}{4} \int \frac{d^2 \hat{p}}{4\pi} \Delta_\nu^{(T)}(q, \hat{p} \cdot \hat{q}, t) (1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2)^2. \end{aligned} \quad (6.6.37)$$

Это выражение задает вклад нейтрино в тензор анизотропной инерции  $\pi_{ij}^T$ . Тогда, сравнивая с (6.6.5), получаем

$$\pi_{\nu q}^T(t) = \frac{\bar{\rho}_\nu(t)}{4} \int \frac{d^2 \hat{p}}{4\pi} \Delta_\nu^{(T)}(q, \hat{p} \cdot \hat{q}, t) (1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2)^2. \quad (6.6.38)$$

По аналогии с фотонами, этот интеграл можно вычислить с помощью парциального разложения:

$$\pi_{\nu q}^T(t) = 2\bar{\rho}_\nu(t) \left( \frac{1}{15} \Delta_{\nu, 0}^{(T)}(q, t) + \frac{2}{21} \Delta_{\nu, 2}^{(T)}(q, t) + \frac{1}{35} \Delta_{\nu, 4}^{(T)}(q, t) \right). \quad (6.6.39)$$

Однако в случае с нейтрино проще воспользоваться явным решением (6.6.36). Подставляя выражения (6.6.36) и (6.1.55) в третье равенство в (6.6.35) и сравнивая с (6.6.5), найдем<sup>35)</sup>

$$\pi_{\nu q}^T(t) = -4\bar{\rho}_\gamma(t) \int_{t_1}^t dt' K \left( q \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} \right) \dot{\mathcal{D}}_q(t'), \quad (6.6.40)$$

<sup>35)</sup> S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **69**, 023503 (2004) [astro-ph/0306304].

где

$$K(v) \equiv \frac{j_2(v)}{v^2} = -\frac{\sin v}{v^3} - \frac{3 \cos v}{v^4} + \frac{3 \sin v}{v^5}. \quad (6.6.41)$$

Эта формула будет использоваться в дальнейшем при вычислении затухания гравитационных волн, выходящих из под горизонта в эру доминирования излучения.

Мы построили полный набор дифференциальных уравнений для тензорных возмущений. Давайте теперь обратимся к вычислению  $\mathcal{D}_q(t)$ , которое играет важную роль при вычислении тензорных анизотропий реликтового излучения. Начнем с того, что отбросим тензор анизотропной инерции  $\pi_{ij}^T$ , мы вернемся к рассмотрению оказываемого им влияния в конце этого раздела. Анизотропной инерцией можно пренебречь в течение большей части эволюции Вселенной, когда основной вклад в плотность энергии Вселенной происходит от одной или более идеальных жидкостей, при этом сама плотность энергии Вселенной никогда не принимает слишком больших значений. В рамках данного приближения полевое уравнение (6.6.6), описывающее фурье-компоненты тензорных компонент  $D_{ij}$  возмущения метрики, задается простым уравнением:

$$\ddot{\mathcal{D}}_q(t) + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\mathcal{D}}_q(t) + \frac{q^2}{a^2}\mathcal{D}_q^2(t) = 0. \quad (6.6.42)$$

Ранее в этом разделе уже отмечалось, что в очень ранние времена, когда  $q/a \ll \dot{a}/a$ , одно решение является постоянным, а другое затухает, поэтому поскольку рассматриваемая эпоха длится достаточно долго, затухающим решением можно пренебречь и выбрать в качестве начального условия стремление  $\mathcal{D}_q(t)$  к константе  $\mathcal{D}_q^r$  в ранние времена.

Для рассмотрения эволюции  $\mathcal{D}_q(t)$  в более поздние времена удобно заново заменить независимую переменную  $t$  на  $y \equiv a/a_{EQ} = \bar{\rho}_m/\bar{\rho}_i$ , где  $a_{EQ}$  — это значение масштабного фактора Робертсона—Уокера при балансе вещества и излучения. Предполагая, что плотность энергии во Вселенной определяется излучением и нерелятивистским веществом<sup>36)</sup>, уравнение (6.3.11) можно привести к виду

$$\frac{H_{EQ} dt}{\sqrt{2}} = \frac{y dy}{\sqrt{1+y}}, \quad (6.6.43)$$

где  $H_{EQ}$  — это скорость расширения при балансе вещества и излучения. В таком случае уравнение (6.6.42) принимает вид

$$(1+y)\frac{d^2\mathcal{D}_q}{dy^2} + \left(\frac{2(1+y)}{y} + \frac{1}{2}\right)\frac{d\mathcal{D}_q}{dy} + \kappa^2\mathcal{D}_q = 0, \quad (6.6.44)$$

<sup>36)</sup> Эволюция тензорной амплитуды при более общих предположениях рассматривается в работе L. A. Boyle and P. J. Steinhardt [astro-ph/0512014].

где  $\kappa$  — это безразмерное перескальвированное волновое число (6.5.9):

$$\kappa \equiv \frac{\sqrt{2} q}{a_{\text{EQ}} H_{\text{EQ}}} = \frac{(q/a_0)\sqrt{\Omega_i}}{H_0 \Omega_M} = \frac{19,3(q/a_0)}{\Omega_M h^2} [\text{Мпк}^{-1}]. \quad (6.6.45)$$

Помимо этого имеется начальное условие, что  $\mathcal{D}_q \rightarrow \mathcal{D}_q^r$  при  $y \ll 1$ . Так же как в случае скалярных мод, можно найти аналитические решения в двух крайних случаях, при  $\kappa \ll 1$  и  $\kappa \gg 1$ .

Первым рассмотрим случай  $\kappa \gg 1$ . В этом пределе при балансе вещества и излучения уже имеем  $q/a \gg \dot{a}/a$ , поэтому попадание под горизонт происходит в ранний период эры доминирования излучения. Следовательно, при  $\kappa \gg 1$  существуют две пересекающиеся эпохи: эпоха, когда во Вселенной преобладает излучение, вплоть до тех времен, когда возмущение находится за горизонтом, и эпоха, когда возмущение целиком под горизонтом, вплоть до настоящего времени; в обоих случаях будут найдены аналитические решения. Так как две эпохи пересекаются, можно будет сшить аналитические решения в эпоху пересечения, и таким способом связать амплитуду гравитационного поля в поздние времена с начальным условием в тот момент, когда возмущение находится за горизонтом.

Прежде всего, когда во Вселенной преобладает излучение,  $y \ll 1$ , и уравнение (6.6.44) принимает вид

$$\frac{d^2 \mathcal{D}_q}{dy^2} + \left( \frac{2}{y} \right) \frac{d\mathcal{D}_q}{dy} + \kappa^2 \mathcal{D}_q = 0. \quad (6.6.46)$$

Решение, стремящееся к константе  $\mathcal{D}_q^r$  при  $y \rightarrow 0$ , равно

$$\mathcal{D}_q = \frac{\sin(\kappa y)}{\kappa y} \mathcal{D}_q^r. \quad (6.6.47)$$

Далее, рассмотрим случай возмущений глубоко под горизонтом, т. е. тех, для которых справедливо  $q/a \gg H$ . Тогда с помощью ВКБ-приближения можно найти решения в случае совершенно произвольной зависимости  $a(t)$  от времени, так что наши результаты будут справедливы даже в присутствии вакуумной энергии, независимо от того, является она постоянной или нет. Для этой цели необходимо привести уравнение (6.6.42) к стандартному виду без членов с первыми производными<sup>37)</sup> посредством введения новой независимой переменной

$$x \equiv \int a^{-3}(t) dt,$$

<sup>37)</sup> Стандартный способ исключения слагаемых с первыми производными в уравнении (6.6.42) состоит в переходе к зависимой переменной вместо независимой переменной. Например, см. работы V. F. Mukhanov, N. A. Feldman, and R. H. Brandenberger, *Phys. Rep.* **215**, 203 (1992); K. Ng and A. Speliotopoulos, *Phys. Rev. D* **52**, 2112 (1995); а также более новую работу J. R. Pritchard and M. Kamionkowski, *Ann. Phys.* **318**, 2 (2005). Полученные в этом разделе решения значительно проще полученных описанным выше стандартным методом, потому что при переходе к независимой переменной, вместо зависимой, мы сталкиваемся с отсутствием точки экстремума в решении ВКБ.

в результате чего (6.6.42) приводится к

$$\frac{d^2 \mathcal{D}_q}{dx^2} + q^2 a^4 \mathcal{D}_q = 0. \quad (6.6.48)$$

Записываем

$$\mathcal{D}_q = A \exp \left( \pm iq \int a^2 dx \right)$$

и в уравнении (6.6.48) удерживаем только члены порядка  $q^2$  и  $q$ . Это приводит к

$$\frac{dA}{dx} = -\frac{A}{2a^2} \frac{da^2}{dx},$$

поэтому  $A \propto 1/a$ , и ВКБ-решения для  $\mathcal{D}_q$  имеют вид

$$a^{-1} \exp \left( \pm iq \int a^2 dx \right) = a^{-1} \exp \left( \pm iq \int a^{-1} dt \right).$$

Фактор  $1/a$  приводит к плотности энергии гравитационной волны, убывающей по закону  $a^{-4}$ , фактор  $a^{-1}$  соответствует красному смещению отдельных гравитонов, а фактор  $a^{-3}$  возникает по причине разбавления плотности гравитонов по мере расширения Вселенной<sup>38)</sup>.

Чтобы найти правильную линейную комбинацию двух ВКБ-решений, следует сшить их с решением (6.6.47) в эру доминирования излучения путем рассмотрения этих решений в промежуточном диапазоне, когда одновременно выполняются  $q/a \gg H$  и  $y \ll 1$ . Предположительно, вакуумной энергией в эру доминирования излучения можно пренебречь, поэтому здесь

$$\frac{q}{aH} = \frac{\kappa a_{\text{EQ}} H_{\text{EQ}}}{\sqrt{2} aH} = \kappa y,$$

и для  $\kappa \gg 1$  нет такого диапазона изменения  $y$ , чтобы  $\kappa y \gg 1$ , даже если  $y \ll 1$ . В этом диапазоне изменения  $y$  имеем

$$q \int \frac{dt}{a} = q \int \frac{da}{Ha^2} = \kappa \int \frac{y da}{a} = \kappa y,$$

поэтому (вспоминая, что  $y \propto a$ ) линейная комбинация  $a^{-1} \exp (+iq \int a^{-1} dt)$  и  $a^{-1} \exp (-iq \int a^{-1} dt)$ , которая сшивается с решением (6.6.47) в том диапазоне, где оба решения справедливы, равна

$$\mathcal{D}_q = \frac{1}{\kappa y} \sin \left( q \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} \right) \mathcal{D}_q^r. \quad (6.6.49)$$

---

<sup>38)</sup> См. ГиК, разд. 15.10.

Повторим еще раз: это решение, находящееся глубоко под горизонтом, независимо от состава Вселенной. Для времен, близких к нынешним, оно имеет вид

$$\mathcal{D}_q = \frac{\sqrt{\Omega_{\text{и}} H_0^2}}{k} \sin(\eta + k(t - t_0)) \mathcal{D}_q^{\text{r}}, \quad (6.6.50)$$

где

$$k \equiv \frac{q}{a_0} \quad \text{и} \quad \eta \equiv ka_0 \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)}.$$

Возможно, что космологические гравитационные волны можно будет обнаружить прямым наблюдением<sup>39)</sup>. Те тензорные моды, которые можно обнаружить таким способом, будут определенно иметь  $\kappa \gg 1$ , т. е. это именно рассмотренный нами случай, так что они появляются под горизонтом гораздо раньше времени рекомбинации, и следовательно могут привести к возможности прямого наблюдения очень ранней Вселенной и даже к возможности исследования физики при энергиях, более высоких, чем достижимые в привычных ускорителях частиц. Существующая наземная лазерно-интерферометрическая гравитационно-волновая обсерватория LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) работает на частотах примерно 100 Гц; возмущения такой частоты заново появились под горизонтом, когда температура Вселенной составляла примерно  $10^8$  ГэВ, однако LIGO не обладает чувствительностью, достаточной для обнаружения фоновых гравитационных волн. Тем не менее фоновые гравитационные волны могли бы быть обнаружены с помощью лазерных интерферометров космического базирования. Например, с этой целью рассматривалось два детектора космологических гравитационных волн: обсерватория BBO (The Big Bang Observer) в США и децигерцовый лазерный интерферометрический детектор гравитационных волн в Японии. Оба интерферометра работают на частотах примерно от 0,01 до 1 Гц, и согласно соотношению (6.6.43), гравитационная волна с частотой  $qc/(2\pi a_0) = 10^{-2}$  Гц будет иметь  $\kappa = 1,3 \times 10^{15}/(\Omega_{\text{м}} h^2) \gg 1$ . Длины волн, которые можно зафиксировать с помощью таких детекторов, будут достаточно короткими, чтобы появиться под горизонтом, когда температура Вселенной составляла от  $10^4$  до  $10^5$  ГэВ. В этом случае, модификации временной зависимости  $a(t)$ , возникающие благодаря модификациям уравнения состояния вещества при различных порогах аннигиляции, приведут к появлению характерных свойств спектра тензорных мод<sup>40)</sup>. При разумных предположе-

<sup>39)</sup> Современные исследования этого вопроса содержатся в работах N. Seto, S. Kawamura, and T. Nakamura, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 221103 (2001) [astro-ph/0108011]; A. Buonanno [gr-qc/0303085]; A. Cooray [astro-ph/0503118]; T. L. Smith, M. Kamionkowski, and A. Cooray, *Phys. Rev. D* **73**, 023504 (2006) [astro-ph/0506422]; G. Efstathiou and S. Chongchitnan, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **163**, 204 (2006) [astro-ph/0603118]; B. Friedman, A. Cooray, and A. Melchiorri, *Phys. Rev. D* **74**, 123509 (2006) [astro-ph/0610220]. Также см. веб страницу NASA [www.universe.nasa.gov/program/bbo.html](http://www.universe.nasa.gov/program/bbo.html)

<sup>40)</sup> Y. Watanabe and E. Komatsu, *Phys. Rev. D* **73**, 123515 (2006) [astro-ph/0604176].

ниях относительно спектра первичных тензорных возмущений кажется очень правдоподобным<sup>41)</sup>, что тензорное возмущение, достаточно сильное, чтобы быть напрямую обнаруженным в диапазоне коротких волн, будет также обнаружено косвенным образом в диапазоне более длинных волн в силу их влияния на поляризацию реликтового излучения (разд. 7.4).

При вычислении влияния фоновых гравитационных волн на реликтовое излучение следует также рассматривать значения  $\kappa$  порядка единицы или меньше. Поэтому давайте обратимся к другому случаю, который можно рассмотреть аналитически, к случаю  $\kappa \ll 1$ . Здесь по-прежнему при балансе вещества и излучения выполняется  $q/a \ll \dot{a}/a$ , поэтому возмущение остается за горизонтом и  $\mathcal{D}_q(t)$  остается равным постоянному значению  $\mathcal{D}_q^r$  вплоть до наступления эры доминирования излучения, когда  $y \gg 1$ . В пределе  $y \gg 1$ , при любых значениях  $\kappa$ , уравнение (6.6.42) принимает вид

$$y \frac{d^2 \mathcal{D}_q}{dy^2} + \frac{5}{2} \frac{d\mathcal{D}_q}{dy} + \kappa^2 \mathcal{D}_q = 0. \quad (6.6.51)$$

Оно имеет два независимых решения, которые можно записать как функции от  $\kappa\sqrt{y}$ :

$$\begin{aligned} \frac{2j_1(2\kappa\sqrt{y})}{\kappa\sqrt{y}} &= \frac{-\cos(2\kappa\sqrt{y})}{\kappa^2 y} + \frac{\sin(2\kappa\sqrt{y})}{2\kappa^3 y^{3/2}}, \\ -\frac{2n_1(2\kappa\sqrt{y})}{\kappa\sqrt{y}} &= \frac{\sin(2\kappa\sqrt{y})}{\kappa^2 y} + \frac{\cos(2\kappa\sqrt{y})}{2\kappa^3 y^{3/2}}. \end{aligned} \quad (6.6.52)$$

В эру доминирования излучения

$$\frac{q}{aH} = \frac{\kappa a_{\text{EQ}} H_{\text{EQ}}}{\sqrt{2} aH} = \kappa\sqrt{y},$$

поэтому необходимо потребовать выполнения условия, что решение должно стремиться к постоянному значению  $\mathcal{D}_q^r$  при  $\kappa\sqrt{y} \ll 1$ . Чтобы удовлетворить этому условию, необходимо исключить второе решение, которое становится сингулярным при  $\kappa\sqrt{y} \rightarrow 1$ . В этом пределе первое решение стремится к постоянному значению  $4/3$ , поэтому правильное решение при  $\kappa \ll 1$  равно

$$\mathcal{D}_q \rightarrow \frac{3\mathcal{D}_q^r}{4} \left( \frac{-\cos(2\kappa\sqrt{y})}{\kappa^2 y} + \frac{\sin(2\kappa\sqrt{y})}{2\kappa^3 y^{3/2}} \right). \quad (6.6.53)$$

---

Отметим, что хотя уравнение (6.6.51) применимо только при  $y \gg 1$ , решение (6.6.53) справедливо при  $\kappa \ll 1$  и любом  $y$ , потому что оно правильно воспроизводит  $\mathcal{D}_q(t) = \mathcal{D}_q^r$  при условии  $\kappa\sqrt{y} \ll 1$ , которое для  $\kappa \ll 1$  справедливо, пока  $y \gg 1$ .

---

<sup>41)</sup> T. L. Smith, M. Kamionkowski, A. Cooray, сноска 39.

Интерполяция между случаями  $\kappa \gg 1$  и  $\kappa \ll 1$  имеет наиболее простой вид в эру доминирования излучения, когда  $y \gg 1$ . В момент разделения вещества и излучения приближение может считаться приемлемым только когда  $y \approx 3$ , но оно становится хорошим приближением во все последующие времена. В этом случае тензорные моды описываются уравнением (6.6.51), и общее решение является линейной комбинацией двух решений (6.6.52), которая для произвольного  $\kappa$  может быть представлена в следующем удобном виде:

$$\mathcal{D}_q = \frac{3\mathcal{D}_q^r \mathcal{U}(\kappa)}{4\kappa^2} \left( \frac{-\cos(2\kappa\sqrt{y} + \Xi(\kappa))}{y} + \frac{\sin(2\kappa\sqrt{y} + \Xi(\kappa))}{2\kappa y^{3/2}} \right), \quad (6.6.54)$$

где  $\mathcal{U}$  и  $\Xi$  — это вещественные безразмерные функции от  $\kappa$ . Из уравнения (6.6.53) следует, что для  $\kappa \ll 1$

$$\mathcal{U}(\kappa) \rightarrow 1, \quad \frac{\Xi(\kappa)}{\kappa^3} \rightarrow 0, \quad (6.6.55)$$

что объясняет причину почему мы решили записывать физическое решение в виде (6.6.54). Кроме того, для  $y \gg 1$  решение (6.6.49) принимает вид

$$\mathcal{D}_q = \frac{\sin(2\kappa(\sqrt{1+y}-1))}{ky} \mathcal{D}_q^r, \quad (6.6.56)$$

и поэтому для  $\kappa \gg 1$

$$\mathcal{U}(\kappa) \rightarrow \frac{4\kappa}{3}, \quad \Xi(\kappa) \rightarrow \frac{\pi}{2} - 2\kappa. \quad (6.6.57)$$

Значения  $\mathcal{U}(\kappa)$  и  $\Xi(\kappa)$  при произвольных  $\kappa$  необходимо искать с помощью компьютерных вычислений решения уравнения (6.6.44). Полученные результаты<sup>42)</sup> представлены в табл. 6.2. Можно видеть, что аналитические асимптотические пределы (6.6.55) и (6.6.57) достаточно хорошо согласуются с компьютерными вычислениями, соответственно при  $\kappa \gg 1$  и  $\kappa \ll 1$ .

Теперь давайте рассмотрим эффект присутствия анизотропной инерции<sup>43)</sup>. Тензор анизотропной инерции является суммой вкладов от фотонов и нейтрино, однако фотоны должны иметь короткую длину пробега до наступления эпохи рекомбинации и впоследствии дают лишь малый вклад в полную плотность энергии, поэтому их вклад в анизотропную инерцию мал. В результате остаются нейтрино (включая антинейтрино), которые в основном распространялись без участия в столкновениях<sup>44)</sup>, по причине того, что температура

<sup>42)</sup> D. Dicus, частное сообщение.

<sup>43)</sup> S. Weinberg, сноска 35. Результаты предыдущих компьютерных вычислений содержатся в работе J. R. Bond, in *Cosmology and Large Scale Structure, Les Houches Session LX*, eds. R. Schaeffer, J. Silk, and J. Zinn-Justin (Elsevier, Amsterdam, 1996).

<sup>44)</sup> Для очень коротких длин волн, появившихся под горизонтом до начала электрон-позитронной аннигиляции, необходимо учитывать столкновения нейтрино друг с другом, с электронами и с позитронами. Этот вопрос рассматривается в работе M. Lattanzi and G. Montani, *Mod. Phys. Lett. A* **20**, 2607 (2005) [astro-ph/0508364].

Таблица 6.2

## Тензорные передаточные функции

$\kappa$	$U$	$\Xi$	$\kappa$	$U$	$\Xi$
0,001	1,0000	$-2,991 \times 10^{-11}$	1,8	2,990	-2,418
0,002	1,0000	$-9,557 \times 10^{-10}$	2,0	3,250	-2,781
0,003	1,0000	$-7,239 \times 10^{-9}$	2,5	3,906	-3,706
0,004	1,0000	$-9,236 \times 10^{-8}$	3,0	4,565	-4,646
0,005	1,0001	$-9,236 \times 10^{-8}$	3,5	5,222	-5,597
0,006	1,0001	$-2,286 \times 10^{-7}$	4,0	5,886	-6,555
0,007	1,0002	$-4,908 \times 10^{-7}$	4,5	6,551	-7,518
0,008	1,0002	$-9,498 \times 10^{-7}$	5,0	7,216	-8,484
0,009	1,0003	$-1,697 \times 10^{-6}$	5,5	7,878	-9,453
0,01	1,0004	$-2,847 \times 10^{-6}$	6,0	8,541	-10,425
0,02	1,0016	$-7,848 \times 10^{-5}$	6,5	9,208	-11,398
0,03	1,0037	$-4,655 \times 10^{-4}$	7,0	9,875	-12,372
0,04	1,0065	$-1,397 \times 10^{-3}$	7,5	10,538	-13,347
0,05	1,0095	$-2,809 \times 10^{-3}$	8,0	11,201	-14,324
0,06	1,0128	$-4,397 \times 10^{-3}$	8,5	11,869	-15,302
0,07	1,0165	$-6,023 \times 10^{-3}$	9,0	12,538	-16,279
0,08	1,0210	$-7,929 \times 10^{-3}$	10,0	13,863	-18,237
0,09	1,0260	$-1,044 \times 10^{-2}$	11,0	15,202	-20,196
0,1	1,0310	$-1,352 \times 10^{-2}$	12,0	16,526	-22,157
0,2	1,0960	$-5,802 \times 10^{-2}$	13,0	17,867	-24,119
0,3	1,1800	-0,1293	14,0	19,190	-26,081
0,4	1,2766	-0,2223	15,0	20,532	-28,044
0,5	1,3816	-0,3327	16,0	21,854	-30,001
0,6	1,4926	-0,4568	17,0	23,197	-31,973
0,7	1,6079	-0,5919	18,0	24,52	-33,94
0,8	1,7265	-0,7357	19,0	25,86	-35,90
0,9	1,848	-0,8866	20,0	27,18	-37,87
1,0	1,970	-1,043	21,0	28,53	-39,83
1,1	2,095	-1,205	22,0	29,85	-41,80
1,2	2,220	-1,370	23,0	31,19	-43,77
1,4	2,474	-1,171	24,0	32,51	-45,73
1,6	2,731	-2,061	25,0	33,86	-47,70

опустилась ниже примерно  $10^{10}$  К, и давали значительный вклад в плотность энергии Вселенной до тех пор, пока не начала играть существенную роль холодная темная материя, при температуре примерно  $10^4$  К. Тензорная часть тензора анизотропной инерции задается выражением (6.6.40), поэтому гравитационное волновое уравнение (6.6.6) теперь становится интегро-диф-

дифференциальным уравнением<sup>45)</sup>:

$$\ddot{\mathcal{D}}_q(t) + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\mathcal{D}}_q(t) + \frac{q^2}{a^2}\mathcal{D}_q(t) = -64\pi G\bar{\rho}_\nu(t) \int_0^t K\left(q \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} \right) \dot{\mathcal{D}}_q(t') dt', \quad (6.6.58)$$

где  $K(v)$  задается уравнением (6.6.41). Отметим, что несмотря на присутствие анизотропной инерции, при  $q/a \ll H$  оно имеет решение с не зависящим от времени  $\mathcal{D}_q(t)$ , согласно общему теореме из разд. 5.4.

Данное волновое уравнение становится особенно простым для длин волн, достаточно коротких, чтобы войти под горизонт в течение эры доминирования излучения (хотя значительно позже  $e^+ - e_-$  аннигиляции), а именно, при  $\kappa \gg 1$ . Ноль времени будет определяться так, чтобы в эту эпоху  $a \propto \sqrt{t}$ . Теперь удобно записывать  $\mathcal{D}_q$  в виде функции переменной

$$u \equiv q \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = \frac{2qt}{a(t)} \quad (6.6.59)$$

вместо  $t$ . С помощью уравнения Фридмана  $8\pi G\bar{\rho}/3 = H^2 = 1/(4t^2)$  гравитационное волновое уравнение (6.6.58) в эпоху излучения принимает вид

$$\frac{d^2}{du^2}\mathcal{D}_q(u) + \frac{2}{u} \frac{d}{du}\mathcal{D}_q(u) + \mathcal{D}_q(u) = -\frac{24f_\nu}{u^2} \int_0^u K(u-u') \frac{d\mathcal{D}_q(u')}{du'} du', \quad (6.6.60)$$

где

$$f_\nu \equiv \frac{\bar{\rho}_\nu}{\bar{\rho}_\nu + \bar{\rho}_\gamma} = \frac{3 \cdot (7/8) \cdot (4/11)^{4/3}}{1 + 3 \cdot (7/8) \cdot (4/11)^{4/3}} = 0,4052. \quad (6.6.61)$$

Позже, в эру доминирования излучения, фактор  $1/u^2$  приводит к тому, что правой частью можно пренебречь, поэтому  $\mathcal{D}_q(u)$  стремится к решению однородного уравнения. В общем случае можно ожидать появления линейной комбинации  $(\sin u)/u$  и  $(\cos u)/u$ , однако на самом деле вклад  $(\cos u)/u$  в решении не появляется<sup>46)</sup>. Численное решение уравнения (6.6.60) показывает, что если  $\mathcal{D}_q(u)$  принимает значение  $\mathcal{D}_q^r$  при  $u \ll 1$ , то при  $u \gg 1$  (но по-прежнему в эпоху излучения)

$$\mathcal{D}_q(u) \rightarrow \mathcal{D}_q^r \alpha \frac{\sin u}{u}, \quad (6.6.62)$$

<sup>45)</sup> В принципе, нижний предел этого интеграла должен быть выбран как время отделения нейтрино, при температуре примерно  $10^{10}$  К, однако хорошим приближением будет выбрать его в виде  $t = 0$ , что достигается записыванием масштабного фактора в течение эпохи излучения в виде  $a \propto t^{1/2}$ .

<sup>46)</sup> Д. Дикус и В. Репко в работе D. Dicus and W. Repko, *Phys. Rev.* **72**, 088302(2005) [astro-ph/0509096] с помощью аналитических методов показали, что вклад  $(\cos u)/u$  в этом решении не появляется, и привели аналитическое решение в виде быстро сходящейся суммы сферических функций Бесселя. Отсутствие вклада  $(\cos u)/u$  было показано в весьма общем виде, исходя из свойств причинности, S. Bashinsky [astro-ph/0505502].

где  $\alpha = 0,8026$ . В таком случае, при последующей эволюции амплитуды гравитационной волны это выражение можно считать начальным условием вместо (6.6.47), так что позднее, в течение эры доминирования вещества, влияние затухания на эту амплитуду (если отбросить  $\delta$ ) состоит в простом умножении решения (6.6.54) на множитель  $\alpha$ <sup>47)</sup>.

Затухание гравитационных волн с большими длинами значительно более сложно устроено. По причине сдвига фазы осцилляций, влияние анизотропной инерции на амплитуду гравитационных волн в момент отщепления сильно зависит от волнового числа, и для некоторых значений волновых чисел вместо затухания может возникнуть усиление, однако как правило, амплитуда затухает для  $\kappa = \mathcal{O}(1)$  примерно на 5 %.

Поскольку эффект затухания для  $\kappa \ll 1$  в любом случае мал, адекватным приближением для всех длин волн будет выбирать амплитуду гравитационной волны в эру доминирования вещества в виде произведения решения (6.6.54) на фактор  $\alpha(\kappa)$ :

$$\mathcal{D}_q = \frac{3\mathcal{D}_q^r U(\kappa)\alpha(\kappa)}{4\kappa^2} \left( \frac{-\cos(2\kappa\sqrt{y} + \Xi(\kappa))}{y} + \frac{\sin(2\kappa\sqrt{y} + \Xi(\kappa))}{2\kappa y^{3/2}} \right), \quad (6.6.63)$$

где  $\alpha(\kappa)$  — это некоторая функция от  $\kappa$ , гладко возрастающая от  $\alpha(\kappa) = 0,8026$  при  $\kappa \gg 1$  до  $\alpha(\kappa) \simeq 1$  при  $\kappa \ll 1$ . Например, можно выбрать

$$\alpha(\kappa) \simeq \frac{1 + 0,8026\kappa}{1 + \kappa}.$$

Все наблюдаемые эффекты от присутствия космологических гравитационных волн будут уменьшены в  $\alpha(\kappa)$  раз.

---

<sup>47)</sup> Эффект от возможного присутствия масс и/или химических потенциалов у нейтрино рассматривается в работе K. Ichiki, M. Yamaguchi, and J. Yokoyama, *Pub. Astron. Soc. Pacific* **119**, 30 (2007) [hep-ph/0611121].

# Глава 7

## АНИЗОТРОПИИ НА МИКРОВОЛНОВОМ НЕБЕ

Вернемся теперь к теории анизотропий реликтового излучения, введенной в разд. 2.6. В разд. 7.1 будут получены общие формулы для наблюдаемых флуктуаций температуры. Затем, в разд. 7.2 и 7.3, эти результаты будут объединены с анализом эволюции Вселенной из гл. 6, а также будут определены некоторые приближения, позволяющие упростить вычисление мультипольных коэффициентов соответственно для скалярных и тензорных мод. В разд. 7.4 рассматривается поляризация реликтового фона.

### 7.1

---

#### Общие формулы для флуктуаций температуры

**Формула на линии прямой видимости • Перестройка скалярных температурных флуктуаций • Проинтегрированный эффект Сакса—Вольфе • Приближение внезапного расцепления • Повторный вывод, следя траекториям фотонов • Калибровочная инвариантность**

В этом разделе будут получены общие формулы для вклада скалярных и тензорных мод в наблюдаемые флуктуации температуры. Мы начнем с того, что продлим решение уравнений Больцмана в синхронной калибровке, найденное в разд. 6.1, вперед по времени вплоть до настоящего времени. Используя для обработки данных такие компьютерные программы, как CMBfast и CAMB, данный подход приводит к численным результатам большой точности, однако ни вывод формул для температурных флуктуаций, ни компьютерные программы не являются такими уж прозрачными с физической точки зрения. Поэтому будет показано, как полученные результаты упрощаются с помощью приближения резкого перехода из состояния теплового равновесия к полной прозрачности в момент  $t_{\text{п. р.}}$  последнего рассеяния. Это приближение не учитывает рассеяние фотонов на веществе, которое становится реонизированным при красном смещении порядка 10. Обусловленные реонизацией поправки в температурные корреляции очень просты для мультиполей порядка  $\ell$  примерно больше 20, они будут учтены в разд. 7.2. В разд. 7.2 мы также частично воспользуемся приближением резкого перехода от непроницаемости к прозрачности путем учета эффектов вязкого затухания во время этого перехода и с помощью эффектов усреднения по  $t_{\text{п. р.}}$ . (В конце этого раздела будет

также показано, как эти же упрощенные результаты можно получить в более общей калибровке, следуя фотонным траекториям с момента  $t_{\text{п.р.}}$  до настоящего времени, без необходимости использовать уравнение Больцмана.) Полученные здесь результаты с помощью приближения внезапного отделения будут использованы совместно с другими приближениями в разд. 7.2 для вывода аналитических выражений для температурных мультипольных коэффициентов, который требует компьютерных расчетов только при выполнении одного численного интегрирования.

Поскольку плотность собственной энергии излучения черного тела пропорциональна четвертому порядку температуры, фракционное возмущение температуры излучения, идущего по направлению  $\hat{n}$ , равно одной четвертой фракционного возмущения плотности собственной энергии фотонов, распространяющихся вдоль  $\hat{p} = -\hat{n}$  по направлению к нашему положению  $x = 0$  в момент времени  $t = t_0$ . Таким образом, из уравнений (6.1.13) и (6.6.8) следует, что

$$\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} = \frac{1}{4} J_{ii}(x = 0, -\hat{n}, t_0), \quad (7.1.1)$$

где  $J_{ij}(x, \hat{p}, t)$  — это матрица фракционной плотности, задаваемая уравнениями (6.1.13) для скалярных мод и (6.6.8) для тензорных мод. С помощью разложений (6.1.18), (6.1.20) для скалярных мод или (6.6.9), (6.6.13) для тензорных мод находим скалярный и тензорный вклады в флуктуацию температуры<sup>1)</sup>:

$$\left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)^{(S)} = \frac{1}{4} \int d^3 q \alpha(\mathbf{q}) \Delta_T^{(S)}(q, -\hat{q} \cdot \hat{n}, t_0) \quad (7.1.2)$$

и

$$\left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)^{(T)} = \frac{1}{4} \sum_{\lambda=\pm 2} \int d^3 q \beta(\mathbf{q}, \lambda) \hat{n}_k \hat{n}_l e_{kl}(\hat{q}, \lambda) \Delta_T^{(T)}(q, -\hat{q} \cdot \hat{n}, t_0), \quad (7.1.3)$$

где  $\alpha(\mathbf{q})$  и  $\beta(\mathbf{q}, \lambda)$  — стохастические параметры для тех мод, которые, по предположению, подавляют, соответственно, скалярное и тензорное возмущения;  $e_{kl}(\hat{q}, \lambda)$  — тензор поляризаций, определенный в разд. 6.6 в случае гравитационных волн с волновым числом  $\mathbf{q}$  и спиральностью  $\lambda$ ;  $\Delta_T^{(S)}(q, \mu, t)$  и  $\Delta_T^{(T)}(q, \mu, t)$  — амплитуды, возникающие в разложениях (6.1.20) и (6.6.13) скалярного и тензорного вкладов в матрицу относительной плотности  $J_{ij}$ .

Чтобы выявить угловую зависимость температурного сдвига, воспользуемся «радиальными» интегралами (6.1.37), (6.1.38) для скалярных мод и (6.6.25), (6.6.26) для тензорных мод, которые в случае скалярных мод дают

$$\left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)^{(S)} = \frac{1}{4} \int d^3 q \alpha(\mathbf{q}) \int_{t_1}^{t_0} dt \exp \left( i \mathbf{q} \cdot \hat{n} \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} - \int_t^{t_0} dt' \omega_c(t') \right) \times$$

<sup>1)</sup> Здесь и далее верхние индексы  $(S)$  и  $(T)$  обозначают результаты, относящиеся к скалярным и тензорным модам возмущений соответственно. — Прим. ред. перев.

$$\times \left[ -2\dot{A}_q(t) + 2(\mathbf{q} \cdot \hat{n})^2 \dot{B}_q(t) + 3\omega_c(t)\Phi(q, t) - \right. \\ \left. - \frac{4i(\mathbf{q} \cdot \hat{n})\omega_c(t)\delta u_{6q}(t)}{a(t)} + \frac{3}{4}(1 - (\hat{q} \cdot \hat{n})^2)\omega_c(t)\Pi(q, t) \right] \quad (7.1.4)$$

и в случае тензорных мод —

$$\left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)^{(T)} = \frac{1}{4} \sum_{\lambda=\pm 2} \int d^3 q \beta(\mathbf{q}, \lambda) \hat{n}_k \hat{n}_l e_{kl}(\hat{q}, \lambda) \times \\ \times \int_{t_1}^{t_0} dt \exp \left( i\mathbf{q} \cdot \hat{n} \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} - \int_t^{t_0} dt' \omega_c(t') \right) [-2\dot{\mathcal{D}}_q(t) + \omega_c(t)\Psi(q, t)]. \quad (7.1.5)$$

В качестве напоминания:  $t_1$  — произвольный момент времени, выбранный достаточно задолго до рекомбинации, так что имеющиеся фотоны рассеются много раз до наступления текущего момента;  $\omega_c(t)$  — скорость столкновения фотонов в момент времени  $t$ ;  $A_q(t)$  и  $B_q(t)$  — скалярные поля в возмущении метрики в синхронной калибровке, определенной в разд. 5.2;  $\Phi(q, t)$  и  $\Pi(q, t)$  — функции скалярных источников, определенные уравнением (6.1.21);  $\delta u_{6q}(t)$  — скалярный потенциал поля скоростей барионной плазмы;  $\mathcal{D}_q(t)$  — амплитуда гравитационной волны, определенная в разд. 5.2;  $\Psi(q, t)$  — функция тензорного источника, определенная уравнениями (6.6.11) и (6.6.12).

Выражение (7.1.4) задает не самый удобный вид скалярной температурной флуктуации. В предельном переходе к точному моменту последнего рассеяния члены этого выражения не будут соответствовать разложению рассматриваемой флуктуации на члены Сакса—Вольфе, Доплера, внутренний и интегральный члены Сакса—Вольфе, обсуждавшиеся в разд. 2.6. Отдельные члены в уравнении (7.1.4) даже не инвариантны относительно ограниченного класса калибровочных преобразований (5.3.39)–(5.3.42), сохраняющих условия синхронной калибровки. Поэтому уравнение (7.1.4) будет переписано с помощью следующего тождества

$$\exp \left( i\mathbf{q} \cdot \hat{n} \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} \right) (\mathbf{q} \cdot \hat{n})^2 \dot{B}_q(t) = - \exp \left( i\mathbf{q} \cdot \hat{n} \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} \right) \times \\ \times \frac{d}{dt} \left( a^2(t) \ddot{B}_q(t) + a(t) \dot{a}(t) \dot{B}_q(t) \right) + \frac{d}{dt} \left\{ \exp \left( i\mathbf{q} \cdot \hat{n} \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} \right) \times \right. \\ \left. \times \left[ a^2(t) \ddot{B}_q(t) + a(t) \dot{a}(t) \dot{B}_q(t) + ia(t) \mathbf{q} \cdot \hat{n} \dot{B}_q(t) \right] \right\}. \quad (7.1.6)$$

Подставляя данное выражение в уравнение (7.1.4) и интегрируя по частям, получаем окончательную формулу для скалярной температурной флюктуации:

$$\left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)^{(S)} = \left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)_{\text{ран}}^{(S)} + \left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)_{\text{ИСВ}}^{(S)}, \quad (7.1.7)$$

где первое, «раннее», слагаемое содержит вклады от времен с подходящей плотностью свободных электронов до рекомбинации и после реионизации<sup>2)</sup>,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)_{\text{ран}}^{(S)} &= \int d^3 q \alpha(\mathbf{q}) \int_{t_1}^{t_0} dt \exp \left( i \mathbf{q} \cdot \hat{n} \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} - \int_t^{t_0} dt' \omega_c(t') \right) \times \\ &\times \omega_c(t) \left[ \frac{3}{4} \Phi(q, t) + \frac{3}{16} (1 - (\hat{p} \cdot \hat{q})^2) \Pi(q, t) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} a^2(t) \ddot{B}_q(t) - \frac{1}{2} a(t) \dot{a}(t) \dot{B}_q(t) - i(\mathbf{q} \cdot \hat{n}) \left( \frac{\delta u_{6q}(t)}{a(t)} + \frac{a(t) \dot{B}_q(t)}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (7.1.8)$$

а второе слагаемое, «интегральный член Сакса—Вольфе», содержит вклады от всего периода, начиная с момента времени  $t_1$  до настоящего момента,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)_{\text{ИСВ}}^{(S)} &= -\frac{1}{2} \int d^3 q \alpha(\mathbf{q}) \int_{t_1}^{t_0} dt \exp \left( i \mathbf{q} \cdot \hat{n} \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} - \int_t^{t_0} dt' \omega_c(t') \right) \times \\ &\times \frac{d}{dt} [A_q(t) + a^2(t) \ddot{B}_q(t) + a(t) \dot{a}(t) \dot{B}_q(t)]. \end{aligned} \quad (7.1.9)$$

Поверхностное слагаемое, возникающее при интегрировании по частям при  $t = t_0$  здесь не учитывается, потому что оно линейно по  $\hat{n}$  и тем самым дает вклад в парциальные волны только с  $\ell = 0$  и  $\ell = 1$ . Это «позднее» слагаемое будет вычислено далее в этом разделе другим методом, см. (7.1.38).

Интегральный член Сакса—Вольфе (7.1.9) отражает эффект изменения гравитационных полей в течение эволюции реликтовых фотонов с момента последнего рассеяния по настоящее время. Как уже отмечалось в разд. 2.6, интегральный член СВ обратится в ноль, если гравитационное поле на протяжении периода с момента последнего рассеяния по настоящее время (более точно, во времена  $t$ , когда прозрачностью  $\exp(-\int_t^{t_0} \omega_c(t') dt')$  нельзя было пренебречь) возникает исключительно из плотности холодной материи.

<sup>2)</sup> Здесь и далее нижним индексом «ран» отмечены вклады от «ранних» периодов времени, а нижним индексом «ИСВ» — вклады от всего периода с начального момента  $t_1$  до настоящего времени. — Прим. ред. перев.

Помимо калибровочной инвариантности это свойство приводит к другой причине перераспределения членов, в результате которого появляется формула (7.1.7).

С учетом этого приближения из решений (6.5.15) и (6.5.16) следует, что  $\delta_{Dq} \propto t^{2/3}$  и  $\psi_t \propto t^{-1/3}$ . Соотношение (5.3.38) приводит к равенству

$$q^2 A_q = 8\pi a^2 \bar{\rho}_D \delta_{Dq} - 2H a^2 \psi_q,$$

оба слагаемых в котором постоянны в эру доминирования вещества, поэтому  $\dot{A}_q$  не дает вклада в выражение (7.1.9). Когда  $\dot{A}_q$  пренебрежимо мало,  $\psi_q = -q^2 \dot{B}_q$ , поэтому  $\dot{B}_q \propto t^{-1/3}$ , тем самым оба члена,  $a^2 \dot{B}_q$  и  $a \ddot{a} \dot{B}_q$ , в выражении (7.1.9) не зависят от времени, и поэтому они также не дают вклада в интегральный эффект СВ. По этой причине интегральный член СВ (7.1.9) относительно мал. Интегральный эффект СВ в ранние времена существенно зависит от отношения вещества к излучению в момент последнего рассеяния, которое способствует измерению  $\Omega_m h^2$  при наблюдениях температурных флуктуаций. Интегральный эффект СВ в поздние времена получает основной вклад за счет времен, близких к современной эпохе, когда плотность темной материи становится меньше плотности вакуумной энергии. Анизотропии образуют большие углы, если смотреть с близкого, а не с большого расстояния, поэтому интегральный член СВ в поздние времена в выражении для температурной анизотропии дает вклад в температурные мультипольные коэффициенты  $C_\ell$  только при относительно малых  $\ell$ , скажем  $\ell < 20$ . Именно интегральный эффект СВ приводит к тому, что предсказанные значения  $\ell(\ell+1)C_\ell$  растут при уменьшении  $\ell$  примерно от 20 до меньших значений. Данный эффект был с трудом обнаружен в современных данных по температурным флуктуациям реликтового излучения<sup>3)</sup>.

Именно «раннее» слагаемое (7.1.8) дает наибольший вклад в скалярную температурную флуктуацию при  $\ell > 20$ . Пропорциональные  $\mathbf{q} \cdot \hat{n}$  слагаемые

<sup>3)</sup> Как было предложено в работе R. G. Crittenden and N. Turok, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 575 (1996) [astro-ph/9510072], интегральный эффект СВ можно обнаружить посредством его корреляций с неоднородностями в распределении вещества (которые также линейны по  $\alpha(\mathbf{q})$ ). Эффект был обнаружен в корреляции данных от спутника WMAP (см. следующий раздел), представленных в нескольких обзорах: P. Fosalba and E. Gaztañaga, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **350**, L37 (2004) [astro-ph/0305468]; P. Fosalba, E. Gaztañaga, and F. Castander, *Astrophys. J.* **597**, L89 (2003) [astro-ph/0307249]; N. Afshordi, Y-S. Loh, and M. A. Strauss, [astro-ph/0308260]; S. P. Boughn and R. G. Crittenden, *New Astron. Rev.* **49**, 75 (2005) [astro-ph/0404470]; N. Padmanabhan, C. M. Hirata, U. Seljak, D. Schlegel, J. Brinkmann and D. P. Schneider, *Phys. Rev. D* **72**, 043525 (2005) [astro-ph/0410360]. Более недавние кросс-корреляции анизотропий, видимых на WMAP (см. следующий раздел), с галактиками из Слоановского цифрового обзора неба (SDSS) и с радиогалактическими данными из обзора неба NRAO VLA приводят соответственно к  $0,7 \leq \Omega_\Lambda \leq 0,82$  и  $0,3 \leq \Omega_{\Lambda^-} \leq 0,8$  с 95 % точностью; см. A. Cabré *et al.*, [astro-ph/0603690]; D. Pietrobon, A. Balbi, and D. Marinucci, *Phys. Rev. D* **74**, 043524 (2006) [astro-ph/0606475]. К сожалению, космическая дисперсия ограничивает пределы точности, с которой этот подход может быть применен для изучения временной зависимости вакуумной энергии.

в (7.1.8) отвечают за эффект Доплера<sup>4)</sup>, а другие слагаемые приводят к комбинированному эффекту гравитационного растяжения времени и флуктуаций внутренней температуры.

Давайте остановимся и проверим инвариантность относительно ограниченного класса калибровочных преобразований, сохраняющих условия синхронной калибровки. Такие преобразования приводят к вариациям  $\Delta \dot{B}_q = -2\dot{\tau}/a^2$  и  $\Delta u_{6q} = \tau$ , где  $\tau$  — произвольная функция от  $x$ , поэтому доплеровский член, пропорциональный  $i\mathbf{q} \cdot \hat{n}$  в уравнении (7.1.8), калибровочно-инвариантен сам по себе. Помимо этого<sup>5)</sup>,

$$\Delta\Phi = -\frac{4}{3} \frac{\dot{T}\tau}{\bar{T}} = \frac{4}{3} \frac{\dot{a}\tau}{a}$$

и  $\Delta\Pi = 0$ , поэтому другие слагаемые в (7.1.8) также калибровочно-инвариантны;  $\Delta A = -2\dot{a}\tau/a$ , поэтому выражение (7.1.9) также инвариантно относительно этого ограниченного класса калибровочных преобразований.

Если забыть, что мы использовали теорию возмущений первого порядка и предположили, что фотоны участвуют лишь в абсолютно упругих томсоновских рассеяниях, то найденные нами на данный момент решения точны.

В формулах (7.1.2) и (7.1.3) предполагалось, что каждая из скалярных и тензорных флуктуаций подавляется единственной модой, однако вводить в рассматриваемые выражения сумму по модам — это тривиально.

Полученные решения эквивалентны решениям Селяка и Залдарриага<sup>6)</sup>, которые были использованы в таких компьютерных программах, как CMBfast и CAMB. Ценой лишь небольшой потери численной точности их можно значительно упростить, если воспользоваться приближением резкого перехода из состояния теплового равновесия к идеальной прозрачности в некоторый определенный момент  $t_{\text{п.р.}}$ .

<sup>4)</sup> В калибровке, в которой холодная темная материя остается в покое, влияние гравитационных возмущений на частицы холодной темной материи сокращается выбором определения поверхностей равного времени, поэтому в данной калибровке возмущения скоростей барионной плазмы возникают исключительно благодаря давлению, а не гравитации. Именно поэтому в выражении (7.1.8) пропорциональный  $\dot{B}_q$  гравитационный вклад возникает вместе с потенциалом поля скоростей плазмы; он соответствует скорости фотон-барионной плазмы, которая возникает в другой калибровке благодаря гравитационным силам.

<sup>5)</sup> Это следует из правила (5.3.43), что вариация  $\Delta s$  в возмущении  $\delta s$  скаляра  $s$ , невозмущенное значение которого равно  $\bar{s}$ , есть  $\Delta s = -\dot{\bar{s}}\tau$ . При использовании этого правила отметим, что невозмущенное фотонное распределение изотропно и неполяризовано, так что из слагаемых в уравнениях (6.1.29) и (6.1.30) для  $\Phi$  и  $\Pi$  единственный член, у которого есть невозмущенное значение, — это  $\Delta_{T,0}^{(S)}/3$ . Для изучения поведения этого члена относительно рассматриваемых калибровочных преобразований необходимо определить невозмущенное значение  $\Delta_{T,0}^{(S)}$  так, чтобы его возмущение было флуктуацией относительной фотонной плотности  $4\delta T/\bar{T}$ , откуда следует, что его невозмущенное значение равно  $4 \ln \bar{T}$ .

<sup>6)</sup> U. Seljak and M. Zaldarriaga, *Astrophys. J.* **459**, 437 (1996) [astro-ph/9603033].

Подынтегральное выражение в «раннем» вкладе в скалярное температурное возмущение (7.1.8) содержит фактор  $P(t)$ , равный распределению вероятности для последнего фотонного рассеяния:

$$P(t) = \omega_c(t) \exp \left( - \int_t^{t_0} dt' \omega_c(t') \right). \quad (7.1.10)$$

Предполагая, что  $\omega_c(t)$  резко убывает в момент времени  $t_{\text{п.р.}}$  от значения, много большего скорости расширения, до нуля, функция  $P(t)$  отлична от нуля только в узком интервале вокруг  $t_{\text{п.р.}}$ . Но поскольку  $P(t)$  — это нормированное распределение вероятности:

$$\int_{t_1}^{t_0} P(t) dt = 1, \quad (7.1.11)$$

то интеграл по  $t$  в уравнении (7.1.8) может быть вычислен, если отбросить фактор  $P(t)$  и положить  $t = t_{\text{п.р.}}$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)_{\text{пах}}^{(S)} &\simeq \int d^3 q \alpha(\mathbf{q}) \exp \left( i \mathbf{q} \cdot \hat{n} \int_{t_{\text{п.р.}}}^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} \right) \times \\ &\times \left[ \frac{3}{4} \Phi(q, t_{\text{п.р.}}) + \frac{3}{16} (1 - (\hat{q} \cdot \hat{n}))^2 \Pi(q, t_{\text{п.р.}}) - \frac{1}{2} a^2(t) \ddot{B}_q(t_{\text{п.р.}}) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} a(t_{\text{п.р.}}) \dot{a}(t_{\text{п.р.}}) \dot{B}_q(t_{\text{п.р.}}) - i(\mathbf{q} \cdot \hat{n}) \left( \frac{\delta u_q(t_{\text{п.р.}})}{a(t_{\text{п.р.}})} + \frac{a(t_{\text{п.р.}}) \dot{B}_q(t_{\text{п.р.}})}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.1.12)$$

С учетом такого же предположения быстрого спада  $\omega_c(t)$  с большого значения при  $t < t_{\text{п.р.}}$  до пренебрежимо малого значения при  $t > t_{\text{п.р.}}$ , фактор  $\exp(-\int_t^{t_0} dt' \omega_c(t'))$  в (7.1.9) резко возрастает от нуля при  $t < t_{\text{п.р.}}$  до 1 при  $t > t_{\text{п.р.}}$ , поэтому выражение (7.1.9) принимает вид

$$\begin{aligned} \left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)_{\text{ИСВ}}^{(S)} &\simeq -\frac{1}{2} \int d^3 q \alpha(\mathbf{q}) \int_{t_{\text{п.р.}}}^{t_0} dt \exp \left( i \mathbf{q} \cdot \hat{n} \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} \right) \times \\ &\times \frac{d}{dt} [A_q(t) + a^2(t) \ddot{B}_q(t) + a(t) \dot{a}(t) \dot{B}_q(t)]. \end{aligned} \quad (7.1.13)$$

После применения такого же приближения к тензорному вкладу (7.1.5) получаем

$$\left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)^{(T)} = \frac{1}{4} \sum_{\lambda \simeq \pm 2} \int d^3 q \beta(\mathbf{q}, \lambda) \hat{n}_k \hat{n}_l e_{kl}(\hat{q}, \lambda) \times$$

$$\times \left[ -2 \int_{t_{\text{н.п.}}}^{t_0} dt \dot{\mathcal{D}}_q(t) \exp \left( i \mathbf{q} \cdot \hat{n} \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} \right) + \Psi(q, t_{\text{н.п.}}) \exp \left( i \mathbf{q} \cdot \hat{n} \int_{t_{\text{н.п.}}}^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} \right) \right]. \quad (7.1.14)$$

Далее, фотоны в состоянии локального теплового равновесия неполяризованы и имеют изотропное импульсное распределение, поэтому  $\Delta_{P,\ell}^{(S)}$ ,  $\Delta_{P,\ell}^{(T)}$  и  $\Delta_{T,\ell}^{(T)}$  обращаются в ноль при всех  $\ell$ , а  $\Delta_{T,\ell}^{(S)}$  обращается ноль при всех  $\ell$ , кроме  $\ell = 0$ , так что формулы (6.1.29), (6.1.30) и (6.6.21) для функций источников в состоянии локального теплового равновесия дают  $\Pi = \Psi = 0$  и  $\Phi = \Delta_{T,0}^{(S)} / 3 = 4\delta T / (3\bar{T})$ <sup>7)</sup>. В этом случае предположение резкого убывания от очень высокой до очень низкой частоты фотонных столкновений позволяет далее упростить выражения (7.1.12) и (7.1.14):

$$\left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)^{(S)}_{\text{пан}} \simeq \int d^3 q \alpha(\mathbf{q}) \exp \left( i \mathbf{q} \cdot \hat{n} \int_{t_{\text{н.п.}}}^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} \right) [F(q) + i(\hat{q} \cdot \hat{n})G(q)], \quad (7.1.15)$$

где  $F(q)$  и  $G(q)$  являются формфакторами:

$$F(q) = \frac{\delta T_q(t_{\text{н.п.}})}{\bar{T}(t_{\text{н.п.}})} - \frac{1}{2} a^2(t) \ddot{B}_q(t_{\text{н.п.}}) - \frac{1}{2} a(t_{\text{н.п.}}) \dot{a}(t_{\text{н.п.}}) \dot{B}_q(t_{\text{н.п.}}), \quad (7.1.16)$$

$$G(q) = -q \left( \frac{\delta u_{\gamma q}(t_{\text{н.п.}})}{a(t_{\text{н.п.}})} + \frac{a(t_{\text{н.п.}}) \dot{B}_q(t_{\text{н.п.}})}{2} \right), \quad (7.1.17)$$

и

$$\begin{aligned} \left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)^{(T)} &= -\frac{1}{2} \sum_{\lambda=\pm 2} \int d^3 q \beta(\mathbf{q}, \lambda) \hat{n}_k \hat{n}_l e_{kl}(\hat{q}, \lambda) \times \\ &\times \int_{t_{\text{н.п.}}}^{t_0} dt \dot{\mathcal{D}}_q(t) \exp \left( i \mathbf{q} \cdot \hat{n} \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} \right). \end{aligned} \quad (7.1.18)$$

<sup>7)</sup> Формально это можно увидеть, переходя в уравнениях Больцмана (6.1.27), (6.1.28), (6.6.18) и (6.6.19) к пределу  $\omega_c \rightarrow \infty$ . Получаем

$$\begin{aligned} \Delta_{P,\ell}^{(S)} &= \frac{1}{2} \Pi (\delta_{\ell 0} + \delta_{\ell 2}), & \Delta_{T,\ell}^{(S)} &= \left( 3\Phi + \frac{1}{2} \Pi \right) \delta_{\ell 0} + \frac{1}{2} \Pi \delta_{\ell 2}, \\ \Delta_{T,\ell}^{(T)} &= \delta_{\ell 0} \Psi, & \Delta_{P,\ell}^{(T)} &= -\delta_{\ell 0} \Psi. \end{aligned}$$

Тогда формулы для функций источников (6.1.29), (6.1.30) и (6.6.21) принимают вид  $\Phi = \Phi - \Pi/12$ ,  $\Pi = 3\Pi/5$  и  $\Psi = 7\Psi/10$ , откуда следует, что  $\Pi = \Psi = 0$  и  $\Phi = \Delta_{T,0}^{(S)}/3$ .

\* \* \*

Теперь предположим такой же внезапный спад непроницаемости в момент времени  $t_{\text{п. р.}}$  и воспользуемся этим приближением для вывода формул скалярных и тензорных температурных флуктуаций посредством рассмотрения фотонных траекторий, что позволяет не использовать формализм уравнений Больцмана из разд. 6.1. По причине простоты этого вывода мы проведем его для более общего класса калибровок. Затем мы проверим, что он приводит к выражениям (7.1.15) и (7.1.13) для скалярных флуктуаций в синхронной калибровке и к выражению (7.1.18) для тензорных флуктуаций. Читатель, которому вполне достаточно знать вывод этих формул с помощью уравнений Больцмана в синхронной калибровке, может пропустить оставшуюся часть этого раздела.

Начнем с некоторых замечаний общего характера, в равной степени справедливых для скалярных и тензорных возмущений, а также для скалярных возмущений в любой калибровке, в которой  $g_{i0} = 0$ , включая ньютонаовскую и синхронную. По-прежнему пренебрегая невозмущенной пространственной кривизной, запишем возмущенную метрику в произвольной калибровке, в которой  $g_{i0} = 0$ , в виде

$$g_{00} = -1 - E(\mathbf{x}, t), \quad g_{i0} = 0, \quad g_{ij} = a^2(t)\delta_{ij} + h_{ij}(\mathbf{x}, t). \quad (7.1.19)$$

Для светового луча, направленного в начало отсчета системы координат Робертсона—Уокера вдоль  $\hat{n}$ , сопутствующая радиальная координата  $r$  связана с  $t$  следующим образом:

$$0 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -\left(1 + E(r\hat{n}, t)\right) dt^2 + \left(a^2(t) + h_{rr}(r\hat{n}, t)\right) dr^2, \quad (7.1.20)$$

или, иначе говоря,

$$\frac{dr}{dt} = -\left(\frac{a^2 + h_{rr}}{1 + E}\right)^{-1/2} \simeq -\frac{1}{a} + \frac{h_{rr}}{2a^3} - \frac{E}{2a}. \quad (7.1.21)$$

---

В первом порядке по возмущениям не следует заботиться об отклонении луча от радиального направления, потому что  $\bar{g}_{r\theta} = \bar{g}_{r\phi} = 0$ , так что любое отклонение будет первого порядка, и поэтому эффект от его присутствия в слагаемом  $h_{ij} dx_i dx_j$  будет второго порядка.

---

Теперь воспользуемся приближением внезапного перехода вещества во Вселенной от непроницаемости к прозрачности в момент времени  $t_{\text{п. р.}}$  последнего рассеяния при красном смещении  $1 + z_{\text{п. р.}} \simeq 1090$ . В рамках этого приближения подходящее решение первого порядка уравнения (7.1.21) имеет вид

$$r(t) = s(t) + \int_{t_{\text{п. р.}}}^t \frac{dt'}{a(t')} N(s(t')\hat{n}, t'), \quad (7.1.22)$$

где

$$N(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{2} \left[ \frac{h_{rr}(\mathbf{x}, t)}{a^2(t)} - E(\mathbf{x}, t) \right], \quad (7.1.23)$$

и  $s(t)$  — решение нулевого порядка для радиальной переменной со значением  $r_{\text{n. p.}}$  в момент времени  $t = t_{\text{n. p.}}$ :

$$s(t) = r_{\text{n. p.}} - \int_{t_{\text{n. p.}}}^t \frac{dt'}{a(t')} = \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}. \quad (7.1.24)$$

В частности, если луч достигает точки  $r = 0$  в момент времени  $t_0$ , то решение (7.1.22) дает

$$0 = s(t_0) + \int_{t_{\text{n. p.}}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} N(s(t)\hat{n}, t) = r_{\text{n. p.}} + \int_{t_{\text{n. p.}}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} (N(s(t)\hat{n}, t) - 1). \quad (7.1.25)$$

Временной интервал  $\delta t_{\text{n. p.}}$  между отправлением последовательных гребней волны в момент времени  $t_{\text{n. p.}}$  последнего рассеяния определяет временной интервал  $\delta t_0$  между приходом последовательных гребней волны в  $t_0$ , задаваемый вариацией выражения (7.1.25):

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\delta t_{\text{n. p.}}}{a(t_{\text{n. p.}})} & \left[ 1 - N(r_{\text{n. p.}}\hat{n}, t_{\text{n. p.}}) + \int_{t_{\text{n. p.}}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \left( \frac{\partial N(r\hat{n}, t)}{\partial r} \right)_{r=s(t)} \right] + \\ & + \delta t_{\text{n. p.}} \delta u_\gamma^r(r_{\text{n. p.}}\hat{n}, t_{\text{n. p.}}) + \frac{\delta t_0}{a(t_0)} [-1 + N(0, t_0)]. \end{aligned} \quad (7.1.26)$$

Слагаемое в правой части этого уравнения, вовлекающее радиальную скорость  $\delta u_\gamma^r$  фотонного газа или фотон-электрон-нуклонной жидкости, возникает при изменении во времени радиальной координаты  $r_{\text{n. p.}}$  источника света в выражении (7.1.25). Мы не рассматриваем вариацию аргумента  $s(t)\hat{n}$  в  $N$ , потому что в нулевом порядке  $r_{\text{n. p.}}$  и  $t_{\text{n. p.}}$  связаны друг с другом таким образом, что  $s(t) = 0$  для всех  $r_{\text{n. p.}}$ , поэтому его изменение по  $r_{\text{n. p.}}$  первого порядка, и эффект этой вариации в  $N$  будет второго порядка.

Полная скорость изменения величины  $N(s(t)\hat{n}, t)$  в выражении (7.1.25) равна

$$\frac{d}{dt} N(s(t)\hat{n}, t) = \left( \frac{\partial}{\partial t} N(r\hat{n}, t) \right)_{r=s(t)} - \frac{1}{a(t)} \left( \frac{\partial N(r\hat{n}, t)}{\partial t} \right)_{r=s(t)},$$

поэтому выражение (7.1.26) может быть записано в виде

$$0 = \frac{\delta t_{\text{n. p.}}}{a(t_{\text{n. p.}})} \left[ 1 - N(0, t_0) + \int_{t_{\text{n. p.}}}^{t_0} dt \left\{ \frac{\partial}{\partial t} N(r\hat{n}, t) \right\}_{r=s(t)} \right] +$$

$$+ \delta t_{\text{п. п.}} \delta u_\gamma^r(r_{\text{п. п.}} \hat{n}, t_{\text{п. п.}}) + \frac{\delta t_0}{a(t_0)} [-1 + N(0, t_0)]. \quad (7.1.27)$$

Отсюда следует отношение временных интервалов между гребнями волн в момент испускания и поглощения, но мы хотим знать отношение интервалов собственного времени

$$\delta\tau_{\text{п. п.}} = \sqrt{1 + E(r_{\text{п. п.}}, t_{\text{п. п.}})} \delta t_{\text{п. п.}}, \quad \delta\tau_0 = \sqrt{1 + E(0, t_0)} \delta t_0, \quad (7.1.28)$$

которое в первом порядке приводит к отношению поглощенных и испущенных частот

$$\begin{aligned} \frac{\nu_0}{\nu_{\text{п. п.}}} &= \frac{\delta\tau_{\text{п. п.}}}{\delta\tau_0} = \frac{a(t_{\text{п. п.}})}{a(t_0)} \left[ 1 + \frac{1}{2} (E(r_{\text{п. п.}} \hat{n}, t_{\text{п. п.}}) - E(0, t_0)) - \right. \\ &\quad \left. - \int_{t_{\text{п. п.}}}^{t_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} N(r \hat{n}, t) \right\}_{r=s(t)} dt - a(t_{\text{п. п.}}) \delta u_\gamma^r(r_{\text{п. п.}} \hat{n}, t) \right]. \end{aligned} \quad (7.1.29)$$

Тогда наблюдаемая в настоящее время  $t_0$  температура в направлении  $\hat{n}$  равна

$$T(\hat{n}) = \frac{\nu_0}{\nu_{\text{п. п.}}} (\bar{T}(t_{\text{п. п.}}) + \delta T(r_{\text{п. п.}} \hat{n}, t_{\text{п. п.}})),$$

где теперь было добавлено слагаемое  $\delta T$  с целью учета внутренней температурной флуктуации в момент времени  $t_{\text{п. п.}}$ . Точно также, в отсутствие возмущений наблюдаемая во всех направлениях температура будет равна

$$T_0 = \frac{a(t_{\text{п. п.}})}{a(t_0)} \bar{T}(t_{\text{п. п.}}),$$

поэтому относительный сдвиг наблюдаемой температуры излучения в направлении  $\hat{n}$  по отношению к ее невозмущенному значению равен<sup>8)</sup>

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} &\equiv \frac{T(\hat{n}) - T_0}{T_0} = \frac{\nu_0}{a(t_{\text{п. п.}}) \nu_{\text{п. п.}} / a(t_0)} - 1 + \frac{\delta T(r_{\text{п. п.}} \hat{n}, t_{\text{п. п.}})}{\bar{T}(t_{\text{п. п.}})} = \\ &= \frac{1}{2} (E(r_{\text{п. п.}} \hat{n}, t_{\text{п. п.}}) - E(0, t_0)) - \int_{t_{\text{п. п.}}}^{t_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} N(r \hat{n}, t) \right\}_{r=s(t)} - \\ &\quad - a(t_{\text{п. п.}}) \delta u_\gamma^r(r_{\text{п. п.}} \hat{n}, t_{\text{п. п.}}) + \frac{\delta T(r_{\text{п. п.}} \hat{n}, t_{\text{п. п.}})}{\bar{T}(t_{\text{п. п.}})}. \end{aligned} \quad (7.1.30)$$

Поскольку тензорные и скалярные возмущения нескоррелированы, их вклад в  $C_\ell$  будет рассматриваться независимо.

<sup>8)</sup> По сути, этот результат был впервые получен в работе R. K. Sachs and A. M. Wolfe, *Astrophys. J.* **147**, 73 (1967).

Для скалярных возмущений в любой калибровке, в которой  $h_{i0} = 0$ , возмущение метрики задается уравнениями (5.1.31)–(5.1.33) в виде

$$h_{00} = -E, \quad h_{ij} = a^2 \left[ A\delta_{ij} + \frac{\partial^2 B}{\partial x^i \partial x^j} \right]. \quad (7.1.31)$$

Кроме того, для скалярных возмущений радиальная скорость фотонной жидкости задается в терминах потенциала поля скоростей  $\delta u_\gamma$  в виде

$$\delta u_\gamma^r = \bar{g}^{r\mu} \frac{\partial \delta u_\gamma}{\partial x^\mu} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial \delta u_\gamma}{\partial r}. \quad (7.1.32)$$

Таким образом, соотношение (7.1.30) задает скалярный вклад в температурную флуктуацию

$$\begin{aligned} \left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)^{(S)} &= \frac{1}{2} (E(r_{\text{п. п.}}, t_{\text{п. п.}}) - E(0, t_0)) - \int_{t_{\text{п. п.}}}^{t_0} dt \left\{ \frac{\partial}{\partial t} N(r\hat{n}, t) \right\}_{r=s(t)} - \\ &- \frac{1}{a(t_{\text{п. п.}})} \left( \frac{\partial \delta u_\gamma(r\hat{n}, t_{\text{п. п.}})}{\partial r} \right)_{r=r_{\text{п. п.}}} + \frac{\delta T(r_{\text{п. п.}}, t_{\text{п. п.}})}{\bar{T}(t_{\text{п. п.}})}, \end{aligned} \quad (7.1.33)$$

где теперь

$$N = \frac{1}{2} \left[ A + \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} - E \right]. \quad (7.1.34)$$

Вид соотношения (7.1.33) не очень полезен для наших целей. Определяемая (7.1.33) полная температурная флуктуация инвариантна относительно ограниченного класса калибровочных преобразований, сохраняющих  $g_{i0} = 0$ , однако для отдельных слагаемых данного соотношения это не верно, даже для интеграла от  $(\partial N/\partial t)_{r=s(t)}$ . Значительно более удобно будет переписать (7.1.33) так, чтобы интегральное слагаемое было калибровочно инвариантно.

Для этого воспользуемся тождеством, соответствующим (7.1.6):

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{\partial^2 \dot{B}(r\hat{n}, t)}{\partial r^2} \right\}_{r=s(t)} = \\ &= -\frac{d}{dt} \left[ \left\{ a^2(t) \ddot{B}(r\hat{n}, t) + a(t) \dot{a}(t) \dot{B}(r\hat{n}, t) + a(t) \frac{\partial \dot{B}(r\hat{n}, t)}{\partial r} \right\}_{r=s(t)} \right] + \\ &+ \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( a^2(t) \ddot{B}(r\hat{n}, t) + a(t) \dot{a}(t) \dot{B}(r\hat{n}, t) \right) \right\}_{r=s(t)}. \end{aligned}$$

Совместно с определением (7.1.34) это приводит к следующему виду подынтегрального выражения в соотношении (7.1.33):

$$\left\{ \frac{\partial N(r\hat{n}, t)}{\partial t} \right\}_{r=s(t)} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[ \left\{ a^2(t) \ddot{B}(r\hat{n}, t) + a(t) \dot{a}(t) \dot{B}(r\hat{n}, t) + a(t) \frac{\partial \dot{B}(r\hat{n}, t)}{\partial r} \right\}_{r=s(t)} \right] + \\
&\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( a^2(t) \ddot{B}(r\hat{n}, t) + a(t) \dot{a}(t) \dot{B}(r\hat{n}, t) + A(r\hat{n}, t) - E(r\hat{n}, t) \right) \right\}_{r=s(t)}. \tag{7.1.35}
\end{aligned}$$

Таким образом, относительная скалярная температурная флуктуация (7.1.33) может быть записана как

$$\left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)^{(S)} = \left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)_{\text{ран}}^{(S)} + \left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)_{\text{поздн}}^{(S)} + \left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)_{\text{ИСВ}}^{(S)}, \tag{7.1.36}$$

где

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)_{\text{ран}}^{(S)} &= -\frac{1}{2} a^2(t_{\text{п. п.}}) \ddot{B}(r_{\text{п. п.}} \hat{n}, t_{\text{п. п.}}) - \frac{1}{2} a(t_{\text{п. п.}}) \dot{a}(t_{\text{п. п.}}) \dot{B}(r_{\text{п. п.}} \hat{n}, t_{\text{п. п.}}) + \\
&\quad + \frac{1}{2} E(r_{\text{п. п.}} \hat{n}, t_{\text{п. п.}}) + \frac{\delta T(r_{\text{п. п.}} \hat{n}, t_{\text{п. п.}})}{\bar{T}(t_{\text{п. п.}})} - \\
&\quad - a(t_{\text{п. п.}}) \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{2} \dot{B}(r\hat{n}, t_{\text{п. п.}}) + \frac{1}{a^2(t_{\text{п. п.}})} \delta u_\gamma(r\hat{n}, t_{\text{п. п.}}) \right) \right]_{r=r_{\text{п. п.}}}, \tag{7.1.37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)_{\text{поздн}}^{(S)} &= \frac{1}{2} a^2(t_0) \ddot{B}(0, t_0) + \frac{1}{2} a(t_0) \dot{a}(t_0) \dot{B}(0, t_0) - \\
&\quad - \frac{1}{2} E(0, t_0) + a(t_0) \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{2} \dot{B}(r\hat{n}, t_0) + \frac{\delta u_\gamma(r\hat{n}, t_0)}{a^2(t_0)} \right) \right]_{r=0}, \tag{7.1.38}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)_{\text{ИСВ}}^{(S)} &= -\frac{1}{2} \int_{t_{\text{п. п.}}}^{t_0} dt \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( a^2(t) \ddot{B}(r\hat{n}, t) + a(t) \dot{a}(t) \dot{B}(r\hat{n}, t) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + A(r\hat{n}, t) - E(r\hat{n}, t) \right) \right]_{r=s(t)}. \tag{7.1.39}
\end{aligned}$$

«Поздний» вклад (7.1.38) (ранее в этом разделе он не учитывался) равен сумме не зависящего от направления слагаемого и слагаемого, пропорционального  $\hat{n}$ , которое было добавлено с целью описания анизотропии, вызванной локальным фоновым гравитационным полем и скоростью. Оно влияет только на те слагаемые в мультипольном разложении температурной корреляционной функции, у которых  $\ell = 0$  и  $\ell = 1$ , поэтому его можно не учитывать, если договориться рассматривать с этого момента мультипольные порядки только с  $\ell \geq 2$ .

Теперь давайте по отдельности проверим калибровочную инвариантность интегрального члена СВ, доплеровского вклада и оставшихся скомбинированных вкладов, по крайней мере для ограниченного класса калибровочных преобразований, сохраняющих  $g_{i0} = 0$ , или, в обозначениях уравнения (5.1.32),  $F = 0$ . Из уравнения (5.1.13) следует, что эти калибровочные преобразования имеют параметр

$$\epsilon_0 = -a^2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\epsilon^S}{a^2} \right),$$

и поэтому  $\Delta \dot{B} = 2\epsilon_0/a^2$ . Тогда согласно формулам (5.3.13) и (5.3.16), калибровочное преобразование сдвигает члены  $-a^2 \dot{B}/2$ ,  $-a\dot{a}\dot{B}/2$ ,  $\delta T/\bar{T}$  в комбинированных гравитационных и внутренних температурных флуктуациях на величины  $-a^2 \partial(\epsilon_0/a^2)/\partial t$ ,  $-\dot{a}\epsilon_0/a$ ,  $\dot{\epsilon}_0$  и  $\epsilon_0 \dot{\bar{T}}/\bar{T} = -\epsilon_0 \dot{a}/a$ , откуда следует, что суммарная вариация равна нулю; сдвигает члены  $a\dot{B}/2$  и  $\delta u_\gamma/a$  в доплеровском вкладе на величины  $\epsilon_0/a$  и  $-\epsilon_0/a$ , откуда следует, что суммарная вариация равна нулю; сдвигает четыре члена,  $a^2 \ddot{B}$ ,  $2a\dot{a}\dot{B}$ ,  $A$  и  $-E$ , под интегралом в интегральном члене СВ соответственно на величины  $2\dot{\epsilon}_0 - 4\epsilon_0 \dot{a}/a$ ,  $2\epsilon_0 \dot{a}/a$ ,  $2\epsilon_0 \dot{a}/a$  и  $-2\dot{\epsilon}_0$ , откуда следует, что суммарная вариация равна нулю. Таким образом, интегральный член СВ, доплеровский вклад и скомбинированные гравитационный и внутренне-температурный вклады по отдельности калибровочно инвариантны. В частности, ньютоновская и синхронная калибровки приводят к одинаковому ответу для каждого из этих трех вкладов.

Теперь давайте предположим, что начиная с момента последнего рассеяния по настоящее время скалярные вклады в флуктуации определяются *единственной* модой, так что произвольное возмущение  $X(\mathbf{x}, t)$  (такое как  $B$ ,  $E$ ,  $\delta u_\gamma$  или  $\delta T$ ) может быть записано в виде

$$X(\mathbf{x}, t) = \int d^3 q \alpha(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} X_q(t), \quad (7.1.40)$$

где  $\alpha(\mathbf{q})$  — стохастическая переменная (одинаковая для всех  $X$ ), нормированная следующим образом:

$$\langle \alpha(\mathbf{q}), \alpha^*(\mathbf{q}') \rangle = \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}'). \quad (7.1.41)$$

Тогда из соотношений (7.1.37) и (7.1.39) следует, что

$$\left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)^{(S)}_{\text{ран}} = \int d^3 q \alpha(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot \hat{n} r(t_{\text{n.p.}})} (F(q) + i\hat{q} \cdot \hat{n} G(q)), \quad (7.1.42)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)^{(S)}_{\text{исв}} &= -\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_{\text{n.p.}}} dt \int d^3 q \alpha(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot \hat{n} s(t)} \times \\ &\times \frac{d}{dt} (a^2(t) \ddot{B}_q(t) + a(t) \dot{a}(t) \dot{B}_q(t) + A_q(t) - E_q(t)), \end{aligned} \quad (7.1.43)$$

где

$$F(q) = -\frac{1}{2}a^2(t_{\text{п. п.}})\ddot{B}_q(t_{\text{п. п.}}) - \frac{1}{2}a(t_{\text{п. п.}})\dot{a}(t_{\text{п. п.}})\dot{B}_q(t_{\text{п. п.}}) + \frac{1}{2}E_q(t_{\text{п. п.}}) + \frac{\delta T_q(t_{\text{п. п.}})}{\bar{T}(t_{\text{п. п.}})}, \quad (7.1.44)$$

$$G(q) = -q\left(\frac{1}{2}a(t_{\text{п. п.}})\dot{B}_q(t_{\text{п. п.}}) + \frac{1}{a(t_{\text{п. п.}})}\delta u_{\gamma q}(t_{\text{п. п.}})\right). \quad (7.1.45)$$

Мы уже видели, что формфакторы  $F(q)$  и  $G(q)$  и подынтегральное выражение в интегральном члене СВ по отдельности калибровочно инвариантны относительно калибровочных преобразований, которые не изменяют равные нулю  $g_{i0}$ .

В синхронной калибровке  $E_q = 0$ , поэтому выражения (7.1.42)–(7.1.45) совпадают с полученными ранее выражениями (7.1.15), (7.1.13), (7.1.17) и (7.1.18). В ньютоновской калибровке  $B = 0$  и  $E = 2\Phi$ , поэтому формфакторы равны

$$F(q) = \Phi_q(t_{\text{п. п.}}) + \frac{\delta T_q(t_{\text{п. п.}})}{\bar{T}(t_{\text{п. п.}})}, \quad (7.1.46)$$

$$G(q) = -\frac{1}{a(t_{\text{п. п.}})}\delta u_{\gamma q}(t_{\text{п. п.}}). \quad (7.1.47)$$

---

Безусловно, вид  $\delta T_q$  и  $\delta u_{\gamma q}$  в ньютоновской калибровке отличается от вида этих величин в синхронной калибровке.

---

Помимо этого, интегральный член СВ равен

$$\left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\right)_{\text{ИСВ}} = -2 \int_{t_{\text{п. п.}}}^{t_0} dt \int d^3 q \alpha(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot \hat{n} s(t)} \dot{\Phi}_q(t). \quad (7.1.48)$$

Доказательство того, что в эру доминирования вещества  $\Phi_q$  равно константе, оставляется в качестве упражнения для читателя. Таким образом, как мы ранее убедились для синхронной калибровки, вклад в интегральный член СВ дают только отклонения от строгого преобладания вещества.

Наконец, рассмотрим тензорный вклад в температурные флуктуации. В приближении внезапного перехода из состояния теплового равновесия в состояние прозрачности в момент времени  $t_{\text{п. п.}}$  единственный вклад тензорных возмущений в наблюдаемую анизотропию возникает из слагаемого  $h_{rr}/(2a^2)$  в определении (7.1.23) величины  $N$ , которое, согласно (5.1.33), содержит вклад  $D_{rr}/2$ . Воспользовавшись этим фактом в (7.1.29), получаем тензорный вклад в температурную флуктуацию:

$$\left(\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0}\right)^{(T)} = -\frac{\hat{n}_i \hat{n}_j}{2} \int_{t_{\text{п. п.}}}^{t_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} D_{ij}(r\hat{n}, t) \right\}_{r=s(t)} dt. \quad (7.1.49)$$

Амплитуда гравитационной волны  $D_{ij}(\mathbf{x}, t)$  может быть представлена в виде интеграла Фурье (5.2.21):

$$D_{ij}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\lambda=\pm 2} \int d^3 q e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} e_{ij}(\hat{q}, \lambda) \beta(\mathbf{q}, \lambda) \mathcal{D}_q(t), \quad (7.1.50)$$

где  $\mathcal{D}_q(t)$  — доминантное решение волнового уравнения (5.2.16):

$$\ddot{\mathcal{D}}_q(t) + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\mathcal{D}}_q(t) + \frac{q^2}{a^2}\mathcal{D}_q(t) = 16\pi G \pi_q^{(T)}(t). \quad (7.1.51)$$

Величина  $e_{ij}(\lambda, \hat{q})$  — поляризационный тензор, определенный в разд. 5.2, а  $\beta(\mathbf{q}, \lambda)$  — стохастическая переменная, выбранная таким образом, чтобы удовлетворять соотношению (5.2.22). Отсюда следует, что вклад тензорной моды в температурную флуктуацию равен

$$\left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)^{(T)} = -\frac{1}{2} \sum_{\lambda=\pm 2} \int d^3 q \hat{n}_i \hat{n}_j e_{ij}(\lambda, q) \beta(\mathbf{q}, \lambda) \int_{t_{\text{п.п.}}}^{t_0} dt e^{is(t)\mathbf{q}\cdot\hat{n}} \dot{\mathcal{D}}_q(t). \quad (7.1.52)$$

Этот ответ совпадает с полученным ранее выражением (7.1.18). Мы вернемся к тензорному вкладу в  $C_\ell$  в разд. 7.3, после того как в следующем разделе будет изучен скалярный вклад.

## 7.2

### Температурные мультипольные коэффициенты: скалярные моды

**Общая формула • Приближение больших  $\ell$  • Расчет формфакторов • Затухание Силка—Ландау • Сравнение с числовыми кодами • Наблюдения на земле и на воздушных шарах • WMAP • Результаты для космологических параметров**

Теперь полученными в предыдущем разделе результатами воспользуемся для вычисления вклада  $C_{TT, \ell}^{(S)}$  скалярных мод в мультипольные коэффициенты угловых корреляторов температура-температура:

$$C_{TT, \ell} = \frac{1}{4\pi} \int d^2 \hat{n} \int d^2 \hat{n}' P_\ell(\hat{n} \cdot \hat{n}') \langle \Delta T(\hat{n}) \Delta T(\hat{n}') \rangle, \quad (7.2.1)$$

где  $\Delta T(\hat{n})$  — стохастическая переменная, определяющая отклонение от среднего наблюдаемой температуры в направлении  $\hat{n}$ , а  $\langle \dots \rangle$  обозначают среднее по положениям наблюдателя, или, что эквивалентно, по последовательности событий, приведших к частному виду наблюдаемых температурных флуктуаций. (Метка  $TT$  введена для отличия этого мультипольного коэффициента

от мультипольных коэффициентов в корреляторах температура-поляризация или поляризация-поляризация, см. разд. 7.4.) Конечно же, наблюдается не эта, а другая величина:

$$C_{TT; \ell}^{\text{набл}} = \frac{1}{4\pi} \int d^2\hat{n} \int d^2\hat{n}' P_\ell(\hat{n} \cdot \hat{n}') \Delta T(\hat{n}) \Delta T(\hat{n}'),$$

но, как было показано в разд. 2.6, космическая дисперсия, т. е. средний квадрат относительной разницы между этой величиной и (7.2.1), составляет  $2/(2\ell + 1)$ , и поэтому при  $\ell \gg 1$  её можно пренебречь. В этом разделе будет рассматриваться только вклад  $C_{TT; \ell}^{(S)}$  скалярных мод в  $C_{TT; \ell}$ ; как мы видели в разд. 5.2, тензорные и скалярные моды не интерферируют, поэтому вкладом тензорных мод можно заняться отдельно в следующем разделе.

Во-первых, давайте воспользуемся результатами, полученными в предыдущем разделе с помощью кинематической теории из разд. 6.1. Применение уравнения Больцмана приводит к формулам для температурной флуктуации (7.1.7)–(7.1.9). Для вычисления коэффициентов парциального разложения температурной флуктуации, воспользуемся известным разложением (2.6.16) плоской волны по полиномам Лежандра, а также следующей теоремой для сферических гармоник:

$$e^{i\hat{q}\cdot\hat{n}\rho} = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} i^\ell j_\ell(\rho) Y_\ell^m(\hat{n}) Y_\ell^{m*}(\hat{q}). \quad (7.2.2)$$

При подстановке этого выражения в уравнения (7.1.7)–(7.1.9) и замене факторов  $i\hat{q}\cdot\hat{n}$  на производные сферической функции Бесселя  $j_\ell$  скалярный вклад в температурную флуктуацию, наблюдаемую в направлении  $\hat{n}$ , имеет вид

$$(\Delta T(\hat{n}))^{(S)} = \sum_{\ell m} a_{T; \ell m}^S Y_\ell^m(\hat{n}), \quad (7.2.3)$$

где

$$\begin{aligned} a_{T; \ell m}^S &= 4\pi i^\ell T_0 \int d^3 q \alpha(\mathbf{q}) Y_\ell^{m*}(\hat{q}) \int_{t_1}^{t_0} dt \times \\ &\times \left[ j_\ell(qr(t)) F(q, t) + j_\ell'(qr(t)) G(q, t) + j_\ell''(qr(t)) H(q, t) \right]. \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

Здесь  $\alpha(\mathbf{q})$  — стохастический параметр доминантной скалярной моды, нормированной согласно (5.2.7):

$$\langle \alpha(\mathbf{q}) \alpha^*(\mathbf{q}') \rangle = \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}'); \quad (7.2.5)$$

$t_1$  — произвольный момент времени, достаточно далеко отстоящий от начала рекомбинации, так что излученный в это время фотон до настоящего момента рассеется много раз;  $r(t)$  — радиальная координата точки, из которой свет, излученный в момент времени  $t$ , достигнет нас в настоящий момент времени  $t_0$ ;

$$r(t) \equiv \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}; \quad (7.2.6)$$

а  $F(q, t)$ ,  $G(q, t)$  и  $H(q, t)$  — зависящие от времени формфакторы, определяемые выражениями

$$\begin{aligned} F(q, t) = & \exp \left( - \int_t^{t_0} \omega_c(t') dt' \right) \left[ \omega_c(t) \left( \frac{3}{4} \Phi(q, t) + \frac{3}{16} \Pi(q, t) - \right. \right. \\ & - \frac{1}{2} a^2(t) \ddot{B}_q(t) - \frac{1}{2} a(t) \dot{a}(t) \dot{B}_q(t) \Big) - \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( A_q(t) + a^2(t) \ddot{B}_q(t) + a(t) \dot{a}(t) \dot{B}_q(t) \right) \right], \right. \end{aligned} \quad (7.2.7)$$

$$G(q, t) = -q\omega_c(t) \exp \left( - \int_t^{t_0} \omega_c(t') dt' \right) \left( \frac{\delta u_{6q}(t)}{a(t)} + \frac{a(t) \dot{B}_q(t)}{2} \right), \quad (7.2.8)$$

$$H(q, t) = \frac{3}{16} \omega_c(t) \exp \left( - \int_t^{t_0} \omega_c(t') dt' \right) \Pi(q, t). \quad (7.2.9)$$

В качестве напоминания:  $\omega_c(t)$  — частота столкновений фотонов в момент времени  $t$ ;  $A_q(t)$  и  $B_q(t)$  — скалярные поля в возмущении метрики в синхронной калибровке, определенные в разд. 5.2;  $\Phi(q, t)$  и  $\Pi(q, t)$  — скалярные функции источников, задаваемые уравнением (6.1.21); а  $\delta u_{6q}(t)$  — скалярный потенциал поля скоростей барионной плазмы. Нижний индекс  $T$  был добавлен к  $a_{\ell m}$ , введенным в разд. 2.6 для указания на то, что эти величины являются парциальными коэффициентами в температуре, а не в поляризации, а верхний индекс  $S$  был добавлен для отличия скалярных вкладов от тензорных.

Вместе со свойством ортонормируемости полиномов Лежандра (2.6.19) выражения (7.2.1) и (7.2.3)–(7.2.5) задают скалярные мультипольные коэффициенты<sup>9)</sup>:

$$C_{TT, \ell}^S = 16\pi^2 T_0^2 \int_0^\infty q^2 dq \times$$

<sup>9)</sup> Производные сферических функций Бесселя в формуле (7.2.10) можно выразить в виде производной по времени и затем интегрированием по частям записать в виде интеграла от единственного, умноженного на  $j_\ell(qr(t))$ , формфактора. Полученный результат эквивалентен уравнению (16) работы M. Zaldarriaga and U. Seljak, *Phys. Rev. D* **55**, 1830 (1997) [astro-ph/9609170], кроме разницы в нормировке: функции источников  $\Pi$  и  $\Phi$ , использованные здесь, в 4 раза больше функций в работе Залдарриаги и Селяка.

$$\times \left| \int_{t_1}^{t_0} dt \left[ j_\ell(qr(t))F(q, t) + j'_\ell(qr(t))G(q, t) + j''_\ell(qr(t))H(q, t) \right] \right|^2. \quad (7.2.10)$$

Данная формула приводит к результатам высокой точности, однако компьютерные вычисления, с помощью которых на основе предложенного выше способа вычисляются мультипольные коэффициенты  $C_{TT, \ell}^S$  не особенно презентативны. Вместо этого мы применим ряд приближений, которые приведут к простой аналитической формуле для  $C_{TT, \ell}^S$ .

Для начала мы не будем учитывать интегральный эффект Сакса—Вольфе, задаваемый последним слагаемым в формуле (7.2.7). Этот эффект важен только для относительно малых значений  $\ell$ , когда космическая дисперсия начинает влиять на измерения  $C_{TT, \ell}^S$ .

Далее, предположим, что имеет место внезапный переход от идеальной непроницаемости к идеальной прозрачности в определенный момент времени  $t_{\text{п. р.}}^{10)}$  и возмущение определяется одной доминантной модой. Тогда относительная температурная флуктуация принимает вид (7.1.15):

$$\left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right) = \int d^3 q \alpha(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot \hat{n} r_{\text{п. р.}}} (F(q) + i\hat{q} \cdot \hat{n} G(q)), \quad (7.2.11)$$

который также был получен в конце разд. 7.1, путем следования фотонным траекториям после момента последнего рассеяния. (Здесь  $r_{\text{п. р.}} = r(t_{\text{п. р.}})$  — сопутствующий радиус поверхности последнего рассеяния.) Теперь мы не будем пользоваться формулами для формфакторов  $F(q)$  и  $G(q)$  (7.1.16) и (7.1.17), вместо этого будем считать их произвольными, а затем вернемся к специальному виду (7.1.16) и (7.1.17).

Подставляя (7.2.2) в соотношение (7.2.11) и заменяя  $i\hat{q} \cdot \hat{n}$  в доплеровском вкладе на  $\partial/\partial(qr_{\text{п. р.}})$ , мы опять получаем парциальное разложение (7.2.3), но на этот раз

$$a_{T, \ell m}^S = 4\pi i^\ell T_0 \int d^3 q \alpha(\mathbf{q}) Y_\ell^{m*}(\hat{q}) [j_\ell(qr_{\text{п. р.}})F(q) + j'_\ell(qr_{\text{п. р.}})G(q)]. \quad (7.2.12)$$

Подстановка этого выражения в формулу (7.2.1) и использование соотношения (7.2.5) дает мультипольные коэффициенты

$$C_{TT, \ell}^S = \frac{1}{2\ell + 1} \sum_{m=-\ell}^{\ell} |a_{\ell m}|^2 = 16\pi^2 T_0^2 \int_0^\infty q^2 dq [j_\ell(qr_{\text{п. р.}})F(q) + j'_\ell(qr_{\text{п. р.}})G(q)]^2. \quad (7.2.13)$$

Это стандартный результат, однако он не содержит явной информации относительно зависимости  $C_{TT, \ell}^S$  от  $\ell$ . Для этой цели воспользуемся дальней-

<sup>10)</sup> Чтобы скорректировать возможную неточность данного приближения, позже мы учтем эффект затухания акустических осцилляций до наступления момента времени  $t_{\text{п. р.}}$ , и усредним температурные флуктуации по времени последнего рассеяния.

шим приближением: сосредоточимся на наиболее интересном случае больших  $\ell$ , когда космической дисперсией можно пренебречь. В этом случае можно воспользоваться приближенной формулой для сферических функций Бесселя<sup>11)</sup>:

$$j_\ell(\rho) \rightarrow \begin{cases} \frac{\cos b \cos [\nu(\operatorname{tg} b - b) - \pi/4]}{\nu\sqrt{\sin b}}, & \rho > \nu, \\ 0, & \rho < \nu, \end{cases} \quad (7.2.14)$$

где  $\nu \equiv \ell + 1/2$ ,  $\cos b \equiv \nu/\rho$  при  $0 \leq b \leq \pi/2$ . Данное приближение справедливо при  $[\nu^2 - \rho^2] \gg \nu^{4/3}$ . Следовательно, при  $\ell \gg 1$  эта формула может быть использована для большинства пределов интегрирования в выражении (7.2.13). Более того, при  $\rho > \nu \gg 1$  фаза  $\nu(\operatorname{tg} b - b)$  в (7.2.14) является очень быстро возрастающей функцией от  $\rho$ , поэтому действие производной на сферическую функцию Бесселя в уравнении (7.2.13) может быть сведено в основном к действию на данную фазу:

$$j'_\ell(\rho) \rightarrow \begin{cases} -\frac{\cos b \sqrt{\sin b} \sin [\nu(\operatorname{tg} b - b) - \pi/4]}{\nu}, & \rho > \nu, \\ 0, & \rho < \nu. \end{cases} \quad (7.2.15)$$

---

Дифференцируя множитель  $1/\sqrt{\sin b}$  в (7.2.14), очевидным образом приходим к расходимости в интеграле при  $\rho = \nu$ , однако эта расходимость мнимая; для  $\rho$ , очень близких к  $\nu$ , приближение (7.2.14) перестает работать, сингулярность пропадает.

---

Подставляя эти пределы в выражение (7.2.13) и заменяя переменную интегрирования  $q$  на  $b = \cos^{-1}(\nu/q r_{\text{п. р.}})$ , получаем

$$\begin{aligned} C_{TT, \ell}^S = & \frac{16\pi^2\nu}{r_{\text{п. р.}}^3} \int_0^{\pi/2} \frac{db}{\cos^2 b} \left\{ F\left(\frac{\nu}{r_{\text{п. р.}} \cos b}\right) \cos \left[\nu(\operatorname{tg} b - b) - \frac{\pi}{4}\right] - \right. \\ & \left. - \sin b G\left(\frac{\nu}{r_{\text{п. р.}} \cos b}\right) \sin \left[\nu(\operatorname{tg} b - b) - \frac{\pi}{4}\right] \right\}^2. \end{aligned} \quad (7.2.16)$$

При  $\nu \gg 1$  функции  $\cos [\nu(\operatorname{tg} b - b) - \pi/4]$  и  $\sin [\nu(\operatorname{tg} b - b) - \pi/4]$  осциллируют очень быстро, поэтому средние значения  $\cos^2[\nu(\operatorname{tg} b - b) - \pi/4]$  и  $\sin^2[\nu(\operatorname{tg} b - b) - \pi/4]$  равны  $1/2$ , а средние значения  $\cos [\nu(\operatorname{tg} b - b) - \pi/4] \times \sin [\nu(\operatorname{tg} b - b) - \pi/4]$  равны 0. Тогда, не принимая во внимание разницу между

---

<sup>11)</sup> Например, см. I. S. Gradshteyn & I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, в переведенном, исправленном и расширенном издании под ред. A. Jeffrey (Academic Press, New York, 1980): формула 8.453.1. (Русск. оригинал. изд.: Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с. — Прим. ред. перев.)

$\ell$  и  $\nu = \ell + 1/2$  и снова заменяя переменную интегрирования  $b$  на  $\beta = 1/\cos b$ , выражение (7.2.16) приводим к виду<sup>12)</sup>

$$\ell(\ell+1)C_{TT,\ell}^S = \frac{8\pi^2\ell^3}{r_{\text{п. р.}}^3} \int_1^\infty \frac{\beta d\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \left[ F^2 \left( \frac{\ell\beta}{r_{\text{п. р.}}} \right) + \frac{\beta^2 - 1}{\beta^2} G^2 \left( \frac{\ell\beta}{r_{\text{п. р.}}} \right) \right]. \quad (7.2.17)$$

Мы увидим, что формфакторы  $F(q)$  и  $G(q)$  при больших  $q$  быстро спадают, отчасти потому что  $|\mathcal{R}_q|^2$  убывает более-менее как  $q^{-3}$ , поэтому интеграл по  $\beta$  в точке  $\beta = \infty$  сходится, при этом на самом деле основной вклад дают малые значения  $\beta$ . Таким образом, интеграл от  $F^2$  получает самый большой вклад при  $\beta \approx 1$ , или, другими словами, при  $q \approx \ell/r_{\text{п. р.}}$ , или  $q/a_{\text{п. р.}} \approx \ell/d_y$ , где  $d_y = r_{\text{п. р.}} a_{\text{п. р.}}$  — расстояние по угловому диаметру до поверхности последнего рассеяния. С другой стороны, фактор  $\beta^2 - 1$ , умноженный на  $G^2$ , в выражении (7.2.17) сокращает вклад от значений  $\beta$ , очень близких к единице, поэтому пропорциональный  $G^2$  доплеровский член дает в мультипольные коэффициенты относительно малый вклад.

Даже без детальных вычислений формфакторов  $F(q)$  и  $G(q)$  известно, что они зависят от барионной плотности и суммарной плотности вещества в момент последнего рассеяния, которые при современной температуре реликтового фона могут быть выражены в терминах  $\Omega_b h^2$  и  $\Omega_m h^2$ , но поскольку пространственной кривизной и темной энергией в момент последнего рассеяния (предположительно) можно пренебречь, формфакторы не могут зависеть от  $\Omega_K$ , или  $\Omega_\Lambda$ , или  $H_0$ . Таким образом, здесь имеется высокая степень вырожденности; вся зависимость от  $\Omega_K$ , или  $\Omega_\Lambda$ , или  $H_0$  может возникать только посредством единственного параметра  $r_{\text{п. р.}}$ , радиуса Робертсона—Уокера поверхности последнего рассеяния. Если предположить, как это обычно делается, что  $\Omega_K = 0$ , так что  $\Omega_\Lambda \simeq 1 - \Omega_m$ , то из температурных анизотропий можно найти значения  $H_0$ , а также  $\Omega_m$  или  $\Omega_b$ , но не  $\Omega_K = 0$ , если нет информации насчет  $H_0$  из других источников. Аналогичным образом, на основе температурных анизотропий невозможно отличить квинтэссенцию от постоянной вакуумной энергии. Более того,  $r_{\text{п. р.}}$  и  $\ell$  возникают в  $\ell(\ell+1)C_{TT,\ell}^{(S)}$  только в виде отношения  $\ell/r_{\text{п. р.}}$ , поэтому значения  $\Omega_K$ ,  $\Omega_\Lambda$  и  $H_0$  могут влиять только на масштаб  $\ell$ -зависимости величины  $\ell(\ell+1)C_{TT,\ell}^{(S)}$ . Например, значения этих параметров могут изменять положения пиков в  $\ell(\ell+1)C_{TT,\ell}^{(S)}$  на некоторый общий фактор, однако они не меняют их высоты.

Далее воспользуемся приближением, что возмущения гравитационного поля в момент последнего рассеяния подавляются возмущениями плотности темной материи. Мы уже отмечали в связи с интегральным эффектом СВ

<sup>12)</sup> Более строгий, но достаточно трудоемкий вывод приведен в работе S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **64**, 123512 (2001) [astro-ph/0103281]. Вклад  $F(q)$  ранее был вычислен в работе J. R. Bond, «Theory and Observations of the Cosmic Background Radiation», in *Cosmology and Large Scale Structure*, eds. R. Schaeffer, J. Silk, M. Spiro and J. Zinn-Justin (Elsevier, 1996), разд. 5.1.3.

в предыдущем разделе, что в этом случае  $\dot{A}_q$  обращается в ноль (потому что каждый член в правой части уравнения (5.3.38) не зависит от времени). Поле  $\psi_q$ , эволюцию которого мы проследили в гл. 6, в общем случае определяется как  $\psi_q \equiv (3\dot{A}_q - q^2\dot{B}_q)/2$ , поэтому здесь  $\dot{B}_q = -2\psi_q/q^2$ , и так как из уравнения (6.5.16) следует, что  $\psi_q \propto t^{-1/3}$ , также получаем  $\ddot{B}_q = 2\psi_q/(3tq^2)$ . Помимо этого,  $a \propto t^{2/3}$ , поэтому выражения (7.1.16) и (7.1.17) приводят к формфакторам вида

$$F(q) = \frac{1}{3}\delta_{\gamma q}(t_{\text{n. p.}}) + \frac{a^2(t_{\text{n. p.}})\psi_q(t_{\text{n. p.}})}{3q^2t_{\text{n. p.}}}, \quad (7.2.18)$$

$$G(q) = -\frac{q\delta u_{\gamma q}(t_{\text{n. p.}})}{a(t_{\text{n. p.}})} + \frac{a(t_{\text{n. p.}})\psi_q(t_{\text{n. p.}})}{q}, \quad (7.2.19)$$

где было использовано соотношение

$$\frac{\delta T_q}{T} = \frac{\delta\rho_{\gamma q}}{4\bar{\rho}_\gamma} = \frac{\delta_{\gamma q}}{3}.$$

В качестве следующего приближения мы воспользуемся решениями (6.5.16), (6.5.17) и (6.5.18) из нашего анализа эволюции Вселенной в гл. 6, в которой мы пренебрегали отношением плотностей барионов и темной материи:

$$\psi_q(t_{\text{n. p.}}) = -\frac{3q^2t_{\text{n. p.}}\mathcal{R}_q^r\mathcal{T}(\kappa)}{5a_{\text{n. p.}}^2}, \quad (7.2.20)$$

$$\begin{aligned} \delta_{\gamma q}(t_{\text{n. p.}}) &= \frac{3\mathcal{R}_q^r}{5} \left[ \mathcal{T}(\kappa)(1+3R_{\text{n. p.}}) - (1+R_{\text{n. p.}})^{-1/4} \exp\left(-\int_0^{t_{\text{n. p.}}} \Gamma dt\right) \mathcal{S}(\kappa) \times \right. \\ &\quad \left. \times \cos\left(\int_0^{t_{\text{n. p.}}} \frac{q dt}{a(t)\sqrt{3(1+R(t))}} + \Delta(\kappa)\right) \right], \end{aligned} \quad (7.2.21)$$

$$\begin{aligned} \delta u_{\gamma q}(t_{\text{n. p.}}) &= \frac{3\mathcal{R}_q^r}{5} \left[ -t_{\text{n. p.}}\mathcal{T}(\kappa) + \frac{a_{\text{n. p.}}}{\sqrt{3}q(1+R_{\text{n. p.}})^{3/4}} \exp\left(-\int_0^{t_{\text{n. p.}}} \Gamma dt\right) \mathcal{S}(\kappa) \times \right. \\ &\quad \left. \times \sin\left(\int_0^{t_{\text{n. p.}}} \frac{q dt}{a(t)\sqrt{3(1+R(t))}} + \Delta(\kappa)\right) \right], \end{aligned} \quad (7.2.22)$$

Здесь

$$R(t) \equiv \frac{3\bar{\rho}_6(t)}{4\bar{\rho}_\gamma(t)}, \quad R_{\text{n. p.}} \equiv R(t_{\text{n. p.}}) \quad \text{и} \quad a_{\text{n. p.}} \equiv a(t_{\text{n. p.}}),$$

а  $\mathcal{T}(\kappa)$ ,  $\mathcal{S}(\kappa)$ ,  $\Delta(\kappa)$  — передаточные функции, определенные и вычисленные в разд. 6.5;  $\kappa \equiv \sqrt{2}q/q_{\text{EQ}}$ , где  $q_{\text{EQ}}$  является волновым числом, возникающим

под горизонтом при балансе вещества и излучения; а  $\Gamma(t)$  — скорость акустического затухания (6.4.25). Подстановка выражений (7.2.20)–(7.2.22) в (7.2.18) и (7.2.19) приводит к формфакторам вида

$$F(q) = \frac{\mathcal{R}_q^r}{5} \left[ 3\mathcal{T}(\kappa)R_{\text{n.p.}} - (1 + R_{\text{n.p.}})^{-1/4} \exp \left( - \int_0^{t_{\text{n.p.}}} \Gamma dt \right) S(\kappa) \times \right. \\ \left. \times \cos \left( \int_0^{t_{\text{n.p.}}} \frac{q dt}{a(t)\sqrt{3(1+R(t))}} + \Delta(\kappa) \right) \right], \quad (7.2.23)$$

$$G(q) = -\frac{\sqrt{3}\mathcal{R}_q^r}{5(1+R_{\text{n.p.}})^{3/4}} \exp \left( - \int_0^{t_{\text{n.p.}}} \Gamma dt \right) S(\kappa) \times \\ \times \sin \left( \int_0^{t_{\text{n.p.}}} \frac{q dt}{a(t)\sqrt{3(1+R(t))}} + \Delta(\kappa) \right). \quad (7.2.24)$$

Отметим, что в  $G(q)$  «медленные» вклады сократились, в формфакторе  $F(q)$  они также бы сократились, если бы он не отвечал конечному отношению плотностей барионов и темной материи в момент последнего рассеяния.

Теперь давайте займемся затруднением, возникающим только в «быстрой» части формфакторов в случае коротких длин волн. Мы предполагали, что непроницаемость Вселенной спадает до нуля мгновенно в момент времени  $t_{\text{n.p.}}$  последнего рассеяния, но, естественно, этот переход занимает какое-то конечное время, в течение которого формфакторы должны усредняться. Это не сильно влияет на вклад медленных мод, но для больших волновых чисел косинусы и синусы в уравнениях (7.2.23) и (7.2.24) являются быстро осциллирующими функциями времени  $t_{\text{n.p.}}$ , поэтому с помощью усреднения быстрые члены можно значительно уменьшить. Это похоже на то, что в другом контексте называется *затуханием Ландау*, за тем исключением, что обычно затухание Ландау возникает из-за размытости колебательных частот, в то время как в нашей ситуации оно порождается размытостью момента времени, в который наблюдается осциллирующая амплитуда.

Продолжая наш анализ, заметим, что поскольку вероятность последнего рассеяния является функцией времени с острым пиком, то ее можно аппроксимировать гауссовым приближением: вероятность того, что последнее рассеяние произойдет между  $t$  и  $t + dt$ , берется в виде

$$P(t) dt = \frac{\exp \left[ -\frac{(t - t_{\text{n.p.}})^2}{2\sigma_t^2} \right] dt}{\sigma_t \sqrt{2\pi}}. \quad (7.2.25)$$

В выражениях (7.2.23) и (7.2.24) следует сделать следующие замены:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \left( \int_0^{t_{\text{n.p.}}} \omega dt + \Delta \right) \\ \sin \left( \int_0^{t_{\text{n.p.}}} \omega dt + \Delta \right) \end{array} \right\} \xrightarrow{-\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P(t) dt \left\{ \begin{array}{l} \cos \left( \int_0^t \omega dt + \Delta \right) \\ \sin \left( \int_0^t \omega dt + \Delta \right) \end{array} \right\}, \quad (7.2.26)$$

где

$$\omega = \frac{q}{a\sqrt{3(1+R)}}.$$

Для функции распределения с острым пиком  $P(t)$  данные интегралы можно взять, разложив аргументы синусов и косинусов до первого порядка по  $t - t_{\text{n.p.}}$ :

$$\int_0^t \omega dt \simeq \int_0^{t_{\text{n.p.}}} \omega dt + \omega_{\text{n.p.}}(t - t_{\text{n.p.}}).$$

Теперь интегралы (7.2.26) легко вычисляются:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) dt \left\{ \begin{array}{l} \cos \left( \int_0^t \omega dt + \Delta \right) \\ \sin \left( \int_0^t \omega dt + \Delta \right) \end{array} \right\} \simeq \exp \left( -\frac{\omega_{\text{n.p.}}^2 \sigma_t^2}{2} \right) \left\{ \begin{array}{l} \cos \left( \int_0^{t_{\text{n.p.}}} \omega dt + \Delta \right) \\ \sin \left( \int_0^{t_{\text{n.p.}}} \omega dt + \Delta \right) \end{array} \right\}. \quad (7.2.27)$$

Таким образом, весь эффект усреднения состоит во введении дополнительного затухающего множителя  $\exp(-\omega_{\text{n.p.}}^2 \sigma_t^2/2)$  в быструю часть формфакторов. Обе величины,  $\Gamma$  и  $\omega_{\text{n.p.}}^2$ , пропорциональны  $q^2$ , поэтому правомерно записать

$$\int_0^{t_{\text{n.p.}}} \Gamma dt + \frac{\omega_{\text{n.p.}}^2 \sigma_t^2}{2} = \frac{q^2 d_D^2}{a_{\text{n.p.}}^2}, \quad (7.2.28)$$

$d_D$  — длина затухания, определяемая выражениями (6.4.25) и (7.2.27) как

$$d_D^2 = d_{\text{Силк}}^2 + d_{\text{Ландau}}^2, \quad (7.2.29)$$

$$d_{\text{Силк}}^2 = a_{\text{n.p.}}^2 \int_0^{t_{\text{n.p.}}} \frac{t_\gamma}{6a^2(1+R)} \left\{ \frac{16}{15} + \frac{R^2}{(1+R)} \right\} dt, \quad (7.2.30)$$

$$d_{\text{Ландау}}^2 = \frac{\sigma_t^2}{6(1 + R_{\text{n. п.}})}, \quad (7.2.31)$$

где  $t_\gamma = 1/\omega_c$  является временем свободного пробега фотонов, а  $R \equiv 3\bar{\rho}_6/(4\bar{\rho}_\gamma)$ .

Для вычисления затухающего члена Силка напомним, что  $R \propto a$ , поэтому

$$t_\gamma = \frac{1}{n_e \sigma_T c} = \frac{R^3}{n_{60} R_0^3 (1 - Y) X \sigma_T c}, \quad (7.2.32)$$

где  $R_0 = 3\Omega_6/(4\Omega_\gamma)$  — текущее значение  $R$ ,  $Y \simeq 0,24$  — доля нуклонов, находящихся в виде неионизованного гелия приблизительно во время последнего рассеяния,  $n_{60} = 3H_0^2 \Omega_6/(8\pi G m_N)$  является текущим значением плотности барионов, а  $X(R)$  — вычисленная в разд. 2.3 относительная ионизация. Помимо этого,

$$dt = \frac{dR}{RH_0 \sqrt{\Omega_m(R_0/R)^3 + \Omega_i(R_0/R)^4}} = \frac{R dR}{H_0 \sqrt{\Omega_m} R_0^{3/2} \sqrt{R_{\text{EQ}} + R}}, \quad (7.2.33)$$

где  $R_{\text{EQ}} \equiv \Omega_i R_0 / \Omega_m = 3\Omega_i \Omega_6 / (4\Omega_m \Omega_\gamma)$  является значением  $R$  при балансе вещества и излучения. Собирая все вместе, находим, что длина затухания Силка равна

$$\begin{aligned} d_{\text{Силк}}^2 &= \frac{R_{\text{n. п.}}^2}{6(1 - Y)n_{60}\sigma_T c H_0 \sqrt{\Omega_m} R_0^{9/2}} \times \\ &\times \int_0^{R_{\text{n. п.}}} \frac{R^2 dR}{X(R)(1 + R)\sqrt{R_{\text{EQ}} + R}} \left\{ \frac{16}{15} + \frac{R^2}{(1 + R)} \right\}. \end{aligned} \quad (7.2.34)$$

Также стандартное отклонение  $\sigma_t$  по времени последнего рассеяния связано со стандартным отклонением  $\sigma$  по температуре последнего рассеяния, вычисленным в разд. 2.3, соотношением  $\sigma_t = 3t_{\text{n. п.}}\sigma/(2T_{\text{n. п.}})$ , поэтому

$$d_{\text{Ландау}}^2 = \frac{3\sigma^2 t_{\text{n. п.}}^2}{8T_{\text{n. п.}}^2(1 + R_{\text{n. п.}})}. \quad (7.2.35)$$

Теперь формфакторы (7.2.23) и (7.2.24) можно записать в виде явных функций от волнового числа:

$$\begin{aligned} F(q) &= \frac{\mathcal{R}_q^r}{5} \left[ 3T \left( \frac{qd_T}{a_{\text{n. п.}}} \right) R_{\text{n. п.}} - (1 + R_{\text{n. п.}})^{-1/4} \mathcal{S} \left( \frac{qd_T}{a_{\text{n. п.}}} \right) \times \right. \\ &\times \exp \left( -\frac{q^2 d_D^2}{a_{\text{n. п.}}^2} \right) \cos \left( \frac{qd_H}{a_{\text{n. п.}}} + \Delta \left( \frac{qd_T}{a_{\text{n. п.}}} \right) \right) \left. \right], \end{aligned} \quad (7.2.36)$$

$$G(q) = -\frac{\sqrt{3}\mathcal{R}_q^r}{5(1 + R_{\text{n. п.}})^{3/4}} \exp \left( -\frac{q^2 d_D^2}{a_{\text{n. п.}}^2} \right) \mathcal{S} \left( \frac{qd_T}{a_{\text{n. п.}}} \right) \sin \left( \frac{qd_H}{a_{\text{n. п.}}} + \Delta \left( \frac{qd_T}{a_{\text{n. п.}}} \right) \right), \quad (7.2.37)$$

где  $d_T$  — это длина, определяемая с помощью перезаписи аргумента передаточных функций в виде  $\kappa = qd_T/a_{\text{п.р.}}$ , так что уравнение (6.5.9) дает

$$d_T = \frac{\sqrt{\Omega_i}}{(1+z_{\text{п.р.}})H_0\Omega_M} = \frac{0,0177}{\Omega_M h^2} \text{ Мпк.} \quad (7.2.38)$$

Помимо этого,  $d_H$  является расстоянием до акустического горизонта при последнем рассеянии, задаваемым формулой

$$\begin{aligned} d_H \equiv a_{\text{п.р.}} \int_0^{t_{\text{п.р.}}} \frac{dt}{a\sqrt{3(1+R)}} = \\ = \frac{2}{H_0\sqrt{3R_{\text{п.р.}}\Omega_M}(1+z_{\text{п.р.}})^{3/2}} \ln \left( \frac{\sqrt{1+R_{\text{п.р.}}} + \sqrt{R_{\text{EQ}} + R_{\text{п.р.}}}}{1 + \sqrt{R_{\text{EQ}}}} \right), \end{aligned} \quad (7.2.39)$$

где опять

$$R_{\text{EQ}} \equiv \frac{3\Omega_i\Omega_b}{4\Omega_M\Omega_\gamma} \quad \text{и} \quad R_{\text{п.р.}} \equiv \frac{3\Omega_b}{4\Omega_\gamma(1+z_{\text{п.р.}})}.$$

Прежде чем подставить полученные формфакторы в формулу (7.2.17), следует упомянуть еще одно затруднение. При красном смещении  $z_{\text{реион}}$  порядка 10 оставшийся со времени рекомбинации нейтральный водород начинает реионизоваться под действием ультрафиолетового излучения, идущего от первого поколения массивных звезд. Реликтовые фотоны обладают небольшой, но отличной от нуля вероятностью  $1 - \exp(-\tau_{\text{реион}})$  (где  $\tau_{\text{реион}}$  — это оптическая глубина реионизированной плазмы) того, что они рассеиваются электронами, высвобожденными при реионизации. Тогда температурная анизотропия  $\Delta T$  становится суммой двух слагаемых. Одно из них обусловлено фотонами, которые не рассеиваются на реионизованном водороде, и в точности равно вычисленной нами анизотропии, умноженной на вероятность  $\exp(-\tau_{\text{реион}})$  того, что рассеяние не произойдет. Другое слагаемое обусловлено рассеянными фотонами, и поскольку это рассеяние происходит при красном смещении, много меньшем  $z_{\text{п.р.}} \simeq 1090$ , мы видим анизотропии на малых расстояниях, и следовательно, при много меньших значениях  $\ell$ . Таким образом, влияние рассеяния реионизированной плазмы на  $C_{TT,\ell}^{(S)}$  сводится к простому умножению  $C_{TT,\ell}^{(S)}$  на фактор  $\exp(-2\tau_{\text{реион}})$ , за исключением очень маленьких значений  $\ell$ , когда в любом случае космическая дисперсия препятствует интерпретации наблюдений. Это означает, что наблюдения только температурных анизотропий не могут эффективно отделить вероятность реионизации от нормировочного масштаба функции  $\mathcal{R}_q^r$ , характеризующего первичные флуктуации; из них следует лишь значение величины  $|\mathcal{R}_q^r|^2 \exp(-2\tau_{\text{реион}})$ . Измерения поляризаций образующихся при рассеянии после реионизации реликтовых фотонов (см. разд. 7.4) указывают на то, что  $\exp(-2\tau_{\text{реион}}) \approx 0,8$ .

Величина  $\mathcal{R}_q^r$ , как правило, параметризуется в виде, эквивалентном следующему выражению:

$$|\mathcal{R}_q^r|^2 = N^2 q^{-3} \left( \frac{q/a_0}{k_{\mathcal{R}}} \right)^{n_s - 1}, \quad (7.2.40)$$

где  $n_s$  может зависеть от волнового числа. Причина удобства выбора данной параметризации такова, что тогда

$$\left( \frac{\ell}{r_{\text{n.p.}}} \right)^3 |\mathcal{R}_{\beta\ell/r_{\text{n.p.}}}^r|^2 = \frac{N^2}{\beta^3} \left( \frac{\ell\beta}{k_{\mathcal{R}} d_y (1 + z_{\text{n.p.}})} \right)^{n_s - 1},$$

при этом окажется, что  $n_s$  не сильно отличается от 1. В нормировку  $|\mathcal{R}_q^r|^2$  входит только  $N^2 k_{\mathcal{R}}^{1-n_s}$ , поэтому выбор  $k_{\mathcal{R}}$  остается произвольным; как правило, выбирают  $k_{\mathcal{R}} = 0,05$  Мпк.

На основе вышесказанного мы заключаем, что для приемлемо больших значений  $\ell$  (скажем,  $\ell > 20$ ), когда мы можем пренебречь космической дисперсией и интегральным эффектом СВ, можем использовать приближения больших  $\ell$ , которые привели к уравнению (7.2.17), и свести эффект реонизации к простому множителю  $\exp(-2\tau_{\text{реон}})$ . Величина, которая обычно считается ответственной за скалярный вклад в мультипольные коэффициенты, равна

$$\begin{aligned} \frac{\ell(\ell+1)C_{TT,\ell}^S}{2\pi} &= \frac{4\pi T_0^2 N^2 e^{-2\tau_{\text{реон}}}}{25} \int_1^\infty d\beta \left( \frac{\beta\ell}{\ell_{\mathcal{R}}} \right)^{n_s - 1} \times \\ &\times \left\{ \frac{1}{\beta^2 \sqrt{\beta^2 - 1}} \left[ 3\mathcal{T}\left(\frac{\beta\ell}{\ell_T}\right) R_{\text{n.p.}} - \right. \right. \\ &- (1 + R_{\text{n.p.}})^{-1/4} \mathcal{S}\left(\frac{\beta\ell}{\ell_T}\right) \exp\left(-\frac{\beta^2\ell^2}{\ell_D^2}\right) \cos\left(\frac{\beta\ell}{\ell_H} + \Delta\left(\frac{\beta\ell}{\ell_T}\right)\right) \left. \right]^2 + \\ &+ \left. \frac{3\sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta^4(1 + R_{\text{n.p.}})^{3/2}} \exp\left(-\frac{2\beta^2\ell^2}{\ell_D^2}\right) \mathcal{S}^2\left(\frac{\beta\ell}{\ell_T}\right) \sin^2\left(\frac{\beta\ell}{\ell_H} + \Delta\left(\frac{\beta\ell}{\ell_T}\right)\right) \right\}, \end{aligned} \quad (7.2.41)$$

где

$$\ell_D \equiv \frac{d_y}{d_D}, \quad \ell_T \equiv \frac{d_y}{d_T}, \quad \ell_H \equiv \frac{d_y}{d_H}, \quad \ell_{\mathcal{R}} = (1 + z_{\text{n.p.}}) k_{\mathcal{R}} d_y, \quad (7.2.42)$$

а  $d_y$  — это опять расстояние по угловому диаметру до поверхности последнего рассеяния:

$$d_y \equiv r_{\text{n.p.}} a_{\text{n.p.}} = \frac{1}{\Omega_K^{1/2} H_0 (1 + z_{\text{n.p.}})} \operatorname{sh} \left[ \Omega_K^{1/2} \int_{1/(1+z_{\text{n.p.}})}^1 \frac{dx}{\sqrt{\Omega_{\Lambda} x^4 + \Omega_K x^2 + \Omega_M x}} \right], \quad (7.2.43)$$

где мы пренебрегли  $\Omega_i$ , а  $\Omega_K = 1 - \Omega_\Lambda - \Omega_m$ . Если предположить, как обсуждалось ранее, что основной вклад в интеграл по  $\beta$  дают значения  $\beta \approx 1$ , отбросить доплеровский вклад и ненадолго отбросить слагаемое, пропорциональное передаточной функции  $\mathcal{T}$ , то из выражения (7.2.41) следует, что  $C_{TT,\ell}^{(S)}$  имеет пик при  $\chi(\ell) = \pi, 2\pi, 3\pi$  и т. д., где  $\chi(\ell) = \ell/\ell_H + \Delta(\ell/\ell_T)$  является фазой косинуса в (7.2.41) при  $\beta = 1$ . Присутствие положительного сомножителя  $3\mathcal{T}R_{\text{п. р.}}$ , обусловленного инерцией барионной плазмы, слегка увеличивает и сдвигает пики в точках  $\chi = \pi, 3\pi$  и т. д., где косинус отрицателен, и уменьшает пики в точках  $\chi = 2\pi, 4\pi$  и т. д., где косинус положителен. При больших  $\ell$  фактор  $\exp(-\beta^2 \ell^2/d_D^2)$  затухания Силка и Ландау гасит все такие пики. Как скоро станет видно, численные расчеты приводят именно к такой ожидаемой структуре убывающих пиков, причем нечетные пики чуть выше четных.

Теперь можно получить зависимость возникающих в  $C_{TT,\ell}^{(S)}$  величин от различных космологических параметров. Хорошо установленное значение текущей температуры реликтового излучения можно считать зафиксированным (что приводит к значениям  $\Omega_\gamma h^2$  и  $\Omega_i h^2 = \Omega_\gamma h^2 + \Omega_\nu h^2$ ), помимо этого зафиксируем значения  $t_{\text{п. р.}}$ ,  $z_{\text{п. р.}}$  и  $\sigma$ , которые очень слабо зависят от других космологических параметров, тогда

- $R_{\text{п. р.}} \propto \Omega_6 h^2$ ;
- интеграл в уравнении для  $d_{\text{Силк}}^2$  (7.2.34) является функцией, достаточно сложным образом зависящей от  $\Omega_6 h^2$  и  $\Omega_m h^2$ , однако эта зависимость достаточно слаба;
- $d_{\text{Ландау}}^2$  зависит от  $\Omega_6 h^2$  посредством множителя  $(1 + R_{\text{п. р.}})^{-1}$ ;
- $d_T \propto (\Omega_m h^2)^{-1}$ ;
- без учета медленно меняющегося логарифма,  $d_H \propto (\Omega_6 h^2)^{-1/2} (\Omega_m h^2)^{-1/2}$ ;
- лишь  $d_y$  зависит от  $H_0$ ,  $\Omega_\Lambda$ ,  $\Omega_m$ ,  $\Omega_6$  и  $\Omega_K$ , без учета зависимости от  $\Omega_6 h^2$  и  $\Omega_m h^2$ .

---

Для любых наблюдательно допустимых значений  $\Omega_\Lambda$  или  $\Omega_K$  влияние постоянной вакуумной энергии или пространственной кривизны во времена до рекомбинации будет пренебрежимо мало, поэтому их влияние на  $C_{TT,\ell}^{(S)}$  сводится к влиянию на распространение света после рекомбинации, т. е. на  $d_y$ .

---

Чтобы увидеть, насколько хорошо работают на практике сделанные нами приближения, вычислим  $C_{TT,\ell}^{(S)}$  для реалистичного набора значений космологических параметров, взятых из подборки<sup>13)</sup> данных по реликтовому излучению из экспериментов CBI, ACBAR и наблюдений первого года WMAP (о которых чуть позже). Это те же самые параметры, которые были использованы в полномасштабных компьютерных вычислениях, результаты этих

<sup>13)</sup> D. N. Spergel *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 175 (2003) [astro-ph/0302209].

вычислений на текущий момент уже доступны<sup>14)</sup>, так что мы легко сможем сравнивать уравнение (7.2.41) с точным численным расчетом. В данный набор входят следующие космологические параметры:

$$\Omega_M h^2 = 0,13299, \quad \Omega_b h^2 = 0,02238, \quad h = 0,71992, \quad \Omega_\Lambda = 1 - \Omega_M \quad (7.2.44)$$

и<sup>15)</sup>

$$\begin{aligned} n_S &= 0,95820, \quad k_R = 0,05 \text{ Мпк}^{-1}, \\ N^2 &= 1,736 \times 10^{-10}, \quad e^{-2\tau_{\text{реон}}} = 0,80209. \end{aligned} \quad (7.2.45)$$

Выбираем  $T_0 = 2,725$  К, что приводит к  $\Omega_\gamma h^2 = 2,47 \times 10^{-5}$ , и предполагаем, что имеется три аромата безмассовых нейтрино, что приводит к  $\Omega_\nu h^2 = 1,681 \Omega_\gamma h^2 = 4,15 \times 10^{-5}$ . Помимо этого, выбираются описывающие рекомбинацию параметры, вычисленные в разд. 2.3 (они не очень чувствительны к выбору других космологических параметров) при  $\Omega_b h^2 = 0,02$  и  $\Omega_M h^2 = 0,15$ ; в частности,

$$1 + z_{\text{п. р.}} = 1090, \quad \sigma = 262 \text{ К}, \quad t_{\text{п. р.}} = 370 \, 000 \text{ лет.} \quad (7.2.46)$$

Исходя из значений  $\Omega_M h^2$  и  $\Omega_b h^2$  (7.2.44), находим

$$R_0 = 679,6, \quad R_{\text{п. р.}} = 0,6234, \quad R_{\text{EQ}} = 0,2121. \quad (7.2.47)$$

Тогда из соотношений (7.2.38), (7.2.39), (7.2.43) следует, что

$$d_T = 0,1331 \text{ Мпк}, \quad d_H = 0,1351 \text{ Мпк}, \quad d_y = 12,99 \text{ Мпк}, \quad (7.2.48)$$

в то время как длины затухания задаются соотношениями (7.2.34), (7.2.35) и (7.2.29):

$$\begin{aligned} d_{\text{Силк}} &= 0,006555 \text{ Мпк}, \\ d_{\text{Ландау}} &= 0,004809 \text{ Мпк}, \\ d_D &= 0,008130 \text{ Мпк}. \end{aligned} \quad (7.2.49)$$

Наконец, возникающие в выражении (7.2.41) параметры равны

$$\ell_T = 97,60, \quad \ell_H = 96,15, \quad \ell_D = 1598, \quad \ell_R = 708, \quad (7.2.50)$$

а множитель перед интегралом равен

$$\frac{4\pi T_0^2 N^2 e^{-2\tau_{\text{реон}}}}{25} = 519,7 \text{ мкК}^2. \quad (7.2.51)$$

<sup>14)</sup> [http://lambda.gsfc.nasa.gov/data/map/powspec/wmap\\_lcdm\\_pl\\_model\\_ylr1\\_v1.txt](http://lambda.gsfc.nasa.gov/data/map/powspec/wmap_lcdm_pl_model_ylr1_v1.txt)

<sup>15)</sup> Параметр  $N^2$  связан с тем, что обычно называется «амплитудой»  $A$ , посредством соотношения  $4\pi N^2 \equiv 20 \, 000 \pi A / (9T_{\gamma 0}(\text{мкК})^2) = 2,95 \times 10^{-9} A$ . См. например, статью L. Verde *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 195 (2003) [astro-ph/0302218]. Следует заметить, что в силу разных соглашений, используемых при написании интегралов Фурье, величина  $\mathcal{R}_k$  в этой статье равна тому, что мы определили как  $\mathcal{R}_{a0k}^\Gamma$ , умноженному на  $(2\pi)^{3/2}$ . В сноске 14 используется  $A = 0,73935$ , которое соответствует значению  $N^2$ , задаваемому соотношением (7.2.45).

С учетом этих значений результат подстановки в выражение (7.2.41) набора параметров из сноски 14 имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\ell(\ell+1)C_{TT,\ell}^S}{2\pi} = & 519,7 \text{ мкК}^2 \int_1^\infty d\beta \left( \frac{\beta\ell}{708} \right)^{-0,0418} \times \\ & \times \left\{ \frac{1}{\beta^2 \sqrt{\beta^2 - 1}} \left[ 3(0,6234)\mathcal{T}\left(\frac{\beta\ell}{97,6}\right) - \right. \right. \\ & - (1,6234)^{-1/4} \mathcal{S}\left(\frac{\beta\ell}{97,6}\right) \exp\left[-\left(\frac{\beta\ell}{1598}\right)^2\right] \cos\left(\frac{\beta\ell}{96,15} + \Delta\left(\frac{\beta\ell}{97,6}\right)\right) \left. \right]^2 + \\ & \left. + \frac{3\sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta^4(1,6234)^{3/2}} \exp\left[-2\left(\frac{\beta\ell}{1598}\right)^2\right] \mathcal{S}^2\left(\frac{\beta\ell}{97,6}\right) \sin^2\left(\frac{\beta\ell}{96,15} + \Delta\left(\frac{\beta\ell}{97,6}\right)\right) \right\}. \end{aligned} \quad (7.2.52)$$

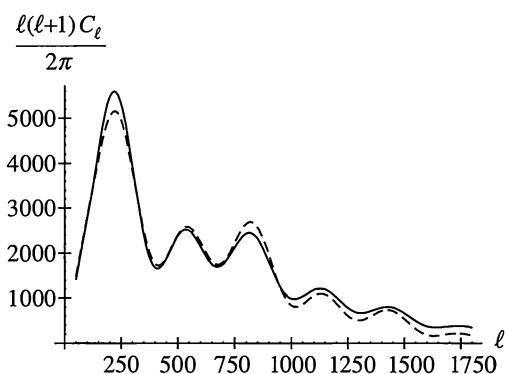
Интеграл по  $\beta$  сходится очень быстро и может быть вычислен при обрезании  $\beta = 5$ ; увеличение обрезания до  $\beta = 50$  не приводит к существенным поправкам.

Результаты вычислений представлены на рис. 7.1 в сравнении с более точным вычислением цепочки уравнений Больцмана из сноски 14, основанным на формуле (7.2.10). Очевидно, что гидродинамическое вычисление проходит достаточно хорошо; аналогично компьютерному вычислению из сноски 14 оно показывает первый высокий пик, за которым следует два почти одинаковых пика меньшей высоты, за которыми следует убывающий хвост из пиков постепенно уменьшающейся высоты. Для проведения количественного сравнения в табл. 7.1 и 7.2 приведены положения пиков и их высоты, вычис-

**Рис. 7.1.** Зависимость скалярного мультипольного коэффициента

$$\frac{\ell(\ell+1)C_\ell}{2\pi}$$

выраженного в квадратных микрокельвинах, от порядка  $\ell$  для значений космологических параметров, заданных в (7.2.44) и (7.2.45). Гидродинамическое приближение (7.2.41) показано пунктирной линией, и для сравнения показана непрерывная линия более точно-го крупномасштабного компьютерного вычисления из сноски 14, основанного на уравнении (7.2.10)



**Таблица 7.1**

Сравнение результатов вычислений для значений  $\ell$  в первых пяти пиках функции  $\ell(\ell+1)C_{TT,\ell}^{(S)}/(2\pi)$ , согласно формуле (7.2.52) и согласно данным, приведенным из источника в сноске 14

Формула (7.2.52)	220	541	821	1134	1425
Сноска 14	219	536	813	1127	1425

**Таблица 7.2**

Сравнение результатов вычислений значений функции  $\ell(\ell+1)C_{TT,\ell}^{(S)}/(2\pi)$  (выраженных в мкК<sup>2</sup>) для пиков, перечисленных в табл. 7.1, согласно формуле (7.2.52) и согласно данным, приведенным из источника в сноске 14

Формула (7.2.52)	5155	2694	2783	1126	746
Сноска 14	5591	2525	2451	1221	806

ленные с помощью формулы (7.2.52), и данные из сноски 14. Во всех случаях высоты пиков, задаваемые формулой (7.2.52) согласуются с более точными компьютерными вычислениями с точностью в пределах 10 %, а результаты вычислений положений пиков на основе (7.2.52) почти неприлично хороши, во всех случаях ошибка не превышает 1 %.

Помимо прочего, общих успех вычислений этого раздела показывает, что эволюция космологических возмущений в основном имеет гидродинамическую природу, в том смысле, что она хорошо описывается уравнениями гидродинамики, без привлечения полного аппарата системы уравнений Больцмана, которые используются в компьютерных вычислениях, подобных тем, что приводятся в сноске 14. Уравнение Больцмана неявно присутствует в наших вычислениях, потому что вычисляя скорость затухания Силка, мы воспользовались стандартными значениями сдвиговой вязкости и теплопроводности, которые были получены с помощью уравнения Больцмана для фотонов в ионизованном газе, однако очевидно, что мы немногое потеряли, избежав повторного решения уравнения Больцмана в космологическом контексте.

В тех пределах, где общая формула (7.2.41) была проверена на основе проведенного выше сравнения, мы можем воспользоваться этой формулой с целью выяснить, что можно получить из измерений  $C_{TT,\ell}$ :

- Из формулы (7.2.41) следует, что *профиль* функции  $\ell(\ell+1)C_{TT,\ell}^{(S)}$  как, например, набор *отношений* положений пиков к их высотам, зависит только от четырех величин:  $d_D$ ,  $d_H$ ,  $d_T$  и  $n_S$ . Также при фиксированных текущей температуре излучения и числе безмассовых нейтрино, три длины,  $d_D$ ,  $d_H$  и  $d_T$ , зависят только от двух космологических параметров,  $\Omega_b h^2$  и  $\Omega_m h^2$ , которые таким образом можно найти из профиля функции  $\ell(\ell+1)C_{TT,\ell}^{(S)}$ .

- Измерение масштаба зависимости этой функции от  $\ell$  (как например, значение  $\ell$  для одного произвольного пика) зависит от этих двух параметров, но также и от  $d_y$ , которое является функцией не только  $\Omega_b h^2$  и  $\Omega_m h^2$ , но также  $h$  и  $\Omega_\Lambda$ . Таким образом, невозможно использовать измерения только  $C_{TT,\ell}^{(S)}$  для определения по отдельности  $h$  и  $\Omega_\Lambda$ , не учитывая интегральный эффект Сакса—Вольфе. Зачастую просто предполагают, что Вселенная пространственно плоская, в случае чего в хорошем приближении можно считать  $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$ , и тогда измерения  $C_{TT,\ell}^{(S)}$  можно использовать для определения  $h$ , а также  $\Omega_b h^2$  и  $\Omega_m h^2$ .
- Измерение величины функции  $\ell(\ell+1)C_{TT,\ell}$  при  $\ell \gg 1$  (как, например, измерение высоты одного произвольного пика) сообщает только величину  $N^2 \exp(-2\tau_{\text{реон}})$ , поэтому, как уже отмечалось, мы не можем воспользоваться ею для определения  $N^2$  или  $\tau_{\text{реон}}$  по отдельности. Этот произвол разрешается с помощью измерений поляризации реликтового излучения, см. разд. 7.4.

Изначально открытие анизотропии реликтового фона было сделано коллегацией COBE, см. разд. 2.6. Тогда была получена информация об анизотропии только для относительно малых  $\ell$ , много ниже положения первого акустического пика при  $\ell \approx 200$ . За этим открытием последовал ряд наблюдений на метеорологических зондах и в наземных обсерваториях<sup>16)</sup>, которые со всей очевидностью доказали существование первого акустического пика, а также привели к некоторым данным о последующих пиках, расширяя тем самым данные CBI коллегации вплоть до значений  $\ell$ , дальше положения пятого акустического пика,  $\ell \approx 1400$ . Точность проведенных измерений вплоть до примерно  $\ell \approx 600$  впоследствии была значительно улучшена в наблюдениях, проведенных на замечательном космическом аппарате, известном как Уилкинсонский детектор анизотропии реликтового излучения, или WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe)<sup>17)</sup>. Спутник WMAP был запущен 30 июня 2001 года, затем обошел несколько кругов вокруг Луны с целью увеличения кинетической энергии за счет ее движения и наконец достиг орбиты около точки равновесия, известной как L2. Эта точка движется по орбите вокруг Солнца со скоростью, необходимой для того, чтобы оставаться на расстоянии примерно  $1,5 \times 10^6$  км от Земли, с другой стороны от Земли по направлению от Солнца; это положение было выбрано с целью изоляции

<sup>16)</sup> Эти коллегации: ARCHEOPS: A. Benoit *et al.*, *Astron. Astrophys.* **399**, L19, L25 (2003) [astro-ph/0210305, 0210306]; CDMP & MAT/TOCO: A. Miller *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **140**, 115 (2002) [astro-ph/0108030]; BOOMERANG: J. E. Ruhl *et al.*, *Astrophys. J.* **599**, 786 (2003) [astro-ph/0212229]; MAXIMA: A. T. Lee *et al.*, *Astrophys. J.* **561**, L1 (2001); DASI: N. W. Halverson *et al.*, *Astrophys. J.* **568**, 38 (2002) [astro-ph/0104489]; CBI: T. J. Pearson *et al.*, *Astrophys. J.* **591**, 556 (2003) [astro-ph/0205388]; ACBAR: C. L. Kuo *et al.*, *Astrophys. J.* **600**, 32 (2004) [astro-ph/0212289]; and VSA: C. Dickinson *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **353**, 732 (2004) [astro-ph/0402498].

<sup>17)</sup> C. L. Bennett *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 1 (2003) [astro-ph/0302207]. Различные аспекты этой миссии детально обсуждаются в других статьях того же тома *Astrophys. J. Suppl.*

аппарата от микроволнового излучения, идущего от Солнца, Земли или Луны. Аппарат оснащен двумя последовательными  $1,4 \times 1,6$ -метровыми микроволновыми детекторами, охлаждаемыми тепловыми радиаторами до температуры примерно 90 К; он измеряет поляризацию реликтового фона, а также разницу температур на всем небе.

После года измерений  $C_{TT,\ell}$  был измерен вплоть до  $\ell \simeq 600$  с небольшими ошибками, возникающими в основном благодаря космической дисперсии и активному (не фоновому) излучению<sup>18)</sup>. Эти измерения оказались в согласии с результатами изучавшейся нами  $\Lambda$ CDM-модели с нулевой кривизной; предполагалось, что в состав Вселенной входят фотоны, три аромата безмассовых нейтрино, холодная темная материя, постоянная вакуумная энергия; первичный спектр чисто адиабатических флуктуаций, задаваемый уравнением (7.2.40), при постоянном  $n_S$ . Значения космологических параметров, полученные на основании этого соответствия, оказались равны<sup>19)</sup>:

- $\Omega_b h^2 = 0,024 \pm 0,001$ ;
- $\Omega_m h^2 = 0,14 \pm 0,002$ ;
- $h = 0,72 \pm 0,05$ ;
- $|N|^2 = (2,1 \pm 0,2) \times 10^{-10}$ ;
- $n_S = 0,99 \pm 0,04$ ;
- $\tau_{\text{реон}} = 0,166^{+0,076}_{-0,071}$ .

Измерения поляризации были использованы здесь в основном с целью измерения оптической глубины  $\tau_{\text{реон}}$  реионизованной плазмы<sup>20)</sup>, необходимой для получения  $|N^2|$ , исходя из значения  $|N^2| \exp(-2\tau_{\text{реон}})$ , задаваемого измеренными значениями  $C_{TT,\ell}$ .

В марте 2006 года группа WMAP анонсировала результаты второго и третьего годов наблюдений<sup>21)</sup>. На рис. 7.2 эти результаты показаны совместно с точками наилучшего согласования  $\ell(\ell + 1)C_{TT,\ell}^{(S)} / (2\pi)$  с  $\Lambda$ CDM-моделью (при нулевом тензоре анизотропии). Данное согласование привело к следующим параметрам<sup>22)</sup>:

- $\Omega_b h^2 = 0,02229 \pm 0,00073$ ;
- $\Omega_m h^2 = 0,1277^{+0,0080}_{-0,0079}$ ;
- $h = 0,732^{+0,031}_{-0,032}$ ;

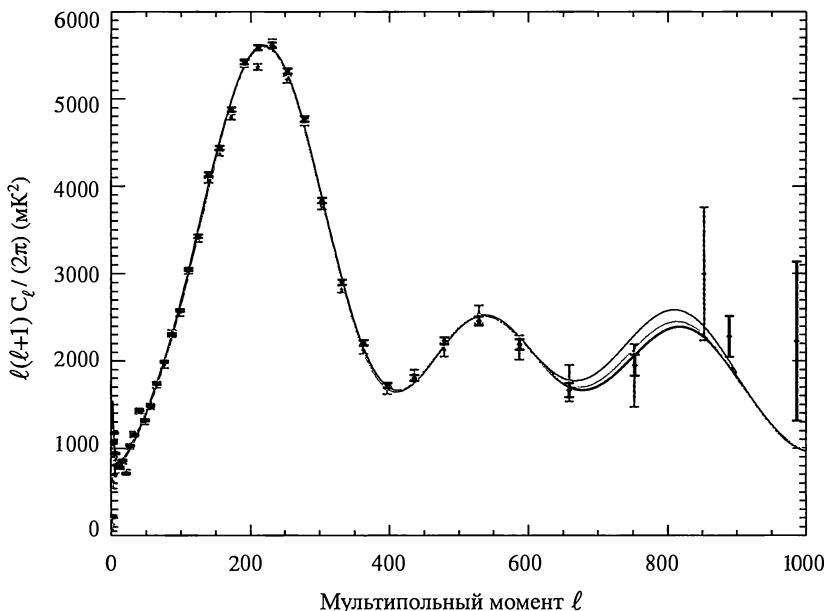
<sup>18)</sup> G. Hinshaw *et al.*, *Astrophys. J.* **148**, 135 (2003) [astro-ph/0302217].

<sup>19)</sup> D. N. Spergel *et al.*, сноска 13. Ошибки лежат в пределах 68 % достоверности.

<sup>20)</sup> A. Kogut *et al.*, *Astrophys. J.* **148**, 161 (2003) [astro-ph/0302213].

<sup>21)</sup> Результаты измерений температуры и поляризации приводятся соответственно в G. Hinshaw *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **170**, 288 (2007) [astro-ph/0603451] и L. Page *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **170**, 335 (2007) [astro-ph/0603450].

<sup>22)</sup> D. N. Spergel *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **170**, 377 (2007) [astro-ph/0603449].



**Рис. 7.2.** Сравнение теории и наблюдений WMAP для зависимости мультипольного коэффициента  $\ell(\ell+1)C_\ell/(2\pi)$ , выраженного в квадратных микрокельвинах, от  $\ell$ , взято из D. N. Spergel *et al.*, [astro-ph/0603449]. Жирные точки соответствуют данным WMAP третьего года, светло-серые точки соответствуют данным WMAP первого года. Нижняя кривая наилучшим образом описывает данные WMAP третьего года. Верхняя кривая является наилучшим приближением данных WMAP первого года, средняя кривая является наилучшим приближением данных WMAP первого года, скомбинированных с данными от CBI и ACBAR

- $|N|^2 = (1,93 \pm 0,12) \times 10^{-10}$ ;
- $n_s = 0,958 \pm 0,016$ ;
- $\tau_{\text{реион}} = 0,089 \pm 0,030$ .

Новые результаты согласуются с полученными ранее, однако очевидно, что возникло значительное улучшение точности измерения параметров. Теперь возросшая точность позволила получить важную информацию о том, что  $n_s$  с большой долей вероятности меньше единицы, как ожидалось на основе типичных инфляционных теорий, см. гл. 10. Также важно, что оптическая глубина реионизованной плазмы, установленная в поляризационных измерениях, значительно меньше найденной ранее, что приводит к предположению о более разумном времени реионизации<sup>23)</sup>. Поскольку величина  $C_{TT,\ell}^{(S)}$  про-

<sup>23)</sup> Обсуждение следствий измерений оптической глубины в плазме для теорий раннего звездообразования, проведенных в течение третьего года работы WMAP, см. в M. A. Alvarez, P. R. Shapiro, K. Ahn, and I. T. Iliev, *Astrophys. J.* **644**, L101 (2006) [astro-ph/0604447]; Z. Haiman and G. L. Bryan, *Astrophys. J.* **650**, 7 (2006) [astro-ph/0603541]; T. R. Choudhury and A. Ferrara, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **371**, L55 (2006) [astro-ph/0603617]; M. Shull and A. Venkatesan, [astro-ph/0702323].

порциональна  $|N^2| \exp(-2\tau_{\text{реон}})$ , уменьшение  $\tau_{\text{реон}}$  привело к соответствующему уменьшению оценочного значения  $|N^2|$ ; опубликованное значение  $|N^2| \exp(-2\tau_{\text{реон}})$  изменилось незначительно.

Действительно радостно видеть, что значения  $h$ ,  $\Omega_M h^2$  и  $\Omega_b h^2$ , полученные исходя из анизотропий реликтового излучения, подтверждают значения, полученные совершенно другими методами, которые обсуждались в гл. 1 и 3. Значения  $|N^2|$  и  $n_s$  также находятся в хорошем соответствии со значениями, полученными из наблюдений крупномасштабной структуры, см. следующую главу. Общее согласие теории и наблюдений как для самой анизотропии реликтового излучения, так и для анизотропии реликтового излучения совместно с другими измерениями, оказывается еще шире и подтверждает общие предположения выбранной космологической модели, включая задействованные нами холодную темную материю и темную энергию.

## 7.3

### Температурные мультипольные коэффициенты: тензорные моды

**Общая формула • Расчет амплитуды гравитационной волны • Расчет функции источника • Приближение больших  $\ell$  • Приближение внезапного расцепления • Численные результаты**

Далее рассмотрим вклад в температурные мультипольные коэффициенты от космологического гравитационного излучения<sup>24)</sup>. Согласно уравнению (7.1.5), в случае одной доминантной тензорной моды тензорный вклад в относительную температурную флуктуацию равен

$$\left( \frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} \right)^{(T)} = -\frac{1}{2} \sum_{\lambda=\pm 2} \int d^3 q \beta(\mathbf{q}, \lambda) \hat{n}_k \hat{n}_l e_{kl}(\hat{q}, \lambda) \times \\ \times \int_{t_1}^{t_0} dt \exp \left( i \mathbf{q} \cdot \hat{n} \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} \right) d(q, t), \quad (7.3.1)$$

где, для краткости, была введена величина

$$d(q, t) \equiv \exp \left( - \int_t^{t_0} dt' \omega_c(t') \right) \left( \dot{\mathcal{D}}_q(t) - \frac{1}{2} \omega_c(t) \Psi(q, t) \right). \quad (7.3.2)$$

<sup>24)</sup> Ранние вычисления нескольких первых мультипольных моментов содержатся в работе V. A. Rubakov, M. V. Sazhin, and A. V. Veryaskin, *Phys. Lett.* **115B**, 189 (1982). Общая формула приводится в работе R. Fabbri and M. D. Pollock, *Phys. Lett.* **125B**, 445 (1983).

В качестве напоминания:  $\beta(\mathbf{q}, \lambda)$  — стохастический параметр для моды, не за- тухающей за горизонтом, которая, по предположению, подавляет тензорное возмущение;  $e_{kl}(\hat{q}, \lambda)$  — поляризационный тензор, определенный в разд. 5.2, для гравитационной волны с волновым числом  $\mathbf{q}$  и спиральностью  $\lambda$ ;  $t_1$  обозначает произвольный момент времени, отстоящий достаточно далеко от рекомбинации, так что любой имеющийся в то время фотон успеет рассеяться множество раз до наступления современной эпохи;  $\omega_c(t)$  — частота столкновений фотонов в момент времени  $t$ ;  $\mathcal{D}_q(t)$  — амплитуда гравитационной волны; и  $\Psi(q, t)$  — тензорная функция источника, задаваемая уравнениями (6.6.11) и (6.6.12).

Заново воспользовавшись соотношением (7.2.2) для разложения экспоненты на сферические гармоники, получаем, что тензорная температурная флуктуация раскладывается следующим образом:

$$(\Delta T(\hat{n}))^{(T)} = \sum_{\ell m} a_{T, \ell m}^{(T)} Y_\ell^m(\hat{n}), \quad (7.3.3)$$

где

$$a_{T, \ell m}^{(T)} = T_0 \sum_{\lambda=\pm 2} \int d^3 q \beta(\mathbf{q}, \lambda) f_{\ell m}(\mathbf{q}, \lambda), \quad (7.3.4)$$

$$\begin{aligned} f_{\ell m}(\mathbf{q}, \lambda) \equiv & -2\pi \int d^2 \hat{n} Y_\ell^{m*}(\hat{n}) \hat{n}_k \hat{n}_l e_{kl}(\hat{q}, \lambda) \sum_{LM} i^L Y_{\text{п. п.}}^M(\hat{n}) Y_{\text{п. п.}}^{M*}(\hat{q}) \times \\ & \times \int_{t_1}^{t_0} dt j_{\text{п. п.}}(qr(t)) d(q, t), \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

а  $r(t)$  опять обозначает радиальную координату точки, из которой в момент времени  $t$  был испущен свет, достигший нас в настоящее время:

$$r(t) \equiv \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}. \quad (7.3.6)$$

Будет очень удобно сначала вычислить  $f_{\ell m}(\mathbf{q}, \lambda)$  при  $\mathbf{q}$ , лежащем вдоль 3-направления  $\hat{z}$ . В этом случае имеем

$$Y_{\text{п. п.}}^M(\hat{q}) = \delta_{M0} \sqrt{2L + \frac{1}{4\pi}}.$$

Также, с помощью (5.2.15), при  $\hat{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  получаем

$$\hat{n}_i \hat{n}_j e_{ij}(\hat{z}, \pm 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin^2 \theta e^{\pm 2i\phi} = 4 \sqrt{\frac{\pi}{15}} Y_2^{\pm 2}(\hat{n}). \quad (7.3.7)$$

Интеграл по  $\hat{n}$  задается специальным случаем общей формулы<sup>25)</sup>

$$\int d^2\hat{n} Y_{\pi. p.}^M(\hat{n}) Y_\Lambda^\mu(\hat{n}) Y_\ell^{m*}(\hat{n}) = \sqrt{\frac{(2\Lambda+1)(2\ell+1)}{4\pi(2L+1)}} \times \\ \times C_{\ell\Lambda}(L, M; m, -\mu) C_{\ell\Lambda}(L, 0; 0, 0), \quad (7.3.8)$$

где  $C_{\ell\Lambda}(L, M; \mu, \nu)$  — это обычные коэффициенты Клебша—Гордана для формирования квантовых чисел результирующего углового момента  $L, M$  как комбинации из квантовых чисел слагаемых угловых моментов  $l, m$  и  $\Lambda, \mu$ . Следовательно,

$$f_{\ell m}(q\hat{z}, \pm 2) = -2\sqrt{\frac{\pi(2\ell+1)}{3}} \sum_{\pi. p.} i^L C_{\ell 2}(L, 0; \pm 2, \mp 2) C_{\ell 2}(L, 0; 0, 0) \times \\ \times \delta_{m, \pm 2} \int_{t_1}^{t_0} dt j_{\pi. p.}(qr(t)) d(q, t). \quad (7.3.9)$$

В нашем случае  $\Lambda = 2$ ,  $\mu = \pm 2$  и  $M = 0$ , поэтому соответствующие коэффициенты Клебша—Гордана равны

$$C_{\ell 2}(\ell + 2, 0; 0, 0) = \sqrt{\frac{3(\ell+2)(\ell+1)}{2(2\ell+1)(2\ell+3)}}, \\ C_{\ell 2}(\ell + 2, 0; \pm 2, \mp 2) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\ell-1)\ell}{(2\ell+1)(2\ell+3)}}, \\ C_{\ell 2}(\ell, 0; 0, 0) = -\sqrt{\frac{\ell(\ell+1)}{(2\ell-1)(2\ell+3)}}, \\ C_{\ell 2}(\ell, 0; \pm 2, \mp 2) = \sqrt{\frac{3(\ell-1)(\ell+2)}{2(2\ell-1)(2\ell+3)}}, \\ C_{\ell 2}(\ell - 2, 0; 0, 0) = \sqrt{\frac{3\ell(\ell-1)}{2(2\ell-1)(2\ell+1)}}, \\ C_{\ell 2}(\ell - 2, 0; \pm 2, \mp 2) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(\ell+1)(\ell+2)}{(2\ell-1)(2\ell+1)}},$$

а  $C_{\ell 2}(\ell \pm 1, 0; 0, 0) = 0$ . Собирая все вместе, получаем, что при  $\mathbf{q}$ , лежащем вдоль выбранного ранее 3-направления, ненулевые значения величины (7.3.5)

<sup>25)</sup> См., например, J. M. Blatt and V. F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics* (John Wiley & Sons, New York, 1952): Приложение A, формула (5.11). (Русский перевод: Блатт Дж., Вайсконф В. Теоретическая ядерная физика. М.: Изд-во иностр. лит., 1958. — Прим. ред. перев.)

равны<sup>26)</sup>

$$f_{\ell m}(q\hat{z}, \pm 2) = i^\ell \sqrt{\frac{\pi(2\ell+1)(\ell+2)!}{2(\ell-2)!}} \delta_{m,\pm 2} \int_{t_1}^{t_0} dt d(q, t) \times \\ \times \left[ \frac{j_{\ell+2}(qr(t))}{(2\ell+1)(2\ell+3)} + \frac{2j_\ell(qr(t))}{(2\ell-1)(2\ell+3)} + \frac{j_{\ell-2}(qr(t))}{(2\ell-1)(2\ell+1)} \right]. \quad (7.3.10)$$

Данное выражение можно значительно упростить, если проинтегрировать известное рекуррентное соотношение

$$\frac{j_\ell(\rho)}{\rho} = \frac{j_{\ell-1}(\rho) + j_{\ell+1}(\rho)}{2\ell+1},$$

в результате чего получаем,

$$\frac{j_\ell(\rho)}{\rho^2} = \frac{j_{\ell-2}(\rho)}{(2\ell+1)(2\ell-1)} + \frac{2j_\ell(\rho)}{(2\ell+3)(2\ell-1)} + \frac{j_{\ell+2}(\rho)}{(2\ell+1)(2\ell+3)}. \quad (7.3.11)$$

После подстановки этой дроби в выражение (7.3.10) имеем

$$f_{\ell m}(q\hat{z}, \pm 2) = i^\ell \sqrt{\frac{\pi(2\ell+1)(\ell+2)!}{2(\ell-2)!}} \delta_{m,\pm 2} \int_{t_1}^{t_0} dt d(q, t) \frac{j_\ell(qr(t))}{q^2 r^2(t)}. \quad (7.3.12)$$

Теперь амплитуду (7.3.5) можно найти в случае произвольного направления  $\mathbf{q}$ , если выполнить стандартное вращение  $S(\hat{q})$ , переводящее 3-ось в направление  $\hat{q}$ . (Явная формула для  $S(\hat{q})$  будет приведена в следующем разделе; здесь в ней нет необходимости). Получаем<sup>27)</sup>:

$$f_{\ell m}(\mathbf{q}, \lambda) = \sum_{m'} D_{m,m'}^{(\ell)}(S(\hat{q})) f_{\ell m'}(q\hat{z}, \lambda). \quad (7.3.13)$$

Тогда коэффициенты (7.3.4) принимают вид

$$a_{T, \ell m}^{(T)} = T_0 i^\ell \sqrt{\frac{\pi(2\ell+1)(\ell+2)!}{2(\ell-2)!}} \sum_{\pm} \int d^3 q \beta(\mathbf{q}, \pm 2) D_{m,\pm 2}^{(\ell)}(S(\hat{q})) \times \\ \times \int_{t_1}^{t_0} dt d(q, t) \frac{j_\ell(qr(t))}{q^2 r^2(t)}. \quad (7.3.14)$$

<sup>26)</sup> Именно этот результат первоначально был получен в работах L. F. Abbott and M. B. Wise, *Nucl. Phys. B* 244, 541 (1984) и A. A. Starobinsky, *Sov. Astron. Lett.* 11(3), 133 (1985), обобщенный на случай произвольной амплитуды гравитационной волны  $D_q(t)$ , с учетом поправки, пропорциональной  $\Psi$ , в формуле (7.3.2).

<sup>27)</sup> В формуле (7.3.13) использованы матричные элементы  $D_{m,m'}^{(\ell)}(S(\hat{q}))$   $(2\ell+1)$ -мерного не-приводимого унитарного представления группы вращений. — Прим. ред. перев.

Теперь можно вычислить мультипольные коэффициенты для температурной корреляционной функции, определенной соотношением

$$\langle a_{T,\ell m}^{(T)} a_{T,\ell' m'}^{T*} \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} C_{TT,\ell}^{(T)}. \quad (7.3.15)$$

Для этой цели напомним: стохастический параметр  $\beta(\mathbf{q}, \lambda)$  нормирован таким образом, что

$$\langle \beta(\mathbf{q}, \lambda) \beta^*(\mathbf{q}', \lambda') \rangle = \delta_{\lambda\lambda'} \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}'). \quad (7.3.16)$$

При вычислении  $C_{TT,\ell}^{(T)}$  мы сталкиваемся со следующим интегралом по угловым переменным:

$$\int d^2\hat{q} D_{m,\pm 2}^{(\ell)}(S(\hat{q})) D_{m',\pm 2}^{(\ell')}(S(\hat{q}))^*.$$

Легко видеть, что данная матрица коммутирует со всеми матрицами вращения, откуда следует, что она должна быть пропорциональна  $\delta_{mm'} \delta_{\ell\ell'}$  с независящим от  $m$  коэффициентом пропорциональности. Чтобы вычислить этот коэффициент, можно положить  $m = m'$  и  $\ell = \ell'$  и просуммировать по  $m$  от  $-\ell$  до  $+\ell$ ; воспользовавшись унитарностью матрицы  $D_{m,n}^{(\ell)}(S(\hat{q}))$ , находим, что результат должен быть равен  $\int d^2\hat{q} = 4\pi$ , поэтому

$$\int d^2\hat{q} D_{m,\pm 2}^{(\ell)}(S(\hat{q})) D_{m',\pm 2}^{(\ell')}(S(\hat{q}))^* = \frac{4\pi}{2\ell + 1} \delta_{mm'} \delta_{\ell\ell'}. \quad (7.3.17)$$

Воспользовавшись этим соотношением и подставляя выражения (7.3.14) и (7.3.16) в (7.3.15), получаем, что сумма по спиральностям в выражении (7.3.14) теперь дает в точности множитель 2, поэтому<sup>28)</sup>

$$C_{TT,\ell}^{(T)} = \frac{4\pi^2(\ell+2)! T_0^2}{(\ell-2)!} \int_0^\infty \frac{dq}{q^2} \left| \int_{t_1}^{t_0} dt d(q,t) \frac{j_\ell(qr(t))}{r^2(t)} \right|^2. \quad (7.3.18)$$

---

Данную формулу можно получить более легким способом — прямым вычислением температурной корреляционной функции, без вычисления  $a_{T,\ell m}^{(T)}$ , однако  $a_{T,\ell m}^T$  понадобится в следующем разделе для нахождения корреляции между анизотропиями поляризации и температуры.

---

Остается вычислить  $D_q(t)$  и функцию источников  $\Psi(q,t)$ . Как было видно в разд. 6.6, если амплитуда гравитационной волны  $D_q(t)$  записывается в виде функции от  $\kappa \equiv q\sqrt{2}/(H_{\text{EQ}}a_{\text{EQ}})$  и  $y \equiv a(t)/a_{\text{EQ}}$  вместо  $q$  и  $t$  (нижний индекс

<sup>28)</sup> Другим способом этот результат был выведен в работе M. Zaldarriaga and U. Seljak, *Phys. Rev. D* **55**, 1830 (1997) [astro-ph/9609170]. Полученный ответ этих авторов совпадет с формулой (7.3.18), если для этого выбрать неопределенную авторами амплитуду гравитационной волны  $h$  в виде  $D_q(t)/2$ , а стохастический параметр выбрать так, чтобы  $P_h = 0$ .

$\Gamma Q$  указывает на период баланса вещества и излучения), то за исключением общего множителя  $\mathcal{D}_q^r$  (равного значению  $\mathcal{D}_q(t)$  за горизонтом), амплитуда  $\mathcal{D}_q(t)$  не зависит от всех остальных космологических параметров. Запишем ее в виде

$$\mathcal{D}_q(t) = \mathcal{D}_q^r D(\kappa, y). \quad (7.3.19)$$

Для спектра гравитационных волн, масштабно инвариантного за горизонтом, величина  $q^3 |\mathcal{D}_q^r|^2$  является постоянной. Чтобы учесть более общие возможности, эту величину удобно представить пропорциональной степени  $n_T$  числа  $q$ , или, эквивалентно,

$$q^3 |\mathcal{D}_q^r|^2 = N_T^2 \left( \frac{q/a_0}{k_D} \right)^{n_T}, \quad (7.3.20)$$

где  $k_D$  — это произвольное волновое число, часто выбираемое в виде  $k_D = 0,002 \text{ Мпк}^{-1}$ , а  $N_T$  — это константа, аналогичная константе  $N$ , описывающей величину адиабатической скалярной моды. Привычное отношение  $r$  тензорных и скалярных мод равно  $r \equiv 4|N_T|^2/|N|^2$ . Помимо этого, до того момента как вакуумная энергия начнет играть важную роль, имеем  $dt = \sqrt{2y} dy/(H_{\text{EQ}} \sqrt{1+y})$ , поэтому можно записать

$$q \int \frac{dt}{a(t)} = \kappa \int \frac{dy}{\sqrt{1+y}} = 2\kappa \sqrt{1+y}.$$

Тогда волновое уравнение (6.6.58) принимает вид

$$\begin{aligned} (1+y) \frac{\partial^2 D(\kappa, y)}{\partial y^2} + \left( \frac{1}{2} + \frac{2(1+y)}{y} \right) \frac{\partial D(\kappa, y)}{\partial y} + \kappa^2 D(\kappa, y) = \\ = -\frac{24f_\nu}{y^2} \int_0^y K \left( 2\kappa [\sqrt{1+y} - \sqrt{1+y'}] \right) \frac{\partial D(\kappa, y')}{\partial y'} dy', \end{aligned} \quad (7.3.21)$$

где  $f_\nu \equiv \bar{\rho}_\nu/\bar{\rho}_u = 0,4052$  и  $K(v) \equiv j_2(v)/v^2$ , при начальном условии  $D(\kappa, 0) = 1$ . После отыскания таким образом  $D(\kappa, y)$ , функция источника  $\Psi(q, t)$  вычисляется компьютерными программами, такими как CMBfast и CAMB, с помощью уравнения (6.6.21) с амплитудами  $\Delta_{T,\ell}^{(T)}$  и  $\Delta_{P,\ell}^{(T)}$ , построенными посредством численного решения системы уравнений Больцмана, обрезанных при некотором максимальном значении  $\ell$ . Существует более простая альтернативная процедура, основанная на интегральном уравнении (6.6.27)<sup>29)</sup>:

$$\Psi(q, t) = \frac{3}{2} \int_{t_1}^t dt' \exp \left[ - \int_{t'}^t \omega_c(t'') dt'' \right] \times$$

<sup>29)</sup> S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **74**, 063517 (2006) [astro-ph/0607076]; D. Baskaran, L. P. Grishchuk, and A. G. Polnarev, *Phys. Rev. D* **74**, 083005 (2006) [gr-qc/0605100].

$$\times \left[ -2\dot{\mathcal{D}}_q(t')K\left(q \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} \right) + \omega_c(t')F\left(q \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} \right)\Psi(q, t') \right], \quad (7.3.22)$$

где

$$F(v) \equiv j_0(v) - \frac{2j_1(v)}{v} + \frac{2j_2(v)}{v^2}.$$

Можно также привести дифференциальную оптическую глубину к виду

$$d\tau(y) \equiv \omega_c dt = n_e \sigma_T c dt = \frac{A}{y^2 \sqrt{1+y}} X(y) dy,$$

где  $X(y)$  — это относительная ионизация водорода, вычисленная в разд. 2.3, зависящая от  $\Omega_b h^2$  и  $\Omega_m h^2$ , а также от  $y$ , а  $A$  является безразмерной константой:

$$A \equiv 0,76 \frac{3\Omega_b\Omega_m H_0 \sigma_T c}{8\pi G m_p \Omega_u^{3/2}} = 1,9646 \times 10^5 (\Omega_m h^2)(\Omega_b h^2).$$

(Предполагается, что барионная материя состоит на 76 % из водорода, причем оставшаяся часть в рассматриваемую эпоху неионизована.) Отсюда следует, что функция источника принимает вид

$$\Psi(q, t) = \mathcal{D}_q^r \mathcal{S}(\kappa, y), \quad (7.3.23)$$

где  $\mathcal{S}$  зависит от только от  $\Omega_m h^2$  и  $\Omega_b h^2$ , а также от  $\kappa$  и  $y$ , и удовлетворяет интегральному уравнению

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\kappa, y) &= \frac{3}{2} \int_0^y dy' \exp \left[ - \int_{y'}^y \frac{d\tau(y'')}{dy''} dy'' \right] \times \\ &\times \left[ -2 \frac{dD(\kappa, y')}{dy'} K\left(2\kappa[\sqrt{1+y} - \sqrt{1+y'}]\right) + \right. \\ &\left. + \frac{d\tau(y')}{dy'} F\left(2\kappa[\sqrt{1+y} - \sqrt{1+y'}]\right) \mathcal{S}(\kappa, y') \right]. \end{aligned} \quad (7.3.24)$$

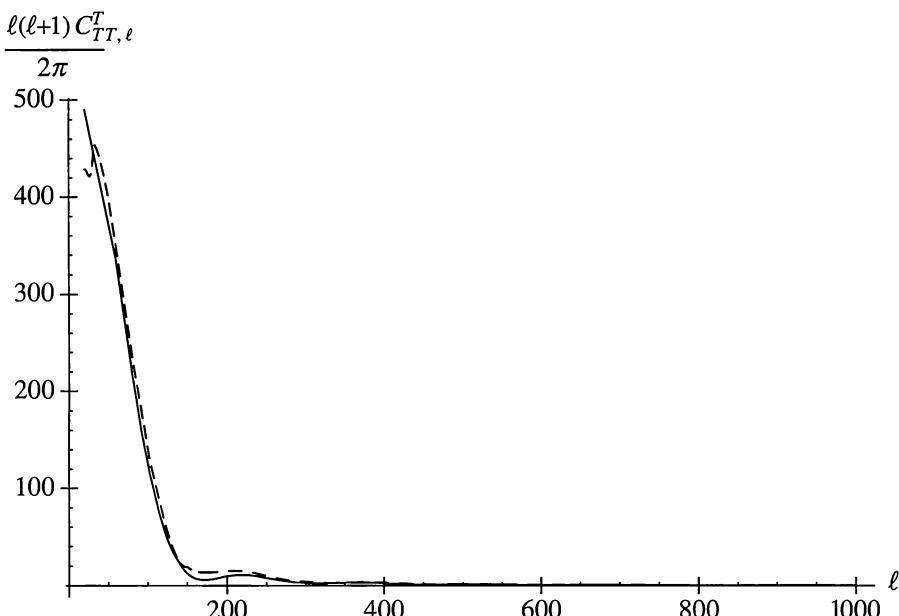
Вычисленный на основе выражений (7.3.18)–(7.3.24) мультипольный коэффициент показан на рис. 7.3 непрерывной кривой. Пунктирная кривая показывает итог упрощения выражения для мультипольного коэффициента в случае  $\ell \gg 1$  при использовании приближенной формулы (7.2.14) для сферических функций Бесселя в уравнении (7.3.18), в результате чего получаем<sup>30)</sup>

$$\ell(\ell+1)C_{TT,\ell}^{(T)} \rightarrow 4\pi^2 T_0^2 \int_0^\infty q^2 dq \times$$

<sup>30)</sup> R. Flauger and S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **75**, 123505 (2007) [astro-ph/0703179].

$$\times \left| \int_{r(t) > \ell/q} dt d(q, t) \left\{ \frac{\cos^3 b}{\sqrt{\sin b}} \cos \left[ \ell(\operatorname{tg} b - b) - \frac{\pi}{4} \right] \right\}_{\cos b = \frac{\ell}{qr(t)}} \right|^2. \quad (7.3.25)$$

В обоих случаях вместо использования эквивалентной формулы (6.6.21) совместно с усеченной системой уравнений Больцмана (6.6.18), (6.6.19), функция источника  $\Psi(q, t)$  вычисляется с помощью интегрального уравнения (7.3.22). Обе кривые вычисляются на основе космологической модели, которая в большинстве отношений согласуется с текущими наблюдениями: предполагается, что  $\Omega_K = 0$  и вакуумная энергия постоянна при следующих значениях  $\Omega_b = 0,0432$ ,  $\Omega_m = 0,257$ ,  $\Omega_\Lambda = 0,743$ ,  $h = 0,72$  и  $T_0 = 2,725$  К. При вычислении частоты столкновений фотонов используется код вычисления рекомбинации Recfast<sup>31)</sup>, величина распространенности гелия кладется равной  $Y = 0,24$ . Параметры в уравнении (7.3.20) выбираются в виде  $N_T^2 = 4,68 \times 10^{-11}$  (что приблизительно соответствует WMAP значению скалярной амплитуды  $N$ , упоминавшейся в предыдущем разделе, а  $r = 1$ ) и  $n_T = 0$ . В данном вы-



**Рис. 7.3.** Зависимость тензорного «температура-температура» мультипольного коэффициента  $\ell(\ell+1)C_{TT,\ell}^T/(2\pi)$ , выраженного в квадратных микрокельвинах, от  $\ell$  из сноски 30. Непрерывная кривая является результатом использования точной формулы (7.3.18); пунктирная кривая описывает результат приближения больших  $\ell$  (7.3.25). Использованные в этих вычислениях космологические параметры описываются в тексте

<sup>31)</sup> S. Seager, D. D. Sasselov, and D. Scott, *Astrophys. J.* **523**, L1 (1999) [astro-ph/9909275]; *Astrophys. J. Suppl.* **128**, 407 (2000) [astro-ph/9912182].

числении реионизацией пренебрегают. Чтобы учесть другое значение  $r$  или конечную оптическую глубину  $\tau$  реионизованной плазмы, в случае  $\ell > 10$  достаточно умножить показанные на рис. 7.3 мультипольные коэффициенты на фактор  $r \exp(-2\tau)$ .

---

В приближении резкого перехода в момент времени  $t_{\text{п.р.}}$  из состояния теплового равновесия, в котором  $\omega_c(t) \gg H(t)$  и  $\Psi(q, t) = 0$ , в состояние полной прозрачности, в котором  $\omega_c(t) = 0$ , уравнение (7.3.25) принимает вид

$$\ell(\ell+1)C_{TT, \ell}^{(T)} \rightarrow 4\pi^2 T_0^2 \int_0^\infty q^2 dq \times \\ \times \left| \int_{r_{\text{п.р.}} > r(t) > \ell/q} dt \dot{\mathcal{D}}_q(t) \left\{ \frac{\cos^3 b}{\sqrt{\sin b}} \cos \left[ \ell(\tg b - b) - \frac{\pi}{4} \right] \right\}_{\cos b = \frac{\ell}{qr(t)}} \right|^2. \quad (7.3.26)$$

По причине размытости значений  $\tg b - b$  не удается как-то далее упростить это выражение, по аналогии со скалярными температурными флюктуациями, при переходе от формулы (7.2.16) к формуле (7.2.17).

---

Из рис. 7.3 следует, что  $C_{TT, \ell}^T$  зависит от  $\ell$  совершенно другим образом, нежели вычисленный в предыдущем разделе скалярный вклад, поэтому согласованность между существующими наблюдениями и теорией, включающей только наборы скалярных возмущений устанавливает верхний предел на величину тензорных возмущений. Используя предположение (согласно теориям инфляции, см. гл. 10), что  $\mathcal{D}_q^r$  и  $\mathcal{R}_q^r$  примерно одинаковым образом зависят от  $q$ , после трех лет исследований коллаборация WMAP пришла к выводу<sup>32)</sup>, что  $r < 0,55$ , с достоверностью 95 %, где  $r \equiv 4|\mathcal{D}_q^r|^2 / |\mathcal{R}_q^r|^2$ . Этот предел возникает в основном на основе измерений температуры, а не поляризации, потому что в измерениях температуры отношение сигнала к шуму гораздо выше; предел, полученный только на основе измерений поляризации, составляет  $r < 2,2$ .

Строго говоря, предел  $r < 0,55$  зависит от измерений поляризации, которые используются для определения оптической глубины реионизированной плазмы. Оптическая глубина нужна для определения значения параметра наклона  $n_S$  скалярных мод, который в свою очередь необходим при вычитании скалярного вклада в  $C_{TT, \ell}$  из наблюдаемых значений, с целью установления предела на тензорный вклад. Однако космическая дисперсия задает предел точности осуществления этого вычитания, и, в конечном итоге, самые точные верхние пределы или действительное выделение тензорных мод возникнут непосредственно из измерений поляризации, к которым мы сейчас переходим.

---

<sup>32)</sup> L. Page *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **170**, 335 (2007) [astro-ph/0603450].

## Поляризация

**Параметры Стокса • Сферические гармоники спина ±2 • Свойства инверсии пространства • Поляризация  $E$  и  $B$  • Скалярные моды: общая формула • Скалярные моды: приближение больших  $\ell$  • Скалярные моды: численные результаты • Скалярные моды: наблюдения • Тензорные моды: общая формула • Тензорные моды: приближение больших  $\ell$  • Тензорные моды: численные результаты • Корреляционные функции**

Наблюдения реликтового излучения выявляют не только его интенсивность в разных направлениях, но и поляризацию. Ожидается, что реликтовый фон поляризован по причине рассеяния на свободных электронах<sup>33)</sup>, присутствовавших в период рекомбинации или в более поздний период реионизации, вызванной ультрафиолетовым излучением от первого поколения звезд. Измерения поляризации стали важны при выяснении, когда началась реионизация, а также при отделении эффектов реионизации от интенсивности первичных флуктуаций; помимо этого они могут стать даже более важны в будущем, при обнаружении возникших во время инфляции гравитационных волн.

В разд. 6.1 мы ввели безразмерную матрицу возмущений фотонной интенсивности  $J_{ij}(\mathbf{x}, \hat{p}, t)$ , задаваемую (6.1.13). Она эрмитова и трансверсальная, в том смысле, что

$$\hat{p}^i J_{ij}(\mathbf{x}, \hat{p}, t) = \hat{p}^j J_{ij}(\mathbf{x}, \hat{p}, t) = 0, \quad (7.4.1)$$

и, как уже отмечалось в разд. 7.1, ее след в точке  $\mathbf{x} = 0$  и  $t = t_0$  связан с относительной фотонной флуктуацией температуры, видимой в настоящее время в любом направлении с Земли, соотношением

$$\frac{\Delta T(\hat{n})}{T_0} = \frac{1}{4} J_{ii}(0, -\hat{n}, t_0). \quad (7.4.2)$$

Для  $\hat{n} = -\hat{p}$  в 3-направлении  $\hat{z}$  любая матрица с такими свойствами может быть приведена к виду

$$J_{ij}(0, -\hat{z}, t_0) = \frac{2}{T_0} \begin{pmatrix} \Delta T(\hat{z}) + Q(\hat{z}) & U(\hat{z}) - iV(\hat{z}) & 0 \\ U(\hat{z}) + iV(\hat{z}) & \Delta T(\hat{z}) - Q(\hat{z}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.4.3)$$

<sup>33)</sup> M. J. Rees, *Astrophys. J.* **153**, L1 (1968). Корреляции поляризаций при малом угловом расстоянии рассматривались в первых статьях по поляризации реликтового излучения; см., например, A. G. Polnarev, *Sov. Astron.* **29**, 607 (1985); R. Crittenden, R. L. Davis, and P. J. Steinhardt, *Astrophys. J. Lett.* **417**, L13 (1993); D. Coulson, R. Crittenden, and N. Turok, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2390 (1994); A. Kosowsky, *Ann. Phys. (N. Y.)* **246**, 49 (1996). Анализ всего неба был проведен в работе U. Seljak and M. Zaldarriaga, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2054 (1997) [astro-ph/9609169]; M. Zaldarriaga and U. Seljak, *Phys. Rev. D* **55**, 1830 (1997) [astro-ph/9609170], а также в работе M. Kamionkowski, A. Kosowsky, and A. Stebbins, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2058 (1997) [astro-ph/9609132]; *Phys. Rev. D* **55**, 7368 (1997) [astro-ph/9611125].

где  $Q$ ,  $U$  и  $V$  — это три вещественные функции от направления с размерностями температуры, известные как *параметры Стокса*<sup>34)</sup>. В этом случае параметры Стокса можно представить в терминах матрицы  $J_{ij}$  следующим образом<sup>35)</sup>:

$$Q(\hat{z}) \pm iU(\hat{z}) = \frac{T_0}{2} e_{\pm i}(\hat{z}) e_{\pm j}(\hat{z}) J_{ij}(0, -\hat{z}, t_0), \quad (7.4.4)$$

$$V(\hat{z}) = \frac{T_0}{4} e_{-i}(\hat{z}) e_{+j}(\hat{z}) (J_{ij}(0, -\hat{z}, t_0) - J_{ji}(0, -\hat{z}, t_0)), \quad (7.4.5)$$

где  $e_{\pm}(\hat{z}) = (1, \pm i, 0)/\sqrt{2}$  — это векторы поляризации фотона, летящего вдоль 3-направления. Соответственно, для фотона, летящего вдоль произвольного направления, определим параметры Стокса в виде

$$Q(\hat{n}) \pm iU(\hat{n}) \equiv \frac{T_0}{2} e_{\pm i}(\hat{n}) e_{\pm j}(\hat{n}) J_{ij}(0, -\hat{n}, t_0), \quad (7.4.6)$$

$$V(\hat{n}) \equiv \frac{T_0}{4} e_{-i}(\hat{n}) e_{+j}(\hat{n}) (J_{ij}(0, -\hat{n}, t_0) - J_{ji}(0, -\hat{n}, t_0)), \quad (7.4.7)$$

где  $e_{\pm}(\hat{n})$  — это векторы поляризации фотона, летящего вдоль  $\hat{n}$ -направления. Записывая  $\hat{n}$  через полярный и азимутальный углы  $\theta$  и  $\phi$  как

$$\hat{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad (7.4.8)$$

можно выбрать

$$\mathbf{e}_{\pm}(\hat{n}) = \frac{\hat{\theta} \pm i\hat{\phi}}{\sqrt{2}}, \quad (7.4.9)$$

где  $\hat{\theta}$  и  $\hat{\phi}$  — это ортогональные единичные векторы, лежащие в плоскости, перпендикулярной  $\hat{n}$ , в направлении возрастания  $\theta$  и  $\phi$  соответственно:

$$\hat{\theta} \equiv (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta), \quad \hat{\phi} \equiv (-\sin \phi, \cos \phi, 0). \quad (7.4.10)$$

Именно параметры Стокса измеряются в наблюдениях реликтового фона. Рассеяние света нерелятивистскими электронами не приводит к круговой поляризации, и поэтому ожидается, что все реликтовые фотонны поляризованы линейно, так что  $J_{ij}$  вещественна, и поэтому  $V = 0$ . В этом случае возмущение относительной интенсивности  $e^i e^j J_{ij}$  достигает максимального значения  $2(\Delta T + \sqrt{U^2 + Q^2})/T_0$  для вещественного вектора поляризации  $\mathbf{e}$  в направлении  $\hat{\theta} \cos \xi + \hat{\phi} \sin \xi$ , где  $\operatorname{tg} 2\xi = U/Q$ . Для вектора поляризации в ортогональном направлении  $e^i e^j J_{ij}$  принимает минимальное значение  $2(\Delta T - \sqrt{U^2 + Q^2})/T_0$ , что приводит к возмущению полной относительной

<sup>34)</sup> Иногда параметры Стокса определяются с дополнительными внешними постоянными факторами, которые дают им размерность интенсивности, а не температуры.

<sup>35)</sup> Подробнее о параметрах Стокса см.: Ньютона Р. Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир, 1969. 607 с. — Прим. ред. перев.

плотности  $4\Delta T/T_0$ , что и требуется, потому что плотность энергии фотонов изменяется по закону  $T^4$ .

Теперь мы вынужденно сталкиваемся с затруднением: согласно нашему определению параметров Стокса, они не являются скалярами относительно вращений, т. е. относительно произвольного вращения  $x_i \rightarrow x'_j = R_{ij}x_j$  трехмерной координатной системы свойства  $Q'(\hat{n}') = Q(\hat{n})$  или  $U'(\hat{n}') = U(\hat{n})$  не выполняются. Это происходит потому, что векторы поляризации не являются настоящими 3-векторами. Отметим, что

$$\mathbf{e}_{\pm i}(\hat{n}) = S_{ij}(\hat{n})\mathbf{e}_{\pm j}(\hat{z}), \quad (7.4.11)$$

где  $S_{ij}(\hat{n})$  — стандартное вращение, переводящее 3-ось в направление  $\hat{n}$ . Для  $\hat{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ :

$$S_{ij}(\hat{n}) \equiv \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi & \sin \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi & \cos \phi & \sin \theta \sin \phi \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (7.4.12)$$

и снова  $\mathbf{e}_{\pm i}(\hat{z}) = (1, \pm i, 0)/\sqrt{2}$ . Для произвольного вращения  $R$  можно записать

$$\mathbf{e}_{\pm i}(R\hat{n}) = S_{ij}(R\hat{n})\mathbf{e}_{\pm j}(\hat{z}) = [RS(\hat{n})]_{ik}[S^{-1}(\hat{n})R^{-1}S(R\hat{n})]_{kj}\mathbf{e}_{\pm j}(\hat{z}).$$

Теперь  $S(R\hat{n})$  переводит 3-ось в направление  $R\hat{n}$ ,  $R^{-1}$  переводит это направление в направление  $\hat{n}$ , а затем  $S^{-1}(\hat{n})$  переводит его обратно в направление 3-оси, поэтому  $S^{-1}(\hat{n})R^{-1}S(R\hat{n})$  оставляет 3-ось инвариантной и, таким образом, обязано быть вращением на некоторый угол  $\psi(R\hat{n})$  вокруг 3-оси. При действии на  $\mathbf{e}_{\pm}(\hat{z})$  оно приводит к умножению на  $e^{\pm i\psi}$ , и поэтому

$$\mathbf{e}_{\pm i}(R\hat{n}) = e^{\pm i\psi(R,\hat{n})}R_{ij}\mathbf{e}_{\pm j}(\hat{n}). \quad (7.4.13)$$

Матрица  $J_{ij}$  является обычным 3-тензором, в том смысле, что произвольное вращение  $R$  переводит  $J_{ij}$  в  $J'_{ij}$  при

$$J'_{ij}(R\hat{n}) = R_{ik}R_{jl}J_{kl}(\hat{n}).$$

Так как  $R^T R = 1$ , вращение  $R$  преобразует параметры Стокса (7.4.6) согласно  $Q \rightarrow Q'$ ,  $U \rightarrow U'$  при

$$Q'(\hat{n}') \pm iU'(\hat{n}') = e^{\pm 2i\psi(R,\hat{n})}[Q(\hat{n}) \pm iU(\hat{n})]. \quad (7.4.14)$$

По этой причине, если бы мы раскладывали параметры Стокса в ряд по обычным сферическим гармоникам, так же как это делается для скаляров, таких как флюктуации температуры, то коэффициенты разложения не преобразовывались бы относительно вращений согласно стандартным представлениям

группы вращений. Вместо этого параметры Стокса  $Q(\hat{n})$  и  $U(\hat{n})$  в направлении  $\hat{n}$  раскладываются в ряд по функциям<sup>36)</sup>  $\mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n})$  с такой же зависимостью от векторов поляризации, как и сами параметры Стокса:

$$Q(\hat{n}) + iU(\hat{n}) = \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{P,\ell m} \mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n}), \quad (7.4.15)$$

$$\mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n}) \equiv 2\sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}} e_{+i}(\hat{n}) e_{+j}(\hat{n}) \tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_j Y_\ell^m(\hat{n}), \quad (7.4.16)$$

где  $\tilde{\nabla}$  — угловая часть оператора градиента:

$$\tilde{\nabla} \equiv \hat{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\phi}}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}. \quad (7.4.17)$$

Здесь нижний индекс “ $P$ ” (от слова «поляризация») в коэффициентах  $a_{P,\ell m}$  вводится для того, чтобы отличать их от коэффициентов, входящих в разложение температурной флуктуации (2.6.1), которые в этой главе обозначены  $a_{T,\ell m}$ . При вращении  $R$  обычные сферические гармоники преобразуются как

$$Y_\ell^m(R\hat{n}) = \sum_{m'} D_{m'm}^{(\ell)}(R^{-1}) Y_\ell^{m'}(\hat{n}), \quad (7.4.18)$$

где  $D^{(\ell)}(R)$  — это унитарные матрицы<sup>37)</sup> ранга  $2\ell + 1$ , образующие неприводимое представление группы вращений, в том смысле, что  $D^{(\ell)}(R_1)D^{(\ell)}(R_2) = D^{(\ell)}(R_1R_2)$ . Тогда из уравнений (7.4.13), (7.4.16) и (7.4.18) следует, что

$$\mathcal{Y}_\ell^m(R\hat{n}) = e^{2i\psi(R,\hat{n})} \sum_{m'} D_{m'm}^{(\ell)}(R^{-1}) \mathcal{Y}_\ell^{m'}(\hat{n}), \quad (7.4.19)$$

<sup>36)</sup> Этот специальный класс функций был введен Е. Т. Ньюманом и Р. Пенроузом при изучении гравитационного излучения в работе E. T. Newman and R. Penrose, *J. Math. Phys.* 7, 863 (1966). В обозначениях этих авторов, которые используются в некоторых современных статьях по поляризации реликтового фона, функция  $\mathcal{Y}_\ell^m$  обозначена как  ${}_2Y_{\ell,m}$ .

<sup>37)</sup> См., например, A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, (Princeton University Press, Princeton, 1957): гл. 4; M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum* (John Wiley & Sons, New York, 1957): гл. IV; L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics — Non Relativistic Theory*, 3rd edn. (Pergamon Press, Oxford, 1977): разд. 58 (Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*). М.: Наука, 1989. 768 с. — Прим. ред. перев.); Wu-Ki Tung, *Group Theory in Physics* (World Scientific, Singapore, 1985): разд. 7.3 и 8.1. Отметим, что используемые нами матрицы вращения подходят для представления, основанного рассматриваемыми сферическими гармониками, фазы которых таковы, что  $Y_\ell^m(\hat{n})^* = Y_\ell^{-m}(\hat{n})$ . Соответствующие матрицы углового момента  $J^{(\ell)}$  не являются обычными матрицами, элементы которых  $J_1^{(\ell)} \pm iJ_2^{(\ell)}$  вещественны и положительны. Если изменить фазу сферических гармоник так, чтобы  $Y_\ell^m(\hat{n})^* = (-1)^m Y_\ell^{-m}(\hat{n})$ , то матрицы вращения будут порождаться обычными матрицами углового момента, элементы которых  $J_1^{(\ell)} \pm iJ_2^{(\ell)}$  вещественны и положительны, но тогда нам понадобится ввести фазы в определение (7.4.25) парциальных амплитуд  $E$  и  $B$  типа, отличные от используемых Залдарьягой и Селяком в сноске 33. .

и, следовательно, также справедливо соотношение

$$\mathcal{Y}_\ell^{m*}(R\hat{n}) = e^{-2i\psi(R,\hat{n})} \sum_{m'} D_{m'm}^{(\ell)}(R) \mathcal{Y}_\ell^{m'}(\hat{n})^*. \quad (7.4.20)$$

По этой причине  $\mathcal{Y}_\ell^m$  и комплексно сопряженные функции известны как сферические гармоники спина 2 и -2 соответственно. Так же как для обычных сферических гармоник, из рассмотренных свойств преобразований следует, что  $\int d\Omega \mathcal{Y}_\ell^{m*} \mathcal{Y}_{\ell'}^{m'}$  обращается в ноль за исключением  $\ell = \ell'$  и  $m = m'$ , и в этом случае данный интеграл не зависит от  $m$ . Фактор  $2\sqrt{(\ell-2)!/(\ell+2)!}$  вставлен в выражение (7.4.16) для того, чтобы эти функции удовлетворяли условию ортонормированности

$$\int d\Omega \mathcal{Y}_\ell^{m*} \mathcal{Y}_{\ell'}^{m'} = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}, \quad (7.4.21)$$

по аналогии с обычными сферическими гармониками  $Y_\ell^m$ . Прямая подстановка перечисленных выше соотношений в (7.4.16) приводит к выражению<sup>38)</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n}) &= \sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial\theta} + i \operatorname{cosec}\theta \frac{\partial}{\partial\phi} \right)^2 - \operatorname{ctg}\theta \left( \frac{\partial}{\partial\theta} + i \operatorname{cosec}\theta \frac{\partial}{\partial\phi} \right) \right] Y_\ell^m(\hat{n}) = \\ &= e^{im\phi} \sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!} \frac{(\ell-|m|)!}{(\ell+|m|)!} \frac{2\ell+1}{4\pi}} \left[ -\ell(\ell+1) P_\ell^{|m|}(\mu) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(m+\mu)(m-\ell\mu)}{1-\mu^2} P_\ell^{|m|}(\mu) + \frac{2(\ell+|m|)(m+\mu)}{1-\mu^2} P_{\ell-1}^{|m|}(\mu) \right] = \\ &= e^{im\phi} \left[ \frac{(\ell+m)!(\ell-m)!}{(\ell+2)!(\ell-2)!} \frac{2\ell+1}{4\pi} \right]^{1/2} \sin^{2\ell} \left( \frac{\theta}{2} \right) (-1)^{(m-|m|)/2} \times \\ &\quad \times \sum_r \binom{\ell-2}{r} \binom{\ell+2}{r+2-m} (-1)^{\ell-r+m} \operatorname{ctg}^{2r+2-m} \left( \frac{\theta}{2} \right), \end{aligned} \quad (7.4.22)$$

где  $\mu = \cos\theta$ ,  $P_\ell^m(\mu)$  — это обычные присоединенные функции Лежандра. (Здесь нам понадобится только первое равенство в выражении (7.4.22).) В отличие от обычных сферических гармоник, функции  $\mathcal{Y}_\ell^m$  не подчинены какому-либо простому условию вещественности. Вместо этого комплексно сопряженное уравнение (7.4.15) приводит к

$$Q(\hat{n}) - iU(\hat{n}) = \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a_{P,\ell m}^* \mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n})^*, \quad (7.4.23)$$

<sup>38)</sup> Окончательное равенство взято у Залдарьяги и Селяка, сноска 33, а промежуточное равенство, которое выводится из нашего определения (7.4.16), соответствует их определению сферической гармоники, спиновый вес которой равен +2.

где

$$\mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n})^* = 2 \sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}} e_{-i}(\hat{n}) e_{-j}(\hat{n}) \tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_j Y_\ell^{-m}(\hat{n}), \quad (7.4.24)$$

в этом выражении было использовано условие вещественности задействованных здесь сферических гармоник,  $Y_\ell^{m*} = Y_\ell^{-m}$ .

Поскольку  $\mathcal{Y}_\ell^m$  не подчиняются какому-либо простому условию вещественности, это же справедливо для  $a_{P,\ell m}$ . Вместо этого можно определить следующие коэффициенты:

$$a_{E,\ell m} \equiv -\frac{a_{P,\ell m} + a_{P,\ell-m}^*}{2}, \quad a_{B,\ell m} \equiv i \frac{a_{P,\ell m} - a_{P,\ell-m}^*}{2}. \quad (7.4.25)$$

Данное разложение оказывается полезным по причине свойств этих коэффициентов относительно пространственной инверсии. Если обратить все три пространственные оси, то  $\theta \rightarrow \pi - \theta$ , а  $\phi \rightarrow \phi \pm \pi$ , поэтому  $\hat{\theta} \rightarrow \hat{\theta}$  и  $\hat{\phi} \rightarrow -\hat{\phi}$ . Отсюда следует, что при пространственной инверсии векторы поляризации (7.4.9) определенной спиральности меняются местами; т. е.  $\mathbf{e}_\pm(-\hat{n}) = \mathbf{e}_\mp(\hat{n})$ , и тем самым, согласно (7.4.6), при пространственной инверсии имеем  $Q(\hat{n}) \rightarrow Q(-\hat{n})$ , а  $U(\hat{n}) \rightarrow -U(-\hat{n})$  и  $V(\hat{n}) \rightarrow -V(-\hat{n})$ .

Позже читатель сможет проверить эти свойства  $Q$  и  $U$  относительно пространственной инверсии, если заметит, что данные трансформационные свойства возникают при замене стохастических параметров  $\alpha(\mathbf{q})$  и  $\beta(\mathbf{q}, \lambda)$  в уравнениях (7.4.31) и (7.4.39) на преобразованные относительно пространственной инверсии,  $\alpha(-\mathbf{q})$  и  $\beta(-\mathbf{q}, -\lambda)$ , соответственно.

Таким образом, применяя пространственную инверсию к уравнению (7.4.15), находим, что она переводит парциальные амплитуды  $a_{P,\ell m}$  в  $a'_{P,\ell m}$ , где

$$\begin{aligned} Q(-\hat{n}) - iU(-\hat{n}) &= 2 \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{\ell=0}^{\ell} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a'_{P,\ell m} \sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}} e_{+i}(\hat{n}) e_{+j}(\hat{n}) \tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_j Y_\ell^m(\hat{n}) = \\ &= 2(-1)^\ell \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a'_{P,\ell m} \sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}} e_{-i}(-\hat{n}) e_{-j}(-\hat{n}) \tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_j Y_\ell^m(-\hat{n}) = \\ &= (-1)^\ell \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} a'_{P,\ell m} \mathcal{Y}_\ell^{-m}(-\hat{n})^*, \end{aligned}$$

причем фактор  $(-1)^\ell$  обусловлен свойством отражения  $Y_\ell^m(-\hat{n}) \rightarrow (-1)^\ell Y_\ell^m(\hat{n})$ . Сравнивая полученное выражение с (7.4.23), видим, что пространственная инверсия переводит  $a_{P,\ell m}$  в  $a'_{P,\ell m} = (-1)^\ell a_{P,\ell-m}^*$ , так что  $a_{E,\ell m}$  (а также соответствующий температурный мультипольный коэффициент  $a_{T,\ell m}$ ) умножается на знаковый фактор  $(-1)^\ell$ , а  $a_{B,\ell m}$  — на знаковый фактор  $-(-1)^\ell$ .

Эти коэффициенты являются стохастическими переменными, описываемыми распределением вероятности, которое предположительно инвариантно относительно пространственной инверсии, поэтому может не быть билинейной корреляции между флуктуациями поляризации  $B$ - и  $E$ -типа, или между температурными флуктуациями и флуктуациями поляризации  $B$ -типа, хотя могут быть корреляции между температурными флуктуациями и флуктуациями поляризации  $E$ -типа. Учитывая также вращательную инвариантность распределения вероятности, единственные отличные от нуля билинейные средние имеют вид<sup>39)</sup>

$$\langle a_{T,\ell m}^* a_{T,\ell' m'} \rangle = C_{TT,\ell} \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'}, \quad (7.4.26)$$

$$\langle a_{T,\ell m}^* a_{E,\ell' m'} \rangle = C_{TE,\ell} \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'}, \quad (7.4.27)$$

$$\langle a_{E,\ell m}^* a_{E,\ell' m'} \rangle = C_{EE,\ell} \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'}, \quad (7.4.28)$$

$$\langle a_{B,\ell m}^* a_{B,\ell' m'} \rangle = C_{BB,\ell} \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'}. \quad (7.4.29)$$

Все коэффициенты  $C_{XY,\ell}$  обладают одинаковыми размерностями, равными квадрату температуры. По определению этих величин, все  $a_T$ ,  $a_E$  и  $a_B$  удовлетворяют условиям вещественности:

$$a_{T,\ell m}^* = a_{T,\ell-m}, \quad a_{E,\ell m}^* = a_{E,\ell-m}, \quad a_{B,\ell m}^* = a_{B,\ell-m}, \quad (7.4.30)$$

откуда следует, что все коэффициенты  $C_{XY,\ell}$  вещественны, а все коэффициенты  $C_{XX,\ell}$  еще и положительны. Результаты измерений корреляций между флуктуациями температуры и/или поляризации в различных направлениях, как правило, выражаются в терминах  $C_{XY,\ell}$ .

Другое упрощение, возникающее из разложения параметров Стокса на  $B$ - и  $E$ -члены, состоит в том, что, как мы увидим, скалярные возмущения могут давать вклад только в  $E$ -члены. Этот вывод важен, потому что он означает, что тот или иной знак у первичной поляризации  $B$ -типа<sup>40)</sup> станет явным указанием на существование фоновых гравитационных волн того типа, который, как ожидается, возникает во время инфляции, см. гл. 10.

<sup>39)</sup> Здесь  $a_{T,\ell m}$  — это коэффициент  $a_{\ell m}$  в уравнении (2.6.1). Определенные здесь мультипольные коэффициенты  $C_{XY,\ell}$  совпадают с коэффициентами, введенными Залдаррьятой и Селяком, сноска 33. Они связаны с коэффициентами, введенными Камионковским, Косовским и Стеббенсом, сноска 33, соотношениями

$$C_\ell^G = \frac{C_{\ell,EE} I^2}{2T_0^2}, \quad C_\ell^C = \frac{C_{\ell,BB} I^2}{2T_0^2}, \quad C_\ell^{TG} = \frac{C_{TE,\ell} I}{\sqrt{2} T_0^3},$$

где  $I$  обозначает интенсивность излучения. (Верхние индексы  $G$  и  $C$  обозначают «gradient» и «curl», потому что вид векторов поляризации типа  $B$  и  $E$  напоминает вид скорости соответственно в потенциальном или соленоидальном потоке.)

<sup>40)</sup> Слабое линнингование видимыми объектами конвертирует поляризацию  $E$ -типа, порожденную скалярными возмущениями, в поляризацию  $B$ -типа, которая может быть достаточно велика, чтобы интерферировать с результатами измерений первичной поляризации  $B$ -типа; M. Zaldarriaga and U. Seljak, *Phys. Rev. D* **58**, 023003 (1998) [astro-ph/9803150]. В качестве обзора см. работу A. Lewis and A. Challinor, *Phys. Rep.* **429**, 1 (2006) [astro-ph/0601594].

Теперь обратимся к вычислению мультипольных коэффициентов (7.4.27)–(7.4.29). Гидродинамический подход, который достаточно хорошо работает для температурных корреляционных функций, не очень хорошо приспособлен для рассмотрения корреляций поляризации, поэтому мы будем опираться на более точную кинетическую теорию, в основных чертах обрисованную в разд. 6.1. Тут необходимо разделять скалярные и тензорные моды. Как уже упоминалось, они не интерферируют, поэтому все мультипольные коэффициенты можно записать в виде суммы скалярного и тензорного слагаемых, с индексами  $S$  и  $T$ :

$$C_{XY, \ell} = C_{XY, \ell}^S + C_{XY, \ell}^{(T)} \quad (7.4.31)$$

### A. Скалярные моды

Для скалярных мод матрица  $J_{ij}$  в уравнении (7.4.6) задается интегралом Фурье (6.1.18) и «радиальным» интегралом (6.1.36):

$$\begin{aligned} J_{ij}(0, -\hat{n}, t_0) &= \int d^3 q \alpha(\mathbf{q}) \int_{t_1}^{t_0} dt \exp \left( -i\mathbf{q} \cdot \hat{p} \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} - \int_t^{t_0} dt' \omega_c(t') \right) \times \\ &\times \left[ -(\delta_{ij} - \hat{n}_i \hat{n}_j) (\dot{A}_q(t') - (\hat{n} \cdot \mathbf{q})^2 \dot{B}_q(t')) + \frac{3\omega_c(t)}{2} (\delta_{ij} - \hat{n}_i \hat{n}_j) \Phi(q, t) + \right. \\ &+ \left. \frac{3\omega_c(t)}{4} \Pi(q, t) (\hat{q}_i - \hat{n}_i (\hat{q} \cdot \hat{n})) (\hat{q}_j - \hat{n}_j (\hat{q} \cdot \hat{n})) + \frac{2\omega_c(t)}{a(t)} [\delta_{ij} - \hat{n}_i \hat{n}_j] \hat{n}_k \delta u_k(q, t) \right]. \end{aligned}$$

Поскольку  $\hat{n}_i e_{+i}(\hat{n}) = 0$  и  $e_{+i}(\hat{n}) e_{+i}(\hat{n}) = 0$ , единственный член в подынтегральном выражении, дающий вклад в параметры Стокса, пропорционален  $\hat{q}_i \hat{q}_j$ :

$$\begin{aligned} Q^S(\hat{n}) + iU^S(\hat{n}) &= \frac{3T_0}{8} e_{+i}(\hat{n}) e_{+j}(\hat{n}) \int d^3 q \hat{q}_i \hat{q}_j \alpha(\mathbf{q}) \times \\ &\times \int_{t_1}^{t_0} dt P(t) \Pi(q, t) \exp \left( i\mathbf{q} \cdot \hat{n} \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} \right), \end{aligned} \quad (7.4.32)$$

где  $P(t) dt$  — вероятность того, что последнее рассеяние произойдет в интервал времени между  $t$  и  $t + dt$ :

$$P(t) = \omega_c(t) \exp \left( - \int_t^{t_0} \omega_c(t') dt' \right). \quad (7.4.33)$$

В качестве напоминания:  $\alpha(\mathbf{q})$  — стохастический параметр для той моды (предположительно, это незатухающая адиабатическая мода), которая, как предполагается, дает основной вклад в скалярные возмущения;  $\omega_c(t)$  — частота столкновений фотонов;  $t_1$  — произвольный момент времени, достаточно

ранний, чтобы имеющийся тогда фотон рассеялся много раз до наступления текущего момента;  $\Pi(q, t)$  — функция источника, задаваемая уравнением (6.1.30) в терминах амплитуд парциальных волн температуры и амплитуд возмущений поляризации:

$$\Pi(q, t) = \Delta_{T,2}^{(S)}(q, t) + \Delta_{P,0}^{(S)}(q, t) + \Delta_{P,2}^{(S)}(q, t). \quad (7.4.34)$$

Чтобы воспользоваться соотношением (7.4.31) для вычисления  $EE$  и  $TE$  мультипольных коэффициентов, вспомним известную формулу

$$\exp(i\hat{q} \cdot \mathbf{v}) = 4\pi \sum_{\ell,m} i^\ell j_\ell(v) Y_\ell^m(\hat{v}) Y_\ell^{m*}(\hat{q}), \quad \text{в которой } \mathbf{v} = \hat{n}q \int_t^{t_0} dt' \frac{1}{a(t')}.$$

При действии на нее  $\hat{q}_i$  можно заменить на  $-i\partial/\partial v_i$ . Поскольку  $\hat{v} = \hat{n}$ , можно записать

$$\frac{\partial}{\partial v_i} = \hat{n}_i \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\tilde{\nabla}_i}{v},$$

где  $\tilde{\nabla}$  — это действующий на  $\hat{n}$  оператор угловой части градиента (7.4.17). Поскольку  $\hat{n}_i e_{+i} = 0$  и  $e_{+i} e_{+i} = 0$ , то соотношение (7.4.32) принимает вид

$$\begin{aligned} Q^S(\hat{n}) + iU^S(\hat{n}) &= -\frac{3\pi T_0}{2} e_{+i}(\hat{n}) e_{+j}(\hat{n}) \tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_j \sum_{\ell,m} i^\ell Y_\ell^m(\hat{n}) \int d^3 q \alpha(\mathbf{q}) \times \\ &\times Y_\ell^{m*}(\hat{q}) \int_{t_1}^{t_0} dt P(t) \Pi(q, t) \frac{j_\ell(qr(t))}{q^2 r(t)^2}, \end{aligned} \quad (7.4.35)$$

в котором  $r(t)$  — радиальная координата точки из которой свет, излученный в момент времени  $t$ , достигнет нас в настоящий момент времени:

$$r(t) = \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}. \quad (7.4.36)$$

---

Отметим, что здесь градиент  $\tilde{\nabla}_i \hat{n}_j$  не дает вклада, потому что он равен величине  $\delta_{ij} - \hat{n}_i \hat{n}_j$ , которая обращается в ноль при свертке с  $e_{+i} e_{+j}$ .

---

Сравнивая (7.4.35) с (7.4.15) и (7.4.16), мы видим, что скалярный вклад в  $a_{P,\ell m}$  равен

$$a_{P,\ell m}^S = -\frac{3\pi T_0 i^\ell}{4} \sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} \int d^3 q \alpha(\mathbf{q}) Y_\ell^{m*}(\hat{q}) \int_{t_1}^{t_0} dt P(t) \Pi(q, t) \frac{j_\ell(qr(t))}{q^2 r^2(t)}. \quad (7.4.37)$$

Для проверки свойств вещественности  $a_{P,\ell m}$  отметим, что из уравнений (6.1.18) и (6.1.21) следует, что  $\alpha^*(\mathbf{q})\Pi^*(q,t) = \alpha(-\mathbf{q})\Pi(q,t)$ , а  $Y_\ell^m(\hat{q}) = (-1)^\ell Y_\ell^{-m}(-\hat{q})$ , и конечно же,  $i^{\ell*} = (-1)^\ell i^\ell$ , поэтому  $a_{P,\ell m}^* = a_{P,\ell-m}^{(S)}$ . Тогда из рассмотрения уравнения (7.4.25) вытекает, как и обещалось, что скалярные моды дают вклад только в поляризацию типа  $E$ :

$$a_{E,\ell m}^S = -a_{P,\ell m}^S, \quad a_{B,\ell m}^S = 0. \quad (7.4.38)$$

Теперь можно выписать формулы для скалярного вклада в  $EE$  и  $TE$  мультипольные коэффициенты, задаваемые соотношениями (7.4.28) и (7.4.27). Вспоминая условие нормировки (7.2.5) для скалярного стохастического параметра  $\alpha(\mathbf{q})$ , из выражений (7.4.37) и (7.4.38) видим, что<sup>41)</sup>

$$C_{EE,\ell}^S = \frac{9\pi^2 T_0^2}{16} \frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!} \int_0^\infty q^2 dq \left| \int_{t_1}^{t_0} dt P(t) \Pi(q,t) \frac{j_\ell(qr(t))}{q^2 r^2(t)} \right|^2. \quad (7.4.39)$$

Объединяя соотношение (7.4.37) с общей формулой (7.2.4) для скалярного вклада в температурные парциальные амплитуды, точно таким же образом находим, что

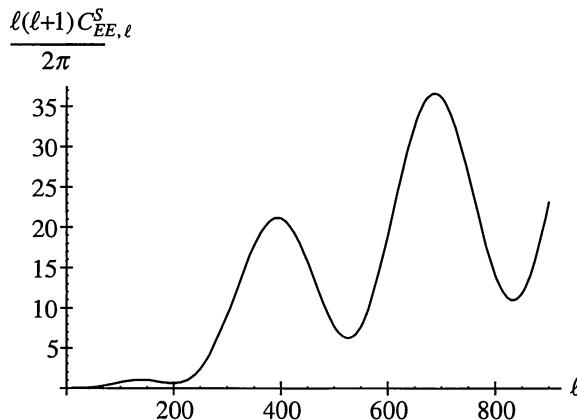
$$\begin{aligned} C_{TE,\ell}^S &= -3\pi^2 T_0^2 \sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} \int_0^\infty q^2 dq \int_{t_1}^{t_0} dt P(t) \Pi(q,t) \frac{j_\ell(qr(t))}{q^2 r^2(t)} \times \\ &\times \int_{t_1}^{t_0} \left[ j_\ell(qr(t))F(q,t) + j'_\ell(qr(t))G(q,t) + j''_\ell(qr(t))H(q,t) \right], \end{aligned} \quad (7.4.40)$$

где  $F(q,t)$ ,  $G(q,t)$  и  $H(q,t)$  — величины (7.2.7)–(7.2.9). Значения  $C_{EE,\ell}^{(S)}$  и  $C_{TE,\ell}^{(S)}$ , вычисленные<sup>42)</sup> при космологических параметрах (7.2.44)–(7.2.45), представлены на рис. 7.4 и 7.5. Сравнивая эти графики друг с другом, а также с графиком на рис. 7.3, мы видим, что  $C_{EE,\ell}^{(S)} \ll C_{TE,\ell}^{(S)} \ll C_{TT,\ell}^{(S)}$ . Поляризация реликтового излучения мала, потому что Вселенная во время рекомбинации быстро переходит из состояния почти идеального теплового равновесия в состояние почти полной прозрачности, а фотоны в состоянии теплового равновесия почти не поляризованы.

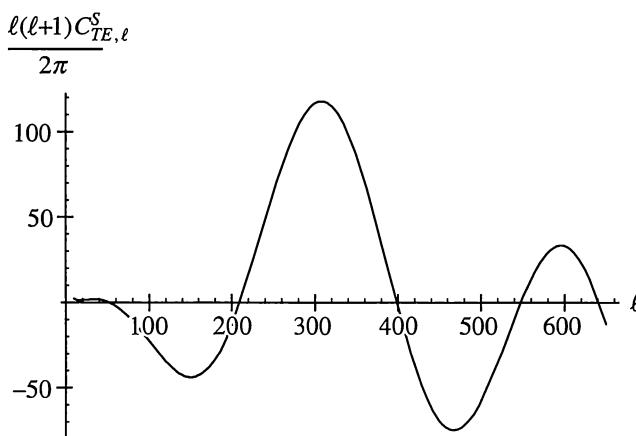
Выражения (7.4.39) и (7.4.40) должны вычисляться с максимальной численной точностью, однако зависимость мультипольных коэффициентов от  $\ell$  при  $\ell \gg 1$  можно выяснить с помощью гораздо более простых приближенных

<sup>41)</sup> Это выражение совпадает с формулой (17) в работе Залдаррьаги и Селяка, сноска 33, за исключением того, что наша  $\Pi$  в 4 раза больше их  $\Pi$ .

<sup>42)</sup> [http://lambda.gsfc.nasa.gov/data/map/powspec/wmap\\_lcdm\\_pl\\_model\\_yr1\\_v1.txt](http://lambda.gsfc.nasa.gov/data/map/powspec/wmap_lcdm_pl_model_yr1_v1.txt)



**Рис. 7.4.** Зависимость мультипольного коэффициента  $\ell(\ell + 1)C_{EE,\ell}^{(S)}/(2\pi)$ , выраженного в квадратных микрокельвинах, от  $\ell$  при космологических параметрах, заданных в (7.2.44) и (7.2.45)



**Рис. 7.5.** Зависимость мультипольного коэффициента  $\ell(\ell + 1)C_{TE,\ell}^{(S)}/(2\pi)$ , выраженного в квадратных микрокельвинах, от  $\ell$  при космологических параметрах, заданных в (7.2.44) и (7.2.45)

версий. Функция  $P(t)$  в уравнении (7.4.39) имеет острый пик в момент времени  $t_{\text{п. р.}}$  последнего рассеяния и удовлетворяет  $\int dt P(t) = 1$ , поэтому с хорошей точностью этот интеграл по времени можно вычислить, просто положив  $t = t_{\text{п. р.}}$  и опуская фактор  $P(t)$ . Помимо этого, с помощью тех же самых приближений, которые привели нас от (7.2.13) к (7.2.17), находим, что при  $\ell \gg 1$

$$C_{EE,\ell}^S \approx \frac{9\pi^2\ell^3}{32r_{\text{п. р.}}^3} \int_1^\infty \frac{d\beta}{\beta\sqrt{\beta^2 - 1}} \Pi^2\left(\frac{\ell\beta}{r_{\text{п. р.}}}, t_{\text{п. р.}}\right).$$

Это выражение не может служить надежным результатом для величины коэффициента  $C_{EE, \ell}^S$ , потому что во время рекомбинации функция  $\Pi(q, t)$  быстро изменяется, но поскольку эта функция быстро убывает относительно  $q$ , так что основной вклад в интеграл определяется значениями  $\beta \approx 1$ , данное приближение действительно приводит к предположению, что пики и впадины в  $C_{EE, \ell}^S$  в основном обусловлены фактором  $\Pi^2(\ell/r_{\text{п. р.}}, t_{\text{п. р.}})$ . С другой стороны, как отмечалось в разд. 7.2, эти пики и впадины в  $C_{TT, \ell}^S$  в основном обусловлены фактором  $F^2(\ell/r_{\text{п. р.}})$ , и с помощью аналогичных рассуждений приходим к выводу, что пики и впадины в  $C_{TE, \ell}^S$  обусловлены в основном  $F(\ell/r_{\text{п. р.}})\Pi(\ell/r_{\text{п. р.}})$ .

Для выяснения зависимости  $\Pi(q, t_{\text{п. р.}})$  от  $q$  сперва отметим, что если считать, что поляризация фотонов обусловлена исключительно последним рассеянием, то  $\Pi(q, t)$  будет задаваться только первым членом  $\Delta_{T, 2}^{(S)}(q, t)$  в (7.4.34). Это происходит потому, что дифференциальное сечение рассеяния неполяризованных фотонов с начальным импульсом  $\mathbf{p}$  при  $|\mathbf{p}| \ll m_e$  на нерелятивистских электронах, которое приводит к фотону с вещественным вектором поляризации  $\mathbf{e}$ , равно<sup>43)</sup>

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{32\pi^2 m_e^2} (1 - (\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{e})^2).$$

Если бы распределение начальных импульсов  $\mathbf{p}$  было сферически симметричным, то среднее от этого сечения рассеяния по исходным направлениям не зависело бы от  $\mathbf{e}$ , поэтому конечный фотон был бы неполяризован. Однако для зависящей от направления фазовой плотности фотонов  $n_{\gamma L}(\mathbf{p})$  с импульсом  $\mathbf{p}$ , находящихся на месте последнего рассеяния в момент его осуществления, интенсивность фотонов после последнего рассеяния, летящих в направлении  $\hat{\mathbf{n}}$  и обладающих вектором поляризации  $\mathbf{e}$  (с  $\mathbf{e}^2 = 1$  и  $\mathbf{e} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$ ), пропорциональна

$$\int d^3 p p n_{\gamma, \text{п. р.}}(\mathbf{p}) (1 - (\hat{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{e})^2).$$

Таким образом, та часть  $J_{ij}$ , которая дает вклад в параметры Стокса, пропорциональна бесследовой части от  $\int d^3 p p n_{\gamma, \text{п. р.}}(\mathbf{p}) \hat{p}_i \hat{p}_j$ , которая, в свою очередь, пропорциональна  $\ell = 2$  части от  $\Delta_T^{(S)}$ , вычисленной для положения и времени последнего рассеяния. Дополнительные члены  $\Delta_{P, 0}^{(S)}(q, t) + \Delta_{P, 2}^{(S)}(q, t)$  в  $\Pi(q, t)$  учитывают любую другую поляризацию, которую фотон мог уже приобрести к началу последнего рассеяния, и можно ожидать, что эти члены относительно малы, так как при условии высокой частоты рассеяния фотоны должны

<sup>43)</sup> См., например, «Квантовая теория поля», формула (8.7.40). Впервые она была получена О. Клейном и Й. Нишиной, в работе O. Klein and Y. Nishina, Z. Phys. 52, 853 (1929). (Независимый вывод этой формулы принадлежит И. Е. Тамму. — Прим. перев.)

оставаться неполяризованными. Но тогда, согласно уравнению (6.1.32),

$$\Pi(q, t_{\text{п. п.}}) \simeq \Delta_{T, 2}^{(S)}(q, t) \simeq \frac{q^2 \pi_q^S(t_{\text{п. п.}})}{\bar{\rho}_\gamma(t_{\text{п. п.}})}.$$

Напомним, что согласно первой строчке в уравнении (5.1.43),  $\partial_i \partial_j \pi^{(S)}(\mathbf{x}, t)$  является членом в скалярной части  $\delta T_j^i$ , который не пропорционален  $\delta_{ij}$ , а из уравнения (B.50) следует, что для коротких времен свободного пробега этот член равен<sup>44)</sup>

$$\partial_i \partial_j \pi^S = a^{-2} \eta_\gamma \partial_i \partial_j \delta \tilde{u},$$

где  $\eta_\gamma$  — это сдвиговая вязкость, обусловленная переносом фотонного импульса, выражаемая через время свободного пробега фотона  $t_\gamma$  в виде<sup>45)</sup>  $\eta_\gamma = \frac{16}{45} \bar{\rho}_\gamma t_\gamma$ , а  $\delta \tilde{u}(\mathbf{x}, t)$  — это калибровочно-инвариантный потенциал поля скоростей<sup>46)</sup>,

$$\delta \tilde{u} \equiv \delta u - aF + \frac{a^2 \dot{B}}{2},$$

где  $F$  и  $B$  — возмущения метрики, определяемые выражениями (5.1.32) и (5.1.33). Помимо этого, уравнение (7.1.45) (полученное в калибровке, в которой компонента метрики  $F$  обращается в ноль) задает коэффициент стохастического параметра  $\alpha(\mathbf{q})$  в фурье-образе калибровочно-инвариантного потенциала поля скоростей в терминах формфактора  $G(q)$  в виде

$$\delta \tilde{u}_q(t_{\text{п. п.}}) = -\frac{a(t_{\text{п. п.}}) G(q)}{q}.$$

Отсюда следует, что

$$\Pi(q, t_{\text{п. п.}}) \simeq \frac{16q^2}{45a^2(t_{\text{п. п.}})} \bar{t}_\gamma \delta \tilde{u}_q(t_{\text{п. п.}}) \simeq -\frac{16q}{45a(t_{\text{п. п.}})} \bar{t}_\gamma G(q),$$

где  $\bar{t}_\gamma$  — это некоторое подходящее среднее от  $t_\gamma(t)$  в эпоху рекомбинации. Таким образом, пики и впадины в  $C_{EE, \ell}^{(S)}$  и в  $|C_{TE, \ell}^{(S)}|$  более-менее совпадают с пикиами и впадинами в  $|G(q/r_{\text{п. п.}})|^2$  и  $|F(q/r_{\text{п. п.}})G(q/r_{\text{п. п.}})|$  соответственно, при этом вспоминаем, что пики и впадины в  $C_{TT, \ell}^{(S)}$ , по сути, совпадают с пикиами и впадинами в  $|F(q/r_{\text{п. п.}})|^2$ . Из уравнений (7.2.23) и (7.2.24) следует,

<sup>44)</sup> Здесь мы используем соотношения  $\delta u^i_{;j} = \delta u_j^i = a^{-2} \delta u_{i;j} - a^{-4} h_{ij} a \dot{a}$ .

<sup>45)</sup> N. Kaiser, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **202**, 1169 (1983). Обсуждение содержится в сноске 16 разд. 6.4.

<sup>46)</sup> Величина  $\delta \tilde{u}$  является тем же потенциалом поля скоростей, который появляется в уравнении (7.1.37) в виде доплеровского вклада в температурный сдвиг в классе калибровок с нулевой компонентой метрики  $F$ . В специальном случае ньютоновской калибровки имеем  $F = B = 0$  и  $\delta \tilde{u} = \delta u$ .

что

$$F(q) \simeq \frac{\mathcal{R}_q^r}{5} \left[ 3R_{\text{n.p.}} T(\kappa) - (1 + R_{\text{n.p.}})^{-1/4} \exp \left( - \int_0^{t_{\text{n.p.}}} \Gamma dt \right) S(\kappa) \cos \chi(q) \right],$$

$$G(q) \simeq -\frac{\sqrt{3}\mathcal{R}_q^r}{5(1 + R_{\text{n.p.}})^{3/4}} \exp \left( - \int_0^{t_{\text{n.p.}}} \Gamma dt \right) S(\kappa) \sin \chi(q),$$

где  $\chi(q)$  является приблизительно линейной функцией от  $q$ :

$$\chi(q) \equiv \int_0^{t_{\text{n.p.}}} \frac{q dt}{a\sqrt{3(1+R)}} + \Delta(\kappa),$$

а аргумент  $\kappa$  передаточных функций  $S$ ,  $T$  и  $\Delta$  пропорционален  $q$ . Как отмечалось в разд. 7.2, пики в  $C_{TT,\ell}^{(S)}$  тем самым находятся приблизительно в точках  $\chi(\ell/r_{\text{n.p.}}) = \pi, 2\pi, 3\pi \dots$ . С другой стороны, ожидается, что пики в  $C_{EE,\ell}^{(S)}$  примерно соответствуют пикам в  $|\sin(\chi(\ell/r_{\text{n.p.}}))|$ , или, другими словами, в  $\chi(\ell/r_{\text{n.p.}}) = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2 \dots$ , а пики в  $C_{TE,\ell}^{(S)}$  примерно соответствуют пикам в  $|\cos(\chi(\ell/r_{\text{n.p.}})) \sin(\chi(\ell/r_{\text{n.p.}}))|$ , или, другими словами, в  $\chi(\ell/r_{\text{n.p.}}) = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4 \dots$ . В частности, ожидается, что будет пик в  $C_{EE,\ell}^{(S)}$  перед первым пиком в  $C_{TT,\ell}^{(S)}$ , за которым следует один пик в  $C_{EE,\ell}^{(S)}$  между последовательными пиками в  $C_{TT,\ell}^{(S)}$ , а также должно быть два пика в  $|C_{TE,\ell}^{(S)}|$ , перед первым пиком в  $C_{TT,\ell}^{(S)}$ , за которыми следуют два пика в  $|C_{TE,\ell}^{(S)}|$  между последовательными пиками в  $C_{TT,\ell}^{(S)}$ . Именно такое поведение наблюдается при компьютерных вычислениях<sup>47)</sup>. Например, при правдоподобном наборе космологических параметров действительно имеется два пика в  $|C_{TE,\ell}^{(S)}|$  (при  $\ell = 36$  и  $\ell = 144$ ) ниже первого пика в  $C_{TT,\ell}^{(S)}$  при  $\ell = 230$ .

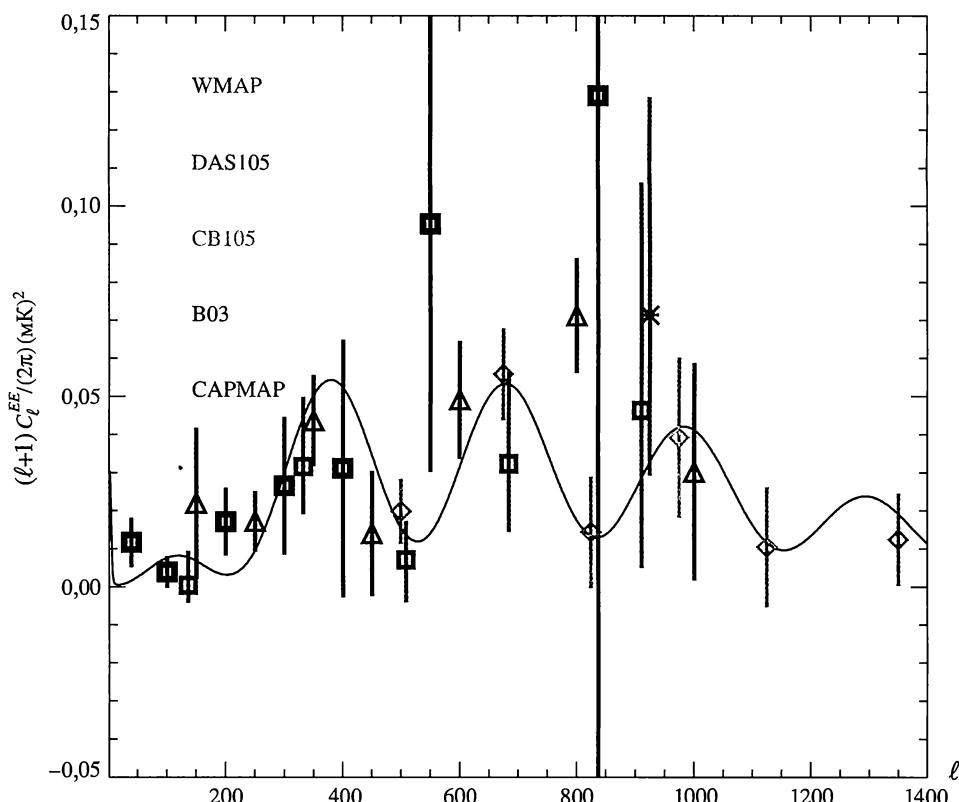
Поляризация  $E$ -типа и корреляция температура-поляризация впервые были обнаружены коллаборацией DASI<sup>48)</sup>. Затем коллаборация WMAP изменила коэффициенты  $C_{TE,\ell}$  с хорошей точностью в диапазоне мультипольных порядков от  $\ell = 2$  до  $\ell \simeq 570$ <sup>49)</sup>. При  $\ell > 10$  полученные результаты находятся в хорошем согласии с общепринятым в настоящее время космологической моделью, в которой предполагается, что спектр первичных флуктуаций близок к виду спектра Зельдовича—Гаррисона  $\mathcal{R}_q^r \propto q^{-3/2}$ , а также присутствие постоянной вакуумной энергии совместно с холодной темной материией, барионной материей, фотонами и безмассовыми нейтрино, причем использу-

<sup>47)</sup> См., например, [http://lambda.gsfc.nasa.gov/data/map/powspec/wmap\\_lcdm\\_pl\\_model\\_vr1\\_v1.txt](http://lambda.gsfc.nasa.gov/data/map/powspec/wmap_lcdm_pl_model_vr1_v1.txt)

<sup>48)</sup> J. Kovac *et al.*, *Nature* **420**, 772 (2002).

<sup>49)</sup> A. Kogut *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 161 (2003).

ются такие же значения космологических параметров  $\Omega_b h^2$ ,  $\Omega_m h^2$ ,  $h$  и  $N$ , которые были использованы для подгонки этой модели при измерениях температурных анизотропий. В частности, есть явное указание на существование второго ожидаемого пика в  $|C_{TE, \ell}|$ , примерно при  $\ell \simeq 140$ , и третьего ожидаемого пика, при  $\ell \simeq 300$ . Совсем недавно коллаборация QUaD<sup>50)</sup> сообщила о предварительных результатах первого сезона работы микроволнового поляриметра на Южном полюсе, из которых следует явное указание



**Рис. 7.6.** Наблюдаемые значения мультипольного коэффициента  $(\ell + 1)C_{EE, \ell}/(2\pi)$ , выраженного в квадратных микрокельвинах, в зависимости от  $\ell$ , взято из работы L. Page *et al.*, [astro-ph/0603450]. (Отметим, что  $C_{EE, \ell}/(2\pi)$  умножается здесь на  $\ell + 1$ , а не на привычный множитель  $\ell(\ell + 1)$ .) Темные квадратики соответствуют данным WMAP; треугольники соответствуют данным BOOMERanG; светлые квадратики соответствуют данным DASI; ромбочки соответствуют данным CBI; звездочки соответствуют данным CAPMAP. Непрерывная кривая является теоретической кривой для  $(\ell + 1)C_{EE, \ell}^{(S)}/(2\pi)$ , где космологические параметры выбраны из условия подгонки с температурой по данным WMAP и данным по поляризации с небольшими  $\ell$

<sup>50)</sup> P. Ade *et al.*, 0705.2359.

на существование первого пика в  $C_{EE,\ell}$  при  $\ell \simeq 350$ , примерно там, где он, как ожидается, возникает по причине рассеяния во время рекомбинации. Однако если в рассматриваемой космологической модели реионизация не учитывается, то возникнет очевидное расхождение между теоретическими предсказаниями и данными для  $C_{TE,\ell}$  при  $\ell < 10$ . Это расхождение приписывается поляризации, вызванной рассеянием в плазме, которая была реионизована ультрафиолетовым излучением от первого поколения звезд.

Наиболее важное приложение измерений поляризации на данный момент состоит в составлении истории реионизации межгалактической материи при красном смещении, много меньшем  $z_{\text{п. р.}} \simeq 1090$ , которая дает вклад в распределение вероятности  $P(t)$  последнего рассеяния. Поскольку близлежащие события образуют большие углы, вызванные реионизацией дополнительные члены в  $C_{EE,\ell}$  и  $C_{TE,\ell}$  пренебрежимо малы, за исключением относительно малых значений  $\ell$ , фактически  $\ell < 10$ . После трех лет работы коллаборации WMAP<sup>51)</sup> обнаружила, исключительно на основе  $EE$  корреляций, что если реионизация происходит мгновенно и полностью при красном смещении  $z_r$ , то  $z_r = 10,9^{+2,7}_{-2,3}$ , что соответствует оптической глубине  $\tau = 0,09 \pm 0,03$ . Этот результат согласуется с ожиданиями относительно характера начала звездообразования и сыграл существенную роль в использовании температурных корреляций для определения величины  $R_q^r$  и установления верхнего предела для  $D_q^r$ , обсуждавшихся соответственно в разд. 7.2 и 7.3. Рассеяние в ионизованной плазме порождает пик в  $C_{EE,\ell}$ , очень похожий на пик при  $\ell \simeq 140$ , но сдвинутый к сильно меньшим  $\ell$ , примерно  $\ell \simeq 4$ , потому что он возникает на расстоянии по угловому диаметру сильно меньшем, чем расстояние по угловому диаметру в эпоху рекомбинации. Измерения WMAP, а также другие измерения  $C_{EE,\ell}$  при больших значениях  $\ell$  находятся в хорошем согласии с теоретической формулой (7.4.39) для  $C_{EE,\ell}$ , см. рис. 7.6, причем ожидается, что будущие измерения уменьшат неопределенности в этом сравнении.

## В. Тензорные моды

Для тензорных мод матрица  $J_{ij}$  в уравнении (7.4.4) задается интегралом Фурье (6.6.9) и «радиальным» интегралом (6.6.24):

$$\begin{aligned} J_{ij}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{p}}, t) = \sum_{\lambda=\pm 2} \int d^3 q e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \beta(\mathbf{q}, \lambda) \times \\ \times \int_{t_1}^t dt' \exp \left( -i\mathbf{q} \cdot \hat{\mathbf{p}} \int_{t'}^t \frac{dt''}{a(t'')} - \int_{t'}^t dt'' \omega_c(t'') \right) \left[ -\hat{p}_k \hat{p}_l (\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) e_{kl}(\hat{q}, \lambda) \dot{\mathcal{D}}(t') - \right. \\ \left. - \omega_c(t') \Psi(q, t') (e_{ij}(\hat{q}, \lambda) - \hat{p}_i \hat{p}_k e_{kj}(\hat{q}, \lambda) - \hat{p}_j \hat{p}_k e_{ik}(\hat{q}, \lambda) + \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}_k \hat{p}_l e_{kl}(\hat{q}, \lambda)) \right], \end{aligned}$$

<sup>51)</sup> L. Page *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **170**, 335 (2007) [astro-ph/0603450].

В очередной раз используя условия  $\hat{n}_i e_{+i}(\hat{n}) = 0$  и  $e_{+i}(\hat{n}) e_{+i}(\hat{n}) = 0$ , мы видим, что единственный член в подынтегральном выражении, дающий вклад в параметры Стокса в уравнении (7.4.4), пропорционален  $e_{ij}\Psi$ . Этот член приводит к выражению

$$\begin{aligned} Q^{(T)}(\hat{n}) + iU^{(T)}(\hat{n}) &= -\frac{1}{2} T_0 e_{+i}(\hat{n}) e_{+j}(\hat{n}) \sum_{\lambda=\pm 2} \int d^3 q \beta(\mathbf{q}, \lambda) \times \\ &\times e_{ij}(\hat{q}, \lambda) \int_{t_1}^{t_0} dt \exp \left( i\mathbf{q} \cdot \hat{n} \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} \right) P(t) \Psi(q, t), \end{aligned} \quad (7.4.41)$$

где  $\beta(\mathbf{q}, \lambda)$  — стохастический параметр гравитационной волны с волновым числом  $\mathbf{q}$  и спиральностью  $\lambda$ ;  $P(t)$  — функция распределения при последнем рассеянии (7.4.33);  $\Psi(q, t)$  — функция источника, выражаемая уравнением (6.6.21) в терминах амплитуд парциальных волн температуры и амплитуд возмущений поляризации:

$$\begin{aligned} \Psi(q, t) &= \frac{1}{10} \Delta_{T,0}^{(T)}(q, t) + \frac{1}{7} \Delta_{T,2}^{(T)}(q, t) + \frac{3}{70} \Delta_{T,4}^{(T)}(q, t) - \frac{3}{5} \Delta_{P,0}^{(T)}(q, t) + \\ &+ \frac{6}{7} \Delta_{P,2}^{(T)}(q, t) - \frac{3}{70} \Delta_{P,4}^{(T)}(q, t). \end{aligned} \quad (7.4.42)$$

Кроме того,  $e_{ij}(\hat{q}, \lambda)$  является тензором поляризации:

$$e_{ij}(\hat{q}, \lambda) = S_{ik}(\hat{q}) S_{jl}(\hat{q}) e_{kl}(\hat{z}, \lambda), \quad (7.4.43)$$

где  $S_{ij}(\hat{q})$  является стандартным трехмерным вращением (7.4.12), которое переводит 3-ось в направление  $\hat{q}$ , а  $e_{kl}(\hat{z}, \lambda)$  — тензор поляризации (5.2.15) для волн, распространяющихся в 3-направлении, с отличными от нуля компонентами

$$e_{11}(\hat{z}, \pm 2) = -e_{22}(\hat{z}, \pm 2) = \mp ie_{12}(\hat{z}, \pm 2) = \mp ie_{21}(\hat{z}, \pm 2) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (7.4.44)$$

Сперва покажем, как найти мультипольные коэффициенты  $C_{EE,\ell}^T$ ,  $C_{BB,\ell}^T$  и  $C_{TE,\ell}^T$  для заданной функции источника  $\Psi(q, t)$ , после чего приведем результаты численного вычисления  $\Psi(q, t)$ , проведенного согласно рецепту из разд. 7.3.

Начнем с вывода формулы для коэффициентов  $a_{P,\ell m}^T$  в разложении параметров Стокса на сферические гармоники с определенными спиновыми весами:

$$Q^{(T)}(\hat{n}) + iU^{(T)}(\hat{n}) = \sum_{\ell m} a_{P,\ell m}^T \mathcal{Y}_{\ell}^m(\hat{n}). \quad (7.4.45)$$

Воспользовавшись выражением (7.4.41) и свойством ортонормированности (7.4.21) для  $\mathcal{Y}_{\ell}^m$ , получаем

$$a_{P,\ell m}^{(T)} = \int d^2 \hat{n} \mathcal{Y}_{\ell}^{m*}(\hat{n}) (Q(\hat{n}) + iU(\hat{n}))^{(T)} =$$

$$= -\frac{T_0}{2} \sum_{\lambda} \int d^3 q \beta(\mathbf{q}, \lambda) \int_{t_1}^{t_0} dt P(t) \Psi(q, t) g_{\ell m}(qr(t), \hat{q}, \lambda), \quad (7.4.46)$$

где  $r(t)$  — невозмущенная сопутствующая радиальная координата фотона в момент времени  $t$ , который достигает нас в момент времени  $t_0$ ,

$$r(t) \equiv \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}, \quad (7.4.47)$$

и

$$g_{\ell m}(\rho, \hat{q}, \lambda) \equiv \int d^2 \hat{n} \mathcal{Y}_{\ell}^{m*}(\hat{n}) e^{i\rho \hat{q} \cdot \hat{n}} \sum_{ij} e_{+i}(\hat{n}) e_{+j}(\hat{n}) e_{ij}(\hat{q}, \lambda). \quad (7.4.48)$$

Удобно сперва вычислить амплитуду  $g_{\ell m}(\rho, \hat{q}, \lambda)$  для  $\hat{q}$  вдоль направления оси  $\hat{z}$ . Прямое вычисление с помощью тензора поляризации (7.4.43) и вектора поляризации фотона (7.4.9) приводит к соотношению

$$e_{+i}(\hat{n}) e_{+j}(\hat{n}) e_{ij}(\hat{z}, \pm 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (e_{+1}(\hat{n}) \pm i e_{+2}(\hat{n}))^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{\pm 2i\phi} (1 \mp \cos \theta)^2, \quad (7.4.49)$$

где, как обычно,  $\phi$  и  $\theta$  — азимутальный и полярный углы в направлении  $\hat{n}$ . Из уравнения (7.4.22) следует, что  $\mathcal{Y}_{\ell}^{m*}(\hat{n})$  равно  $e^{-im\phi}$ , умноженному на функцию от  $\theta$ , поэтому интеграл в выражении (7.4.48) обращается в ноль, за исключением  $m = \lambda = \pm 2$ , в случае чего он сводится к множителю  $2\pi$ . Для  $\mathcal{Y}_{\ell}^{\pm 2}$  мы воспользуемся верхней строчкой в выражении (7.4.22), из которой следует

$$\mathcal{Y}_{\ell}^{\pm 2}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}} \partial_{\pm} Y_{\ell}^{\pm 2}(\theta, \phi) = e^{\pm 2i\phi} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!} \partial_{\pm} P_{\ell}^2(\cos \theta), \quad (7.4.50)$$

где  $\partial_{\pm}$  — дифференциальные операторы,

$$\partial_{\pm} \equiv \left( \frac{d}{d\theta} \mp 2 \operatorname{cosec} \theta \right)^2 - \operatorname{ctg} \theta \left( \frac{d}{d\theta} \mp 2 \operatorname{cosec} \theta \right) = (1 - \mu^2) \frac{d}{d\mu^2} \pm 4 \frac{d}{d\mu} + \frac{4(1 \pm \mu)}{1 - \mu^2}, \quad (7.4.51)$$

где  $\mu \equiv \cos \theta$ , и  $P_{\ell}^2(\cos \theta)$  является обычной присоединенной функцией Лежандра,

$$P_{\ell}^2(\mu) = (1 - \mu^2) \frac{d^2}{d\mu^2} P_{\ell}(\mu). \quad (7.4.52)$$

Если собирать все вместе, расположив  $\mathbf{q}$  в направлении  $\hat{z}$ , выражение (7.4.48) приводится к виду

$$g_{\ell m}(\rho, \hat{z}, \pm 2) = \delta_{m, \pm 2} \sqrt{\frac{\pi(2\ell+1)}{8}} \frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!} \int_{-1}^{+1} d\mu [\partial_{\pm} P_{\ell}^2(\mu)] e^{i\rho\mu} (1 \mp \mu)^2. \quad (7.4.53)$$

Воспользуемся соотношением для присоединенной функции Лежандра (7.4.52), проинтегрируем по частям, так чтобы производные  $\partial_{\pm}$  действовали на  $(1 \mp \mu)^2 e^{i\rho\mu}$ , и применим формулу

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} ((1 - \mu^2)(1 \mp \mu)^2 e^{i\rho\mu}) + \left( \mp 4 \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{4(1 \pm \mu)}{1 - \mu^2} \right) (1 \mp \mu)^2 e^{i\rho\mu} = \\ = (1 - \mu^2)[12 \mp 8i\rho(1 \mp \mu) - \rho^2(1 \mp \mu)^2] e^{i\rho\mu}. \end{aligned}$$

Заменяя  $\mu$  на  $-i\partial/\partial\rho$ , находим

$$\begin{aligned} g_{\ell m}(\rho, \hat{z}, \pm 2) = \delta_{m, \pm 2} \sqrt{\frac{\pi(2\ell+1)}{8}} \frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!} \int_{-1}^{+1} d\mu P_{\ell}(\mu) \times \\ \times \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} [12 \mp 8i(1 \mp \mu) - \rho^2(1 \mp \mu)^2] (1 - \mu^2)^2 e^{i\rho\mu} = \\ = -\delta_{m, \pm 2} \sqrt{\frac{\pi(2\ell+1)}{8}} \frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!} \int_{-1}^{+1} d\mu P_{\ell}(\mu) \times \\ \times \left[ 12 + 8\rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \rho^2 + \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \mp 8i\rho \mp 2i\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \left( 1 + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right)^2 \rho^2 e^{i\rho\mu}. \end{aligned}$$

Интеграл по  $\mu$  сводится к простому выражению

$$\int_{-1}^{+1} d\mu e^{i\rho\mu} P_{\ell}(\mu) = 2i^{\ell} j_{\ell}(\rho).$$

Воспользовавшись определяющим дифференциальным уравнением

$$j_{\ell}''(\rho) + \left( \frac{2}{\rho} \right) j_{\ell}'(\rho) + \left( 1 - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right) j_{\ell}(\rho) = 0$$

и проведя прямые, но утомительные вычисления, получаем

$$\left( 1 + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right)^2 \rho^2 j_{\ell}(\rho) = \frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!} \frac{j_{\ell}(\rho)}{\rho^2},$$

так что окончательно имеем

$$g_{\ell m}(\rho, \hat{z}, \pm 2) = -2i^{\ell} \delta_{m, \pm 2} \sqrt{\frac{\pi(2\ell+1)}{8}} \times$$

$$\times \left[ 12 + 8\rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \rho^2 + \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \mp 8i\rho \mp 2i \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \frac{j_\ell(\rho)}{\rho^2}. \quad (7.4.54)$$

Так же как в уравнении (7.3.13) для температурных флуктуаций, ампли-туда для  $\mathbf{q}$ , лежащего в произвольном направлении, задается применением стандартного вращения  $S(\hat{q})$ , которое переводит 3-ось в направление  $\mathbf{q}$ :

$$g_{\ell m}(\rho, \hat{q}, \pm 2) = \sum_{m'} D_{m, m'}^{(\ell)}(S(\hat{q})) g_{\ell m'}(\rho, \hat{z}, \pm 2), \quad (7.4.55)$$

где  $D^{(\ell)}$  — это спин- $\ell$  унитарное представление группы вращений. Тогда, воспользовавшись соотношениями (7.4.46), (7.4.54) и (7.4.55), получаем

$$a_{P, \ell m}^{(T)} = T_0 i^\ell \sqrt{\frac{\pi(2\ell+1)}{8}} \sum_{\pm} \int d^3 q \beta(\mathbf{q}, \pm 2) D_{m, \pm 2}^{(\ell)}(S(\hat{q})) \int_{t_1}^{t_0} dt P(t) \Psi(q, t) \times \\ \times \left\{ \left[ 12 + 8\rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \rho^2 + \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \mp 8i\rho \mp 2i\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \frac{j_\ell(\rho)}{\rho^2} \right\}_{\rho=qr(t)}. \quad (7.4.56)$$

Чтобы отделить друг от друга  $E$ - и  $B$ -члены в  $a_{P, \ell m}^{(T)}$ , необходимо привлечь свойства вещественности для  $\beta$  и  $D^{(\ell)}$ . Сначала, заметим, что

$$e_{ij}(\hat{q}, \pm 2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (S_{i1}(\hat{q}) \pm i S_{i2}(\hat{q})) (S_{j1}(\hat{q}) \pm i S_{j2}(\hat{q}))$$

и

$$(S_{i1}(\hat{q}) \pm i S_{i2}(\hat{q})) = (\cos \theta \cos \phi \mp i \sin \phi, \cos \theta \sin \phi \pm i \cos \phi, -\sin \theta),$$

поэтому  $e_{ij}^*(\hat{q}, \pm 2) = e_{ij}(\hat{q}, \mp 2) = e_{ij}(-\hat{q}, \pm 2)$ . Если вклад в гравитационное поле дается единственной модой, то  $\mathcal{D}_q^*(t)$  должно быть пропорционально  $\mathcal{D}_q(t)$ , так что убирая произвольную фазу в  $\beta(\mathbf{q}, \pm 2)$ , можно выбрать  $\mathcal{D}_q(t)$  вещественным. В этом случае из вещественности  $D_{ij}(\mathbf{x}, t)$  следует, что

$$\beta^*(\mathbf{q}, \pm 2) = \beta(-\mathbf{q}, \pm 2). \quad (7.4.57)$$

Также, записав

$$D^{(\ell)}(S(\hat{q})) = \exp(-i\phi J_3^{(\ell)}) \exp(-i\theta J_2^{(\ell)}),$$

где  $J_i^{(\ell)}$  — это матрицы<sup>52)</sup> углового момента  $\ell$ , можно показать, что

$$D_{m, \pm 2}^{(\ell)}(S(\hat{q}))^* = (-1)^\ell D_{-m, \pm 2}^{(\ell)}(S(-\hat{q})). \quad (7.4.58)$$

<sup>52)</sup> Как отмечалось в сноске 37, фазы рассматриваемых матриц углового момента зависят от того, какие соглашения насчет фазы приняты для сферических гармоник. Они связаны соотношением

$$\int d^2 \hat{n} Y_\ell^{m'}(\hat{n})^* \mathbf{L} Y_\ell^m(\hat{n}) = \mathbf{J}_{m'm}^\ell,$$

где  $\mathbf{L} \equiv -i\mathbf{x} \times \nabla$  — это оператор орбитального углового момента.

Здесь знак  $(-1)^\ell$  сокращается с таким же знаком в  $i^{-\ell} = (-1)^\ell i^\ell$ . Отсюда следует, что весь эффект от комплексного сопряжения  $a_{P,\ell m}^T$  и изменения  $m$  на  $-m$  состоит в замене дифференциального оператора, действующего на  $j_\ell(\rho)/\rho^2$ , на его комплексно сопряженный:

$$\begin{aligned} a_{P,\ell-m}^{T*} &= T_0 i^\ell \sqrt{\frac{\pi(2\ell+1)}{8}} \sum_{\pm} \int d^3 q \beta(\mathbf{q}, \pm 2) D_{m,\pm 2}^{(\ell)}(S(\hat{q})) \int_{t_1}^{t_0} dt P(t) \Psi(q, t) \times \\ &\times \left\{ \left[ 12 + 8\rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \rho^2 + \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \pm 8i\rho \pm 2i\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \frac{j_\ell(\rho)}{\rho^2} \right\}_{\rho=qr(t)}. \end{aligned} \quad (7.4.59)$$

Тогда определения (7.4.25) приводят к выражениям

$$\begin{aligned} a_{E,\ell m}^{(T)} &= -i^\ell T_0 \sqrt{\frac{\pi(2\ell+1)}{8}} \sum_{\pm} \int d^3 q \beta(\mathbf{q}, \pm 2) D_{m,\pm 2}^{(\ell)}(S(\hat{q})) \times \\ &\times \int_{t_1}^{t_0} dt P(t) \Psi(q, t) \times \left\{ \left[ 12 + 8\rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \rho^2 + \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right] \frac{j_\ell(\rho)}{\rho^2} \right\}_{\rho=qr(t)}. \end{aligned} \quad (7.4.60)$$

$$\begin{aligned} a_{B,\ell m}^{(T)} &= i^\ell T_0 \sqrt{\frac{\pi(2\ell+1)}{8}} \sum_{\pm} \pm \int d^3 q \beta(\mathbf{q}, \pm 2) D_{m,\pm 2}^{(\ell)}(S(\hat{q})) \times \\ &\times \int_{t_1}^{t_0} dt P(t) \Psi(q, t) \left\{ \left[ 8\rho + 2\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \frac{j_\ell(\rho)}{\rho^2} \right\}_{\rho=qr(t)}. \end{aligned} \quad (7.4.61)$$

Теперь можно вычислить мультипольные коэффициенты с помощью стохастических средних,

$$\langle \beta(\mathbf{q}, \lambda) \beta^*(\mathbf{q}', \lambda') \rangle = \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \delta_{\lambda \lambda'}, \quad (7.4.62)$$

и соотношения унитарности (7.3.17):

$$\int d^2 \hat{q} D_{m,\pm 2}^{(\ell)}(S(\hat{q})) D_{m',\pm 2}^{(\ell')}(S(\hat{q}))^* = \frac{4\pi}{2\ell+1} \delta_{mm'} \delta_{\ell\ell'}.$$

Сумма по спиральностям дает в точности множитель  $\pm 2$  в  $EE$  и  $BB$  корреляторах, и, как ожидалось, в  $EB$  корреляторе происходит полное сокращение, обусловленное знаками  $\pm$  в соотношении (7.4.62). Тогда вклады тензорных мод в мультипольные коэффициенты поляризации равны<sup>53)</sup>

$$C_{EE,\ell}^{(T)} = \pi^2 T_0^2 \int_0^\infty q^2 dq \times$$

<sup>53)</sup> Эти формулы, а также (7.4.65), эквивалентны формулам из работы Залдаррьяги и Селяка, сноска 33.

$$\times \left| \int_{t_1}^{t_0} dt P(t) \Psi(q, t) \left\{ \left[ 12 + 8\rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \rho^2 + \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right] \frac{j_\ell(\rho)}{\rho^2} \right\}_{\rho=qr(t)} \right|^2. \quad (7.4.63)$$

$$C_{BB, \ell}^{(T)} = \pi^2 T_0^2 \int_0^\infty q^2 dq \times \\ \times \left| \int_{t_1}^{t_0} dt P(t) \Psi(q, t) \left\{ \left[ 8\rho + 2\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \frac{j_\ell(\rho)}{\rho^2} \right\}_{\rho=qr(t)} \right|^2. \quad (7.4.64)$$

Полученные результаты (7.4.60) и (7.4.61), вместе с (7.3.14), позволяют также вычислить мультипольные коэффициенты в корреляторе между температурой и поляризацией. В  $C_{TB}^{(T)}$  знак  $\pm$  перед интегралом по волновым числам в (7.4.61) приводит к сокращению между двумя слагаемыми в сумме по спиральностям  $\pm 2$ , так что, как ожидалось,  $C_{TB}^{(T)} = 0$ . С другой стороны, в  $C_{TE}^{(T)}$  сумма по спиральностям  $\pm 2$  в точности дает множитель 2, так что из уравнений (7.3.14), (7.4.61) и (7.4.60) получаем

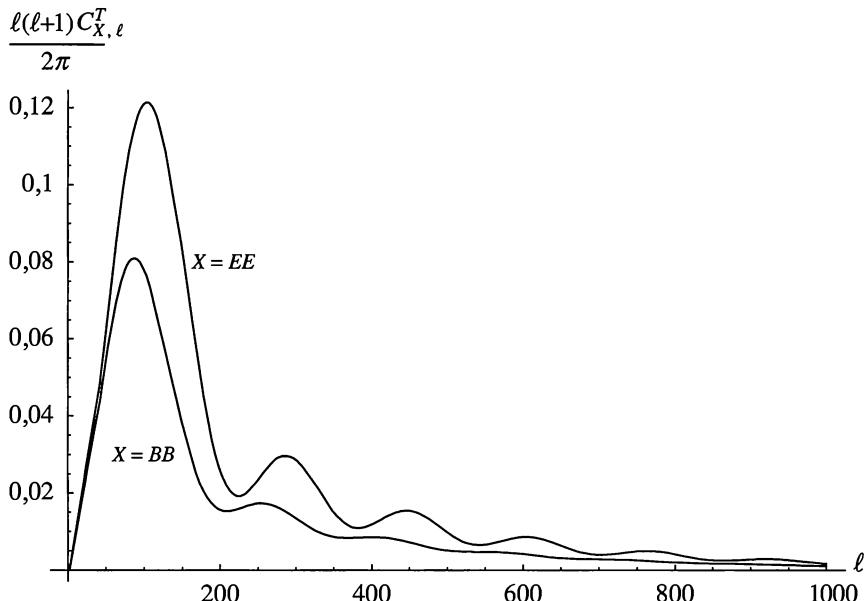
$$C_{TE, \ell}^{(T)} = -2\pi^2 T_0^2 \sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} \int_0^\infty q^2 dq \times \\ \times \int_{t_1}^{t_0} dt P(t) \Psi(q, t) \left\{ \left[ 12 + 8\rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \rho^2 + \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right] \frac{j_\ell(\rho)}{\rho^2} \right\}_{\rho=qr(t)} \times \\ \times \int_{t_1}^{t_0} dt' d(q, t') \frac{j_\ell(qr(t'))}{q^2 r^2(t')}, \quad (7.4.65)$$

где

$$d(q, t) \equiv \left[ \dot{\mathcal{D}}_q(t) - \frac{1}{2} \omega_c(t) \right] \exp \left( - \int_t^{t_0} \omega_c(t') dt' \right). \quad (7.4.66)$$

Вычисление гравитационной амплитуды  $\mathcal{D}_q(t)$  и функции источника  $\Psi(q, t)$  описано в предыдущем разделе. Для таких же космологических параметров, какие предполагались в предыдущем разделе, уравнения (7.4.63) и (7.4.64) приводят к  $EE$  и  $BV$  мультипольным коэффициентам, представленным на рис. 7.7. ( $TE$  коэффициенты рассмотрены ниже.)

Результаты (7.4.63)–(7.4.65) задают основу для высокоточных компьютерных вычислений тензорных мультипольных коэффициентов, однако критическое рассмотрение этих формул не приводит к более глубокому пониманию качественного поведения коэффициентов как функций от  $\ell$ . В част-



**Рис. 7.7.** Зависимость мультипольных коэффициентов  $\ell(\ell + 1)C_{EE, \ell}^T/(2\pi)$  и  $\ell(\ell + 1)C_{BB, \ell}^T/(2\pi)$ , выраженных в квадратных микрокельвинах, от  $\ell$  при космологических параметрах, заданных в разд. 7.2 (см. также сноска 55). Эти результаты согласуются с точностью до 1 % с результатами, полученными (при таких же космологических параметрах) при использовании компьютерных программ CMBfast и CAMB, в которых вместо использования интегрального уравнения (7.3.22), как это сделано здесь, система уравнений Больцмана усечена на максимальном значении  $\ell$ . (Результаты двух компьютерных программ отличаются друг от друга примерно с той же точностью)

ности, рассматривая уравнения (7.4.63) и (7.4.64), с трудом можно угадать, что  $C_{BB, \ell}^T < C_{EE, \ell}^T$  при всех  $\ell > 15$ , или то, что  $C_{BB, \ell}^T$  и  $C_{EE, \ell}^T$  стремятся друг к другу при  $\ell < 100$ , как показано для одного набора космологических параметров на рис. 7.7.

Данные результаты сильно упрощаются и становятся более прозрачными при больших  $\ell$ . Напомним, что при  $\rho^2 - \nu^2 \gg \nu^{4/3}$  (где  $\nu \equiv \ell + 1/2$ ), сферические функции Бесселя обладают хорошо известным асимптотическим поведением<sup>54)</sup>:

$$j_\ell(\rho) \rightarrow \frac{\cos b}{\nu \sqrt{\sin b}} \cos \left[ \nu(\operatorname{tg} b - b) - \frac{\pi}{4} \right], \quad (7.4.67)$$

<sup>54)</sup> I. S. Gradshteyn & I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, переведенное, исправленное и расширенное издание A. Jeffrey (Academic Press, New York, 1980): формула 8.453.1 (см. сноска 11. — Прим. ред. перев.). Такое же приближение используется в работе J. R. Pritchard and M. Kamionkowski, *Ann. Phys.* **318**, 2 (2005) [astro-ph/0412581], однако их последующие приближения сильно отличаются от используемых здесь и в работе из сноски 55.

где  $\cos b \equiv \nu/\rho$  при  $0 \leq b \leq \pi/2$ . С другой стороны, при  $\nu^2 - \rho^2 \gg \nu^{4/3}$  значение  $j_\ell(\rho)$  экспоненциально мало. В диапазоне  $|\rho^2 - \nu^2| < \nu^{4/3}$  ни одно из приближений не работает, однако в этом диапазоне  $j_\ell(\rho)$  является гладкой функцией от  $\rho$ , без сингулярности в точке  $\rho = \nu$ , которая может быть обусловлена множителем  $1/\sqrt{\sin b}$  в уравнении (7.4.67). При  $\nu \gg 1$  данный диапазон составляет лишь малую часть интервала интегрирования, и ожидается, что мы сможем воспользоваться приближением (7.4.67). При  $\rho^2 - \nu^2 \gg \nu^{4/3} \gg 1$  доминантные вклады в производные от  $j_\ell(\rho)/\rho^2$  идут от членов, в которых производные действуют только на косинус в (7.4.67), поэтому

$$\begin{aligned} \left[ 12 + 8\rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \rho^2 + \rho^2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right] \frac{j_\ell(\rho)}{\rho^2} &\rightarrow -j_\ell(\rho) + j_\ell''(\rho) \rightarrow \\ \rightarrow -\frac{(1 + \sin^2 b) \cos b}{\nu \sqrt{\sin b}} \cos \left[ \nu(\operatorname{tg} b - b) - \frac{\pi}{4} \right], \end{aligned} \quad (7.4.68)$$

$$\left[ 8\rho + 2\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right] \frac{j_\ell(\rho)}{\rho^2} \rightarrow 2j_\ell'(\rho) \rightarrow -\frac{2\sqrt{\sin b} \cos b}{\nu} \sin \left[ \nu(\operatorname{tg} b - b) - \frac{\pi}{4} \right]. \quad (7.4.69)$$

---

Действие производных на  $1/\sqrt{\sin b}$  приведет к неинтегрируемой сингулярности в точке  $b = 0$ , однако она имеет фиктивный характер, потому что асимптотическая формула (7.4.67) перестает работать для  $\rho$ , очень близко расположенных к  $\nu$ , где сингулярность фактически отсутствует.

---

Тогда уравнения (7.4.63)–(7.4.65) при  $\nu \equiv \ell + 1/2 \gg 1$  принимают вид<sup>55)</sup>

$$\begin{aligned} C_{EE, \ell}^{(T)} &= \frac{\pi^2 T_0^2}{\nu^2} \int_0^\infty q^2 dq \left| \int_{r(t) > \nu/q} dt P(t) \Psi(q, t) \times \right. \\ &\times \left. \left\{ \frac{(1 + \sin^2 b) \cos b}{\sqrt{\sin b}} \cos \left[ \nu(\operatorname{tg} b - b) - \frac{\pi}{4} \right] \right\}_{\cos b = \frac{\nu}{qr(t)}} \right|^2, \end{aligned} \quad (7.4.70)$$

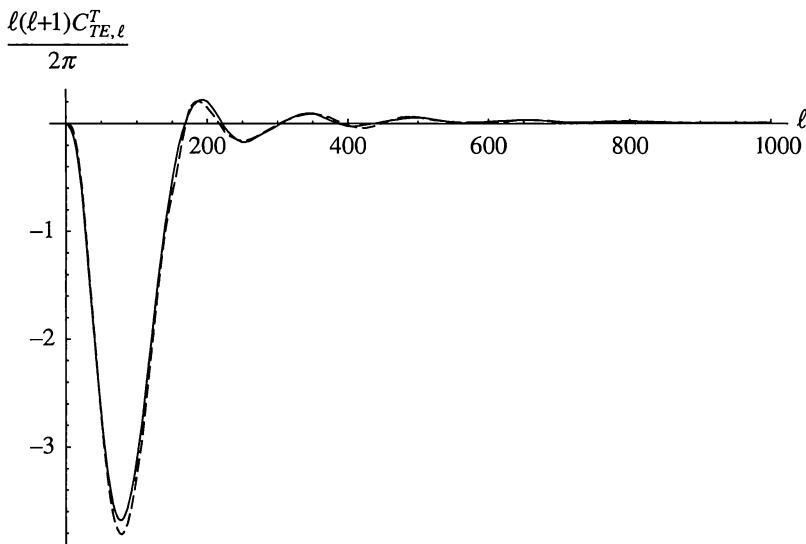
$$\begin{aligned} C_{BB, \ell}^{(T)} &= \frac{\pi^2 T_0^2}{\nu^2} \int_0^\infty q^2 dq \left| \int_{r(t) > \nu/q} dt P(t) \Psi(q, t) \times \right. \\ &\times \left. \left\{ 2\sqrt{\sin b} \cos b \sin \left[ \nu(\operatorname{tg} b - b) - \frac{\pi}{4} \right] \right\}_{\cos b = \frac{\nu}{qr(t)}} \right|^2, \end{aligned} \quad (7.4.71)$$

<sup>55)</sup> R. Flauger and S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **75**, 123505 (2007) [astro-ph/0703179].

$$\begin{aligned}
 C_{TE,\ell}^{(T)} = & -\frac{2\pi^2 T_0^2}{\nu^2} \int_0^\infty q^2 dq \int_{r(t) > \nu/q} dt P(t) \Psi(q, t) \times \\
 & \times \left\{ \frac{(1 + \sin^2 b) \cos b}{\sqrt{\sin b}} \cos \left[ \nu(\operatorname{tg} b - b) - \frac{\pi}{4} \right] \right\}_{\cos b = \frac{\nu}{qr(t)}} \times \\
 & \times \int_{r(t') > \nu/q} dt' d(q, t') \left\{ \frac{\cos^3 b'}{\sqrt{\sin b'}} \cos \left[ \nu(\operatorname{tg} b' - b') - \frac{\pi}{4} \right] \right\}_{\cos b' = \frac{\nu}{qr(t')}} \quad (7.4.72)
 \end{aligned}$$

На рис. 7.8 этот приближенный результат для  $C_{TE,\ell}^T$  сравнивается с точным результатом (7.4.65).

Для  $C_{EE,\ell}^T$  и  $C_{BB,\ell}^T$  мы можем с пользой сделать следующее приближение. Величина  $b \equiv \cos^{-1}(\nu/(qr(t)))$  существенно не меняется внутри относительно узкого интервала времен  $t$  в котором вероятность последнего рассеяния  $P(t)$  весьма значительна, поэтому можно положить  $r(t)$  равным  $r_{\text{п.р.}} \equiv r(t_{\text{п.р.}})$  везде, кроме фазы  $\nu(\operatorname{tg} b - b)$ , которая при  $\nu \gg 0$  действительно меняется в широком диапазоне внутри данного временного интервала. Более того, так как эта фаза изменяется в широком диапазоне, разница между  $\cos [\nu(\operatorname{tg} b - b) - \pi/4]$  и  $\sin [\nu(\operatorname{tg} b - b) - \pi/4]$  незначительна, поэтому можно



**Рис. 7.8.** Зависимость мультипольного коэффициента  $\ell(\ell+1)C_{TE,\ell}^T/(2\pi)$ , выраженного в квадратных микрокельвинах, от  $\ell$ , сноска 55. Сплошная кривая берется на основе точной формулы (7.4.65); пунктирная кривая описывает приближение (7.4.72). В обоих случаях метод вычисления гравитационной амплитуды и функции источника, а также предполагаемых космологических параметров описан в разд. 7.3

заменить их на  $\cos [\nu(\operatorname{tg} b - b)]$ . Тогда уравнения (7.4.70) и (7.4.71) принимают вид (см. сноска 55)

$$\ell(\ell+1)C_{EE,\ell}^{(T)} \rightarrow \pi^2 T_0^2 \int_{\nu/r_{\text{п.п.}}}^{\infty} q^2 dq \left\{ (1 + \sin^2 b_{\text{п.п.}})^2 \cos^2 b_{\text{п.п.}} \right\}_{\cos b_{\text{п.п.}}} = \frac{\nu}{qr_{\text{п.п.}}} \times \\ \times \left| \int_{r(t)>\nu/q} dt P(t) \Psi(q, t) \left\{ \frac{\cos [\nu(\operatorname{tg} b - b)]}{\sqrt{\sin b}} \right\}_{\cos b = \frac{\nu}{qr(t)}} \right|^2, \quad (7.4.73)$$

$$\ell(\ell+1)C_{BB,\ell}^{(T)} \rightarrow \pi^2 T_0^2 \int_{\nu/r_{\text{п.п.}}}^{\infty} q^2 dq \left\{ 4 \sin^2 b_{\text{п.п.}} \cos^2 b_{\text{п.п.}} \right\}_{\cos b_{\text{п.п.}}} = \frac{\nu}{qr_{\text{п.п.}}} \times \\ \times \left| \int_{r(t)>\nu/q} dt P(t) \Psi(q, t) \left\{ \frac{\cos [\nu(\operatorname{tg} b - b)]}{\sqrt{\sin b}} \right\}_{\cos b = \frac{\nu}{qr(t)}} \right|^2. \quad (7.4.74)$$

---

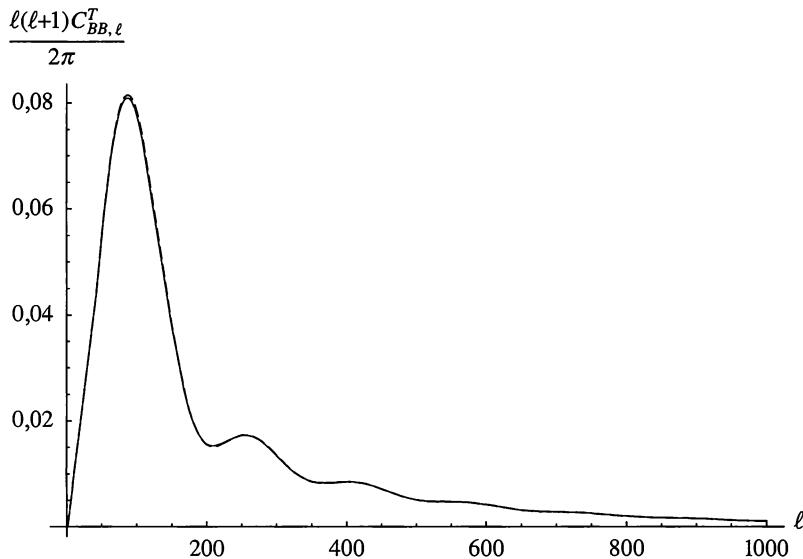
Чтобы избежать расходимости при интегрировании по  $q$  в точке  $q = \nu/r_{\text{п.п.}}$ , мы не стали класть  $b = b_{\text{п.п.}}$  в факторах  $1/\sqrt{\sin b}$  в обоих интегралах по  $t$ .

---

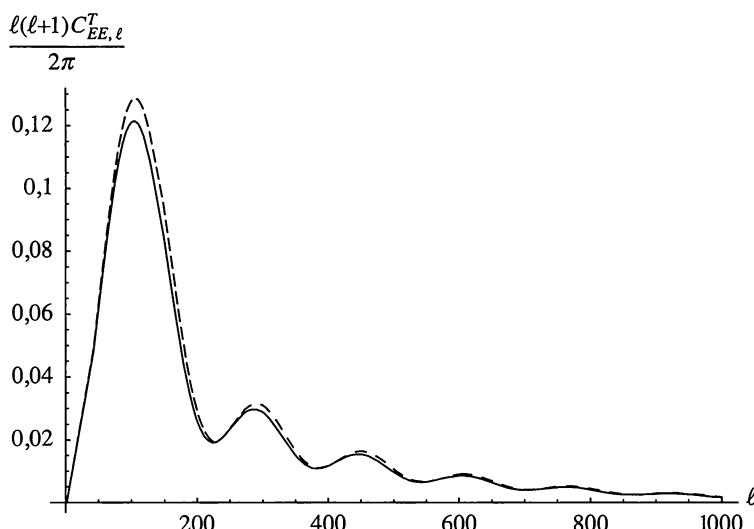
На рис. 7.9 и 7.10 результаты использования этих приближенных формул сравниваются с точными формулами (7.4.62) и (7.4.63).

Полученный нами приближенный результат для  $C_{BB,\ell}^T$  согласуется с точным результатом с погрешностью примерно в 1 %, что достаточно хорошо подходит для любых практических целей. Приближенный результат для  $C_{EE,\ell}^T$  не так хорош, потому что его соответствие точному результату имеет погрешность почти 14 %, однако очевидно, что оба приближения достаточно хороши, если речь идет о количественных выводах. Одно из таких немедленных заключений состоит в том, что так как  $(1 + \sin^2 b_{\text{п.п.}}) \geq 4 \sin^2 b_{\text{п.п.}}$  для всех вещественных  $b_{\text{п.п.}}$ , то получаем  $C_{EE,\ell}^T > C_{BB,\ell}^T$ . Также для достаточно малых  $\ell$ , чтобы волновое число  $\ell/r_{\text{п.п.}}$  возникало под горизонтом до наступления баланса вещества и излучения, скажем  $\ell < 100$ , при которых  $\Psi(\ell/r_{\text{п.п.}}, t_{\text{п.п.}})$  мало, основной вклад в интегралы по  $q$  возникает при значениях подынтегрального выражения, для которых  $\cos b$  мал, в случае чего  $(1 + \sin^2 b) \simeq 4 \sin^2 b$ , и следовательно  $C_{EE,\ell}^T \simeq C_{BB,\ell}^T$ . Как уже отмечалось, на рис. 7.7 оба свойства очевидны (по-крайней мере, для одного набора космологических параметров).

Малость  $C_{BB,\ell}^T$  станет серьезным затруднением для будущих наблюдений, однако обнаружение первичной  $BB$  моды будет иметь огромную важность для космологии, поскольку оно станет явным доказательством существования фоновых гравитационных волн. Ожидаемые следствия присутствия таких тензорных мод в теориях инфляции обсуждаются в гл. 10.



**Рис. 7.9.** Зависимость мультипольного коэффициента  $\ell(\ell+1)C_{BB,\ell}^T/(2\pi)$ , выраженного в квадратных микрокельвинах, от  $\ell$ , сноска 55. Сплошная кривая берется на основе точной формулы (7.4.64); пунктирная кривая описывает приближение (7.4.71). В обоих случаях метод вычисления гравитационной амплитуды и функции источника, а также предполагаемых космологических параметров описан в разд. 7.3



**Рис. 7.10.** Зависимость мультипольного коэффициента  $\ell(\ell+1)C_{EE,\ell}^T/(2\pi)$ , выраженного в квадратных микрокельвинах, от  $\ell$ , сноска 55. Сплошная кривая берется на основе точной формулы (7.4.63); пунктирная кривая описывает приближение (7.4.70). В обоих случаях метод вычисления гравитационной амплитуды и функции источника, а также предполагаемых космологических параметров описан в разд. 7.3

\* \* \*

Мультипольные коэффициенты  $C_{EE,\ell}$ ,  $C_{BB,\ell}$  и  $C_{TE,\ell}$  могут быть измерены с помощью данных по корреляциям среди параметров Стокса и температурных флуктуаций при сравнении с общими теоретическими формулами для этих корреляционных функций<sup>56)</sup>, аналогичными общей формуле (2.6.4) для температурной корреляционной функции. Чтобы вывести эти формулы, сначала заметим на основании (7.4.15) и (7.4.25), что

$$Q(\hat{n}) = -\frac{1}{2} \sum_{\ell m} a_{E,\ell m} [\mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n}) + \mathcal{Y}_\ell^{-m}(\hat{n})^*] - \frac{i}{2} \sum_{\ell m} a_{B,\ell m} [\mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n}) - \mathcal{Y}_\ell^{-m}(\hat{n})^*], \quad (7.4.75)$$

$$U(\hat{n}) = \frac{i}{2} \sum_{\ell m} a_{E,\ell m} [\mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n}) - \mathcal{Y}_\ell^{-m}(\hat{n})^*] - \frac{1}{2} \sum_{\ell m} a_{B,\ell m} [\mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n}) + \mathcal{Y}_\ell^{-m}(\hat{n})^*]. \quad (7.4.76)$$

Затем из уравнений (7.4.28) и (7.4.29) находим корреляционные функции:

$$\begin{aligned} \langle Q(\hat{n}) Q(\hat{n}') \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_\ell C_{EE,\ell} (F_\ell(\hat{n}, \hat{n}') + G_\ell(\hat{n}, \hat{n}')) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_\ell C_{BB,\ell} (F_\ell(\hat{n}, \hat{n}') - G_\ell(\hat{n}, \hat{n}')), \end{aligned} \quad (7.4.77)$$

$$\begin{aligned} \langle U(\hat{n}) U(\hat{n}') \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_\ell C_{EE,\ell} (F_\ell(\hat{n}, \hat{n}') - G_\ell(\hat{n}, \hat{n}')) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sum_\ell C_{BB,\ell} (F_\ell(\hat{n}, \hat{n}') + G_\ell(\hat{n}, \hat{n}')), \end{aligned} \quad (7.4.78)$$

$$\begin{aligned} \langle Q(\hat{n}) U(\hat{n}') \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \sum_\ell C_{EE,\ell} (-F_\ell(\hat{n}, \hat{n}') + G_\ell(\hat{n}, \hat{n}')) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \operatorname{Im} \sum_\ell C_{BB,\ell} (-F_\ell(\hat{n}, \hat{n}') - G_\ell(\hat{n}, \hat{n}')), \end{aligned} \quad (7.4.79)$$

где

$$F_\ell(\hat{n}, \hat{n}') \equiv \sum_m \mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n}) \mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n}')^*, \quad (7.4.80)$$

$$G_\ell(\hat{n}, \hat{n}') \equiv \sum_m \mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n}) \mathcal{Y}_\ell^{-m}(\hat{n}'). \quad (7.4.81)$$

Помимо этого, с помощью уравнения (2.6.2) ( $a_{\ell m}$  теперь записывается в виде  $a_{T,\ell m}$ ) и уравнений (7.4.27), (7.4.78) и (7.4.79), корреляционные функции

<sup>56)</sup> Общие формулы для корреляционных функций содержатся в работе M. Zaldarriaga, *Astrophys. J.* **503**, 1 (1998).

между температурными флуктуациями и параметрами Стокса равны

$$\langle \Delta T(\hat{n}) Q(\hat{n}') \rangle = - \sum_{\ell} C_{TE,\ell} \operatorname{Re} H_{\ell}(\hat{n}, \hat{n}'), \quad (7.4.82)$$

$$\langle \Delta T(\hat{n}) U(\hat{n}') \rangle = \sum_{\ell} C_{TE,\ell} \operatorname{Im} H_{\ell}(\hat{n}, \hat{n}'), \quad (7.4.83)$$

где

$$H_{\ell}(\hat{n}, \hat{n}') \equiv \sum_m Y_{\ell}^m(\hat{n}) \mathcal{Y}_{\ell}^m(\hat{n}')^*, \quad (7.4.84)$$

здесь  $Y_{\ell}^m$  — обычные сферические гармоники. Для вычисления функций  $F_{\ell}(\hat{n}, \hat{n}')$  и  $G_{\ell}(\hat{n}, \hat{n}')$  в первую очередь отметим (например, рассматривая последнюю строчку в (7.4.22)), что для  $\hat{n}$  в направлении оси  $\hat{z}$  с  $\theta = \phi = 0$

$$\mathcal{Y}_{\ell}^m(\hat{z}) = \delta_{m,-2} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}}. \quad (7.4.85)$$

Затем, воспользовавшись определениями (7.4.16) и (7.4.11) и законом преобразования (7.4.18),  $\mathcal{Y}_{\ell}^m$  можно представить в виде элемента унитарной матрицы вращения<sup>57)</sup>:

$$Y_{\ell}^m(\hat{n}) = \sum_{m'} D_{m'm}^{(\ell)}(S^{-1}(\hat{n})) \mathcal{Y}_{\ell}^{m'}(\hat{z}) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} D_{-2,m}^{(\ell)}(S^{-1}(\hat{n})), \quad (7.4.86)$$

где  $S(\hat{n})$  — вращение (7.4.12), переводящее  $\hat{z}$  в  $\hat{n}$ . Тогда с помощью (7.4.58) также получаем, что

$$\mathcal{Y}^{-m}(\hat{n}) = (-1)^{\ell} \mathcal{Y}^m(-\hat{n})^*. \quad (7.4.87)$$

Следовательно, воспользовавшись свойством группового умножения

$$D^{(\ell)}(S) D^{(\ell)}(S') = D^{(\ell)}(SS')$$

и унитарностью  $D^{(\ell)}(S)$ , получаем *теоремы сложения*<sup>58)</sup>, из которых следуют функции, необходимые в наших формулах (7.4.77)–(7.4.79) для корреляционных функций

$$F_{\ell}(\hat{n}, \hat{n}') = \frac{2\ell+1}{4\pi} D_{-2,-2}^{(\ell)}(S^{-1}(\hat{n})S(\hat{n}')), \quad (7.4.88)$$

$$G_{\ell}(\hat{n}, \hat{n}') = (-1)^{\ell} \frac{2\ell+1}{4\pi} D_{-2,-2}^{(\ell)}(S^{-1}(\hat{n})S(-\hat{n}')). \quad (7.4.89)$$

Чтобы вычислить функцию  $H_{\ell}(\hat{n}, \hat{n}')$ , вспомним, что обычные сферические гармоники также могут быть представлены в виде элементов матрицы

<sup>57)</sup> E. Newman and J. Penrose, сноска 36; J. N. Goldberg, A. J. MacFarlane, E. T. Newman, F. Rorlich, and E. C. G. Sudarshan, *J. Math. Phys.* **8**, 2155 (1967); K. S. Thorne, *Rev. Mod. Phys.* **52**, 299 (1980).

<sup>58)</sup> Общие теоремы сложения для сферических гармоник со спиновыми весами содержатся в работе W. Hu and M. White, *Phys. Rev. D* **56**, 596 (1997) [astro-ph/9702170].

вращения. Из формулы  $Y_\ell^m(\hat{z}) = \sqrt{(2\ell+1)/(4\pi)} \delta_{m0}$  в случае  $\theta = \phi = 0$  и закона преобразования (7.4.18) получаем, что

$$Y_\ell^m(\hat{n}) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} D_{0,m}^{(\ell)}(S^{-1}(\hat{n})).$$

Следовательно, заново воспользовавшись свойством группового умножения матриц  $D^{(\ell)}$ , находим

$$H_\ell(\hat{n}, \hat{n}') = \frac{2\ell+1}{4\pi} D_{0,-2}^{(\ell)}(S^{-1}(\hat{n})S(\hat{n}')). \quad (7.4.90)$$

В связи с этим заметим, что

$$F_\ell(-\hat{n}, -\hat{n}') = \sum_m Y_\ell^{-m}(\hat{n})^* Y_\ell^{-m}(\hat{n}') = F_\ell^*(\hat{n}, \hat{n}') \quad (7.4.91)$$

и

$$G_\ell(-\hat{n}, -\hat{n}') = \sum_m Y_\ell^{-m}(\hat{n})^* Y_\ell^m(\hat{n}')^* = G_\ell^*(\hat{n}, \hat{n}'). \quad (7.4.92)$$

Помимо этого, с помощью свойства  $Y_\ell^m(-\hat{n}) = (-1)^\ell Y_\ell^{-m}(\hat{n})^*$  находим

$$H_\ell(-\hat{n}, -\hat{n}') = \sum_m Y_\ell^{-m}(\hat{n})^* Y_\ell^{-m}(\hat{n}') = H_\ell^*(\hat{n}, \hat{n}'). \quad (7.4.93)$$

Отсюда заключаем, что рассматриваемые корреляционные функции обладают следующими свойствами относительно отражений:

$$\langle Q(\hat{n}) Q(\hat{n}') \rangle = \langle Q(-\hat{n}) Q(-\hat{n}') \rangle, \quad (7.4.94)$$

$$\langle U(\hat{n}) U(\hat{n}') \rangle = \langle U(-\hat{n}) U(-\hat{n}') \rangle, \quad (7.4.95)$$

$$\langle Q(\hat{n}) U(\hat{n}') \rangle = -\langle Q(-\hat{n}) U(-\hat{n}') \rangle, \quad (7.4.96)$$

$$\langle \Delta T(\hat{n}) Q(\hat{n}') \rangle = \langle \Delta T(-\hat{n}) Q(-\hat{n}') \rangle, \quad (7.4.97)$$

$$\langle \Delta T(\hat{n}) U(\hat{n}') \rangle = -\langle \Delta T(-\hat{n}) U(-\hat{n}') \rangle, \quad (7.4.98)$$

как это и ожидалось, исходя из свойств пространственной инверсии параметров Стокса и температурной флуктуации, а также предполагаемой инвариантности относительно пространственной инверсии распределения вероятности по которому происходит усреднение.

Можно отметить, что при измерении корреляционных функций параметров Стокса, наблюдаемых в направлениях  $\hat{n}$  и  $\hat{n}'$ , наблюдатели, как правило, выбирают систему полярных координат так, чтобы  $\hat{n}$  и  $\hat{n}'$  находились на одинаковом меридиане; т. е. так, чтобы  $\phi = \phi'$ .

---

Обычно это выражается в виде условия, что первый из двух поляризационных векторов, используемых для определения параметров Стокса, должен быть направлен по дуге большого круга между  $\hat{n}$  и  $\hat{n}'$ <sup>59)</sup>, однако эти два вектора поляри-

<sup>59)</sup> M. Kamionkowski, A. Kosowsky и A. Stebbins, сноска 33.

зации были определены так, что они всегда лежат в направлениях возрастания  $\theta$  и  $\phi$ , поэтому одно сводится к другому.

Данное условие имеет то преимущество, что тогда все функции  $F_\ell(\hat{n}, \hat{n}')$ ,  $G_\ell(\hat{n}, \hat{n}')$  и  $H_\ell(\hat{n}, \hat{n}')$  вещественны и зависят только от  $\theta - \theta'$ . Чтобы убедиться в этом, отметим, что с помощью представления

$$D^{(\ell)}(S(\hat{n})) = \exp(-i\phi J_3^{(\ell)}) \exp(-i\theta J_2^{(\ell)})$$

стандартного вращения от  $\hat{z}$  до  $\hat{n}$  в терминах матриц углового момента  $J_i^{(\ell)}$  уравнения (7.4.88)–(7.4.90) можно переписать в виде

$$F_\ell(\hat{n}, \hat{n}') = \frac{2\ell+1}{4\pi} \left[ \exp(i\theta J_2^{(\ell)}) \exp(i\phi J_3^{(\ell)}) \exp(-i\phi' J_3^{(\ell)}) \exp(-i\theta' J_2^{(\ell)}) \right]_{-2,-2},$$

$$G_\ell(\hat{n}, \hat{n}') = (-1)^\ell \frac{2\ell+1}{4\pi} \left[ \exp(i\theta J_2^{(\ell)}) \exp(i\phi J_3^{(\ell)}) \times \right. \\ \left. \times \exp(-i[\phi' + \pi] J_3^{(\ell)}) \exp(-i[\pi - \theta'] J_2^{(\ell)}) \right]_{-2,-2},$$

$$H_\ell(\hat{n}, \hat{n}') = \frac{2\ell+1}{4\pi} \left[ \exp(i\theta J_2^{(\ell)}) \exp(i\phi J_3^{(\ell)}) \exp(-i\phi' J_3^{(\ell)}) \exp(-i\theta' J_2^{(\ell)}) \right]_{0,-2}.$$

Если  $\phi = \phi'$ , то

$$F_\ell(\hat{n}, \hat{n}') = \frac{2\ell+1}{4\pi} \left[ \exp(i(\theta - \theta') J_2^{(\ell)}) \right]_{-2,-2},$$

поэтому  $F_\ell(\hat{n}, \hat{n}')$  при  $\phi = \phi'$  зависит только от  $\theta - \theta'$ . Помимо этого,  $iJ_2^{(\ell)}$  — вещественная матрица, поэтому  $F_\ell(\hat{n}, \hat{n}')$  при  $\phi = \phi'$  также вещественна. Что касается  $G_\ell$ , при  $\phi = \phi'$  имеем

$$G_\ell(\hat{n}, \hat{n}') = (-1)^\ell \frac{2\ell+1}{4\pi} \left[ \exp(i\theta J_2^{(\ell)}) \exp(-i\pi J_3^{(\ell)}) \exp(-i[\pi - \theta'] J_2^{(\ell)}) \right]_{-2,-2} = \\ = (-1)^\ell \frac{2\ell+1}{4\pi} \left[ \exp(i\theta J_2^{(\ell)}) \exp(+i[\pi - \theta'] J_2^{(\ell)}) \exp(-i\pi J_3^{(\ell)}) \right]_{-2,-2} = \\ = (-1)^\ell \frac{2\ell+1}{4\pi} \left[ \exp(i(\theta - \theta' + \pi) J_2^{(\ell)}) \right]_{-2,-2},$$

поэтому  $G_\ell(\hat{n}, \hat{n}')$  при  $\phi = \phi'$  вещественна, потому что  $iJ_2^{(\ell)}$  — вещественная матрица и зависит только от  $\theta - \theta'$ . Наконец,  $H_\ell(\hat{n}, \hat{n}')$  вещественна и зависит только от  $\theta - \theta'$ , по тем же самыми причинами, что и  $F_\ell(\hat{n}, \hat{n}')$ . Тогда мы приходим к выводу, что если система координат выбрана таким образом, что  $\phi = \phi'$ , корреляционные функции  $\langle Q(\hat{n})Q(\hat{n}') \rangle$ ,  $\langle U(\hat{n})U(\hat{n}') \rangle$  и  $\langle \Delta T(\hat{n})Q(\hat{n}') \rangle$  зависят только от угла  $\theta - \theta'$  между  $\hat{n}$  и  $\hat{n}'$ , а  $\langle Q(\hat{n})U(\hat{n}') \rangle$  и  $\langle \Delta T(\hat{n})U(\hat{n}') \rangle$  обращаются в ноль. Кроме того,  $\langle Q(\hat{n})Q(\hat{n}') \rangle$  и  $\langle U(\hat{n})U(\hat{n}') \rangle$  очевидным образом симметричны относительно перестановки  $\hat{n}$  и  $\hat{n}'$ , поэтому при  $\phi = \phi'$  они фактически зависят только от  $|\theta - \theta'|$ ; т. е. от угла между  $\hat{n}$  и  $\hat{n}'$ .

## Глава 8

# РОСТ СТРУКТУРЫ

В главе 6 мы проследили эволюцию малых возмущений на протяжении эры доминирования излучения и эры доминирования вещества, вплоть до момента отделения, когда излучение перестало эффективно взаимодействовать с веществом. Теперь мы продолжим изучение эволюции Вселенной, последовавшей после момента отделения. В разд. 8.1 мы проследим возмущения в период их малости, продолжая проводить линейный анализ. Эта эпоха становится все более доступна наблюдениям по мере того, как изучение распределения вещества во Вселенной затрагивает все большие значения красного смещения. Как будет видно, данные по распределению флуктуаций вещества уже привели к важному обобщению результатов по анизотропиям реликтового излучения в область уменьшающихся длин волн, и есть надежда, что в конце концов они смогут дать информацию насчет влияния темной энергии на процесс расширения Вселенной.

Разумеется, в конце концов возмущения плотности вещества становятся достаточно велики, и линейное приближение перестает работать, как со всей очевидностью следует из существования звезд, галактик и галактических скоплений. Считается, что эти структуры образовались в два этапа<sup>1)</sup>. Во-первых, в областях, где плотность вещества несколько превышала среднее значение, холодная темная материя и барионное вещество расширялись более медленно чем Вселенная в целом, что в конце концов привело к минимальной плотности и последующему процессу повторного сжатия. Этот сценарий обсуждается в разд. 8.2. Если сверхплотная область была достаточно большая, то как показывается в разд. 8.3, находящееся в ней барионное вещество вместе с холодной темной материей сжимаются. Затем, на втором этапе, после произошедшего сжатия, барионное вещество начинает терять энергию, излучая и охлаждаясь, после чего оно начинает конденсироваться в протогалактики, состоящие из газовых облаков, из которых в итоге образуются звезды. Частицы холодной темной материи не могут терять энергию посредством охлаждения при излучении, поэтому они остаются в больших, более-менее сферических, гало вокруг образовавшихся галактик. Мы не будем пытаться обсуждать этот второй этап более детально, потому что его подробное рассмотрение требует обширных знаний астрофизики и математики и заслуживает написания отдельной книги.

---

<sup>1)</sup> S. D. M. White and M. J. Rees, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **183**, 341 (1978).

## 8.1

## Линейные возмущения после рекомбинации

**Гидродинамика и уравнения поля • Факторизация возмущений • Эффект вакуумной энергии • Степенная спектральная функция  $P(k)$  • Корреляционная функция • Прямое измерение  $P(k)$  • Среднеквадратичная флуктуация  $\sigma_R$  • Измерение  $P(k)$  • Барионные акустические осцилляции • Космическая дисперсия при измерении  $P(k)$**

После исчезновения почти всех свободных электронов, барионная плазма отделилась от фотонов и стала вести себя подобно еще одной форме холодной темной материи. (Влияние давления при коротких длинах волн обсуждается в разд. 8.3.) При подавлении возмущений гравитационного поля флуктуациями полной плотности холодной материи применимо ньютоновское рассмотрение из приложения F, откуда следует, что относительная плотность возмущений растет в итоге по закону  $a \propto t^{2/3}$ . Однако для связи множителя, зависящего от постоянного волнового числа в этом законе, с величиной первичных флуктуаций, которые характеризуются величиной  $\mathcal{R}_q^r$ , нам потребуется проводить релятивистский анализ, в том числе для описания некоторых малых, но интересных осцилляций плотности флуктуаций, обусловленных взаимодействием барионов и излучения до момента отделения, и для распространения этого анализа вплоть до современной эпохи, когда вакуумная энергия стала играть важную роль.

При релятивистском анализе барионы и холодная темная материя рассматриваются несколько по-разному, потому что мы по-прежнему продолжаем пользоваться синхронной калибровкой, в которой в ноль обращается потенциал поля скоростей не барионной плазмы, а холодной темной материи. После отделения барионный потенциал поля скоростей больше не привязан к фотонному потенциальному полю скоростей посредством томсоновского рассеяния, поэтому для получения закона сохранения барионов можно воспользоваться уравнением (5.3.34) с равными нулю  $\bar{\rho}_b$ ,  $\delta\rho_{bq}$  и  $\pi_{bq}^S$  (за счет медленного движения барионов) и получить

$$\dot{\delta}\rho_{bq} + 3H\delta\rho_{bq} - \frac{q^2}{a^2}\bar{\rho}_b\delta u_{bq} = -\bar{\rho}_b\psi_q,$$

или, поделив на  $\bar{\rho}_b \propto a^{-3}$ ,

$$\dot{\delta}_{bq} - \left(\frac{q^2}{a^2}\right)\delta u_{bq} = -\psi_q, \quad (8.1.1)$$

где, как и прежде,  $\delta_{bq} \equiv \delta\rho_{bq}/\bar{\rho}_b$ . Для холодной темной материи потенциал поля скоростей отсутствует, поэтому опять получаем уравнение (6.2.11), выражающее закон сохранения холодной темной материи:

$$\dot{\delta}_{Dq} = -\psi_q. \quad (8.1.2)$$

Только наш выбор калибровки заставляет потенциал поля скоростей темной материи, а не барионов, обращаться в ноль, поэтому лучше всего думать о  $\delta u_{6q}$  как об *относительном* потенциале поля скоростей барионов и темной материи.

Закон сохранения импульса для барионов задается уравнением (5.3.32) с нулевыми давлением и анизотропной инерцией,

$$\partial_0(\bar{\rho}_6 \delta u_{6q}) + 3H\bar{\rho}_6 \delta u_{6q} = 0,$$

поэтому, поделив на  $\bar{\rho}_6 \propto a^{-3}$ , получаем простое выражение:

$$\delta \dot{u}_{6q} = 0. \quad (8.1.3)$$

---

Как будет видно в разд. 8.3, то, что мы пренебрегли давлением барионов после рекомбинации, оказывается верным, за исключением самых коротких длин волн.

---

Наконец, если в гравитационном возмущении пренебречь вкладом от флуктуаций плотности фотонов и нейтрино, то гравитационное полевое уравнение (5.3.36) принимает вид

$$\frac{d}{dt}(a^2 \psi_q) = -4\pi G a^2 \bar{\rho}_M ((1-\beta)\delta_{Dq} + \beta \delta_{6q}), \quad (8.1.4)$$

где  $\beta$  опять является константой,

$$\beta \equiv \frac{\bar{\rho}_6}{\bar{\rho}_M} = \frac{\Omega_6}{\Omega_M} \approx \frac{1}{6}. \quad (8.1.5)$$

Вклады порядка  $\beta$  пока сохраняются, потому что, как мы увидим в дальнейшем, они приводят к эффектам, пусть малым, но весьма особенным.

Чтобы получить начальные условия для этих уравнений, отметим, что для достаточно ранних времен (скажем,  $z > 1$ ), в течение которых вакуумная энергия и кривизна дают пренебрежимо малый вклад в скорость расширения, имеем  $a \propto t^{2/3}$  и  $4\pi G \bar{\rho}_M = \frac{2}{3}t^2$ , поэтому из уравнения (8.1.4) следует, что

$$\frac{d}{dt}(t^{4/3} \psi_q) = -\frac{2}{3}t^{-2/3}((1-\beta)\delta_{Dq} + \beta \delta_{6q}). \quad (8.1.6)$$

Читатель может легко проверить, что общее решение уравнений (8.1.1)–(8.1.3) и (8.1.6) равно

$$\psi_q = a_q t^{-1/3} + b_q t^{-2} + \beta \delta u_{6q} \frac{q^2}{a^2}, \quad (8.1.7)$$

$$\delta u_{6q} = -\frac{3}{2}a_q t^{2/3} + b_q t^{-1} + (1-\beta)c_q - 3(1-\beta)t\left(\frac{q^2}{a^2}\right)\delta u_{6q}, \quad (8.1.8)$$

$$\delta u_{Dq} = -\frac{3}{2}a_q t^{2/3} + b_q t^{-1} - \beta c_q + 3\beta t\left(\frac{q^2}{a^2}\right)\delta u_{6q}, \quad (8.1.9)$$

где  $a_q$ ,  $b_q$ ,  $c_q$  и  $\delta u_{6q}$  являются постоянными, которые следует найти сопоставлением данных решений со значениями  $\psi_q$ ,  $\delta_{6q}$ ,  $\delta_{Dq}$  и  $\delta u_{6q}$  в момент отделения вещества от излучения. В более поздние времена в этом решении следует удерживать только ведущие вклады, с коэффициентом  $a_q$ ; другие вклады подавляются по отношению к ним факторами  $t^{-5/3}$ ,  $t^{-2/3}$  и  $t^{-1}$ . Для вычисления коэффициента  $a_q$  заметим, что

$$\beta\delta_{6q} + (1 - \beta)\delta_{Dq} - t\psi_q + \beta t \left( \frac{q^2}{a^2} \right) \delta u_{6q} = -\frac{5a_q t^{2/3}}{2}.$$

Тогда, выбирая здесь  $t$  равным моменту времени отделения<sup>2)</sup>  $t_{\text{п. р.}}$  (когда с хорошей точностью  $\delta_{6q} = \delta_{\gamma q}$  и  $\delta u_{6q} = \delta u_{\gamma q}$ ), получаем при  $t \gg t_{\text{п. р.}}$

$$\begin{aligned} \delta u_{Dq}(t) &\rightarrow \delta u_{6q}(t) \rightarrow -\frac{3}{2}a_q t^{2/3} \rightarrow \frac{3}{5} \left( \frac{t}{t_{\text{п. р.}}} \right)^{2/3} \times \\ &\times \left[ \beta\delta_{\gamma q}(t_{\text{п. р.}}) + (1 - \beta)\delta_{Dq}(t_{\text{п. р.}}) - t_{\text{п. р.}}\psi_q(t_{\text{п. р.}}) + \beta t_{\text{п. р.}} \left( \frac{q^2}{a_{\text{п. р.}}^2} \right) \delta u_{\gamma q}(t_{\text{п. р.}}) \right]. \end{aligned} \quad (8.1.10)$$

Отметим, что даже если возмущения относительных плотностей барионов и темной материи были совершенно различны в момент отделения, в дальнейшем, в более поздние времена, они стремятся друг к другу, как предполагалось при анализе наблюдений рентгеновского излучения из галактических скоплений в разд. 1.9. Отсюда следует, что относительная флуктуация  $\delta_{Mq}$  плотности полной массы стремится к величине

$$\delta_{Mq} \equiv \frac{\bar{\rho}_D \delta_{Dq} + \bar{\rho}_6 \delta_{6q}}{\bar{\rho}_D + \bar{\rho}_6} \rightarrow \delta_{Dq} \rightarrow \delta_{6q}. \quad (8.1.11)$$

Поскольку все данные возмущения относительной плотности в итоге сравняются, с этого момента мы сосредоточимся на рассмотрении только  $\delta_{Mq}(t)$ . Теперь мы собираемся распространить наши вычисления вплоть до настоящей эпохи, когда темной энергией больше нельзя пренебрегать. Согласно уравнениям (8.1.1)–(8.1.4), с учетом допущения, что флуктуации плотностей энергии фотонов и нейтрино пренебрежимо малы, величина  $\delta_{Mq}(t)$  подчиняется дифференциальному уравнению второго порядка

<sup>2)</sup> Нижний индекс «*n. p.*» обозначает «последнее рассеяние» и указывает на время отделения вещества от излучения, соответствующее рекомбинации водорода. Разумеется, данный момент не является моментом последнего рассеяния; некоторые фотоны реликтового фона снова рассеялись, когда водород стал рекомбинированным в более поздние времена. Строго говоря, момент  $t_{\text{п. р.}}$  здесь следует выбрать во время рекомбинации, когда типичный электрон перестает обмениваться ощутимыми импульсом с фотонами, вместо нескольких более раннего момента времени, когда типичный фотон перестает обмениваться импульсом с электронами. Так как  $R_{\text{п. р.}}$  не сильно отличается от единицы, между этими временами есть небольшая разница.

$$\frac{d}{dt} \left[ a^2 \frac{d}{dt} \delta_{Mq} \right] = 4\pi G a^2 \bar{\rho}_m \delta_{Mq}. \quad (8.1.12)$$

Наиболее важное следствие этого уравнения вместе с формулой (8.1.10) состоит в том, что независимо от наших предположений насчет темной энергии, сразу после рекомбинации, когда вклады в  $\delta_{Mq}(t)$ , убывающие по закону  $1/t$ , окончательно затухают, зависимость  $\delta_{Mq}(t)$  от  $q$  и  $t$  факторизуется:

$$\delta_{Mq}(t) = \Delta(q) F(t), \quad (8.1.13)$$

где

$$\Delta(q) = \beta \delta_{\gamma q}(t_{\text{п. п.}}) + (1 - \beta) \delta_{Dq}(t_{\text{п. п.}}) - t_{\text{п. п.}} \psi_q(t_{\text{п. п.}}) + \beta t_{\text{п. п.}} \left( \frac{q^2}{a_{\text{п. п.}}^2} \right) \delta u_{\gamma q}(t_{\text{п. п.}}), \quad (8.1.14)$$

и  $F(t)$  подчиняется следующему дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} \left[ a^2 \frac{d}{dt} F \right] = 4\pi G a^2 \bar{\rho}_m F \quad (8.1.15)$$

с начальным условием, что сразу после рекомбинации, пока темная энергия не начинает играть важную роль,

$$F(t) \rightarrow \frac{3}{5} \left( \frac{t}{t_{\text{п. п.}}} \right)^{2/3} \quad (8.1.16)$$

Например, если предположить, что вакуумная энергия постоянна, то уравнение Фридмана для  $a(t)$  принимает вид

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3} (\rho_\Lambda + \bar{\rho}_m)} = H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda} \sqrt{1 + \frac{1}{x}}, \quad (8.1.17)$$

где

$$x \equiv \frac{\rho_\Lambda}{\bar{\rho}_m} = \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} \left( \frac{a}{a_0} \right)^3 \quad (8.1.18)$$

Использование в качестве независимой переменной  $x$  вместо  $t$  позволяет привести уравнение (8.1.15) к параметрически независимому виду:

$$\sqrt{x(1+x)} \frac{d}{dx} \left( x^{7/6} \sqrt{1+x} \frac{dF}{dx} \right) = \frac{1}{6x^{1/3}} F. \quad (8.1.19)$$

Растущее решение<sup>3)</sup>, которое становится пропорциональным  $t^{2/3}$  при  $x \ll 1$ , равно

$$F \propto \sqrt{\frac{1+x}{x}} \int_0^x \frac{du}{u^{1/6} (1+u)^{3/2}}.$$

<sup>3)</sup> H. Martel, *Astrophys. J.* **377**, 7 (1991).

Из соотношения (8.1.16) следует, что при  $x \ll 1$

$$F \rightarrow \frac{3}{5} \left( \frac{a}{a_{\text{п. п.}}} \right) = \frac{3}{5} (1 + z_{\text{п. п.}}) \left( \frac{x \Omega_m}{\Omega_\Lambda} \right)^{1/3},$$

поэтому можно записать

$$F(t) = \frac{3}{5} \left( \frac{a(t)}{a_{\text{п. п.}}} \right) C \left( \frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_m} \left( \frac{a(t)}{a_0} \right)^3 \right), \quad (8.1.20)$$

где  $C(x)$  — корректирующий множитель, нормированный так, чтобы  $C(0) = 0$ :

$$C(x) \equiv \frac{5}{6} x^{-5/6} \sqrt{1+x} \int_0^x \frac{du}{u^{1/6}(1+u)^{3/2}}. \quad (8.1.21)$$

В табл. 8.1 представлены численные значения функции  $C(x)$ .

**Таблица 8.1**

Значения функции  $C(x)$ , задающей подавление роста флуктуаций вещества темной энергией в виде функции от  $x \equiv (\Omega_\Lambda/\Omega_m)(a/a_0)^3$

$x$	$C(x)$	$x$	$C(x)$
0	1	1,0	0,8725
0,1	0,9826	1,5	0,8314
0,2	0,9667	2,0	0,7981
0,3	0,9520	2,5	0,7702
0,5	0,9256	3,0	0,7462
0,7	0,9025	3,5	0,7254

Мы видим, что на всех масштабах и временах темная энергия подавляет рост флуктуаций плотности.

Именно  $\Delta(q)$  (см. (8.1.14)) содержит информацию об условиях в момент отделения. Вместо  $\Delta(q)$  удобно ввести *степенную спектральную функцию*  $P(k)$ , определенную как функцию от современного значения  $k \equiv q/a_0$  физического волнового числа соотношением<sup>4)</sup>

$$P(k) \equiv (2\pi)^3 a_0^3 F^2(t_0) |\Delta(a_0 k)|^2. \quad (8.1.22)$$

<sup>4)</sup> Множитель  $(2\pi)^3$  введен здесь потому, что возмущения в координатном представлении обычно записываются как фурье-образы с дополнительным множителем  $(2\pi)^{-3/2}$ , а множитель  $a_0^3$  включен потому, что эти трехмерные фурье-образы обычно записываются в виде интегралов по современному значению физического волнового числа,  $k \equiv q/a_0$ , вместо сопутствующего волнового числа  $q$ . При желании, сопутствующие координаты можно нормировать как  $a_0 = 1$ , в случае чего в текущем разделе все  $q$  можно заменить на  $k$ .

В большинстве исследований по теме крупномасштабной структуры полученные результаты выражаются в терминах  $P(k)$ .

Теперь следует рассмотреть, каким образом в этих исследованиях обычно измеряются  $\Delta(q)$  или  $P(k)$ . Напомним, что для единственной доминирующей скалярной моды (в предположении пространственной плоскости), возмущение относительной плотности в координатном представлении записывается в виде преобразования Фурье, подобно выражению (5.2.1):

$$\delta_M(\mathbf{x}, t) = \int d^3 q \alpha(\mathbf{q}) \delta_{Mq}(t) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} = F(t) \int d^3 q \alpha(\mathbf{q}) \Delta(q) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}, \quad (8.1.23)$$

где  $\alpha(\mathbf{q})$  — стохастический параметр, нормированный как

$$\langle \alpha(\mathbf{q}) \alpha^*(\mathbf{q}') \rangle = \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}'). \quad (8.1.24)$$

Величина  $\Delta(q)$  может быть найдена либо из измерений корреляций возмущений плотности вещества в разных точках, либо более прямо, из углового усреднения квадрата интеграла Фурье для возмущения плотности вещества по объему обследования.

Согласно обсуждающейся в приложении D эргодической теореме, пока объем обследования  $V$  велик по сравнению с объемом, в котором скоррелированы флуктуации плотности, средние по ансамблю произведений флуктуаций плотности могут быть найдены из усреднения этих произведений по объему обследования. В частности, двухточечную корреляционную функцию можно найти из

$$\langle \delta_M(\mathbf{x}, t) \delta_M(\mathbf{y}, t) \rangle = \frac{1}{V} \int_V d^3 z \delta_M(\mathbf{x} + \mathbf{z}, t) \delta_M(\mathbf{y} + \mathbf{z}, t). \quad (8.1.25)$$

Разумеется, флуктуации плотности измеряются как функции красного смещения и углового положения, а не как функции положения в пространстве и времени, поэтому на самом деле измеряемая корреляционная функция является корреляцией относительных возмущений плотности вещества, наблюдаемых при красном смещении  $z$  и направлении  $\hat{n}$  к возмущениям, наблюдаемым при красном смещении  $z'$  и направлении  $\hat{n}'$ :

$$\xi(z, \hat{n}; z', \hat{n}') \equiv \left\langle \delta_M(r(z)\hat{n}, t(z)) \delta_M(r(z')\hat{n}', t(z')) \right\rangle, \quad (8.1.26)$$

где  $r(z)$  и  $t(z)$  — сопутствующие радиальные координаты Робертсона—Уокера и время излучения, соответствующие красному смещению  $z$ . С помощью (8.1.23), (8.1.24) и (8.1.13) получаем

$$\begin{aligned} \xi(z, \hat{n}; z', \hat{n}') &= \int d^3 q \delta_{Mq}(t(z)) \delta_{Mq}^*(t(z')) \exp \left[ i\mathbf{q} \cdot (r(z)\hat{n} - r(z')\hat{n}') \right] = \\ &= F(t(z)) F(t(z')) \int d^3 q |\Delta(q)|^2 \exp \left[ i\mathbf{q} \cdot (r(z)\hat{n} - r(z')\hat{n}') \right]. \end{aligned} \quad (8.1.27)$$

В терминах функции  $P(k)$  это выражение принимает вид

$$\xi(z, \hat{n}; z', \hat{n}') = \frac{1}{2\pi^2} \frac{F(t(z))F(t(z'))}{F^2(t_0)} \int_0^\infty k P(k) dk \frac{\sin(k|d_S(z)\hat{n} - d_S(z')\hat{n}'|)}{|d_S(z)\hat{n} - d_S(z')\hat{n}'|}, \quad (8.1.28)$$

где  $d_S(z)$  — это удобное *расстояние структуры*, связанное с  $r(z)$ , с расстоянием по угловому диаметру и фотометрическим расстоянием при красном смещении  $z$  соотношением:

$$d_S(z) \equiv a_0 r(z) = (1+z)d_y(z) = (1+z)^{-1}d_\Phi(z).$$

Уравнение (8.1.28) можно использовать для измерения степенной спектральной функции, в том случае если нам известно  $d_S(z)$ , или для измерения  $d_S(z)$ , если известны какие-нибудь свойства степенной спектральной функции. В частности, для наблюдения при относительно малом красном смещении можно использовать  $d_S(z) \simeq z/H_0$  и  $t(z) \simeq t_0$ , и тогда уравнение (8.1.28) задает корреляционную функцию в виде

$$\xi(z, \hat{n}; z', \hat{n}') = \frac{H_0}{2\pi^2} \int_0^\infty k P(k) dk \frac{\sin((k/H_0)|z\hat{n} - z'\hat{n}'|)}{|z\hat{n} - z'\hat{n}'|}. \quad (8.1.29)$$

Измерения формы корреляционной функции может очевидным образом прояснить зависимость степенной спектральной функции от  $k/H_0$ , а не просто от  $k$ .

Как правило, в обзорах больших объемов функцию  $P(k)$  измеряют на основе углового среднего квадрата интеграла Фурье от возмущения плотности вещества по объему обзора. Определим фурье-образ как интеграл по сопутствующему объему обзора  $V$ :

$$\delta_{MQ}^V(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{V}(2\pi)^{3/2}} \int_V d^3x e^{-i\mathbf{Q}\cdot\mathbf{x}} \delta_M(\mathbf{x}, t). \quad (8.1.30)$$

(Причина выбора такой нормировки скоро прояснится.) С помощью уравнения (8.1.23) это выражение приобретает вид

$$\delta_{MQ}^V(t) = \int d^3q \alpha(\mathbf{q}) F_V(\mathbf{q} - \mathbf{Q}) \delta_{Mq}(t), \quad (8.1.31)$$

где

$$F_V(\mathbf{q}) \equiv \frac{1}{\sqrt{V}(2\pi)^{3/2}} \int_V d^3x e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}. \quad (8.1.32)$$

Вполне правдоподобно, а в конце данного раздела этому предположению будет дано формальное доказательство, что поскольку сопутствующий объем

обзора  $V$  содержит множество сопутствующих длин волн  $2\pi/q$ , то угловое среднее от  $|\delta_{MQ}^V|^2$  совпадает со средним по ансамблю,

$$\frac{1}{4\pi} \int d^2 \hat{Q} |\delta_{MQ}^V(t)|^2 = \left\langle \frac{1}{4\pi} \int d^2 \hat{Q} |\delta_{MQ}^V(t)|^2 \right\rangle. \quad (8.1.33)$$

С помощью уравнений (8.1.31) и (8.1.24) получаем

$$\frac{1}{4\pi} \int d^2 \hat{Q} |\delta_{MQ}^V(t)|^2 = \frac{1}{4\pi} \int d^2 \hat{Q} \int d^3 q |F_V(\mathbf{q} - \mathbf{Q})|^2 |\delta_{Mq}(t)|^2. \quad (8.1.34)$$

Теперь, для больших  $V$ ,  $F_V(\mathbf{q} - \mathbf{Q})$  стремится к  $((2\pi)^{3/2}/\sqrt{V})\delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{Q})$ , поэтому

$$|F_V(\mathbf{q} - \mathbf{Q})|^2 \rightarrow \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{V}} \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{Q}) F_V(0) = \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{Q}), \quad (8.1.35)$$

и тем самым

$$\frac{1}{4\pi} \int d^2 \hat{Q} |\delta_{MQ}^V(t)|^2 = |\delta_{MQ}(t)|^2, \quad (8.1.36)$$

где  $Q \equiv |\mathbf{Q}|$ . Подчеркнем еще раз, что флюктуации плотности измеряются в виде функций направления и красного смещения, а не положения и времени. Используя уравнения (8.1.30) и (8.1.36) и выражая полученный результат в терминах степенной спектральной функции (8.1.22), получим

$$P(k) = \frac{1}{4\pi V} \int d^2 \hat{Q} \left| \int_V d^2 \hat{n} dz d_S^2(z) d'_S(z) \frac{F(t_0)}{F(t(z))} \delta_M(r(z)\hat{n}, t(z)) e^{-i\hat{n}\cdot\hat{Q}kd_S(z)} \right|^2, \quad (8.1.37)$$

где  $V \equiv a_0^3 V$  — это физический объем обзора. Так же как в случае выражения для корреляционной функции (8.1.28), этой формулой можно воспользоваться либо для вычисления  $P(k)$  на основе данных по обзору с относительно малыми красными смещениями, либо для нахождения  $d_S(z)$  на основе данных по обзорам с большими красными смещениями вместе с информацией о  $P(k)$ , полученной из других источников.

Теперь давайте рассмотрим вычисление  $\Delta(q)$  и степенной спектральной функции. Начнем с того, что отбросим в (8.1.14) все вклады порядка  $\beta$ , так что

$$\Delta(q) = \delta_{Dq}(t_{\text{п. п.}}) - t_{\text{п. п.}} \psi_q(t_{\text{п. п.}}). \quad (8.1.38)$$

В конце этого раздела мы вернемся к рассмотрению очень интересных эффектов, связанных с малой плотностью барионов. С помощью уравнений (6.5.5) и (6.5.6) эта величина принимает вид

$$\Delta(q) = \frac{3q^2 t_{\text{п. п.}}^2 \mathcal{R}_q^r \mathcal{T}(\kappa)}{2a_{\text{п. п.}}^2} = \frac{2q^2 \mathcal{R}_q^r \mathcal{T}(\kappa)}{3H_{\text{п. п.}}^2 a_{\text{п. п.}}^2}, \quad (8.1.39)$$

где  $\mathcal{T}$  — это безразмерная передаточная функция, приведенная в табл. 6.1, а  $\kappa/\sqrt{2}$  — это отношение волнового числа  $q$  к волновому числу  $q_{\text{EQ}}$ , возникающему под горизонтом в точности при балансе вещества и излучения.

---

Второе выражение выводится с помощью  $t_{\text{n.p.}} = 2/(3H_{\text{n.p.}})$ , где

$$H_{\text{n.p.}} = \sqrt{\Omega_m} H_0 (1 + z_{\text{n.p.}})^{2/3}$$

— это хаббловская скорость в момент отделения, если пренебречь излучением. Данная подстановка более точна, нежели использование настоящего возраста Вселенной в момент отделения, потому что уравнения (8.1.38) и (8.1.39) были получены из определения нулевого времени, для которого  $a \propto t^{2/3}$  на протяжении эры доминирования вещества.

---

Тогда с помощью выражения (8.1.20) получаем, что степенная спектральная функция (8.1.22) равна

$$P(k) = \frac{4(2\pi)^3 a_0^3 C^2(\Omega_\Lambda/\Omega_m)}{25\Omega_m^2 H_0^4} \mathcal{R}_{ka_0}^r k^4 \mathcal{T}^2 \left( \frac{\sqrt{2}k}{k_{\text{EQ}}} \right), \quad (8.1.40)$$

где, согласно уравнению (6.4.58),

$$k_{\text{EQ}} \equiv \frac{q_{\text{EQ}}}{a_0} = \frac{\sqrt{2}H_0\Omega_m}{\sqrt{\Omega_m}} = [13,6 \text{ Мпк}]^{-1} \Omega_m h^2. \quad (8.1.41)$$

В частности, если предположить, что  $\mathcal{R}_q \simeq N q^{-3/2} (q/q_*)^{(n_s-1)/2}$  с некоторым спектральным индексом  $n_s$  и постоянной  $N$  (которая для  $n_s \neq 1$  зависит от произвольного выбора базисного волнового числа  $q_*$ ), то будем иметь

$$P(k) = \frac{4(2\pi)^3 N^2 C^2(\Omega_\Lambda/\Omega_m)}{25\Omega_m^2 H_0^4 k_*^{n_s-1}} k^{n_s} \mathcal{T}^2 \left( \frac{\sqrt{2}k}{k_{\text{EQ}}} \right), \quad (8.1.42)$$

где  $k_* \equiv q_*/a_0$ . На рис. 8.1 показан вид этой функции для  $n_s = 1$ .

Знание степенной спектральной функции позволяет вычислить среднее квадратичное значение  $\sigma^2$  флуктуации относительной плотности:

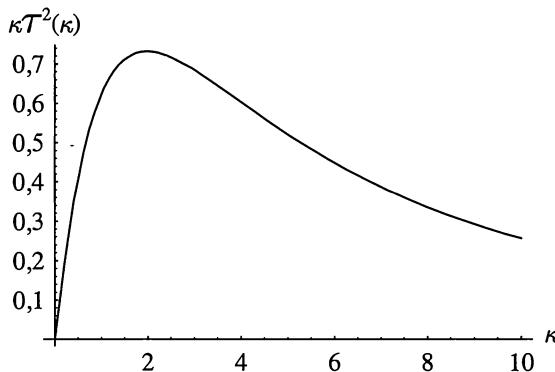
$$\sigma^2(z) = \xi(z, \hat{n}; z, \hat{n}) = \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{F(t(z))}{F(t_0)} \right)^2 \int_0^\infty P(k) k^2 dk. \quad (8.1.43)$$

При  $P(k)$ , заданной уравнением (8.1.42), для любого правдоподобного  $n_s$  этот интеграл сходится в  $k = 0$ , где  $\mathcal{T}(\kappa) \rightarrow 1$ , однако для  $n_s \geq 1$  он расходится при  $k \rightarrow \infty$  как  $\int k^{n_s-2} \ln^2 k dk$ .

---

Напомним, в разд. 6.5 мы выяснили, что  $\mathcal{T}(\kappa) \propto \ln k/k^2$  при  $k \rightarrow \infty$ . С другой стороны, синус в подынтегральном выражении в (8.1.27) приводит к тому, что  $\xi(z, \hat{n}; z', \hat{n}')$  конечно для  $z' \neq z$  или  $\hat{n}' \neq \hat{n}$ .

---



**Рис. 8.1.** Вид степенной спектральной функции. Данный график задает  $\kappa T^2(\kappa)$  в виде функции от  $\kappa$ , где  $T(\kappa)$  — это передаточная функция, обсуждавшаяся в разд. 6.5,  $\kappa = \sqrt{2}k/k_{\text{EQ}}$ , а  $k_{\text{EQ}} = [13,6 \text{ Мпк}]^{-1}\Omega_m h^2$  является волновым числом, возникающим под горизонтом как раз при балансе вещества и излучения. Из уравнения (8.1.42) следует, что для  $n_s = 1$  степенная спектральная функция  $P(k)$  пропорциональна  $T^2(\kappa)$

Чтобы избежать ультрафиолетовой расходимости в  $\sigma^2$ , вместо этого, как правило, интенсивность первичных флуктуаций выражают в терминах среднего квадратичного значения  $\sigma_R^2$  от усредненного возмущения относительной плотности по сфере сопутствующего радиуса  $R/a_0$ :

$$\sigma_R^2(z) \equiv \left\langle \left( \frac{3a_0^3}{4\pi R^3} \int_{a_0|\mathbf{x}| < R} d^3x \delta_M(\mathbf{x}, t(z)) \right)^2 \right\rangle. \quad (8.1.44)$$

---

В силу инвариантности среднего относительно трансляций, не будет никакой разницы, если записать аргумент  $\delta_M$  как  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ , где  $\mathbf{y}$  — это произвольный фиксированный координатный вектор.

---

Снова используя уравнения (8.1.22) и (8.1.23), а теперь еще и (8.1.20), получаем

$$\sigma_R^2(z) = \frac{1}{2\pi^2(1+z)^2} \left( \frac{C(\Omega_\Lambda/\Omega_m(1+z)^3)}{C(\Omega_\Lambda/\Omega_m)} \right)^2 \int_0^\infty P(k) |f(kR)|^2 k^2 dk, \quad (8.1.45)$$

где  $f(kR)$  — это прямоугольная функция распределения:

$$f(kR) \equiv \frac{3a_0^3}{4\pi R^3} \int_{a_0|\mathbf{x}| < R} d^3x e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}a_0} = \frac{3}{(kR)^3} (\sin(kR) - kR \cos(kR)). \quad (8.1.46)$$

В частности, если взять  $P(k)$  в виде (8.1.42), то

$$\sigma_R^2(z) = \frac{16\pi N^2}{25k_*^{n_s-1}\Omega_m^2 H_0^4} \frac{C^2(\Omega_\Lambda/\Omega_m(1+z)^3)}{(1+z)^2} \times$$

$$\times \int_0^\infty \left| T\left(\frac{\sqrt{2}k}{k_{\text{EQ}}}\right) \right|^2 |f(kR)|^2 k^{2+n_s} dk. \quad (8.1.47)$$

Прямоугольная функция имеет  $f(0) = 1$ , поэтому для инфракрасной сходимости интеграла от среднего квадратичного значения флуктуации ничего не меняется, однако  $|f(kR)|^2$  убывает как  $9 \cos^2(kR)/(kR)^4$  при  $k \rightarrow \infty$ , что достаточно быстро, чтобы устранить ультрафиолетовую расходимость при  $n_s < 5$ .

Многие наблюдения распределения вещества во Вселенной, как правило, выражаются в терминах величины, называемой  $\sigma_8$ , которая является значением  $\sigma_R(z)$  при  $z = 0$  и  $R = 8h^{-1}$  Мпк. При вычислении  $\sigma_8$ , можно найти передаточную функцию с помощью формулы сшивки Дикуса (6.5.12), с барационной поправкой Эйзенштейна—Ху (6.5.22). Используя параметры  $h = 0,72$ ,  $\Omega_m h^2 = 0,14$ ,  $\Omega_b h^2 = 0,024$  и  $|N|^2 = 2,1 \times 10^{-10}$ , которые, как обсуждалось в разд. 7.2, были найдены в конце первого года наблюдений на WMAP, и фиксируя современную температуру фонового излучения как  $T_{\gamma,0} = 2,725$  К, что приводит к  $\Omega_b h^2 = 4,15 \times 10^{-5}$ , из уравнения (8.1.47) получим, что  $\sigma_8 = 0,92$ , в согласии с результатом  $\sigma_8 = 0,919$ , полученным коллаборацией WMAP, вычисленным с помощью компьютерной программы CMBfast<sup>5)</sup>.

---

Данные WMAP<sup>6)</sup> третьего года дают меньшее значение,  $\sigma_8 = 0,761^{+0,049}_{-0,048}$ , потому что редуцированная оптическая глубина, полученная из данных третьего года по поляризации с целью получения температурных корреляций, примерно такой же величины, требует меньшего значения  $|N|^2$ . Уменьшение  $|N|^2$  также приводит к соответствующему уменьшению значения  $\sigma_8$ , вычисленного на основе уравнения (8.1.47).

---

Даже если из выражения (8.1.43) следует расходящийся интеграл при  $n_s \geq 1$ , то оно означает, что  $P(k)k^3$  можно использовать в качестве меры величины флуктуаций сопутствующего волнового числа  $q = a_0 k$ . Для  $P(k)$ , заданной выражением (8.1.42) при  $n_s \simeq 1$ , имеем

$$F^2(t)P(k)k^3 \propto t^{4/3}k^4 \left| T\left(\frac{k}{k_{\text{EQ}}}\right) \right|^2.$$

Это монотонно возрастающая функция от  $k$ , откуда можно сделать вывод, что именно *возмущения большого сопутствующего волнового числа, и следовательно малой массы, становятся сильными в первую очередь*, с малыми густотами, объединяющимися в предгалактические гало темной материи и затем, окончательно, в галактические скопления. Эта «восходящая» картина образования

<sup>5)</sup> D. N. Spergel *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 175 (2003). Упоминаемый в этой работе результат  $\sigma_8 = 0,919$  был округлен до  $\sigma_8 = 0,9$ , чтобы подчеркнуть наличие неопределенностей во входных параметрах.

<sup>6)</sup> D. N. Spergel *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **170**, 377 (2007) [astro-ph/0603449].

структуры обратна «нисходящей» картине, продвигавшейся Зельдовичем<sup>7)</sup>, согласно которой очень крупные сгустки образуются первыми и затем дробятся на сгустки масштаба галактических скоплений, после чего разделяются на отдельные галактики. Восходящая картина подтверждается наблюдением, что типичные галактики являются карликовыми сфероидами, а также тем, что как у нашей галактики, так и у туманности Андромеды M31 есть примерно по 20 меньших галактик-спутников.

Вернемся теперь к степенной спектральной функции: из рассмотрения табл. 6.1 следует, что функция  $|\mathcal{T}(k)|^2$  имеет максимальное значение 0,74, достигаемое при  $\kappa = 2,0$ . Поскольку уравнение (6.4.58) приводит к  $k$ , пропорциональному  $\kappa$ , при  $k = \Omega_m h^2 \kappa / 19,3$  Мпк, функция  $P(k)$  при  $n_S = 1$  имеет максимум для этого значения  $\kappa$ , которое соответствует

$$k_{\max} = 0,10 \Omega_m h^2 \text{ Мпк}^{-1}. \quad (8.1.48)$$

Выбирая  $C(\Omega_\Lambda/\Omega_m) = 0,767$  и  $n_S = 1$ , получим, что значение спектральной функции в точке своего максимума равно

$$P_{\max} = 7,2 \times 10^{13} (\Omega_m h^2)^{-1} |N|^2 \text{ Мпк}^3. \quad (8.1.49)$$

Имеется ряд измерений распределения вещества при малых значениях красного смещения, которые были использованы для вычисления  $P(k)$ :

- Существует несколько обзоров положений галактик и красных смещений, из которых два самых современных и подробных — это Слоановский цифровой обзор неба<sup>8)</sup>, в который входит примерно 800 000 галактик, а также 2dF обзор<sup>9)</sup>, который после его завершения в 2003 году содержал 220 000 галактик. Результаты Слоановского цифрового обзора неба показаны на рис. 8.2.

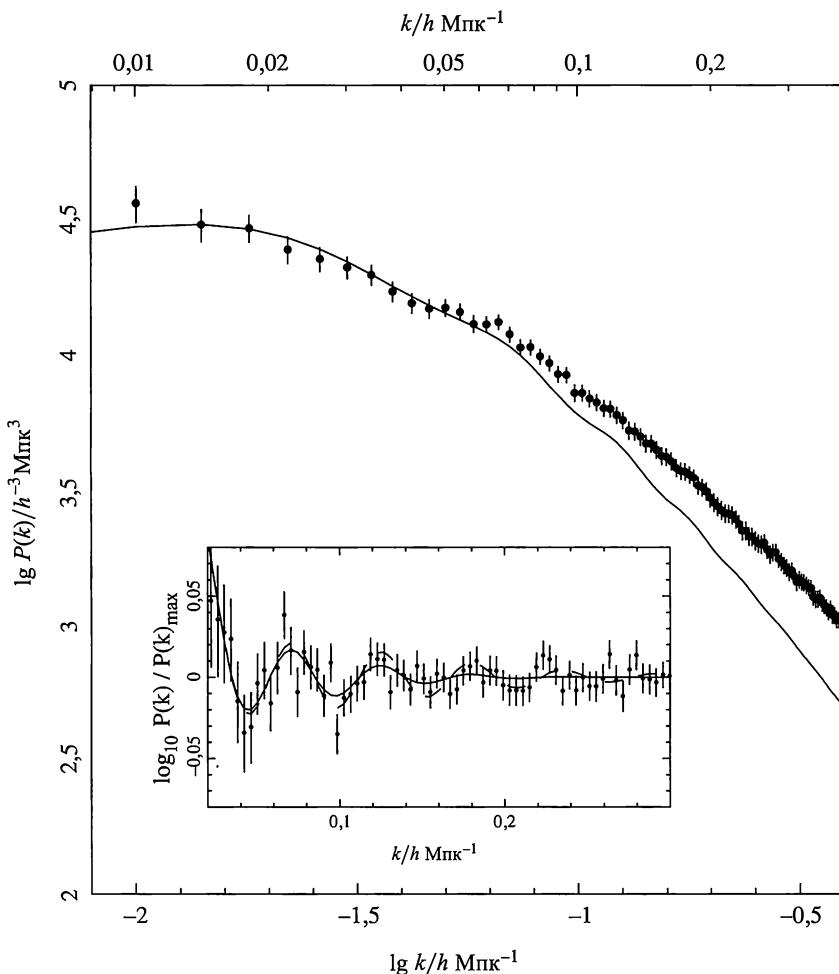
Эти два обзора приводят к значениям  $P(k)$ , которые находятся в хорошем согласии друг с другом для значений  $k$ , изменяющихся в интервале от  $0,015h$  до  $0,2h$  Мпк $^{-1}$ .

В этих обзорах волновые числа задаются в единицах  $h$  Мпк $^{-1}$ , потому что расстояния получаются из красных смещений и потому пропорциональны  $h^{-1}$ .

<sup>7)</sup> Ya. B. Zel'dovich, *Soviet Scientific Reviews, Section E: Astrophys. and Space Physics Reviews* **3**, 1 (1984); S. F. Shandarin and Ya. B. Zel'dovich, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 185 (1989); а также процитированные там более ранние работы.

<sup>8)</sup> D. G. York *et al.*, *Astron. J.* **120**, 1579 (2000); M. Tegmark *et al.*, *Astrophys. J.* **606**, 702 (2004) [astro-ph/0310725]; *Phys. Rev. D* **69**, 103501 (2004) [astro-ph/0310723]. Самый последний релиз данных на момент написания этой книги проанализирован в W. J. Percival *et al.*, *Astrophys. J.* **657**, 645 (2007) [astro-ph/0608636] и M. Tegmark *et al.*, *Phys. Rev. D* **74**, 123507 (2006) [astro-ph/0608632].

<sup>9)</sup> W. J. Percival *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **327**, 1297 (2001); M. Colless *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **328**, 1039 (2001); M. Colless *et al.* (the 2dFGRS team), [astro-ph/0306581]. Окончательный набор данных проанализирован в S. Cole *et al.* (the 2dF-GRS Team), *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **362**, 505 (2005) [astro-ph/0501174].



**Рис. 8.2.** Измерения степенной спектральной функции в Слоановском цифровом обзоре неба из работы W. J. Percival *et al.*, [astro-ph/0608636]. Темные кружки показывают значения  $h^3 P(k)$ , полученные на основе обзора положений галактик и их красных смещений, с расстояниями, вычисленными из красных смещений на основе предполагаемых космологических параметров  $\Omega_m = 0,24$ ,  $\Omega_\Lambda = 0,76$ . Вертикальные черточки указывают  $1 - \sigma$  ошибки. Сплошная кривая вычисляется с помощью теории линейных возмущений с космологическими параметрами, заимствованными из данных WMAP третьего года по температуре и поляризации:  $h = 0,73$ ,  $\Omega_m = 0,24$ ,  $\Omega_\Lambda = 0,76$ ,  $\Omega_b/\Omega_m = 0,174$ . Нормировка кривой выбирается из условия состыковки с этими данными при  $k$  между  $0,01 h \text{Mpc}^{-1}$  и  $0,06 h \text{Mpc}^{-1}$ . Отклонения используемых данных от этой теоретической кривой при больших  $k$  приписываются нелинейным эффектам при росте возмущений. Вставка показывает эффект барионных акустических осцилляций, обсуждающихся в конце этого раздела. Точки данных показывают отношение измеренной степенной спектральной функции к ее значению при сглаживании с целью исключения осцилляций. Сплошная кривая демонстрирует ожидаемое отношение, вычисленное с помощью параметров из данных WMAP третьего года

Измеренная  $P(k)$  имеет вид, совместный с результатом  $\propto k|\mathcal{T}(k)|^2$ , ожидаемым из (8.1.42) для  $n_S \approx 1$ , в частности, по-видимому, достигает максимума при  $k \approx 0,02h$  Мпк $^{-1}$ , в хорошем согласии с уравнением (8.1.48) при  $\Omega_m \approx 0,3$  и  $h \approx 0,7$ . Измеренное значение в этом максимуме равно  $P_{\max} \approx 5 \times 10^4 h^{-3}$  Мпк $^3$ . Если выбрать  $\Omega_m \approx 0,3$  и  $h \approx 0,7$ , то сравнение этого результата с (8.1.49) указывает на значение  $|N| \approx 2 \times 10^{-5}$  для величины первичных флуктуаций.

- Подсчеты числа «вириальных» галактических скоплений (таких как скопление Волосы Вероники) как функции от красного смещения дают информацию о распределении масс в зависимости от расстояния<sup>10)</sup>. (См. разд. 1.11.) Полученные результаты приводят к значениям  $\sigma_8$ , изменяющимся от 0,66 до примерно 1, и могут быть проинтерпретированы как приводящие к значению  $P(k) \approx 6 \times 10^3 h^{-3}$  Мпк $^3$  при  $k \approx 0,01h$  Мпк $^{-1}$ , что ложится на кривую, возникающую на основе данных, полученных в двух упоминавшихся выше галактических обзорах.
- Другая информация о распределении масс в зависимости от расстояния возникает из корреляций между положениями межгалактических областей, плотность которых выше средней, выявляемых на основе изучения линий Лаймана- $\alpha$  поглощения проходящего сквозь эти области света от удаленных квазаров<sup>11)</sup>. (См. разд. 1.10.) Полученные результаты приводят при  $k$  между примерно  $0,1h$  Мпк $^{-1}$  и  $6h$  Мпк $^{-1}$  к значениям  $P(k)$ , которые лежат на кривой, полученной на основе данных галактических обзоров для  $k < 0,2h$  Мпк $^{-1}$  и продлевают данную кривую в область растущих значений  $k$ , что опять находится в согласии с ожидаемым видом  $\propto k|\mathcal{T}(k)|^2$ .
- Еще больше информации о распределении масс возникает из слабого линзирования галактических изображений<sup>12)</sup>. (См. разд. 9.5.) Полученные результаты приводят к значениям  $\sigma_8$ , изменяющимся от 0,67 до 0,97, и могут быть проинтерпретированы как приводящие к значениям  $P(k)$  при  $k$  в окрестности  $0,3h$  Мпк $^{-1}$ , что ложится на кривую, полученную на основе данных галактических обзоров.

Эти измерения подвержены различным неопределенностям, что приводит к рассмотрению в высшей степени спорных технических вопросов астрофизики. При определении расстояний на основе красных смещений эти измерения очень чувствительны к различного рода усложнениям, возникающим из-за пекулярных скоростей галактик, или галактических скоплений, или облаков Лаймана- $\alpha$ . В используемой для интерпретации измерений теории предполагается, что сгустки темной материи можно рассматривать как

<sup>10)</sup> Краткое изложение со ссылками на оригинальную литературу см. в табл. V работы M. Tegmark *et al.*, *Phys. Rev. D* **69**, 103501 (2004).

<sup>11)</sup> U. Seljak *et al.*, *Phys. Rev. D* **71**, 103515 (2005).

<sup>12)</sup> См., например, H. Hoekstra *et al.*, *Astrophys. J.* **647**, 116 (2006).

малые возмущения, поэтому следует избегать использования данных со значениями  $k$ , для которых возмущения становятся нелинейными. Наконец, при интерпретации распределения барионного вещества в галактиках, или галактических скоплениях, или в облаках Лаймана-альфа в терминах плотности полной массы, необходимо либо предполагать, что систематических ошибок нет, либо знать, какая именно систематическая ошибка присутствует. Только метод слабого линзирования напрямую измеряет флуктуации плотности полной массы. По этой причине, несмотря на то, что достоверная информация о виде функции  $P(k)$  также может быть получена при использовании других методов, они не фиксируют однозначно нормировочный множитель перед  $P(k)$ . Результаты галактических обзоров, упомянутых выше, подразумевают отсутствие систематических ошибок, т. е. считается, что распределение барионного вещества до того, как возмущения станут нелинейными, повторяет распределение холодной темной материи.

Одно из удивительных свойств, возникающих при изучении реликтового излучения, описанного в предыдущей главе, состоит в том, что эти результаты для  $P(k)$ , полученные на основе анализа крупномасштабной структуры, согласуются с величиной первичных флуктуаций, найденной из реликтового излучения. Другими словами, величина первичной флуктуации  $q^3 |\mathcal{R}_q|^2$  примерно постоянна в широком диапазоне значений физического волнового числа  $k \equiv q/a_0$ , от значений  $\approx 10^{-3}$  Мпк $^{-1}$ , задействованных в наблюдениях реликтового излучения с произвольными, исключая наименьшие, мультипольными порядками, до значений более 1 Мпк $^{-1}$ , задействованных при изучении крупномасштабной структуры. Действительно, даже до появления измерений COBE, обсуждавшихся в разд. 2.6, изучение крупномасштабной структуры привело к ожиданию, что реликтовое излучение будет иметь относительные температурные флуктуации порядка  $10^{-5}$ , что соответствует  $|N| \approx 10^{-5}$ .

Все обсуждавшиеся до сих пор измерения соответствовали небольшим либо умеренным красным смещениям, для которых расстояние структуры в уравнении (8.1.28) не сильно отличается от линейного приближения  $d_S(z) \simeq z/H_0$ . Многие надеются, что измерения корреляционной функции вещества  $\xi$  при больших красных смещениях приведет к определению функциональной зависимости  $d_S(z)$  (или, эквивалентно,  $d_y(z)$ ) за рамками этого приближения, что может прояснить зависимость от времени вакуумной энергии. Однако из уравнения (8.1.28) следует, что в интегrale для  $\xi(z, \hat{n}, z', \hat{n}')$  подынтегральное выражение чувствительно к значению

$$r \equiv |d_S(z)\hat{n} - d_S(z')\hat{n}'|$$

только для волновых чисел  $k \gtrsim 1/r$ . Если  $r \ll 1/k_{EQ}$  (где  $k_{EQ}$  — волновое число, возникающее под горизонтом при балансе вещества и излучения), то для  $k \gtrsim 1/r$  и  $n_S \simeq 1$  приближенная формула (8.1.42) для  $P(k)$  вместе с асимптотической формулой (6.5.11) для передаточной функции приводят к

$$P(k) \sim k^{-3} [\ln k + O(1)]^2,$$

поэтому часть интеграла (8.1.28) для корреляционной функции, которая зависит от  $r$ , имеет следующую  $r$ -зависимость:

$$\int_{1/r}^{\infty} \frac{dk}{rk^2} \sin(kr) [\ln k + O(1)]^2,$$

которая относительно  $r$  изменяется только логарифмически. Таким образом, для того чтобы использовать измерения корреляционной функции вещества для выяснения  $z$ -зависимости  $d_S(z)$ , следует либо провести измерения данной корреляционной функции при красных смещениях и углах, достаточно разных, чтобы  $|d_S(z)\hat{n} - d_S(z')\hat{n}'|$  было по крайней мере порядка  $1/k_{EQ} = 19,3 \text{ Мпк}/\Omega_m h^2$ , либо воспользоваться малыми отклонениями передаточных функций от асимптотической формулы (6.5.11) при  $k > k_{EQ}$ , либо еще воспользоваться малыми отклонениями от нашей формулы (8.1.42) для  $P(k)$  при  $k > k_{EQ}$ .

Такие отклонения от уравнения (8.1.42) для  $P(k)$  возникают благодаря вкладам порядка  $\beta \equiv \Omega_b/\Omega_m$ , возникающим из барионных акустических осцилляций до момента отделения<sup>13)</sup>. Чтобы видеть эффект от этих осцилляций, необходимо вернуться к уравнению (8.1.14) и взглянуть на «быстрые» вклады в различных возмущениях, осциллирующих относительно волнового числа при больших значениях волнового числа. При оценке порядка величины этих вкладов выбираем  $\bar{\rho}_b(t_{\text{п. р.}})$  и  $\bar{\rho}_\gamma(t_{\text{п. р.}})$  одинакового порядка, так что  $R(t_{\text{п. р.}})$  порядка единицы, а  $8\pi G \bar{\rho}_\gamma(t_{\text{п. р.}})$  порядка  $\beta H^2(t_{\text{п. р.}})$ . Помимо этого, оценивая порядки величины, мы не различаем  $a_{\text{п. р.}}$  и  $a_{EQ}$ , разница между которыми составляет лишь множитель порядка 3. Затем, удерживая только наименьшие степени  $\beta$  и  $a_{\text{п. р.}} H_{\text{п. р.}}/q$ , из уравнений (6.4.45)–(6.4.48) получаем, что помимо общего фактора

$$\mathcal{R}_q^r \exp \left( - \int_0^{t_{\text{п. р.}}} \Gamma dt \right),$$

«быстрые» вклады в  $\beta \delta_{\gamma q}(t_{\text{п. р.}})$ ,  $(1 - \beta) \delta_{Dq}(t_{\text{п. р.}})$  и  $t_{\text{п. р.}} \Psi_q(t_{\text{п. р.}})$  порядка  $\beta$ ,  $\beta H_{\text{п. р.}}^2 a_{\text{п. р.}}^2/q^2$  и  $\beta H_{\text{п. р.}} a_{\text{п. р.}}/q$  соответственно, а вклад  $\beta t_{\text{п. р.}}(q^2/a_{\text{п. р.}}^2) \delta u_{\gamma q}(t_{\text{п. р.}})$

<sup>13)</sup> Влияние барионных акустических осцилляций до момента отделения на распределение вещества после отделения было обнаружено в работах P. J. E. Peebles and J. T. Yu, *Astrophys. J.* **162**, 815 (1970); R. A. Sunyaev and Ya. B. Zel'dovich, *Astrophys. Space Sci.* **7**, 3 (1970); J. R. Bond and G. Efstathiou, *Astrophys. J.* **285**, L45 (1984); J. A. Holtzman, *Astrophys. J. Suppl.* **71**, 1 (1989); W. Hu and N. Sugiyama, *Astrophys. J.* **471**, 30 (1996); D. J. Eisenstein and W. Hu, *Astrophys. J.* **496**, 605 (1998). Я считаю, что первыми, кто предложил использовать обзор красных смещений для измерения  $d_y(z)$  на основе наблюдений барионных акустических осцилляций, были авторы работы D. J. Eisenstein, W. Hu, and M. Tegmark, *Astrophys. J.* **504**, L57 (1998), а предложение использовать этот метод для измерения эволюции темной энергии было выдвинуто в работе D. J. Eisenstein, in *Next Generation Wide-Field Multi-Object Spectroscopy*, eds. M. Brown and A. Dey (ASP Conference Series, vol. 280, 2002): p. 35.

порядка  $\beta(q/(a_{\text{п.р.}} H_{\text{п.р.}}))$ , и тем самым является доминирующим ( помимо затухания Силка) при  $q/(a_{\text{п.р.}} H_{\text{п.р.}}) \gg 1$ . Удерживая лишь этот вклад, мы видим, что осциллирующая часть  $\Delta(q)$  приблизительно равна

$$\begin{aligned} \Delta^{\text{быстр}}(q) &\simeq \beta t_{\text{п.р.}} \left( \frac{q^2}{a_{\text{п.р.}}^2} \right) \delta u_{\gamma q}^{\text{быстр}}(t_{\text{п.р.}}) \simeq \\ &\simeq \frac{2\beta q \mathcal{R}_q^r}{\sqrt{3} a_{\text{п.р.}} H_{\text{п.р.}} (1 + R_{\text{п.р.}})^{3/4}} \exp \left( - \int_0^{t_{\text{п.р.}}} \Gamma dt \right) \sin \left( \frac{qd_H}{a_{\text{п.р.}}} \right), \end{aligned} \quad (8.1.50)$$

где, как обычно,  $R \equiv 4\bar{\rho}_6/\bar{\rho}_\gamma$ ;  $d_H$  — расстояние до акустического горизонта (7.2.39) в момент отделения:

$$\begin{aligned} d_H \equiv a_{\text{п.р.}} \int_0^{t_{\text{п.р.}}} \frac{dt}{a \sqrt{3(1+R)}} = \\ = \frac{2}{H_0 \sqrt{3R_{\text{п.р.}} \Omega_M} (1+z_{\text{п.р.}})^{3/2}} \ln \left( \frac{\sqrt{1+R_{\text{п.р.}}} + \sqrt{R_{\text{EQ}} + R_{\text{п.р.}}}}{1 + \sqrt{R_{\text{EQ}}}} \right); \end{aligned} \quad (8.1.51)$$

и по причинам, которые были объяснены ранее,  $t_{\text{п.р.}}$  была заменена в уравнении (8.1.14) на  $2/(3H_{\text{п.р.}})$ . Таким образом, отношение  $P(k)$  к гладкой кривой, задаваемой уравнением (8.1.42), будет иметь пики в точках  $k \simeq \pi k_H/2, 3\pi k_H/2, 5\pi k_H/2, \dots$ , где  $k_H = 1/d_H(1+z_{\text{п.р.}})$ . Эти пики наблюдались в спектральной функции, полученной из наблюдений Слоановского цифрового обзора неба<sup>14)</sup> и 2dF галактического обзора красных смещений<sup>15)</sup>. (См. вставку на рис. 8.2.) Пропорциональность  $d_H$  и  $\Omega_M^{-1/2}$  позволила определить  $\Omega_M$  путем сопоставления наблюдаемых и предсказанных положений этих пиков. Получившийся результат<sup>16)</sup> равен  $\Omega_M = 0,256^{+0,029}_{-0,024}$ , или, для большей выборки<sup>17)</sup>,  $\Omega_M = 0,024 \pm 0,02$ . К сожалению, данные измерения соответствуют умеренным красным смещениям ( $0,16 < z < 0,47$  в Слоановском обзоре и  $z < 0,3$  в 2dF обзоре), и хотя они приводят к указанию на существование темной энергии, но при этом не дают никакой информации о ее временной зависимости.

\* \* \*

Как и обещалось, мы завершаем это раздел рассмотрением космической дисперсии, вносимой при использовании уравнения (8.1.33). Средняя квадратичная относительная ошибка в этой формуле равна

<sup>14)</sup> D. J. Eisenstein *et al.*, *Astrophys. J.* **633**, 560 (2005) [astro-ph/0501171].

<sup>15)</sup> S. Cole *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **362**, 505 (2005).

<sup>16)</sup> W. J. Percival *et al.*, *Astrophys. J.* **657**, 51 (2007) [astro-ph/0608635].

<sup>17)</sup> M. Tegmark *et al.*, *Phys. Rev.* **74**, 123507 (2006) [astro-ph/0608632].

$$\Delta_V(Q, t) \equiv \left\langle \left[ \int \frac{d^2 \hat{Q}}{4\pi} \left( |\delta_{MQ\hat{Q}}^V(t)|^2 - \langle |\delta_{MQ\hat{Q}}^V(t)|^2 \rangle \right) \right]^2 \right\rangle \times \\ \times \left( \langle |\delta_{MQ\hat{Q}}^V(t)|^2 \rangle \right)^{-2} = \delta_{MQ}^{-4}(t) \int \frac{d^2 \hat{Q}}{4\pi} \int \frac{d^2 \hat{Q}'}{4\pi} \times \\ \times \left[ \langle |\delta_{MQ\hat{Q}}^V(t)|^2 |\delta_{MQ\hat{Q}'}^V(t)|^2 \rangle - \langle |\delta_{MQ\hat{Q}}^V(t)|^2 \rangle \langle |\delta_{MQ\hat{Q}'}^V(t)|^2 \rangle \right]. \quad (8.1.52)$$

В предположении гауссовой статистики это выражение принимает вид

$$\Delta_V(Q, t) = \delta_{MQ}^{-4}(t) \int \frac{d^2 \hat{Q}}{4\pi} \int \frac{d^2 \hat{Q}'}{4\pi} \times \\ \times \left[ |\langle \delta_{MQ\hat{Q}}^V(t) \delta_{MQ\hat{Q}'}^{V*}(t) \rangle|^2 + |\langle \delta_{MQ\hat{Q}}^V(t) \delta_{MQ\hat{Q}'}^V(t) \rangle|^2 \right].$$

Затем, воспользовавшись уравнениями (8.1.31) и (8.1.24) (и вспоминая, что  $\alpha(\mathbf{q}) = \alpha^*(\mathbf{q})$ , а  $\delta_{Mq}(t)$  вещественно), получаем

$$\Delta_V(Q, t) = 2\delta_{MQ}^{-4}(t) \int \frac{d^2 \hat{Q}}{4\pi} \int \frac{d^2 \hat{Q}'}{4\pi} \left| \int d^3 q F_V(\mathbf{q} - Q\hat{Q}) F_V^*(\mathbf{q} - Q\hat{Q}') \delta_{Mq}^2(t) \right|^2.$$

Тогда в пределе большого объема

$$F_V(\mathbf{q} - \mathbf{Q}) \rightarrow \left( \frac{(2\pi)^{3/2}}{\sqrt{V}} \right) \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{Q})$$

космическая дисперсия задается в виде

$$\Delta_V(Q, t) = \frac{2(2\pi)^3}{V} \int \frac{d^2 \hat{Q}}{4\pi} \int \frac{d^2 \hat{Q}'}{4\pi} F_V^2(Q\hat{Q} - Q\hat{Q}').$$

Теперь  $F_V^2(Q\hat{Q} - Q\hat{Q}')$  принимает значение  $V/(2\pi)^3$  при  $Q|\hat{Q} - \hat{Q}'| \ll V^{-1/3}$  и экспоненциально стремится до нуля при  $Q|\hat{Q} - \hat{Q}'| \gg V^{-1/3}$ , поэтому, отбрасывая множители порядка единицы,

$$\Delta_V(Q, t) \approx \frac{1}{Q^2 V^{2/3}}. \quad (8.1.53)$$

Таким образом, средняя квадратичная относительная ошибка при использовании уравнения (8.1.33) обращается в ноль при  $Q^{-2}V^{-2/3}$  и становится пренебрежимо мала, когда в объеме обзора имеется большое количество различных длин волн. Численный фактор зависит от формы объема обзора. Например, если объем обзора является сферой соответствующего радиуса  $R$ , то при  $QR \gg 1$

$$\Delta_V(Q, t) \rightarrow \frac{9}{4Q^2 R^2}. \quad (8.1.54)$$

## Нелинейный рост

**Сферически симметричный коллапс • Вычисление  $\sigma_R$  • Массовая функция Пресса—Шехтера**

Изучение роста возмущений за пределами линейного приближения ставится с огромными математическими трудностями. Обычно они преодолеваются с помощью компьютерных симуляций, рассмотрение которых выходит за рамки этой книги. Для проведения аналитического рассмотрения можно принять на вооружение обобщение некоторой идеализации нелинейного роста, изначально предложенной Пиблзом<sup>18)</sup>. Как и Пиблз, будем рассматривать флуктуацию с повышенной плотностью  $\Delta\rho_m$  (т. е. полная плотность  $\bar{\rho}_m + \Delta\rho_m$  превышает среднюю плотность  $\bar{\rho}_m$  во Вселенной), являющуюся однородной внутри конечной сферы<sup>19)</sup>. Согласно теореме Биркгоффа<sup>20)</sup>, метрика и уравнения движения свободно падающей внутри сферы пробной частицы не зависят от происходящего снаружи сферы, и поэтому совпадают с метрикой и уравнениями в однородной и изотропной Вселенной, описываемой метрикой Робертсона—Уокера с плотностью  $\bar{\rho}_m(t) + \Delta\rho_m(t)$  и постоянной кривизны, которая в общем случае не равна космологической постоянной кривизны  $K$ . В метрике Робертсона—Уокера с постоянной кривизной  $K$  масштабный фактор  $a(t)$  удовлетворяет уравнению Фридмана (1.5.19):

$$\dot{a}^2(t) + K = \frac{8\pi G a^2(t)}{3} (\bar{\rho}_m(t) + \rho_V). \quad (8.2.1)$$

Аналогичным образом, масштабный фактор  $A(t)$  метрики Робертсона—Уокера внутри флуктуации будет удовлетворять уравнению Фридмана:

$$\dot{A}(t) + K + \Delta K = \frac{8\pi G A^2(t)}{3} (\bar{\rho}_m(t) + \Delta\rho_m(t) + \rho_V), \quad (8.2.2)$$

где  $K + \Delta K$  — постоянная кривизны метрики внутренности. В полную плотность включаются плотность нерелятивистской массы, а также вакуумная плотность  $\rho_V$  (отсутствует у Пиблза), которая, если не доказано обратное, берется независящей от времени.

<sup>18)</sup> P. J. E. Peebles, *Astrophys. J.* **147**, 859 (1967).

<sup>19)</sup> В работе J. E. Gunn and J. R. Gott, *Astrophys. J.* **176**, 1 (1972) было учтено падение вещества внутрь сферы однородной повышенной плотности из окружающего пространства, которое сводится к рассмотрению повышенной плотности данной сферы и ее окружения в виде ступенчатой функции от радиуса. Отличная от нуля вакуумная энергия была учтена в модели Ганна—Готта в работе H. Martel, P. R. Shapiro, and S. Weinberg, *Astrophys. J.* **492**, 29 (1998), в которой были рассмотрены флуктуации, состоящие из шара с однородной повышенной плотностью, окруженного сферической оболочкой с однородной пониженной плотностью.

<sup>20)</sup> ГиК, разд. 11.7.

Мы будем рассматривать только случай нулевой космологической кривизны<sup>21)</sup>,  $K = 0$ . В основном мы интересуемся флуктуациями, у которых есть шанс перестать расширяться и сжаться обратно до высоких плотностей, поэтому мы выбираем  $\Delta K > 0$ . Плотность полной массы подчиняется закону сохранения:

$$\bar{\rho}_M(t) + \Delta\rho_M(t) \propto \mathcal{A}^{-3}(t), \quad (8.2.3)$$

а невозмущенная плотность описывается зависимостью

$$\bar{\rho}_M(t) \propto a^{-3}(t). \quad (8.2.4)$$

При  $K = 0$  нормировка  $a$  произвольна; будет удобно воспользоваться уравнениями (8.2.3) и (8.2.4) для нормировки  $a$  так, чтобы

$$\mathcal{A}^3(t)(\bar{\rho}_M(t) + \Delta\rho_M(t)) = a^3(t)\bar{\rho}_M(t). \quad (8.2.5)$$

Чтобы сформулировать начальные условия в этой задаче, в первую очередь необходимо рассмотреть эру доминирования вещества в достаточно ранние времена, чтобы  $\Delta\rho_M(t)$  и  $\Delta\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(t) - a(t)$  можно было рассматривать как малые возмущения, а также пренебречь вакуумной энергией. Как было показано в разд. 1.5, в этом случае уравнения (8.2.1) и (8.2.4) обладают решением

$$a \propto t^{2/3}, \quad \bar{\rho}_M = \frac{1}{6\pi G t^2}. \quad (8.2.6)$$

При разложении первого порядка вокруг этого решения уравнение (8.2.2) принимает вид

$$2\dot{a}\Delta\dot{\mathcal{A}} + \Delta K = \frac{8\pi G a^2 \bar{\rho}_M}{3} \left( \frac{2\Delta\mathcal{A}}{a} + \frac{\Delta\rho_M}{\bar{\rho}_M} \right),$$

или, с помощью (8.2.6),

$$\frac{\Delta K}{a^2} = \frac{4}{9t^2} \left( \frac{2\Delta\mathcal{A}}{a} + \frac{\Delta\rho_M}{\bar{\rho}_M} \right) - \frac{4}{3t} \frac{\Delta\dot{\mathcal{A}}}{a}.$$

Помимо этого, в первом порядке разложения из уравнения (8.2.5) следует, что в ранние времена

$$\frac{\Delta\mathcal{A}}{a} = -\frac{\Delta\rho_M}{3\bar{\rho}_M},$$

откуда следует, что  $\Delta\mathcal{A}$  описывается в ранние времена дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\frac{\Delta K}{a^2} = -\frac{4}{9t^2} \frac{\Delta\mathcal{A}}{a} - \frac{4}{3t} \frac{\Delta\dot{\mathcal{A}}}{a}. \quad (8.2.7)$$

<sup>21)</sup> Случай отрицательной космологической кривизны рассмотрен в работе B. Freivogel, M. Kleban, M. N. Martinez, and L. Susskind, *J. High Energy Phys.* **0603**, 039 (2006) [hep-th/0505232].

Оно имеет решения при  $t \rightarrow 0$  вида  $\Delta A \propto t^{4/3}$  и  $\Delta A \propto t^{-1/3}$ . Предполагая, что для затухания решения  $\Delta A \propto t^{-1/3}$  прошло достаточно времени, остаемся с решением  $\Delta A \propto t^{4/3}$ , и поэтому

$$\Delta K = -\frac{20}{9} \lim_{t \rightarrow 0} [t^{-2} a(t) \Delta A(t)] = \frac{40\pi G}{9} \lim_{t \rightarrow 0} [a^2(t) \Delta \rho_m(t)]. \quad (8.2.8)$$

При описании начальной величины флуктуации внутри сопутствующего радиуса  $r$  из уравнения (8.2.8) мы замечаем, что в ранние времена

$$\Delta \rho_m(t) \propto a^{-2}(t) \propto \bar{\rho}_m^{2/3}(t),$$

поэтому можно определить независящую от времени величину, которую будем называть *величиной начальной флуктуации*:

$$\rho_1 \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Delta \rho_m^3(t)}{\bar{\rho}_m^2(t)}. \quad (8.2.9)$$

Тогда уравнение (8.2.8) можно записать в виде

$$\Delta K = \frac{40\pi G}{9} a^2(t) \bar{\rho}_m^{2/3}(t) \rho_1^{1/3} = \frac{40\pi G}{9} \mathcal{A}^2(t) (\bar{\rho}_m(t) + \Delta \rho_m(t))^{2/3} \rho_1^{1/3}. \quad (8.2.10)$$

Отметим, что здесь мы не должны брать предел  $t \rightarrow 0$ , потому что  $a^2 \bar{\rho}_m^{2/3}$  не зависит от времени.

Теперь давайте рассмотрим развитие флуктуации в поздние времена, когда она больше не может рассматриваться как малое возмущение. С помощью уравнения (8.2.10) уравнение Фридмана (8.2.2) (с  $K = 0$ ) можно переписать следующим образом:

$$\dot{\mathcal{A}}^2 = \frac{8\pi G \mathcal{A}^2}{9} [3(\bar{\rho}_m + \Delta \rho_m + \rho_V) - 5(\bar{\rho}_m + \Delta \rho_m)^{2/3} \rho_1^{1/3}],$$

или, воспользовавшись соотношением (8.2.3),

$$\begin{aligned} (\bar{\rho}_m + \Delta \rho_m)^{-2} \left( \frac{d}{dt} (\bar{\rho}_m + \Delta \rho_m) \right)^2 &= 8\pi G \times \\ &\times (3(\bar{\rho}_m + \Delta \rho_m + \rho_V) - 5(\bar{\rho}_m + \Delta \rho_m)^{2/3} \rho_1^{1/3}). \end{aligned} \quad (8.2.11)$$

Правая часть этого уравнения обращается в ноль при плотности полной массы  $\bar{\rho}_m + \Delta \rho_m = \rho_c$ , удовлетворяющей

$$3(\rho_c + \rho_V) = 5\rho_c^{2/3} \rho_1^{1/3}. \quad (8.2.12)$$

При  $\rho_c > 0$  величина  $5\rho_c^{2/3} \rho_1^{1/3} - 3\rho_c$  принимает значения от  $-\infty$  до  $500\rho_1/243$ , поэтому уравнение (8.2.12) обладает решением тогда и только тогда, когда

флуктуация достаточно велика, чтобы выполнялось<sup>22)</sup>

$$\rho_1 \geqslant \frac{729}{500} \rho_V. \quad (8.2.13)$$

Поскольку уравнение (8.2.12) имеет решение, плотность  $\bar{\rho}_M(T) + \Delta\rho_M(t)$  будет убывать до тех пор, пока не достигнет значения  $\rho_c$ , после чего опять начнет возрастать до бесконечности. Полное время, которое длятся расширение и сжатие, задается уравнением (8.2.11) в виде

$$t_c = \frac{2}{\sqrt{8\pi G}} \int_{\rho_c}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho \sqrt{3(\rho + \rho_V) - 5\rho^{2/3}\rho_1^{1/3}}}. \quad (8.2.14)$$

---

Возникающий здесь фактор 2 объясняется тем, что сжатие от минимальной плотности до бесконечной занимает столько же времени, сколько расширение от бесконечной плотности до минимальной.

---

Например, в пределе  $\rho_1 \gg \rho_V$  имеем

$$t_c \rightarrow \frac{9\pi}{5^{3/2}\sqrt{8\pi G\rho_1}}. \quad (8.2.15)$$

Если теория линейных возмущений продолжает работать вплоть до этого момента, то тогда вместо того, чтобы стать бесконечным, возмущение относительной плотности в момент времени  $t_c$  в этом случае будет равно

$$\frac{\Delta\rho_M}{\bar{\rho}_M} = \left( \frac{\rho_1}{\bar{\rho}_M} \right)^{1/3} = \rho_1^{1/3} (6\pi G t_c^2)^{1/3} = \left( \frac{243\pi^2}{500} \right)^{1/3} = 1,686.$$

Видим, что гравитационное сжатие происходит в то время, когда теория линейных возмущений предсказывает возмущение относительной плотности, достаточно большое, чтобы неприменимость линейного приближения стала очевидной.

Разумеется, разные флуктуации будут обладать разными начальными величинами  $\rho_1$  и сопутствующими радиусами  $R$ . Чтобы связать данный анализ с наблюдениями, удобно использовать подход, предложенный Прессом и Шехтером<sup>23)</sup>. Обращая уравнение (8.2.14) можно вычислить минимальную величину начальной флуктуации  $\rho_1(t_c)$ , необходимую для сжатия в момент времени  $t_c$  или до него. Например, для флуктуаций, которые достаточно велики, чтобы схлопнуться прежде, чем вакуумная энергия начнет играть важную роль, из уравнения (8.2.15) следует, что  $\rho_1(t_c) = 81\pi/(1000Gt_c^2)$ . Для

<sup>22)</sup> S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2607 (1987).

<sup>23)</sup> W. H. Press and P. Schechter, *Astrophys. J.* **239**, 1 (1974).

вычисления вероятности, что случайная точка в пространстве будет находиться внутри данной большой флюктуации, предположим, что в ранний момент времени  $t$ , до того как станут существенны нелинейный эффекты, вероятность  $P_{t,R}(\Delta\rho_m)d\Delta\rho_m$  того, что прирост средней плотности внутри сферы сопутствующего радиуса  $R$  происходит на величину между  $\Delta\rho_m$  и  $\Delta\rho_m + d\Delta\rho_m$ , задается гауссовым распределением

$$P_{t,R}(\Delta\rho_m) d\Delta\rho_m = \frac{d\Delta\rho_m}{\sqrt{2\pi} \sigma_R(z_t)\bar{\rho}_m(t)} \exp\left(-\frac{\Delta\rho_m^2}{2\sigma_R^2(z_t)\bar{\rho}_m^2(t)}\right). \quad (8.2.16)$$

Для спектра флюктуаций Зельдовича—Гаррисона с  $\mathcal{R}_q = Nq^{-3/2}$ , стандартное отклонение  $\sigma_R$  для относительной флюктуации  $\Delta\rho_m/\bar{\rho}_m$ , усредненной по радиусу  $R$ , задается уравнением (8.1.47), которое для  $n_S = 1$  принимает вид

$$\sigma_R^2(z) = \frac{16\pi N^2}{25\Omega_m^2 H_0^4} \frac{C^2(\Omega_\Lambda/\Omega_m(1+z)^3)}{(1+z)^2} \int_0^\infty \left| \mathcal{T}\left(\frac{\sqrt{2}k}{k_{\text{EQ}}}\right) \right|^2 |f(kR)|^2 k^3 dk, \quad (8.2.17)$$

где  $f$  — это прямоугольная функция распределения (8.1.46);  $\mathcal{T}$  — скалярная передаточная функция, определенная и вычисленная в разд. 6.5;  $k_{\text{EQ}}$  — волновое число (8.1.41), возникающее под горизонтом при балансе вещества и излучения. С помощью уравнения (8.2.9) это выражение может быть представлено в виде не зависящей от времени вероятности  $P_R(\rho_1)d\rho_1$  для флюктуаций, усредненных по сопутствующей сфере радиуса  $R$ , чтобы иметь начальную величину в интервале от  $\rho_1$  до  $\rho_1 + d\rho_1$ :

$$\tilde{P}_R(\rho_1) d\rho_1 = \frac{d\rho_1}{3\sqrt{2\pi}\rho_1^{2/3}\tilde{\sigma}_R} \exp\left(-\frac{\rho_1^{2/3}}{2\tilde{\sigma}_R^2}\right), \quad (8.2.18)$$

где  $\tilde{\sigma}_R$  — это независящая от времени величина, задаваемая

$$\tilde{\sigma}_R^2 \equiv \lim_{z \rightarrow \infty} \bar{\rho}_m^{2/3}(t(z))\sigma_R^2(z) = \frac{16\pi N^2}{25} \left(\frac{3}{8\pi G}\right)^2 \bar{\rho}_{M0}^{-4/3} \int_0^\infty \left| \mathcal{T}\left(\frac{\sqrt{2}k}{k_{\text{EQ}}}\right) \right|^2 |f(kR)|^2 k^3 dk. \quad (8.2.19)$$

Так как усреднение происходит по сфере сопутствующего радиуса  $R$ , в данную вероятность дают вклад только те флюктуации, чей сопутствующий радиус *больше*  $R$ . Проводя интегрирование, мы видим, что в ранние времена, до того как флюктуации стали велики, вероятность того, что случайная точка в пространстве находится внутри флюктуации с начальной величиной больше  $\rho_1$  и сопутствующим радиусом больше  $R$ , равна

$$P(>\rho_1, >R) = \int_{\rho_1}^\infty \frac{d\rho}{3\sqrt{2\pi}\rho^{2/3}\tilde{\sigma}_R} \exp\left(-\frac{\rho^{2/3}}{2\tilde{\sigma}_R^2}\right) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \text{erf}\left(\frac{\rho_1^{1/3}}{\sqrt{2}\tilde{\sigma}_R}\right) \right], \quad (8.2.20)$$

где  $\text{erf}(y)$  — это обычный интеграл вероятности ошибки:

$$\text{erf}(y) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-y\sqrt{2}}^{y\sqrt{2}} dx \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \quad (8.2.21)$$

В ранней Вселенной плотность вещества однородна, поэтому уравнение (8.2.20) также задает долю всего вещества, находящегося внутри флуктуаций с начальной величиной больше  $\rho_1$  и сопутствующим радиусом больше  $R$ . Если теперь положить  $\rho_1$  в уравнении (8.2.20) равным критической начальной величине  $\rho_1(t)$  при сжатии в момент времени  $t$ , то тогда обнаружим, что в момент времени  $t$ , когда нелинейности стали важны, доля всего вещества, находящегося в коллапсирующих структурах с сопутствующим радиусом больше  $R$ , будет равна

$$F(>R, t) = \frac{1}{2} \left[ 1 - \text{erf}\left(\frac{\rho_1^{1/3}(t)}{\sqrt{2}\tilde{\sigma}_R}\right) \right]. \quad (8.2.22)$$

Масса внутри сферы сопутствующего радиуса  $R$  является независящей от времени величиной  $4\pi\bar{\rho}_M(t)a^3(t)R^3/3$ , поэтому в момент времени  $t$  плотность числа  $n(M, t)dM$  коллапсирующих структур с массами в интервале от  $M$  до  $M + dM$  задается следующей формулой:

$$\begin{aligned} n(M, t) &= -\frac{\bar{\rho}_M(t)}{2M} \frac{d}{dM} \text{erf}\left(\frac{\rho_1^{1/3}(t)}{\sqrt{2}\tilde{\sigma}_{R(M)}}\right) = \\ &= \frac{\rho_1^{1/3}(t)\bar{\rho}_M(t)}{M\sqrt{2\pi}} \left| \frac{d\tilde{\sigma}_{R(M)}^{-1}}{dM} \right| \exp\left(-\frac{\rho_1^{2/3}(t)}{2\tilde{\sigma}_{R(M)}^2}\right), \end{aligned} \quad (8.2.23)$$

где

$$R(M) \equiv \left( \frac{3M}{4\pi a^3 \bar{\rho}_M} \right)^{1/3}$$

---

Пресс и Шехтер несколько условно помножили это выражение на 2, чтобы учесть присутствие вещества в областях с флуктуациями отрицательной плотности<sup>24)</sup>.

---

Эти коллапсирующие структуры в конце концов образуют гало холодной темной материи, которые окружают галактики в современной Вселенной<sup>25)</sup>.

<sup>24)</sup> Вывод этого множителя 2 содержится в работе J. R. Bond, S. Cole, G. Efstathiou, and N. Kaiser, *Astrophys. J.* **379**, 440 (1991).

<sup>25)</sup> Влияние несферического коллапса на функцию массы  $n(M, t)$  рассматривается в работах P. Monaco, *Astrophys. J.* **447**, 23 (1995); J. Lee and S. F. Shandarin, *Astrophys. J.* **500**, 14 (1998); R. K. Sheth and G. Tormen, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **308**, 119 (1999); R. K. Sheth, H. J. Mo, and G. Tormen, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **323**, 1 (2001).

При использовании уравнения (8.2.23) следует знать зависимость от массы в  $\tilde{\sigma}_{R(M)}$ . Для больших масс и радиусов основной вклад в интеграл (8.2.19) происходит за счет малых значений волнового числа  $k$ , для которого передаточная функция  $T(k)$  близка к единице, поэтому из уравнения (8.2.19) следует, что  $\tilde{\sigma}_R^2 \propto R^{-4}$ , откуда  $\tilde{\sigma}_{R(M)}^2 \propto M^{-4/3}$ .

---

Для спектра первичных флуктуаций  $\mathcal{R}_q \propto q^{(-4+n_s)/2}$  в уравнении (8.2.19) вместо  $k^3 dk$  будет возникать фактор  $k^{2+n_s} dk$ , что приведет к  $k^3 dk$ , и поэтому  $\tilde{\sigma}_R^2 \propto R^{-3-n_s}$ , откуда  $\tilde{\sigma}_{R(M)}^2 \propto M^{-(3+n_s)/3}$ .

---

Таким образом, в этом случае аргумент экспоненты в уравнении (8.2.23) при  $n_s = 1$  пропорционален  $M^{4/3}$ , что приводит к быстрому убыванию плотности числа при больших массах. С другой стороны, для малых масс и радиусов основной вклад в интеграл (8.2.19) происходит за счет больших значений волнового числа  $k$ , для которых, согласно уравнению (6.5.11), передаточная функция  $T(k)$  убывает по закону  $\ln k/k^2$ . Отсюда следует, что интеграл (8.2.19) изменяется по  $R$  только логарифмически, и поэтому плотность числа частиц  $n(M)$  ведет себя при малых  $M$  более-менее как  $M^{-2}$ . Подробная  $M$ -зависимость, предсказываемая уравнением (8.2.23), находится в приемлемом согласии с результатами больших компьютерных симуляций эволюции холодной темной материи<sup>26)</sup>.

## 8.3

### Коллапс барионной материи

**Масса Джинса • Непрерывность • Уравнения Эйлера • Степенные решения • Критическое волновое число для барионного коллапса**

До сих пор мы предполагали, что давление барионного вещества во Вселенной, состоящего после рекомбинации преимущественно из нейтрального водорода и гелия, было ничтожно мало. В этом случае барионное вещество эволюционирует так же, как и холодная темная материя, при расширении и возможном повторном сжатии. Действительно, как было видно в разд. 2.3, у барионного вещества присутствует небольшая остаточная ионизация, которая даже после непродолжительной эпохи рекомбинации обеспечивает достаточно количество электронов для комптоновского рассеяния реликтовых фотонов, что позволяет поддерживать температуру барионного вещества равной температуре реликтового фона до тех пор, пока значение красного смещения

<sup>26)</sup> V. Springel *et al.*, *Nature* **435**, 629 (2005) [astro-ph/0504097].

не опустится ниже 150. В небольших областях с повышенной плотностью гравитационные поля недостаточно сильны, чтобы преодолеть барионное давление, поэтому присутствующее в них барионное вещество не сжимается вместе с холодной темной материией. Это приводит к относительно небольшим сгусткам холодной темной материи, которые в настоящую эпоху не содержат галактик и, помимо гравитационных эффектов, никак себя не проявляют. Тогда возникает вопрос, насколько малым должен быть сгусток холодной материи, чтобы его барионная составляющая противостояла гравитационному сжатию?

До того как существование холодной темной материи стало общепризнанным, этот вопрос ставился в простой теории, изначально предлагаемой Джеймсом Джинсом<sup>27)</sup>. Согласно этой теории, малые возмущения либо осциллируют, либо растут в зависимости от того, больше или меньше критического значения  $k_J = \sqrt{4\pi G \bar{\rho}_6} / v_s$  их волновое число (где  $v_s$  обозначает скорость звука), поэтому сгусток будет слишком мал для сжатия, если его масса меньше чем *масса Джинса*, равная  $\bar{\rho}_6 (2\pi/k_J)^3$ . Естественно, что изначально эта теория (учитывая то время, когда она была предложена) рассматривалась вне контекста расширяющейся Вселенной, но если расширение принять во внимание, то возникают лишь незначительные изменения<sup>28)</sup>. Как станет видно, оказывается, что результаты этой теории становятся совершенно другими, если учесть присутствие холодной темной материи.

Рассматриваем только нерелятивистское вещество на протяжении эпохи, когда излучение давало незначительный вклад в гравитационное поле, поэтому можно пользоваться ньютоновской космологической теорией, описанной в приложении F. Следуя тем же самым рассуждениям, которые привели к уравнениям (F.15) и (F.16), но теперь включая барионное вещество с квадратом скорости звука  $\partial p_6 / \partial \rho_6 = -v_s^2$  и холодную темную материю с нулевым давлением, находим, что возмущения потенциалов поля скоростей  $\delta u_b$  и  $\delta u_D$  и возмущения плотностей  $\delta \rho_b$  и  $\delta \rho_D$  при сопутствующем волновом числе  $\mathbf{q}$  описываются уравнениями непрерывности:

$$\frac{d\delta\rho_D}{dt} + 3H\delta\rho_D - a^{-1}\bar{\rho}_D\mathbf{q}^2\delta u_D = 0, \quad (8.3.1)$$

$$\frac{d\delta\rho_b}{dt} + 3H\delta\rho_b - a^{-1}\bar{\rho}_b\mathbf{q}^2\delta u_b = 0, \quad (8.3.2)$$

а также уравнениями Эйлера

$$\frac{d\delta u_D}{dt} + H\delta u_D = \frac{4\pi Ga}{\mathbf{q}^2}[\delta\rho_D + \delta\rho_b], \quad (8.3.3)$$

<sup>27)</sup> J. Jeans, *Phil. Trans. Roy. Soc.* **199A**, 49 (1902) и *Astronomy and Cosmogony* (2nd ed., впервые опубликовано Cambridge University Press в 1928; reprintное изд. Dover Publications, New York, 1961), p. 345–350.

<sup>28)</sup> ГиК, разд. 15.9.

$$\frac{d\delta u_6}{dt} + H\delta u_6 = \frac{4\pi Ga}{\mathbf{q}^2} [\delta\rho_D + \delta\rho_6] - \frac{v_s^2}{a\bar{\rho}_6} \delta\rho_6. \quad (8.3.4)$$

Так же как в релятивистском случае, удобно ввести возмущения относительной плотности  $\delta_n \equiv \delta\rho_n/\bar{\rho}_n$ . Тогда, воспользовавшись результатом Фридмана, что обе невозмущенные плотности  $\bar{\rho}_n$  изменяются по закону  $a^{-3} \propto t^{-2}$  и исключая потенциалы поля скоростей, получаем уравнения следующего вида:

$$\ddot{\delta}_D + \frac{4}{3t}\dot{\delta}_D = \frac{2}{3t^2} [\beta\delta_6 + (1-\beta)\delta_D], \quad (8.3.5)$$

$$\ddot{\delta}_6 + \frac{4}{3t}\dot{\delta}_6 = -\frac{2\alpha}{3t^2}\delta_6 + \frac{2}{3t^2} [\beta\delta_6 + (1-\beta)\delta_D], \quad (8.3.6)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  определяются как

$$\alpha \equiv \frac{3\mathbf{q}^2 v_s^2 t^2}{2a^2} = \frac{\mathbf{q}^2 v_s^2}{4\pi G \bar{\rho}_M a^2}, \quad \beta \equiv \frac{\bar{\rho}_6}{\bar{\rho}_M} = \frac{\Omega_6}{\Omega_M} \simeq 0,17, \quad (8.3.7)$$

и  $\bar{\rho}_M = \bar{\rho}_D + \bar{\rho}_6$ .

Отметим, что  $\alpha$  была постоянной в эпоху (примерно при  $z > 150$ ), когда барионное вещество и излучение имели одинаковую температуру, потому что  $v_s^2 \propto T \propto a^{-1}$ . Таким образом, можно найти степенные решения<sup>29)</sup> уравнений (8.3.5) и (8.3.6), которые применимы на протяжении этой эпохи. Положим

$$\delta_D \propto t^\nu, \quad \delta_6 = \xi\delta_D, \quad (8.3.8)$$

где  $\nu$  и  $\xi$  являются независящими от времени (но  $\mathbf{q}$ -зависящими) величинами, которые следует найти. Тогда уравнения (8.3.5) и (8.3.6) принимают вид

$$\nu(\nu-1) + \frac{4\nu}{3} = \frac{2}{3} [\beta\xi + (1-\beta)], \quad (8.3.9)$$

$$\nu(\nu-1) + \frac{4\nu}{3} + \frac{2\alpha}{3} = \frac{2}{3} \left[ \beta + \frac{1-\beta}{\xi} \right]. \quad (8.3.10)$$

Исключение  $\xi$  приводит к квадратному уравнению для  $\nu$ . В общем случае оно имеет четыре разных решения, поэтому есть четыре независимых степенных решения системы дифференциальных уравнений четвертого порядка (8.3.5) и (8.3.6), которые тем самым образуют полный набор решений.

Общие решения уравнений (8.3.9) и (8.3.10) слишком сложны, чтобы что-то прояснить, однако, если учесть малость значений  $\beta$ , то можно найти полезные приближенные решения. В пределе малых  $\beta$  есть два решения с малым содержанием барионов, для которых  $\xi < 1$ :

$$\nu = \frac{2}{3}, \quad \xi = \frac{1}{1+\alpha}, \quad (8.3.11)$$

<sup>29)</sup> Приближенные степенные решения были найдены в P. J. E. Peebles, *Astrophys. J.* **277**, 470 (1984).

$$\nu = -1, \quad \xi = \frac{1}{1 + \alpha}, \quad (8.3.12)$$

и два решения с большим содержанием барионов, для которых  $\xi \gg 1$ :

$$\nu = -\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{1}{36} - \frac{2\alpha}{3}}, \quad \xi = -\frac{1 + \alpha}{\beta}. \quad (8.3.13)$$

Все эти решения убывают со временем, кроме первого решения (8.3.11), в котором возмущения относительных плотностей барионов и холодной темной материи растут по закону  $t^{2/3}$ . Таким образом, это решение доминирует на поздних временах. В первом порядке по  $\beta$  степенной показатель и доля барионов в этой моде равны

$$\nu = \frac{2}{3} - \frac{2\beta\alpha}{5(1 + \alpha)}, \quad \xi = \frac{1}{1 + \alpha} - \frac{\beta\alpha^2}{(1 + \alpha)^3}.$$

Относительные барионные поправки к  $\nu$  и  $\xi$  являются максимальными для очень коротких длин волн, для которых они принимают значения  $3\beta/5 \simeq 10\%$  и  $\beta \simeq 17\%$ , соответственно.

Здесь нет ничего, подобного критическому значению волнового числа, которое обозначает переход от роста к осцилляциям, как в классической однокомпонентной теории Джинса. Растущая мода (8.3.11) растет при всех волновых числах, с темпом роста, который при малых  $\beta$  очень слабо зависит от волнового числа. Разумеется, это происходит потому, что давление барионного вещества не может препятствовать тому, что плотность сгустков холодной темной материи постоянно растет, превышая среднее значение. Что действительно зависит от волнового числа, так это доля  $\xi$  барионов, которые следуют за растущей конденсацией холодной темной материи. Данный факт можно привычным образом выразить в терминах полной массы  $M$  (темной материи и барионов) в виде кубической степени физической длины волны  $2\pi a/q$ :

$$M \equiv \bar{\rho}_M \left( \frac{2\pi a}{q} \right)^3 \quad (8.3.14)$$

Согласно формулам для  $\xi$  и  $\alpha$ , задаваемых (8.3.11) и (8.3.7), доля коллапсирующих вместе с холодной темной материей барионов может быть записана в виде

$$\frac{\delta\rho_b/\bar{\rho}_b}{\delta\rho_D/\bar{\rho}_D} \equiv \xi = \frac{1}{1 + (M_J/M)^{2/3}}, \quad (8.3.15)$$

где  $M_J$  — это что-то вроде массы Джинса,

$$M_J = \left( \frac{\pi}{G} \right)^{3/2} \frac{v_s^3}{\bar{\rho}_M^{1/2}}. \quad (8.3.16)$$

Барионы коллапсируют вместе с холодной темной материей в сгустках, масса которых много больше  $M_J$ , а сгустки, масса которых много меньше  $M_J$ , в основном свободны от барионов.

Скорость звука в газе из атомов водорода и гелия при температуре  $T$  равна

$$v_s = \left( \frac{5k_B T}{3\mu m_N} \right)^{1/2},$$

где  $\mu$  — это средний молекулярный вес, который при весовой распространенности гелия в 24 % равен  $\mu = 1,22$ . Поскольку мы рассматриваем эпоху, в которой  $T = T_\gamma$  и  $T_\gamma^3/\bar{\rho}_M$  равно своему современному значению  $T_{\gamma 0}^3/\bar{\rho}_{M0}$ , масса Джинса может быть записана в виде

$$M_J = \left( \frac{5\pi k_B T_{\gamma 0}}{3\mu m_N G} \right)^{3/2} \bar{\rho}_{M0}^{-1/2} = 2,02 \times 10^5 (\Omega_M h^2)^{-1/2} M_\odot. \quad (8.3.17)$$

Для  $\Omega_M h^2 = 0,13$  она равна  $6 \times 10^5 M_\odot$ , что соответствует барионной массе  $\beta M_J \simeq 10^5 M_\odot$ .

После того как значение красного смещения опустилось ниже 150, комптоновское рассеяние реликтовых фотонов на остаточном ионизованном водороде больше не позволяет поддерживать температуру барионного вещества равной температуре излучения. Тогда согласно уравнению (1.1.23), кинетическая энергия, и следовательно температура атомов водорода и гелия, уменьшаются по закону  $a^{-2}$ . Затем дополнительные барионы начинают падать в уже растущие сгустки холодной темной материи, пока барионы опять не нагреются с помощью энергии, высвобождаемой в результате гравитационного сжатия и впоследствии в результате образования первого поколения звезд. Возросшая температура барионов препятствует дальнейшей аккреции барионного вещества и может привести к выталкиванию некоторой части барионного вещества из сгустка. Все это весьма сложно устроено<sup>30)</sup>, но основной вывод о том, что сгусток холодной материи, чья масса меньше  $M_J$ , не будет содержать полный комплект барионного вещества, остается неизменным.

---

<sup>30)</sup> P. R. Shapiro, M. L. Giroux, and A. Babul, *Astrophys. J.* **427**, 25 (1994).

## Глава 9

# ГРАВИТАЦИОННЫЕ ЛИНЗЫ

В 1979 году Уэлш, Карсвелл и Вейман<sup>1)</sup> обнаружили пару квазаров с одинаковым красным смещением, примерно 1,4, отстоящих друг от друга всего на 6''. Похожесть спектров этих двух квазаров означала, что по всей видимости, есть только один квазар, теперь он известен как Q0957+561, изображение которого разделилось на два из-за отклонения света в гравитационном поле промежуточного массивного объекта. Эта догадка была подтверждена после открытия галактики с красным смещением 0,36, расположенной между проведенными к этим квазарам лучами зрения. Подобные гравитационные линзы уже изучались теоретически многими авторами, и теперь их поиск был запущен на полную катушку<sup>2)</sup>. Было обнаружено еще много линзирующих галактик, которые в основном оказывались эллиптическими, и также некоторые линзирующие скопления галактик, которые, как правило, приводили к дугообразным изображениям<sup>3)</sup>.

Сильное гравитационное линзирование используется для поиска темных объектов, для исследования структуры галактических скоплений и для измерения постоянной Хаббла. Слабое линзирование открывает большие возможности для измерения корреляционной функции флуктуаций плотности. Линзирование является обширной темой; в данной главе описание ее космологических приложений будет дано лишь в общих чертах.

### 9.1

#### Уравнение линзы для точечных масс

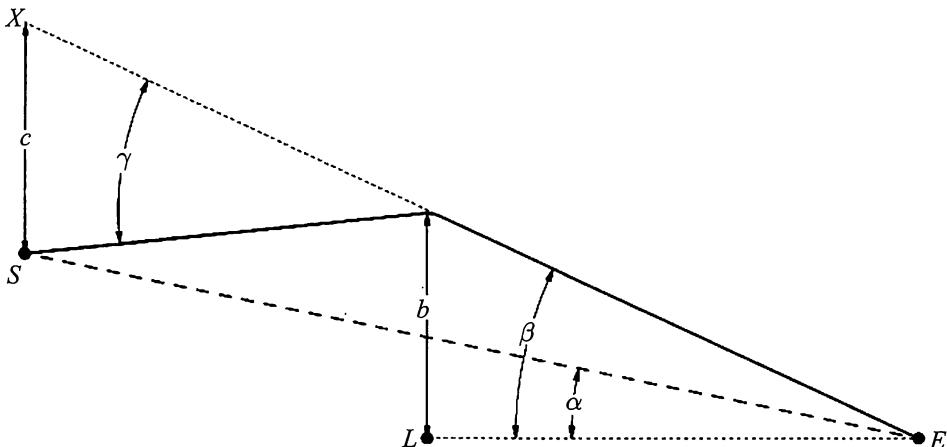
Вывод уравнения линзы • Разделение изображений • Кольцо Эйнштейна

В первую очередь рассмотрим гравитационные линзы, создаваемые точечной массой, а затем возьмемся за более сложные модели. Для анализа раздвоения изображений, создаваемого точечной массой, предположим, что линии от Земли к точечному источнику и от Земли до линзирующей массы

<sup>1)</sup> D. Walsh, R. F. Carswell, and R. J. Weymann, *Nature* **279**, 381 (1979).

<sup>2)</sup> См. подробный обзор *Gravitational Lenses*, by P. Schneider, J. Ehlers, and E. E. Falco (Springer-Verlag, Berlin, 1992). Более современный обзор G. Soucail, *Proceedings of the XX Texas Symposium on Relativistic Astrophysics*, Austin, December 2000.

<sup>3)</sup> R. Lynds and V. Petrosian, *Bull. Amer. Astron. Soc.* **18**, 1014 (1986); G. Soucail, B. Fort, Y. Mellier, and J. P. Picat, *Astron. Astrophys.* **172**, L14 (1987); G. Soucail *et al.*, *Astron. Astrophys.* **191**, L19 (1988).



**Рис. 9.1.** Величины, рассматриваемые при выводе уравнения линзы (9.1.5). Наклонная сплошная линия — это траектория фотона от источника  $S$ , идущая мимо линзы  $L$  по направлению к Земле  $E$ . Точка  $X$  — это видимое положение источника. Поперечные расстояния  $b$  и  $c$  от линзы до световой траектории и от источника до его видимого положения сильно преувеличены, так же как и углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Рисунок справедлив в случае  $K = 0$ ; в системе координат Робертсона—Уокера с началом отсчета на Земле траектория от источника до изгиба при  $|K| \neq 0$  будет искривлена

в системе координат Робертсона—Уокера с началом отсчета на Земле разделены на малый угол  $\alpha$  (см. рис. 9.1).

Это угол, образующийся между изображениями<sup>4)</sup> источника и линзы в случае отсутствия гравитационного отклонения света. Так как свет отклоняется линзой, есть другой угол  $\beta$  между истинными изображениями источника и линзы. Нам нужно вывести *уравнение линзы*, из которого следует соотношение между  $\beta$  и  $\alpha$ .

В системе координат с началом отсчета на Земле световой луч от источника идет по траектории от источника в окрестность линзы, которая в случае  $K \neq 0$  искривлена; затем свет притягивается гравитационным полем линзы; после чего идет по прямой линии по направлению к Земле. Наименьшее собственное расстояние  $b$  этой траектории до линзы (которое, по предположению, много меньше космологического масштаба  $1/H_0$ ) равно

$$b = \beta d_y(EL), \quad (9.1.1)$$

где  $d_y(EL)$  является «расстоянием по угловому диаметру» до линзы, если смотреть с Земли. В разд. 1.4 обсуждалось, что в общем случае расстояние по угловому диаметру  $d_y(PQ)$  до точки  $Q$ , если смотреть из точки  $P$ , равно отношению  $h/\theta$  собственной длины  $h$  до  $Q$  (перпендикулярно линии  $PQ$ )

<sup>4)</sup> Здесь и далее, когда речь идет об «углах между изображениями», следует понимать, что это углы между направлениями к этим изображениям. — Прим. ред. перев.

к углу  $\theta$  между этой длиной и линией до точки  $P$ . Оно выражается в виде

$$d_y(PQ) = a(t_Q)r_P(Q), \quad (9.1.2)$$

где  $r_P(Q)$  — радиальная координата  $Q$  в системе координат Робертсона—Уокера с началом отсчета в точке  $P$  (в которой все световые лучи, входящие в  $P$ , являются прямыми линиями), а  $t_Q$  — момент времени, когда свет достигает точку  $Q$  или покидает ее. Из рис. 9.1 видно, что собственная длина  $c$  отрезка  $SX$  от истинного до видимого положения источника равна

$$\gamma d_y(LS) = c = (\beta - \alpha)d_y(ES), \quad (9.1.3)$$

где  $\gamma$  — угол отклонения светового луча вблизи линзы<sup>5)</sup>, если смотреть с линзы, значение которого в общей теории относительности задается выражением<sup>6)</sup>

$$\gamma = \frac{4MG}{b}, \quad (9.1.4)$$

а  $d_y(LS)$  и  $d_y(ES)$  — расстояния по угловому диаметру от источника до линзы и Земли соответственно. Из уравнений (9.1.1), (9.1.3) и (9.1.4) получаем, что

$$(\beta - \alpha)\beta = \frac{\gamma d_y(LS)}{d_y(ES)} \frac{b}{d_y(EL)} = \frac{4MGd_y(LS)}{d_y(ES)d_y(EL)} \equiv \beta_E^2. \quad (9.1.5)$$

Это и есть уравнение линзы. Оно является квадратным уравнением для  $\beta$ , два его решения задают направления двух изображений, на которые раздваивается точечный источник. Все эффекты крупномасштабной пространственно-временной геометрии и расширения Вселенной содержатся в расстояниях по угловому диаметру  $d_y(EL)$ ,  $d_y(ES)$  и  $d_y(LS)$ .

---

В общем случае они независимы; при  $K \neq 0$  соотношение

$$d_y(ES) = d_y(EL) + d_y(LS)$$

не выполняется.

---

Два корня уравнения линзы (9.1.5) равны

$$\beta_{\pm} = \frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta_E^2}. \quad (9.1.6)$$

Угол  $\alpha$  не наблюдается, потому что мы не можем сдвинуть линзу. Если все, что мы можем измерить, — это угол между двумя изображениями источника, то все, что мы можем получить, — это верхний предел на массу линзирующей галактики:

$$|\beta_+ - \beta_-|^2 \geq 4\beta_E^2. \quad (9.1.7)$$

<sup>5)</sup> Массой  $M$ . — Прим. ред. перев.

<sup>6)</sup> ГиК, разд. 8.5.

Например, если  $d_y(EL) = d_y(LS) = 100$  Мпк,  $d_y(ES) = 200$  Мпк и источники разделены на угол  $1''$ , то (вспоминая, что  $M_\odot G = 1475$  км и  $1$  Мпк =  $3,09 \times 10^{19}$  км), находим, что  $M \leq 6 \times 10^9$  солнечных масс.

С другой стороны, если наблюдаются линзирующая галактика и два изображения, то можно измерить углы  $\beta_{\pm}$  между каждым изображением и линзирующей галактикой, но если  $\alpha$  неизвестно, лучшее, что можно сделать с помощью уравнения (9.1.6), — это исключить  $\alpha$  перемножением углов:

$$\beta_+ \beta_- = -\beta_E^2. \quad (9.1.8)$$

---

Знак минус в точности означает, что два изображения находятся на противоположных сторонах линзирующей галактики.

---

Это позволяет вычислить массу  $M$ , однако если расстояния вычисляются на основании измерений красных смещений, то они пересасшиваются на  $1/H_0$ , и тогда на самом деле мы вычисляем величину  $MGH_0$ .

---

В разд. 1.9 было показано, что из дисперсий скоростей и расстояний по угловому диаметру также следует только значение  $MGH_0$ .

---

В специальном случае, когда линзирующая галактика располагается прямо на линии между источником и Землей, в задаче присутствует цилиндрическая симметрия вокруг луча зрения, в результате чего вместо пары изображений возникает *кольцо Эйнштейна*. Угловой радиус кольца Эйнштейна равен значению  $\beta$ , которое получается, если положить  $\alpha = 0$  в уравнении (9.1.5), поэтому он равен как раз углу  $\beta_E$ , именно поэтому он несет нижний индекс  $E$ . Кольца Эйнштейна наблюдались для нескольких радиоисточников, первым из которых был MG1131+0456<sup>7)</sup>.

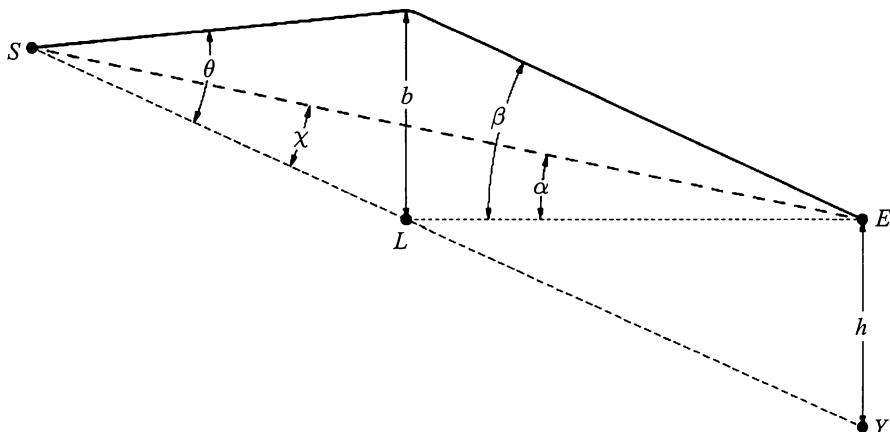
## 9.2

### Увеличение: сильное линзирование и микролинзирование

**Светимость изображения** • Сохранение поверхностной яркости • Эффективный радиус сильного линзирования • Численные расчеты • Модель де Ситтера • Модель Эйнштейна—де Ситтера • Обзор линз • Наблюдения микролинзирования

Не все различные изображения, порождаемые гравитационной линзой, будут иметь одинаковую видимую светимость. Видимая светимость равна мощности на единицу площади, поэтому сейчас нам нужно рассмотреть све-

<sup>7)</sup> G. H. Chen, C. S. Kochanek, and J. N. Hewitt, *Astrophys. J.* **447**, 62 (1995).



**Рис. 9.2.** Величины, рассматриваемые при выводе формулы увеличения (9.2.4). Изогнутоя сплошная линия — это траектория фотона от источника  $S$ , идущая мимо линзы  $L$  по направлению к точке  $E$  на зеркале телескопа. Точка  $Y$  фиксирована близи Земли на линии от источника сквозь линзу. Поперечные расстояния  $b$  и  $h$  от линзы до светового луча и от точки  $Y$  до точки  $E$  попадания фотона в зеркало телескопа сильно преувеличены, так же как и углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\chi$  и  $\theta$ . По аналогии с рис. 9.1 данный рисунок соответствует случаю  $K = 0$ ; в системе координат Робертсона—Уокера с началом отсчета на Земле траектория от источника до изгиба при  $|K| \neq 0$  будет искривлена

товые траектории, которые заканчиваются в различных точках принимающей поверхности телескопа. Для этой цели целесообразно рассматривать положения на принимающей поверхности по отношению к некоторой фиксированной точке  $Y$ , которую можно удобным образом расположить на оси симметрии данной задачи — на линии, идущей от точечного источника (или от светящейся точки на протяженном источнике) сквозь линзу по направлению к Земле (см. рис. 9.2). О расстоянии  $h$  до точки на зеркале телескопа вдоль этой линии можно думать как о функции угла  $\theta$ , который является углом в точке источника между световым лучом до точки на зеркале и фиксированной линией (в системе координат Робертсона—Уокера с началом отсчета в источнике), идущей от источника сквозь линзу. Доля света, излученного между полярными углами  $\theta$  и  $\theta + d\theta$  (при  $\theta \ll 1$ ) и азимутальными углами  $\phi$  и  $\phi + d\phi$  (измеренными в точке источника вокруг фиксированной линии, идущей к линзе) равна  $\theta d\theta d\phi/(4\pi)$ , а площадь принимающей поверхности, заключенная внутри прямоугольника высоты  $dh$  и ширины  $h d\phi$  равна  $h dh d\phi$ , поэтому видимая светимость равна

$$\ell = \left| \frac{L \theta d\theta d\phi / (4\pi)}{h dh d\phi (1 + z_S)^2} \right| = \frac{L}{4\pi(1 + z_S)^2} \left| \frac{\theta d\theta}{h dh} \right|. \quad (9.2.1)$$

Множитель  $(1 + z_S)^{-2}$  отвечает за уменьшение энергии отдельных фотонов и уменьшение частоты излучения источником фотонов.

Из рис. 9.2 видно, что

$$h = d_y(SE)\chi = \frac{d_y(SE)d_y(EL)\alpha}{d_y(SL)}, \quad (9.2.2)$$

где  $\chi$  равен углу между линией от источника до точки на зеркале и линией от источника до линзы, и

$$\theta = \frac{b}{d_y(SL)} = \frac{\beta d_y(EL)}{d_y(SL)}. \quad (9.2.3)$$

---

Так же как в разд. 9.1, для любых точек  $P$  и  $Q$ ,  $d_y(PQ)$  это расстояние по угловому диаметру до точки  $Q$ , если смотреть из точки  $P$ .

---

Тогда из уравнения (9.2.1) следует, что

$$\ell = \ell_0 \left| \frac{\beta d\beta}{\alpha d\alpha} \right|, \quad (9.2.4)$$

где  $\ell_0$  — светимость в отсутствие линзы:

$$\ell_0 = \frac{L}{4\pi(1+z_S)^2 d_y^2(SE)}. \quad (9.2.5)$$

---

Отметим, что  $r_S(E) = r_E(S)$ , поэтому из уравнения (9.1.2) следует, что

$$d_y(SE) = (1+z_S)d_y(ES).$$

Согласно уравнению (1.4.12), фотометрическое расстояние до источника, если смотреть с Земли, равно расстоянию

$$d_\phi(S) = (1+z_S)^2 d_y(ES) = (1+z_S)d_y(SE),$$

квадрат которого появляется в уравнении (9.2.5).

---

Уравнение (9.2.4) представляет собой весьма общий результат, применимый к линзам и источникам всех типов. Одно из его следствий особенно полезно в случае протяженных объектов. Если малая часть изображения такого источника образует телесный угол  $\beta\Delta\beta\Delta\phi$  и имеет видимую светимость  $\Delta\ell$ , то она обладает поверхностной яркостью равной  $\Delta\ell/(\beta\Delta\beta\Delta\phi)$ . Согласно уравнению (9.2.4), она равна  $\Delta\ell_0/(\alpha\Delta\beta\Delta\phi)$ , т. е. поверхностной яркости этой части изображения в отсутствие линзы. Таким образом, *линзование не меняет поверхностную яркость*. Разумеется, это происходит потому, что гравитационное линзование не меняет ни числа, ни энергии фотонов.

Теперь давайте сосредоточимся на случае точечной линзы. Тогда из уравнения линзы (9.1.5) следует, что

$$\alpha = \beta - \frac{\beta_E^2}{\beta}, \quad (9.2.6)$$

поэтому

$$\frac{\alpha d\alpha}{\beta d\beta} = 1 - \frac{\beta_E^4}{\beta^4}. \quad (9.2.7)$$

Отсюда получаем, что светимость (9.2.4) равна

$$\ell = \frac{\ell_0}{|1 - \beta_E^4/\beta^4|}. \quad (9.2.8)$$

Когда расстояние<sup>8)</sup>  $a$  до линзы от линии, соединяющей источник и наблюдателя, мало, то получаем  $\alpha \ll \beta_E$ , поэтому два решения (9.1.6) для  $\beta$  принимают вид

$$\beta_{\pm} \rightarrow \pm\beta_E + \frac{1}{2}\alpha. \quad (9.2.9)$$

В этом случае оба изображения усиливаются в  $|\beta_E/(2\alpha)|$  раз. С другой стороны, когда расстояние  $a$  до линзы от линии, соединяющей источник и наблюдателя, велико, то получаем  $\alpha \gg \beta_E$ , поэтому два решения (9.1.6) для  $\beta$  принимают вид

$$\beta_+ \rightarrow \alpha \gg \beta_E, \quad -\beta_- \rightarrow \frac{\beta_E^2}{\alpha} \ll \beta_E. \quad (9.2.10)$$

При этих условиях луч «–» становится невидимым, а луч «+» имеет нормальную яркость, ожидаемую в отсутствии гравитационного отклонения.

Тем самым, грубо говоря, точечная масса может приводить к заметному *сильному линзированию*, с более чем одним изображением, если выполняется  $\alpha \ll \beta_E$ , т. е. если линза находится на собственном расстоянии  $a_{\max}$  от линии между источником и наблюдателем, задаваемом

$$a_{\max} = \beta_E d_y(EL) = \sqrt{\frac{4MGd_y(LS)d_y(EL)}{d_y(ES)}}. \quad (9.2.11)$$

С помощью уравнения (9.1.2) это выражение преобразуется к виду

$$a_{\max} = \sqrt{\frac{4MGr_L(S)r_E(L)a(t_L)}{r_E(S)}} = \sqrt{\frac{4MGr_L(S)r_E(L)a(t_E)}{r_E(S)}} \frac{1}{\sqrt{1+z_L}}, \quad (9.2.12)$$

где  $t_E$  — момент времени достижения световым сигналом Земли (везде в этой книге обозначался как  $t_0$ ), а  $z_L$  — это красное смещение линзы,

$$1+z_L \equiv \frac{a(t_E)}{a(t_L)}. \quad (9.2.13)$$

Радиальная координата  $r_L(S)$  источника в системе координат Робертсона—Уокера с началом отсчета в линзе может быть вычислена в терминах радиаль-

<sup>8)</sup> Здесь  $a$  — это собственное расстояние, поперечное к лучу зрения, и никак не связано с масштабным фактором Робертсона—Уокера, который в текущем разделе будет всегда записываться с временным аргументом как  $a(t)$ .

ных координат источника и линзы в системе координат Робертсона—Уокера с началом отсчета на Земле с помощью условия, что трехмерные *собственные* расстояния между источником и линзой в двух данных системах координат равны

$$\int_0^{r_L(S)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = \int_{r_E(L)}^{r_E(S)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}. \quad (9.2.14)$$

Отсюда следует, что

$$r_L(S) = r_E(S) \sqrt{1 - Kr_E^2(L)} - r_E(L) \sqrt{1 - Kr_E^2(S)}. \quad (9.2.15)$$

Если в момент времени  $t$  есть  $n(t, M)$  объектов, приходящихся на собственный объем со значением массы, лежащим между  $M$  и  $M + dM$ , то (с помощью уравнения (1.1.12)) полное число объектов, которые могут привести к измеряемому раздвоению изображения источника  $S$ , равно

$$\begin{aligned} N_S &= \int_0^{r_E(S)} \frac{dr_E(L) a(t_L)}{\sqrt{1 - Kr_E^2(L)}} \int_0^\infty \pi a_{\max}^2 n(t_L, M) dM = \\ &= 4\pi G a^2(t_E) \int_0^{r_E(S)} \frac{dr_E(L) \rho(t_L)}{(1 + z_L)^2 \sqrt{1 - Kr_E^2(L)}} \frac{r_L(S) r_E(L)}{r_E(S)}, \end{aligned} \quad (9.2.16)$$

где  $t_L$  — момент времени, в который свет от источника достигает линзы, а  $\rho(t)$  — плотность массы возможных линз в момент времени  $t$ ,

$$\rho(t) \equiv \int_0^\infty n(t, M) M dM. \quad (9.2.17)$$

Помимо этого, в подынтегральном выражении  $r_E(L)$  и  $t_L$ , как обычно, связаны соотношением

$$\int_0^{r_E(L)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = \int_{t_L}^{t_E} \frac{dt}{a(t)}, \quad (9.2.18)$$

и  $1 + z_L \equiv a(t_E)/a(t_L)$ . Если эволюции плотности линзирующих галактик не происходит, то  $\rho(t_L) = \rho(t_E)(1 + z_L)^3$ , и уравнение (9.2.16) принимает вид

$$N_S = 4\pi G a^2(t_E) \rho(t_E) \int_0^{r_E(S)} \frac{dr_E(L)(1 + z_L)}{\sqrt{1 - Kr_E^2(L)}} \left( \frac{r_L(S) r_E(L)}{r_E(S)} \right). \quad (9.2.19)$$

При  $N_S \ll 1$  возможностью многократного линзирования можно пренебречь, и интерпретировать  $N_S$  как вероятность того, что образ источника  $S$  был существенно изменен линзой поблизости от луча зрения.

Для источников с  $z_S \ll 1$ , уравнение (9.2.19) упрощается

$$\begin{aligned} N_S &= 4\pi G a^2(t_E) \rho(t_E) \int_0^{r_E(S)} dr_E(L) \left( \frac{(r_E(S) - r_E(L)) r_E(L)}{r_E(S)} \right) = \\ &= \frac{2\pi G r_E^2(S) a^2(t_E) \rho(t_E)}{3} = \frac{2\pi G z_S^2 \rho(t_E)}{3H_0^2} = \frac{z_S^2 \Omega_L}{4}, \end{aligned} \quad (9.2.20)$$

где  $\Omega_L \equiv 8\pi G \rho(t_E)/(3H_0^2)$  — доля критической массы, которая в настоящее время содержится в линзирующих объектах. Видим, что даже для  $\Omega_L$ , со-поставимого с  $\Omega_m \approx 0,3$ , вероятность сильного линзирования мала для расположенных поблизости источников с  $z_S \ll 1$ , однако вероятность должна становиться ощутимой для источников на космологических масштабах<sup>9)</sup>.

Для  $z_S$  порядка единицы и более вероятность сильного линзирования оказывается существенным образом зависящей от выбранной космологической модели. Поскольку интеграл (9.2.19) в общем случае достаточно сложен, то здесь мы рассмотрим лишь два крайних случая плоской Вселенной, заполненной в основном либо вакуумной энергией, либо нерелятивистским веществом.

**Модель де Ситтера** ( $\Omega_\Lambda = 1$ ,  $\Omega_K = \Omega_m = \Omega_u = 0$ )

Здесь

$$\frac{a(t)}{a(t_E)} = \exp [H_0(t - t_E)],$$

поэтому

$$r_E(L) = \int_{t_L}^{t_E} \frac{dt}{a(t)} = \frac{1}{a(t_E) H_0} \{ \exp [H_0(t_E - t_L)] - 1 \}.$$

Это выражение можно обратить и найти

$$a(t_L) = \frac{a(t_E)}{1 + a(t_E) H_0 r_E(L)}.$$

Тогда уравнение (9.2.19) принимает вид

$$N_S = 4\pi G \rho(t_E) a^2(t_E) \int_0^{r_E(S)} \left( \frac{r_E(L)(r_E(S) - r_E(L))}{r_E(S)} \right) (1 + a(t_E) H_0 r_E(L)) dr_E(L).$$

<sup>9)</sup> W. H. Press and J. E. Gunn, *Astrophys. J.* **185**, 397 (1973).

Удобно заменить переменную интегрирования  $r_E(L)$  на красное смещение линзы  $z_L$ , которое задается выражением

$$z_L = \left( \frac{a(t_E)}{a(t_L)} \right) - 1 = a(t_E) H_0 r_E(L),$$

поэтому

$$\begin{aligned} N_S &= \frac{4\pi G\rho(t_E)}{H_0^2} \int_0^{z_S} \left( \frac{z_L(z_S - z_L)}{z_S} \right) (1 + z_L) dz_L = \\ &= \frac{\pi G\rho(t_E)}{3H_0^2} (z_S^3 + 2z_S^2) = \frac{\Omega_L}{8} (z_S^3 + 2z_S^2). \end{aligned} \quad (9.2.21)$$

**Модель Эйнштейна–де Ситтера** ( $\Omega_M = 1$ ,  $\Omega_K = \Omega_\Lambda = \Omega_i = 0$ )

Здесь

$$a(t) = a(t_E) \left( \frac{t}{t_E} \right)^{2/3} \quad \text{и} \quad 1 + z_L = \left( \frac{t_E}{t_L} \right)^{2/3},$$

поэтому

$$r_E(L) = \int_{t_L}^{t_E} \frac{dt}{a(t)} = 3a^{-1}(t_E)(t_E - t_E^{2/3}t_L^{1/3}) = 3a^{-1}(t_E)t_E(1 - (1 + z_L)^{-1/2}).$$

Тогда величина (9.2.19) в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} N_S &= \frac{18\pi G\rho(t_E)t_E^2}{1 - (1 + z_S)^{-1/2}} \times \\ &\times \int_0^{z_S} dz_L (1 - (1 + z_L)^{-1/2})(1 + z_L)^{-1/2} ((1 + z_L)^{-1/2} - (1 + z_S)^{-1/2}) = \\ &= \frac{8\pi G\rho(t_E)}{H_0^2} \left( -4 + \frac{\sqrt{1 + z_S} + 1}{\sqrt{1 + z_S} - 1} \ln(1 + z_S) \right) = \\ &= 3\Omega_L \left( -4 + \frac{\sqrt{1 + z_S} + 1}{\sqrt{1 + z_S} - 1} \ln(1 + z_S) \right). \end{aligned} \quad (9.2.22)$$

Она растет как  $z_S^2$  при  $z_S \ll 1$ , в соответствии с уравнением (9.2.20), но при  $z_S \gg 1$  выпрямляется и растет относительно  $z_S$  только логарифмически.

Мы видим, что возможность того, что заданный источник будет линзирован, возрастает значительно более быстро с красным смещением источника в модели с преобладанием вакуумной энергии, чем для модели с преобладанием

вещества. Например, при  $z_S = 2$  из уравнения (9.2.21) в случае модели с преобладанием вакуумной энергии следует  $N_S = 2\Omega_L$ , а из уравнения (9.2.22) в случае модели с преобладанием вещества следует  $N_S = 0,30\Omega_L$ .

Сопоставление теории линзирования (предполагается, что  $K = 0$  и вакуумная энергия постоянна) с плотностью числа сильных гравитационных линз, измеряемой в Cosmic Lens All Sky Survey<sup>10)</sup> в виде функции от красного смещения, привело к следующему результату:

$$\Omega_m = 0,31^{+0,27}_{-0,14} \text{ (68% стат.) } ^{+0,12}_{-0,1} \text{ (систем.)}.$$

Пока его трудно сравнивать с другими измерениями  $\Omega_m$ , однако он определенно свидетельствует в пользу влияния темной энергии на число наблюдаемых сильных линз.

Предположение о том, что линзы приближенно можно считать точечными массами, подходит в случае так называемого микролинзирования звездами внутри нашей Галактики. Отметим, что при  $d_y(EL) \approx 10^3$  пк,  $d_y(LS) \approx d_y(ES)$  и  $MG \approx 1$  км  $\approx 3 \times 10^{-14}$  пк, эффективный радиус

$$\sqrt{\frac{4MGd_y(EL)d_y(LS)}{d_y(ES)}}$$

точечной массивной линзы по порядку величины равен  $10^{-5}$  пк, что значительно больше даже размера крупной звезды. Как правило, в наблюдениях по микролинзированию изменение в светимости удаленного точечного источника (например, звезда за пределами нашей Галактики) фиксируется по мере того, как источник смещается от луча зрения, проведенного к нему. Для звезды, которая движется со скоростью 100 км/с в поперечном к лучу зрения направлении, время, в течение которого источник будет находиться внутри эффективного радиуса  $10^{-5}$  пк звезды, составляет примерно месяц, что очень удобно при отслеживании изменений видимой светимости. Коллаборацией MACHO<sup>11)</sup> наблюдалось от 13 до 17 микролинзирующих событий в направлении Большого Магелланового облака (БМО), и еще три события наблюдались коллаборацией EROS<sup>12)</sup> в направлении менее заселенных областей БМО. Из них были отождествлены только четыре линзы, и все они находятся непосредственно в БМО, а не в гало нашей Галактики<sup>13)</sup>. Этот факт не может служить доказательством, но тем не менее является указанием на то, что масса гало нашей Галактики не содержит темных объектов с массами ти-

<sup>10)</sup> K.-H. Chae *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 151301 (2002) [astro-ph/0209602].

<sup>11)</sup> C. Alcock *et al.*, *Astrophys. J.* **542**, 281 (2000).

<sup>12)</sup> T. Lamerre *et al.*, *Astron. and Astrophys.* **355**, L39 (2000).

<sup>13)</sup> N. W. Evans, in *IDM 2002: The 4th International Workshop on the Identification of Dark Matter*, eds. N. Spooner and V. Kudryavtsev (World Scientific) [astro-ph/0211302].

личных звезд<sup>14)</sup>. Микролинзирование также интенсивно использовалось для поиска темных звезд и планет в других солнечных системах коллаборацией Microlensing Observations in Astrophysics<sup>15)</sup> и коллаборацией Optical Gravitational Lensing Experiment<sup>16)</sup>.

## 9.3

### Протяженные линзы

**Уравнение линзы • Светимость линзы • Численные расчеты • Обзоры**

Модель точечного источника совершенно не применима в случае галактических скоплений и лишь частично справедлива для отдельных галактик.

---

Отметим, что при  $d_y(EL) \approx 10^{10}$  пк,  $d_y(ES) \approx 2 \times 10^{10}$  пк и  $MG \approx 10^{12}$  км  $\approx 0,03$  пк эффективный радиус  $\sqrt{4MGd_y(EL)d_y(ES)/d_y(ES)}$  точечной массивной линзы по порядку величины равен  $5 \times 10^4$  пк, что сопоставимо с размерами сферического гало нашей собственной Галактики.

---

При рассмотрении проходящих сквозь галактику световых лучей массивные гало этих галактик теперь, как правило, приближенно описывают в виде сфер, заполненных веществом, находящимся в «изотермическом» равновесии, когда отношение давления  $p$  к плотности массы  $\rho$  задается средним квадратом  $\langle v^2 \rangle$  любой из компонент скорости звезды, которые, как предполагается, равны для всей линзы:

$$p(r) = \rho(r)\langle v^2 \rangle. \quad (9.3.1)$$

В разд. 1.9 мы уже видели, что решение уравнений гидростатического равновесия с учетом данного уравнения состояния ведет себя при больших собственных расстояниях  $r$  от центра линзы по закону

$$\rho(r) = \frac{2\rho(0)}{9(r/r_0)^2} = \frac{\langle v^2 \rangle}{2\pi Gr^2}, \quad (9.3.2)$$

откуда следует, что масса, содержащаяся внутри сферы радиуса  $r$ , равна

$$\mathcal{M}(r) = \frac{2r\langle v^2 \rangle}{G}. \quad (9.3.3)$$

---

<sup>14)</sup> См. обсуждение этого вопроса в A. F. Zakharov, *Publ. Astron. Obs. Belgrade* **74**, 1 (2002) [astro-ph/0212009]; K. C. Sahu, proceedings of the STSci symposium *Dark Universe: Matter, Energy, and Gravity* [astro-ph/0302325].

<sup>15)</sup> P. Yock *et al.*, Proceedings of the ninth Marcel Grossman meeting, Rome, July 2000 [astro-ph/0007317].

<sup>16)</sup> A. Udalski *et al.*, *Acta Astron.* **54**, 313 (2004) [astro-ph/0411543].

При малых  $r$  полученное решение отклоняется от этого выражения, однако большая часть массы линзы сосредоточена на таких расстояниях от центра, где это приближение справедливо.

Скорость изменения единичного вектора  $\hat{\mathbf{u}}$ , задающего направление светового луча в гравитационном поле  $\mathbf{g} = -\nabla\phi$ , определяется в рамках постньютоновского приближения соотношением<sup>17)</sup>

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt} = -2\hat{\mathbf{u}} \times (\hat{\mathbf{u}} \times \mathbf{g}). \quad (9.3.4)$$

Для любого сферически симметричного нерелятивистского распределения вещества имеем закон

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{GM(r)}{r^3}\mathbf{r}, \quad (9.3.5)$$

который для внешних частей изотермальной сферы принимает вид

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\frac{2\langle v^2 \rangle}{r^2}\mathbf{r}. \quad (9.3.6)$$

Для светового луча, проходящего от центра линзы на минимальном расстоянии  $b$ , направление светового луча  $\hat{\mathbf{u}}$  остается очень близким к фиксированному направлению. Тогда величина малого изменения в направлении равна

$$\gamma = 4\langle v^2 \rangle \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b \, dx}{x^2 + b^2} = 4\pi\langle v^2 \rangle \quad (9.3.7)$$

и не зависит от  $b$ .

---

Скорость света берется равной единице, так что  $\langle v^2 \rangle^{1/2}$  безразмерно и равно среднеквадратичной скорости в единицах скорости света.

---

Данное изменение направлено к центру линзы, поэтому свет может прийти на Землю от источника вдоль двух разных траекторий, проходящих по разные стороны от центра линзы и разделенных на угол  $8\pi\langle v^2 \rangle$ . Луч «+», проходящий линзу со стороны источника, на Земле образует угол  $\beta_+$  с лучом Земля — линза, опять задаваемый уравнением (9.1.3), а луч «-» образует угол  $\beta_-$  с лучом от Земли до линзы (выбранный здесь положительным), получаемый заменой  $\alpha$  на  $-\alpha$  в уравнении (9.1.3), поэтому справедливо соотношение

$$\gamma d_y(LS) = (\beta_{\pm} \mp \alpha) d_y(ES), \quad (9.3.8)$$

которое совместно с (9.3.7) приводит к уравнению линзы:

$$\beta_{\pm} = \pm\alpha + \beta_E, \quad (9.3.9)$$

---

<sup>17)</sup> Например, см. ГиК, формула (9.2.7). Здесь вставлен фактор  $-2$ , отсутствующий в правой части этого уравнения.

где теперь

$$\beta_E = \frac{4\pi \langle v^2 \rangle d_y(LS)}{d_y(ES)}. \quad (9.3.10)$$

Для линзы, расположенной на луче зрения от Земли до источника, опять имеем  $\alpha = 0$ , и два изображения образуют кольцо Эйнштейна углового радиуса  $\beta_E$ . Так как теперь мы определили  $\beta_{\pm}$  положительным, то два изображения следуют из уравнения линзы, только если выполняется неравенство  $\alpha < \beta_E$ , которое требует, чтобы собственное расстояние  $a = d_y(EL)\alpha$  линзы до линии между Землей и источником было меньше максимального значения

$$a_{\max} = \beta_E d_y(EL) = \frac{4\pi \langle v^2 \rangle d_y(LS) d_y(EL)}{d_y(ES)}. \quad (9.3.11)$$

Увеличение двух изображений опять задается уравнением (9.2.4):

$$\ell = \ell_0 \left| \frac{\beta d\beta}{\alpha d\alpha} \right|,$$

но теперь необходимо воспользоваться уравнением линзы (9.3.9), из которого следует

$$\ell_{\pm} = \ell_0 \left| \frac{\beta_{\pm}}{\alpha} \right| = \ell_0 \left| \frac{\beta_{\pm}}{\beta_{\pm} - \beta_E} \right|. \quad (9.3.12)$$

Увеличение становится бесконечным при приближении линзы к лучу зрения между Землей и источником; в этом случае  $\alpha \rightarrow 0$ ,  $\beta_{\pm} \rightarrow \beta_E$ , и пара изображений превращается в кольцо Эйнштейна. С другой стороны, когда линза приближается к максимальному расстоянию (9.3.11) от линии Земля-источник, получаем, что  $\alpha \rightarrow \beta_E$ , поэтому  $\beta_{+} \rightarrow 2\alpha$  и  $\beta_{-} \rightarrow 0$ . Согласно уравнению (9.3.12), в этом пределе луч «--» исчезает, а видимая светимость луча «+» удваивается.

Тогда число возможных изотермических сферических линз, которые действительно могут раздвоить изображение точечного источника, задается выражением

$$\begin{aligned} N_S &= \int_0^{r_E(S)} \frac{dr_E(L) a(t_L)}{\sqrt{1 - Kr_E^2(L)}} \pi a_{\max}^2 n(t_L) = \\ &= 16\pi^3 \langle v^2 \rangle^2 \int_0^{r_E(S)} dr_E(L) \frac{n(t_L) a^3(t_L)}{\sqrt{1 - Kr_E^2(L)}} \left( \frac{r_L(S) r_E(L)}{r_E(S)} \right)^2, \end{aligned} \quad (9.3.13)$$

где  $n(t)$  — плотность собственного числа этих линз в момент времени  $t$ . Здесь для простоты  $\langle v^2 \rangle$  было выбрано равным для всех линз. Если теперь еще положить  $K = 0$ , так что из уравнения (9.2.15) получается  $r_S(L) = r_E(S) - r_E(L)$ ,

а также предположить отсутствие эволюции популяции линзирующих галактик, так что  $n(t)a^3(t)$  остается постоянной, то тогда

$$N_S = 16\pi^3 \langle v^2 \rangle^2 n(t_E) a(t_E)^3 \int_0^{r_E(S)} \left( \frac{(r_E(S) - r_E(L)) r_E(L)}{r_E(S)} \right)^2 dr_E(L) = \\ = \frac{8\pi^3 \langle v^2 \rangle^2 n(t_E) a(t_E)^3 r_E^3(S)}{15} = \frac{8\pi^3 \langle v^2 \rangle^2 n(t_E)}{15 H_0^3} \mathcal{F}(z_S), \quad (9.3.14)$$

где

$$\mathcal{F}(z) \equiv (a(t_E) H_0 r_E(S))^3 = \left( \int_1^{1+z} \frac{dy}{\sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_M y^3 + \Omega_i y^4}} \right)^3. \quad (9.3.15)$$

Отсюда следует, что вероятность того, что источник окажется линзирован, сильно зависит от  $\Omega_\Lambda$ . Например, для  $\Omega_\Lambda = \Omega_i = 0$  и  $\Omega_M = 1$  получаем функцию

$$\mathcal{F}(z) = 8 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}} \right)^3,$$

которая при больших  $z$  стремится к 8, а для  $\Omega_M = \Omega_i = 0$  и  $\Omega_\Lambda = 1$  получаем  $\mathcal{F}(z) = z^3$ . Вероятность линзирования источника с красным смещением  $z = 3$  в 27 раз больше, если основной вклад в плотность энергии во Вселенной обеспечивается вакуумной энергией, чем в случае, когда основной вклад идет от вещества. Из прямых наблюдений галактик константа в уравнении (9.3.14) была оценена как<sup>18)</sup>

$$\frac{8\pi^3 \langle v^2 \rangle^2 n(t_E)}{15 H_0^3} \simeq 0,02, \quad (9.3.16)$$

так что для  $\Omega_M = \Omega_i = 0$  и  $\Omega_\Lambda = 1$  вероятность линзирования должна при  $z \approx 3,7$  становиться большой.

Вероятности линзирования квазаров с большими красными смещениями могут привести к точным пределам на  $\Omega_\Lambda$ <sup>19)</sup>. Когда-то, исходя из полученных в ранних обзорах данных, считалось, что статистика по сильному линзированию исключила возможность того, что постоянная вакуумная энергия дает основной вклад в происхождение пространственно плоской Вселенной<sup>20)</sup>. С тех пор много групп провели подобные исследования, с учетом поправок к конечному радиусу ядра, эффектам отбора и т. д., с целью установления пределов на  $\Omega_\Lambda$  в плоских космологиях с  $\Omega_\Lambda + \Omega_M = 1$ . Было обнаружено,

<sup>18)</sup> E. L. Turner, J. P. Ostriker, and J. R. Gott, *Astrophys. J.* **284**, 1 (1984).

<sup>19)</sup> E. L. Turner, *Astrophys. J.* **242**, L135 (1980).

<sup>20)</sup> E. L. Turner, *Astrophys. J.* **365**, L43 (1990).

что  $\Omega_\Lambda < 0,9$ <sup>21)</sup>,  $\Omega_\Lambda < 0,7$ <sup>22)</sup>,  $\Omega_\Lambda = 0,64^{+0,15}_{-0,26}$ <sup>23)</sup>,  $\Omega_\Lambda < 0,74$ <sup>24)</sup>,  $\Omega_\Lambda < 0,79$ <sup>25)</sup>,  $\Omega_\Lambda = 0,7^{+0,1}_{-0,2}$ <sup>26)</sup> и  $\Omega_\Lambda \approx 0,45 - 0,75$ <sup>27)</sup>.

Отклонение  $\Delta\theta$ , вычисленное в модели изотермической сферы для гравитационных линз, существенно, только если траектория света действительно проходит сквозь сферу. В случае галактик с относительно малыми массами может так случиться, что один или оба отклоненных луча будут проходить вне сферы галактического радиуса  $R$ . Отклонение света зависит только от ньютонаовского гравитационного потенциала, и, как было показано Ньютоном, гравитационный потенциал вне сферически симметричного распределения вещества таков, как будто вся масса сосредоточена в центре симметрии, поэтому движение светового луча за пределами галактики описывается моделью точечной массивной линзы, рассмотренной ранее. Если световой луч проходит на расстоянии, сильно превышающем эффективный радиус галактики, то возникает так называемое *слабое линзирование*, которое, как правило, обнаруживается статистически, не изучением отдельных источников, а посредством рассмотрения корреляций ориентаций изображений нескольких линзированных галактик. Этот вопрос будет изучаться в разд. 9.5.

## 9.4

### Задержка во времени

#### Геометрическая задержка • Потенциальная задержка • Наблюдения

Помимо того, что гравитационные поля промежуточных объектов изгибают световые лучи, происходит еще и задержка во времени<sup>28)</sup>, так что флюктуация удаленного источника света проявляется на Земле в разные моменты времени в виде нескольких линзированных изображений источника<sup>29)</sup>. Здесь имеется два эффекта.

<sup>21)</sup> M. Fukugita and E. L. Turner, *Mon. Not. Royal Astron. Soc.* **253**, 99 (1991).

<sup>22)</sup> D. Maoz and H-W. Rix, *Astrophys. J.* **416**, 425 (1993).

<sup>23)</sup> M. Im, R. E. Griffiths, and K. U. Ratnatunga, *Astrophys. J.* **475**, 457 (1997).

<sup>24)</sup> E. E. Falco, C. S. Kochanek, and J. A. Muñoz, *Astrophys. J.* **494**, 47 (1998).

<sup>25)</sup> A. R. Cooray, J. M. Quashnock, and M. C. Miller, *Astrophys. J.* **511**, 562 (1999) [astro-ph/9806080]; A. R. Cooray, *Astron. Astrophys.* **342**, 353 (1999) [astro-ph/9811448].

<sup>26)</sup> M. Chiba and Y. Yoshii, *Astrophys. J.* **510**, 42 (1999) [astro-ph/9808321].

<sup>27)</sup> Y-C. N. Cheng and L. M. Krauss, *Astrophys. J.* **511**, 612 (1999) [astro-ph/9810392].

<sup>28)</sup> Задержка во времени радарных отражений от планет и радиосигналов от искусственных спутников, вызванная гравитационным потенциалом Солнца, стала четвертым тестом общей теории относительности, как впервые предлагалось в работе I. Shapiro, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 789 (1964). См. обсуждение этого вопроса в ГИК, разд. 8.7.

<sup>29)</sup> S. Refsdal, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **128**, 307 (1964).

Во-первых, существует *геометрическая задержка во времени*, вызванная увеличением длины полной траектории света от источника к Земле. Поскольку она возникает на очень больших расстояниях, ее можно вычислить, если воспользоваться идеализированным представлением, что световая кривая является геодезической в метрике Робертсона—Уокера, идущей от источника в точку  $P$  наименьшего расстояния до линзы, где свет преломляется и следует из этой точки до Земли вдоль аналогичной геодезической. Момент времени  $t_E$ , в который свет, испущенный источником в момент времени  $t_S$ , приходит на Землю, задается выражением

$$\int_{t_S}^{t_E} \frac{dt}{a(t)} = \sigma_{SP} + \sigma_{PE}, \quad (9.4.1)$$

где  $\sigma_{SP}$  и  $\sigma_{PE}$  это собственные длины (интегралы от  $(\tilde{g}_{ij} dx^i dx^j)^{1/2}$ ) вдоль траекторий соответственно от источника до точки  $P$  и от точки  $P$  до Земли. Тогда момент времени  $t_{E0}$ , в который свет приходит на Землю в отсутствие гравитационного отклонения задается выражением

$$\int_{t_S}^{t_{E0}} \frac{dt}{a(t)} = \sigma_{SE}, \quad (9.4.2)$$

где  $\sigma_{SE}$  — собственная длина геодезической от источника до Земли. Отсюда следует, что геометрическая задержка во времени (которая всегда очень мала по сравнению с хаббловским временем) равна

$$\Delta t_{\text{ geom}} \equiv t_E - t_{E0} = a(t_E)(\sigma_{SP} + \sigma_{PE} - \sigma_{SE}). \quad (9.4.3)$$

Теперь легко вычислить собственные длины геодезических, заканчивающихся на Земле:

$$\sigma_{SE} = \int_0^{r_E(S)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}, \quad \sigma_{PE} = \int_0^{r_E(P)} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}}, \quad (9.4.4)$$

где  $r_E(S)$  и  $r_E(P)$  — обычные радиальные координаты источника  $S$  и точки  $P$  в системе координат Робертсона—Уокера с началом отсчета на Земле, в которой световой луч проходит на минимальном расстоянии от линзы. Для вычисления  $\sigma_{SP}$  необходимо проделать дополнительную работу. С помощью уравнения (1.1.17) для пространственной части аффинной связности  $\Gamma_{jl}^i$  мы получаем, что уравнение (1.1.26) для пространственных координат геодезической имеет вид

$$\frac{d^2 x^i}{d\sigma^2} + Kx^i = 0. \quad (9.4.5)$$

Его общее решение равно

$$x^i(\sigma) = \begin{cases} A^i \cos \sigma + B^i \sin \sigma, & K = +1, \\ A^i + B^i \sigma, & K = 0, \\ A^i \operatorname{ch} \sigma + B^i \operatorname{sh} \sigma, & K = -1, \end{cases} \quad (9.4.6)$$

где  $A^i$  и  $B^i$  — константы, характеризующие разные траектории. Они подчиняются условию нормировки

$$1 = \tilde{g}_{ij} \frac{dx^i}{d\sigma} \frac{dx^j}{d\sigma} = \left( \frac{d\mathbf{x}}{d\sigma} \right)^2 + K \frac{(\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}/d\sigma)^2}{1 - K\mathbf{x}^2},$$

из которого следует, что

$$(1 - KA^2)(1 - \mathbf{B}^2) = K(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^2. \quad (9.4.7)$$

Константы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  для геодезической от источника до точки  $P$  можно определить, потребовав  $x^i(0) = r_E(S)\hat{n}_{ES}$  и  $x^i(\sigma_{SP}) = r_E(P)\hat{n}_{EP}$ , где  $\hat{n}_{ES}$  и  $\hat{n}_{EP}$  — единичные векторы от Земли до источника или точки  $P$  соответственно. Тогда учет условия нормировки (9.4.7) дает

$$\sigma_{SP} = \begin{cases} \cos^{-1} [r_E(P)r_E(S)\cos\theta + \sqrt{1 - r_E(P)^2}\sqrt{1 - r_E(S)^2}], & K = +1, \\ \sqrt{r_E^2(P) + r_E^2(S) - 2r_E(P)r_E(S)\cos\theta}, & K = 0, \\ \operatorname{ch}^{-1} [-r_E(P)r_E(S)\cos\theta + \sqrt{1 + r_E(P)^2}\sqrt{1 + r_E(S)^2}], & K = -1, \end{cases} \quad (9.4.8)$$

где  $\theta$  — угол между направлениями от Земли к источнику и от Земли до точки  $P$ . Данный результат применим к треугольнику, составленному из геодезических с произвольными углами, но нас, конечно же, интересует случай, когда  $\theta$  очень мал. Тогда уравнение (9.4.8) принимает вид

$$\sigma_{SP} = \begin{cases} \sigma_{ES} - \sigma_{EP} + \frac{r_E(P)r_E(S)\theta^2}{2 \sin(\sigma_{ES} - \sigma_{EP})}, & K = +1, \\ \sigma_{ES} - \sigma_{EP} + \frac{r_E(P)r_E(S)\theta^2}{2(r_E(S) - r_E(P))}, & K = 0, \\ \sigma_{ES} - \sigma_{EP} + \frac{r_E(P)r_E(S)\theta^2}{2 \operatorname{sh}(\sigma_{ES} - \sigma_{EP})}, & K = -1. \end{cases}$$

Во вкладах, пропорциональных  $\theta^2$ , удалением линзы от точки  $P$  минимального расстояния можно пренебречь, считая  $r_E(P) = r_E(L)$ ;  $\theta = \beta - \alpha$ ; и (с помощью уравнения (9.2.14))  $\sigma_{ES} - \sigma_{EP} = \sigma_{LS}$ , с ошибками, которые будут

содержать вклады старших порядков по  $\theta$ . Таким образом, во всех трех случаях

$$\sigma_{SP} = \sigma_{ES} - \sigma_{EP} + \frac{r_E(L)r_E(S)\theta^2}{2r_L(S)}. \quad (9.4.9)$$

Отсюда следует, что геометрическая задержка во времени (9.4.3) равна

$$\Delta t_{\text{геом}} = \frac{a(t_E)r_E(L)r_E(S)(\beta - \alpha)^2}{2r_L(S)}. \quad (9.4.10)$$

С помощью уравнения (9.1.2) это выражение можно записать в терминах расстояний по угловому диаметру и красного смещения линзы:

$$\Delta t_{\text{геом}} = \frac{(1 + z_L)d_y(EL)d_y(ES)(\beta - \alpha)^2}{2d_y(LS)}. \quad (9.4.11)$$

Подробности устройства линзы учитываются здесь только посредством уравнения линзы, которое для каждого изображения выражает ненаблюдаемый угол  $\alpha$  в терминах наблюдаемого угла  $\beta$ .

Существует также потенциальная задержка во времени, непосредственно вызванная движением света сквозь гравитационный потенциал линзы. Вычисление этих временных расхождений происходит, как правило, последовательным рассмотрением имеющихся случаев, с помощью подробных моделей линзирующей галактики, а не путем использования приближения точечного источника или модели изотермической сферы. Здесь мы рассматриваем только случай произвольных сферически симметричных линз. В системе координат с началом отсчета в линзе, с линейным элементом «стандартного» вида

$$d\tau^2 = B(r) dt^2 - A(r) dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (9.4.12)$$

временной интервал, необходимый свету, чтобы распространиться с большого расстояния  $r$  до минимального расстояния  $b$  от линзы после чего вернуться обратно на расстояние  $r$ , равен<sup>30)</sup>

$$2t(r, b) = 2 \int_b^r \left( \frac{A(r)/B(r)}{1 - (b/r)^2(B(r)/B(b))} \right)^{1/2} dr. \quad (9.4.13)$$

Для рассматриваемых здесь слабых гравитационных полей можно воспользоваться постニュтоновским приближением<sup>31)</sup>, из которого следует

$$A(r) = 1 + 2r\phi'(r), \quad B(r) = 1 + 2\phi(r), \quad (9.4.14)$$

<sup>30)</sup> ГиК, формула (8.7.2).

<sup>31)</sup> ГиК, формулы (9.1.57) и (9.1.60). Необходимо переопределить радиальную координату для того, чтобы привести задаваемый постニュтоновским приближением линейный элемент к виду (9.4.12).

где  $\phi(r)$  — ньютоновский гравитационный потенциал. Тогда в первом порядке по  $\phi$  получаем

$$\begin{aligned} 2t(r, b) = & 2\sqrt{r^2 - b^2} + 2 \int_b^r \left(1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2\right)^{-1/2} (r\phi'(r) - \phi(r)) dr + \\ & + 2 \int_b^r \left(1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2\right)^{-3/2} \left(\frac{b}{r}\right)^2 (\phi(r) - \phi(b)) dr. \end{aligned} \quad (9.4.15)$$

Нас будет интересовать случай  $r \rightarrow \infty$ , потому что эффекты конечных расстояний между линзой, источником и Землей уже учтены в геометрической задержке во времени. Второй интеграл в (9.4.15) сходится при  $r \rightarrow \infty$ , но при этом первый интеграл расходится. Замечая, что для любого типа линз массы  $M$  ньютоновский потенциал на больших расстояниях изменяется по закону  $-MG/r$ , предел выражения (9.4.15) при  $r \rightarrow \infty$  можно привести к виду

$$2t(t, b) \rightarrow 2r + 2MG \ln(2r) + f(b), \quad (9.4.16)$$

где

$$\begin{aligned} f(b) = & -2MG \ln b + 2 \int_b^\infty \left(1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2\right)^{-1/2} \left(r\phi'(r) - \phi(r) - \frac{2MG}{r}\right) dr + \\ & + 2 \int_b^\infty \left(1 - \left(\frac{b}{r}\right)^2\right)^{-3/2} \left(\frac{b}{r}\right)^2 (\phi(r) - \phi(b)) dr. \end{aligned} \quad (9.4.17)$$

Два первых слагаемых в (9.4.16) расходятся при  $r \rightarrow \infty$ , однако они не зависят от  $b$ , поэтому при вычислении разницы во времени между приходом флюктуаций в различные изображения источника требуется учитывать только разницу в  $f(b)$  при разных значениях  $b$ . Однако это приведет к задержке во времени в метрике (9.4.12), которая отображается на часах, расположенных достаточно далеко от линзы, чтобы пренебречь ее гравитационным потенциалом, но достаточно близко, чтобы не учитывать эффекты космологического масштаба. По причине космологического красного смещения наблюдаемая на Земле задержка во времени удлиняется в  $1 + z_L$  раз, поэтому потенциальная задержка равна

$$\Delta t_{\text{потенц}} = (1 + z_L)f(b). \quad (9.4.18)$$

Например, если линза является точечной массой, то  $\phi = -MG/r$ , тогда первый интеграл в (9.4.17) обращается в ноль, а второй интеграл не зависит от  $b$ , поэтому гравитационный потенциал линзы порождает разницу во времени между приходом флюктуаций в изображениях источника, расположенных под углами  $\beta_1$  и  $\beta_2$  к изображению линзы, которая задается выражением

$$\Delta t_{\text{потенц}}(\beta_1) - \Delta t_{\text{потенц}}(\beta_2) = 2MG(1 + z_L) \ln \left(\frac{b_2}{b_1}\right) = 2MG(1 + z_L) \ln \left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right).$$

Очевидно, что потенциальная задержка во времени, как правило, будет величиной порядка  $MG$ . Как следует, например, из уравнения (9.1.5), если все  $d_y(EL)$ ,  $d_y(ES)$  и  $d_y(LS)$  одинакового порядка  $d$ , то в случае сильного линзирования квадрат угла  $(\beta - \alpha)^2$ , как правило, порядка  $MG/d$ , поэтому геометрическая задержка во времени (9.4.11) также порядка  $MG$ . Для галактики в  $10^{11}$  солнечных масс эта задержка составляет 5,7 дней. Измерение задержки может быть использовано для измерения массы линз, без необходимости знать постоянную Хаббла. Мы видели, что измерения углов между изображениями источника и линзы могут дать значение  $H_0 MG$ , а измерение этих углов и задержек во времени могут дать значение  $MG$ , поэтому комбинация угловых и временных измерений может привести к определению значения  $H_0$ . Далее приводится список нескольких линз, которые были использованы для этой цели.

- QSO 0957+561. Два изображения, разделенные на  $6,1''$ ,  $z_L = 0,36$ ,  $z_S = 1,41$ , с временной разницей  $417 \pm 3$  дня (95 %), привели к значению  $H_0 = 64 \pm 13$  (км/с)/Мпк<sup>32)</sup>, которое впоследствии было вычислено заново<sup>33)</sup>, и получено значение  $77_{-24}^{+29}$  (км/с)/Мпк.
- В 0218+357. Два изображения, разделенные на  $0,335''$ , и кольцо Эйнштейна,  $z_S = 0,96$ ,  $z_L = 0,68$ , с временной разницей  $10,5 \pm 0,4$  дня, привели к значению  $H_0 = 69_{-19}^{+13}$  (км/с)/Мпк<sup>34)</sup>.
- PKS 1830–211. Два изображения, разделенные на  $1,0''$ , плюс кольцо Эйнштейна,  $z_L = 0,89$ , с временной разницей  $26_{-5}^{+4}$  дней (8,6 ГГц)<sup>35)</sup>. Измеренное значение красного смещения источника  $2,507 \pm 0,002$  дало  $H_0 = 65_{-9}^{+15}$  (км/с)/Мпк для  $\Omega_m = 1$ ,  $\Omega_\Lambda = 0$ ;  $H_0 = 76_{-10}^{+19}$  (км/с)/Мпк для  $\Omega_m = 0,3$ ,  $\Omega_\Lambda = 0,7$ <sup>36)</sup>.
- В 1608+656. Четыре линзированных изображения, с тремя временными разницами от четырех до десяти недель, привели к значению  $H_0 = 75$  (км/с)/Мпк  $\pm 10\%$ <sup>37)</sup>.

Таблица с измерениями временной задержки до 2003 года приводится в обзоре Кочанека и Шектера<sup>38)</sup>. В 2006 году обзор<sup>39)</sup> временных задержек для десяти гравитационных линз (при предположении, что  $\Omega_m = 0,3$ ,  $\Omega_\Lambda = 0,7$ ,

<sup>32)</sup> T. Kundic *et al.*, *Astrophys. J.* **482**, 75 (1997) [astro-ph/9610162].

<sup>33)</sup> G. Bernstein and P. Fischer, *Astron. J.* **118**, 14 (1999).

<sup>34)</sup> A. D. Biggs *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **304**, 349 (1999) [astro-ph/9811282].

<sup>35)</sup> J. E. J. Lovell *et al.*, *Astrophys. J.* **508**, L51 (1998) [astro-ph/9809301].

<sup>36)</sup> C. Lidman *et al.*, *Astrophys. J.* **514**, L57 (1999) [astro-ph/9902317].

<sup>37)</sup> L. V. E. Koopmans, T. Treu, C. D. Fassnacht, R. D. Blandford, and G. Surpi, *Astrophys. J.* **599**, 70 (2003).

<sup>38)</sup> C. S. Kochanek and P. L. Schechter, *Carnegie Observatories Astrophysics Series*, vol. 2, ed. W. L. Freedman (Cambridge University Press, 2003) [astro-ph/0306040]: табл. 1.1.

<sup>39)</sup> P. Saha, J. Coles, A. V. Maccio, and L. L. R. Williams, *Astrophys. J.* **660**, L17 (2006) [astro-ph/0607240].

а число параметров для каждой линзы находится из требования, что все они приводят к одному значению постоянной Хаббла) привел к значению  $H_0 = 75^{+7}_{-12}$  (км/с)/Мпк.

## 9.5

**Слабое линзирование**

**Вычисление отклонения • Матрица сдвига • Матрица эллиптичности • Средняя матрица сдвига • Поле сдвига  $\kappa$  • Мультипольные коэффициенты • Приближение больших  $\ell$  • Измерение  $P(k)$  • Корреляционные функции • Обзор сдвигов**

Для космологии наиболее обещающее применение гравитационных линз, по всей видимости, состоит в обследованиях *слабого линзирования*, в изучении искажения изображений удаленных галактик многочисленными небольшими отклонениями света по пути к нам сквозь слегка неоднородное распределение вещества. Рассмотрим луч света от точечного источника в удаленной галактике с сопутствующими координатами  $r_s \hat{n}$ , где  $\hat{n}$  — единичный вектор. Независимо от того, являются промежуточные линзы галактиками, или галактическими скоплениями, или сгустками межгалактического вещества, о полном отклонении можно думать как о сумме отклонений, вызванных встречей светового луча с точечными линзами  $L$  с массами  $m_L$ , с координатами  $\mathbf{x}_L$ .

---

Поскольку в полном отклонении будут рассматриваться вклады только первого порядка, эти линзы можно считать отдельными частицами, даже если они входят в состав протяженных объектов.

---

Для слабого линзирования значение угла  $\alpha_L$  между направлениями к источнику и линзе много больше параметра «кольца Эйнштейна»  $\beta_{EL}$  для линзы  $L$ , поэтому как мы видели, возникает единственное изображение, получающееся выбором знака «+» в уравнении (9.1.6), из которого при  $\alpha \ll \beta_E$  получается обусловленное присутствием линзы значение отклонения  $\beta_{+L} - \alpha_L = \beta_{EL}^2/\alpha_L$ . Разложим сопутствующий пространственный вектор линзы  $\mathbf{x}_L$  на параллельные и перпендикулярные световому лучу компоненты:

$$\mathbf{x}_L = r_L \hat{n} + \mathbf{y}_L, \quad r_L \equiv \hat{n} \cdot \mathbf{x}_L, \quad \mathbf{y}_L \equiv \mathbf{x}_L - \hat{n}(\hat{n} \cdot \mathbf{x}_L). \quad (9.5.1)$$

Линза  $L$  отклоняет световой луч в направлении  $-\hat{y}_L$ , поэтому полное отклонение, вызванное всеми имеющимися линзами равно

$$\Delta \hat{n} = - \sum_L \frac{\hat{y}_L \beta_{EL}^2}{\alpha_L} = - \sum_L \hat{y}_L \frac{4 M_L G d_y(LS)}{d_y(ES) d_y(EL) \alpha_L}, \quad (9.5.2)$$

где для любых точек  $P$  и  $Q$   $d_y(PQ)$  является расстоянием по угловому диаметру до  $Q$ , если смотреть из точки  $P$ . Согласно определению расстояния

по угловому диаметру  $d_y(EL)$  до линзы, если смотреть на нее с Земли, угол между направлениями до источника и линзы равен  $\alpha_L = a_L |\mathbf{y}_L| / d_y(EL)$ , где  $a_L$  — это масштабный фактор Робертсона—Уокера в момент прохождения светом линзы  $L$ . Помимо этого, удобно воспользоваться уравнением (9.1.2) и записать  $d_y(LS) = a(t_S)r(r_L, r_S)$  и  $d_y(ES) = a(t_S)r_S$ , где  $t_S$  — время испускания света источником, а  $r(r_L, r_S)$  и  $r_S$  являются радиальными координатами источника в системе координат Робертсона—Уокера с началами отсчета соответственно на линзе и на Земле. Согласно уравнению (9.2.15), получаем

$$r(r_L, r_S) = r_S \sqrt{1 - Kr_L^2} - r_L \sqrt{1 - Kr_S^2}. \quad (9.5.3)$$

Тогда отклонение равно

$$\Delta\hat{n} = - \sum_L \mathbf{y}_L \frac{4M_L Gr(r_L, r_S)}{r_S a_L |\mathbf{y}_L|^2}. \quad (9.5.4)$$

Само по себе полученное выражение бесполезно, потому что, как правило, мы не знаем, где будет находиться изображение точки источника в отсутствие линз. Более интересно рассмотреть вариацию отклонения по отношению к положению точки испускания луча. Предположим, что рассматривается малое изменение  $\theta$  неотклоненного направления в точку испускания луча, причем  $\theta$  перпендикулярно  $\hat{n}$  и  $|\theta| \ll 1$ . Тогда изменение вектора  $\mathbf{y}_L$  от светового луча до линзы  $L$  в точке наибольшего сближения, вызванное смещением источника, равно

$$\delta\mathbf{y}_L = -\theta(\hat{n} \cdot \mathbf{x}_L) - \hat{n}(\theta \cdot \mathbf{x}_L).$$

Отбрасывая пропорциональный  $\hat{n}$  вклад, видим, что в первом порядке изменения отклонения изображения в направлении поперечном к лучу зрения равно

$$\Delta\theta_a = \sum_b M_{ab}(r_S, \hat{n})\theta_b, \quad (9.5.5)$$

где индексы  $a$  и  $b$  нумеруют два ортогональных направления, поперечных к  $\hat{n}$ , а  $M_{ab}(r_S, \hat{n})$  — это  $2 \times 2$  матрица сдвигов для изображений источника на расстоянии  $r_S$ :

$$M_{ab}(r_S, \hat{n}) = \sum_L \frac{4M_L Gr(r_L, r_S)r_L}{r_S a_L} \left( \frac{\delta_{ab}}{|\mathbf{y}_L|^2} - \frac{2y_{La}y_{Lb}}{|\mathbf{y}_L|^4} \right). \quad (9.5.6)$$

Удобно переписать эту матрицу в следующем виде

$$M = \begin{pmatrix} \kappa + \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & \kappa - \gamma_1 \end{pmatrix}, \quad (9.5.7)$$

где  $\kappa$  называется схождением, а  $\gamma_i$  известны как поле сдвигов.

Матрицу сдвигов можно удобным образом переписать в терминах возмущения полного ньютоновского потенциала с учетом линз<sup>40)</sup>:

$$\delta\phi(\mathbf{x}, t) = - \sum_L \frac{M_L G}{a_L |\mathbf{x} - \mathbf{x}_L(t)|} = - \sum_L \frac{M_L G}{a_L [(r - r_L(t))^2 + (\mathbf{y} - \mathbf{y}_L(t))^2]^{1/2}}, \quad (9.5.8)$$

где  $\mathbf{x} = r\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{y}$  с  $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{y} = 0$ .

---

Здесь явно учитывается тот факт, что линзы могут иметь временную зависимость, вследствие, например, пекулярного движения или эволюции Вселенной. В уравнении (9.5.6) используются сокращения

$$r_L \equiv r_L(t_{L_0}), \quad \mathbf{y}_L \equiv \mathbf{y}_L(t_{L_0}),$$

где  $t_r$  — момент времени, когда световая волна, приходящая к нам сейчас, имела радиальную координату  $r$ , задаваемую

$$r = \int_0^{t_r} \frac{dt}{a(t)}.$$


---

В частности, вторые поперечные производные потенциала на световом луче равны

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\partial^2}{\partial y_a \partial y_b} \delta\phi(r\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{y}, t) \right]_{\mathbf{y}=0} = \\ &= \sum_L \frac{M_L G}{a_L} \left( \frac{\delta_{ab}}{[(r - r_L(t))^2 + |\mathbf{y}_L(t)|^2]^{3/2}} - \frac{3y_{La}(t)y_{Lb}(t)}{[(r - r_L(t))^2 + |\mathbf{y}_L(t)|^2]^{5/2}} \right). \end{aligned}$$

Функции  $((r - r_L)^2 + |\mathbf{y}_L|^2)^{-3/2}$  и  $((r - r_L)^2 + |\mathbf{y}_L|^2)^{-5/2}$  имеют острые максимумы в  $r = r_L$ , поэтому интеграл от этой второй производной, умноженной на любую гладкую функцию  $f(r)$  (гладкую в том смысле, что она мало меняется при изменении  $r$  на величину порядка  $|\mathbf{y}_L|$ ), равен

$$\int f(r) dr \left[ \frac{\partial^2}{\partial y_a \partial y_b} \delta\phi(r\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{y}, t) \right]_{\mathbf{y}=0, t=t_r} = \sum_L \frac{f(r_L) M_L G}{a_L} \left( \frac{2\delta_{ab}}{|\mathbf{y}_L|^2} - \frac{4y_{La}y_{Lb}}{|\mathbf{y}_L|^4} \right).$$

Сравнивая полученное выражение с (9.5.6), видим, что матрица сдвигов  $M_{ab}$  для источника с радиальной координатой  $r_S$  равна

$$M_{ab}(r_S, \hat{\mathbf{n}}) = 2 \int_0^{r_S} \frac{r(r, r_S)r}{r_S} \left[ \frac{\partial^2}{\partial y_a \partial y_b} \delta\phi(r\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{y}, t) \right]_{\mathbf{y}=0, t=t_r} dr. \quad (9.5.9)$$

---

<sup>40)</sup> Эффектами присутствия линз, находящихся на космологических расстояниях от светового луча, можно пренебречь, поэтому знаменатель, включая фактор  $a_L$ , является собственным расстоянием до линзы  $L$ . Полное возмущение плотности массы представляется здесь в виде набора линзирующих точечных масс, однако поскольку они могут быть как частицами, так и галактиками, потери общности не происходят.

Поэтому измерение матрицы сдвигов может дать информацию о возмущениях гравитационного потенциала массами, расположенными вдоль луча зрения. В частности, сворачивая индексы  $a$  и  $b$ , получаем, что

$$\kappa = \frac{1}{2} \operatorname{tr} M = \int_0^{r_s} \frac{r(r, r_s)r}{r_s} \left[ \left( \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) \delta\phi(r\hat{n} + \mathbf{y}, t) \right]_{\mathbf{y}=0, t=t_r} dr.$$

Если линзирование возникает благодаря присутствию набора объектов (таких как скопления галактик), которые все находятся примерно на одном радиальном расстоянии  $r_L$ , то при больших  $|r - r_L|$  функция  $\delta\phi$  быстро убывает, так что фактор  $r(r, r_s)r$  можно заменить на  $r(r_L, r_s)r_L$ , при этом интеграл можно положить равным нулю. С помощью уравнения Пуассона

$$a^{-2} \nabla^2 \delta\phi = 4\pi G \delta\rho_m$$

итоговое выражение можно представить в терминах флуктуации плотности  $\delta\rho_m$ :

$$\kappa = \frac{4\pi G(t_{r_L}) d_y(LS) d_y(EL)}{d_y(ES)} \int \delta\rho_m(r\hat{n}, t_{r_L}) a(t_{r_L}) dr, \quad (9.5.10)$$

интеграл берется по значениям  $r$ , проходящим сквозь линзу. Следовательно, предполагая, что нам известны расстояния по угловому диаметру, возникающие в (9.5.10), измерение значения  $\kappa$  для источников, видимых в некоторых направлениях, может дать плотность полной массы скопления линзирующих масс, расположенных вдоль луча зрения, спроектированных на плоскость, перпендикулярную этому лучу зрения.

Теперь давайте рассмотрим, как линзирование изображений галактик может быть использовано для измерения матрицы сдвигов. Для того чтобы рассматривать галактики, не имеющие какой-нибудь регулярной формы, удобно описывать форму галактики с помощью квадрупольной матрицы:

$$Q_{ab} \equiv \frac{\int d^2\theta \mathcal{L}(\theta) \theta_a \theta_b}{\int d^2\theta \mathcal{L}(\theta)}. \quad (9.5.11)$$

Интеграл здесь берется по поперечному смещению  $\theta$  направления до точек на изображении галактики из некоторой центральной точки; индексы  $a$ ,  $b$  и т. д. нумеруют два ортогональных направления на плоскости изображения;  $\mathcal{L}$  — поверхностная яркость изображения — видимая светимость на единицу телесного угла.

---

Для того чтобы интеграл в числителе сходился, может понадобиться заменить  $\mathcal{L}$  на некоторую функцию от  $\mathcal{L}$ , равную  $\mathcal{L}$ , когда  $\mathcal{L}$  превышает некоторую пороговую яркость, а иначе обращается в ноль. Это не влияет на дальнейший анализ.

---

В разд. 9.2 отмечалось, что поверхностная яркость любой точки будет такой же, как если смотреть из той же точки источника в отсутствие линзирования, поэтому

$$\mathcal{L}((1+M)\theta) = \mathcal{L}^s(\theta), \quad (9.5.12)$$

где  $\mathcal{L}^s$  — поверхностная яркость источника в отсутствие линзирования. Вводя в формуле (9.5.11) новую переменную интегрирования  $\theta'$  посредством соотношения  $\theta_a = (1+M)_{ab}\theta'_b$  и воспользовавшись (9.5.12), получаем

$$\int d^2\theta \mathcal{L}(\theta)\theta_a\theta_b = (1+M)_{ac}(1+M)_{bd} \det(1+M) \int d^2\theta' \mathcal{L}^s(\theta')\theta'_c\theta'_d,$$

и, аналогичным образом,

$$\int d^2\theta \mathcal{L}(\theta) = \det(1+M) \int d^2\theta' \mathcal{L}^s(\theta').$$

При составлении отношения детерминанты сокращаются, поэтому (опуская штрихи) получаем

$$Q_{ab} = (1+M)_{ac}(1+M)_{bd}Q_{cd}^s, \quad (9.5.13)$$

где  $Q^s$  — квадрупольная матрица в отсутствие линзирования,

$$Q_{ab}^s \equiv \frac{\int d^2\theta \mathcal{L}^s(\theta)\theta_a\theta_b}{\int d^2\theta \mathcal{L}^s(\theta)}. \quad (9.5.14)$$

Для простоты изложения ограничимся здесь случаем линзирования, достаточно слабого, чтобы все элементы  $M$  удовлетворяли  $|M_{ab}| \ll 1$ , который для космологии представляет громадный интерес. В этом случае (9.5.13) принимает вид

$$Q_{ab} = Q_{ab}^s + M_{ac}Q_{cb}^s + M_{db}Q_{ad}^s. \quad (9.5.15)$$

Разумеется, нам неизвестна квадрупольная матрица для любой отдельно взятой галактики. Но если имеется выборка галактик, расположенных примерно в одном направлении и с примерно одинаковым красным смещением, так что матрица сдвигов одинакова для всех галактик данной выборки, то можно частично зафиксировать вид матрицы сдвигов, если выдвинуть правдоподобное предположение, что ориентации галактик никак не скорректированы. Есть по меньше мере два способа сделать это.

### Стандартный метод<sup>41)</sup>

В стандартном методе рассматриваются матрицы эллиптичности

$$X_{ab} \equiv \frac{Q_{ab}}{\text{tr } Q}, \quad X_{ab}^s \equiv \frac{Q_{ab}^s}{\text{tr } Q^s}, \quad (9.5.16)$$

<sup>41)</sup> См., например, M. Bartelmann and P. Schneider, *Phys. Rep.* **340**, 291 (2001).

нормированные так, что их след равен единице. В первом порядке по  $M$  соотношение (9.5.15) принимает вид

$$X_{ab} = X_{ab}^s + M_{ac}X_{cb}^s + M_{bd}X_{ad}^s - 2X_{ab}^s \operatorname{tr}(MX^s). \quad (9.5.17)$$

Если ориентация галактик случайна, то среднее от  $X_{ab}^s$  по достаточно большому скоплению будет пропорционально  $\delta_{ab}$ , и, поскольку эти матрицы определяются как имеющие единичный след, отсюда следует, что коэффициент пропорциональности должен быть равен  $1/2$ :

$$\langle X_{ab}^s \rangle = \frac{1}{2}\delta_{ab}. \quad (9.5.18)$$

Для рассмотрения квадратичного по  $X^s$  вклада в уравнение (9.5.17) необходимо также иметь среднее от  $X_{ab}^s X_{cd}^s$ . Случайная ориентация галактик и симметрия данного произведения требует, чтобы его усреднение являлось линейной комбинацией от  $\delta_{ab}\delta_{cd}$  и  $\delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc}$ , и поскольку  $X^s$  обладает единичным следом, такая линейная комбинация должна иметь вид

$$\langle X_{ab}^s X_{cd}^s \rangle = \frac{1}{4} [\delta_{ab}\delta_{cd} + \xi(\delta_{ac}\delta_{bd} + \delta_{ad}\delta_{bc} - \delta_{ab}\delta_{cd})], \quad (9.5.19)$$

где, сворачивая  $a, b$  по индексам  $c, d$  в уравнении (9.5.19), получаем

$$\xi = \langle \operatorname{tr}(X^{s2}) \rangle - \frac{1}{2}. \quad (9.5.20)$$

---

Например, если все галактики в нашей выборке являются сферическими, то оба собственных значения  $X^s$  равны  $1/2$  и  $\xi = 0$ , а если все они являются крайне сплюснутыми эллипсоидами, то одно собственное значение равно единице, а другое нулю, и  $\xi = 1/2$ . В более общем случае  $0 \leq \xi \leq 1/2$ .

---

Усредненная соотношение (9.5.17) и используя уравнения (9.5.18) и (9.5.19), получаем

$$\langle X_{ab} \rangle = \frac{1}{2}\delta_{ab} + (1 - \xi)\left(M_{ab} - \frac{1}{2}\delta_{ab} \operatorname{tr} M\right). \quad (9.5.21)$$

Мы не наблюдаем среднее от  $\operatorname{tr}(X^{s2})$ , которое появляется в нашей формуле (9.5.20) для  $\xi$ , но поскольку  $\xi$  возникает только в (9.5.21), будучи умноженным на выражение, которое уже первого порядка по  $M$ , то при вычислении  $\langle X_{ab} \rangle$  в первом порядке по  $M$  необходимо знать  $\xi$  только в нулевом порядке, а в этом порядке можно заменить  $X^s$  в выражении (9.5.20) на наблюдаемую матрицу эллиптичности  $X$ ,

$$\xi = \langle \operatorname{tr}(X^2) \rangle - \frac{1}{2}. \quad (9.5.22)$$

Эта величина может быть измерена на основе наблюдаемых форм галактик нашей выборки, и тогда соотношение (9.5.21) можно использовать для нахождения бесследовой части матрицы сдвигов посредством измерений среднего наблюдаемой матрицы эллиптичности  $X$ .

Небольшой комментарий насчет используемого формализма: в литературе вместо вещественной матрицы эллиптичности часто используется комплексный параметр эллиптичности

$$\chi \equiv X_{11} - X_{22} + 2iX_{12}, \quad (9.5.23)$$

и вместо соотношения (9.5.21) возникает формула, связывающая комплексный параметр сдвига  $\gamma \equiv \gamma_1 + i\gamma_2$  со средними от функций параметра эллиптичности<sup>42)</sup>

$$\langle \chi \rangle = 2\gamma - 2\langle \chi \operatorname{Re}(\chi^* \gamma) \rangle. \quad (9.5.24)$$

С помощью соотношения (9.5.19) легко видеть, что среднее в правой части равно

$$\langle \chi \operatorname{Re}(\chi^* \gamma) \rangle = \xi \gamma, \quad (9.5.25)$$

и, тем самым, соотношение (9.5.24) между  $\chi$  и  $\gamma$  становится

$$\left\langle \frac{Q_{11} - Q_{22} + 2iQ_{12}}{Q_{11} + Q_{22}} \right\rangle = 2(1 - \xi)(\gamma_1 + i\gamma_2), \quad (9.5.26)$$

что тоже самое, что и уравнение (9.5.21).

### Альтернативный метод

Измерения параметра  $\xi$  для выборки галактик-источников можно избежать, если рассматривать средние от самой квадрупольной матрицы  $Q_{ab}$ , а не от матрицы  $X_{ab}$ , нормированной так, чтобы ее след был равен единице. Случайная ориентация галактик в выборке источников говорит о том, что среднее от нелинзированных квадрупольных матриц принимает вид

$$\langle Q_{ab}^s \rangle = \frac{1}{2} \bar{Q} \delta_{ab}, \quad (9.5.27)$$

где  $\bar{Q}$  является неизвестной положительной константой. Тогда из уравнения (9.5.15) следует, что

$$\langle Q_{ab} \rangle = \bar{Q} \left[ \frac{1}{2} \delta_{ab} + M_{ab} \right]. \quad (9.5.28)$$

Неизвестную  $\bar{Q}$  можно исключить делением на среднее следа квадрупольного момента. Из выражения (9.5.28) и его следа вытекает, что в первом порядке по  $M$  выполняется

$$\frac{\langle Q_{ab} \rangle}{\langle \operatorname{tr} Q \rangle} = \frac{1}{2} \delta_{ab} + M_{ab} - \frac{1}{2} \delta_{ab} \operatorname{tr} M, \quad (9.5.29)$$

т. е.

$$\gamma_1 + i\gamma_2 = \frac{\langle Q_{11} - Q_{22} + 2iQ_{12} \rangle}{2\langle Q_{11} + Q_{22} \rangle}. \quad (9.5.30)$$

<sup>42)</sup> P. Schneider and C. Seitz, *Astron. Astrophys.* **294**, 411 (1995). Это уравнение (4.16) из сноски 41, в пределе  $|\gamma_i| \ll 1$  и  $|\kappa| \ll 1$ .

Таким образом, можно вычислить бесследовую часть от  $M_{ab}$  — т. е. поле сдвигов — на основе измерения среднего квадрупольного тензора, без необходимости продельвать отдельное измерение параметра вроде  $\xi$ .

Различие между стандартным и альтернативным методами — это не только вопрос формализма, потому что они вовлекают разные типы средних. В альтернативном методе галактики учитываются пропорционально площади своих изображений, а в стандартном методе все галактики учитываются одинаково. Поэтому в альтернативном методе не надо сильно беспокоиться насчет отсутствующих галактик малой видимой площади.

Обычно измерение красных смещений отдельных галактик, изображения которых искажаются слабым линзированием, оказывается не очень практическим. В таких случаях необходимо предполагать, что существует некоторое распределение вероятности  $\mathcal{N}(r_S)$  того, что эти галактики находятся на радиальном расстоянии  $r_S$ , с

$$\int_0^\infty \mathcal{N}(r_S) dr_S = 1.$$

С помощью описанного выше альтернативного метода мы по-прежнему можем пользоваться уравнением (9.5.29) для вычисления бесследовой части матрицы сдвигов, зная усредненную наблюдаемую квадрупольную матрицу, однако теперь среднее квадрупольной матрицы вычисляется с учетом всех галактик вдоль заданного луча зрения, а матрица сдвигов заменяется на эффективную матрицу сдвигов

$$\begin{aligned} M_{ab}(\hat{n}) &= \int_0^\infty \mathcal{N}(r_S) M_{ab}(r_S, \hat{n}) dr_S = \\ &= 2 \int_0^\infty \mathcal{N}(r_S) dr_S \int_0^{r_S} \frac{r(r, r_S)r}{r_S} \left[ \frac{\partial^2}{\partial y_a \partial y_b} \delta\phi(r\hat{n} + \mathbf{y}, t_r) \right]_{\mathbf{y}=0} dr = \\ &= \int_0^\infty \left[ \frac{\partial^2}{\partial y_a \partial y_b} \delta\phi(r\hat{n} + \mathbf{y}, t_r) \right]_{\mathbf{y}=0} g(r) dr, \end{aligned} \quad (9.5.31)$$

где

$$g(r) \equiv 2 \int_r^\infty \frac{r(r, r_S)r}{r_S} \mathcal{N}(r_S) dr_S. \quad (9.5.32)$$

Аналогично этому, с помощью стандартного метода мы по-прежнему можем вычислять бесследовую часть эффективной матрицы сдвигов исходя из средней матрицы эллиптичности, при условии, что форма галактик не меняется

со временем. В этом случае уравнение (9.5.21) по-прежнему применимо, однако с матрицей сдвигов, задаваемой (9.5.31), и со средним квадратом матрицы эллиптичности в нашей формуле (9.5.22) для параметра  $\xi$ , вычисленного путем усреднения по всем галактикам вдоль луча зрения. Но если формы галактик эволюционируют, то уравнение (9.5.31) нужно подходящим образом модифицировать: вместо фактора  $1 - \xi$  перед матрицей сдвигов в (9.5.21) необходимо использовать (9.5.22) для вычисления функции  $\xi(r_S)$  исходя из средней матрицы эллиптичности галактик, расположенных на радиальном расстоянии  $r_S$ , и включить фактор  $1 - \xi(r_S)$  в подынтегральное выражение в (9.5.31). В рамках альтернативного метода это усложнение не возникает.

Независимо от того, какой метод используется для получения матрицы сдвигов, в этом месте мы сталкиваемся с проблемой. Нам хотелось бы воспользоваться измерениями слабого линзирования для выяснения возмущений плотности  $\delta\rho$ , но как показано в уравнении (9.5.10), простым способом только параметр схождения  $\kappa$  связан с возмущением плотности, а из уравнений (9.5.21) и (9.5.29) следует, что измерения слабого линзирования дают поле сдвигов  $\gamma_i$ , а не  $\kappa$ . К счастью, хотя простого соотношения между  $\gamma_i$  и  $\kappa$  не существует, имеется простое соотношение между их градиентами<sup>43)</sup>. Из уравнения (9.5.9) получаем

$$\frac{\partial}{\partial \hat{n}_c} M_{ab}(r_S, \hat{n}) = 2 \int_0^{r_S} \frac{r(r, r_S)}{r_S} \left[ \frac{\partial^3}{\partial y_a \partial y_b \partial y_c} \delta\phi(r\hat{n} + \mathbf{y}, t) \right]_{\mathbf{y}=0, t=t_r} dr. \quad (9.5.33)$$

Точно так же из уравнения (9.5.31) получаем

$$\frac{\partial}{\partial \hat{n}_c} M_{ab}(\hat{n}) = \int_0^\infty \left[ \frac{\partial^3}{\partial y_a \partial y_b \partial y_c} \delta\phi(r\hat{n} + \mathbf{y}, t_r) \right]_{\mathbf{y}=0} \frac{g(r)}{r} dr. \quad (9.5.34)$$

Важно то, что оба выражения полностью симметричны по отношению к  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Таким образом, расходимость бесследовой части матрицы сдвигов пропорциональна градиенту следа:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{n}_a} \left( M_{ab} - \frac{1}{2} \delta_{ab} \text{tr } M \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \hat{n}_b} \text{tr } M, \quad (9.5.35)$$

где  $M$  может быть либо  $M(r_S, \hat{n})$ , либо  $M(\hat{n})$ . Иначе говоря,

$$\frac{\partial \kappa}{\partial \hat{n}_1} = \frac{\partial \gamma_1}{\partial \hat{n}_1} + \frac{\partial \gamma_2}{\partial \hat{n}_2}, \quad \frac{\partial \kappa}{\partial \hat{n}_2} = \frac{\partial \gamma_2}{\partial \hat{n}_1} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial \hat{n}_2}. \quad (9.5.36)$$

Таким образом,  $\kappa$  можно вычислить, зная поле сдвигов  $\gamma_i$ , вплоть до  $\hat{n}$ -независимой константы. Ранее упоминалось, что полученные таким способом

<sup>43)</sup> N. Kaiser, *Astrophys. J.* **439**, L1 (1995).

значения  $\kappa$  можно использовать для измерения спроектированной плотности массы линзирующих объектов вдоль луча зрения. Начиная с конца 1990-х годов с помощью телескопов средних размеров многочисленные группы обнаружили обусловленные линзированием сдвиги<sup>44)</sup>. Эти измерения, вместе с приведенным выше анализом, использовались для картирования распределения всего вещества, как темного, так и барионного, в различных галактических скоплениях, таких как кластер Пуля 1E0657–558, см. разд. 3.4.

Теперь давайте обратимся к применению слабого линзирования для нахождения распределения неоднородностей плотности массы во Вселенной. При использовании слабого линзирования для изучения крупномасштабного распределения вещества во Вселенной нас скорее интересует матрица сдвигов при распределении по всему небу, а не в каком-то одном направлении. Флуктуации гравитационного потенциала имеют случайный знак, поэтому среднее по небу от матрицы сдвигов равно нулю. Вместо этого наиболее целесообразно рассматривать среднее от произведения элементов матрицы сдвигов вдоль двух разных лучей зрения, где «среднее» понимается в том же смысле, что и в анализе флуктуаций реликтового излучения: либо среднее по положениям, с которых производятся наблюдения неба, либо среднее по отдельным последовательностям событий, которые привели к частному распределению вещества во Вселенной. Ни одно из этих средних не соответствует в точности тому, что мы наблюдаем, однако это отличие пропадает для больших мультипольных порядков по той же причине, которая была объяснена в разд. 2.6 на примере мультипольных коэффициентов анизотропий реликтового излучения.

Поскольку теперь рассматриваются разные направления, удобно более явно переписать определение (9.5.7) для схождения и полей сдвигов. Если представить  $\hat{n}$  в терминах полярного и азимутального углов как

$$\hat{n} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta) \quad (9.5.37)$$

и выбрать два ортогональных направления, перпендикулярных к  $\hat{n}$ , как

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta} &= (\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, -\sin \vartheta), \\ \hat{\varphi} &= (-\sin \varphi, \cos \varphi), \end{aligned} \quad (9.5.38)$$

то тогда

$$\kappa(\hat{n}) + \gamma_1(\hat{n}) = \hat{\vartheta}_i \hat{\vartheta}_j M_{ij}(\hat{n}), \quad (9.5.39)$$

$$\kappa(\hat{n}) - \gamma_1(\hat{n}) = \hat{\varphi}_i \hat{\varphi}_j M_{ij}(\hat{n}), \quad (9.5.40)$$

$$\gamma_2(\hat{n}) = \hat{\vartheta}_i \hat{\varphi}_j M_{ij}(\hat{n}). \quad (9.5.41)$$

<sup>44)</sup> Ссылки на эти наблюдения и их краткий общий обзор имеются в работе D. Munshi and P. Valageas, *Roy. Soc. London Trans. Ser. A* **363**, 2675 (2001) [astro-ph/0509216]. Подробные обзоры слабого линзирования представлены в P. Schneider and M. Bartelmann, см. сноску 41; A. Refregier, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **41**, 645 (2003); P. Schneider, in *Gravitational Lensing: Strong, Weak, and Micro*, eds. G. Meylan *et al.* (Springer-Verlag, Berlin, 2006): 269 [astro-ph/0509252].

Здесь мы используем  $\vartheta$  и  $\varphi$  вместо обычных  $\theta$  и  $\phi$  для полярного и азимутального углов с целью избежания путаницы с другими примененными символами  $\theta$  и  $\phi$  в данном разделе. Помимо этого, поскольку будут рассматриваться разные направления  $\hat{n}$ , двузначные индексы  $a$ ,  $b$  и т. д. становятся трехзначными индексами  $i$ ,  $j$  и т. д. Уравнение (9.5.31) для  $2 \times 2$  матрицы сдвигов  $M_{ab}$  соответственным образом расширяется до уравнения на  $3 \times 3$  матрицы

$$M_{ij}(\hat{n}) \equiv \int_0^\infty \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \delta\phi(\mathbf{x}, t) \right]_{\mathbf{x}=r\hat{n}, t=t_r} g(r) dr. \quad (9.5.42)$$

Эквивалентным образом можно записать

$$\gamma(\hat{n}) \equiv \gamma_1(\hat{n}) + i\gamma_2(\hat{n}) = e_{+i}(\hat{n})e_{+j}(\hat{n})M_{ij}(\hat{n}), \quad (9.5.43)$$

где, как и в разд. 7.4,  $\mathbf{e}_+ \equiv (\hat{\vartheta} + i\hat{\varphi})/\sqrt{2}$ . Также, поскольку  $\hat{\vartheta}$  и  $\hat{\varphi}$  служат базисом в пространстве, нормальном к  $\hat{n}$ , то

$$\kappa(\hat{n}) = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - \hat{n}_i \hat{n}_j)M_{ij}(\hat{n}). \quad (9.5.44)$$

Разложение параметра схождения на сферические гармоники происходит почти так же, как разложение флуктуаций температуры реликтового излучения, см. разд. 2.6 и 7.2. Возмущение в гравитационном потенциале записывается в виде

$$\delta\phi(\mathbf{x}, t) = \int d^3 q \alpha(\mathbf{q}) \delta\phi_q(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}, \quad (9.5.45)$$

где  $\alpha(\mathbf{q})$  — стохастический параметр скалярных возмущений, нормированных так, что выполняется

$$\langle \alpha(\mathbf{q}) \alpha^*(\mathbf{q}') \rangle = \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}'). \quad (9.5.46)$$

В таком случае из уравнений (9.5.42), (9.5.44) и (9.5.45) следует, что

$$\kappa(\hat{n}) = -\frac{1}{2} \int d^3 q \alpha(\mathbf{q}) \int_0^\infty g(r) \delta\phi_q(t_r) (\mathbf{q}^2 - (\mathbf{q} \cdot \hat{n})^2) e^{i\mathbf{q}\cdot\hat{n}r} dr.$$

Величину  $-(\mathbf{q} \cdot \hat{n})^2$  можно заменить на  $\partial^2/\partial r^2$ , а для экспоненты воспользоваться известной формулой

$$e^{i\mathbf{q}\cdot\hat{n}r} = 4\pi \sum_{\ell m} i^\ell j_\ell(qr) Y_\ell^m(\hat{n}) Y_\ell^{m*}(\hat{q}). \quad (9.5.47)$$

Тогда возникает парциальное разложение параметра схождения

$$\kappa(\hat{n}) = \sum_{\ell m} a_{\kappa, \ell m} Y_\ell^m(\hat{n}), \quad (9.5.48)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} a_{\kappa, \ell m} = -2\pi i^\ell & \int d^3 q q^2 \alpha(\mathbf{q}) Y_\ell^{m*}(\hat{\mathbf{q}}) \times \\ & \times \int_0^\infty g(r) \delta\phi_q(t_r) (j_\ell(qr) + j_\ell''(qr)) dr. \end{aligned} \quad (9.5.49)$$

Его можно использовать вместе с уравнением (9.5.46) для вычисления корреляций параметра схождения с самим собой, либо с флюктуациями температуры реликтового излучения, либо с любыми другими скалярными возмущениями. В частности, в случае собственных корреляций параметра схождения получаем

$$\langle a_{\kappa, \ell m} a_{\kappa, \ell' m'}^* \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} C_{\kappa\kappa, \ell}, \quad (9.5.50)$$

где  $C_{\kappa\kappa, \ell}$  — мультипольный коэффициент,

$$C_{\kappa\kappa, \ell} = 4\pi^2 \int_0^\infty q^6 dq \left| \int_0^\infty g(r) \delta\phi_q(t_r) (j_\ell(qr) + j_\ell''(qr)) dr \right|^2. \quad (9.5.51)$$

С другой стороны, сравнивая выражения (9.5.43) и (7.4.6), видим, что сдвиговые компоненты  $\gamma_1(\hat{n})$  и  $\gamma_2(\hat{n})$  вовлекают поляризацию  $\mathbf{e}_+(\hat{n})$  почти так же, как в параметрах Стокса  $Q(\hat{n})$  и  $U(\hat{n})$ , поэтому по причине, аналогичной рассматриваемой в разд. 7.4, необходимо разложить комплексный параметр сдвигов  $\gamma_1(\hat{n}) + i\gamma_2(\hat{n})$  на спин-2 сферические гармоники  $\mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n})$ , определяемые уравнением (7.4.16):

$$\mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n}) \equiv 2\sqrt{\frac{(\ell-2)!}{(\ell+2)!}} e_{+i}(\hat{n}) e_{+j}(\hat{n}) \tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_j Y_\ell^m(\hat{n}), \quad (9.5.52)$$

где  $\tilde{\nabla}$  — угловая часть оператора градиента,

$$\tilde{\nabla} \equiv \hat{\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{\hat{\varphi}}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (9.5.53)$$

С помощью уравнений (9.5.42), (9.5.43), (9.5.43) и (9.5.47) получаем

$$\gamma_1(\hat{n}) + i\gamma_2(\hat{n}) = \sum_{\ell m} a_{\gamma, \ell m} \mathcal{Y}_\ell^m(\hat{n}) \quad (9.5.54)$$

с коэффициентами

$$a_{\gamma, \ell m} = 2\pi i^\ell \sqrt{\frac{(\ell+2)!}{(\ell-2)!}} \int d^3 q \alpha(\mathbf{q}) Y_\ell^m(\hat{\mathbf{q}})^* \int_0^\infty \delta\phi_q(t_r) j_\ell(qr) g(r) r^{-2} dr. \quad (9.5.55)$$

Вещественность  $\delta\phi(\mathbf{x}, t)$  требует, чтобы

$$\alpha^*(\mathbf{q})\delta\phi_q^*(t) = \alpha(-\mathbf{q})\delta\phi_q(t),$$

а

$$Y_\ell^{m*}(\hat{q}) = (-1)^\ell Y_\ell^{-m}(-\hat{q}),$$

поэтому  $a_{\gamma, \ell m} = a_{\gamma, \ell -m}^*$ , т. е. сдвиг, порождаемый возмущениями плотности массы, не «B», а «E» типа, в смысле уравнения (7.4.25). Таким образом, любое наблюдение сдвига *B*-типа, для которого  $a_{\gamma, \ell m} = -a_{\gamma, \ell -m}^*$ , будет служить указанием на линзирование, вызванное чем-то иным, нежели возмущением плотности, например, гравитационными волнами. К сожалению, линзирование вызванное гравитационными волнами, возникшими во время инфляции, чересчур мало, чтобы наблюдаваться<sup>45)</sup>.

С помощью (9.5.46) и в силу ортонормированности спин-2 сферических гармоник получаем

$$\langle a_{\gamma, \ell m} a_{\gamma, \ell' m'}^* \rangle = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} C_{\gamma\gamma, \ell}, \quad (9.5.56)$$

где мультипольные коэффициенты корреляторов сдвиг-сдвиг равны

$$C_{\gamma\gamma, \ell} = \frac{4\pi^2(\ell+2)!}{(\ell-2)!} \int_0^\infty q^2 dq \left| \int_0^\infty \delta\phi_q(t_r) j_\ell(qr) g(r) r^{-2} dr \right|^2. \quad (9.5.57)$$

Уравнение Пуассона  $\nabla^2 \delta\phi = 4\pi G a^2 \delta\rho_m$  связывает величину  $\delta\phi_q(t)$ , возникающую в уравнениях (9.5.51) и (9.5.57), со степенной спектральной функцией  $P(q/a_0)$  флуктуаций относительной плотности, введенной в разд. 8.1:

$$\begin{aligned} q^4 |\delta\phi_q(t)|^2 &= (4\pi G)^2 a^4(t) \bar{\rho}_m^2(t) |\delta M_q(t)|^2 = \\ &= (4\pi G)^2 a^4(t) \bar{\rho}^2(t) P\left(\frac{q}{a_0}\right) \left(\frac{F(t)}{F(t_0)}\right)^2 = \\ &= \frac{9\Omega_m^2 H_0^4 a_0^3}{4a^2(t)(2\pi)^3} P\left(\frac{q}{a_0}\right) \left(\frac{F(t)}{F(t_0)}\right)^2, \end{aligned} \quad (9.5.58)$$

где  $F(t)$  — это функция (8.1.20), и  $a_0 \equiv a(t_0)$ .

Можно привести менее сложные формулы для мультипольных коэффициентов в наиболее интересном случае,  $\ell \gg 1$ . Давайте сначала рассмотрим  $\kappa\kappa$  коррелятор. Можно вычислить интеграл по  $r$  в уравнении (9.5.51), если вспомнить, что при  $\ell \gg 1$ , если  $qr$  отличается от  $\ell + 1/2$  больше чем на величину порядка  $\ell^{-1/3}$ , сферическая функция Бесселя  $j_\ell(qr)$  экспоненциально мала при  $qr < \ell + 1/2$  и быстро осциллирует при  $qr > \ell + 1/2$ , в то время как (в отличие от функций источников для анизотропий реликтового излучения) все остальные составляющие рассматриваемого интеграла по отношению к  $r$

<sup>45)</sup> S. Dodelson, E. Rozo, and A. Stebbins, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 021301 (2003).

меняются медленно. Таким образом, для  $\ell \gg 1$  переменную  $r$  можно заменить на  $\ell/q$  в  $g(r)$  и  $t_r$ :

$$C_{\kappa\kappa, \ell} \rightarrow 4\pi^2 \int_0^\infty dq q^6 |\delta\phi_q(t_{\ell/q})|^2 g^2\left(\frac{\ell}{q}\right) \left| \int_0^\infty (j_\ell(qr) + j_\ell''(qr)) dr \right|^2. \quad (9.5.59)$$

Интеграл от  $j_\ell(qr)$  равен<sup>46)</sup>

$$\int_0^\infty j_\ell(qr) dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2q} \frac{\Gamma\left(\frac{\ell+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\ell+2}{2}\right)} \rightarrow \frac{1}{q} \sqrt{\frac{\pi}{2\ell}}. \quad (9.5.60)$$

С другой стороны, поскольку для больших  $\ell$  вклады от  $r \ll \ell/q$  и  $r \gg \ell/q$  сильно подавляются, то интегралом по  $r$  от  $j_\ell''(qr)$  можно пренебречь. Таким образом, из уравнения (9.5.58) следует, что при  $\ell \gg 1$

$$\begin{aligned} C_{\kappa\kappa, \ell} &\rightarrow \frac{2\pi^3}{\ell} \int_0^\infty dq q^4 |\delta\phi_q(t_{\ell/q})|^2 g^2\left(\frac{\ell}{q}\right) = 2\pi^3 \ell^4 \int_0^\infty dr r^{-6} |\delta\phi_{\ell/r}(t_r)|^2 g^2(r) = \\ &= \frac{9\Omega_m^2 H_0^4 a_0^3}{16} \int_0^\infty dr \frac{g^2(r)}{a^2(t_r)r^2} P\left(\frac{\ell}{a_0 r}\right) \left(\frac{F(t_r)}{F(t_0)}\right)^2. \end{aligned} \quad (9.5.61)$$

Предел больших  $\ell$  в мультипольном коэффициенте  $\gamma\gamma$  совершенно такой же. В этом пределе фактор  $(\ell+2)!/(\ell-2)!$  в выражении (9.5.57) превращается в  $\ell^4$ , а фактор  $r^{-2}$  в интеграле по  $r$  в (9.5.57) можно заменить на  $(q/\ell)^2$ , поэтому для больших  $\ell$  отношение подынтегрального выражения  $q$ -интеграла в (9.5.57) к подынтегральному выражению в (9.5.51) (отбрасывая  $j_\ell''(qr)$ ) равно

$$\frac{\ell^4 q^2 (q/\ell)^4}{q^6} = 1.$$

Следовательно, при больших  $\ell$

$$C_{\gamma\gamma, \ell} \rightarrow C_{\kappa\kappa, \ell} \rightarrow \frac{9\Omega_m^2 H_0^4 a_0^3}{16} \int_0^\infty dr \frac{g^2(r)}{a^2(t_r)r^2} P\left(\frac{\ell}{a_0 r}\right) \left(\frac{F(t_r)}{F(t_0)}\right)^2. \quad (9.5.62)$$

Таким образом, при измерении сдвиговых мультипольных коэффициентов для больших  $\ell$  мы извлекаем такую же информацию, как при измерении мультипольных коэффициентов параметра схождения для того же значения  $\ell$ .

<sup>46)</sup> Это специальный случай формулы (6.561) из I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, ed. A. Jeffrey (Academic Press, New York, 1980).

Для заданной весовой функции  $g(r)$ , определенной уравнением (9.5.32), наблюдение  $\ell$ -зависимости  $C_{\gamma\gamma, \ell}$  (или  $C_{\kappa\kappa, \ell}$ ) приводит к измерению  $k$ -зависимости степенной спектральной функции  $P(k)$ . Следует отметить, что если основной вклад в интеграл обеспечивается радиальными координатами  $r$ , такими что вакуумная энергия во времени  $t_r$  еще не начала играть важную роль, то согласно уравнению (8.1.20),  $F(t) \propto a(t)$ , поэтому соотношение (9.5.62) далее упрощается до

$$C_{\gamma\gamma, \ell} \rightarrow C_{\kappa\kappa, \ell} \rightarrow \frac{9\Omega_m^2 H_0^4 a_0}{16} \int_0^\infty dr \frac{g^2(r)}{r^2} P\left(\frac{\ell}{a_0 r}\right). \quad (9.5.63)$$

Обычно ссылаются именно на эту формулу<sup>47)</sup>.

Корреляционные функции сдвиговых компонент и флуктуаций температуры реликтового излучения можно представить, заимствуя результаты, уже полученные для корреляционных функций флуктуаций поляризации и температуры реликтового излучения. Сравнивая уравнение (9.5.54) с уравнениями (7.4.15) и (7.4.25), а также сравнивая уравнение (9.5.56) с уравнением (7.4.28), видим, что корреляционные функции для сдвиговых компонент можно получить из уравнений (7.4.77)–(7.4.79) путем замены  $Q$  и  $U$  на  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  и заменой  $C_{EE, \ell}$  на  $C_{\gamma\gamma, \ell}$ , и (поскольку сдвиг полностью типа  $E$ ) отбрасывая  $C_{BB, \ell}$ :

$$\langle \gamma_1(\hat{n}) \gamma_1(\hat{n}') \rangle = \frac{1}{2} \sum_\ell C_{\gamma\gamma, \ell} \operatorname{Re}(F_\ell(\hat{n}, \hat{n}') + G_\ell(\hat{n}, \hat{n}')), \quad (9.5.64)$$

$$\langle \gamma_2(\hat{n}) \gamma_2(\hat{n}') \rangle = \frac{1}{2} \sum_\ell C_{\gamma\gamma, \ell} \operatorname{Re}(F_\ell(\hat{n}, \hat{n}') - G_\ell(\hat{n}, \hat{n}')), \quad (9.5.65)$$

$$\langle \gamma_1(\hat{n}) \gamma_2(\hat{n}') \rangle = \frac{1}{2} \sum_\ell C_{\gamma\gamma, \ell} \operatorname{Im}(-F_\ell(\hat{n}, \hat{n}') + G_\ell(\hat{n}, \hat{n}')), \quad (9.5.66)$$

где  $F_\ell$  и  $G_\ell$  — функции, задаваемые выражениями (7.4.88) и (7.4.89):

$$F_\ell(\hat{n}, \hat{n}') = \frac{2\ell+1}{4\pi} D_{-2,-2}^{(\ell)}(S^{-1}(\hat{n})S(\hat{n}')), \quad (9.5.67)$$

$$G_\ell(\hat{n}, \hat{n}') = (-1)^\ell \frac{2\ell+1}{4\pi} D_{-2,-2}^{(\ell)}(S^{-1}(\hat{n})S(-\hat{n}')), \quad (9.5.68)$$

где  $D^{(\ell)}$  является неприводимым унитарным представлением группы вращений для углового момента  $\ell$ , а  $S(\hat{n})$  — стандартное вращение (7.4.12), переводящее 3-направление с  $\vartheta = \varphi = 0$  в направление  $\hat{n}$ . Помимо этого,

<sup>47)</sup> D. J. Bacon, A. R. Refrigier and R. S. Ellis, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **318**, 625 (2000). Корреляционные функции элементов матрицы сдвигов изучались в работе N. Kaiser, *Astrophys. J.* **498**, 26 (1998).

если записать флуктуацию температуры реликтового излучения как в уравнении (2.6.1),

$$\Delta T(\hat{n}) = \sum_{\ell m} a_{T, \ell m} Y_\ell^m(\hat{n}),$$

и воспользоваться вращательной инвариантностью для определения

$$\langle a_{T, \ell m} a_{\gamma, \ell' m'}^* \rangle = \delta_{\ell \ell'} \delta_{mm'} C_{T\gamma, \ell}, \quad (9.5.69)$$

то тогда из уравнений (7.4.82) и (7.4.83) можно получить корреляционные функции сдвиговых компонент и флуктуаций температуры реликтового излучения, заменяя  $Q$  и  $U$  на  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , а  $C_{TE, \ell}$  на  $-C_{T\gamma, \ell}$ :

$$\langle \Delta T(\hat{n}) \gamma_1(\hat{n}') \rangle = \sum_{\ell} C_{T\gamma, \ell} \operatorname{Re} H_{\ell}(\hat{n}, \hat{n}'), \quad (9.5.70)$$

$$\langle \Delta T(\hat{n}) \gamma_2(\hat{n}') \rangle = - \sum_{\ell} C_{T\gamma, \ell} \operatorname{Im} H_{\ell}(\hat{n}, \hat{n}'), \quad (9.5.71)$$

где  $H_{\ell}$  — это функция (7.4.90),

$$H_{\ell}(\hat{n}, \hat{n}') = \frac{2\ell + 1}{4\pi} D_{0, -2}^{(\ell)}(S^{-1}(\hat{n}) S(\hat{n}')). \quad (9.5.72)$$

Для сравнения упомянем также, что корреляционная функция параметра схождения задается аналогом температурной корреляционной функции (2.6.4):

$$\langle \kappa(\hat{n}) \kappa(\hat{n}') \rangle = \sum_{\ell} \frac{2\ell + 1}{4\pi} C_{\kappa\kappa, \ell} P_{\ell}(\hat{n} \cdot \hat{n}'). \quad (9.5.73)$$

Измерение  $C_{\gamma\gamma, \ell}$  или  $C_{\kappa\kappa, \ell}$  (с помощью уравнения (9.5.36) или (9.5.62)) можно использовать не только для выяснения степенной спектральной функции  $P(k)$ , но также для наложения ограничений на космологические параметры, входящие в уравнение (9.5.32) для  $g(r)$ . До сих пор измерения сдвигов на основе данных, полученных группой Canada—France—Hawaii Telescope Wide Synoptic Legacy Survey, использовались<sup>48)</sup> для установления значения параметра  $\sigma_8$ , см. разд. 8.1; предполагая  $\Omega_m = 0,3$ , было обнаружено, что  $\sigma_8 = 0,85 \pm 0,06$ . Хотя этот параметр также измеряется в исследованиях крупномасштабной структуры, измерение слабого линзирования имеет то преимущество, что оно не зависит от использования светящихся источников в качестве указания на присутствие темной материи. Эта же группа также нашла, исключительно из данных по сдвигам, что отношение  $w \equiv \bar{p}/\bar{\rho}$ , если предполагать его постоянным, меньше чем  $-0,8$  с достоверностью 68 %. Другая группа<sup>49)</sup>, комбинируя измерения сдвигов на основе данных обзора

<sup>48)</sup> H. Hoekstra *et al.*, *Astrophys. J.* **647**, 116 (2006) [astro-ph/0511089].

<sup>49)</sup> M. Jarvis, B. Jain, G. Bernstein and D. Dolney, *Astrophys. J.* **644**, 71 (2006) [astro-ph/0502243].

линзирования СТИО с данными по реликтовому излучению и измерениями красных смещений и светимостей сверхновых типа Ia, обнаружила, что  $\sigma_8 = 0,81^{+0,15}_{-0,21}$ , а отношение (считается постоянным) равно  $w = -0,89^{+0,16}_{-0,21}$  с достоверностью 95 %. Применение обзоров слабого линзирования в космологии в действительности только начинается.

## 9.6

### Космические струны

#### Вычисление отклонения • Подозрение на струны

Спонтанное нарушение симметрий в ранней Вселенной может привести к полевым неоднородностям, известным как космические струны<sup>50)</sup>. Помимо этого, космические струны — обычное явление в современных струнных теориях<sup>51)</sup>. За исключением того случая, что нам настолько не повезло и космическая струна проходит как раз сквозь Солнечную систему, единственный способ, которым можно обнаружить космическую струну, является, по-видимому, ее действие в роли гравитационной линзы<sup>52)</sup>.

На достаточном расстоянии  $r$  от струны гравитационное поле становится ньютоновским. Для длинной прямой струны решение уравнения Лапласа с цилиндрической симметрией обладает гравитационным потенциалом вида

$$\phi = 2G\sigma \ln r + C, \quad (9.6.1)$$

где  $\sigma$  и  $C$  — константы интегрирования. Если струна нерелятивистская, то  $\sigma$  является массой струны на единицу длины. На достаточном расстоянии от струны применимо постニュтоновское приближение, и направление светового луча  $\hat{u}$  описывается уравнением<sup>53)</sup>

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = 2\hat{u} \times (\hat{u} \times \nabla\phi). \quad (9.6.2)$$

Поскольку отклонение светового луча мало, то его можно найти в следующем виде

$$\delta\hat{u} = 2\hat{u}_0 \times \left( \hat{u}_0 \times \int dt \nabla\phi \right), \quad (9.6.3)$$

<sup>50)</sup> T. W. B. Kibble, *J. Phys. A* **9**, 1387 (1976); A. Vilenkin and E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge University press, Cambridge, 1994).

<sup>51)</sup> E. Witten, *Phys. Lett. B* **153**, 243 (1985); E. J. Copeland, R. C. Myers, and J. Polchinski, *J. High Energy Phys.* **0406**, 013 (2005) [hep-th/0312067].

<sup>52)</sup> Релятивистские вычисления линзирования космической струной приведены в работе J. R. Gott, *Astrophys. J.* **288**, 422 (1985). Обусловленная космическими струнами анизотропия реликтового излучения была вычислена в работе N. Kaiser and A. Stebbins, *Nature* **310**, 391 (1984).

<sup>53)</sup> См. сноска 17 в разд. 9.3.

где  $\hat{u}_0$  задает начальное направление фотона. Элементарное интегрирование показывает, что световой луч отклоняется к струне, по направлению, перпендикулярному как струне, так и световому лучу, на угол

$$|\delta\hat{u}| = \frac{4\pi\sigma G}{\sin\theta}, \quad (9.6.4)$$

где  $\theta$  — угол между направлениями струны и светового луча. Поскольку отклонение направлено к струне, то для лучей, проходящих струну с противоположных сторон, оно находится в противоположном направлении, так что изображение источника, расположенного за струной, раздваивается. Примечательно, что ни направление, ни величина этого отклонения не зависят от расстояния светового луча до струны, при условии что это расстояние достаточно велико, чтобы можно было пользоваться нерелятивистскими формулами (9.6.1) и (9.6.2).

Вывод отклонения светового луча космической струной, приведенный в разд. 9.6, применим лишь к линейной цепочке нерелятивистских масс. Для релятивистских струн, таких как сингулярность в вакуумных ожидаемых значениях, постニュтоновское приближение неприменимо. Отклонение для релятивистской струны было выведено А. Виленкиным<sup>54)</sup>, и оно задается формулой, подобной (9.6.4), но только  $\sin\theta$  стоит не в знаменателе, а в числителе.

В 2003 году, после открытия возможного кандидата линзирования космической струной, общий интерес к космическим струнам возрос. Было обнаружено, что пара изображений эллиптических галактик, разделенных на 1,8 угловых секунд, имеют практически одинаковое красное смещение,  $z = 0,46$ , и одинаковый спектр. Искажение изображений происходило не так, как ожидалось при линзировании одной галактики более-менее сферическим источником, а согласовывалось с линзированием космической струной<sup>55)</sup>. Впоследствии в окрестности этого струнного кандидата был обнаружен избыток линзирующих объектов<sup>56)</sup>, что стало дополнительным свидетельством в пользу того, что мы имеем дело с одной галактикой, линзированной космической струной. Но в 2006 году от данной интерпретации пришлось отказаться, после того как наблюдения на телескопе «Хаббл» выявили, что на самом деле это была пара взаимодействующих эллиптических галактик, а вовсе не результат линзирования того или иного рода<sup>57)</sup>. Данный эпизод иллюстрирует, насколько трудно будет обнаружить космические струны с помощью вызываемого ими линзирования.

<sup>54)</sup> A. V. Vilenkin, *Phys. Rev.* D23, 852 (1981).

<sup>55)</sup> M. V. Sazhin *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 343, 353 (2003) [astro-ph/0302547].

<sup>56)</sup> M. V. Sazhin *et al.* [astro-ph/0406516].

<sup>57)</sup> M. V. Sazhin *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 376, 1731 (2007) [astro-ph/0611744].

## Глава 10

# ИНФЛЯЦИЯ КАК ПРИЧИНА ВОЗНИКОВЕНИЯ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ

Наиболее захватывающий аспект космологических инфляционных теорий, описанных в гл. 4, состоит в том, что они приводят к естественному квантово-механическому механизму происхождения космологических флуктуаций, наблюдавшихся в реликтовом излучении и крупномасштабной структуре вещества<sup>1)</sup>, которые в будущем могут стать наблюдаемыми в гравитационных волнах<sup>2)</sup>. В гл. 6 мы видели, что величины адиабатических скалярных и тензорных флуктуаций, а также их зависимость от длины волны определяется начальными условиями только через величины  $\mathcal{R}_q^r$  и  $\mathcal{D}_q^r$  соответственно. Из уравнения (5.4.22) следует, что  $\mathcal{R}_q^r$  — значение калибровочно-инвариантной величины  $\mathcal{R}_q(t) \equiv A_q(t)/2 + H(t)\delta u_q(t)$  за горизонтом, т. е. при  $q/a(t) \ll H(t)$ , когда для адиабатических флуктуаций  $\mathcal{R}_q$  не зависит от времени. Аналогичным образом,  $\mathcal{D}_q^r$  — независящее от времени значение гравитационной волновой амплитуды  $\mathcal{D}_q(t)$  при  $q/a(t) \ll H(t)$ . На протяжении эры доминирования вещества или излучения  $a(t)$  возрастал по закону  $t^{2/3}$  или  $t^{1/2}$  соответственно, а хаббловская скорость  $H(t) \equiv \dot{a}(t)/a(t)$  убывала по закону  $1/t$ , поэтому любая длина волны может быть обнаружена за горизонтом, если в той или иной эпохе вернуться в достаточно ранние времена. Однако на протяжении эпохи инфляции, которая, как предполагается, предшествует эре доминирования излучения,  $H(t)$  была приблизительно (возможно, очень приблизительно) постоянной, а фактор  $a(t)$  возрастал более-менее экспоненциально, так что даже если в конце инфляции возмущение было за горизонтом, то в достаточно ранние времена эпохи инфляции оно неизбежно будет обнаружено глубоко под горизонтом. В эти очень ранние времена поля осциллировали гораздо более быстро, чем происходило расширение Вселенной, и поэтому их квантовые флуктуации были в точности такими, как в обычном пространстве Минковского. В этой главе мы рассмотрим адиабатические скалярные флуктуации и тензорные флуктуации, начиная с этой очень ранней эпохи, а затем те эпохи, когда флуктуации с различными длинами волн вошли

<sup>1)</sup> V. F. Mukhanov and G. V. Chibisov, *Sov. Phys. JETP Lett.* **33**, 532 (1981); S. Hawking, *Phys. Lett.* **115B**, 295 (1982); A. A. Starobinsky, *Phys. Lett.* **117B**, 175 (1982); A. Guth and S.-Y. Pi, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1110 (1982); J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt, and M. S. Turner, *Phys. Rev. D* **28**, 679 (1983); W. Fischler, B. Ratra, and L. Susskind, *Nucl. Phys. B* **259**, 730 (1985).

<sup>2)</sup> Космологическое образование гравитационных волн рассматривалось в работах L. P. Grishchuk, *Sov. Phys. JETP* **40**, 409 (1974); A. A. Starobinsky, *Sov. Phys. JETP Lett.* **30**, 682 (1979) и было вычислено в контексте инфляции в работе V. A. Rubakov, M. V. Sazhin, and A. V. Veryaskin, *Phys. Lett.* **115B**, 189 (1982).

под горизонт, вплоть до тех времен, когда  $\mathcal{R}_q(t)$  и  $\mathcal{D}_q(t)$  достигли постоянных значений  $\mathcal{R}_q^r(t)$  и  $\mathcal{D}_q^r(t)$ , которые измеряются по данным реликтового излучения и крупномасштабной структуры вещества и которые однажды могут быть измерены в прямых наблюдениях фонового гравитационного излучения.

## 10.1

### Скалярные флюктуации во время инфляции

Действие скалярного поля • Возмущения поля, плотности, давления и скорости

- Уравнения поля • ВКБ-решение в ранние моменты времени • Разложение Фурье
- Коммутационные соотношения • Вакуум Банча—Дэвиса • Гауссова статистика
- Возмущение кривизны  $\mathcal{R}$  • Уравнение Муханова—Сасаки • Предел  $\mathcal{R}_q^r$  вне горизонта • Число  $e$ -кратностей после выхода из-под горизонта • Экспоненциальный потенциал • Измерение силы спектрального индекса и флюктуаций • Значения параметров экспоненциального потенциала • Подтверждение простого действия

В первую очередь рассмотрим простейшую модель инфляции, с одним вещественным полем «инфлатона»  $\varphi(x)$  и действием (B.63):

$$I_\varphi = \int d^4x \sqrt{-\det g} \left[ -\frac{1}{2}g^{\mu\nu} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu} - V(\varphi) \right], \quad (10.1.1)$$

с произвольным вещественным потенциалом  $V(\varphi)$ . Это действие не является единственным возможным; мы займемся вопросом его правдоподобности в конце этого раздела.

В соответствии с наблюдаемой изотропией и однородностью Вселенной, усредненными на космологических масштабах, мы выбираем скалярное поле в виде невозмущенного вклада  $\bar{\varphi}(t)$ , зависящего только от времени, плюс малое возмущение  $\delta\varphi(x, t)$ :

$$\varphi(x, t) = \bar{\varphi}(t) + \delta\varphi(x, t). \quad (10.1.2)$$

Подобным образом, как в гл. 5–7, метрика задается невозмущенной метрикой Робертсона–Уокера  $\bar{g}_{\mu\nu}(t)$  (с  $K = 0$ ) плюс малое возмущение  $h_{\mu\nu}(x, t)$ :

$$g_{\mu\nu}(x, t) = \bar{g}_{\mu\nu}(t) + h_{\mu\nu}(x, t). \quad (10.1.3)$$

В приложении В показано, что тензор энергии-импульса скалярного поля имеет вид как в случае идеальной жидкости, при этом плотность энергии, давление и 4-вектор скорости задаются уравнениями (B.66)–(B.68) в виде

$$\begin{aligned} \rho &= -\frac{1}{2}g^{\mu\nu} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu} + V(\varphi), \quad p = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu} - V(\varphi), \\ u^\mu &= -\left[ -g^{\rho\sigma} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\rho} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\sigma} \right]^{-1/2} g^{\mu\tau} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\tau}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что плотность энергии и давление невозмущенного скалярного поля имеют вид

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2}\dot{\bar{\varphi}}^2 + V(\bar{\varphi}), \quad \bar{p} = \frac{1}{2}\dot{\bar{\varphi}}^2 - V(\bar{\varphi}), \quad (10.1.4)$$

а компоненты невозмущенного 4-вектора скорости равны

$$\bar{u}^i = 0, \quad \bar{u}^0 = 1. \quad (10.1.5)$$

В рассматриваемом случае уравнение Фридмана (с нулевой пространственной кривизной) принимает вид

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left( \frac{1}{2}\dot{\bar{\varphi}}^2 + V(\bar{\varphi}) \right), \quad (10.1.6)$$

а закон сохранения энергии  $\dot{\bar{\rho}} = -3H(\bar{\rho} + \bar{p})$  приводит к полевому уравнению для невозмущенного скалярного поля

$$\ddot{\bar{\varphi}} + 3H\dot{\bar{\varphi}} + V'(\bar{\varphi}) = 0, \quad (10.1.7)$$

где, как обычно,  $H(t) \equiv \dot{a}(t)/a(t)$ .

Возмущение метрики  $\delta g_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu}$  будет рассматриваться в ньютоновской калибровке (5.3.18):

$$h_{00} = -2\Psi, \quad h_{0i} = 0, \quad h_{ij} = -2a^2\delta_{ij}\Psi. \quad (10.1.8)$$

---

Вклад скалярной анизотропной инерции  $\pi^S$ , а также  $\pi^V$  и  $\pi^T$  обращаются в ноль в скалярных теориях поля, поэтому согласно уравнению (5.3.20) другое скалярное гравитационное возмущение  $\Phi$  в этом случае равно  $\Psi$ .

---

Возмущения давления, плотности энергии, 3-вектора скорости задаются выражениями (B.66)–(B.68), которые имеют первый порядок по возмущениям:

$$\delta\rho = \dot{\bar{\varphi}}\delta\dot{\varphi} + V'(\bar{\varphi})\delta\varphi - \Psi\dot{\bar{\varphi}}^2, \quad (10.1.9)$$

$$\delta p = \dot{\bar{\varphi}}\delta\dot{\varphi} - V'(\bar{\varphi})\delta\varphi - \Psi\dot{\bar{\varphi}}^2, \quad (10.1.10)$$

$$\delta u_i = \frac{\partial \delta u}{\partial x^i}, \quad \text{где} \quad \delta u = -\frac{\delta\varphi}{\dot{\bar{\varphi}}}. \quad (10.1.11)$$

В качестве полевых уравнений можно выбрать уравнение Эйнштейна (5.3.21) и закон сохранения энергии (5.3.24), принимающие следующий вид:

$$\dot{\Psi} + H\Psi = 4\pi G\dot{\bar{\varphi}}\delta\varphi, \quad (10.1.12)$$

$$\delta\ddot{\varphi} + 3H\delta\dot{\varphi} + \frac{\partial^2 V(\bar{\varphi})}{\partial\bar{\varphi}^2}\delta\varphi - \left(\frac{\nabla^2}{a^2}\right)\delta\varphi = -2\Psi\frac{\partial V(\bar{\varphi})}{\partial\bar{\varphi}} + 4\dot{\Psi}\dot{\bar{\varphi}}, \quad (10.1.13)$$

а связь (5.3.26) равна

$$\left(\dot{H} - \frac{\nabla^2}{a^2}\right)\Psi = 4\pi G(-\dot{\bar{\varphi}}\delta\dot{\varphi} + \ddot{\bar{\varphi}}\delta\varphi). \quad (10.1.14)$$

При выводе (10.1.14) мы пользуемся удобным соотношением  $\dot{H} = -4\pi G \dot{\bar{\varphi}}^2$ , которое следует из уравнений (10.1.6) и (10.1.7).

Полевое уравнение (5.3.20) уже было учтено при выборе  $\Phi = \Psi$ , а остальные полевые уравнения (5.3.19) и (5.3.22) и закон сохранения импульса (5.3.23) просто повторяют содержание уравнений (10.1.12)–(10.1.14).

Давайте сначала рассмотрим плосковолновые решения уравнений (10.1.12)–(10.1.14), в которых  $\delta\varphi$  и  $\Psi$  имеют соответственно вид  $\exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})\delta\varphi_q(t)$  и  $\exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})\Psi_q(t)$ . Позже мы вернемся к вопросу о том, как совместить эти решения при составлении возмущений  $\delta\varphi(\mathbf{x}, t)$  и  $\Psi(\mathbf{x}, t)$ . Временная зависимость плосковолновых решений задается уравнениями (10.1.12) и (10.1.13), в которых  $-\nabla^2$  заменено на  $q^2 \equiv \mathbf{q}^2$ :

$$\dot{\Psi}_q + H\Psi_q = 4\pi G \dot{\bar{\varphi}} \delta\varphi_q, \quad (10.1.15)$$

$$\delta\ddot{\varphi}_q + 3H\delta\dot{\varphi}_q + \frac{\partial^2 V(\bar{\varphi})}{\partial \bar{\varphi}^2} \delta\varphi_q + \left(\frac{q^2}{a^2}\right) \delta\varphi_q = -2\Psi_q \frac{\partial V(\bar{\varphi})}{\partial \bar{\varphi}} + 4\dot{\Psi}_q \dot{\bar{\varphi}}, \quad (10.1.16)$$

а связь (10.1.14) теперь принимает вид

$$\left(\dot{H} + \frac{q^2}{a^2}\right)\Psi_q = 4\pi G(-\dot{\bar{\varphi}}\delta\dot{\varphi}_q + \ddot{\bar{\varphi}}\delta\varphi_q). \quad (10.1.17)$$

При достаточно ранних временах  $q/a$  будет много больше чем  $H$  или  $\partial^2 V(\bar{\varphi})/\partial \bar{\varphi}^2$ , поэтому можно искать ВКБ-решения, для которых производные по времени от полей приводят к факторам порядка  $q/a$ , следующего вида:

$$\delta\varphi_q(t) \rightarrow f(t) \exp\left(-iq \int_{t_*}^t \frac{dt'}{a(t')}\right), \quad (10.1.18)$$

$$\Psi_q(t) \rightarrow g(t) \exp\left(-iq \int_{t_*}^t \frac{dt'}{a(t')}\right),$$

где  $f(t)$  и  $g(t)$  изменяются гораздо медленнее, чем аргумент экспоненты, а момент времени  $t_*$  произволен. Экспоненциальный фактор выбран таким образом, чтобы в уравнении (10.1.16) вклады второго порядка по  $q/a$  сокращались. Уравнения (10.1.15) и (10.1.17) выполняются в ведущем порядке по  $q/a$ , если взять

$$\frac{g}{f} = \frac{4i\pi G \dot{\bar{\varphi}} a}{q}. \quad (10.1.19)$$

Тогда вклады в уравнении (10.1.16) первого порядка по  $q/a$  приводят к  $2\dot{f} + 2Hf = 0$ , поэтому  $f \propto 1/a$ . По причинам, которые вскоре прояснятся,

в  $f$  и  $g$  выберем общий постоянный фактор, такой что

$$f = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2q} a}.$$

С учетом такой нормировки  $\delta\varphi_q(t)$  и  $\Psi_q(t)$  определяются как решение уравнений (10.1.15)–(10.1.17), которое удовлетворяет начальному условию, так что при  $a(t) \rightarrow 0$

$$\delta\varphi_q(t) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{3/2} a(t) \sqrt{2q}} \exp\left(-iq \int_{t_*}^t \frac{dt'}{a(t')}\right), \quad (10.1.20)$$

$$\Psi_q(t) \rightarrow \frac{4i\pi G \dot{\varphi}(t)}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2q^3}} \exp\left(-iq \int_{t_*}^t \frac{dt'}{a(t')}\right). \quad (10.1.21)$$

Комплексно сопряженные функции  $\delta\varphi_q^*(t)$ ,  $\Psi_q^*(t)$  — другое независимое решение, и поскольку система уравнений (10.1.15)–(10.1.17) второго порядка, они являются единственными решениями.

В общем случае поля  $\delta\varphi(x, t)$  и  $\Psi(x, t)$ , удовлетворяющие уравнениям (10.1.12)–(10.1.14), можно представить как суперпозиции этих двух решений, которые в силу вещественности полей имеют вид

$$\delta\varphi(x, t) = \int d^3 q [\delta\varphi_q(t) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \alpha(\mathbf{q}) + \delta\varphi_q^*(t) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \alpha^*(\mathbf{q})], \quad (10.1.22)$$

$$\Psi(x, t) = \int d^3 q [\Psi_q(t) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \alpha(\mathbf{q}) + \Psi_q^*(t) e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \alpha^*(\mathbf{q})]. \quad (10.1.23)$$

Теперь следует обсудить коэффициенты  $\alpha(\mathbf{q})$  и  $\alpha^*(\mathbf{q})$ . Для этой цели воспользуемся каноническими коммутационными соотношениями полей. Взаимодействие скалярного поля с гравитацией делает эти коммутаторы достаточно сложными, однако в очень ранние времена они упрощаются. Для любого заданного  $q$  существует достаточно ранний момент времени, такой что скорость расширения  $H$  пренебрежимо мала по сравнению с  $q/a$ . Для таких ранних времен  $\dot{\varphi}$  и  $\ddot{\varphi}$  в правой части уравнения (10.1.17) становятся пренебрежимо малы, поэтому  $\Psi_q$  становится пренебрежимо малым, что также можно увидеть, если заметить, что из уравнений (10.1.18) и (10.1.19) следует, что отношение  $\Psi_q$  к  $\delta\varphi_q$  стремится к нулю как  $a(t) \rightarrow 0$ . Что касается коэффициентов  $\alpha(\mathbf{q})$  и  $\alpha^*(\mathbf{q})$  в такие ранние времена, то канонические коммутационные соотношения можно найти с помощью (10.1.1), где  $g_{\mu\nu}$  выбирается в виде невозмущенной метрики Робертсона—Уокера:

$$I_\varphi = \int d^4 x \mathcal{L}_\varphi, \quad \mathcal{L}_\varphi = a^3(t) \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2a^2(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - V(\varphi) \right].$$

Тогда канонически сопряженный к полю  $\varphi$  импульс равен

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}_\varphi}{\partial \dot{\varphi}} = a^3 \dot{\varphi}.$$

Поскольку невозмущенные поля являются с-числами, то коммутаторы возмущений совпадают с коммутаторами собственно полей. Отсюда следует, что для очень ранних полей

$$[\delta\varphi(\mathbf{x}, t), \delta\varphi(\mathbf{y}, t)] = 0, \quad [\delta\varphi(\mathbf{x}, t), \delta\dot{\varphi}(\mathbf{y}, t)] = ia^{-3}(t)\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (10.1.24)$$

При  $\delta\varphi_q(t)$ , нормированном таким образом, что выполняется уравнение (10.1.20) при  $a(t) \rightarrow 0$ , данные коммутационные соотношения означают, что  $\alpha(\mathbf{q})$  и  $\alpha^*(\mathbf{q})$  ведут себя как стандартным образом нормированные операторы рождения и уничтожения:

$$[\alpha(\mathbf{q}), \alpha(\mathbf{q}')] = 0, \quad [\alpha(\mathbf{q}), \alpha^*(\mathbf{q}')] = \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}'). \quad (10.1.25)$$

Может показаться удивительным, что для возмущений скалярного и гравитационного полей возникают одинаковые операторы рождения и уничтожения, однако следует помнить, что  $\Psi$  не является гравитационным излучением, кванты которого рождаются и уничтожаются независимыми операторами. Вместо этого  $\Psi$  является вспомогательным полем, задаваемым уравнением (10.1.14) в виде функционала поля инфлатона  $\delta\varphi$ , практически таким же, как в квантовой электродинамике в кулоновской калибровке, когда временная компонента векторного потенциала является функционалом заряженных полей материи<sup>3)</sup>.

Отметим вскользь, что построенное нами скалярное поле согласуется с принципом эквивалентности общей теории относительности. Поскольку мы не интересуемся рассмотрением сопутствующих волновых чисел ниже некоторого инфракрасного предела  $Q$  (как, например, при ограничении измерений до куба сопутствующего объема, меньшего чем  $(2\pi/Q)^3$ ), то во времена, когда  $Q/a \gg H$ , вид скалярного поля  $\delta\varphi(\mathbf{x}, t)$  должен был быть фактически таким же, как у свободного безмассового скалярного поля  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  в обычном пространстве-времени Минковского:

$$\int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2k}} \left[ A(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{ax}} \exp\left(-i \int k dt\right) + A^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{ax}} \exp\left(i \int k dt\right) \right],$$

где  $A(\mathbf{k})$  и  $A^*(\mathbf{k})$  — это операторы уничтожения и рождения, подчиняющиеся известным коммутационным соотношениям

$$[A(\mathbf{k}), A(\mathbf{k}')] = 0, \quad [A(\mathbf{k}), A^*(\mathbf{k}')] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

Отметим, что возникающая в экспоненте пространственная координата равна  $a\mathbf{x}$ , потому что в метрике Робертсона—Уокера при  $K = 0$  она является век-

<sup>3)</sup> См. КТП, том 1, формула (8.2.9).

тором, измеряющим собственные расстояния. Отсюда следует, что  $\mathbf{k}$  связан с не зависящим от времени сопутствующим волновым вектором  $\mathbf{q}$  соотношением  $\mathbf{k} = \mathbf{q}/a$ , поэтому он зависит от времени, и именно поэтому зависящие от времени факторы были выбраны в виде  $\exp(\mp i \int k dt)$ , а не  $\exp(\mp i k t)$ . Помимо этого,  $\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = a^3 \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$ , поэтому можно определить удовлетворяющие (10.1.25) операторы  $\alpha(\mathbf{q})$  в виде  $\alpha(\mathbf{q}) = a^{-3/2} A^{\mathbf{k}}$ . Тогда замена переменной интегрирования  $\mathbf{k}$  на  $\mathbf{q}$  приводит при  $a(t) \rightarrow 0$  к полю вида

$$\int \frac{d^3 q / a^3}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{\frac{2q}{a}}} \left[ a^{3/2} \alpha(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \exp\left(-i \int \frac{q dt}{a}\right) + a^{3/2} \alpha^*(\mathbf{q}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \exp\left(i \int \frac{q dt}{a}\right) \right],$$

в согласии с уравнениями (10.1.20) и (10.1.22).

Наконец, нам следует выбрать квантовое состояние поля инфлатона во время инфляции. Хотя есть иные возможности, простейшее и наиболее естественное предположение состоит в том, что состояние Вселенной во время инфляции является вакуумным  $|0\rangle$ , определенным следующим образом<sup>4)</sup>:

$$\alpha(\mathbf{q})|0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1. \quad (10.1.26)$$

Другая возможность состоит в том, что вместо  $\alpha$  состояние  $|0\rangle$  уничтожает некоторая линейная комбинация  $\alpha$  и  $\alpha^*$ <sup>5)</sup>. Можно также предположить, что инфляция происходит в присутствии теплового распределения инфлатонов<sup>6)</sup>.

Хотя предположение (10.1.26) не является бесспорным, оно по крайней мере правдоподобно. Начальное условие (10.1.20), выбирающее частное решение системы уравнения второго порядка (10.1.15)–(10.1.17), накладывается в ранние времена, при которых  $q/a \gg H$ . В такие времена действие можно рассматривать так, как будто оно практически не зависит от времени, поэтому существует гамильтониан  $\mathcal{H}$ , который в хорошем приближении порождает временную зависимость полей:

$$[\mathcal{H}, \delta\varphi(\mathbf{x}, t)] \simeq -i\dot{\varphi}(\mathbf{x}, t).$$

Согласно уравнению (10.1.18), при  $q/a \gg H$  временная зависимость коэффициентной функции  $\varphi_q(t)$  задается в приближенном виде:

$$\dot{\varphi}_q \simeq -i \left( \frac{q}{a} \right) \varphi_q, \quad \text{откуда} \quad [\mathcal{H}, \alpha(\mathbf{q})] \simeq - \left( \frac{q}{a} \right) \alpha(\mathbf{q}).$$

Следовательно, если состояние  $|\psi\rangle$  является собственным для  $\mathcal{H}$  с энергией  $E$ , то  $\alpha(\mathbf{q})|\psi\rangle$  является собственным состоянием  $\mathcal{H}$  с меньшей энергией

<sup>4)</sup> Это состояние часто называют *вакуумом Банча–Дэвиса*: см. T. S. Bunch and P. C. W. Davies, *Proc. Roy. Soc. Ser. A* **360**, 117 (1978).

<sup>5)</sup> E. Mottola, *Phys. Rev. D* **31**, 754 (1985); B. Allen, *Phys. Rev. D* **32**, 3136 (1985).

<sup>6)</sup> K. Bhattacharya, S. Mohanty, and R. Rangarajan, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 121302 (2006).

$\simeq E - q/a$  до тех пор, пока  $|\psi\rangle$  не станет состоянием  $|0\rangle$ , для которого  $\alpha(\mathbf{q})|0\rangle = 0$  и которое тем самым является состоянием с наименьшей энергией. Так же как в обычной лабораторной физике, мы ожидаем, что любое другое состояние переходит в состояние  $|0\rangle$  наименьшей энергии, хотя при этом остается вопрос, происходит ли этот переход достаточно быстро, чтобы быть эффективным в период до вхождения под горизонт<sup>7)</sup>.

В состоянии, которое удовлетворяет (10.1.26), квантовые средние<sup>1</sup>

$$\langle 0|\delta\varphi(\mathbf{x}_1, t)\delta\varphi(\mathbf{x}_2, t)\dots|0\rangle$$

(а также вовлекающие  $\Psi(\mathbf{x}, t)$ ) можно вычислить, перетаскивая все операторы уничтожения  $\alpha(\mathbf{q})$  направо, а все операторы рождения налево, применяя коммутационные соотношения каждый раз, когда  $\alpha(\mathbf{q})$  перетаскивается направо через  $\alpha^*(\mathbf{q})$  или когда  $\alpha^*(\mathbf{q}')$  перетаскивается налево через  $\alpha(\mathbf{q}')$ . Тогда получаемый результат выражается *теоремой Вика*<sup>8)</sup>: квантовые средние произведений  $\delta\varphi$  и/или  $\Psi$  являются гауссовыми в смысле приложения  $E$  (за тем исключением, что надо следить за порядком операторов), со спариванием, задаваемым вакуумными значениями произведений спаренных полей:

$$\langle 0|\delta\varphi(\mathbf{x}, t)\delta\varphi(\mathbf{y}, t)|0\rangle = \int d^3q |\delta\varphi_q(t)|^2 e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}, \quad (10.1.27)$$

$$\langle 0|\Psi(\mathbf{x}, t)\Psi(\mathbf{y}, t)|0\rangle = \int d^3q |\Psi_q(t)|^2 e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}, \quad (10.1.28)$$

$$\langle 0|\delta\varphi(\mathbf{x}, t)\Psi(\mathbf{y}, t)|0\rangle = \int d^3q \delta\varphi_q(t)\Psi_q^*(t) e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}, \quad (10.1.29)$$

$$\langle 0|\Psi(\mathbf{x}, t)\delta\varphi(\mathbf{y}, t)|0\rangle = \int d^3q \Psi_q(t)\delta\varphi_q^*(t) e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}. \quad (10.1.30)$$

Например,

$$\begin{aligned} \langle 0|\delta\varphi(\mathbf{w}, t)\Psi(\mathbf{x}, t)\Psi(\mathbf{y}, t)\delta\varphi(\mathbf{z}, t)|0\rangle &= \\ &= \langle 0|\delta\varphi(\mathbf{w}, t)\Psi(\mathbf{x}, t)|0\rangle \langle 0|\Psi(\mathbf{y}, t)\delta\varphi(\mathbf{z}, t)|0\rangle + \\ &\quad + \langle 0|\delta\varphi(\mathbf{w}, t)\Psi(\mathbf{y}, t)|0\rangle \langle 0|\Psi(\mathbf{x}, t)\delta\varphi(\mathbf{z}, t)|0\rangle + \\ &\quad + \langle 0|\delta\varphi(\mathbf{w}, t)\delta\varphi(\mathbf{z}, t)|0\rangle \langle 0|\Psi(\mathbf{x}, t)\Psi(\mathbf{y}, t)|0\rangle. \end{aligned}$$

Эти величины являются квантовыми средними, а не средними по ансамблю классических полевых конфигураций. Наиболее явно это видно из уравнений (10.1.29) и (10.1.30), из которых вытекают комплексные выражения для средних от произведений вещественных полей, и следовательно, они

<sup>7)</sup> Этот вопрос изучен в работе C. Armendariz-Picon, *J. Cosm. & Astropart. Phys.* **0702**, 031 (2007) [astro-ph/0612288].

<sup>8)</sup> См. КТП, том 1, разд. 9.1.

также зависят от порядка перемножения полей<sup>9)</sup>. Точно так же как при измерении спина в лаборатории, здесь должно присутствовать что-то вроде декогерентности; полевые конфигурации должны полностью войти в один из ансамблей классических конфигураций, со средними по ансамблю, задаваемыми вакуумными значениями, вычисленными по аналогии с уравнениями (10.1.27)–(10.1.30). То, как это происходит, совсем не очевидно, но понятно, что декогерентность не может иметь место, пока вакуумные значения произведений вещественных полей не станут вещественными, что для свободных полей также означает, что вакуумные значения не зависят от порядка перемножения полей. Как будет видно, это происходит после того, как возмущения покидают горизонт, когда различные функции  $\varphi_q(t)$  и  $\Psi_q(t)$  начинают подавляться единственным решением полевых уравнений, которое (так как полевые уравнения вещественны) с необходимостью вещественно с точностью до возможного комплексного множителя. Как только Вселенная становится в этом смысле классической, можно воспользоваться эргодической теоремой из приложения D и интерпретировать средние по ансамблю возможных классических вселенных как средние по положениям наблюдателя в *нашей* Вселенной.

Для любого заданного потенциала  $V(\bar{\varphi})$  всегда возможно найти  $\varphi_q(t)$  и  $\Psi_q(t)$  путем численного решения уравнений (10.1.15)–(10.1.17) с начальными условиями (10.1.20) и (10.1.21). Однако этот путь сложен, и в итоге мы получаем больше информации, чем можем использовать. Между периодом инфляции и современной эпохой находится так называемый период разогрева, когда энергия поля инфлатона  $\varphi$  трансформируется в обычное вещество и излучение. Фактически, нам ничего не известно об этом процессе, поэтому решения для  $\delta\varphi$  и  $\Psi$  во время инфляции не имеют мгновенной интерпретации в терминах наблюдений современной Вселенной. К счастью, эпоха разогрева (и другие плохо понимаемые эпохи) происходит, когда космологические флуктуации, представляющие наблюдательную ценность, находятся за горизонтом. Одно из полезных свойств, которые можно извлечь из решений для полей во время инфляции, состоит в возможности вычислить некоторую величину, которая сохраняется за горизонтом, и, таким образом, приводит к начальному условию для эволюции возмущений, после того как они заново возникли под горизонтом.

Далее мы сосредоточимся на рассмотрении величины  $\mathcal{R}$  из разд. 5.4, определенной в ньютоновской калибровке соотношением

$$\mathcal{R} \equiv -\Psi + H\delta u. \quad (10.1.31)$$

Для одного скалярного поля она сохраняется за горизонтом во время инфляции, потому что, как показано в разд. 5.4, всегда есть два решения, для которых  $\mathcal{R}$  постоянна при  $q/a \ll H$ , и как уже отмечалось, уравнения инфляции с одним полем имеют только два независимых решения. С помощью

---

<sup>9)</sup> Обсуждение этого вопроса есть в работе D. H. Lyth and D. Seery, [astro-ph/0607647].

(10.1.11) и (10.1.22)–(10.1.23) находим, что во время инфляции

$$\mathcal{R}(\mathbf{x}, t) = \int d^3 q [\mathcal{R}_q(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \alpha(\mathbf{q}) + \mathcal{R}_q^*(t) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \alpha^*(\mathbf{q})], \quad (10.1.32)$$

где

$$\mathcal{R}_q = -\Psi_q - \frac{H\delta\varphi_q}{\dot{\varphi}}. \quad (10.1.33)$$

Разумеется, квантовые средние произведений  $\mathcal{R}(\mathbf{x}, t)$  являются гауссовыми в том же смысле, что и средние от  $\Psi_q(t)$  и  $\delta\varphi_q(t)$ , со спариванием, задаваемым вакуумным значением

$$\langle 0 | \mathcal{R}(\mathbf{x}, t) \mathcal{R}(\mathbf{y}, t) | 0 \rangle = \int d^3 q e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} |\mathcal{R}_q(t)|^2. \quad (10.1.34)$$

Вместо того, чтобы вычислять  $\Psi_q(t)$  и  $\delta\varphi_q(t)$ , а затем воспользоваться полученными результатами для вычисления  $\mathcal{R}_q(t)$ , гораздо более удобно решить дифференциальное уравнение для самого  $\mathcal{R}_q(t)$ . Это уравнение несколько проблематичным образом может быть получено в ньютоновской калибровке из уравнений (10.1.15)–(10.1.17), однако гораздо проще использовать другую калибровку, задаваемую условиями

$$\delta\varphi_q = 0, \quad B_q = 0.$$

Рассмотрение уравнений (B.66)–(B.68) показывает, что в этой калибровке

$$\delta\rho = \delta p = \frac{1}{2} h_{00} \dot{\bar{\varphi}}^2 = -\frac{1}{2} E \dot{\bar{\varphi}}^2, \quad \delta u = 0.$$

Помимо этого, в приложении В упоминается, что тензор энергии-импульса для одного вещественного поля имеет вид, как в случае идеальной жидкости, поэтому анизотропная инерция  $\pi_{ij}$  обращается в ноль. Тогда из гравитационных полевых уравнений (5.1.44) и (5.1.46), а также из закона сохранения энергии (5.1.49) следует

$$\begin{aligned} 0 &= H\dot{E} + 2(3H^2 + \dot{H})E + a^{-2}\nabla^2 A - \ddot{A} - 6H\dot{A} + 2a^{-1}H\nabla^2 F, \\ 0 &= -HE + \dot{A}, \\ 0 &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(E\dot{H}) - 3H\dot{H}E - a^{-1}\dot{H}\nabla^2 F + \frac{3}{2}\dot{H}\dot{A}, \end{aligned}$$

в которых опять было использовано соотношение  $\dot{H} = -4\pi G|\dot{\bar{\varphi}}|^2$ . Исключение  $E$  и  $F$  приводит к дифференциальному уравнению на  $A$ :

$$\ddot{A} + \left(3H - \frac{2\dot{H}}{H} + \frac{\ddot{H}}{\dot{H}}\right)\dot{A} - \frac{1}{a^2}\nabla^2 A = 0.$$

Из калибровочно-инвариантной формулы (5.4.22) следует, что в этой калибровке  $\mathcal{R} = A/2$ , поэтому такое же уравнение применимо к  $\mathcal{R}$ . Переходя

к фурье-образу, получаем уравнение, которое иногда называют уравнением Муханова—Сасаки<sup>10)</sup>:

$$\frac{d^2\mathcal{R}_q}{d\tau^2} + \frac{2}{z} \frac{dz}{d\tau} \frac{d\mathcal{R}_q}{d\tau} + q^2 \mathcal{R}_q = 0, \quad (10.1.35)$$

где  $\tau$  — это конформное время<sup>11)</sup>,

$$\tau \equiv \int_{t_*}^t \frac{dt'}{a(t')}, \quad (10.1.36)$$

а  $t_*$  — это произвольный момент времени, который будет зафиксирован позднее, и

$$z \equiv \frac{a\dot{\varphi}}{H}. \quad (10.1.37)$$

Начальное условие можно получить, если вернуться обратно к ньютоновской калибровке и подставить выражения (10.1.20) и (10.1.21) в уравнение (10.1.33). Предполагая, что  $a(t)\dot{\varphi}/H(t)$  обращается в ноль в пределе  $a(t) \rightarrow 0$ , в уравнении (10.1.33) только пропорциональное  $\delta\varphi_q$  слагаемое дает вклад в этом пределе, поэтому для  $a(t) \rightarrow 0$  получаем:

$$\mathcal{R}_q(t) \rightarrow -\frac{H(t)}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2q} a(t)\dot{\varphi}(t)} \exp(-iq\tau). \quad (10.1.38)$$

Для заданного потенциала необходимо проинтегрировать уравнение (10.1.35) от  $a = 0$  до значений за пределами горизонта, где  $q/a \ll H$ . В этом пределе вклад  $q^2\mathcal{R}_q$  в (10.1.35) можно отбросить; тогда итоговое уравнение имеет два решения: доминантное решение с ненулевой константой  $\mathcal{R}_q^r$ , и решение, для которого  $\mathcal{R}_q$  стремится к нулю при  $d\mathcal{R}_q/d\tau$ , убывающем как  $1/z^2$ . Нам нужен именно константный предел  $\mathcal{R}_q^r$  величины  $\mathcal{R}_q(t)$  за горизонтом.

В разд. 5.3 мы видели, что значение величины  $\zeta_q$ , которое иногда используется при анализе космологических флюктуаций, задается далеко за пределами горизонта соотношением  $\zeta_q^r = \mathcal{R}_q^r$ .

<sup>10)</sup> V. F. Mukhanov, *JETP Lett.* **41**, 493 (1986); S. Sasaki, *Prog. Theor. Phys.* **76**, 1036 (1986); V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, and R. H. Brandenberger, *Phys. Rep.* **215**, 203 (1992); E. D. Stewart and D. H. Lyth, *Phys. Lett. B* **302**, 171 (1993).

<sup>11)</sup> В космологии конформное время определяется как время фотона, летящего по геодезической на мировом конусе  $ds^2 = dt^2 - a^2(t) dr^2 = 0$ , где  $a(t)$  — масштабный фактор Робертсона—Уокера. Иными словами, вместо абсолютного эталона длины (1 м) вводится относительный эталон, расширяющийся вместе со Вселенной, при этом возникает связь между координатным расстоянием и конформным временем:

$$r(\tau) = \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = \tau_0 - \tau.$$

Поразительно, что помимо набора сделанных здесь общих предположений, нет необходимости выдвигать какие-либо произвольные предположения насчет величины космологических флюктуаций. Для любого заданного потенциала необходимо всего лишь решить уравнение (10.1.35) с начальным условием (10.1.38) и продлить полученное решение вперед во времени до того момента, когда  $\mathcal{R}_q(t)$  принимает свое постоянное значение  $\mathcal{R}_q^\Gamma$  за горизонтом.

От каких свойств потенциала зависит  $\mathcal{R}_q^\Gamma$ ? Начальное поведение  $\mathcal{R}_q(t)$  (10.1.38) глубоко под горизонтом не зависит от природы потенциала, а снаружи горизонта  $\mathcal{R}_q(t)$  просто становится константой. Таким образом,  $\mathcal{R}_q^\Gamma$  может зависеть только от поведения потенциала  $V(\varphi)$  для  $\varphi$  вблизи значения, которое принимает  $\bar{\varphi}(t)$  в момент времени, когда возмущение уходит с горизонта.

Это утверждение имеет важное следствие для той части эпохи инфляции, которую можно изучить с помощью наблюдений скалярных флюктуаций. Мы только что видели, что при наблюдении флюктуации с сопутствующим волновым числом  $q$  выясняется время  $t_q$ , когда она покидает горизонт во время инфляции, при  $q/a(t_q) = H(t_q)$ . Это можно выразить иначе: число  $e$ -кратностей  $\mathcal{N}(q)$  между моментом времени  $t_q$ , которое мы выяснили, наблюдая возмущение с волновым числом  $q$ , и началом эры доминирования излучения в момент времени  $t_1$  равно<sup>12)</sup>

$$\mathcal{N}(q) \equiv \ln \left( \frac{a(t_1)}{a(t_q)} \right) = \mathcal{N}_0 + \ln \left( \frac{a(t_0)H(t_0)}{q} \right) + \ln \left( \frac{H(t_q)}{H(t_1)} \right), \quad (10.1.39)$$

где

$$\mathcal{N}_0 \equiv \ln \left( \frac{a(t_1)H(t_1)}{a(t_0)H(t_0)} \right), \quad (10.1.40)$$

где  $t_0$ , как обычно, соответствует настоящему моменту. В частности, мы не можем наблюдать какую-либо флюктуацию до тех пор, пока  $q$  достаточно велико, чтобы войти под горизонт к настоящему времени, что требует, чтобы физическая длина волны  $a(t_0)/q$  в настоящее время была меньше текущего расстояния до горизонта  $\approx 1/H(t_0)$ , поэтому максимальное число  $e$ -кратностей до начала эры доминирования излучения, которое вообще можно наблюдать, равно

$$\mathcal{N}_{\max} = \mathcal{N}_0 + \ln \left( \frac{H(t)}{H(t_1)} \right)_{\max}, \quad (10.1.41)$$

где второе слагаемое в правой части является максимальным значением  $\ln [H(t)/H(t_1)]$  для  $t$  в течение последних  $\mathcal{N}_{\max}$   $e$ -кратностей инфляции. В целом мы ожидаем, что энергия будет теряться во время инфляции и на протяжении фазы разогрева в конце инфляции, поэтому  $H(t_{\text{вых}}) > H(t_1)$ , и следовательно,  $\mathcal{N}_{\max} > \mathcal{N}_0$ , однако для инфляции с медленным скатыванием

<sup>12)</sup> A. R. Liddle and S. M. Leach, *Phys. Rev. D* **68**, 103503 (2003) [astro-ph/0305263].

вполне допустимым приближением будет пренебречь этой потерей энергии, в случае чего вторым слагаемым в (10.1.41) можно пренебречь, и

$$\mathcal{N}_{\max} \simeq \mathcal{N}_0. \quad (10.1.42)$$

Причина, по которой мы записали формулу для  $\mathcal{N}(q)$  в виде (10.1.39), состоит в том, что в разд. 4.1 мы уже вычислили  $\mathcal{N}_0$ ; оно равно

$$\mathcal{N}_0 = \ln \left( \frac{\rho_1^{1/4}}{0,037 h \text{ эВ}} \right), \quad (10.1.43)$$

где  $\rho_1$  — плотность энергии в начале эры доминирования излучения. Например, если выбрать  $h = 0,7$  и  $\rho_1 = G^{-2} = [1,2 \times 10^{19} \text{ ГэВ}]^4$ , то  $\mathcal{N}_0 \simeq 68$ , и согласно уравнению (10.1.42), можно изучать лишь финальные 68  $e$ -кратностей инфляции. Это ограничение будет заново получено в разд. 10.3, с более точной оценкой  $\rho_1$ .

Существует частный потенциал, для которого константу  $\mathcal{R}_q^\Gamma$  можно вычислить аналитически, без дальнейших приближений<sup>13)</sup>. Он имеет экспоненциальный вид

$$V(\varphi) = g e^{-\lambda\varphi} \quad (10.1.44)$$

( $g$  и  $\lambda$  — произвольные константы), который мы уже рассматривали в разд. 4.2. Разумеется, этот потенциал не может иметь такой вид для всех  $\varphi$ , иначе инфляция никогда не завершится, однако как отмечалось в предыдущем параграфе, при вычислении  $\mathcal{R}_q^\Gamma$  существенно только то, что потенциал должен иметь этот вид для поля вблизи значения, которое оно принимает при пересечении горизонта.

Решение уравнений (10.1.6) и (10.1.7) для экспоненциального потенциала равно

$$\bar{\varphi}(t) = \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{8\pi G g \epsilon^2 t^2}{3 - \epsilon} \right), \quad (10.1.45)$$

и

$$H = \frac{1}{\epsilon t}, \quad (10.1.46)$$

где  $\epsilon$  — это положительная безразмерная величина,

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{\lambda^2}{16\pi G}. \quad (10.1.47)$$

Инфляция при таком потенциале часто называется степенной инфляцией, потому что  $a \propto t^{1/\epsilon}$ . Удобно ненадолго нормировать сопутствующие координаты следующим образом:

$$a = t^{1/\epsilon}. \quad (10.1.48)$$

---

<sup>13)</sup> L. F. Abbott and M. B. Wise, *Nucl. Phys. B* **244**, 541 (1984); F. Lucchin and S. Matarrese, *Phys. Rev. D* **32**, 1316 (1985); *Phys. Lett. B* **164**, 282 (1985); D. H. Lyth and E. D. Stewart, *Phys. Lett. B* **274**, 168 (1992).

Отметим, что  $a\dot{\varphi}^2/H \propto t^{(1-\epsilon)/\epsilon}$ , поэтому наше предыдущее предположение, что  $a\dot{\varphi}^2/H$  обращается в ноль при  $a(t) \rightarrow 0$ , справедливо при  $\epsilon < 1$ , как и предполагалось.

Для данного потенциала в определении (10.1.36) конформного времени удобно выбрать постоянную  $t_*$  как  $t_* = -\infty$ , и в этом случае конформное время отрицательно:

$$\tau = -\left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\right)t^{-(1-\epsilon)/\epsilon}. \quad (10.1.49)$$

Поскольку  $t$  и  $a(t)$  изменяются от нуля до бесконечности, то  $\tau$  изменяется от  $-\infty$  до нуля. Теперь, в терминах  $\tau$ , уравнение (10.1.35) принимает вид

$$\frac{d^2\mathcal{R}_q}{d\tau^2} - \frac{2}{(1-\epsilon)\tau} \frac{d\mathcal{R}_q}{d\tau} + q^2\mathcal{R}_q = 0, \quad (10.1.50)$$

и его решения пропорциональны  $\tau^\nu$ , умноженному на функцию Ганкеля  $H_\nu^{(1)}(-qr)$  или  $H_\nu^{(2)}(-qr)$ , где

$$\nu = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1-\epsilon}\right) = \frac{3}{2} + \frac{\epsilon}{1-\epsilon}. \quad (10.1.51)$$

Для больших вещественных  $x$  первая функция Ганкеля имеет асимптотическое поведение:

$$H_\nu^{(1)}(x) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp\left(ix - \frac{i\nu\pi}{2} - \frac{i\pi}{4}\right),$$

и  $H_\nu^{(2)}(x) = H_\nu^{(1)*}(x)$ , поэтому начальное условие (10.1.38) выбирает решение  $\propto \tau^\nu H_\nu^{(1)}(-qr)$  и фиксирует его нормировку так, чтобы

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_q(t) = & -\frac{\lambda\sqrt{\pi}}{4(2\pi)^{3/2}\epsilon} \left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\right)^{-1/(1-\epsilon)} \times \\ & \times \exp\left(\frac{i\pi\nu}{2} + \frac{i\pi}{4}\right) (-\tau)^\nu H_\nu^{(1)}(-qr). \end{aligned} \quad (10.1.52)$$

Для малых вещественных  $x$

$$H_\nu^{(1)}(x) \rightarrow \frac{-i\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu},$$

поэтому за горизонтом, в пределе  $q/a \ll H$ , где  $-qr \ll 1$ , величина  $\mathcal{R}_q$  стремится к константе  $\mathcal{R}_q^r$ , задаваемой выражением (10.1.52) как

$$\mathcal{R}_q^r = i \frac{\lambda\Gamma(\nu)}{8\sqrt{2}\pi^2\epsilon} \left(\frac{\epsilon}{1-\epsilon}\right)^{-1/(1-\epsilon)} \exp\left(\frac{i\pi\nu}{2} + \frac{i\pi}{4}\right) \left(\frac{q}{2}\right)^{-\nu} \quad (10.1.53)$$

Чтобы сравнивать с решениями, полученными для других потенциалов, удобно переписать это выражение в терминах величин в момент времени  $t_q$  пересечения горизонта, определенных соотношением

$$\frac{q}{a(t_q)} = H(t_q). \quad (10.1.54)$$

Отсюда получаем, что  $t_q = (\epsilon q)^{\epsilon/(1-\epsilon)}$  и  $H(t_q) = q^{-\epsilon/(1-\epsilon)} \epsilon^{-1/(1-\epsilon)}$ . Также удобно воспользоваться уравнением (10.1.47) и выразить  $\lambda$  в терминах  $\epsilon$  и  $G$ . Тогда выражение (10.1.53) можно переписать в виде

$$\zeta_q^r = \mathcal{R}_q^r = i\sqrt{16\pi G} q^{-3/2} H(t_q) \frac{\Gamma(\nu) 2^{\nu-3/2}}{4\pi^2 \sqrt{\epsilon}} (1-\epsilon)^{1/(1-\epsilon)} \exp\left(\frac{i\pi\nu}{2} + \frac{i\pi}{4}\right). \quad (10.1.55)$$

Отметим, что эта формула не зависит от соглашений, выбранных нами в выражении (10.1.48) для постоянного фактора в  $a(t)$ .

Чтобы иметь достаточное количество  $\epsilon$ -кратностей инфляции, необходимо чтобы потенциал был вполне плоский, поэтому в основном интересуемся случаем малого  $\epsilon$ . При  $\epsilon \ll 1$  пользуемся  $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$  и переписываем уравнение (10.1.55) в виде

$$\zeta_q^r = \mathcal{R}_q^r = i\sqrt{16\pi G} q^{-3/2} H(t_q) \frac{1}{8\pi^{3/2} \sqrt{\epsilon}}. \quad (10.1.56)$$

Наиболее важный момент состоит в том, что для почти плоского потенциала, для которого  $H(t_q)$  почти не зависит от  $q$ ,  $\mathcal{R}_q^r$  практически пропорциональна  $q^{-3/2}$ . Это результат справедлив не только для потенциалов экспоненциального вида, а для всех потенциалов, почти плоских для полей вблизи  $\bar{\varphi}(t_q)$ .

Приблизительная  $q^{-3/2}$  зависимость  $\mathcal{R}_q^r$  от  $q$  хорошо подтверждается в наблюдениях. В разд. 8.1 мы видели, что степенная спектральная функция  $P(k)$ , которая описывает распределение темной материи, имеет зависимость от физического волнового числа  $k$ , которая при малых  $k$  заключена в факторе  $k^4 |\mathcal{R}_{ka_0}^r|^2$ , поэтому любой потенциал, почти плоский для полей вблизи  $\bar{\varphi}(t_q)$  приводит к спектру, близкому к спектру Зельдовича—Гаррисона,  $P(k) \propto k$  при малых  $k$ . Помимо этого, в разд. 6.3 мы видели, что спектральная функция  $\mathcal{P}_\phi(q)$  для ньютоновского гравитационного потенциала пропорциональна  $|\mathcal{R}_q^r|^2$  в случае больших длин волн, что, как показано в разд. 2.6, означает (помимо интегрального эффекта Сакса—Вольфе и эффектов реонизации), что величина  $\ell(\ell+1)C_\ell$  перестает зависеть от  $\ell$  при малых  $\ell$ . В разд. 7.2 и 7.4 мы видели, что приблизительная пропорциональность  $\mathcal{R}_q^r$  степени  $q^{-3/2}$  приводит к ответам для корреляторов флюктуаций температуры и поляризации реликтового излучения при больших значениях  $\ell$ , которые находятся в хорошем соответствии с наблюдениями.

Если точнее, то из уравнения (10.1.53) следует, что для экспоненциального потенциала скалярный спектральный индекс, определенный в разд. 7.2

соотношением  $|\mathcal{R}_q^r|^2 \propto q^{-4+ns}$ , имеет постоянное значение

$$n_s = 4 - 2\nu = 1 - \frac{2\epsilon}{1 - \epsilon}.$$

Таким образом, из результата WMAP третьего года  $n_s = 0,958 \pm 0,016$ , упомянутого в разд. 7.2, следует, что для экспоненциального потенциала  $\epsilon = 0,021 \pm 0,008$ . Эта величина достаточно мала, так что можно воспользоваться приближенной формулой (10.1.56). Выписывая  $|\mathcal{R}_q^r|^2 \simeq |N|^2 q^{-3}$ , видим, что для экспоненциального потенциала

$$|N|^2 \simeq \frac{GH_{\text{вых}}^2}{4\pi^2\epsilon},$$

где  $H_{\text{вых}}$  — скорость расширения в момент пересечения горизонта, и теперь мы пренебрегаем ее слабой зависимостью от  $q$ . Таким образом, из результата WMAP третьего года  $|N|^2 = (1,93 \pm 0,12) \times 10^{-10}$ , упомянутого в разд. 7.2, следует, что для экспоненциального потенциала  $H_{\text{вых}} \simeq 2\pi|N|\sqrt{\epsilon/G} \simeq 1,5 \times 10^{14}$  ГэВ, что соответствует плотности энергии  $3H_{\text{вых}}^2/(8\pi G) \simeq [2,6 \times 10^{16}$  ГэВ]<sup>4</sup>.

Разумеется, экспоненциальный потенциал — это лишь один частный случай с особым свойством  $V''/V = (V'/V)^2$ , так что нет никакой причины ожидать, что полученные результаты будут в точности применимы для других потенциалов. В разд. 10.3 будет видно, чего следует ожидать для потенциалов общего вида при условии приближения медленного скатывания. Однако в рамках приближения медленного скатывания результаты для потенциалов общего вида совпадают по порядку величины с уже полученными результатами в случае экспоненциального потенциала.

Теперь мы можем рассмотреть правдоподобность предположения о том, что действие имеет именно такой простой вид, как в (10.1.1)<sup>14)</sup>. Для одного вещественного скалярного поля  $\chi$  можно без потери общности выбрать действие в виде (10.1.1), если предположить, что действие содержит не более двух

<sup>14)</sup> Существует широкий пласт литературы, посвященной изучению других возможных действий. Здесь приводится лишь частичный список: C. Armendariz-Picon, T. Damour, and V. Mukhanov, *Phys. Lett. B* **458**, 209 (1999) [hep-th/9904075]; J. Martin and R. H. Brandenberger, *Phys. Rev. D* **63**, 1235012 (2001) [hep-th/0005209]; R. H. Brandenberger and J. Martin, *Mod. Phys. Lett. A* **16**, 999 (2001) [astro-ph/0005432]; J. C. Niemeyer, *Phys. Rev. D* **63**, 123502 (2001) [astro-ph/0005533]; J. C. Niemeyer and R. Parentani, *Phys. Rev. D* **64**, 101301 (2001) [astro-ph/0101451]; A. Kempf and J. C. Niemeyer, *Phys. Rev. D* **64**, 103501 (2001) [astro-ph/0103225]; R. Easther, B. R. Greene, W. H. Kinney, and G. Shiu, *Phys. Rev. D* **64**, 103502 (2001) [hep-th/0104102]; *Phys. Rev. D* **66**, 023518 (2002); *Phys. Rev. D* **67**, 063508 (2003) [hep-th/0110226]; R. H. Brandenberger, S. E. Joras, and J. Martin, *Phys. Rev. D* **66**, 083514 (2002) [hep-th/0112122]; N. Kaloper, M. Kleban, A. Lawrence, and S. Shenker, *Phys. Rev. D* **66**, 123510 (2002) [hep-th/0201158]; N. Kaloper, M. Kleban, A. Lawrence, S. Shenker, and L. Susskind, *J. High Energy Phys.* **0211**, 037 (2002) [hep-th/0209231]; U. H. Danielsson, *Phys. Rev. D* **66**, 023511 (2002); L. Bergström and U. H. Danielsson, *J. High Energy Phys.* **12**, 38 (2002); C. P. Burgess, J. M. Cline, F. Lemieux, and R. Holman, *J. High Energy Phys.* **2**, 48 (2003); J. Martin and R. Brandenberger, *Phys. Rev. D* **68**, 063513 (2003); J. Martin and C. Ringeval, *Phys. Rev. D* **69**, 083515 (2004); T. Okamoto and E. A. Lim, *Phys. Rev. D* **69**, 083519 (2004); R. de Putter and E. V. Linder, 0705.0400.

пространственно-временных производных<sup>15)</sup>. В этом случае действие самого общего вида равно

$$I_\chi = \int d^4x \sqrt{-\det g} \left[ -\frac{1}{2}K(\chi)g^{\mu\nu} \frac{\partial\chi}{\partial x^\mu} \frac{\partial\chi}{\partial x^\nu} - U(\chi) \right],$$

где  $K$  и  $U$  — вещественные функции от  $\chi$ , являющиеся произвольными, за исключением того, что из унитарности следует  $K \geq 0$ . Данное действие можно привести к виду (10.1.1) посредством замены  $\varphi = \int d\chi K^{1/2}(\chi)$ .

Но почему вклады в действии должны содержать лишь билинейные вклады пространственно-временных производных? И это лишь один из многих аналогичных вопросов: почему действие для гравитации должно содержать лишь пропорциональный  $\int d^4x \sqrt{-\det g} R$  эйнштейновский вклад, а не другие общековариантные слагаемые с более чем двумя производными метрики? И почему действие стандартной электрослабой модели или квантовой хромодинамики содержит только перенормируемые члены?

Мы не знаем, как ответить на любой из поставленных вопросов хотя бы с той или иной степенью определенности, но мы по крайней мере знаем правдоподобный ответ. Любое из этих дополнительных слагаемых в действии будет вовлекать операторы возрастающей размерности, однако из размерного анализа следует, что такие слагаемые должны сопровождаться дополнительными отрицательными степенями некоторой фундаментальной массы. Если эта масса достаточно велика, то при обычных условиях дополнительные слагаемые в действии подавляются. Чтобы общая теория относительности имела смысл, необходимо потребовать, чтобы длина  $1/M$  была субмикроскопической, однако если не накладывать условия сохранения барионов и лептонов, фундаментальная масса, возникающая в действии для кварков и лептонов, должна быть по меньшей мере порядка  $10^{16}$  ГэВ, что позволяет подавлять распад протона ниже экспериментальных ограничений.

Считается, что поле инфлатона принимает значения порядка планковской массы, поэтому нечем подавлять произвольные степени скалярного поля в инфлатонном действии, и именно поэтому потенциал  $V(\varphi)$  выбирается произвольным. Однако пространственно-временные производные поля инфлатона приводят к факторам порядка  $q/a$ , поэтому каждая дополнительная пространственно-временная производная даст фактор порядка  $q/(aM)$ . При пересечении горизонта  $q/a$  равно  $H$ , что, как мы видели, имеет порядок  $10^{14}$  ГэВ, между тем, как мы ожидали,  $M$  должна быть много больше, со значениями где-то в диапазоне от  $|V|^{1/4} \approx 10^{16}$  ГэВ до  $1/\sqrt{G} \simeq 10^{19}$  ГэВ. Следовательно, правдоподобно, что в момент пересечения горизонта и после пересечения, *а также в течение некоторого времени перед пресечением горизонта*, слагаемые в действии, у которых больше минимального числа пространственно-временных производных, подавляются. Это все, что нам требуется

<sup>15)</sup> Более точно: действие должно быть билинейным по пространственно-временным производным. — Прим. ред. перев.

для обоснования вычислений текущего раздела, по крайней мере в качестве хорошего первого приближения до тех пор, пока мы придерживаемся теории с одним полем инфлатона. Возможность нескольких полей инфлатона будет обсуждаться в разд. 10.4.

## 10.2

### Тензорные флуктуации во время инфляции

**Уравнения гравитационного поля** • ВКБ-решение в ранние моменты времени • Разложение Фурье • Коммутационные соотношения • Отношение скаляр/тензор  $r$  • Наблюдательные границы на  $r$

Флуктуации тензорного поля  $D_{ij}(\mathbf{x}, t)$  во время инфляции можно рассматривать аналогично скалярным флуктуациям, рассмотренным в предыдущем разделе. Поскольку тензор анизотропной инерции  $\pi_{ij}^T$  обращается в ноль в теориях скалярного поля, то полевое уравнение (5.1.53) для тензорных мод принимает простой вид:

$$\nabla^2 D_{ij} - a^2 \ddot{D}_{ij} - 3a\dot{a}\dot{D}_{ij} = 0. \quad (10.2.1)$$

Напомним также, что  $D_{ij}$  удовлетворяет условиям, которые приводят к исключению любых векторных или скалярных вкладов:

$$D_{ij} = D_{ji}, \quad D_{ii} = 0, \quad \partial_i D_{ij} = 0. \quad (10.2.2)$$

Плосковолновые решения имеют вид  $e_{ij}\mathcal{D}_q(t)e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}$ , где  $\mathcal{D}_q(t)$  подчиняется дифференциальному уравнению

$$\ddot{\mathcal{D}}_q + 3H\dot{\mathcal{D}}_q + \left(\frac{q^2}{a^2}\right)\mathcal{D}_q = 0, \quad (10.2.3)$$

а  $e_{ij}$  — не зависящий от времени тензор поляризации, удовлетворяющий условиям

$$e_{ij} = e_{ji}, \quad e_{ii} = 0, \quad q_i e_{ij} = 0. \quad (10.2.4)$$

Напомним из разд. 5.2, что для заданного единичного вектора  $\hat{q}$  есть два независимых тензора поляризации, удовлетворяющих этим условиям. Для  $\hat{q}$ , лежащего в 3-направлении, компоненты этих тензоров можно выбрать в следующем виде:

$$e_{11} = -e_{22} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad e_{12} = e_{21} = \pm \frac{i}{\sqrt{2}}, \quad e_{3i} = e_{i3} = 0. \quad (10.2.5)$$

Для  $\hat{q}$ , лежащего в любом другом направлении, определим  $e_{ij}$  как тензор, получающийся применением к (10.2.5) стандартного вращения (7.4.12), которое переводит 3-ось в направление  $\hat{q}$ . Построенные таким способом тензоры поляризации обозначаются  $e_{ij}(\hat{q}, \pm 2)$ , потому что уравнение (10.2.5) описывает волну со спиральностью  $\pm 2$ .

В ранние времена, когда  $q/a \gg H$ , уравнение (10.2.3) имеет ВКБ-решения вида

$$\mathcal{D}_q(t) \rightarrow h(t) \exp \left( -iq \int_{t_*}^t \frac{dt'}{a(t')} \right), \quad (10.2.6)$$

где  $h(t)$  изменяется гораздо медленнее аргумента экспоненты, а  $t_*$  — произвольно. Тогда слагаемые в (10.2.3) второго порядка по  $q/a$  сокращаются, а слагаемые первого порядка образуют уравнение  $2\dot{h} + 2Hh = 0$ , так что  $h \propto a^{-1}$ . Всюду далее мы будем определять  $\mathcal{D}_q(t)$  как решение уравнения (10.2.3), нормированное так, что при  $a(t) \rightarrow 0$

$$\mathcal{D}_q(t) \rightarrow \frac{\sqrt{16\pi G}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2q} a(t)} \exp \left( -iq \int_{t_*}^t \frac{dt'}{a(t')} \right). \quad (10.2.7)$$

Поскольку  $\mathcal{D}_q(t)$  и  $\mathcal{D}_q^*(t)$  образуют полный набор решений уравнения (10.2.3), наиболее общее вещественное тензорное поле, удовлетворяющее условиям (10.2.1) и (10.2.2), принимает вид

$$D_{ij}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\lambda=\pm 2} \int d^3 q [\mathcal{D}_q(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \beta(\mathbf{q}, \lambda) e_{ij}(\hat{q}, \lambda) + \mathcal{D}_q^*(t) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \beta^*(\mathbf{q}, \lambda) e_{ij}^*(\hat{q}, \lambda)]. \quad (10.2.8)$$

Иными словами, вместо того, чтобы характеризовать два независимых решения  $\mathcal{D}_{1q}(t)$  и  $\mathcal{D}_{2q}(t)$  уравнения (10.2.3) их поведением в поздние времена, как делалось в разд. 5.2, теперь мы выбираем решения в виде  $\mathcal{D}_q(t)$  и  $\mathcal{D}_q^*(t)$ , характеризуемые своим поведением в ранние времена.

При  $\mathcal{D}_q(t)$ , нормированном таким образом, что выполняется уравнение (10.2.7), из канонических коммутационных соотношений вытекают условия

$$[\beta(\mathbf{q}, \lambda), \beta(\mathbf{q}', \lambda')] = 0, \quad [\beta(\mathbf{q}, \lambda), \beta^*(\mathbf{q}', \lambda')] = \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \delta_{\lambda \lambda'}. \quad (10.2.9)$$

Таким образом,  $\beta(\mathbf{q}, \lambda)$  и  $\beta^*(\mathbf{q}, \lambda)$  можно интерпретировать как операторы уничтожения и рождения гравитона со спиральностью  $\lambda$ .

Как и в случае скалярных возмущений, предполагается, что Вселенная во время инфляции находилась в квантовом состоянии  $|0\rangle$ , удовлетворяющем условию вакуума  $\beta(\mathbf{q}, \lambda)|0\rangle = 0$ . Тогда вакуумные значения произведений  $D$  являются гауссовыми, а спаривания имеют вид

$$\langle 0 | D_{ij}(\mathbf{x}, t) D_{kl}(\mathbf{y}, t) | 0 \rangle = \int d^3 q e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} |\mathcal{D}_q(t)|^2 \Pi_{ij, kl}(\hat{q}), \quad (10.2.10)$$

где  $\Pi_{ij, kl}(\hat{q})$  — сумма по спиральностям, задаваемая выражением вида (5.2.25):

$$\begin{aligned}\Pi_{ij, kl}(\hat{q}) \equiv \sum_{\lambda} e_{ij}(\hat{q}, \lambda) e_{kl}^*(\hat{q}, \lambda) &= \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} - \delta_{ij} \delta_{kl} + \\ &+ \delta_{ij} \hat{q}_k \hat{q}_l + \delta_{kl} \hat{q}_i \hat{q}_j - \delta_{ik} \hat{q}_j \hat{q}_l - \delta_{il} \hat{q}_j \hat{q}_k - \delta_{jk} \hat{q}_i \hat{q}_l - \delta_{jl} \hat{q}_i \hat{q}_k + \hat{q}_i \hat{q}_j \hat{q}_k \hat{q}_l.\end{aligned}\quad (10.2.11)$$

Для любого заданного потенциала функция  $\mathcal{D}_q(t)$  должна вычисляться интегрированием дифференциального уравнения (10.2.3) с начальным условием (10.2.7). За горизонтом, при  $q/a \ll H$ , решение становится константой  $\mathcal{D}_q^r$ , откуда следует некоторое начальное условие для гравитационной волны, когда она заново возникает под горизонтом. При вычислении опять удобно заменить обычное время как независимую координату на конформное время:

$$\tau \equiv - \int_t^{\infty} \frac{dt'}{a(t')}, \quad (10.2.12)$$

и в (10.2.7) выбрать  $t_* = \infty$ . Тогда уравнение (10.2.3) принимает вид

$$\frac{d^2 \mathcal{D}_q}{d\tau^2} + 2Ha \frac{d\mathcal{D}_q}{d\tau} + q^2 \mathcal{D}_q = 0. \quad (10.2.13)$$

Отметим, что

$$Ha = \frac{da}{dt} = \frac{1}{a} \frac{da}{d\tau}.$$

Таким образом, уравнение (10.2.13) совпадает с уравнением Муханова—Сасаки (10.1.35), если  $z \equiv a\dot{\bar{\phi}}/H$  заменить на  $a$ .

Начальное условие (10.2.7) при  $q/(aH) \gg 1$  не зависит от подробностей устройства потенциала, а при  $q/(aH) \ll 1$  тензорная амплитуда  $\mathcal{D}_q(t)$  просто стремится к константе  $\mathcal{D}_q^r$ . Следовательно, так же как скалярная амплитуда  $\mathcal{R}_q^r$ , тензорная амплитуда  $\mathcal{D}_q^r$  за горизонтом может зависеть от поведения потенциала при значениях  $\bar{\phi}(t)$  вблизи момента пересечения горизонта, когда  $q/(aH)$  порядка единицы. Таким образом, измерения тензорной амплитуды после повторного пересечения горизонта могут сообщить нам о последних  $\mathcal{N}$   $e$ -кратностях инфляции, при  $\mathcal{N}$ , ограниченном (10.1.40), так же как для скалярных мод.

Как и для скалярных мод, полезно рассмотреть в качестве тестового примера потенциал, для которого  $\mathcal{D}_q^r$  может быть вычислено аналитически, без использования приближения медленного скатывания, т. е. экспоненциальный потенциал (10.1.44). Для этого потенциала  $\dot{\bar{\phi}}/H$  равно константе  $2\epsilon/\lambda$ , поэтому из уравнения (10.1.37) следует  $z \propto a$ , и в этом случае уравнение (10.2.13) в точности совпадает с уравнением Муханова—Сасаки. Помимо этого, начальное условие (10.2.7) совпадает с начальным условием (10.1.38), за исключением фактора  $-2\epsilon\sqrt{16\pi G}/\lambda = -2\epsilon$ . Следовательно, для экспоненциального потенциала имеем:

$$\frac{\mathcal{D}_q(t)}{\mathcal{R}_q(t)} = \frac{-2\epsilon\sqrt{16\pi G}}{\lambda} = -2\sqrt{\epsilon}. \quad (10.2.14)$$

Разумеется, тогда для значений  $\mathcal{D}_q^r$  и  $\mathcal{R}_q^r$  за горизонтом это отношение будет по-прежнему выполняться. Обычно этот факт выражается в терминах скалярно-тензорного отношения, как правило, определенного как

$$r_q \equiv 4 \left| \frac{\mathcal{D}_q^r}{\mathcal{R}_q^r} \right|^2. \quad (10.2.15)$$

Мы видим, что для экспоненциального потенциала  $r_q$  имеет значение, не зависящее от длины волны,

$$r = 16\epsilon. \quad (10.2.16)$$

В предыдущем разделе мы видели, что для экспоненциального потенциала результаты WMAP третьего года приводят к значению  $\epsilon = 0,021 \pm 0,008$ , так что  $r = 0,34 \pm 0,13$ . Это практически не согласуется с верхним пределом  $r < 0,3$  на  $r$ , установленным (для данного значения  $\epsilon$ ) результатами WMAP третьего года<sup>16)</sup>, поэтому потенциал  $V(\varphi)$ , являющийся экспоненциальным около значения, которое  $\varphi$  принимает в момент пересечения горизонта, практически исключен.

---

Разумеется, мы уже знаем, что потенциал не может быть экспоненциальным во всем диапазоне изменения  $\varphi$ , потому что тогда инфляция никогда не закончится, но здесь мы не опираемся на какие-либо предположения насчет вида потенциала, кроме значений  $\varphi$ , принимаемых во время пересечения горизонта.

---

Чтобы проанализировать как тензорные, так и скалярные возмущения для более общих потенциалов, необходимо использовать приближение медленного скатывания, к рассмотрению которого мы переходим в следующем разделе.

## 10.3

### Флуктуации во время инфляции: приближение медленного скатывания

**Параметры  $\epsilon$  и  $\delta$  • Приближение медленного скатывания • Сила спектрального индекса и флуктуаций • Наблюдательные ограничения на потенциал • Число  $e$ -кратностей после выхода из-под горизонта**

Невозможно аналитически вычислить скалярное и тензорное возмущения  $\mathcal{R}_q(t)$  и  $\mathcal{D}_q(t)$  для потенциалов общего вида. Однако необходимость (см. гл. 4) иметь значительное число  $e$ -кратностей расширения во время ин-

---

<sup>16)</sup> См. рис. 14 в работе D. Spergel *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **170**, 377 (2007) [astro-ph/0603449].

фляции означает, что  $H$  должно медленно изменяться на протяжении периода, длящегося дольше  $1/H$ . Поэтому мы будем предполагать, что  $H$  не сильно изменяется во время эпохи «медленного скатывания», на протяжении которой значения  $q/(aH)$  меняются от много меньших до много больших единицы. В разд. 10.1 и 10.2 мы видели, что асимптотические значения  $\mathcal{R}_q^r$  и  $\mathcal{D}_q^r$  зависят только от эволюции полей около времени пересечения горизонта, когда  $q/a \approx H$ , поэтому у нас не будет никакой необходимости предполагать, что эпоха медленного скатывания продлевается назад во времени, до начала расширения, или вперед во времени, до конца инфляции.

Мы будем работать с уравнением Муханова—Сасаки (10.1.35)<sup>17)</sup>,

$$\frac{d^2\mathcal{R}_q}{d\tau^2} + \frac{2}{z} \frac{dz}{d\tau} \frac{d\mathcal{R}_q}{d\tau} + q^2 \mathcal{R}_q = 0, \quad (10.3.1)$$

где  $\tau$  — конформное время, и

$$z \equiv \frac{a\dot{\varphi}}{H}. \quad (10.3.2)$$

Еще раз вспоминая, что  $\dot{H} = -4\pi G \dot{\varphi}^2$ , можно записать

$$\frac{1}{z} \frac{dz}{d\tau} = aH(1 + \delta + \epsilon), \quad (10.3.3)$$

где для произвольного потенциала

$$\epsilon \equiv \frac{-\dot{H}}{H^2}, \quad \delta \equiv \frac{\ddot{H}}{2H\dot{H}}. \quad (10.3.4)$$

Нам также потребуется формула для  $aH$  в терминах  $\tau$ . С этой целью заметим, что

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{1}{aH} \right) = -1 + \epsilon. \quad (10.3.5)$$

Пока все результаты точны. Приближение медленного скатывания требует, чтобы  $\epsilon$  и  $\delta$  были малы во время эпохи пересечения горизонта, откуда возникает следствие, что на протяжении этой эпохи  $\epsilon$  мало изменяется, потому что

$$\dot{\epsilon} = 2\epsilon(\epsilon + \delta)H. \quad (10.3.6)$$

---

<sup>17)</sup> Обычно оно записывается в эквивалентном виде

$$\frac{d^2u_q}{d\tau^2} + \left[ q^2 - \frac{1}{z} \frac{d^2z}{d\tau^2} \right] u_q = 0,$$

где  $u_q \equiv z\mathcal{R}_q$ . В виде (10.3.1) с ним легче работать, потому что тогда требуется вычислять лишь первые производные от  $z$ .

Будем предполагать, что  $\delta$  также мало изменяется<sup>18)</sup>.

---

Конечно же,  $\epsilon$  и  $\delta$  не могут быть строго постоянными, кроме случая экспоненциального потенциала, для которого  $H \propto 1/t$  и, следовательно,  $\delta = -\epsilon$ .

---

Отсюда следует, что интегрирование уравнения (10.3.5) приводит, для подходящего выбора аддитивной константы в  $\tau$ , к соотношению

$$aH = -\frac{1}{(1-\epsilon)\tau}. \quad (10.3.7)$$

Так же как в случае экспоненциального потенциала,  $\tau$  отрицательно, а его величина изменяется от  $-\tau \gg 1/q$  в ранний период инфляции, когда  $q/(aH) \gg 1$ , до  $-\tau \ll 1/q$  при  $q/(aH) \ll 1$ . Тогда, подставляя уравнения (10.3.3) и (10.3.7) в уравнение (10.3.1), в первом порядке по  $\epsilon$  и  $\delta$  получаем:

$$\frac{d^2\mathcal{R}_q}{d\tau^2} + \frac{2(1+\delta+2\epsilon)}{\tau} \frac{d\mathcal{R}_q}{d\tau} + q^2\mathcal{R}_q = 0, \quad (10.3.8)$$

Общее решение этого уравнения при постоянных  $\delta$  и  $\epsilon$  является линейной комбинацией  $\tau^\nu H_\nu^{(1)}(-qr)$  и  $\tau^\nu H_\nu^{(2)}(-qr)$ , где теперь

$$\nu = \frac{3}{2} + 2\epsilon + \delta. \quad (10.3.9)$$

В первом порядке по  $\epsilon$  это согласуется с результатом (10.1.51) для экспоненциального потенциала, для которого  $\delta = -\epsilon$ .

Далее, мы не предполагаем, что приближение медленного скатывания применимо вплоть до начала расширения, но к счастью, это не является необходимым. Уравнение (10.1.38) должно быть по-прежнему применимо в начале эпохи медленного скатывания, когда  $q/(aH)$  все еще очень велико, поэтому такое начальное условие фиксирует решение на протяжении всей эпохи медленного скатывания в виде

$$\mathcal{R}_q(t) = -\frac{\sqrt{-\pi\tau}}{2(2\pi)^{3/2}z(\tau)} \exp\left(\frac{i\pi\nu}{2} + \frac{i\pi}{4}\right) H_\nu^{(1)}(-qr). \quad (10.3.10)$$

---

Отметим, что из уравнений (10.3.3) и (10.3.7) следует  $z(t) \propto \tau^{-\nu+1/2}$  на протяжении эпохи медленного скатывания.

---

<sup>18)</sup> Так происходит в случае степенного потенциала, при таком же условии  $|\varphi| \gg 1/\sqrt{4\pi G}$ , необходимость которого для применимости приближения медленного скатывания была выяснена в разд. 4.2. Возникающие следствия игнорирования этого приближения изучаются в работах S. Dodelson and E. D. Stewart, *Phys. Rev. D* **65**, 101301 (2002) [astro-ph/0109354]; E. D. Stewart, *Phys. Rev. D* **65**, 103508 (2002) [astro-ph/0110322].

Тогда в эпоху медленного скатывания, когда  $q/(aH) \ll 1$ , величина (10.3.10) имеет асимптотическое значение

$$\mathcal{R}_q^r = i \frac{\sqrt{-\tau} \Gamma(\nu)}{2\sqrt{\pi} (2\pi)^{3/2} z(t)} \exp \left( \frac{i\pi\nu}{2} + \frac{i\pi}{4} \right) \left( \frac{-q\tau}{2} \right)^{-\nu}, \quad (10.3.11)$$

которое постоянно, потому что из уравнений (10.3.3) и (10.3.7) следует  $z \propto \tau^{-\nu+1/2}$ . Таким образом,  $\mathcal{R}_q^r$  имеет следующую  $q$ -зависимость<sup>19)</sup>:

$$\mathcal{R}_q^r \propto q^{-\nu} = q^{-3/2-2\epsilon-\delta}. \quad (10.3.12)$$

Это можно рассматривать как обобщение зависимости  $\mathcal{R}_q^r \propto q^{-3/2-\epsilon}$ , обнаруженной нами в случае экспоненциального потенциала, на случай, когда  $\delta \neq -\epsilon$ .

Так как  $\mathcal{R}_q^r$  не зависит от времени, ее можно вычислить, выбрав для  $t$  в уравнении (10.3.11) любое удобное значение. Мы будем вычислять ее в момент времени  $t_q$  пересечения горизонта, определенного также как в разд. 10.1 и 10.2 соотношением

$$\frac{q}{a(t_q)} = H(t_q). \quad (10.3.13)$$

---

Однако отметим, что уравнение (10.3.10) при  $t = t_q$  не приводит к правильному значению  $\mathcal{R}_q^r$ .

---

Отбрасывая поправки порядка  $\epsilon$  или  $\delta$ , кроме как в степенных показателях, из уравнения (10.3.7) получаем

$$\tau(t_q) = -\frac{1}{(1-\epsilon)q} \simeq -\frac{1}{q}. \quad (10.3.14)$$

Помимо этого,  $\dot{H} = -4\pi G \dot{\bar{\varphi}}^2$ , поэтому

$$\dot{\bar{\varphi}}(t_q) = \pm \frac{\sqrt{-\dot{H}(t_q)}}{\sqrt{4\pi G}} = \pm \frac{H(t_q)\sqrt{\epsilon(t_q)}}{\sqrt{4\pi G}},$$

и тогда

$$z(t_q) = \frac{\pm \sqrt{\epsilon(t_q)} q}{H(t_q)\sqrt{4\pi G}}. \quad (10.3.15)$$

---

<sup>19)</sup> E. D. Stewart and D. H. Lyth, *Phys. Lett. B* **302**, 171 (1993). Это вычисление было проделано в следующем порядке приближения медленного скатывания в работе A. R. Liddle and M. S. Turner, *Phys. Rev. D* **50**, 758 (1994). Обзор см. в статье J. E. Lidsey, A. R. Liddle, E. W. Kolb, E. J. Copeland, T. Barreiro, and M. Abney, *Rev. Mod. Phys.* **69**, 373 (1997).

Таким образом, в приближении медленного скатывания получаем<sup>20)</sup>

$$\mathcal{R}_q^r = \mp i \frac{\sqrt{16\pi G} q^{-3/2} H(t_q)}{8\pi^{3/2} \sqrt{\epsilon(t_q)}}. \quad (10.3.16)$$

Это выражение совпадает с (10.1.56) для экспоненциального потенциала, за исключением того, что теперь фактор  $1/\sqrt{\epsilon(t_q)}$  дает вклад в  $q$ -зависимость  $\mathcal{R}_q^r$ . Чтобы проверить, что  $q$ -зависимость  $H(t_q)$  и  $\epsilon(t_q)$  приводят к дополнительному фактору  $q^{-2\epsilon-\delta}$ , продифференцируем соотношение (10.3.13) по  $q$  и найдем

$$\frac{dt_q}{dq} = \frac{1}{a(t_q)(H^2(t_q) + \dot{H}(t_q))}.$$

Тогда

$$\frac{q}{H(t_q)} \frac{dH(t_q)}{dq} = \frac{\dot{H}(t_q)}{H^2(t_q) + \dot{H}(t_q)} = -\frac{\epsilon(t_q)}{1 - \epsilon(t_q)},$$

и уравнение (10.3.6) приводит к

$$\frac{q}{\epsilon(t_q)} \frac{d\epsilon(t_q)}{dq} = \frac{1(\epsilon(t_q) + \delta(t_q))}{1 - \epsilon(t_q)}.$$

Следовательно, заменяя знаменатели  $1 - \epsilon$  на единицу, находим, что  $H(t_q) \propto q^{-\epsilon}$  и  $\epsilon(t_q) \propto q^{2\epsilon+2\delta}$ , и поэтому  $H(t_q)/\sqrt{\epsilon(t_q)} \propto q^{3/2-\nu}$ , тогда получаем, что в (10.3.16) возникает  $q$ -зависимость (10.3.12).

Теперь давайте применим приближение медленного скатывания к тензорным модам. В целом тензорное волновое уравнение (10.2.3) можно представить в виде

$$\frac{d^2 \mathcal{D}_q}{d\tau^2} + 2aH \frac{d\mathcal{D}_q}{d\tau} + q^2 \mathcal{D}_q = 0. \quad (10.3.17)$$

В течение эпохи медленного скатывания можно воспользоваться (10.3.7) и привести предыдущее уравнение к виду

$$\frac{d^2 \mathcal{D}_q}{d\tau^2} - \frac{2}{(1 - \epsilon)\tau} \frac{d\mathcal{D}_q}{d\tau} + q^2 \mathcal{D}_q = 0. \quad (10.3.18)$$

Общее решение при постоянном  $\epsilon$  является линейной комбинацией  $\tau^\mu H_\nu^{(1)}(-qr)$  и  $\tau^\mu H_\nu^{(2)}(-qr)$  при

$$\mu = \frac{3}{2} + \frac{\epsilon}{1 - \epsilon}. \quad (10.3.19)$$

<sup>20)</sup> S. W. Hawking, *Phys. Lett. B* **115**, 295 (1982); A. A. Starobinsky, *Phys. Lett. B* **117**, 175 (1982); A. Guth and S.-Y. Pi, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1110 (1982); J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt and M. S. Turner, *Phys. Rev. D* **28**, 679 (1983); D. H. Lyth, *Phys. Lett. B* **147**, 403 (1984); *B* **150**, 465 (1985); *Phys. Rev. D* **31**, 1792 (1985).

Решение в течение эпохи медленного скатывания, удовлетворяющее начальному условию (10.2.7), равно

$$\mathcal{D}_q(t) = \frac{\sqrt{16\pi G}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2q} a(t)} \sqrt{\frac{-q\tau\pi}{2}} \exp\left(\frac{i\mu\pi}{2} + \frac{i\pi}{4}\right) H_\mu^{(1)}(-q\tau). \quad (10.3.20)$$

Отметим, что из соотношения (10.3.7) следует

$$\left(\frac{\tau}{a}\right) \frac{da}{d\tau} = aH\tau = -\frac{1}{1-\epsilon},$$

поэтому  $a \propto \tau^{-1/(1-\epsilon)}$ , и тем самым  $\sqrt{-\tau}/a \propto \tau^\mu$ .

Тогда асимптотическое решение при  $q/a \ll H$  равно

$$\mathcal{D}_q^r = -i \frac{\sqrt{16\pi G} \Gamma(\mu) \sqrt{-\tau}}{2\sqrt{\pi} (2\pi)^{3/2} a(t)} \exp\left(\frac{i\mu\pi}{2} + \frac{i\pi}{4}\right) \left(\frac{-q\tau}{2}\right)^{-\mu} \quad (10.3.21)$$

Таким образом,  $\mathcal{D}_q^r$  имеет  $q$ -зависимость (см. сноска 19)

$$\mathcal{D}_q^r \propto q^{-\mu} \simeq q^{-3/2-\epsilon}. \quad (10.3.22)$$

За исключением случая экспоненциального потенциала, асимптотическая  $q$ -зависимость тензорных мод в целом отличается от зависимости в случае скалярных мод.

Для  $\mathcal{D}_q^r$  можно найти более удобное выражение, если в уравнении (10.3.21) положить  $t = t_q$ . Тогда с помощью (10.3.14) и  $a(t_q) = q/H(t_q)$  устремляя  $\epsilon \rightarrow 0$  везде, кроме  $q$ -зависимости  $H(t_q)$ , из уравнения (10.3.21) получаем выражение<sup>21)</sup>

$$\mathcal{D}_q^r = i \frac{\sqrt{16\pi G} H(t_q)}{4\pi^{3/2} q^{3/2}}. \quad (10.3.23)$$

Как правило,  $q$ -зависимость квадратов величин тензорной и скалярной амплитуд за горизонтом записывают в виде

$$|\mathcal{D}_q^r|^2 \propto q^{-3+n_T(q)}, \quad |\mathcal{R}_q^r|^2 \propto q^{-4+n_S(q)}. \quad (10.3.24)$$

Тогда в приближении медленного скатывания из уравнений (10.3.12) и (10.3.22) следует

$$n_T(q) = -2\epsilon(t_q), \quad n_S(q) = 1 - 4\epsilon(t_q) - 2\delta(t_q). \quad (10.3.25)$$

В качестве проверки напомним, что для экспоненциального потенциала  $\delta = -\epsilon$ , поэтому соотношения (10.3.25) приводят к  $n_S = 1 - 2\epsilon$ , в согласии с результатом разд. 10.1.

<sup>21)</sup> A. A. Starobinsky, *JETP Lett.* **30**, 683 (1979).

Помимо этого, сравнение выражений (10.3.16) и (10.3.23) приводит к соотношению

$$r(q) = 16\epsilon(t_q) = -8n_T(q), \quad (10.3.26)$$

где, при обычном определении  $r$ ,  $r(q) \equiv 4|\mathcal{D}_q^r/\mathcal{R}_q^r|^2$ . Это соотношение между измеряемыми величинами известно в литературе как *условие непротиворечивости приближения медленного скатывания*. Для любого потенциала, кроме экспоненциального, отношение  $r$  скаляр/тензор зависит от  $q$ .

В случае инфляции с одним полем инфлатона из соотношения  $\dot{H} = -4\pi G \dot{\varphi}^2$  следует, что  $\epsilon(t)$  всегда положительно, однако  $\delta(t)$  может иметь любой знак, поэтому в целом уравнения (10.3.25) дают  $n_T(q) < 0$ , а  $n_S(q)$  может быть больше или меньше единицы. Тем не менее, опыт рассмотрения многих моделей показывает<sup>22)</sup>, что физически правдоподобные потенциалы без тонкой подстройки, как правило, приводят к  $n_S(q)$  меньше единицы, и даже меньше 0,98. Однако для инфляции в режиме медленного скатывания  $\epsilon$  и  $\delta$  малы, поэтому  $n_S(q)$  не может быть сильно меньше единицы. Таким образом, общая картина инфляции в режиме медленного скатывания получает некоторое подтверждение из упоминавшихся в разд. 7.2 результатов WMAP третьего года в том, что  $n_S = 0,958 \pm 0,016$ .

В гл. 7 мы видели, что величины  $q^3|\mathcal{D}_q^r|^2$  и  $q^3|\mathcal{R}_q^r|^2$  задают меру вклада тензорных и скалярных флуктуаций в мультипольные коэффициенты  $C_{TT;\ell}$  в угловом распределении температуры реликтового излучения. Из уравнения (10.3.26) можно видеть, что тензорные моды, по всей видимости, дают много меньший вклад в  $C_{TT;\ell}$ , нежели скалярные моды. Помимо этого, уравнение (10.3.16) и тот факт, что анизотропии температуры реликтового излучения малы, но не настолько, чтобы быть ненаблюдаемыми, указывают на то, что постоянная Хаббла в течение эпохи медленного скатывания должна быть мала по сравнению с планковской массой  $1/\sqrt{G}$ , но не слишком мала. В пределе медленного скатывания, когда  $\nu \simeq 3/2$ , можно записать  $|\mathcal{R}_q^r|^2 = |N|^2 q^{-3}$ , и тогда из уравнения (10.3.16) следует, что

$$|N|^2 = \frac{16\pi GH_{\text{вых}}^2}{64\pi^3 |\epsilon_{\text{вых}}|} = \frac{(8\pi G)^2 \bar{\rho}_{\text{вых}}}{96\pi^3 |\epsilon_{\text{вых}}|},$$

где нижний индекс «вых» обозначает время выхода за горизонт, и в соответствии с приближением медленного скатывания мы игнорируем здесь зависимость этого времени от  $q$ . В разд. 7.2 мы видели, что фактор  $|N|^2$  имеет значение  $(1,93 \pm 0,12) \times 10^{-10}$ , поэтому

$$\frac{\bar{\rho}_{\text{вых}}}{|\epsilon_{\text{вых}}|} = [(6,70 \pm 0,10) \times 10^{16} \text{ ГэВ}]^4. \quad (10.3.27)$$

<sup>22)</sup> M. B. Hoffman and M. S. Turner, *Phys. Rev D* **64**, 023506 (2001); W. H. Kinney, *Phys. Rev. D* **66**, 083508 (2002); H. V. Peiris *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **1148**, 213 (2003); G. Efstathiou and K. J. Mack, *J. Cosm. Astropart. Phys.* **05**, 008 (2005); L. A. Boyle, P. J. Steinhardt, and N. Turok, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 111301 (2006).

Измерения анизотропии реликтового излучения до сих пор зависели только от спектрального индекса скалярных, но не тензорных мод, и поэтому была получена информация только насчет  $\delta + 2\epsilon$ , а не  $\epsilon$ , однако если нет сокращения между  $\delta$  и  $2\epsilon$ , то данные измерения говорят, что если  $|\epsilon|$  и больше, то не сильно, не более чем на несколько процентов. Если, например, взять  $|\epsilon|_{\text{вых}} = 0,05$ , то  $\bar{\rho}_{\text{вых}} \simeq [3,2 \times 10^{16} \text{ ГэВ}]^4$ . В любом случае, теперь мы видим, что в инфляционных теориях малость космологических флюктуаций до того, как они повторно возникают под горизонтом, по сути является отражением того факта, что по все еще загадочным причинам масштаб энергий, задаваемый плотностью энергии во Вселенной, при пересечении горизонта на несколько порядков меньше планковского масштаба энергии,  $(8\pi G)^{-1/2} = 2,4 \times 10^{18} \text{ ГэВ}$ .

Эта загадка сильно напоминает другую загадку, возникающую в физике элементарных частиц: масштаб энергий объединения, когда сходятся<sup>23)</sup> три константы связи электрослабого и сильного взаимодействий, равен примерно  $2 \times 10^{16} \text{ ГэВ}$  и так же на несколько порядков меньше планковского масштаба энергий  $(8\pi G)^{-1/2}$ . Возможно, что эти две загадки на самом деле суть одно и тоже.

Измеренные значения  $n_S$  и  $|N|$  и наблюдательный предел на отношение тензор/скаляр  $r$  уже позволяют вывести полезные ограничения на вид инфлатонного потенциала. В предыдущем разделе мы видели, что эти данные практически исключают любой потенциал  $V(\bar{\varphi})$  с экспоненциальной зависимостью от  $\bar{\varphi}$  для значений  $\bar{\varphi}(t)$  вблизи пересечения горизонта. Чтобы продвинуться дальше, сначала полезно выразить  $\epsilon$  и  $\delta$  в терминах потенциала. С помощью общего соотношения (4.2.3)

$$\dot{H} = -4\pi G \dot{\bar{\varphi}}^2,$$

и формулы медленного скатывания (4.2.8),

$$\dot{\varphi} = -\frac{V'(\varphi)}{3H} = -\frac{V'(\varphi)}{\sqrt{24\pi G V(\varphi)}},$$

получаем

$$\epsilon(t) = \frac{1}{16\pi G} \left( \frac{V'(\bar{\varphi}(t))}{V(\bar{\varphi}(t))} \right)^2 \quad (10.3.28)$$

Помимо этого, производная по времени от уравнения (4.2.3) приводит к  $\ddot{H} = -8\pi G \dot{\bar{\varphi}} \ddot{\bar{\varphi}}$ , после чего, воспользовавшись (4.2.12), получаем

$$\delta(t) = \frac{1}{16\pi G} \left( \frac{V'^2(\bar{\varphi}(t))}{V^2(\bar{\varphi}(t))} - \frac{2V''(\bar{\varphi}(t))}{V(\bar{\varphi}(t))} \right). \quad (10.3.29)$$

<sup>23)</sup> См., например, КТП, том 2, разд. 28.2.

Например, для степенного потенциала  $V(\varphi) \propto \varphi^\alpha$  получаем

$$\epsilon(t) = \frac{\alpha^2}{16\pi G \bar{\varphi}^2(t)}, \quad \delta(t) = \frac{2\alpha - \alpha^2}{16\pi G \bar{\varphi}^2(t)}, \quad (10.3.30)$$

поэтому  $\delta(t) = (2/\alpha - 1)\epsilon(t)$ , откуда

$$n_S(q) = 1 - \frac{(\alpha + 2)r(q)}{8\alpha}. \quad (10.3.31)$$

Экспериментальное ограничение на  $n_S$  зависит от предполагаемого значения  $r$ , поэтому наблюдения определяют некоторую допустимую область на плоскости  $n_S - r$ <sup>24)</sup>. В настоящее время прямая (10.3.31) пересекает (с достоверностью 68 %) допустимую область для всех положительных  $\alpha$ , даже при объединении данных WMAP третьего года с данными от CBI и VSA или с данными Слоановского или 2dF обзоров. Однако предпочтитаются малые значения  $\alpha$ , и даже небольшое стягивание допустимой области приведет к исключению больших значений  $\alpha$ .

Для дальнейшего необходимо прояснить значение скалярного поля при пересечении горизонта. С этой целью можно воспользоваться соотношением (4.2.14), из которого следует, что число  $\Delta\mathcal{N}$   $e$ -кратностей при переходе скалярного поля от  $\varphi_1$  к  $\varphi_2$  в предположении, что приближение медленного скатывания работает на протяжении этого периода, представляется в виде

$$\Delta\mathcal{N} = - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left( \frac{8\pi G V(\varphi)}{V'(\varphi)} \right) d\varphi. \quad (10.3.32)$$

Если  $|V'/V| \simeq \sqrt{16\pi G \epsilon}$  фактически постоянно в диапазоне  $\varphi$  от  $\varphi_1$  до  $\varphi_2$ , тогда число  $e$ -кратностей, соответствующих данному изменению поля, равно

$$\Delta\mathcal{N} = \Delta\varphi \sqrt{\frac{4\pi G}{\epsilon}}. \quad (10.3.33)$$

Лиф<sup>25)</sup> использовал это соотношение в случае, когда  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  являются значениями поля при пересечении горизонта для волновых чисел, соответствующих  $\ell \simeq 1$  и  $\ell \simeq 100$ , для которых  $\Delta\mathcal{N} = \ln 100 = 4,6$ , с целью показать, что если  $\epsilon$  достаточно велико, чтобы привести к доступной для обнаружения тензорной моде, то скалярное поле обязано изменяться на значение, которое по меньшей мере сопоставимо с планковским масштабом  $1/\sqrt{4\pi G}$ .

Если выдвинуть сильное предположение, что приближение медленного скатывания выполняется в течение всей эпохи от пересечения горизонта

<sup>24)</sup> См. рис. 14 в работе D. Spergel *et al.*, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **170**, 377 (2007) [astro-ph/0603449].

<sup>25)</sup> D. H. Lyth, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1861 (1997) [hep-ph/9606387]. Также см. G. Efstathiou and K. J. Mack, *J. Cosm. & Astropart. Phys.* **05**, 008 (2005) [astro-ph/0503360]; R. Easther, W. H. Kinney, and B. A. Powell, *J. Cosm. Astropart. Phys.* **08**, 004 (2006) [astro-ph/0601276].

до конца инфляции, но при этом не предполагать, что  $\epsilon$  обязательно постоянна на протяжении этой эпохи, тогда для степенного потенциала  $V(\varphi) \propto \varphi^\alpha$  из уравнения (10.3.32) следует, что число  $e$ -кратностей с момента пересечения горизонта для волнового числа  $q$  до конца инфляции равно

$$\mathcal{N}(q) = \frac{4\pi G}{\alpha} [\bar{\varphi}^2(t_q) - \bar{\varphi}^2(t_{\text{end}})], \quad (10.3.34)$$

где  $t_q$  и  $t_{\text{end}}$  — времена пресечения горизонта и конца инфляции соответственно. Если далее предположить, что  $|\bar{\varphi}(t_{\text{end}})| \ll |\bar{\varphi}(t_q)|$ , то тогда

$$\bar{\varphi}^2(t_q) \simeq \frac{\alpha \mathcal{N}(q)}{4\pi G}, \quad (10.3.35)$$

поэтому из уравнения (10.3.30) получаем

$$\epsilon(t_q) \simeq \frac{\alpha}{4\mathcal{N}(q)}, \quad \delta(t_q) \simeq \frac{2-\alpha}{4\mathcal{N}(q)},$$

откуда следует<sup>26)</sup>

$$n_S(q) \simeq 1 - \frac{\alpha+2}{2\mathcal{N}(q)}, \quad r(q) = \frac{4\alpha}{\mathcal{N}(q)}. \quad (10.3.36)$$

В разд. 10.1 отмечалось, что если плотность энергии в начале эры доминирования излучения равна планковской плотности  $G^{-2}$ , то  $\mathcal{N}(q) \simeq 68$  для волновых чисел, которые как раз возникают под горизонтом в настоящее время, соответственно меньше для больших волновых чисел; например, для волновых чисел, соответствующих  $\ell = 100$ ,  $\mathcal{N}$ , будет меньше на величину  $\ln 100 = 4,6$ . Для получения более точной оценки  $\mathcal{N}$  можно воспользоваться уравнением (10.3.27). С учетом рискованного допущения, что плотность энергии  $\rho_1$  в начале эпохи излучения совпадает со значением при выходе из под горизонта, выбирая  $\epsilon = O(0,02)$ , получаем  $\rho_1 \simeq [2,5 \times 10^{16} \text{ ГэВ}]^{1/4}$ , поэтому из уравнения (10.1.43) с  $h = 0,7$  следует, что для волнового числа, которое как раз входит под горизонт в настоящее время,  $\mathcal{N} = 62$ , а для волнового числа, соответствующего  $\ell \simeq 100$ ,  $\mathcal{N} \simeq 57$ . При выборе  $\mathcal{N} = 60$  в случае квадратичного потенциала из (10.3.36) следует  $n_S = 0,97$  и  $r = 0,13$ , что согласуется с результатами WMAP третьего года, а для потенциала четвертой степени из уравнения (10.3.35) следует  $n_S = 0,95$  и  $r = 0,26$ , что слегка выходит за диапазон значений, соответствующих данным WMAP<sup>27)</sup>. Любые значения  $\alpha > 4$  исключаются. Однако данное заключение зависит от допущения инфляции с медленным скатыванием с момента пересечения горизонта до конца инфляции, причем потенциал должен быть равен  $V(\bar{\varphi}(t)) \propto \bar{\varphi}^\alpha(t)$  в течение всего этого периода.

<sup>26)</sup> D. H. Lyth and A. Riotto, *Phys. Rep.* **314**, 1 (1999).

<sup>27)</sup> D. Spergel, сноска 24.

## Мультиполевая инфляция

Гауссовые, адиабатические, масштабно-инвариантные и слабые флуктуации • Тепловое равновесие после инфляции • Уравнения эволюции • ВКБ-решение в ранние моменты времени • Реперы • Коммутационные соотношения • Условия медленного скатывания • Кривизна  $\mathcal{R}$  после выхода из-под горизонта • Что мы узнали об инфляции?

Наблюдения реликтового излучения и крупномасштабной структуры указывают на то, что первичные скалярные возмущения за пределами горизонта

- почти гауссовые,
- адиабатические,
- почти масштабно инвариантны, в том смысле что  $\mathcal{R}_q^r$  почти пропорциональна  $q^{-3/2}$ ,
- слабы, в том смысле что  $q^{3/2}\mathcal{R}_q^r \ll 1$ . (В разд. 7.2 было показано, что  $q^{3/2}\mathcal{R}_q^r$  порядка  $10^{-5}$ .)

В разд. 10.1 и 10.3 мы убедились, что вышеперечисленные свойства первичных скалярных флуктуаций имеют место при выполнении следующих предположений:

1. *В течение инфляции одно единственное вещественное скалярное поле «инфлатона» дает существенный вклад в плотность энергии.* Это означает, что в течение инфляции флуктуации адиабатические, причем они остаются таковыми в дальнейшем.
2. *В течение эпохи пересечения горизонта (скажем, когда  $q/(aH)$  уменьшается от 10 до 0,1),  $H$  достаточно мала, так что  $q/a$  меньше, чем любой фундаментальный масштаб, характеризующий теорию, не только в течение этой эпохи, но и некоторое время до ее начала.*

---

Для случая, рассмотренного в разд. 10.1, полученная оценка составляла  $H \approx 10^{14}$  ГэВ, что, по всей видимости, достаточно мало.

---

Это означает, что в течение этой эпохи скалярное поле описывается простым эффективным действием, вовлекающим не более двух пространственно-временных производных. Отсюда следует, что в течение некоторого времени до начала эпохи пересечения горизонта инфлатон ведет себя как свободное поле, поэтому флуктуации оказываются гауссовыми.

3. *Для наблюдаемых флуктуаций в течение эпохи пересечения горизонта инфляция находится в режиме медленного скатывания, в том смысле что  $|\dot{H}|/H^2 \ll 1$  и  $|\ddot{H}/(H\dot{H})| \ll 1$ .* В совокупности с предположениями 1 и 2 это означает, что флуктуации почти масштабно инвариантны.

Однако нет никакой особой причины полагать, что основной вклад в плотность энергии во время инфляции дает одно скалярное поле, поэтому естественным образом мы приходим к рассмотрению нескольких инфлатонных полей  $\varphi^n(x)$ . Будет показано, что ровно такие же свойства первичных скалярных флуктуаций возникают, если оставить предположения 2 и 3, а предположение 1 заменить на следующее:

- 1\*. Энергия всех скалярных полей переходит в конце инфляции в обычное вещество и излучение в состоянии локального теплового равновесия, в котором все химические потенциалы обращаются в ноль. (Барионные и лептонные числа в этом случае должны будут генерироваться позднее, см. разд. 3.3.)

Каким бы ни было число скалярных полей, но с учетом предположения 2, основной вклад в эффективное действие скалярных полей дают слагаемые с минимальным числом пространственно-временных производных в течение эпохи пересечения горизонта и некоторое время до нее. Для произвольного числа скалярных полей наиболее общее такое действие принимает вид

$$I_\varphi = \int d^4x \sqrt{-\det g} \left[ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \gamma_{nm}(\varphi) \frac{\partial \varphi^n}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi^m}{\partial x^\nu} - V(\varphi) \right], \quad (10.4.1)$$

где  $V(\varphi)$  — произвольный вещественный потенциал, по повторяющимся индексам идет суммирование, а  $\gamma_{nm}(\varphi)$  — произвольная, вещественная, симметричная, положительно-определенная матрица, которая будет называться *полевой метрикой*.

---

Положительная определенность этой матрицы необходима для получения правильного знака в коммутаторах полей и их производных по времени.

---

Тензор энергии-импульса, который играет роль источника гравитационного поля, получается, согласно процедуре из приложения В, исходя из действия (10.4.1), и имеет вид

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \left[ -\frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \gamma_{nm}(\varphi) \frac{\partial \varphi^n}{\partial x^\rho} \frac{\partial \varphi^m}{\partial x^\sigma} - V(\varphi) \right] + \gamma_{nm}(\varphi) \frac{\partial \varphi^n}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi^m}{\partial x^\nu}. \quad (10.4.2)$$

Скалярные полевые уравнения получаются из принципа стационарности  $I_\varphi$  по отношению к бесконечно малым вариациям скалярных полей и имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \sqrt{-\det g} g^{\mu\nu} \gamma_{nm}(\varphi) \frac{\partial \varphi^m}{\partial x^\nu} \right) &= \sqrt{-\det g} \times \\ &\times \left( \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial \gamma_{lm}}{\partial \varphi^n} \frac{\partial \varphi^l}{\partial x^\mu} \frac{\partial \varphi^m}{\partial x^\nu} + \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^n} \right). \end{aligned} \quad (10.4.3)$$

Каждое скалярное поле  $\varphi^n(x)$  представляется в виде невозмущенного вклада  $\bar{\varphi}^n(t)$ , зависящего только от времени, плюс малое возмущение  $\delta\varphi^n(x, t)$ :

$$\varphi^n(x, t) = \bar{\varphi}^n(t) + \delta\varphi^n(x, t). \quad (10.4.4)$$

Точно так же как в гл. 5–8, предполагается, что метрика задается в виде невозмущенной метрики Робертсона–Уокера  $\bar{g}_{\mu\nu}(t)$  (с  $K = 0$ ) плюс малое возмущение  $h_{\mu\nu}(x, t)$ :

$$g_{\mu\nu}(x, t) = \bar{g}_{\mu\nu}(t) + h_{\mu\nu}(x, t). \quad (10.4.5)$$

Невозмущенный тензор энергии-импульса имеет вид, как в случае идеальной жидкости (5.1.35), где невозмущенные плотность энергии, давление и скорость равны

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2}\gamma_{nm}(\bar{\varphi})\dot{\bar{\varphi}}^n\dot{\bar{\varphi}}^m + V(\bar{\varphi}), \quad (10.4.6)$$

$$\bar{p} = \frac{1}{2}\gamma_{nm}(\bar{\varphi})\dot{\bar{\varphi}}^n\dot{\bar{\varphi}}^m - V(\bar{\varphi}), \quad (10.4.7)$$

$$\bar{u}^0 = 1, \quad \bar{u}^i = 0. \quad (10.4.8)$$

Скалярное полевое уравнение (10.4.3) для невозмущенного поля имеет вид

$$\ddot{\bar{\varphi}}^n + \gamma_{ml}^n(\bar{\varphi})\dot{\bar{\varphi}}^m\dot{\bar{\varphi}}^l + 3H\dot{\bar{\varphi}}^n + \gamma^{nm}(\bar{\varphi})\frac{\partial V(\bar{\varphi})}{\partial\bar{\varphi}^m} = 0, \quad (10.4.9)$$

где  $\gamma^{nm}$  — обратная матрица к  $\gamma_{nm}$ ,  $\gamma_{ml}^n$  — аффинная связность на пространстве полей,

$$\gamma_{ml}^n(\bar{\varphi}) = \frac{1}{2}\gamma^{nk}(\bar{\varphi})\left(\frac{\partial\gamma_{km}(\bar{\varphi})}{\partial\bar{\varphi}^l} + \frac{\partial\gamma_{kl}(\bar{\varphi})}{\partial\bar{\varphi}^m} - \frac{\partial\gamma_{ml}(\bar{\varphi})}{\partial\bar{\varphi}^k}\right), \quad (10.4.10)$$

а  $H$  — скорость расширения,  $H \equiv \dot{a}/a = \sqrt{8\pi G\bar{\rho}/3}$ . Читатель может проверить, что уравнение (10.4.9) гарантирует, что величины (10.4.6) и (10.4.7) подчиняются закону сохранения энергии  $\dot{\bar{\rho}} = -3H(\bar{\rho} + \bar{p})$ . Из уравнений (10.4.6) и (10.4.9) получаем удобную формулу:

$$\dot{H} = -4\pi G\gamma_{nm}(\bar{\varphi})\dot{\bar{\varphi}}^n\dot{\bar{\varphi}}^m. \quad (10.4.11)$$

Для нескольких скалярных полей  $T_{\mu\nu}$  не имеет вида для случая идеальной жидкости во всех порядках теории возмущений, однако сравнивая вклады первого порядка в уравнении (10.4.2) с уравнениями (5.1.39)–(5.1.41), мы видим, что в первом порядке анизотропная инерция обращается в ноль, а возмущения плотности энергии, давления и потенциала скоростей равны

$$\delta\rho = \gamma_{nm}(\bar{\varphi})\dot{\bar{\varphi}}^n\delta\dot{\varphi}^m + \frac{1}{2}\dot{\bar{\varphi}}^n\dot{\bar{\varphi}}^m\frac{\partial\gamma_{nm}(\bar{\varphi})}{\partial\bar{\varphi}^k}\delta\varphi^k + \frac{\partial V(\bar{\varphi})}{\partial\bar{\varphi}^n}\delta\varphi^n + \frac{1}{2}h_{00}\gamma_{nm}(\bar{\varphi})\dot{\bar{\varphi}}^n\dot{\bar{\varphi}}^m, \quad (10.4.12)$$

$$\delta p = \gamma_{nm}(\bar{\varphi}) \dot{\bar{\varphi}}^n \delta \varphi^m + \frac{1}{2} \dot{\bar{\varphi}}^n \dot{\bar{\varphi}}^m \frac{\partial \gamma_{nm}(\bar{\varphi})}{\partial \bar{\varphi}^k} \delta \varphi^k - \frac{\partial V(\bar{\varphi})}{\partial \bar{\varphi}^n} \delta \varphi^n + \frac{1}{2} h_{00} \gamma_{nm}(\bar{\varphi}) \dot{\bar{\varphi}}^n \dot{\bar{\varphi}}^m, \quad (10.4.13)$$

$$\delta u = - \frac{\gamma_{nm}(\bar{\varphi}) \dot{\bar{\varphi}}^n \delta \varphi^m}{\gamma_{kl}(\bar{\varphi}) \dot{\bar{\varphi}}^k \dot{\bar{\varphi}}^l}. \quad (10.4.14)$$

Читатель легко может проверить, что эти выражения сводятся к уравнениям (10.1.9)–(10.1.11) в случае одного поля с  $\gamma_{11} = 1$ .

Поскольку в первом порядке анизотропная инерция отсутствует, в ньютоновской калибровке получаем  $\Phi = \Psi$ , поэтому  $h_{00} = -2\Psi$ , а полевые уравнения Эйнштейна (5.3.21) принимают вид

$$\dot{\Psi} + H\Psi = 4\pi G \gamma_{nm}(\bar{\varphi}) \dot{\bar{\varphi}}^n \delta \varphi^m. \quad (10.4.15)$$

Если теперь выбрать обозначение, которое выявляет трансформационные свойства величин относительно переопределений  $\varphi^n \rightarrow \varphi'^n(\varphi)$  скалярных полей, то вклады первого порядка в полевом уравнении (10.4.3) сильно упрощаются. Относительно таких преобразований величины типа  $\dot{\bar{\varphi}}^n$  и  $\delta \varphi^n$  преобразуются как контравариантные векторы, т. е.

$$\delta \varphi'^n = \frac{\partial \bar{\varphi}'^n}{\partial \bar{\varphi}^m} \delta \varphi^m, \quad \dot{\bar{\varphi}}'^n = \frac{\partial \bar{\varphi}'^n}{\partial \bar{\varphi}^m} \dot{\bar{\varphi}}^m. \quad (10.4.16)$$

Для преобразующегося таким образом произвольного вектора  $v^n$  можно определить скорость его изменения, которая также является вектором:

$$\frac{D}{Dt} v^n \equiv \frac{\partial}{\partial t} v^n + \gamma_{lm}^n(\bar{\varphi}) \dot{\bar{v}}^l v^m. \quad (10.4.17)$$

С учетом этого обозначения, для вкладов первого порядка в полевом уравнении (10.4.3) получаем

$$\begin{aligned} \frac{D^2}{Dt^2} \delta \varphi^n + 3H \frac{D}{Dt} \delta \varphi^n + \gamma^{nm}(\bar{\varphi}) \frac{\partial^2 V(\bar{\varphi})}{\partial \bar{\varphi}^m \partial \bar{\varphi}^l} \delta \varphi^l - \left( \frac{\nabla^2}{a^2} \right) \delta \varphi^n = \\ = -2\gamma^{nm}(\bar{\varphi}) \Psi \frac{\partial V(\bar{\varphi})}{\partial \bar{\varphi}^m} + 4\dot{\Psi} \dot{\bar{\varphi}}^n + \gamma^n_{lmk}(\bar{\varphi}) \dot{\bar{\varphi}}^l \dot{\bar{\varphi}}^m \delta \varphi^k, \end{aligned} \quad (10.4.18)$$

где  $\gamma^n_{lmk}(\bar{\varphi})$  является тензором Римана—Кристоффеля на пространстве полей,

$$\gamma^n_{lmk}(\bar{\varphi}) \equiv \frac{\partial \gamma_{ml}^n(\bar{\varphi})}{\partial \bar{\varphi}^k} - \frac{\partial \gamma_{mk}^n(\bar{\varphi})}{\partial \bar{\varphi}^l} + \gamma_{lm}^r(\bar{\varphi}) \gamma_{kr}^n(\bar{\varphi}) - \gamma_{lk}^r(\bar{\varphi}) \gamma_{mr}^n(\bar{\varphi}). \quad (10.4.19)$$

---

Переопределение скалярных полей позволяет достичь  $\gamma_{nm} = \delta_{nm}$  тогда и только тогда, когда  $\gamma^n_{lmk} = 0$ . Мы не будем предполагать, что это выполняется.

---

Помимо этого, связь (5.3.26) принимает вид

$$\left( \dot{H} - \frac{\nabla^2}{a^2} \right) \Psi = 4\pi G \gamma_{nm}(\bar{\varphi}) \left( -\dot{\varphi}^n \frac{D}{Dt} \delta\varphi^m + \delta\varphi^m \frac{D}{Dt} \dot{\varphi}^n \right). \quad (10.4.20)$$

Решения записываются как суперпозиции плоских волн

$$\delta\varphi^n(\mathbf{x}, t) = \sum_N \int d^3q [\delta\varphi_{Nq}^n(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \alpha(\mathbf{q}, N) + \delta\varphi_{Nq}^{n*}(t) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \alpha^*(\mathbf{q}, N)], \quad (10.4.21)$$

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \sum_N \int d^3q [\Psi_{Nq}(t) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \alpha(\mathbf{q}, N) + \Psi_{Nq}^*(t) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \alpha^*(\mathbf{q}, N)]. \quad (10.4.22)$$

Здесь  $N$  нумерует различные решения системы уравнений (10.4.15)–(10.4.17) при  $\nabla^2$ , замененном на  $-q^2$ :

$$\dot{\Psi}_{Nq} + H\Psi_{Nq} = 4\pi G \gamma_{nm}(\bar{\varphi}) \dot{\varphi}^n \delta\varphi_{Nq}^m, \quad (10.4.23)$$

$$\begin{aligned} \frac{D^2}{Dt^2} \delta\varphi_q^n + 3H \frac{D}{Dt} \delta\varphi_q^n + \gamma^{nm}(\bar{\varphi}) \frac{\partial^2 V(\bar{\varphi})}{\partial \bar{\varphi}^m \partial \bar{\varphi}^l} \delta\varphi_q^l + \left( \frac{q^2}{a^2} \right) \delta\varphi_q^n = \\ = -2\gamma^{nm}(\bar{\varphi}) \Psi_q \frac{\partial V(\bar{\varphi})}{\partial \bar{\varphi}^m} + 4\dot{\Psi}_q \dot{\varphi}^n + \gamma^n_{lmk}(\bar{\varphi}) \dot{\varphi}^l \dot{\varphi}^m \delta\varphi_q^k, \end{aligned} \quad (10.4.24)$$

$$\left( \dot{H} + \frac{q^2}{a^2} \right) \Psi_q = 4\pi G \gamma_{nm}(\bar{\varphi}) \left( -\dot{\varphi}^n \frac{D}{Dt} \delta\varphi_q^m + \delta\varphi_q^m \frac{D}{Dt} \dot{\varphi}^n \right). \quad (10.4.25)$$

Для каждого скалярного поля существует одно уравнение второго порядка, а также одно уравнение первого порядка для  $\Psi$ , поэтому при наличии одной связи на первые производные число независимых решений равно удвоенному числу скалярных полей. Поскольку все  $(\delta\varphi_{Nq}^n, \Psi_{Nq})$  и  $(\delta\varphi_{Nq}^{n*}, \Psi_{Nq}^*)$  являются независимыми решениями, число значений индекса  $N$  совпадает с числом значений индекса  $n$ .

Для нахождения начальных условий для уравнений (10.4.23)–(10.4.25) и коммутационных соотношений для операторов  $\alpha(\mathbf{q})$  и  $\alpha^*(\mathbf{q})$  из уравнения (10.4.21) и (10.4.22) заметим, что в течение некоторого времени до начала эпохи пересечения горизонта будет выполняться  $q/a \gg H$ , а  $q^2/a^2$  будет многое больше любого элемента  $\partial^2 V/(\partial \bar{\varphi}^n \partial \bar{\varphi}^m)$ . Следовательно, решения вплоть до начала эпохи пересечения горизонта имеют ВКБ вид:

$$\delta\varphi_{Nq}^n(t) \rightarrow f_{Nq}^n(t) \exp \left( -iq \int_{t_1}^t \frac{dt'}{a(t')} \right), \quad (10.4.26)$$

$$\Psi_{Nq}(t) \rightarrow g_{Nq}(t) \exp \left( -iq \int_{t_1}^t \frac{dt'}{a(t')} \right),$$

где  $f_{Nq}^n(t)$  и  $g_{Nq}(t)$  изменяются гораздо медленнее аргумента экспоненты, а момент времени  $t_1$  произволен. Если выбрать

$$g_{Nq} = \frac{4i\pi Ga}{q} \gamma_{nm}(\bar{\varphi}) \dot{\bar{\varphi}}^n f_{Nq}^m, \quad (10.4.27)$$

то уравнения (10.4.23) и (10.4.25) оба выполняются в ведущем порядке по  $q/a$ . Тогда, ограничившись вкладами первого порядка по  $q/a$  в (10.4.24), приходим к уравнению

$$\frac{D}{Dt} f_{Nq}^n + H f_{Nq}^n = 0. \quad (10.4.28)$$

Для его решения заметим, что так как матрица  $\gamma^{nm}(\bar{\varphi}(t))$  положительно определена, ее можно представить в терминах набора реперов  $e_N^n(t)$  (индекс  $N$  имеет столько же значений, сколько  $n$ ) как

$$\gamma^{nm}(\bar{\varphi}(t)) = \sum_N e_N^n(t) e_N^m(t). \quad (10.4.29)$$

Эти реперы можно определить так, чтобы они подчинялись уравнению параллельного переноса<sup>28)</sup>:

$$\frac{D}{Dt} e_N^n = 0, \quad (10.4.30)$$

поэтому решение (10.4.28) равно

$$f_{Nq}^n(t) \propto a^{-1}(t) e_N^n(t). \quad (10.4.31)$$

По причинам, которые скоро прояснятся, нормировка этих решений выбирается так, чтобы при  $q/a \gg H$ ,

$$f_{Nq}^n = (2\pi)^{-3/2} (2q)^{-1/2} a^{-1} e_N^n.$$

---

<sup>28)</sup> Определим векторы  $e_N^n(t)$  так, чтобы они подчинялись дифференциальному уравнению первого порядка (10.4.30), а также, в качестве начального условия, подчинялись уравнению (10.4.29) в некоторый начальный момент времени  $t = t_1$ . Из (10.4.30) и определения (10.4.10) следует, что для любого момента времени

$$\dot{D}_m^n = [-\gamma_{lk}^n D_m^k + \gamma_{lm}^k D_k^n] \dot{\bar{\varphi}}^l,$$

где

$$D_m^n \equiv \sum_N e_N^n e_N^k \gamma_{km}.$$

Это дифференциальное уравнение на  $D_m^n$  имеет решение  $D_m^n = \delta_m^n$ , а из нашего начального условия следует, что  $D_m^n = \delta_m^n$  при  $t = t_1$ , поэтому решение справедливо для любого момента времени. Отсюда следует, что определенные таким образом векторы  $e_N^n(t)$  удовлетворяют условию на реперы (10.4.29) в любой момент времени.

С учетом этой нормировки в начале эпохи пересечения горизонта получаем<sup>29)</sup>

$$\delta\varphi_{Nq}^n(t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}a(t)\sqrt{2q}}e_N^n(t) \exp\left(-iq\int_{t_1}^t \frac{dt'}{a(t')}\right), \quad (10.4.32)$$

$$\Psi_{Nq}(t) = \frac{4i\pi G\gamma_{nm}(\bar{\varphi})e_N^m(t)\dot{\varphi}^n(t)}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2q^3}} \exp\left(-iq\int_{t_1}^t \frac{dt'}{a(t')}\right). \quad (10.4.33)$$

Для времен, достаточно ранних, чтобы выполнялось  $q/a \gg H$ , коммутационные соотношения для  $\varphi^n$  могут быть получены из действия (10.4.1) с исключенным  $\Psi$ , и поэтому они принимают вид

$$[\varphi^n(\mathbf{x}, t), \varphi^m(\mathbf{y}, t)] = 0, \quad [\varphi^n(\mathbf{x}, t), \dot{\varphi}^m(\mathbf{y}, t)] = ia^{-3}(t)\gamma^{nm}(\bar{\varphi}(t))\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Если  $\delta\varphi^n$  нормировано, как в (10.4.32), то приведенные выше коммутационные соотношения означают, что независящие от времени коэффициенты в уравнениях (10.4.21) и (10.4.22) удовлетворяют

$$[\alpha(\mathbf{q}, N), \alpha(\mathbf{q}', N')] = 0, \quad [\alpha(\mathbf{q}, N), \alpha^*(\mathbf{q}', N')] = \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}')\delta_{NN'}. \quad (10.4.34)$$

Предполагая, что для перехода состояния мира в вакуум Банча—Дэвиса  $|0\rangle$ , с  $\alpha(\mathbf{q}, N)|0\rangle = 0$  до пересечения горизонта имеется достаточно времени, из уравнений (10.4.21) и (10.4.22) следует, что наблюдаемые возмущения будут гауссовыми, так же как в случае одного поля.

Согласно предположению 3, на протяжении эпохи, когда  $q/a$  уменьшается от значений несколько больших до значений несколько меньших чем  $H$  — скажем, от  $10H$  до  $0,1H$ , скалярные поля скатываются вниз с потенциально-го холма. Мы предполагаем, что  $V(\varphi)$  удовлетворяет любому условию плоскостности, которое позволяет отбросить все вклады в уравнениях (10.4.23)–(10.4.25), пропорциональные  $\dot{\varphi}_N^n$  или  $\ddot{\varphi}_N^n$ , и игнорировать вторую производную потенциала в уравнении (10.4.24). Тогда в течение эпохи пересечения горизонта уравнение (10.4.24) принимает приближенный вид

$$\delta\ddot{\varphi}_{Nq}^n + 3H\delta\dot{\varphi}_{Nq}^n + \left(\frac{q^2}{a^2}\right)\delta\varphi_{Nq}^n = 0. \quad (10.4.35)$$

В течение этой эпохи  $H$  приблизительно постоянна<sup>30)</sup>, поэтому независимые решения уравнения (10.4.35) пропорциональны  $(1 + iq\tau)\exp(-iq\tau)$  и ком-

<sup>29)</sup> Эквивалентный (10.4.32) результат получен в формуле (4.4) работы H.-C. Lee, M. Sasaki, E. D. Stewart, T. Tanaka, and S. Yokoyama, *J. Cosm. & Astropart. Phys.* **0510**, 004 (2005) [astro-ph/0506262] с помощью  $\delta N$ -формализма, разработанного в работе M. Sasaki and E. D. Stewart, *Prog. Theor. Phys.* **95**, 71 (1996) [astro-ph/9507001]. Однако в этих статьях отсутствует вывод (10.4.41), полученный в текущем разделе.

<sup>30)</sup> Относительное изменение  $H$  на протяжении эпохи пересечения горизонта равно  $|\dot{H}/H| \times \ln(100)/H$ , что является малой величиной, если  $|\dot{H}|/H^2 \ll 1/\ln 100 = 0,22$ .

плексно сопряженной к ней функции, где  $\tau$  — опять конформное время,

$$\tau = \int_{\infty}^t \frac{dt'}{a(t')} \simeq -\frac{1}{Ha(t)}.$$

Возмущения скалярного поля в начале эпохи пересечения горизонта задаются уравнением (10.4.32), поэтому на протяжении этой эпохи получаем

$$\delta\varphi_{Nq}^n \simeq \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2q}} \left( \frac{1}{a} + \frac{iH}{q} \right) e^{+iq/(aH)} e_N^n. \quad (10.4.36)$$

К концу эпохи пересечения горизонта имеем  $q/a \ll H$ , и возмущения скалярного поля стремятся к величинам

$$\delta\varphi_{Nq}^n \rightarrow \frac{iH}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2q^3}} e_N^n. \quad (10.4.37)$$

Поскольку  $H$  и  $e_N^n$  изменяются медленно, их можно вычислить во время пересечения горизонта, причем зависимость от  $q$  будет слабой.

В некоторый момент после эпохи пересечения горизонта условия медленного скатывания обязаны нарушаться, хотя бы для того, чтобы энергия инфлатонных полей могла в конце концов перейти в обычное вещество и излучение. Тогда потенциальным вкладом в левой части уравнения (10.4.24) больше нельзя пренебречь, и все усложняется. Но как только  $q/a$  становится много меньше чем  $H$ , последующая эволюция скалярных полей в течение инфляции не может зависеть от  $q$ , поэтому до повторного возникновения под горизонтом все возмущения скалярных полей  $\delta\varphi_{Nq}^n$  будут иметь одинаковую зависимость от волнового числа, близкую к  $q^{-3/2}$ , задаваемой (10.4.37) в конце эпохи пересечения горизонта. То же самое применимо к скалярным возмущениям метрики; когда  $a$  становится достаточно большим, так что  $q^2/a^2 \ll |\dot{H}|$ , из уравнения (10.4.25) следует, что  $\Psi_{Nq}$  приблизительно пропорционально  $q^{-3/2}$ .

В общем случае увидеть, что именно эти результаты означают для возмущений, наблюдаемых в реликтовом излучении или крупномасштабной структуре, нелегко. Однако есть один случай, когда можно прийти к некоторому важному заключению. В соответствии с предположением 1\*, энергия всех скалярных полей переходит в конце инфляции в обычное вещество и излучение в состоянии локального теплового равновесия, и если в этот момент все сохраняющиеся величины вроде электрического заряда имеют нулевую плотность, то, как отмечалось в разд. 5.4, возмущения становятся адиабатическими, а величина  $\mathcal{R}_q$  будет иметь постоянное значение  $\mathcal{R}_q^r$  вплоть до повторного появления под горизонтом. Для малых флуктуаций в конце эпохи пересечения горизонта  $\mathcal{R}_q^r$  будет некоторой линейной комбинацией возмущений  $\delta\varphi_{Nq}^n$  и  $\Psi_{Nq}$ . Нам не известны коэффициенты в этой линейной комбинации, которые в общем случае будут зависеть от вида потенциала полей во время приближения

конца инфляции, а также от механизма передачи энергии веществу и излучению. Но можно быть уверенными, что эти коэффициенты не зависят от волнового числа, потому что как только заканчивается эпоха пересечения горизонта, то возмущения оказываются далеко за его пределами. Исходя из этого, можно сделать вывод, что в этом случае в конце эпохи пересечения горизонта  $\mathcal{R}_q^r$  будет иметь одинаковую с  $\delta\varphi_{Nq}^n$  и  $\Psi_{Nq}$  зависимость от волнового числа, которая для инфляции в режиме медленного скатывания будет близка к  $q^{-3/2}$ .

Повсеместное появление зависимости от волнового числа  $q^{-3/2}$  можно понять самым общим образом. Для пренебрежимо малой пространственной кривизны ничего не может зависеть от выбора нормировки сопутствующего пространственного вектора  $\mathbf{x}$ , поэтому предположим, что мы изменяем его масштаб с помощью преобразования  $\mathbf{x} \rightarrow \lambda \mathbf{x}$ , где  $\lambda$  — константа. Требуя инвариантности  $\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}$ , необходимо изменить масштаб сопутствующих волновых чисел с помощью преобразования  $\mathbf{q} \rightarrow \lambda^{-1}\mathbf{q}$ . Рассмотрим произвольное возмущение  $Z(\mathbf{x}, t)$ , которое, подобно  $\delta\varphi^n(\mathbf{x}, t)$  и  $\Psi(\mathbf{x}, t)$ , задается интегралом Фурье:

$$Z(\mathbf{x}, t) = \sum_N \int d^3 q [e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} a(\mathbf{q}, N) z_{Nq}(t) + e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} a^*(\mathbf{q}, N) z_{Nq}^*(t)],$$

где  $N$  нумерует различные решения полевых уравнений, а  $a(\mathbf{q}, N)$  и  $a^*(\mathbf{q}, N)$  — операторы уничтожения и рождения, удовлетворяющие коммутационным соотношениям:

$$[a(\mathbf{q}, N), a^*(\mathbf{q}', N')] = \delta_{NN'} \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}').$$

Относительно преобразования  $\mathbf{q} \rightarrow \lambda^{-1}\mathbf{q}$  дельта-функция в данном коммутаторе преобразуется как  $\delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \rightarrow \lambda^3 \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}')$ , поэтому необходимо иметь  $a(\mathbf{q}, N) \rightarrow \lambda^{3/2} a(\mathbf{q}, N)$ . Помимо этого, разумеется,  $d^3 q \rightarrow \lambda^{-3} d^3 q$ . Следовательно, для того чтобы  $Z(\mathbf{x}, t)$  не изменилось этим масштабным преобразованием, необходимо иметь  $z_{Nq}(t) \rightarrow \lambda^{3/2} z_{Nq}(t)$ . Это условие выполнено, если  $z_{Nq}(t)$  имеет  $q$ -зависимость  $\propto q^{-3/2}$  и если она не зависит от масштаба  $a(t)$ . Разумеется, для того чтобы физический пространственный вектор  $\mathbf{x}a(t)$  по-прежнему не зависел от нормировки, выбранной для сопутствующих координат, масштабное преобразование  $a(t)$  должно иметь вид  $a(t) \rightarrow \lambda^{-1} a(t)$ , поэтому  $q/a(t)$  масштабно инвариантно, и если  $z_{Nq}(t)$  зависит от масштаба функции  $a(t)$ , то мы не сможем сделать вывод, что она пропорциональна  $q^{-3/2}$ . Однако если после пересечения горизонта величина  $z_{Nq}(t)$ , подобно  $\delta\varphi_{Nq}^n(t)$  и  $\Psi_{Nq}(t)$ , принимает почти независящее от времени значение  $z_{Nq}^r$ , то за горизонтом у нее не будет сильной зависимости от  $a(t)$ . Она по-прежнему может зависеть от  $H(t_q)$ ,  $\dot{H}(t_q)$  и т. д., где  $t_q$  — время пресечения горизонта, определенное масштабно-инвариантным условием  $q/a(t_q) = H(t_q)$ , но в пределе медленного скатывания  $H$ ,  $\dot{H}$  и т. д. слабо зависят от времени, поэтому  $z_{Nq}^r$  может иметь лишь слабую зависимость от масштаба функции  $a$ , а из масштабной инвариантности  $Z(\mathbf{x}, t)$  следует, что  $z_{Nq}^r$  должно быть примерно пропорционально  $q^{-3/2}$ .

Интенсивность наблюдаемых адиабатических флюктуаций связана с величиной  $\mathcal{R}$ , определенной уравнением (5.4.1). Воспользовавшись уравнениями (10.4.14), (10.4.11), (10.4.21) и (10.4.22), получаем, что во время инфляции она равна

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(\mathbf{x}, t) &\equiv -\Psi(\mathbf{x}, t) + H(t)\delta u(\mathbf{x}, t) = \\ &= -\Psi(\mathbf{x}, t) + \frac{4\pi GH(t)}{\dot{H}(t)}\gamma_{nm}(\bar{\varphi}(t))\dot{\bar{\varphi}}^n(t)\delta\varphi^m(\mathbf{x}, t) = \\ &= \sum_N \int d^3q [e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}a(\mathbf{q}, N)\mathcal{R}_{Nq}(t) + e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}a^*(\mathbf{q}, N)\mathcal{R}_{Nq}^*(t)],\end{aligned}\quad (10.4.38)$$

где

$$\mathcal{R}_{Nq}(t) = -\Psi_{Nq}(t) + \frac{4\pi GH(t)}{\dot{H}(t)}\gamma_{nm}(\bar{\varphi}(t))\dot{\bar{\varphi}}^n(t)\delta\varphi^m_{Nq}(t).\quad (10.4.39)$$

Так как в знаменателе стоит фактор  $\dot{H}$ , в конце эпохи пересечения горизонта второй вклад в (10.4.39) доминирует на вкладом  $-\Psi_{Nq}$ , и тогда из уравнения (10.4.37) следует, что в это время

$$\mathcal{R}_{Nq} \rightarrow i \frac{4\pi GH^2}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2q^3}\dot{H}}\gamma_{nm}(\bar{\varphi})\dot{\bar{\varphi}}^n e_N^m.\quad (10.4.40)$$

Отсюда получаем, что определение реперов (10.4.29) и формула (10.4.11) немедленно приводят к правилу сумм:

$$\left(\sum_N |\mathcal{R}_{Nq}|^2\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{G}H^2}{2\pi q^{3/2}\sqrt{|\dot{H}|}}.\quad (10.4.41)$$

Иными словами, корень квадратный из усредненных квадратов величин  $|\mathcal{R}_{Nq}|$  в конце эпохи пересечения горизонта совпадает со значением  $|\mathcal{R}_q|$  за пределами горизонта в случае одного поля инфлатона, задаваемого уравнением (10.3.16). Однако из уравнений (10.4.38) и (10.4.34) следует, что корреляционная функция величин  $\mathcal{R}$  для вакуума Банча—Дэвиса равна

$$\int d^4x e^{-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}\langle\mathcal{R}(\mathbf{x}, t)\mathcal{R}(\mathbf{y}, t)\rangle = (2\pi)^3 \sum_N |\mathcal{R}_{Nq}|^2.\quad (10.4.42)$$

Так что из соотношения (10.4.41) вытекает, что в конце эпохи пересечения горизонта корреляционная функция  $\mathcal{R}(\mathbf{x}, t)\mathcal{R}(\mathbf{y}, t)$  совпадает с аналогичной формулой для случая одного поля инфлатона. Для нескольких скалярных полей корреляционная функция (10.4.42) за горизонтом зависит в общем случае от времени, однако весьма правдоподобно, что значение  $|\mathcal{R}_q|$  в течение периода теплового равновесия после инфляции не будет на много порядков величины отличаться от (10.4.41) в конце эпохи пересечения горизонта. Таким

образом, наблюдаемая величина и спектральный вид анизотропий реликтового излучения говорит о том, что значение  $H$  при пересечении горизонта порядка  $10^{14}$  ГэВ, как и в случае одного поля.

В случае, когда все, кроме одного, собственные значения матрицы

$$\gamma^{nm}(\bar{\varphi}) \frac{\partial^2 V(\bar{\varphi})}{\partial \bar{\varphi}^m \partial \bar{\varphi}^l}$$

в уравнении (10.4.23) велики и положительны, можно сделать более сильные утверждения. В этом случае невозмущенные скалярные поля катятся вдоль направления собственного вектора с небольшим собственным значением, и единственное значительное возмущение находится в этом же направлении. Тогда задача сводится к случаю одного поля; по сути, мы имеем адиабатическое возмущение с амплитудой  $\mathcal{R}_q^\Gamma$ , задаваемой в приближении медленного скатывания уравнением (10.3.16), и наклоном  $n_S(q)$ , задаваемым в этом приближении уравнением (10.3.25), в котором  $\epsilon$  и  $\delta$  должны быть вычислены в терминах производных по времени от скорости расширения (10.3.4). Однако нет никакой известной нам причины, почему потенциал должен иметь свойства, оправдывающие данные результаты. С другой стороны, тензорные возмущения в течение инфляции описываются уравнением (10.3.17), независимо от того, как много имеется скалярных полей, и единственная роль скалярных полей состоит в том, чтобы они давали вклад в скорость Хаббла  $H$ . Таким образом, для инфляции в режиме медленного скатывания с произвольным числом скалярных полей тензорная амплитуда  $\mathcal{D}_q^\Gamma$  задается выражением (10.3.23), а параметр наклона  $n_T(q)$  задается выражением (10.3.25), также как и в случае одного поля.

Тот факт, что наблюдения анизотропий реликтового излучения и крупномасштабной структуры указывают на то, что скалярные флуктуации за пределами горизонта адиабатические и гауссова, причем  $\mathcal{R}_q^\Gamma$  приблизительно пропорционально  $q^{-3/2}$  и  $q^{3/2}\mathcal{R}_q^\Gamma \ll 1$ , очевидным образом согласуется с очень большим классом инфляционных моделей. Это обнадеживает, потому что свидетельствует в поддержку общей идеи инфляции с медленным скатыванием, но также разочаровывает, потому что тогда следует, что эти наблюдения пока не сообщили нам ничего особенного о подробностях инфляции. Дальнейшие улучшения точности экспериментов позволяет нам ожидать более решающей проверки теорий ранней Вселенной.

# Приложение А

## НЕКОТОРЫЕ ПОЛЕЗНЫЕ ЧИСЛА

### **Числовые константы**

$$\begin{aligned}\pi &= 3,1415927 & 1'' &= 4,84814 \times 10^{-6} \text{ [радиан]} \\ e &= 2,7182818 & \ln 10 &= 2,3025851 \\ \gamma &= 0,5772157 & \zeta(3) &= 1,2020569\end{aligned}$$

### **Физические постоянные\***

Скорость света в вакууме	$c \equiv 2,99792458 \times 10^{10} \text{ [см} \cdot \text{с}^{-1}]$
Постоянная Планка	$\hbar = 6,6260693(11) \times 10^{-27} \text{ [эрг} \cdot \text{с}]$
Постоянная Планка (приведенная)	$\hbar \equiv \hbar/(2\pi) = 1,05457168(18) \times 10^{-27} \text{ [эрг} \cdot \text{с}] =$ $= 6,58211915(56) \times 10^{-22} \text{ [МэВ} \cdot \text{с}]$
Заряд электрона (нерационализированный)	$e = 4,80320441(41) \times 10^{-10} \text{ [ед. СГСЭ]}$
Электронвольт	$1 \text{ [эВ]} = 1,60217653(14) \times 10^{-12} \text{ [эрг]}$ $\hbar c = 197,326968(17) \times 10^{-13} \text{ [МэВ} \cdot \text{с}]$
Постоянная тонкой структуры	$\alpha \equiv e^2/(\hbar c) = 1/137,03599911(46)$
Масса электрона	$m_e = 9,1093826(16) \times 10^{-28} \text{ [г]}$ $m_e c^2 = 0,510998918(44) \text{ [МэВ]}$
Энергия Ридберга	$hcR \equiv m_e e^4/(2\hbar^2) = 13,6056923923(12) \text{ [эВ]}$
Томсоновское сечение	$\sigma_T = 8\pi e^4/(3m_e^2 c^4) = 0,665245873(13) \times 10^{-24} \text{ [см}^2]$
Масса протона	$m_p = 1,67262171(29) \times 10^{-24} \text{ [г]}$ $m_p c^2 = 938,272029(80) \text{ [МэВ]}$
Масса нейтрона	$m_n c^2 = 939,565360(81) \text{ [МэВ]}$
Масса дейтрана	$m_{dc} c^2 = 1875,61282(16) \text{ [МэВ]}$
Атомная единица массы а.е.м.	$m(C^{12})/12 = 1,66053886(28) \times 10^{-24} \text{ [г]}$ $m(C^{12})c^2/12 = 931,494043(80) \text{ [МэВ]}$
Число Авогадро	$N_A = 6,0221415(10) \times 10^{23} \text{ [моль}^{-1}]$

\* *Review of Particle Physics*, S. Eidelman *et al.* (Particle Data Group), *Phys. Lett. B* 592, 1 (2004).

Постоянная Больцмана	$k_B = 1,3806505(24) \times 10^{-16}$ [эрг · К <sup>-1</sup> ] = $= 8,617343(15) \times 10^{-5}$ [эВ · К <sup>-1</sup> ]
Постоянная Стефана—Больцмана	$a_B = 8\pi^5 k_B^4 / (15 h^3 c^3) = 7,56577(5) \times 10^{-15}$ [эрг · см <sup>-3</sup> · К <sup>-4</sup> ]
Постоянная слабого взаимодействия	$G_{\text{сл}} = 1,16637(1) \times 10^{-5}$ [ГэВ <sup>-2</sup> ]
Гравитационная постоянная	$G = 6,6742(10) \times 10^{-8}$ [дин · см <sup>2</sup> · г <sup>-2</sup> ]
Планковская энергия	$\sqrt{\hbar c / G} = 1,22090(9) \times 10^{19}$ [ГэВ]

**Астрономические постоянные\***

Юлианский год	$1$ [год] $\equiv 365,25$ [дней] $= 3,1557600 \times 10^7$ [с]
Световой год (по юлианскому календарю)	$1$ [св. год] $= 9,460730472 \times 10^{17}$ [см]
Среднее расстояние от Земли до Солнца	$1$ [а. е.] $= 1,4959787066 \times 10^{13}$ [см]
Парсек	$1$ [пк] $\equiv 648\,000/\pi$ [а. е.] $= 3,0856776 \times 10^{18}$ [см] = $= 3,2615638$ [свет. (юлианского) года]
Масса Солнца	$M_\odot = 1,9891 \times 10^{33}$ [г]
Светимость Солнца	$L_\odot = 3,845(8) \times 10^{33}$ [эрг · с <sup>-1</sup> ]
Видимая светимость, соответствую- щая видимой звездной величине $m$	$\ell = 2,52 \times 10^{-5}$ [эрг · см <sup>-2</sup> · с <sup>-1</sup> ] $\times 10^{-2m/5}$
Абсолютная светимость, соотве- тствующая звездной величине $M$	$\mathcal{L} = 3,02 \times 10^{35}$ [эрг · с <sup>-1</sup> ] $\times 10^{-2M/5}$
Постоянная Хаббла	$H_0 = h \times 100$ [км · с <sup>-1</sup> · Мпк <sup>-1</sup> ]
Хаббловское время	$H_0^{-1} = 3,0857h^{-1} \times 10^{17}$ [с] $= 9,778h^{-1} \times 10^9$ [лет]
Хаббловское расстояние	$c/H_0 = 2997,92458h^{-1}$ [Мпк]
Критическая плотность	$\rho_{kp} \equiv 3H_0^2/(8\pi G) = 1,878h^2 \times 10^{-29}$ [г · см <sup>-3</sup> ] $= [0,00300 \text{ эВ}]^4 h^2$

**Приложение B****ОБЗОР ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**

В этом Приложении мы даем краткое введение в общую теорию относительности — теорию тяготения Эйнштейна. Приложение не заменяет тщательного изучения теории, но содержит те ее части, которые используются в этой книге и служат для определения наших обозначений.

\* *Allen's Astrophysical Quantities*, ed. A. N. Cox (AIP Press, New York, 2000)

## 1. Принцип эквивалентности

Общая теория относительности основана на Принципе Эквивалентности тяготения и инерции, для краткости — Принципе Эквивалентности (ПЭ). Этот принцип есть обобщение знакомого всем наблюдения, что в силу равенства гравитационной и инертной масс свободно падающие наблюдатели не ощущают явлений тяготения. Согласно ПЭ, в любой пространственно-временной точке в произвольном гравитационном поле существует «локально инерциальная» система координат, в которой эффекты гравитации отсутствуют в достаточно малой пространственно-временной окрестности данной точки. Этот принцип позволяет записать уравнения, определяющие поведение любой достаточно малой физической системы в гравитационном поле, если нам известны уравнения, определяющие это поведение при отсутствии гравитации: необходимо лишь записать уравнения в общековариантной форме, т. е. форме, которая не зависит от выбранных пространственно-временных координат и сводится к правильным уравнениям при отсутствии гравитации. Такие уравнения будут правильными и в присутствии гравитационного поля, так как общая ковариантность гарантирует, что они верны в любой системе координат, если они верны в любой другой системе координат, а ПЭ утверждает, что существует система координат, в которой уравнения верны, — система координат, которая локально инерциальна в пространственно-временной окрестности обсуждаемой системы. В общем случае существует более одной системы общековариантных уравнений, которые сводятся к правильным уравнениям в отсутствии гравитации, но разности между этими уравнениями всегда содержат слагаемые с дополнительными пространственно-временными производными, которые становятся пренебрежимо малыми, если мы ограничимся пространственно-временной областью, малой по сравнению с масштабом расстояний и времени, на котором существенно меняются гравитационное и другие поля.

## 2. Метрика: тикающие часы

В качестве примера такой процедуры рассмотрим уравнение, определяющее частоту, с которой тикают часы в гравитационном поле. Специальная теория относительности утверждает, что если часы тикают один раз за каждый промежуток времени  $dT$ , находясь в покое при отсутствии гравитационного поля, то интервал  $d\xi^\alpha$  между пространственно-временными положениями последовательных отсчетов часов, движущихся в отсутствии гравитационного поля, подчиняется соотношению

$$\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta = -dT^2. \quad (\text{B.1})$$

Здесь  $\xi^1$ ,  $\xi^2$  и  $\xi^3$  — декартовы пространственные координаты в единицах длины, в которых скорость света  $c$  равна единице;  $\xi^0 \equiv t$ ;  $\eta_{00} = -1$ ;  $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$ , по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Тогда правильное уравнение, управляющее ходом часов в произвольном гравитационном поле, имеет вид

$$g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = -dT^2, \quad (\text{B.2})$$

где  $g_{\mu\nu}(x)$  — метрика, т. е. поле, определяющееся двумя свойствами: во-первых, при преобразовании к системе координат  $x'^\mu$  метрика изменяется по формуле

$$g'_{\rho\sigma}(x') = g_{\mu\nu}(x) \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma}, \quad (\text{B.3})$$

и, во-вторых, в координатах, которые локально инерциальны и декартовы в точке  $x$ , метрика в точке  $x$  равна  $\eta_{\alpha\beta}$ , а ее первые производные в точке  $x$  обращаются в ноль. (В формуле (B.3)  $x^\mu$  и  $x'^\mu$  — координаты одной и той же физической точки в двух разных системах координат.) Уравнение (B.2) является общековариантным, так как дифференциалы координат обладают очевидным свойством преобразования

$$dx'^\rho = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} dx^\mu, \quad (\text{B.4})$$

так что

$$g'_{\rho\sigma}(x') dx'^\rho dx'^\sigma = g_{\mu\nu}(x) \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\lambda} dx^\kappa dx^\lambda = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu.$$

Повторяя наш общий аргумент, можно сказать, что формула (B.2) верна, так как в локально инерциальных декартовых координатах она сводится к формуле (B.1), описывающей часы в отсутствии гравитации, а ее общая ковариантность означает, что если она верна в одной системе координат, то она будет верна и в любой другой системе. Аналогично, пространственно-временное разделение  $dx^\mu$  концов маленькой линейки, длина которой равна  $dL$ , если проводить измерения в покое в отсутствие гравитации, будет в общем случае даваться формулой

$$g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = +dL^2.$$

Аналогично, разности  $dx^\mu$  между пространственно-временными координатами двух последовательных положений вдоль луча света подчиняются уравнению

$$g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = 0.$$

### 3. Тензоры, векторы, скаляры

Величины, преобразующиеся как в (B.3) и (B.4), называются, соответственно, *ковариантными* тензорами и *контравариантными* векторами. В общем случае контравариантные и ковариантные величины помечаются соответственно верхними и нижними индексами, и на каждый такой индекс приходится множитель в законе преобразования  $\partial x'/\partial x$  или  $\partial x/\partial x'$  соответственно. Также возможны смешанные величины с некоторым количеством верхних и нижних индексов. Например, существует смешанный тензор  $\delta_\nu^\mu$ , определенный в любой системе координат равенством

$$\delta_\nu^\mu \equiv \begin{cases} 1, & \mu = \nu, \\ 0, & \mu \neq \nu. \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Даже несмотря на то, что его компоненты одинаковы во всех системах координат, это выражение есть тензор, так как

$$\delta_\nu^\mu \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\sigma} = \delta_\sigma^\rho.$$

Существует также контравариантный тензор  $g^{\mu\nu}$ , определенный как тензор, обратный к метрике:

$$g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu. \quad (\text{B.6})$$

Чтобы увидеть, что это есть тензор, достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} \left( g^{\rho\sigma}(x) \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} \right) g'_{\lambda\nu}(x') &= g^{\rho\sigma}(x) \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\eta} g_{\eta\tau}(x) = \\ &= g^{\rho\sigma}(x) \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \delta_\sigma^\eta \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\eta} g_{\eta\tau}(x) = \delta_\tau^\mu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\tau} = \delta_\nu^\mu. \end{aligned}$$

Таким образом, величина в скобках в первой строке есть обратная к преобразованной метрике:

$$g^{\rho\sigma}(x) \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} = g'^{\mu\lambda}(x'),$$

это подтверждает, что обратная к метрике величина есть контравариантный тензор.

*Скаляр*  $s(x)$  — величина, значение которой в физической пространственно-временной точке не изменяется за счет координатного преобразования; иными словами, используя множество координат  $x'^\mu$ , получаем, что

$$s'(x') = s(x). \quad (\text{B.7})$$

Производная  $v_\mu \equiv \partial s / \partial x^\mu$  скаляра  $s(x)$  есть *ковариантный вектор*:

$$v'_\rho \equiv \frac{\partial s'}{\partial x'^\rho} = \frac{\partial s}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho} = v_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\rho}. \quad (\text{B.8})$$

Скаляры и векторы можно рассматривать как тензоры без индексов или с одним индексом соответственно. Можно построить тензоры из других тензоров, беря прямое произведение; например,

если  $A^{\mu}_{\nu}$  и  $B_{\rho\sigma}$  — тензоры, то тензором является их прямое произведение  $C^{\mu}_{\nu\rho\sigma} \equiv A^{\mu}_{\nu}B_{\rho\sigma}$ . Мы можем также построить тензоры с меньшим числом индексов, сворачивая верхние и нижние индексы, как в формулах (B.2) и (B.6). В частном случае мы часто опускаем (или поднимаем) индекс у тензора, беря прямое произведение тензора с метрикой (или ей обратной) и затем сворачивая верхний (или нижний) индекс тензора с индексом метрики (или ей обратной). Например, если  $A^{\mu\nu}$  — тензор, то таковым является и  $A_{\rho}^{\nu} \equiv g_{\mu\rho}A^{\mu\nu}$ , в то время как если  $B_{\rho}^{\nu}$  — тензор, то тензором будет и  $B^{\sigma\nu} = g^{\sigma\rho}B_{\rho}^{\nu}$ . Заметим, что поднятие и опускание одного и того же индекса просто возвращает нас к исходному тензору; например  $g^{\sigma\rho}(g_{\mu\rho}A^{\mu\nu}) = A^{\sigma\nu}$ . Любое выражение, утверждающее равенство двух тензоров одного типа или равенство нулю тензора любого типа, является общековариантным.

#### 4. Аффинная связность: падающие тела

Но не все объекты являются тензорами. Например, выражение (B.4) говорит нам, что первая производная координаты  $x^{\mu}$  частицы по некоторой скалярной величине  $u$ , которая параметризует положение вдоль траектории частицы (например, время на каких-то фиксированных часах), есть вектор:

$$\frac{dx'^{\rho}}{du} = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{dx^{\mu}}{du}, \quad (\text{B.9})$$

но вторая производная не есть вектор:

$$\frac{d^2x'^{\rho}}{du^2} = \frac{d}{du} \left( \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{dx^{\mu}}{du} \right) = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{d^2x^{\mu}}{du^2} + \frac{\partial^2 x'^{\rho}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \frac{dx^{\mu}}{du} \frac{dx^{\nu}}{du}. \quad (\text{B.10})$$

Это означает, что правильное обобщение уравнения  $d^2\xi^{\alpha}/du^2 = 0$  для движения частицы в отсутствии гравитации — не уравнение  $d^2x^{\mu}/du^2 = 0$ , так как это уравнение не общековариантно. Вместо этого, для сокращения второго слагаемого справа в формуле (B.10) следует ввести величину  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(x)$ , определенную своим трансформационным свойством:

$$\Gamma_{\sigma\rho}^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\rho}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\rho}}, \quad (\text{B.11})$$

и предписать, что  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(x)$  обращается в ноль в координатной системе, которая локально инерциальна и декартова в точке  $x$ . Правильное уравнение движения для частицы, свободно падающей в гравитационном поле, имеет в этом случае вид

$$\frac{d^2x^{\lambda}}{du^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} \frac{dx^{\mu}}{du} \frac{dx^{\nu}}{du} = 0, \quad (\text{B.12})$$

так как это действительно общековариантное выражение, которое сводится к правильному уравнению движения  $d^2\xi^{\alpha}/du^2 = 0$  в отсутствие гравитации. Поле  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  известно как *аффинная связность*, и, конечно, оно не является тензором.

Имеется простая формула для аффинной связности, выраженной через метрику:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left[ \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right]. \quad (\text{B.13})$$

Можно непосредственно убедиться, что это выражение общековариантно и верно в локально инерциальной декартовой системе координат, так как в такой системе обе стороны обращаются в нуль, и поэтому высказанное верно для произвольных гравитационных полей и в произвольных системах координат.

Траектория, удовлетворяющая уравнению (B.12), называется *пространственно-временной геодезической*, так как на этой траектории интеграл

$$\int_{u_1}^{u_2} \sqrt{g_{\mu\nu}(x(u)) \frac{dx^{\mu}(u)}{du} \frac{dx^{\nu}(u)}{du}} du$$

стационарен по отношению к вариациям, оставляющим  $x^\mu(u)$  фиксированными в конечных точках  $u_1$  и  $u_2$ . Часто вместо задания конкретной метрики задают элемент длины  $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  для произвольных дифференциалов  $dx^\mu$ .

Уравнение движения (B.12) не выполняется при произвольном выборе параметра  $u$ . Чтобы убедиться в этом, заметим, что из уравнения (B.12) вытекает закон сохранения

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} \left[ g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{du} \frac{dx^\nu}{du} \right] &= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\mu}{du} \frac{dx^\nu}{du} \frac{dx^\lambda}{du} + g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\mu}{du^2} \frac{dx^\nu}{du} + g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{du} \frac{d^2 x^\nu}{du^2} = \\ &= \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - g_{\mu\kappa} \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa - g_{\nu\kappa} \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa \right) \frac{dx^\mu}{du} \frac{dx^\nu}{du} \frac{dx^\lambda}{du} = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Отсюда следует, что  $u$  должна быть линейной функцией *собственного времени*, определенного как

$$dt \equiv \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}, \quad (\text{B.15})$$

которое, согласно формуле (B.2), есть время, прошедшее по часам, свободно падающим вместе с частицей. Единственным исключением являются безмассовые частицы типа фотонов, пространственно-временные траектории которых удовлетворяют тому же уравнению движения (B.12), что и для массивных частиц, но для которых сохраняющаяся величина  $dt/du$  обращается в нуль. Для безмассовой частицы или луча света нужно выбрать параметр  $u$  как время, сообщаемое какими-то другими свободно падающими часами.

В случае ненулевой массы  $m$  удобно взять аффинный параметр  $u$  как  $u = \tau/m$ , и в этом случае можно определить 4-вектор энергии-импульса как

$$p^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dx^\mu}{du}$$

и, используя формулу (B.15), получить

$$g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -m^2.$$

Для безмассовых частиц имеем

$$g_{\mu\nu} \left( \frac{dx^\mu}{du} \right) \left( \frac{dx^\nu}{du} \right) = 0,$$

однако  $u$  нормировано, и можно просто предположить, что оно нормировано таким образом, что 4-вектор энергии-импульса равен  $p^\mu = dx^\mu/du$ .

## 5. Гравитационное замедление времени

Эти результаты позволяют вывести одно из самых важных следствий Принципа Экви-валентности. Для медленно движущейся частицы  $dx^i/du$  много меньше, чем  $dx^0/du$ , так что уравнение (B.12) принимает вид

$$\frac{d^2 x^i}{du^2} + \Gamma_{00}^i \frac{dx^0}{du} \frac{dx^0}{du} = 0. \quad (\text{B.16})$$

Для слабого гравитационного поля метрика  $g_{\mu\nu}$  близка к метрике Минковского  $\eta_{\mu\nu}$ , так что

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad (\text{B.17})$$

причем компоненты  $h_{\mu\nu}$  много меньше единицы. Затем мы можем положить  $u = \tau \simeq x^0 \equiv t$ , так что уравнение движения свободно падающей медленно движущейся частицы в слабом гравитационном поле имеет вид

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\Gamma_{00}^i, \quad (\text{B.18})$$

где  $i$  принимает значения 1, 2, 3, которые помечают пространственные направления в декартовой системе координат. Аффинная связность в случае слабого гравитационного поля равна

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda \simeq \frac{\eta^{\lambda\rho}}{2} \left[ \frac{\partial h_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial h_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial h_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \right]. \quad (\text{B.19})$$

В частности, для слабого, независящего от времени гравитационного поля

$$\Gamma_{00}^i \simeq -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}. \quad (\text{B.20})$$

Формулы (B.18) и (B.20) позволяют отождествить  $-h_{00}/2$  с ньютоновским гравитационным потенциалом  $\phi$ , так что в слабом статическом гравитационном поле

$$g_{00} \simeq -1 - 2\phi. \quad (\text{B.21})$$

Рассмотрим теперь часы, находящиеся в покое в таком поле. Согласно (B.2), если интервал времени между двумя отсчетами в отсутствие гравитационного поля равен  $dT$ , то в присутствии поля он равен  $dt$ , где

$$(-1 - 2\phi) dt^2 \simeq -dT^2.$$

Следовательно, промежуток времени между двумя отсчетами равен уже не  $dT$ , а

$$dt \simeq (1 - \phi) dT. \quad (\text{B.22})$$

Поэтому часы, находясь в отрицательном гравитационном потенциале на поверхности звезды, отсчитывают время медленнее, чем в межзвездном пространстве или в существенно более слабом гравитационном потенциале на поверхности Земли. На поверхности звезды этот эффект наблюдаем, так как все физические процессы замедляются во столько же раз, однако он наблюдаем на расстоянии путем измерения уменьшения частоты фотонов, испускаемых в результате атомных переходов на поверхности звезды. Точнее всего гравитационное замедление времени измеряется путем наблюдения сдвига спектральных линий при подъеме или падении фотонов в гравитационном поле Земли.

## 6. Ковариантные производные

Хотя пространственно-временная производная скалярного поля есть вектор, производная векторного или тензорного поля в общем случае не есть тензор. Например, контравариантное векторное поле  $v^\mu$  подчиняется следующему закону преобразования:

$$v'^\rho = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} v^\mu, \quad (\text{B.23})$$

так что

$$\frac{\partial v'^\rho}{\partial x'^\sigma} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial^2 x'^\rho}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} v^\mu. \quad (\text{B.24})$$

Чтобы построить тензор, нам следует добавить слагаемое, которое сокращает второе слагаемое в данном законе преобразования. Действуя таким образом, мы приходим к необходимости ввести *ковариантную производную*

$$v^\mu_{;\nu} \equiv \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} v^\lambda, \quad (\text{B.25})$$

которая преобразуется как смешанный тензор:

$$v'^\rho_{;\sigma} = \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\sigma} v^\mu_{;\nu}. \quad (\text{B.26})$$

Аналогично, ковариантная производная ковариантного вектора определяется как

$$v_{\nu;\mu} \equiv \frac{\partial v_\nu}{\partial x^\mu} - \Gamma^\lambda_{\mu\nu} v_\lambda \quad (\text{B.27})$$

и является ковариантным тензором. В более общем случае ковариантная производная тензора с любым числом верхних и/или нижних индексов задается аналогичными формулами с  $+G$  для каждого верхнего индекса и  $-G$  для каждого нижнего индекса. Нетрудно проверить, что все ковариантные производные  $g_{\mu\nu;\lambda}$  метрического тензора зануляются, как и должно быть, так как в локально инерциальной декартовой системе ковариантная производная есть обычная производная, а первые производные метрики исчезают, так что ковариантные производные обращаются в ноль, а тензор  $g_{\mu\nu;\lambda}$ , обращающийся в ноль в одной системе координат, должен обращаться в ноль во всех системах координат.

## 7. Гравитационные эффекты: уравнения Максвелла

Если заданы уравнения, управляющие некоторым множеством полей в отсутствие тяготения, можно найти уравнения, применимые (по крайней мере, в достаточно малых областях) в гравитационном поле, заменив метрику Мinkовского  $\eta$  метрическими тензорами, а все производные — ковариантными производными. Как отмечалось ранее, процедура не дает однозначного результата, так как существуют тензоры, построенные из вторых и более высоких производных метрики, исчезающие при отсутствии гравитации, но эффект от включения таких тензоров в общековариантные уравнения поля был бы пренебрежимо мал в достаточно малых областях пространства-времени.

Например, в декартовых координатах при отсутствии гравитации электрические и магнитные поля подчиняются уравнениям Максвелла:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} = -J^\beta, \quad (B.28)$$

$$\partial_\alpha F_{\beta\gamma} + \partial_\beta F_{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F_{\alpha\beta} = 0, \quad (B.29)$$

где  $F^{\alpha\beta}$  — тензор электромагнитного поля (причем  $F^{01} = E_1$ ,  $F^{23} = B_1$  и т. д.),  $J^\alpha$  — 4-вектор тока электрического заряда ( $J^0$  — плотность заряда,  $J^1$ ,  $J^2$ ,  $J^3$  — плотность электрического тока), и

$$F_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta\delta}F^{\gamma\delta}. \quad (B.30)$$

Следовательно, при наличии гравитации уравнения поля примут вид

$$F^{\nu\mu}_{;\nu} = -J^\mu, \quad (B.31)$$

$$F_{\mu\nu;\lambda} + F_{\nu\lambda;\mu} + F_{\lambda\mu;\nu} = 0, \quad (B.32)$$

причем

$$F_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa}F^{\lambda\kappa}. \quad (B.33)$$

Мы используем одну и ту же букву алфавита для тензоров типа  $F_{\mu\nu}$  и  $F^{\mu\nu}$ , которые связаны поднятием и опусканием индексов путем свертки с метрикой, так как они представляют одну и ту же физическую величину.

## 8. Токи и законы сохранения

Для системы частиц, помеченных индексом  $n$ , с пространственно-временными координатами  $x_n^\mu(u)$  и электрическими зарядами  $e_n$ , 4-вектор электрического тока дается выражением

$$\begin{aligned} J^\mu(x) &\equiv \frac{1}{\sqrt{-\det g(x)}} \int du \sum_n e_n \delta^4(x_n(u) - x) \frac{dx_n^\mu(u)}{du} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\det g(x)}} \sum_n e_n \delta^3(x_n(t) - x) \frac{dx_n^\mu(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (B.34)$$

Здесь  $\delta^4(z)$  есть фиктивная функция с бесконечно узким и бесконечно высоким пиком при  $z = 0$ , которая нормирована так, что для любой гладкой функции  $f(z)$

$$\int d^4x f(x) \delta^4(y - x) = f(y),$$

и  $\delta^3(z)$  — та же функция в трех измерениях. В частности, интеграл от  $\sqrt{-\det g} J^0$  по конечному трехмерному объему равен полному электрическому заряду внутри этого объема.

---

В космологии нас больше интересует не  $e_n$ , а ток барионов с барионным числом  $n$ -й частицы или  $n$ -й галактики.

---

Здесь необходим множитель  $1/\sqrt{-\det g(x)}$ , так как четырехмерная дельта-функция не является скаляром. Это следует из того, что при преобразовании от координат  $x^\mu$  к координатам  $x'^\mu$  дифференциал пространственно-временного элемента объема изменяется по закону

$$d^4x' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| d^4x, \quad (\text{B.35})$$

где  $|\partial x'/\partial x|$  — якобиан преобразования координат, т. е. детерминант матрицы, элементы которой равны  $\partial x'^\mu/\partial x^\mu$ . Якобиан можно выразить через детерминанты метрики; взяв детерминант от (B.3), находим

$$\det g' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-2} \det g. \quad (\text{B.36})$$

Отсюда следует, что как скаляр преобразуется не  $d^4x$ , а пространственно-временной объем  $d^4x\sqrt{-\det g}$ .

---

Перед детерминантом метрики ставится знак минус, так как в физическом пространстве-времени этот детерминант отрицателен.

---

Используя формулу, определяющую дельта-функцию,

$$F(y) = \int d^4x f(x) \delta^4(x - y) = \int \left( d^4x \sqrt{-\det g(x)} \right) f(x) \left( \frac{\delta^4(x - y)}{\sqrt{-\det g(x)}} \right),$$

видим, что как скаляр преобразуется не сама дельта-функция, а отношение  $\delta^4(x_n - x)/\sqrt{-\det g(x)}$ , входящее в ток (B.34). Ток удовлетворяет закону сохранения,

$$\partial_\mu \left( \sqrt{-\det g(x)} J^\mu(x) \right) = \int du \frac{d}{du} \sum_n e_n \delta^4(x_n(u) - x) = 0, \quad (\text{B.37})$$

при условии, что  $x$  не принимает ни одного из значений  $x_n(u)$  в конечных точках интеграла. Это эквивалентно общековариантному закону сохранения,

$$0 = J^\mu_{;\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} J^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\mu} J^\nu, \quad (\text{B.38})$$

так как

$$\Gamma^\nu_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\nu\lambda} \partial_\mu g_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} \partial_\mu \ln(-\det g).$$

Это правильное условие сохранения, потому что при отсутствии гравитации это есть ток, который в декартовых координатах удовлетворяет закону сохранения  $\partial_\mu J^\mu = 0$ , следовательно, в произвольных координатах в гравитационном поле ток должен удовлетворять общековариантному обобщению (B.38).

## 9. Тензор энергии-импульса

Аналогично, при отсутствии гравитации любой набор частиц и/или полей будет обладать симметричным тензором энергии-импульса  $T^{\alpha\beta}$ , который сохраняется в смысле

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0. \quad (\text{B.39})$$

Точно так же как  $J^\beta$  есть  $\beta$ -компоненты тока электрического заряда,  $T^{\alpha\beta}$  можно понимать как  $\beta$ -компоненту тока  $p^\alpha$ . При наличии гравитационного поля закон сохранения выглядит как

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} \equiv \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu_{\kappa\nu} T^{\kappa\nu} + \Gamma^\nu_{\kappa\nu} T^{\mu\kappa} = 0. \quad (\text{B.40})$$

Последнее слагаемое с  $\Gamma$  в этом выражении — геометрический эффект, аналогичный найденному для сохраняющихся токов, но другое слагаемое с  $\Gamma$  описывает обмен энергией и импульсом между гравитационным полем и другими полями.

Например, для идеального газа частиц, свободно движущихся в пространстве, если не считать гравитационных сил и, возможно, локализованных в пространстве соударений, тензор энергии-импульса определяется заменой  $e_n$  в формуле (B.34) на 4-вектор энергии-импульса  $p_n^\mu = E_n dx_n^\mu/dt$ , пространственные компоненты которого есть компоненты 3-импульса, а  $p_n^0 = E_n$ :

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}(x) &= \frac{1}{\sqrt{-\det g(x)}} \int du \sum_n \delta^4(x_n(u) - x) \frac{dx_n^\mu(u)}{du} p_n^\nu(u) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{-\det g(x)}} \sum_n \delta^3(x_n(t) - x) p_n^\mu(t) \frac{p_n^\nu(t)}{E_n(t)}. \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

В частности,  $T^{00}$  есть плотность энергии. Прямое вычисление с помощью уравнения движения (B.12) показывает, что это выражение удовлетворяет ковариантному закону сохранения (B.40).

## 10. Идеальная и неидеальная жидкости

Идеальная жидкость определяется как среда, для которой в каждой точке существует локально инерциальная декартова система отсчета, движущаяся вместе с жидкостью, в которой сама жидкость выглядит одинаковой по всем направлениям. В такой локально инерциальной сопутствующей системе компоненты тензора энергии-импульса должны иметь вид

$$T^{ij} = \delta_{ij} p, \quad T^{i0} = T_{0i} = 0, \quad T^{00} = \rho,$$

где  $i$  и  $j$  принимают значения 1, 2, 3 трех декартовых координатных направлений.

---

Это происходит потому, что ненулевое значение  $T^{i0}$  и любое слагаемое в  $T^{ij}$ , отличное от пропорционального  $\delta_{ij}$ , будут выделять специальные направления в пространстве, например направление  $T^{i0}$ , или один из невырожденных собственных векторов  $T^{ij}$ .

---

Коэффициенты  $p$  и  $\rho$  называются давлением и плотностью энергии соответственно. Тогда в локально инерциальной декартовой системе с произвольной скоростью тензор энергии-импульса принимает вид

$$T^{\alpha\beta} = p\eta^{\alpha\beta} + (p + \rho)u^\alpha u^\beta, \quad (\text{B.42})$$

где  $p$  и  $\rho$ , по определению, — те же самые величины, что и в сопутствующей инерциальной системе, а  $u^\alpha$  определен условиями, что эта величина преобразуется как 4-вектор по отношению к лоренцевским преобразованиям и что в локально декартовой сопутствующей инерциальной системе его компоненты равны  $u^0 = 1$  и  $u^i = 0$ . Этот 4-вектор, известный как вектор скорости, нормирован так, что в любой инерциальной системе  $\eta_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = -1$ . Отсюда следует, что в произвольном гравитационном поле тензор энергии-импульса идеальной жидкости равен

$$T^{\mu\nu} = pg^{\mu\nu} + (p + \rho)u^\mu u^\nu, \quad g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1, \quad (\text{B.43})$$

где  $p$  и  $\rho$  определены условием, что они равны коэффициентам в тензоре энергии-импульса в локально сопутствующей инерциальной системе координат, так что они являются скалярами, а  $u^\mu$  определено условиями, что эта величина преобразуется как 4-вектор при произвольных преобразованиях координат и его компоненты в локально сопутствующей декартовой инерциальной системе отсчета равны  $u^0 = 1$  и  $u^i = 0$ . Приведенная формула для  $T^{\mu\nu}$  верна, потому что она общековариантна и верна в локально инерциальных декартовых системах отсчета. Уравнения релятивистской гидродинамики в гравитационном поле выводятся путем наложения условия сохранения (B.40) на этот тензор. Кроме того, если давление зависит от плотности  $n$  какой-то

сохраняющейся величины вроде барионного числа, а также от плотности энергии  $\rho$ , то нам понадобится уравнение закона сохранения, которое в локально инерциальных декартовых системах отсчета имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(nu^\alpha) = 0. \quad (\text{B.44})$$

Следовательно, в произвольной системе координат в произвольном гравитационном поле имеем

$$(nu^\mu)_{;\mu} = 0. \quad (\text{B.45})$$

Для неидеальной жидкости возникает малая добавка  $\Delta T^{\alpha\beta}$  к формуле (B.42) для тензора энергии-импульса в локально инерциальной декартовой системе координат:

$$T^{\alpha\beta} = p\eta^{\alpha\beta} + (p + \rho)u^\alpha u^\beta + \Delta T^{\alpha\beta} \quad (\text{B.46})$$

и малая добавка  $\Delta N^\alpha$  к любому из токов, который может сохраняться:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(nu^\alpha + \Delta N^\alpha) = 0. \quad (\text{B.47})$$

Скаляр  $\rho$  определен как плотность энергии, наблюдаемая в сопутствующей системе, в которой  $u^i = 0$ , так что в этой системе  $\Delta T^{00} \equiv 0$ . Из этого следует, что во всех локально инерциальных декартовых системах  $u_\alpha u_\beta \Delta T^{\alpha\beta} = 0$ , так как эта величина есть скаляр, исчезающий в сопутствующей системе. Скаляр  $p$  может быть определен как значение сохраняющейся плотности, наблюдаемое в такой сопутствующей системе, так что по тем же соображениям во всех локально инерциальных декартовых системах выполнено равенство  $u_\alpha \Delta N^\alpha = 0$ . Давление можно определить как некоторую функцию от  $\rho$  и, возможно,  $n$ , такую же как и в статической однородной жидкости. (В гл. 5 и далее используется другое определение.) Однако определение 4-вектора скорости  $u^\alpha$  остается несколько неоднозначным. Мы могли бы определить  $u^i$  как скорость переноса частиц<sup>1)</sup>, и в этом случае в сопутствующей системе отсчета с  $u^i = 0$  мы имели бы  $\Delta N^i = 0$ , а также  $\Delta N^0 = 0$ , так что в произвольных локально инерциальных декартовых системах  $\Delta N^\alpha = 0$ . Но мы могли бы определить  $u^i$  как скорость переноса энергии<sup>2)</sup>, так что в сопутствующих системах  $T^{i0} = \Delta T^{i0} = 0$ , и поэтому  $u_\beta \Delta T^{\alpha\beta} = \Delta T^{\alpha\beta} = 0$  в такой системе, откуда следует, что  $u_\beta \Delta T^{\alpha\beta} = 0$  во всех локально инерциальных декартовых системах, однако в общем случае  $\Delta N^\alpha \neq 0$ . При таком определении скорости второе начало термодинамики вместе с условиями  $u_\beta \Delta T^{\alpha\beta} = 0$  и  $u_\alpha \Delta N^\alpha = 0$  дает<sup>3)</sup>

$$\Delta T_{\alpha\beta} = -\eta \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x^\alpha} + u_\beta u^\gamma \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\gamma} + u_\alpha u^\gamma \frac{\partial u_\beta}{\partial x^\gamma} \right) - \left( \zeta - \frac{2}{3}\eta \right) \frac{\partial u^\gamma}{\partial x^\gamma} (\eta_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta), \quad (\text{B.48})$$

$$\Delta N_\alpha = -\chi \left( \frac{nT}{\rho + p} \right)^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{\mu}{T} \right) + u_\alpha u^\beta \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left( \frac{\mu}{T} \right) \right]. \quad (\text{B.49})$$

Здесь  $\eta$ ,  $\zeta$  и  $\chi$  — положительные коэффициенты сдвиговой вязкости, объемной вязкости и теплопроводности соответственно, а  $\mu$  — химический потенциал, определенный условием, что

<sup>1)</sup> Этот вариант принят в работе C. Eckart, *Phys. Rev.*, **58**, 919 (1940), а также в ГиК, разд. 2.11 и 15.10.

<sup>2)</sup> Это определение используется в книге L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Fluid Mechanics*, trans. by J. B. Sykes and W. H. Reid (Pergamon Press, London, 1959) (оригинал: Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц. *Гидродинамика*. М.: Наука, 1986. — Прим. ред. перев.). В данной книге мы примем такое определение, так как оно накладывает максимально возможное ограничение на тензор энергии-импульса ценой меньшего числа ограничений на ток сохраняющихся величин, а в космологии мы часто имеем дело с ситуациями, в которых либо вообще нет отличных от нуля сохраняющихся величин, либо нет сохраняющихся величин, которые достаточно велики для того, чтобы серьезно повлиять на соотношение между давлением и плотностью, как в радиационно-доминированную эру при температуре выше  $10^4$  К.

<sup>3)</sup> L. D. Landau and E. M. Lifschitz. *Tam же*.

плотность энтропии равна  $(p + \rho - \mu n)/T$ . Тогда из Принципа Эквивалентности немедленно вытекает, что в произвольных системах координат в произвольных гравитационных полях, слабо меняющихся на длине свободного пробега или за время свободного пробега,

$$\Delta T_{\mu\nu} = -\eta(u_{\mu;\nu} + u_{\nu;\mu} + u_\nu u^\kappa u_{\mu;\kappa} + u_\mu u^\kappa u_{\nu;\kappa}) - \left(\zeta - \frac{2}{3}\eta\right) u^\kappa_{;\kappa} (g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu), \quad (\text{B.50})$$

$$\Delta N_\mu = -\chi \left( \frac{nT}{\rho + p} \right)^2 \left[ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\mu}{T} \right) + u_\mu u^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left( \frac{\mu}{T} \right) \right]. \quad (\text{B.51})$$

## 11. Принцип действия

Существует общий алгоритм вывода тензора энергии-импульса для систем, более сложных, чем идеальный газ или идеальная жидкость, правда, при условии, что они подчиняются принципу действия. Согласно принципу действия, дифференциальные уравнения, определяющие поведение частиц и полей, можно выразить как утверждение, что «действие материи», функционал  $I_m$  от траекторий полей и частиц, стационарно по отношению к бесконечно малым вариациям полей и частиц. Принцип Эквивалентности утверждает, что нужно включить метрику в действие материи таким образом, что при этом  $I_m$  остается инвариантным относительно общих координатных преобразований. Тогда изменение действия при бесконечно малом изменении метрики  $\delta g_{\mu\nu}$  (при неизменных остальных динамических переменных) должно иметь вид

$$\delta I_m = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{-\det g(x)} T^{\mu\nu}(x) \delta g_{\mu\nu}(x), \quad (\text{B.52})$$

где  $T^{\mu\nu}(x)$  — симметричный тензор, который мы сопоставляем с тензором энергии-импульса.

Например, действие для газа заряженных частиц с массами  $m_n$ , зарядами  $e_n$  и траекториями  $x_n^\mu(u)$ , взаимодействующих с электромагнитными полями, выбирается в виде

$$I_m = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-\det g(x)} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - \sum_n m_n \int du \left[ -g_{\mu\nu}(x_n(u)) \frac{dx_n^\mu(u)}{du} \frac{dx_n^\nu(u)}{du} \right]^{1/2} + \sum_n e_n \int du \frac{dx_n^\mu(u)}{du} A_\mu(u),$$

в котором однородные уравнения Максвелла (B.29) приобретают своего рода «усиление», если записать тензор электромагнитного поля через векторный потенциал  $A_\mu$  как  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Читатель может проверить, что условие стационарности действия материи по отношению к произвольно малым вариациям  $A_\mu(x)$  и  $x_n^\mu(u)$  (произвольным за исключением того, что они обращаются в ноль при  $x^\mu \rightarrow \infty$  и  $u \rightarrow \pm\infty$ ) эквивалентны неоднородным уравнениям Максвелла (B.28) вместе с уравнениями движения заряженных частиц в комбинации гравитационных и электромагнитных полей:

$$m_n \left[ \frac{d^2 x_n^\nu}{d\tau_n^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx_n^\nu}{d\tau_n} \frac{dx_n^\rho}{d\tau_n} \right] = e_n \frac{dx_n^\nu}{d\tau_n} F^\mu{}_\nu(x_n),$$

где  $\tau_n$  есть инвариантное собственное время вдоль траектории  $n$ -й частицы, определяемое как

$$\frac{d\tau_n}{du} \equiv \left[ -g_{\mu\nu}(x_n(u)) \frac{dx_n^\mu(u)}{du} \frac{dx_n^\nu(u)}{du} \right]^{1/2}$$

Из формулы (B.52) получается тензор энергии-импульса

$$T^{\mu\nu}(x) = [-\det g(x)]^{-1/2} \sum_n m_n \int dt \frac{dx_n^\mu}{d\tau_n} \frac{dx_n^\nu}{d\tau_n} \delta^4(x - x_n) + F^{\rho\mu}(x) F_\rho{}^\nu(x) - \frac{1}{4} g^{\mu\nu}(x) F^{\rho\sigma}(x) F_{\rho\sigma}(x),$$

совпадающий с (B.41), причем дополнительные слагаемые представляют энергию и импульс в электромагнитном поле.

При выводе были использованы соотношения

$$\delta \det g = \det g \, g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad \text{и} \quad \delta g^{\mu\rho} = -g^{\mu\nu} \delta g_{\nu\sigma} g^{\sigma\rho}.$$

Подтверждение выбора  $T^{\mu\nu}$  в форме (B.52) заключается в том, что этот тензор сохраняется в смысле (B.40). Чтобы показать это, заметим, что в общем случае наше предположение, что  $I_m$  есть скаляр, утверждает, что он остается неизменным, если одновременно сделать замены

$$d^4x \rightarrow d^4x', \quad \frac{\partial}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x'^\mu}, \quad (B.53)$$

$$x_n^\mu(u) \rightarrow x_n'^\mu(u), \quad A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu(x), \quad (B.54)$$

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x), \quad (B.55)$$

аналогично для любых других полей, входящих в действие. Однако координата  $x'^\mu$  (но не  $x_n'^\mu(u)$ ) есть просто переменная интегрирования, так что мы можем заменить  $x'^\mu$  обратно на  $x^\mu$ , не изменяя  $I_m$ . Отсюда следует, что  $I_m$  остается неизменным при заменах

$$x_n^\mu(u) \rightarrow x_n'^\mu(u), \quad (B.56)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu(x) - [A'_\mu(x') - A'_\mu(x)], \quad (B.57)$$

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x) - [g'_{\mu\nu}(x') - g_{\mu\nu}(x)], \quad (B.58)$$

где  $x^\mu$  и  $\partial/\partial x^\mu$  остаются неизменными.

Такую комбинацию преобразования координат и присваивания координатам другой метки иногда называют *калибровочным преобразованием*.

Для произвольного бесконечно малого преобразования координат имеем  $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ , где  $\epsilon^\mu(x)$  — произвольные бесконечно малые функции  $x$ . Тогда преобразования (B.56)–(B.58) примут вид

$$x_n^\mu(u) \rightarrow x_n^\mu(u) + \epsilon^\mu(x_n), \quad (B.59)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) - \frac{\partial \epsilon^\nu(x)}{\partial x^\mu} A_\nu(x) - \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^\nu} \epsilon^\nu(x), \quad (B.60)$$

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g_{\mu\nu}(x) - \frac{\partial \epsilon^\rho(x)}{\partial x^\mu} g_{\rho\nu}(x) - \frac{\partial \epsilon^\sigma(x)}{\partial x^\nu} g_{\mu\sigma}(x) - \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\rho} \epsilon^\rho(x). \quad (B.61)$$

Далее, до тех пор, пока удовлетворяются уравнения движения частиц и полевые уравнения для «материальных» полей (включая электромагнитное), действие остается неизменным при любых бесконечно малых изменениях траекторий частиц и полей материи. С другой стороны, в противоположность полному действию для материи и гравитации, действие материи нестационарно по отношению к вариациям метрики, даже когда удовлетворяются уравнения поля. Для общего бесконечно малого преобразования координат подставляя формулу (B.61) в (B.52), запишем условие того, что  $I_m$  есть скаляр как

$$0 = \delta I_m = \int d^4x \sqrt{-\det g(x)} T^{\mu\nu}(x) \left[ -\frac{\partial \epsilon^\rho(x)}{\partial x^\mu} g_{\rho\nu}(x) - \frac{\partial \epsilon^\rho(x)}{\partial x^\nu} g_{\mu\rho}(x) - \frac{\partial g_{\mu\nu}(x)}{\partial x^\rho} \epsilon^\rho(x) \right]. \quad (B.62)$$

Интегрируя по частям и полагая коэффициент при  $\epsilon^\rho(x)$  равным нулю, приходим к условию сохранения (B.40).

## 12. Теория скалярного поля

Мы будем часто встречаться с космологическими моделями, включающими скалярное поле  $\varphi(x)$ , действие<sup>4)</sup> которого имеет вид

$$I_\varphi = - \int d^4x \sqrt{-\det g} \left[ \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu} + V(\varphi) \right], \quad (\text{B.63})$$

где  $V(\varphi)$  — функция, которую называют потенциалом. Уравнения поля для  $\varphi$  в гравитационном поле задаются условием стационарности действия по отношению к вариациям поля  $\varphi$ :

$$\frac{1}{\sqrt{-\det g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[ \sqrt{-\det g} g^{\mu\nu} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu} \right] = \frac{\partial V(\varphi)}{\partial\varphi}. \quad (\text{B.64})$$

Тензор энергии-импульса для скалярного поля находится путем варьирования метрики и сравнения с формулой (B.52):

$$T_\varphi^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} \left[ \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\rho} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\sigma} + V(\varphi) \right] + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\rho} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\sigma}. \quad (\text{B.65})$$

Это выражение имеет тот же вид, что и тензор энергии-импульса (B.43) для идеальной жидкости, когда плотность энергии, давление и 4-вектор скорости определяются выражениями<sup>5)</sup>

$$\rho = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu} + V(\varphi), \quad (\text{B.66})$$

$$p = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu} - V(\varphi), \quad (\text{B.67})$$

$$u^\mu = - \left[ -g^{\rho\sigma} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\rho} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\sigma} \right]^{-1/2} g^{\mu\tau} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\tau}. \quad (\text{B.68})$$

<sup>4)</sup> В общем случае коэффициент при первом слагаемом в квадратных скобках может зависеть от  $\varphi$ , но такой зависящий от поля коэффициент всегда может быть устранен путем переопределения скалярного поля. Однако это упрощение не всегда возможно, когда речь идет о более чем одном скалярном поле — случай, который обсуждается в разд. 10.4.

<sup>5)</sup> Этот результат для давления отличается от приведенного (без объяснений) выражения в книге E. W. Kolb and M. S. Turner, *The Early Universe* (Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1990), формула (8.21), согласно которому давление скалярного поля в метрике Робертсона—Уокера равно

$$p = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - V(\varphi) - \frac{(\nabla\varphi)^2}{6a^2},$$

вместо результата для метрики Робертсона—Уокера, который дается формулой (B.67),

$$p = \frac{\dot{\varphi}^2}{2} - V(\varphi) - \frac{(\nabla\varphi)^2}{2a^2}.$$

Результат Кольба—Тернера получается, если мы определим давление как значение  $T^i{}_i/3$ , измеренное наблюдателем, движущимся в локально инерциальной системе координат с 4-скоростью  $v_\mu$ :

$$p \equiv \frac{1}{3} (g_{\mu\rho} + v_\mu v_\rho) T^{\rho\sigma} (\delta_\sigma^\mu + v_\sigma v^\mu),$$

но выберем компоненты скорости  $v^\mu$  равными  $v^0 = 1$ ,  $v^i = 0$ . При использовании этой формулы для давления кажется более естественным выбрать  $v^\mu$  как скорость  $u^\mu$  (B.68), так как это есть скорость, возникающая в тензоре энергии-импульса идеальной жидкости (B.43). Такой выбор  $v^\mu$  приводит к равенству (B.67).

Знак  $u^\mu$  не влияет на тензор энергии-импульса, так что его нельзя найти, сравнивая формулы (B.65) и (B.43). Здесь он выбран так, чтобы  $u^0$  имело бы значение  $u^0 = +1$  в случае, рассмотренном в гл. 4: пространство-время с  $g^{00} = -1$  и скалярное поле, которое не зависит от положения и растет со временем, учитывая, что квадратный корень считается положительным.

Читатель может проверить, что  $T_\varphi^{\mu\nu}$  сохраняется в смысле формулы (B.40) как следствие уравнения поля (B.64) для  $\varphi$ .

### 13. Параллельный перенос

Тело, движущееся по орбите  $x^\mu = x^\mu(t)$ , можно охарактеризовать одним или более зависящими от  $t$  векторами или тензорами. Если эти векторы или тензоры не зависят от времени  $t$  в системе отсчета, которая локально инерциальна в системе  $x^\mu(t)$ , тогда в произвольной системе отсчета эти величины подвергнутся изменению, называемому *параллельным переносом*. Например, контравариантный вектор  $v^\mu(t)$  будет меняться со скоростью

$$\frac{dv^\mu(t)}{dt} = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x(t))v^\nu(t)\frac{dx^\lambda(t)}{dt}. \quad (\text{B.69})$$

Для проверки этой формулы заметим, что по предположению она верна в момент  $t$  в системах отсчета, в которых аффинная связность  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x(t))$  обращается в ноль, и эта формула общековариантна, следовательно, если она верна в таких локально инерциальных системах, она верна и во всех системах отсчета вообще. В частности, из формулы (B.12) следует, что импульс  $p^\mu = dx^\mu/dt$  удовлетворяет уравнению параллельного переноса. Аналогично, любой переносящийся по траектории тензор, который не изменяется в локально инерциальной системе отсчета в точке на траектории, будет изменяться в произвольных системах со скоростью, равной суммы слагаемых типа правой части формулы (B.69), причем на каждый контравариантный индекс будет приходиться слагаемое с  $-\Gamma$ , а на ковариантный индекс — слагаемое с  $+\Gamma$ . Например, для ковариантного тензора  $J_{\mu\nu}$  уравнение параллельного переноса будет иметь вид

$$\frac{dJ_{\mu\nu}(t)}{dt} = +\Gamma_{\mu\lambda}^\rho(x(t))J_{\rho\nu}(t)\frac{dx^\lambda(t)}{dt} + \Gamma_{\nu\lambda}^\rho(x(t))J_{\mu\rho}(t)\frac{dx^\lambda(t)}{dt}.$$

### 14. Уравнения гравитационного поля

Осталось только написать уравнения, которым подчиняется само гравитационное поле. Эти уравнения должны удовлетворять двум требованиям: они должны быть общековариантны и для слабых медленно меняющихся гравитационных полей должны удовлетворять уравнению Пуассона для ньютоновского потенциала  $\phi$  в уравнении (B.21)

$$\nabla^2\phi = 4\pi GT^{00}, \quad (\text{B.70})$$

где  $G$  — ньютоновская постоянная. Если мы ограничимся дифференциальными уравнениями в частных производных, которые (как уравнение Пуассона) содержат ровно две пространственно-временные производные метрики, то уравнения поля записываются однозначно:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\lambda\kappa}R_{\lambda\kappa} = -8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (\text{B.71})$$

где  $T_{\mu\nu}$  — тензор энергии-импульса с опущенными индексами

$$T_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\lambda}g_{\nu\kappa}T^{\lambda\kappa}, \quad (\text{B.72})$$

а  $R_{\mu\nu}$  — так называемый *тензор Риччи*:

$$R_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial\Gamma_{\mu\lambda}^\lambda}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\Gamma_{\nu\lambda}^\lambda}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^\kappa\Gamma_{\nu\kappa}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\kappa\Gamma_{\mu\kappa}^\lambda. \quad (\text{B.73})$$

Для слабых статических полей 00-компонент этого уравнения такой же, как и в уравнении Пуассона (B.70), если считать, что  $g_{00}$  связано с  $\phi$  соотношением (B.21). Тензор, возникающий в левой стороне уравнения (B.71), удовлетворяет совокупности дифференциальных тождеств Бьянки:

$$\left[ g^{\lambda\nu} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\kappa} R_{\rho\kappa} \right) \right]_{;\lambda} = 0. \quad (\text{B.74})$$

Именно поэтому  $R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} g^{\lambda\kappa} R_{\lambda\kappa}/2$  — линейная комбинация тензоров  $R_{\mu\nu}$  и  $g_{\mu\nu} g^{\lambda\kappa} R_{\lambda\kappa}$ ; в противном случае уравнения поля будут несовместными с законом сохранения энергии-импульса (B.40). Уравнения поля можно вывести более простым образом, если включить в действие гравитационное слагаемое

$$I_g = -\frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-\det g(x)} g^{\lambda\kappa}(x) R_{\lambda\kappa}(x). \quad (\text{B.75})$$

Тождества Бьянки (B.74) можно вывести из того факта, что  $I_g$  автоматически инвариантно относительно произвольных координатных преобразований метрики, а уравнения поля (B.71) можно вывести из условия, что полное действие  $I_g + I_m$  стационарно относительно произвольных вариаций метрики.

Если мы допустим появление в уравнении гравитационного поля слагаемых с числом пространственно-временных производных меньше двух, то можно включить в левую часть уравнения поля (B.71) слагаемое, пропорциональное  $g_{\mu\nu}$ . Это слагаемое с так называемой *космологической постоянной*, которое обсуждается в разд. 1.5. Его можно рассматривать как поправку к  $T_{\mu\nu}$  за счет «вакуумной энергии». Если не считать космологической постоянной, единственная другая возможная модификация левой части уравнения (B.71) будет содержать слагаемые с числом пространственно-временных производных *больше* двух.

---

Например, их можно вывести, включив в подынтегральное выражение в действии слагаемые, пропорциональные  $\sqrt{-\det g} R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$  или  $\sqrt{-\det g} (R^\mu_\mu)^2$ .

---

Из размерного анализа следует, что такие слагаемые будут иметь коэффициенты, размерность которых (по отношению к размерности множителя  $1/(16\pi G)$  в уравнении (B.75)) равна положительной степени длины. Экспериментальный успех общей теории относительности показывает, что эта длина много меньше масштабов Солнечной системы, так что на космологических масштабах влияние подобных слагаемых пренебрежимо мало.

## Приложение С

### ОБМЕН ЭНЕРГИЕЙ МЕЖДУ ИЗЛУЧЕНИЕМ И ЭЛЕКТРОНАМИ

Часто требуется знать скорость, с которой фотон будет терять или приобретать энергию при прохождении через ионизированный газ. Например, эта информация нужна при вычислении эффекта Сьюяева—Зельдовича, который обсуждается в разд. 2.5, и для понимания сохранения теплового равновесия между веществом и излучением, рассматриваемого в разд. 2.2. В этом Приложении, во-первых, выводятся формулы для среднего и среднеквадратичного изменения энергии фотона при соударении с одним электроном, и, во-вторых, эти результаты используются для вывода скорости изменения функции распределения энергии фотона при прохождении через ионизированный газ. В этом Приложении будем использовать систему единиц  $\hbar = c = 1$ .

Предположим, что электрон, движущийся в некотором направлении в трехмерном пространстве, обладая 4-вектором импульса

$$p = (0, 0, p_e, E_e), \quad E_e \equiv \sqrt{p_e^2 + m_e^2}, \quad (C.1)$$

сталкивается с фотоном с энергией  $\omega$ , движущимся по направлению, задаваемому полярным и азимутальным углами  $\eta$  и  $\phi$ , и передает фотону новую энергию  $\omega'$  и новое направление движения с полярным и азимутальным углами  $\eta'$  и  $\phi'$ . Это означает, что начальный 4-импульс  $q$  и конечный 4-импульс  $q'$  фотона имеют вид

$$q = (\sin \eta \cos \phi, \sin \eta \sin \phi, \cos \eta, 1) \omega, \quad (C.2)$$

$$q' = (\sin \eta' \cos \phi', \sin \eta' \sin \phi', \cos \eta', 1) \omega'. \quad (C.3)$$

Чтобы вычислить сечение такого рассеяния, совершим лоренцевское преобразование в систему отсчета, в которой электрон первоначально покоятся. В этом случае сечение рассеяния принимает простую и хорошо известную форму. В системе покоя электрона начальный и конечный 4-импульсы фотона равны  $Lq$  и  $Lq'$ , где  $L^\mu_\nu$  — лоренцевское преобразование:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\beta\gamma \\ 0 & 0 & -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}, \quad (C.4)$$

где  $\beta \equiv p_e/E_e$  — скорость электрона, а  $\gamma \equiv (1 - \beta^2)^{1/2}$ . Отсюда 4-импульсы начального и конечного фотонов в системе покоя электрона запишутся в виде

$$Lq = (\sin \alpha \cos \phi, \sin \alpha \sin \phi, \cos \alpha, 1) k, \quad (C.5)$$

$$Lq' = (\sin \alpha' \cos \phi', \sin \alpha' \sin \phi', \cos \alpha', 1) k', \quad (C.6)$$

где начальная и конечная энергии фотонов в системе покоя электрона равны

$$k = (-\beta\gamma \cos \eta + \gamma)\omega, \quad k' = (-\beta\gamma \cos \eta' + \gamma)\omega', \quad (C.7)$$

а начальные и конечные полярные углы, которые скорость фотона образует в этой системе отсчета, задаются формулами

$$\cos \alpha = \frac{\cos \eta - \beta}{1 - \beta \cos \eta}, \quad \cos \alpha' = \frac{\cos \eta' - \beta}{1 - \beta \cos \eta'}. \quad (C.8)$$

При этом азимутальные углы не меняются. Напомним далее, что сохранение энергии и импульса в системе покоя электрона определяет конечную энергию фотона в этой системе в виде<sup>1)</sup>

$$k' = \frac{k}{1 + (k/m_e)(1 - \cos \theta)}, \quad (C.9)$$

где  $\theta$  — угол рассеяния в системе покоя электрона,

$$\cos \theta \equiv \widehat{Lq} \cdot \widehat{Lq}' = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos(\phi - \phi') \sin \alpha \sin \alpha'. \quad (C.10)$$

Относительное изменение энергии фотона в исходной системе отсчета можно тогда выразить через величины в системе покоя электрона:

$$\frac{\omega' - \omega}{\omega} = \frac{1}{1 + \beta \cos \alpha} \left( \frac{1 + \beta \cos \alpha'}{1 + (k/m_e)(1 - \cos \theta)} - \beta \cos \alpha - 1 \right). \quad (C.11)$$

<sup>1)</sup> КТП, том 1, формула (8.7.14).

В большинстве интересных случаев  $k/m_e$  и  $\beta$  много меньше единицы, так что можно удерживать только слагаемые первого порядка по  $k/m_e$  и нулевого порядка по  $\beta$  вместе со слагаемыми произвольного порядка по  $\beta$  и нулевого порядка по  $k/m_e$ :

$$\frac{\omega' - \omega}{\omega} \simeq - \left( \frac{k}{m_e} \right) (1 - \cos \theta) + \frac{\beta(\cos \alpha' - \cos \alpha)}{1 + \beta \cos \alpha}. \quad (\text{C.12})$$

Для покоящегося электрона и энергии фотона  $k \ll m_e$  дифференциальное сечение (просуммированное по конечным спинам и поляризациям и усредненное по начальным спинам и поляризациям) равно<sup>2)</sup>

$$d\sigma = \frac{3\sigma_T}{16\pi} (1 + \cos^2 \theta) d(\cos \alpha') d\phi', \quad (\text{C.13})$$

где  $\sigma_T$  — томсоновское сечение  $e^4/(6\pi m_e^2)$ . Дифференциальное сечение само лоренц-инвариантно, хотя переменные, от которых оно зависит, этим свойством не обладают, так что среднее относительное изменение энергии фотона за одно соударение равно

$$\langle \omega' - \omega \rangle = \frac{1}{\sigma_T} \int (\omega' - \omega) d\sigma = \frac{3}{16\pi} \int_{-1}^1 d(\cos \alpha') \int_0^{2\pi} d\phi' (\omega' - \omega) (1 + \cos^2 \theta) = - \frac{\beta \omega \cos \alpha}{1 + \beta \cos \alpha} - \frac{k\omega}{m_e}. \quad (\text{C.14})$$

Теперь нам следует усреднить это выражение по направлению движения электрона, или, эквивалентно, по  $\alpha$ . При вычислении этого среднего следует помнить, что гладкой функцией распределения в интервале от  $-1$  до  $+1$  обладает  $\cos \eta$ , а не  $\cos \alpha$ . Таким образом, вероятность перехода пропорциональна не только  $d\sigma$ , но и относительной скорости<sup>3)</sup>

$$u = \frac{|p \cdot q|}{E_e \omega} = 1 - \beta \cos \eta = \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta \cos \alpha}. \quad (\text{C.15})$$

Следовательно, изменение энергии, усредненное по относительным направлениям движения начального электрона и фотона, равно

$$\langle \langle \omega' - \omega \rangle \rangle = \frac{\int_{-1}^{+1} (\omega' - \omega) u d(\cos \eta)}{\int_{-1}^{+1} u d(\cos \eta)} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{(1 - \beta^2)^2}{(1 + \beta \cos \alpha)^3} \left[ - \frac{\beta \omega \cos \alpha}{1 + \beta \cos \alpha} - \frac{k\omega}{m_e} \right] d(\cos \alpha). \quad (\text{C.16})$$

Слагаемые первого порядка по  $\beta$  не дают вклада в интеграл по  $\alpha$ , так что ведущие слагаемые в относительной передаче энергии — второго порядка по  $\beta$  или первого порядка по  $\omega/m_e$ :

$$\frac{\langle \langle \omega' - \omega \rangle \rangle}{\omega} \simeq \frac{4}{3} \beta^2 - \frac{k}{m_e} \simeq \frac{4}{3} \beta^2 - \frac{\omega}{m_e}. \quad (\text{C.17})$$

Так как изменение средней относительной энергии фотона содержит слагаемые порядка  $\beta^2$  и  $\omega/m_e$ , нас будут интересовать любые слагаемые в среднеквадратичном изменении относительной энергии того же порядка. Анализ формулы (C.12) показывает, что в этом порядке

$$\frac{(\omega' - \omega)^2}{\omega^2} \simeq \beta^2 (\cos \alpha' - \cos \alpha)^2. \quad (\text{C.18})$$

В этом же порядке мы можем пренебречь разницей между  $u$  и единицей и между  $d(\cos \eta)$  и  $d(\cos \alpha)$ , так что

$$\langle \langle (\omega' - \omega)^2 \rangle \rangle \simeq \frac{3\beta^2 \omega^2}{32\pi} \int_{-1}^{+1} d(\cos \alpha) \int_{-1}^{+1} d(\cos \alpha') \int_0^{2\pi} d\phi' (\cos \alpha' - \cos \alpha)^2 (1 + \cos^2 \theta) = \frac{2}{3} \beta^2 \omega^2. \quad (\text{C.19})$$

<sup>2)</sup> КТП, том 1, формула (8.7.42).

<sup>3)</sup> КТП, том 1, формула (3.4.17).

Все это верно для электрона с фиксированной скоростью  $\beta$ . Если число электронов со скоростью между  $\beta$  и  $\beta + d\beta$  дается распределением Максвелла—Больцмана с температурой электронов  $T_e$  и, следовательно, пропорционально

$$\beta^2 \exp\left(\frac{-m_e\beta^2}{2k_B T_e}\right) d\beta,$$

то среднее значение  $\beta^2$  равно  $3k_B T_e/m_e$ , так что формулы (С.17) и (С.19) примут вид

$$\langle(\omega' - \omega)\rangle \simeq \frac{4k_B T_e}{m_e} \omega - \frac{\omega^2}{m_e} \quad (\text{C.20})$$

и

$$\langle(\omega' - \omega)^2\rangle = \frac{2k_B T_e}{m_e} \omega^2. \quad (\text{C.21})$$

Предположим теперь, что фотоны с числом  $N(\omega) d\omega$  в интервале энергий между  $\omega$  и  $\omega + d\omega$  взаимодействуют с газом нерелятивистских электронов. Для энергий фотонов  $\omega \ll m_e$  скорость изменения функции распределения равна

$$\dot{n}(\omega) d\omega = n_e \int d\omega' n(\omega') R(\omega' \rightarrow \omega) d\omega (1 + N(\omega)) - n_e n(\omega) d\omega \int d\omega' R(\omega \rightarrow \omega') (1 + N(\omega')). \quad (\text{C.22})$$

Здесь  $n_e$  — плотность числа электронов;  $R(\omega \rightarrow \omega') d\omega'$  — среднее от  $u d\sigma$  по начальным скоростям электронов для соударений, в которых фотон с начальной энергией  $\omega$  получает энергию между  $\omega'$  и  $\omega' + d\omega'$ ;

$$N(\omega) = \frac{(2\pi\hbar)^3 n(\omega) d\omega}{8\pi\omega^2}$$

— число фотонов в квантовом состоянии с энергией  $\omega$  (энаменатель равен  $8\pi\omega^2 d\omega$ , а не  $4\pi\omega^2 d\omega$ , так как учитываются два состояния поляризации фотонов); множители  $1 + N(\omega)$  и  $1 + N(\omega')$  включены для того, чтобы учесть стимулированное излучение фотонов в уже занятые состояния. Первое слагаемое в формуле (С.22) определяет увеличение  $n(\omega)$  за счет рассеяния фотонов с любой начальной энергией  $\omega'$  в энергию  $\omega$ , в то время как второе слагаемое определяет уменьшение  $n(\omega)$  за счет рассеяния фотонов с энергией  $\omega$  в любую конечную энергию  $\omega'$ . Мы видели, что соударения фотонов с энергией  $\omega \ll m_e$  с нерелятивистским газом электронов при температуре  $T$  в типичном случае меняет энергию фотонов на малую величину порядка  $\omega/m_e$ , или  $k_B T/m_e$ , так что константы скорости  $R(\omega' \rightarrow \omega)$  и  $R(\omega \rightarrow \omega')$  имеют резкий пик в окрестности  $\omega' \simeq \omega$ . Поэтому удобно изменить переменную интегрирования с  $\omega'$  на  $\Delta \equiv \omega - \omega'$  в первом слагаемом и на  $\Delta \equiv \omega' - \omega$  во втором слагаемом формулы (С.22). После сокращения неинтегрируемого дифференциала  $d\omega$  и умножения на  $(2\pi\hbar)^3/(8\pi\omega^2)$  эта формула принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{N}(\omega) = & \frac{n_e}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta (\omega - \Delta)^2 N(\omega - \Delta) R(\omega - \Delta \rightarrow \omega) (1 + N(\omega)) - \\ & - n_e N(\omega) \int d\Delta R(\omega \rightarrow \omega + \Delta) (1 + N(\omega + \Delta)). \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Так как константы скорости  $R(\omega - \Delta \rightarrow \omega)$  и  $R(\omega \rightarrow \omega + \Delta)$  имеют острый пик в окрестности  $\Delta = 0$ , можно разложить остальные множители в (С.23) (и разность между  $R(\omega - \Delta \rightarrow \omega)$  и  $R(\omega \rightarrow \omega + \Delta)$ ) до второго порядка по  $\Delta$ :

$$\begin{aligned} \dot{N}(\omega) = & -\frac{n_e}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \Delta (1 + N(\omega)) \frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^2 N(\omega) R(\omega \rightarrow \omega + \Delta)] + \\ & + \frac{n_e}{2\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \Delta^2 (1 + N(\omega)) \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} [\omega^2 N(\omega) R(\omega \rightarrow \omega + \Delta)] - \end{aligned}$$

$$-n_e N(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \Delta \frac{\partial N(\omega)}{\partial \omega} R(\omega \rightarrow \omega + \Delta) - \frac{n_e}{2} N(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \Delta^2 \frac{\partial^2 N(\omega)}{\partial \omega^2} R(\omega \rightarrow \omega + \Delta).$$

Это можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \dot{N}(\omega) = & -\frac{n_e}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \Delta \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ \omega^2 N(\omega) R(\omega \rightarrow \omega + \Delta) (1 + N(\omega)) \right] + \\ & + \frac{n_e}{2\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \Delta^2 \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \left[ \omega^2 N(\omega) R(\omega \rightarrow \omega + \Delta) (1 + N(\omega)) \right] - \\ & - \frac{n_e}{\omega^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \Delta^2 \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ \omega^2 N(\omega) R(\omega \rightarrow \omega + \Delta) \frac{\partial N(\omega)}{\partial \omega} \right]. \end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования и дифференцирования, получаем

$$\begin{aligned} \dot{N}(\omega) = & -\frac{n_e \sigma T}{\omega^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \omega^2 N(\omega) (1 + N(\omega)) \langle \langle \omega' - \omega \rangle \rangle \right) - \right. \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \omega^2} \left( \omega^2 N(\omega) (1 + N(\omega)) \langle \langle (\omega' - \omega)^2 \rangle \rangle \right) + \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \omega} \left( \omega^2 N(\omega) \langle \langle (\omega' - \omega)^2 \rangle \rangle \frac{\partial N(\omega)}{\partial \omega} \right) \right], \end{aligned} \quad (C.24)$$

где мы использовали формулы

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \Delta R(\omega \rightarrow \omega + \Delta) &= \sigma_T \langle \langle \omega' - \omega \rangle \rangle, \\ \int_{-\infty}^{\infty} d\Delta \Delta^2 R(\omega \rightarrow \omega + \Delta) &= \sigma_T \langle \langle (\omega' - \omega)^2 \rangle \rangle. \end{aligned} \quad (C.25)$$

Подстановка величин (C.20) и (C.21) для  $\langle \langle \omega' - \omega \rangle \rangle$  и  $\langle \langle (\omega' - \omega)^2 \rangle \rangle$  приводит к уравнению Компанейца<sup>4)</sup>:

$$\dot{N}(\omega) = \frac{n_e \sigma T k_B T_e}{m_e \omega^2} \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ \omega^4 \frac{\partial N(\omega)}{\partial \omega} \right] + \frac{n_e \sigma T}{m_e \omega^2} \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ \omega^4 N(\omega) (1 + N(\omega)) \right]. \quad (C.26)$$

Для проверки заметим, что если функция распределения фотонов задается формулой Планка с фотонной температурой, равной температуре электронов, так что

$$N(\omega) = \left[ \exp \left( \frac{\omega}{k_B T_e} \right) - 1 \right]^{-1}$$

тогда два слагаемых в формуле (C.26) взаимно сокращаются, не приводя ни к каким изменениям в  $N(\omega)$ , как это, конечно, и должно быть в случае фотонов, находящихся в равновесии с электронами. В качестве следующей проверки заметим, что (до тех пор пока  $\omega^4 N(\omega)$  и  $\omega^4 \partial N / \partial \omega$  обращаются в ноль при  $\omega = 0$  и  $\omega \rightarrow \infty$ ) полная плотность числа фотонов  $\int_0^{\infty} 4\pi \omega^2 N(\omega) d\omega$  не меняется со временем, что можно увидеть также путем интегрирования (C.22) по  $\omega$  с взаимной заменой  $\omega$  и  $\omega'$  во втором слагаемом.

<sup>4)</sup> А. Компанеец, ЖЭТФ, 312+, 876 (1956).

## Приложение D

### ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА

В космологии часто приходится иметь дело с зависящими от положения переменными типа температуры, плотности или скалярных полей, флуктуации которых подчиняются определенного рода вероятностным распределением. В этом Приложении мы рассмотрим произвольную действительную случайную переменную  $\varphi(x)$ , зависящую от  $D$ -мерной евклидовой координаты  $x$ . Обобщение на несколько случайных переменных будет очевидным.

Будем предполагать, что функция распределения, задающая вероятности различных функциональных форм  $\varphi(x)$ , однородна в том смысле, что среднее от любого произведения нескольких  $\varphi$  с различными аргументами зависит только от разностей аргументов. Иначе говоря, для произвольного  $z$

$$\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2) \dots \varphi(x_n) \rangle = \langle \varphi(x_1+z)\varphi(x_2+z) \dots \varphi(x_n+z) \rangle. \quad (\text{D.1})$$

В случаях, когда  $x$  — временная координата, подобные распределения называют *стационарными*.

Предположим далее, что все  $\varphi$  нескоррелированы при больших значениях аргументов. Чтобы формально выразить это, предположим, что при  $|u| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \langle \varphi(x_1+u)\varphi(x_2+u) \dots \varphi(y_1-u)\varphi(y_2-u) \dots \rangle \rightarrow \\ & \rightarrow \langle \varphi(x_1+u)\varphi(x_2+u) \dots \rangle \langle \varphi(y_1-u)\varphi(y_2-u) \dots \rangle = \\ & = \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2) \dots \rangle \langle \varphi(y_1)\varphi(y_2) \dots \rangle, \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

причем заключительное выражение подтверждается формулой (D.1).

При указанных условиях можно доказать важный результат, известный под названием *эргодической теоремы*: если предел в выражении (D.2) достигается достаточно быстро, тогда среднеквадратичная разность между любым произведением  $\varphi(x_1+z)\varphi(x_2+z) \dots$ , усредненным по области  $R$  значений  $z$  в окрестности произвольной точки  $z_0$ , и средним по ансамблю этого же произведения обращается в ноль при больших  $R$  как  $R^{-D/2}$ . Это означает, что если мы определим

$$\Delta_R^2(x_1, x_2, \dots) \equiv \left\langle \left( \int d^D z N_R(z) \varphi(x_1+z)\varphi(x_2+z) \dots - \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2) \dots \rangle \right)^2 \right\rangle, \quad (\text{D.3})$$

где<sup>1)</sup>

$$N_R(z) \equiv (\sqrt{\pi} R)^{-D} \exp \left( -\frac{|z-z_0|^2}{R^2} \right), \quad (\text{D.4})$$

тогда при  $R \rightarrow \infty$

$$\Delta_R \rightarrow O(R^{-D/2}). \quad (\text{D.5})$$

Чтобы доказать эту теорему, используем сначала условие

$$\int N_R(z) d^D z = 1,$$

чтобы переписать (D.3) как

$$\Delta_R^2(x_1, x_2, \dots) = \left\langle \left( \int d^D z N_R(z) [\varphi(x_1+z)\varphi(x_2+z) \dots - \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2) \dots \rangle] \right)^2 \right\rangle.$$

<sup>1)</sup> Конкретная форма (D.4) функции  $N_R$  несущественна. Важно лишь, чтобы функция была константой при  $|z-z_0|^2 \ll R^2$ , быстро обращалась бы в ноль при  $|z-z_0|^2 \gg R^2$  и была нормированной так, чтобы  $\int N_R(z) d^D z = 1$ .

Разлагая квадрат и вновь используя (D.1) и условие нормировки для  $N_R$ , а также вводя новые переменные интегрирования  $u \equiv (z - \omega)/2$  и  $v \equiv (z + \omega)/2$ , получим

$$\begin{aligned} \Delta_R^2 &= \int d^D z N_R(z) \int d^D w N_R(w) \times \\ &\quad \times \left[ \langle \varphi(x_1 + z)\varphi(x_2 + z) \dots \varphi(x_1 + w)\varphi(x_2 + w) \dots \rangle - \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2) \dots \rangle^2 \right] = \\ &= \left( \frac{2}{\pi R^2} \right)^D \int d^D v \exp \left( \frac{-2|v - z_0|^2}{R^2} \right) \int d^D u \exp \left( \frac{-2|u|^2}{R^2} \right) \times \\ &\quad \times \left[ \langle \varphi(x_1 + u)\varphi(x_2 + u) \dots \varphi(x_1 - u)\varphi(x_2 - u) \dots \rangle - \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2) \dots \rangle^2 \right] = \\ &= \left( \frac{2}{\pi R^2} \right)^{D/2} \int d^D u \exp \left( \frac{-2|u|^2}{R^2} \right) \times \\ &\quad \times \left[ \langle \varphi(x_1 + u)\varphi(x_2 + u) \dots \varphi(x_1 - u)\varphi(x_2 - u) \dots \rangle - \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2) \dots \rangle^2 \right]. \end{aligned}$$

Предполагая, что предел в функции (D.2) достигается достаточно быстро, получаем, что интеграл по  $u$  будет сходиться даже без множителя  $\exp(-2|u|^2/R^2)$ , так что при  $R \rightarrow \infty$  можно принять этот множитель за единицу и получить окончательное выражение

$$\Delta_R^2 \rightarrow \left( \frac{2}{\pi R^2} \right)^{D/2} \int d^D u \left[ \langle \varphi(x_1 + u)\varphi(x_2 + u) \dots \varphi(x_1 - u)\varphi(x_2 - u) \dots \rangle - \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2) \dots \rangle^2 \right], \quad (\text{D.6})$$

подтверждая тем самым формулу (D.5).

## Приложение Е ГАУССОВСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим случайную переменную  $\varphi(x)$ , зависящую от  $D$ -мерной координаты  $x$ . Определим ее так, чтобы среднее значение этой величины было бы равно нулю, вычтя для этого из  $\varphi$  любое ненулевое среднее, которое она могла бы иметь. Говорят, что функция распределения, управляющая  $\varphi$ , является *гауссовой*, если среднее от произведения четного числа переменных  $\varphi$  есть сумма по всем способам спаривания  $\varphi$  друг с другом с образованием произведения средних значений пар:

$$\langle \varphi(x_1)\varphi(x_2) \dots \rangle = \sum_{\text{по спариваниям}} \left( \prod_{\text{пары}} \langle \varphi\varphi \rangle \right), \quad (\text{E.1})$$

(где сумма по спариваниям не различает те из них, которые отличаются перестановкой координат в паре, или просто переставляют пары), в то время как произведение любого нечетного числа  $\varphi$  обращается в ноль. Например,

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4) \rangle &= \langle \varphi(x_1)\varphi(x_2) \rangle \langle \varphi(x_3)\varphi(x_4) \rangle + \\ &+ \langle \varphi(x_1)\varphi(x_3) \rangle \langle \varphi(x_2)\varphi(x_4) \rangle + \langle \varphi(x_1)\varphi(x_4) \rangle \langle \varphi(x_2)\varphi(x_3) \rangle. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

---

Конечно, не существует способа спаривания всего нечетного числа  $\varphi$ ; именно поэтому для гауссовых распределений среднее от любого нечетного числа переменных  $\varphi$  обязано обращаться в ноль.

---

В более общем случае в среднем от произведения  $2n$  множителей  $\varphi$  каждая из  $(2n)!$  перестановок координат определяет спаривание (в котором первая переставленная функция  $\varphi$  спаривается со второй, третья — с четвертой, и т. д.), но  $2^n n!$  из них отличаются только перестановками двух координат внутри пары или перестановками  $n$  пар, так что в общем случае это среднее содержит  $(2n)!/(2^n n!)$  слагаемых.

Если  $\varphi(x)$  определяется гауссовым распределением, это же верно для любого линейного функционала от  $\varphi(x)$ . Например, рассмотрим множество линейных функционалов вида

$$F_i[\varphi] \equiv \int d^D x f_i(x)\varphi(x). \quad (\text{E.3})$$

Умножая выражение (E.2) на  $f_1(x_1)f_2(x_2)f_3(x_3)f_4(x_4)$  и интегрируя, находим

$$\langle F_1 F_2 F_3 F_4 \rangle = \langle F_1 F_2 \rangle \langle F_3 F_4 \rangle + \langle F_1 F_3 \rangle \langle F_2 F_4 \rangle + \langle F_1 F_4 \rangle \langle F_2 F_3 \rangle. \quad (\text{E.4})$$

Такие распределения называются гауссовыми из-за той формы, которую принимает распределение вероятностей произвольных линейных функционалов

$$F[\varphi] = \int d^D x f(x)\varphi(x)$$

от  $\varphi$ . Каждое из  $(2n)!/(2^n n!)$  слагаемых в  $\langle F^{2n}[\varphi] \rangle$  дает одинаковый вклад,  $\langle F^2[\varphi] \rangle^n$ , так что

$$\langle F^{2n}[\varphi] \rangle = \frac{\langle F^2[\varphi] \rangle^n (2n)!}{2^n n!}. \quad (\text{E.5})$$

Отсюда вытекает, что вероятность  $P(F) dF$  того, что функционал имеет значение, лежащее между  $F$  и  $F + dF$ , есть гауссова функция

$$P(F) dF = \frac{1}{\sqrt{2\pi\langle F^2 \rangle}} \exp\left(-\frac{F^2}{2\langle F^2 \rangle}\right) dF. \quad (\text{E.6})$$

Распределения подобного сорта часто возникают тогда, когда  $\varphi(x)$  есть сумма большого числа независимых флуктуирующих слагаемых. Центральная предельная теорема утверждает, что в этом случае распределение суммы гауссово. В распределении, которое более всего нас здесь интересует, считается, что флуктуации температуры космического микроволнового фона практически гауссовые, так как они возникают (как рассматривается в гл. 10) из квантовых флуктуаций одного или нескольких почти свободных квантовых полей.

## Приложение F НЬЮТОНОВСКАЯ КОСМОЛОГИЯ

В ту эру, когда плотность энергии Вселенной определялась холодной темной материеей, поведение возмущений можно адекватно рассмотреть методами ньютоновской механики. Такой подход имеет приложения как к нашему предварительному изучению анизотропий космического микроволнового фона в разд. 2.6, так и к исследованию крупномасштабной структуры вещества в разд. 8.1.

Уравнениями нерелятивистской гидродинамики и ньютоновской теории тяготения для жидкости с плотностью массы  $\rho$ , скоростью  $\mathbf{v}$ , нулевым давлением и гравитационным потенциалом  $\phi$  являются уравнение непрерывности,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v}\rho) = 0, \quad (\text{F.1})$$

уравнение Эйлера,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla \phi, \quad (\text{F.2})$$

и уравнение Пуассона,

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho. \quad (\text{F.3})$$

Эти уравнения имеют невозмущенное решение (помечено чертой над величинами) вида

$$\bar{\rho} = \rho_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^3, \quad \bar{\mathbf{v}} = H \mathbf{X}, \quad \bar{\phi} = \frac{2\pi}{3} G \bar{\rho} \mathbf{X}^2, \quad (\text{F.4})$$

где  $H \equiv \dot{a}/a$ ;  $a_0$  и  $\rho_0$  — константы, и  $a(t)$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{a}^2 + K = \frac{8\pi}{3} G \bar{\rho} a^2 \quad (\text{F.5})$$

с постоянной  $K$ .

---

Мы используем  $\mathbf{X}$  для обозначения обычного вектора евклидовых координат, чтобы отличить его от сопутствующего вектора координат  $\mathbf{x}$ .

---

Конечно, это соответствует космологической теории с метрикой Робертсона—Уолкера, и мы уже сталкивались с этим решением в разд. 1.5 при рассмотрении альтернативного подхода к выводу уравнения Фридмана (F.5). В частности, решение уравнения

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \bar{\mathbf{v}} = H \mathbf{X}$$

для движения сопутствующего тела имеет вид

$$\mathbf{X}(t) = \left[ \frac{a(t)}{a(t_0)} \right] \mathbf{X}(t_0)$$

в согласии с уравнением ((1.5.22)). Следовательно, сопутствующая координата есть  $\mathbf{x} = \mathbf{X}/a$ .

К этому невозмущенному решению для  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$  и  $\phi$  мы добавляем теперь малые возмущения  $\delta\rho$ ,  $\delta\mathbf{v}$  и  $\delta\phi$ . Слагаемые первого порядка по этим возмущениям в уравнениях (F.1)–(F.3) равны

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + 3H\delta\rho + H\mathbf{X} \cdot \nabla \delta\rho + \bar{\rho} \nabla \cdot \delta\mathbf{v} = 0, \quad (\text{F.6})$$

$$\frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} + H\mathbf{X} \cdot \nabla \delta\mathbf{v} + H\delta\mathbf{v} = -\nabla \delta\phi, \quad (\text{F.7})$$

$$\nabla^2 \delta\phi = 4\pi G \delta\rho. \quad (\text{F.8})$$

Уравнения (F.6)–(F.8) не выглядят трансляционно-инвариантными, но пространственная однородность, лежащая в основе этой задачи, может быть восстановлена, если записать уравнения через сопутствующие координаты  $\mathbf{X}/a$ . Это достигается наиболее удобным способом, если мы запишем возмущения как фурье-преобразования в сопутствующих координатах:

$$\delta\rho(\mathbf{X}, t) = \int d^3q \exp\left(\frac{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{X}}{a(t)}\right) \delta\rho_{\mathbf{q}}(t), \quad (\text{F.9})$$

аналогично для  $\delta\mathbf{v}$  и  $\delta\phi$ . Тогда дифференциальные уравнения в частных производных (F.6)–(F.8) становятся обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$\frac{d\delta\rho_{\mathbf{q}}}{dt} + 3H\delta\rho_{\mathbf{q}} + ia^{-1}\bar{\rho}_{\mathbf{q}} \cdot \delta\mathbf{v}_{\mathbf{q}} = 0, \quad (\text{F.10})$$

$$\frac{d\delta\mathbf{v}_{\mathbf{q}}}{dt} + H\delta\mathbf{v}_{\mathbf{q}} = -ia^{-1}\mathbf{q}\delta\phi_{\mathbf{q}}, \quad (\text{F.11})$$

$$\mathbf{q}^2 \delta\phi_{\mathbf{q}} = -4\pi G a^2 \delta\rho_{\mathbf{q}}. \quad (\text{F.12})$$

Решения уравнений (F.10)–(F.12) можно классифицировать по свойствам преобразования зависимых переменных по отношению к трехмерным вращениям.

**Векторные моды.** В этих модах все скаляры обращаются в ноль — не только  $\delta\rho_{\mathbf{q}}$  и  $\delta\phi_{\mathbf{q}}$ , но и  $\mathbf{q} \cdot \delta\mathbf{v}_{\mathbf{q}}$ . Тогда уравнения (F.10) и (F.12) автоматически удовлетворяются, в то время как уравнение (F.11) принимает вид

$$\frac{d\delta\mathbf{v}_{\mathbf{q}}}{dt} + H\delta\mathbf{v}_{\mathbf{q}} = 0, \quad (\text{F.13})$$

и его решение есть просто  $\delta\mathbf{v}_{\mathbf{q}} \propto 1/a$ . Так как векторные моды просто распадаются, ими часто пренебрегают.

**Скалярные моды.** В этих модах возмущение скорости  $\delta\mathbf{v}(X, t)$  может быть выражено как градиент (по отношению к  $X = X/a$ ) возмущения скалярного потенциала  $\delta u(X, t)$ . На языке фурье-преобразований это означает, что

$$\delta\mathbf{v}_{\mathbf{q}} = i\mathbf{q} \delta u_{\mathbf{q}}. \quad (\text{F.14})$$

Тогда, используя уравнение (F.12), чтобы исключить  $\delta\phi_{\mathbf{q}}$ , получим вместо (F.11)

$$\frac{d\delta u_{\mathbf{q}}}{dt} + H\delta u_{\mathbf{q}} = -a^{-1} \delta\phi_{\mathbf{q}} = \frac{4\pi G a}{\mathbf{q}^2} \delta\rho_{\mathbf{q}}, \quad (\text{F.15})$$

в то время как из (F.10) получим

$$\frac{\partial \delta\rho_{\mathbf{q}}}{\partial t} + 3H\delta\rho_{\mathbf{q}} - a^{-1} \bar{\rho} \mathbf{q}^2 \delta u_{\mathbf{q}} = 0. \quad (\text{F.16})$$

При  $K = 0$  имеем  $4\pi G \bar{\rho} = 3H^2/2$ . Используя  $\bar{\rho} \propto a^{-3}$  и определение  $H$ , мы можем исключить  $\delta u_{\mathbf{q}}$  из этих связанных уравнений и записать их как дифференциальное уравнение второго порядка для возмущения дробной плотности

$$\frac{d}{dt} \left( a^2 \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta\rho_{\mathbf{q}}}{\bar{\rho}} \right) \right) - \frac{3}{2} H^2 a^2 \left( \frac{\delta\rho_{\mathbf{q}}}{\bar{\rho}} \right) = 0, \quad (\text{F.17})$$

или, вспоминая, что при  $K = 0$   $a \propto t^{2/3}$  и  $H = 2/(3t)$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( t^{4/3} \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta\rho_{\mathbf{q}}}{\bar{\rho}} \right) \right) - \frac{2}{3} t^{-2/3} \left( \frac{\delta\rho_{\mathbf{q}}}{\bar{\rho}} \right) = 0. \quad (\text{F.18})$$

Общее решение этого уравнения есть линейная комбинация степеней  $t^{2/3}$  и  $t^{-1}$ . Разумно предположить, что ко времени последнего рассеяния выжили только ведущие моды с

$$\frac{\delta\rho_{\mathbf{q}}}{\bar{\rho}} \propto t^{2/3} \propto a.$$

Так как средняя плотность  $\bar{\rho}(t)$  пропорциональна  $a^{-3}(t)$ , отсюда  $\delta\rho_{\mathbf{q}}(t) \propto a^{-2}(t)$ . Тогда из уравнения (F.12) следует, что  $\delta\phi_{\mathbf{q}}$  не зависит от времени. Этот результат использовался в разд. 2.6.

Для проверки того, что мы нашли наиболее общие решения уравнений (F.10)–(F.12), достаточно только сосчитать число уравнений и их решений. После исключения  $\delta\phi_{\mathbf{q}}(t)$  с помощью уравнения (F.12), уравнения (F.10) и (F.121) представляют множество  $1 + 3 = 4$  связанных дифференциальных уравнений первого порядка, так что они имеют четыре линейно независимых решения. Мы нашли две независимые векторные моды (соответствующие двум направлениям, перпендикулярным вектору  $\mathbf{q}$ ) и две независимые скалярные моды (с  $\delta\rho_{\mathbf{q}}/\bar{\rho}$ , пропорциональной  $t^{2/3}$  или  $t^{-1}$ ), так что действительно получены самые общие решения.

Случаи ненулевого давления или  $K \neq 0$  детально рассмотрены в ГиК, разд. 15.9.

# Приложение G

## ПОЛЯРИЗАЦИЯ ФОТОНОВ

Поляризация фотонов представляет большой интерес для космологии не только потому, что ее можно измерять в космическом микроволновом фоне, но и потому, что она влияет на анизотропные инерциальные слагаемые, возникающие в уравнениях гравитационного поля как для скалярных, так и для тензорных возмущений. В этом Приложении мы рассмотрим описание спинового состояния отдельного фотона на языке векторов поляризации фотона и связанной с ними матрицы плотности, а также несколько необычное уравнение параллельного переноса, которому подчиняется зависимость от времени векторов поляризации фотонов и матриц плотности в гравитационном поле.

Напомним сначала, как описывается поляризация фотона при отсутствии гравитационных полей. Наиболее общее чистое состояние одного фотона есть линейная суперпозиция  $\alpha_+\Psi_+ + \alpha_-\Psi_-$ , где  $\Psi_{\pm}$  — состояния со спиральностью  $\mp 1$  (т. е. собственные состояния компонент углового момента в направлении  $\hat{n}$ , откуда фотон налетает<sup>1)</sup>, с собственными значениями  $\sigma = \pm \hbar$  и условием нормировки  $(\Psi_\sigma, \Psi_{\sigma'}) = \delta_{\sigma\sigma'}$ ), а  $\alpha_{\pm}$  — комплексные числа, удовлетворяющие условию нормировки  $|\alpha_+|^2 + |\alpha_-|^2 = 1$ . Мы описываем такое состояние вектором поляризации  $\mathbf{e} = \alpha_+\mathbf{e}_+ + \alpha_-\mathbf{e}_-$ , причем  $\mathbf{e}^* \cdot \mathbf{e} = 1$ , где  $\mathbf{e}_{\pm}$  — вектор поляризации фотонов со спиральностью  $\mp 1$ . Например, для фотона, который виден налетающим по направлению<sup>2)</sup>

$$\hat{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad (G.1)$$

можно положить

$$\mathbf{e}_{\pm} = \frac{\hat{\theta} \pm i\hat{\phi}}{\sqrt{2}}, \quad (G.2)$$

где  $\hat{\theta}$  и  $\hat{\phi}$  — ортогональные единичные векторы в плоскости, перпендикулярной  $\hat{n}$ :

$$\hat{\theta} \equiv (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta), \quad \hat{\phi} \equiv (-\sin \phi, \cos \phi, 0). \quad (G.3)$$

У линейно поляризованного фотона  $|\alpha_+| = |\alpha_-|$ , следовательно, вектор поляризации действителен с точностью до несущественного общего фазового множителя. Противоположный случай — круговая поляризация, для которой либо  $|\alpha_+|$ , либо  $|\alpha_-|$  обращаются в ноль. Между этими двумя крайними случаями поляризация эллиптическая, и в этом случае  $|\alpha_+|$  и  $|\alpha_-|$  не равны, но никогда не обращаются в ноль.

В общем случае отдельный фотон с определенной вероятностью  $P_m$  может находиться в любом из разных чистых состояний  $\Psi_m = \alpha_{m+}\Psi_+ + \alpha_{m-}\Psi_-$ , так что согласно правилам квантовой механики вероятность обнаружения фотона в конкретном состоянии  $\Psi = \alpha_+\Psi_+ + \alpha_-\Psi_-$ , представляемом вектором поляризации  $\mathbf{e} = \alpha_+\mathbf{e}_+ + \alpha_-\mathbf{e}_-$ , будет равна

$$P(\mathbf{e}) = \sum_m P_m |(\Psi_m, \Psi)|^2 = \sum_m P_m |\alpha_{m+}^* \alpha_+ + \alpha_{m-}^* \alpha_-|^2 = \mathbf{e}^* \mathbf{e}^j N^{ij}, \quad (G.4)$$

<sup>1)</sup> Это противоположно направлению движения фотона, так что спиральность, которая определена как компонента углового момента вдоль направления движения фотона, отрицательна по отношению к направлению, вдоль которого он вылетает. Поэтому мы используем метки  $\pm$  для указания фотонов со спиральностью  $\mp 1$ .

<sup>2)</sup> Для корреляций между поляризациями в небольшом участке неба можно выбрать систему трех осей, одна из которых направлена вдоль  $\hat{n}$  от этого участка, и в этом случае векторы поляризации со спиральностями  $\mp 1$  можно выбрать равными  $(1, \pm i, 0)/\sqrt{2}$ .

где  $N^{ij}$  — матрица плотности фотона,

$$N^{ij} \equiv \sum_m P_m e_m^i e_m^{j*}. \quad (\text{G.5})$$

(По повторяющимся индексам  $i, j$  производится суммирование от 1 до 3.) Так как вероятности действительны и положительны, матрица  $N^{ij}$  эрмитова и положительна:

$$N^{ij*} = N^{ji}, \quad N^{ij} \xi^i \xi^{j*} \geq 0 \quad \text{для всех } xi^i, \quad (\text{G.6})$$

и поскольку  $\sum_m P_m = 1$  и  $e_m^i e_m^{j*} = 1$  (нет суммирования по  $m$ ), эта матрица обладает единичным следом:

$$N^{ii} = 1. \quad (\text{G.7})$$

Конечно, все векторы поляризации фотона ортогональны направлению движения фотона  $-\hat{n}$ , так что

$$N^{ij} \hat{n}^i = N^{ij} \hat{n}^j = 0. \quad (\text{G.8})$$

Рассеяние света нерелятивистскими электронами не создает круговой поляризации, поэтому мы ожидаем, что все фоновые микроволновые фотоны линейно поляризованы, откуда следует, что  $N^{ij}$  действительны.

До сих пор мы определяли вектор поляризации  $e^i$  в отсутствие гравитации как единичный трехмерный вектор, поперечный направлению движения фотона. При желании мы можем определить его в гравитационном поле как пространственную часть четырехкомпонентного объекта  $e^\mu$ , у которого по случайности  $e^0 = 0$ , и выполнены соотношения

$$p_i e^i = p_\mu e^\mu = 0, \quad g_{ij} e^i e^{j*} = g_{\mu\nu} e^\mu e^{\nu*} = 1, \quad (\text{G.9})$$

где  $p^\mu = g_{\mu\nu} p_\nu$  — 4-импульс фотона<sup>3)</sup>. Но поскольку очевидно, что этот объект не преобразуется как 4-вектор, нет никакого смысла полагать, что его временная зависимость будет определяться уравнением параллельного переноса (B.69). Действительно, этот вектор не может эволюционировать путем параллельного переноса, так как если бы это происходило, то условие  $e^0 = 0$  не сохранялось бы вдоль траектории фотона  $x^i = x^i(t)$ , за исключением случая, когда  $\Gamma_{ij}^0(x(t), t)$  обращается в ноль, что обычно не выполняется. Напротив, мы ожидаем, что в локально инерциальной системе отсчета, в которой аффинная связность  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x(t))$  обращается в ноль, вектор поляризации фотона не будет зависеть от времени только с точностью до калибровочного преобразования  $e^\mu \rightarrow e^\mu + \alpha p^\mu$ , так что калибровочно инвариантные величины типа напряженности поля  $p^\mu e^\nu - p^\nu e^\mu$  не будут зависеть от времени. Тогда в произвольной системе отсчета вектор поляризации фотона будет подвергаться параллельному переносу с точностью до калибровочного преобразования:

$$\frac{de^\mu(t)}{dt} = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x(t))e^\nu(t) \frac{dx^\lambda(t)}{dt} + \alpha(t) \frac{dx^\mu(t)}{dt}. \quad (\text{G.10})$$

Параметр калибровочного преобразования  $\alpha(t)$  можно в этом случае определить из условия, что  $e^0 = 0$ , так что  $de^0/dt = 0$ :

$$\alpha(t) = \Gamma_{\nu\lambda}^0(x(t))e^\nu(t) \frac{dx^\lambda(t)}{dt}. \quad (\text{G.11})$$

<sup>3)</sup> Мы можем построить  $e^\mu$  в гравитационном поле в произвольной системе координат  $x^\mu$ , исходя из вектора поляризации  $e_{\text{плоск}}^i$  фотона в локально инерциальной системе с координатами  $\xi^\alpha$ , как

$$e^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^i} e_{\text{плоск}}^i + \beta p^\mu,$$

где  $\beta$  подобрано так, чтобы  $e^0 = 0$ .

При  $e^0 = 0$  уравнение (G.10) имеет вид

$$\frac{de^j(t)}{dt} = \left[ -\Gamma_{i\lambda}^j(x(t)) + \Gamma_{i\lambda}^0(x(t)) \frac{dx^j(t)}{dt} \right] e^i(t) \frac{dx^\lambda(t)}{dt}. \quad (\text{G.12})$$

Заметим, что условия (G.9) сохраняются во времени, так как  $p_\mu e^\mu$  и  $g_{\mu\nu} e^\mu e^\nu$  сохраняются при обычном параллельном переносе, поскольку эти величины являются скалярами и сохраняются при калибровочных преобразованиях в силу равенств  $p_\mu p^\mu = 0$  и  $p_\mu e^\mu = 0$ .

В гравитационном поле мы продолжаем определять статистическую матрицу  $N^{ij}$  формулой (G.5), и эта матрица продолжает удовлетворять условиям эрмитовости и положительной определенности (G.6), но теперь вместо (G.7) и (G.8) имеем

$$g_{ij} N^{ij} = 1, \quad p_i N^{ij} = p_j N^{ij} = 0. \quad (\text{G.13})$$

Из уравнения (G.12) следует, что статистическая матрица фотона, движущегося в гравитационном поле, удовлетворяет уравнению параллельного переноса:

$$\begin{aligned} \frac{dN^{ij}(t)}{dt} &= \left[ -\Gamma_{k\lambda}^i(x(t)) + \Gamma_{k\lambda}^0(x(t)) \frac{dx^i(t)}{dt} \right] N^{kj}(t) \frac{dx^\lambda(t)}{dt} + \\ &+ \left[ -\Gamma_{k\lambda}^j(x(t)) + \Gamma_{k\lambda}^0(x(t)) \frac{dx^j(t)}{dt} \right] N^{ik}(t) \frac{dx^\lambda(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (\text{G.14})$$

## Приложение Н

### РЕЛЯТИВИСТСКОЕ УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА

В этом Приложении мы выведем уравнения Больцмана для нейтрино и фотонов, которые определяют эволюцию распределения этих релятивистских частиц в фазовом пространстве. Это лежит в основе нашего подхода в разд. 6.1 к широко используемым численным расчетам эволюции скалярных возмущений. Кроме того, полученные результаты используются в разд. 6.6, где мы оцениваем затухание тензорных мод за счет анизотропной инерции свободно летящих нейтрино, и в разд. 7.4, где мы вычисляем поляризацию микроволнового фона, порожденную рассеянием анизотропного распределения фотонов нерелятивистскими электронами. В этом Приложении сначала рассматривается более простой случай нейтрино, для которых можно пренебречь рассеянием, а затем более сложный случай фотонов, для которых рассеяние играет существенную роль. В качестве элементарного приложения результатов для фотонов мы выведем формулу для скорости затухания акустических волн в среде из фотонов и заряженных частиц, которая используется в разд. 6.4.

Везде в этом Приложении примем координатную систему, для которой

$$g_{00} = -1, \quad g_{i0} = 0, \quad (\text{H.1})$$

в то время как  $g_{ij}(x, t)$  ничем не ограничено. В линейном приближении эта форма метрики автоматически выполняется для тензорных мод и верна в синхронной калибровке для скалярных мод. Однако до поры до времени мы не будем переходить к частному случаю линейных возмущений. В такой метрике единственными ненулевыми компонентами аффинной связности являются

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left( \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right), \quad (\text{H.2})$$

$$\Gamma_{i0}^j = \frac{1}{2} g^{jk} \dot{g}_{ki}, \quad \Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2} \dot{g}_{ij}. \quad (\text{H.3})$$

## 1. Нейтрино

Удобно работать с функцией распределения нейтрино  $n_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ , определенной как

$$n_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \equiv \sum_r \left( \prod_{i=1}^3 \delta(x^i - x_r^i(t)) \right) \left( \prod_{i=1}^3 \delta(p_i - p_{ri}(t)) \right), \quad (\text{H.4})$$

где индекс  $r$  отмечает траектории отдельных нейтрино (антинейтрино). Это выражение по определению обладает свойством плотности числа частиц, состоящем в том, что интеграл от  $n_\nu$  по любому объему фазового пространства равен числу нейтрино в этом объеме. Согласно разд. В приложения Б, переменная импульса в выражении (Н.2) определена формулой  $p_{ri} = g_{ij} p_r^j$ , где  $p^\mu$  есть 4-вектор импульса

$$p_r^\mu \equiv \frac{dx_r^\mu}{du_r}, \quad (\text{H.5})$$

и  $u_r$  — подходящим образом нормированный аффинный параметр, для которого пространственно-временная траектория удовлетворяет уравнению (В.12):

$$\frac{d^2 x_r^\lambda}{du_r^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda(x_r) \frac{dx_r^\mu}{du_r} \frac{dx_r^\nu}{du_r} = 0. \quad (\text{H.6})$$

Тогда скорость изменения импульса между соударениями дается простой формулой

$$\dot{p}_{ri} = \frac{1}{2p_r^0} p_r^j p_r^k \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right)_{x=x_r}, \quad (\text{H.7})$$

а скорость изменения координаты равна

$$\dot{x}_r^i = \frac{p_r^i}{p_r^0}. \quad (\text{H.8})$$

Непосредственно из формул (Н.4), (Н.7) и (Н.8) следует, что при отсутствии соударений  $n_\nu$  удовлетворяет уравнению Больцмана:

$$\frac{\partial n_\nu}{\partial t} + \frac{\partial n_\nu}{\partial x^i} \frac{p^i}{p^0} + \frac{\partial n_\nu}{\partial p_i} \frac{p^j p^k}{2p^0} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = 0. \quad (\text{H.9})$$

Следует подчеркнуть, что  $p^i$  и  $p^0$  выражены здесь через независимую переменную  $p_i$  соотношениями  $p^i = g^{ij}(\mathbf{x}, t)p_j$  и  $p^0 = (g^{ij}(\mathbf{x}, t)p_i p_j)^{1/2}$ , так что они зависят не только от  $p_i$ , но и от координат и времени.

Обратимся теперь к случаю малых возмущений. В этом случае пространственная метрика имеет вид

$$g_{ij}(\mathbf{x}, t) = a^2(t)\delta_{ij} + \delta g_{ij}(\mathbf{x}, t), \quad (\text{H.10})$$

с малыми  $\delta g_{ij}$ . В случае только малого возмущения метрики функция распределения нейтрино никогда не приобретает вида, существенно отличающегося от равновесного, так что можно записать

$$n_\nu(\mathbf{x}, t) = \bar{n}_\nu \left( a(t) \sqrt{g^{ij}(\mathbf{x}, t)p_i p_j} \right) + \delta n_\nu(\mathbf{x}, t), \quad (\text{H.11})$$

где

$$\bar{n}_\nu(p) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \left[ \exp \left( \frac{p}{k_B a(t) \bar{T}(t)} \right) + 1 \right]^{-1} \quad (\text{H.12})$$

и  $\delta n_\nu$  — малое возмущение.

---

Заметим, что множитель  $a(t)$  в аргументе функции  $\bar{n}$  в (Н.11) сокращается с множителем  $a(t)$ , на который умножается  $\bar{T}(t)$  в формуле (Н.12); этот множитель был включен в формулы (Н.11) и (Н.12), поскольку в интересующем нас временном интервале, когда  $\bar{T} < 10^{10}$  К, величина  $\bar{T}(t) \propto 1/a(t)$ , так что формула (Н.12) определяет  $\bar{n}_\nu$  как независящую от времени функцию своего аргумента.

Первое слагаемое в формуле (Н.11) есть функция распределения нейтрино, которую в соответствии с Принципом Эквивалентности следует ожидать в возмущенном гравитационном поле, если распределение в локально инерциальных системах в точности совпадает с равновесным распределением  $\bar{n}_\nu(p)$ ; поэтому второе слагаемое  $\delta n_\nu$  представляет отклонение распределения нейтрино от равновесной формы.

Мы можем вывести начальное условие для  $\delta n_\nu$ , заметив, что в момент времени  $t_1$ , соответствующий температуре  $\bar{T}_1 \approx 10^9$  К, скорость рассеяния нейтрино уже стала существенно ниже скорости расширения, но еще не хватило времени для того, чтобы возмущения метрики смогли разрушить распределение нейтрино, выведя его из состояния локального теплового равновесия, но с возмущенной температурой. Поэтому в качестве удобного начального условия можно взять

$$\delta n_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t_1) = -p \bar{n}'_\nu(p) \left[ \frac{\delta T(\mathbf{x}, t_1)}{\bar{T}(t_1)} + \frac{\hat{\mathbf{p}}_k \cdot \delta \mathbf{u}_k(\mathbf{x}, t_1)}{a(t_1)} \right], \quad (\text{Н.13})$$

где  $\bar{T}(t_1) \approx 10^9$  К. Второе слагаемое в квадратных скобках представляет доплеровский сдвиг, обвязанный происхождением возможной скорости потока нейтрино  $\delta \mathbf{u}$ , аналогичный тому, который задается формулами (2.4.5) и (2.4.6) для фотонов микроволнового излучения. В локальном тепловом равновесии это то же возмущение скорости, что у барионов и фотонов.

Заметим, что метрический вектор положения есть  $a \mathbf{x}^k$ , так что метрический вектор скорости равен  $a \mathbf{u}^k = a^{-1} \mathbf{u}_k$ .

В первом порядке по возмущениям метрики и плотности уравнение (Н.9) принимает вид

$$0 = \frac{\partial \delta n_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \delta n_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{\partial x^i} \frac{p_i}{a(t)p} + \frac{\bar{n}'_\nu(p)}{2p} \frac{\partial}{\partial t} (a^2(t) \delta g^{ij}(\mathbf{x}, t)) p_i p_j + \\ + \frac{a(t) \bar{n}'_\nu(p)}{2p^2} \frac{\partial \delta g^{ij}(\mathbf{x}, t)}{\partial x^k} p_i p_j p_k + \bar{n}'_\nu(p) \frac{p_i p_j p_k}{2a^3(t)p^2} \frac{\partial \delta g_{ij}(\mathbf{x}, t)}{\partial x^k},$$

где  $p \equiv \sqrt{p_i p_i}$ . (Третье с конца и предпоследнее слагаемые в правой части возникают из-за зависимости аргумента  $\bar{n}_\nu$  в (Н.11) от  $t$  и  $\mathbf{x}$  за счет комбинации  $a^2(t)g^{ij}(\mathbf{x}, t)p_i p_j$ . В первом порядке имеем  $g^{ij} = a^{-2}\delta_{ij} - a^{-4}\delta g_{ij}$ , так что предпоследнее и последнее слагаемые в правой части сокращаются, и мы приходим к намного более простому результату

$$\frac{\partial \delta n_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} + \frac{\hat{p}_i}{a(t)} \frac{\partial \delta n_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{\partial x^i} = \frac{p \bar{n}'_\nu(p)}{2} \hat{p}_i \hat{p}_j \frac{\partial}{\partial t} (a^{-2}(t) \delta g_{ij}(\mathbf{x}, t)), \quad (\text{Н.14})$$

где опять  $p \equiv \sqrt{p_k p_k}$ , и, как обычно, мы полагаем  $\hat{p} \equiv p_i/p$ .

## 2. Фотоны

Из-за необходимости учитывать рассеяние фотонов уравнение Больцмана для фотонов существенно сложнее уравнения для нейтрино. Так как рассеяние может изменить поляризацию фотонов, мы не можем далее записывать отдельное уравнение Больцмана для каждого состояния спиральности фотона по аналогии с тем, как это было сделано для нейтрино. Вместо этого мы определяем матрицу плотности числа частиц

$$n_\gamma^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \equiv \sum_r \left( \prod_{i=1}^3 \delta(x^k - x_r^k(t)) \right) \left( \prod_{i=1}^3 \delta(p_k - p_{rk}(t)) \right) N_r^{ij}(t), \quad (\text{Н.15})$$

где индекс  $r$  отмечает траектории отдельных фотонов, а  $N_r^{ij}(t)$  — поляризационная матрица плотности  $r$ -го фотона. Как обсуждалось в приложении G, если отдельный фотон может с вероятностью  $P_m$  обладать любым из нескольких векторов поляризации  $\epsilon_m^i$ , то его поляризационная

матрица плотности

$$N^{ij} \equiv \sum_m P_m e_m^i e_m^{j*}. \quad (\text{H.16})$$

Если мы наблюдаем, что поляризация фотона с поляризационной матрицей плотности  $N^{ij}$  находится в определенном направлении  $e^i$ , а не в ортогональном направлении, мы найдем вероятность  $g_{ik} g_{jl} e^{*i} e^j N^{kl}$ . Напомним, что для фотона с 3-импульсом  $p_i$  в произвольной 3-метрике  $g_{ij}$  векторы поляризации фотона определены так, что

$$p_i e^i = 0, \quad g_{ij} e^i e^{j*} = 1, \quad (\text{H.17})$$

поэтому поляризационная матрица плотности фотона  $r$  удовлетворяет соотношениям

$$p_{ri}(t) N_r^{ij}(t) = p_{ri}(t) N_r^{ji}(t) = 0, \quad g_{ij}(x_r(t), t) N_r^{ij}(t) = 1, \quad (\text{H.18})$$

а матрица плотности числа частиц, соответственно, удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} p_i n_\gamma^{ij}(x, p, t) &= p_i n_\gamma^{ji}(x, p, t) = 0, \\ g_{ij}(x, t) n_\gamma^{ij}(x, p, t) &= n_\gamma(x, p, t), \end{aligned} \quad (\text{H.19})$$

где  $n_\gamma(x, p, t)$  — плотность числа фотонов в фазовом пространстве, определенная подобно формуле (H.4). По своему определению как  $N_r^{ij}(t)$ , так и  $n_\gamma^{ij}(x, p, t)$  являются эрмитовыми матрицами.

Как указывалось в приложении G, между столкновениями зависимость от времени векторов поляризации задается комбинацией параллельного переноса и калибровочного преобразования, сохраняющего нулевое значение временной компоненты  $e_r^\mu(t)$ :

$$\frac{de_r^j(t)}{dt} = \left[ -\Gamma_{i\lambda}^j(x_r(t), t) + \Gamma_{i\lambda}^0(x_r(t), t) \frac{dx_r^j(t)}{dt} \right] e_r^i(t) \frac{dx_r^\lambda(t)}{dt}, \quad (\text{H.20})$$

Отсюда временная зависимость матрицы плотности  $r$ -го фотона имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dN_r^{ij}(t)}{dt} &= \left[ -\Gamma_{k\lambda}^i(x_r(t), t) + \Gamma_{k\lambda}^0(x_r(t), t) \frac{dx_r^i(t)}{dt} \right] N_r^{kj}(t) \frac{dx_r^\lambda(t)}{dt} + \\ &+ \left[ -\Gamma_{k\lambda}^j(x_r(t), t) + \Gamma_{k\lambda}^0(x_r(t), t) \frac{dx_r^j(t)}{dt} \right] N_r^{ik}(t) \frac{dx_r^\lambda(t)}{dt}. \end{aligned} \quad (\text{H.21})$$

Зависимость переменных  $p_{ri}(t)$  и  $x_r^i(t)$  от времени дается теми же формулами (H.7) и (H.8), что и для нейтрино. Следовательно, непосредственно из формул (H.15), (H.21), (H.7) и (H.8) вытекает, что  $n_\gamma^{ij}(x, p, t)$  удовлетворяет уравнению Больцмана:

$$\frac{\partial n_\gamma^{ij}}{\partial t} + \frac{\partial n_\gamma^{ij}}{\partial x^k} \frac{p^k}{p^0} + \frac{\partial n_\gamma^{ij}}{\partial p_k} \frac{p^l p^m}{2p^0} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} + \left( \Gamma_{k\lambda}^i - \frac{p^i}{p^0} \Gamma_{k\lambda}^0 \right) \frac{p^\lambda}{p^0} n_\gamma^{kj} + \left( \Gamma_{k\lambda}^j - \frac{p^j}{p^0} \Gamma_{k\lambda}^0 \right) \frac{p^\lambda}{p^0} n_\gamma^{ik} = C^{ij}, \quad (\text{H.22})$$

где  $C^{ij}$  — слагаемое, описывающее столкновения фотонов.

---

Напомним, что в формуле (H.22)  $p^i$  и  $p^0$  являются функциями  $x, t$  и  $p_j$ , в силу соотношений  $p^i \equiv g^{ij} p_j$  и  $p^0 = [g^{ij} p_i p_j]^{1/2}$ .

---

Чтобы вычислить столкновительное слагаемое  $C^{ij}$  в уравнении (H.22), рассмотрим сначала случай плоского пространства-времени, в котором  $g_{ij} = \delta_{ij}$ . Так как томсоновское рассеяние неполяризованного или линейно поляризованного фотона может порождать только линейно поляризованные фотоны, ограничимся случаем линейной поляризации, для которого векторы поляризации могут считаться действительными, а поляризационная матрица плотности и матрица плотности частиц действительны и симметричны. Сначала рассмотрим случай покоящихся

электронов, а затем (имея дело со скалярными возмущениями) примемся за случай плазмы с не-нулевой скоростью.

Рассеяние фотонов с импульсом  $\mathbf{p}$  в каком-то другом направлении приводит к уменьшению функции  $n_{\gamma}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ , которое определяется слагаемым в  $C^{ij}$ :

$$C_{-}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = -\omega_c(t)n_{\gamma}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad (\text{H.23})$$

где  $\omega_c(t)$  — полная частота столкновений.

---

Мы придерживаемся здесь соглашения о записи  $n_{\gamma}^{ij}$  и  $C^{ij}$  с верхними индексами, хотя, конечно, в плоском пространстве-времени нет никакой разницы между контравариантными и ковариантными пространственными тензорами.

---

Конечно, происходит и увеличение  $n_{\gamma}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ , вызванное рассеянием фотонов с некоторым начальным импульсом  $\mathbf{p}_1$  в состояние с импульсом  $\mathbf{p}$ , причем из закона сохранения энергии (в предположении, что  $|\mathbf{p}| \ll m_e$ ) вытекает, что  $|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}|$ . Из формулы Клейна—Нишины<sup>1)</sup> следует, что когда фотон с импульсом  $p_{1i}$  и действительным вектором поляризации  $e_1^i$  рассеивается покоящимся электроном, то вероятность обнаружения фотона в конечном состоянии с действительным вектором поляризации  $e^i$  пропорциональна  $(e \cdot e_1)^2$  и не содержит никакой зависимости от начального импульса фотона  $p_{1i}$  или конечного импульса фотона  $p_i$ , не считая, конечно, того, что  $e_1^i$  и  $e^i$  должны быть ортогональны, соответственно,  $p_{1i}$  и  $p_i$ . Если начальный фотон может с вероятностями  $P_n$  обладать различными поляризациями  $e_{1n}^i$ , тогда вероятность обнаружения фотона в конечном состоянии с поляризацией  $e^i$  пропорциональна  $e^i e_{1n}^j N_1^{ij}$ , где  $N_1^{ij} = \sum_n P_n e_{1n}^i e_{1n}^j$ . Как уже отмечалось, эта вероятность должна равняться  $e^i e^j N^{ij}$ , где  $N^{ij}$  — поляризационная матрица плотности фотона в конечном состоянии. Вместе с условиями  $p_i N^{ij} = 0$  и  $N^{ij} = 1$  из этого следует, что поляризационная матрица плотности рассеянного фотона равна

$$N^{ij}(\hat{\mathbf{p}}) = S^{-1}(\hat{\mathbf{p}}) [N_1^{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_k N_1^{kj} - \hat{p}_j \hat{p}_k N_1^{ik} + \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}_k \hat{p}_l N_1^{kl}], \quad (\text{H.24})$$

где

$$S(\hat{\mathbf{p}}) \equiv 1 - \hat{p}_i \hat{p}_j N_1^{ij}. \quad (\text{H.25})$$

Тогда скорость возрастания  $n_{\gamma}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  за счет рассеяния фотонов, летящих из произвольного начального направления  $\hat{\mathbf{p}}_1$  в конечное направление  $\hat{\mathbf{p}}$ , равна

$$\begin{aligned} C_{+}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= n_e \int d^2 \hat{\mathbf{p}}_1 \frac{d^2 \sigma}{d^2 \hat{\mathbf{p}}} S^{-1}(\hat{\mathbf{p}}) \left[ n_{\gamma}^{ij}(\mathbf{x}, |\mathbf{p}| \hat{\mathbf{p}}_1, t) - \hat{p}_i \hat{p}_k n_{\gamma}^{kj}(\mathbf{x}, |\mathbf{p}| \hat{\mathbf{p}}_1, t) - \right. \\ &\quad \left. - \hat{p}_j \hat{p}_k n_{\gamma}^{ik}(\mathbf{x}, |\mathbf{p}| \hat{\mathbf{p}}_1, t) + \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}_k \hat{p}_l n_{\gamma}^{kl}(\mathbf{x}, |\mathbf{p}| \hat{\mathbf{p}}_1, t) \right], \end{aligned} \quad (\text{H.26})$$

где  $n_e$  — плотность электронов, а  $d^2 \sigma / d^2 \hat{\mathbf{p}}$  — дифференциальное сечение рассеяния. Суммируя  $(e \cdot e_1)^2$  по конечным поляризациям, получаем дифференциальное сечение, пропорциональное  $S(\hat{\mathbf{p}})$ , а

$$\int d^2 \hat{\mathbf{p}} S(\hat{\mathbf{p}}) = \frac{8\pi}{3},$$

так что приравнивая

$$\int d^2 \hat{\mathbf{p}}_1 \left( \frac{d^2 \sigma}{d^2 \hat{\mathbf{p}}} \right)$$

томсоновскому сечению  $\sigma_T$ , получаем

$$\frac{d^2 \sigma}{d^2 \hat{\mathbf{p}}} = \frac{3\sigma_T}{8\pi} S(\hat{\mathbf{p}}). \quad (\text{H.27})$$

---

<sup>1)</sup> См., например, КТП, том 1, разд. 8.7.

Тогда формулы (Н.23), (Н.26) и (Н.27) дают полное изменение  $n_\gamma^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ :

$$C^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = C_-^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + C_+^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = -\omega_c(t)n_\gamma^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \frac{3\omega_c(t)}{8\pi} \int d^2\hat{\mathbf{p}}_1 \times \\ \times \left[ n_\gamma^{ij}(\mathbf{x}, |\mathbf{p}| \hat{\mathbf{p}}_1, t) - \hat{p}_i \hat{p}_k n_\gamma^{kj}(\mathbf{x}, |\mathbf{p}| \hat{\mathbf{p}}_1, t) - \hat{p}_j \hat{p}_k n_\gamma^{ik}(\mathbf{x}, |\mathbf{p}| \hat{\mathbf{p}}_1, t) + \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}_k \hat{p}_l n_\gamma^{kl}(\mathbf{x}, |\mathbf{p}| \hat{\mathbf{p}}_1, t) \right], \quad (\text{Н.28})$$

где мы использовали обозначение  $\omega_c(t) = n_e(t)\sigma_T$ .

В качестве проверки легко показать, что в локальном тепловом равновесии столкновительное слагаемое (Н.28) обращается в ноль. В равновесии фотоны неполяризованы, так что  $n_\gamma^{ij} \propto \delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j$ , и их распределение по импульсам однородно и изотропно, так что коэффициент пропорциональности  $f$  зависит только от  $|\mathbf{p}|$  и  $t$ :

$$n_{\text{равн}}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = f(|\mathbf{p}|, t)[\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j].$$

Тогда

$$\int d^2\hat{\mathbf{p}}_1 n_{\text{равн}}^{ij}(\mathbf{x}, |\mathbf{p}| \hat{\mathbf{p}}_1, t) = \frac{8\pi}{3} f(|\mathbf{p}|, t) \delta_{ij}.$$

Подстановка этого выражения в формулу (Н.28) показывает, что в состоянии равновесия два слагаемых в  $C^{ij}$ , как и должно быть, сокращаются.

Чтобы найти формулу для произвольной 3-метрики  $g_{ij}$ , мы должны просто записать формулу (Н.28) в виде, инвариантном относительно трехмерных преобразований координат, которая сводится к (Н.28) в случае плоской 3-метрики  $g_{ij} = \delta_{ij}$ . Действуя таким образом, находим:

$$C^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = -\omega_c(t)n_\gamma^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \frac{3\omega_c(t)}{8\pi} \int \frac{d^3 p_1 \sqrt{\det g(\mathbf{x}, t)}}{p^{02}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)} \delta(p^0(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - p^0(\mathbf{x}, \mathbf{p}_1, t)) \times \\ \times \left[ n_\gamma^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_1, t) - \frac{g^{ik}(\mathbf{x}, t)p_k p_l}{p^{02}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)} n_\gamma^{lj}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_1, t) - \frac{g^{jk}(\mathbf{x}, t)p_k p_l}{p^{02}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)} n_\gamma^{il}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_1, t) + \right. \\ \left. + \frac{g^{ik}(\mathbf{x}, t)g^{jl}(\mathbf{x}, t)p_k p_l p_m p_n}{p^{04}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)} n_\gamma^{mn}(\mathbf{x}, \mathbf{p}_1, t) \right], \quad (\text{Н.29})$$

где

$$p^0(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \equiv \sqrt{g^{ij}(\mathbf{x}, t)p_i p_j}. \quad (\text{Н.30})$$

Снова обратимся к случаю малых возмущений, записав метрику в виде (Н.10) и задавая матрицу плотности числа фотонов в форме, аналогичной (Н.11):

$$n_\gamma^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2} \bar{n}_\gamma(a(t)p^0(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)) \left[ g^{ij}(\mathbf{x}, t) - \frac{g^{ik}(\mathbf{x}, t)g^{jl}(\mathbf{x}, t)p_k p_l}{p^{02}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)} \right] + \delta n_\gamma^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t), \quad (\text{Н.31})$$

где  $\bar{n}_\gamma(p)$  есть равновесная плотность частиц в фазовом пространстве, независящая от времени функция своего аргумента:

$$\bar{n}_\gamma(p) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \left[ \exp \left( \frac{p}{k_B a(t) T(t)} \right) - 1 \right]^{-1} \quad (\text{Н.32})$$

а  $\delta n_\gamma^{ij}$  — малое возмущение. К счастью, в первом порядке по возмущениям уравнение Больцмана (Н.22) существенно упрощается благодаря тому, что величина в квадратных скобках в уравнении (Н.31) удовлетворяет бесстолкновительному уравнению Больцмана:

$$0 = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{p^k}{p^0} \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{p^l p^m}{2p^0} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial p^k} \right) \left[ g^{ij} - \frac{p^i p^j}{p^{02}} \right] + \\ + \frac{p^\lambda}{p^0} \left( \Gamma_{k\lambda}^i - \frac{p^i}{p^0} \Gamma_{k\lambda}^0 \right) \left[ g^{kj} - \frac{p^k p^j}{p^{02}} \right] + \frac{p^\lambda}{p^0} \left( \Gamma_{k\lambda}^j - \frac{p^j}{p^0} \Gamma_{k\lambda}^0 \right) \left[ g^{ik} - \frac{p^i p^k}{p^{02}} \right]. \quad (\text{Н.33})$$

Это можно доказать непосредственным вычислением, но можно поступить проще, заметив, что если положить  $p_i = p_{ri}(t)$  и  $x^i = x_r^i(t)$ , тогда величина в квадратных скобках есть сумма по двум ортогональным поляризациям величины  $e_r^i(t)e_r^j(t)$  и поэтому, в силу (Н.20), удовлетворяет уравнению (Н.33). Так как в этом смысле уравнение (Н.33) удовлетворяется для любой фотонной траектории, оно с необходимостью удовлетворяется для произвольных  $x^i$  и  $p_i$ .

Действуя на множитель  $\bar{n}_\gamma(ap^0)$ , операторы производных в уравнении (Н.22) с точностью до первого порядка дают

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{p^k}{p^0} \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{p^l p^m}{2p^0} \frac{\partial g_{lm}}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial p_k} \right) \bar{n}_\gamma(ap^0) = -\frac{1}{2} \sqrt{p_i p_i} \bar{n}'_\gamma(\sqrt{p_i p_i}) \hat{p}_k \hat{p}_l \frac{\partial}{\partial t} (a^{-2} \delta g_{kl}), \quad (\text{Н.34})$$

так что в результате слагаемые с производными по координате и импульсу в круглых скобках слева сокращаются. Есть и другое упрощение, обусловленное тем, что первое слагаемое в уравнении (Н.31) не дает вклада в столкновительное слагаемое, так как даже в гравитационном поле соударения сами по себе не изменяют равновесных функций распределения. Удерживая только слагаемые первого порядка по возмущениям, получаем для уравнения Больцмана (Н.22) выражение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta n_\gamma^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} + \frac{\hat{p}_k}{a(t)} \frac{\partial \delta n_\gamma^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{\partial x^k} + \frac{2\dot{a}(t)}{a(t)} \delta n_\gamma^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - \\ - \frac{1}{4a^2(t)} p \bar{n}'_\gamma(p) \hat{p}_k \hat{p}_l \frac{\partial}{\partial t} (a^{-2} \delta g_{kl}(\mathbf{x}, t)) (\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) = \\ = -\omega_c(t) \delta n_\gamma^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \frac{3\omega_c(t)}{8\pi} \int d^2 p_1 \left[ \delta n_\gamma^{ij}(\mathbf{x}, p \hat{p}_1, t) - \hat{p}_i \hat{p}_k \delta n_\gamma^{kj}(\mathbf{x}, p \hat{p}_1, t) - \right. \\ \left. - \hat{p}_j \hat{p}_k \delta n_\gamma^{ik}(\mathbf{x}, p \hat{p}_1, t) + \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}_k \hat{p}_l \delta n_\gamma^{kl}(\mathbf{x}, p \hat{p}_1, t) \right], \end{aligned} \quad (\text{Н.35})$$

где снова  $p \equiv \sqrt{p_i p_i}$  и  $\hat{p} \equiv \mathbf{p}/p$ . Для проверки заметим, что уравнение (Н.35) совместимо с условием  $p_i \delta n^{ij} = 0$ . В качестве дальнейшей проверки заметим, что возмущение первого порядка плотности числа частиц  $g_{ij} n_\gamma^{ij}$  в фазовом пространстве фотонов равно  $a^2 \delta n^{ij}$ , и, согласно следу уравнения (Н.35), уравнение Больцмана для  $a^2 \delta n_\gamma^{ij}$  совпадает с уравнением Больцмана (Н.14) для возмущения плотности фазового пространства нейтрино, не считая наличия столкновительного слагаемого и появления  $\bar{n}'_\gamma$  вместо  $\bar{n}'_\nu$ .

Для тензорных мод уравнение (Н.35) можно использовать в полученном виде, но имея дело со скалярными (или векторными) модами, мы должны учесть усложнение, которое до сих пор не принималось во внимание: в общем случае плазма имеет небольшую скорость  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  (в разд. 6.1 и далее она обозначается  $\mathbf{u}_6(\mathbf{x}, t)$ ). Так как величина  $\mathbf{u}_6$  сама является возмущением первого порядка, при вычислении ее влияния на столкновительное слагаемое  $C^{ij}$  можно игнорировать любые возмущения гравитационного поля или матрицы плотности числа фотонов до первого порядка включительно. Влияние скорости плазмы состоит в сдвиге энергии  $|\mathbf{p}_1|$  начального фотона, который после рассеяния порождает конечный фотон с импульсом  $\mathbf{p}$ . Чтобы вычислить этот эффект, рассмотрим сначала случай плоского пространства-времени. Так как энергия фотона сохраняется в системе покоя плазмы, в которой 4-скорость в плазменной метрике равна просто  $v^\mu = (0, 0, 0, 1)$ , имеем  $(p_1 - p) \cdot v = 0$ ; вычисляя это скалярное произведение в лабораторной системе отсчета, в которой 4-вектор скорости плазмы равен  $v^\mu = [\delta v, \sqrt{1 - (\delta v)^2}]$ , находим

$$0 = v_\mu (p_1 - p)^\mu = \delta v \cdot (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}) - \sqrt{1 - (\delta v)^2} (p_1^0 - p^0),$$

или, в первом порядке по скорости,

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}| [1 + (\hat{p}_1 - \hat{p}) \cdot \delta v].$$

Как уже отмечалось, компоненты скорости в плоском пространстве  $v^k$  связаны с компонентами скорости в 3-метрике Робертсона—Уолкера  $g_{ij} = a^2 \delta_{ij}$  соотношениями  $v^k = au^k = a^{-1}u_k$ , так что

$$|\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}| \left[ 1 + \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p})_k \delta u_k}{a} \right]. \quad (\text{H.36})$$

В результате, два слагаемых в интеграле столкновений (Н.28) не сокращаются, даже если мы положим 3-метрику  $g_{ij}$  равной  $a^2 \delta_{ij}$ , а матрицу плотности числа фотонов положим равной тому виду, который она имела бы в равновесии с этой 3-метрикой:

$$n_{\gamma, \text{eq}}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2a^2(t)} \bar{n}_{\gamma}(|\mathbf{p}|) [\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j].$$

Так как в этом случае два слагаемых в  $C^{ij}$  действительно сократились бы, если  $|\mathbf{p}_1|$  равнялось бы  $|\mathbf{p}|$ , мы находим новое слагаемое в  $C^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ , равное разности между слагаемым  $-\omega_c(t) n_{\gamma}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  и таким же слагаемым с  $|\mathbf{p}|$ , замененным на  $|\mathbf{p}_1|$  и усредненным по  $\hat{p}_1$ . Линеаризованное уравнение Больцмана (Н.35) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \delta n_{\gamma}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} + \frac{\hat{p}_k}{a(t)} \frac{\partial \delta n_{\gamma}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)}{\partial x^k} + \frac{2\dot{a}(t)}{a(t)} \delta n_{\gamma}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) - \\ & - \frac{1}{4a^2(t)} p \bar{n}'_{\gamma}(p) \hat{p}_k \hat{p}_l \frac{\partial}{\partial t} (a^{-2} \delta g_{kl}(\mathbf{x}, t)) (\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) = \\ & = -\omega_c(t) \delta n_{\gamma}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \frac{3\omega_c(t)}{8\pi} \int d^2 p_1 \times \\ & \times \left[ \delta n_{\gamma}^{ij}(\mathbf{x}, p\hat{p}_1, t) - \hat{p}_i \hat{p}_k \delta n_{\gamma}^{kj}(\mathbf{x}, p\hat{p}_1, t) - \hat{p}_j \hat{p}_k \delta n_{\gamma}^{ik}(\mathbf{x}, p\hat{p}_1, t) + \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}_k \hat{p}_l \delta n_{\gamma}^{kl}(\mathbf{x}, p\hat{p}_1, t) \right] - \\ & - \frac{\omega_c(t)}{2a^3(t)} (p_k \delta u_k(\mathbf{x}, t)) \bar{n}'_{\gamma}(p) [\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j]. \end{aligned} \quad (\text{H.37})$$

Слагаемое в (Н.36), пропорциональное  $\hat{p}_{1k} \delta u_k$ , не дает вклада в интеграл по  $\hat{p}_1$ .

\* \* \*

В качестве важного приложения уравнения (Н.37) выведем скорость распада акустических волн в однородной и независящей от времени плазме в плоском пространстве-времени ( $a = 1$  и  $\omega_c$  не зависит от времени), когда частота соударений намного больше звуковой частоты. (Этот результат использован в разд. 6.4.) Ищем решение уравнения Больцмана (Н.37) в виде

$$\delta n_{\gamma}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{-i\omega t} \delta n_{\gamma}^{ij}(\mathbf{p}), \quad \delta u_j(\mathbf{x}, t) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{-i\omega t} \delta u_j. \quad (\text{H.38})$$

Тогда при  $a = 1$  и постоянном значении  $\omega_c$  уравнение (Н.37) принимает вид

$$\begin{aligned} [\omega_c - i\omega + i\hat{p} \cdot \mathbf{k}] \delta n_{\gamma}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= \frac{3\omega_c}{8\pi} \int d^2 p_1 \left[ \delta n_{\gamma}^{ij}(p\hat{p}_1) - \hat{p}_i \hat{p}_k \delta n_{\gamma}^{kj}(p\hat{p}_1) - \right. \\ & \left. - \hat{p}_j \hat{p}_k \delta n_{\gamma}^{ik}(p\hat{p}_1) + \hat{p}_i \hat{p}_j \hat{p}_k \hat{p}_l \delta n_{\gamma}^{kl}(p\hat{p}_1) \right] - \frac{\omega_c}{2} (\mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{u}) \bar{n}'_{\gamma}(p) [\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j]. \end{aligned} \quad (\text{H.39})$$

Теперь нам нужна формула для скорости плазмы  $\delta u_j$ . Для этого заметим, что в плоском пространстве вклады первого порядка от фотонной и барионной плазмы в тензор энергии-импульса имеют вид

$$\delta T_{\gamma j}^i = \int d^3 p a^2 n_{\gamma}^{kk}(\mathbf{p}) |\mathbf{p}| \hat{p}_i \hat{p}_j, \quad \delta T_{\gamma j}^0 = \int d^3 p a^2 n_{\gamma}^{kk}(\mathbf{p}) |\mathbf{p}| \hat{p}_j, \quad (\text{H.40})$$

и

$$\delta T_{6j}^i = 0, \quad \delta T_{6j}^0 = \bar{\rho}_6 \delta u_j, \quad (\text{H.41})$$

так что уравнение закона сохранения импульса можно записать в виде

$$\omega \bar{\rho}_6 \delta u_j = \int d^3 p \, a^2 \delta n_\gamma^{kk}(\mathbf{p}) p_j (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{p}} - \omega). \quad (\text{H.42})$$

Чтобы вычислить правую часть, домножим формулу (H.39) на  $p_j$  и проинтегрируем по вектору  $\mathbf{p}$ ; в результате получим

$$i \int d^3 p \, (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{p}} - \omega) p_j \delta n_\gamma^{kk}(\mathbf{p}) = -\omega_c \int d^3 p \, p_j \delta n_\gamma^{kk}(\mathbf{p}) + \frac{4\omega_c}{3} \delta u_j \bar{\rho}_\gamma,$$

где

$$\bar{\rho}_\gamma = \int d^3 p \, p \bar{n}_\gamma(p) = -\frac{1}{4} \int d^3 p \, p \bar{n}'_\gamma(p).$$

Подставляя это выражение в формулу (H.42), получаем исходную формулу для  $\delta u$ :

$$\left( \omega \bar{\rho}_6 + \frac{4i\omega_c}{3} \bar{\rho}_\gamma \right) \delta u_j = i\omega_c \int d^3 p \, p_j \delta n_\gamma^{kk}(\mathbf{p}). \quad (\text{H.43})$$

Для скалярных мод единственным параметром задачи, имеющим смысл направления, является вектор  $\mathbf{k}$ , так что можно записать возникающие в уравнениях (H.39) и (H.43) интегралы как

$$\int d^3 p \, |\mathbf{p}| \delta n_\gamma^{ij}(\mathbf{p}) = \bar{\rho}_\gamma [X \delta_{ij} + Y \hat{k}_i \hat{k}_j], \quad (\text{H.44})$$

$$\int d^3 p \, \delta n_\gamma^{ii}(\mathbf{p}) p_j = \bar{\rho}_\gamma Z \hat{k}_j, \quad (\text{H.45})$$

где  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  — функции  $k \equiv |\mathbf{k}|$  и  $\omega$ . Тогда формула (H.43) позволяет выразить  $\delta u$  через  $Z$ :

$$\delta u = \frac{3Z}{4[1 - i\omega t_c R]} \hat{k}, \quad (\text{H.46})$$

где  $R \equiv 3\bar{\rho}_6/(4\bar{\rho}_\gamma)$ ,  $t_c \equiv 1/\omega_c$  — средний промежуток времени между соударениями. Тогда подстановка формул (H.44) и (H.46) в формулу (H.39) приводит к выражению для возмущенной интенсивности:

$$4\pi \int \delta n_r^{ij}(p\hat{p}) p^3 dp = \frac{3\bar{\rho}_\gamma}{2[1 - i\omega t_c + i\hat{p} \cdot \mathbf{k} t_c]} \times \\ \times \left[ \left( X + \frac{Z(\hat{p} \cdot \hat{k})}{1 - i\omega t_c R} \right) (\delta_{ij} - \hat{p}_i \hat{p}_j) + Y (\hat{k}_i - \hat{p}_i (\hat{p} \cdot \hat{k})) (\hat{k}_j - \hat{p}_j (\hat{p} \cdot \hat{k})) \right]. \quad (\text{H.47})$$

Подставляя это выражение обратно в определения (H.44) и (H.45), находим три однородных линейных соотношения между  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ . Чтобы эти соотношения были согласованы, детерминант коэффициентов должен обращаться в ноль, что приводит к соотношению между  $\omega$  и  $k \equiv |\mathbf{k}|$ .

Результирующее дисперсионное соотношение довольно сложно, но оно значительно упрощается в случае малого среднего времени свободного пробега  $t_c$ . В качестве анзаца можно попробовать взять  $Y/X$  в первом порядке по  $t_c$ , а  $Z/X$  оставить порядка единицы, с тем, чтобы проверить, приводят ли это к согласованному решению. Во втором порядке по  $t_c$  слагаемые в (H.44), пропорциональные  $\delta_{ij}$  и  $\hat{k}_i \hat{k}_j$ , а также коэффициент при  $\hat{k}_i$  в (H.45) приводят к однородным линейным соотношениям:

$$0 = \left( i\omega t_c - \omega^2 t_c^2 - \frac{2}{5} k^2 t_c^2 \right) X + \frac{1}{10} (1 + i\omega t_c) Y + \frac{2}{5} (-ik t_c + \omega k t_c^2 (2 + R)) Z, \quad (\text{H.48})$$

$$0 = \frac{1}{5} k^2 t_c^2 X + \left( -\frac{3}{10} + \frac{7i}{10} \omega t_c \right) Y + \left( \frac{i}{5} k t_c - \frac{(2 + R)}{5} \omega k t_c^2 \right) Z, \quad (\text{H.49})$$

$$0 = (-ik t_c + 2\omega k t_c^2) X - \frac{1}{5} ik t_c Y + \left( i\omega t_c (1 + R) - \omega^2 t_c^2 (1 + R + R^2) - \frac{3}{5} k^2 t_c^2 \right) Z. \quad (\text{H.50})$$

Как и ожидалось, эти соотношения совместимы с предположением, что  $Y$  порядка  $t_c$  по отношению к  $X$  и  $Z$ .

В первом порядке по  $t_c$  обращение в ноль детерминанта коэффициентов в этих соотношениях приводит к условию

$$0 = 15(1+R)\omega^2 - 5k^2 + i\omega^3 t_c [-5 - 5R + 15R^2] + 7i\omega k^2 t_c.$$

Оно имеет решение снова в первом порядке по  $t_c$ :

$$\omega = \pm \frac{k}{\sqrt{3(1+R)}} - i\Gamma, \quad (\text{H.51})$$

где  $\Gamma$  — скорость распада:

$$\Gamma = \frac{k^2 t_c}{6(1+R)} \left\{ \frac{16}{15} + \frac{R^2}{1+R} \right\}. \quad (\text{H.52})$$

Это совпадает с формулой (6.4.25) для скорости затухания, приведенной в разд. 6.4 и первоначально выведенной Кайзером<sup>2)</sup>. Как обсуждается в этой работе, это эквивалентно формулам (6.4.24) для коэффициентов сдвиговой вязкости и теплопроводности нерелятивистской плазмы, в которой импульс и энергия переносятся фотонами.

---

<sup>2)</sup> N. Kaiser, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 202, 1169 (1983)

## Словарь обозначений

Здесь приведены пояснения символов, которые используются в более чем одном разделе. Рядом с символом указан номер раздела, где он употребляется впервые.

$a$	1.1	масштабный фактор Робертсона—Уокера
$a_{lm}$	2.6	амплитуда парциальных температурных волн (то же, что и $a_T, lm$ )
$a_B$	2.1	постоянная энергии излучения
$A$	5.1	одно из скалярных возмущений метрики
$B$	3.3 5.1	барионное число одно из скалярных возмущений метрики
$C_i$	5.1	одно из векторных возмущений метрики
$C_l$	2.6	температурные мультипольные коэффициенты (то же, что и $C_{TT}, l$ )
$d$	1.2	собственное расстояние
$d_{\text{гор}}$	2.6	расстояние до акустического горизонта
$d_y$	1.4	расстояние по угловому диаметру
$d_\Phi$	1.4	фотометрическое расстояние
$D$	6.1	индекс, обозначающий холодную темную материю
$D^{(\ell)}$	7.4	представление группы вращений для спина $\ell$
$D_{ij}$	5.1	тензор возмущений метрики
$D_q$	5.2	амплитуда гравитационной волны
$D_q^r$	6.6	постоянная амплитуда гравитационной волны за горизонтом
$e_{ij}$	5.2	тензор поляризации гравитонов
$E$	5.1	одно из скалярных возмущений метрики
EQ	6.2	индекс, обозначающий эпоху баланса вещества и излучения
$F$	5.1 6.6 7.1	одно из скалярных возмущений метрики функция, возникающая в тензоре анизотропной инерции формфактор в скалярных флуктуациях температуры

$g$	3.1	кратность состояний
$g_{\mu\nu}$	1.1	метрика пространства-времени
$\tilde{g}_{ij}$	1.1	пространственная часть метрики Робертсона—Уокера
$G$	1.5 7.1	гравитационная постоянная Ньютона формфактор в скалярных флуктуациях температуры
$G_i$	5.1	одно из векторных возмущений метрики
$h$	1.3 2.4	постоянная Хаббла в единицах 100 (км/с)/Мпк постоянная Планка $h = 2\pi\hbar$
$h_{\mu\nu}$	5.1	возмущение метрики
$H$	2.2	скорость расширения $\dot{a}(t)/a(t)$
$H_0$	1.2	постоянная Хаббла $\dot{a}(t_0)/a(t_0)$
$H_\nu^0$	10.1	функция Ганкеля
$I$	1.12	действие
$j_\ell$	2.6	сферическая функция Бесселя
$J$	6.1	безразмерная матрица интенсивностей нейтрино
$J^\mu$	1.1	4-вектор тока
$J_{ij}$	6.1	безразмерная матрица интенсивностей фотонов
$k$	8.1	физическое волновое число в настоящий момент времени, $k = q/a_0$
$k_B$	2.2	константа Больцмана
$K$	1.1 6.6	постоянная кривизны в метрике Робертсона—Уокера функция, возникающая в тензоре анизотропной инерции
$\ell$	1.3 2.6	видимая светимость порядок мультиполя
$L$	1.3 3.3	абсолютная светимость лептонное число
$m$	1.3 1.5	видимая звездная величина масса частицы
$M$	1.3 1.9	абсолютная звездная величина суммарная масса системы
$n$	1.10	плотность частиц

$n^{ij}$	6.1	матрица плотности фотонов
$n_S$	7.2	параметр наклона в $\mathcal{R}_q^\Gamma$
$N$	7.2	коэффициент при $q^{-3/2}$ в $\mathcal{R}_q^\Gamma$
$\mathcal{N}$	3.1 4.1	эффективное число сортов частиц количество $e$ -кратностей инфляции
$p$	1.1	давление
$P$	8.1	спектральная функция мощности флуктуаций плотности
$P_\ell$	2.4	полиномы Лежандра
$\mathcal{P}_\phi$	2.6	спектральная функция мощности гравитационного потенциала
$q_0$	1.4	параметр замедления
$\mathbf{q}$	2.6	вектор сопутствующего волнового числа
$r$	1.1 7.3	радиальная координата в метрике Робертсона—Уокера отношение тензор/скаляр
$R$	2.6	3/4 отношения плотности энергии барионов к плотности энергии фотонов
$R_{\mu\nu}$	1.5	тензор Риччи
$\mathcal{R}$	5.4	возмущение кривизны
$\mathcal{R}^\Gamma$	6.2	постоянное возмущение кривизны за горизонтом
$s$	1.1 3.1	собственная длина плотность энтропии
$S$	7.1	верхний индекс, обозначающий скалярную моду
$S_{\mu\nu}$	1.5	источник в уравнениях поля Эйнштейна
$S(\hat{n})$	7.4	стандартное трехмерное вращение, которое переводит 3-ось в направление $\hat{n}$
$\mathcal{S}$	6.5	скалярная передаточная функция
$t$	1.1	время
$t_0$	1.5	возраст Вселенной к настоящему моменту
$t_1$	6.1	начальное время в решении уравнения Больцмана
$T$	2.1 7.1	температура верхний индекс, обозначающий тензорную моду
$T_{\mu\nu}$	1.1	тензор энергии-импульса

$T$	6.5	главная скалярная передаточная функция
$u$	1.1 5.1	аффинный параметр потенциал скорости
$u_\mu$	5.1	4-вектор скорости
$\mathcal{U}$	6.6	тензорная передаточная функция
$v_{\text{зв}}$	2.6	скорость звука
$V$	1.12	потенциал скалярного поля
$w$	1.1	отношение давления к плотности
$x$	1.1	сопутствующая пространственная координата
$X$	2.3	относительная ионизация
$\mathbf{X}$	1.9	ньютоновская пространственная координата
$y$	6.3	отношение плотностей вещества и излучения $y = a/a_{\text{EQ}}$
$Y_l^m$	2.6	стандартные сферические гармоники
$y_l^m$	2.6	сферические гармоники со спином +2
$z$	1.2 10.1	красное смещение величина $a\dot{\varphi}/H$ в уравнении Муханова—Сасаки
$\alpha$	5.2 9.1	стохастический параметр скалярных мод угол между направлениями на гравитационную линзу и положение источника
$\beta$	5.2 6.4 9.1	стохастический параметр тензорных мод отношение плотности барионов к полной плотности угол между изображениями гравитационной линзы и источника
$\beta_E$	9.1	угловой радиус кольца Эйнштейна
$\gamma$	6.1 6.4	индекс, обозначающий фотоны постоянная Эйлера
$\Gamma$	6.4	акустическая скорость затухания
$\Gamma_{\nu\kappa}^\mu$	1.1	аффинная связность
$\tilde{\Gamma}_{jk}^i$	1.1	пространственная аффинная связность для метрики Робертсона—Уокера
$\delta_{ij}$	1.1	символ Кронекера
$\delta_{Xq}$	6.2	$\delta\rho_{Xq}/(\bar{\rho}_X + \bar{p}_X)$ (для $X = B, D, \gamma, \nu$ )
$\Delta$	5.3	изменение из-за калибровочного преобразования

$\Delta$	6.5	скалярная передаточная функция
$\Delta_P^{(S)}$	6.1	скалярная амплитуда поляризации фотонов
$\Delta_T^{(S)}$	6.1	скалярная амплитуда температуры фотонов
$\Delta_P^{(T)}$	6.5	тензорная амплитуда поляризации фотонов
$\Delta_T^{(T)}$	6.5	тензорная амплитуда температуры фотонов
$\epsilon$	10.1	$-\dot{H}/H^2$
$\epsilon_0, \epsilon^S$	5.3	параметры калибровочного преобразования
$\zeta$	5.4	возмущение, сохраняющееся за пределами горизонта
$\eta$	3.2	отношение количества нуклонов к количеству протонов
$\eta_{\mu\nu}$	1.5	метрика пространства-времени Минковского
$\theta$	1.1	полярный угол (кроме разд. 9.5)
$\kappa$	6.2	безразмерное перемасштабированное волновое число
$\mu$	3.1	химический потенциал
$\nu$	1.2 6.1	частота индекс, обозначающий нейтрино и антинейтрино
$\Xi$	6.6	тензорная передаточная функция
$\pi_{ij}$	1.5	полный тензор анизотропной инерции
$\pi^S$	1.5	скалярная анизотропная инерция
$\pi_{ij}^T$	1.5	тензорная анизотропная инерция
$\pi_i^V$	1.5	векторная анизотропная инерция
$\Pi$	6.1	функция скалярного источника
$\rho$	1.1	плотность энергии
$\sigma$	1.10 2.2 8.1	сечение энтропия на барион стандартное отклонение возмущений плотности
$\tau$	1.1 1.10 5.3 10.1	собственное время оптическая глубина параметр перехода между синхронными калибровками конформное время
$\phi$	1.1	азимутальный угол (кроме разд. 9.5)

$\phi$	2.6	гравитационный потенциал
$\varphi$	1.12	скалярное поле
$\Phi$	5.3 6.1	скалярное возмущение метрики в ньютоновской калибровке функция скалярного источника
$\psi$	5.3	скалярное возмущение метрики в синхронной калибровке
$\Psi$	5.3 6.6	скалярное возмущение метрики в ньютоновской калибровке функция тензорного источника
$\Omega_K$	1.5	$-K^2/(a_0^2 H_0^2)$
$\Omega_\Lambda$	1.5	отношение плотности вакуумной энергии к критической плотности
$\Omega_i$	1.5	отношение плотности излучения к критической плотности
$\Omega_m$	1.5	отношение плотности материи к критической плотности
ИСВ	2.6	индекс вклада интегрального эффекта Сакса—Вольфе
Мпк	1.3	миллион парсеков
пк	1.3	парсек
СВ	2.6	индекс вклада эффекта Сакса—Вольфе

## Подборка задач

1. Рассмотрим Вселенную с метрикой Робертсона—Уокера при  $K = +1$ . Выпишите преобразование сопутствующих пространственных координат, которое не меняет вид метрики и переводит точку  $x = (0, 0, r)$  в точку  $x = (0, 0, r')$  без изменений временной координаты. (*Подсказка:* Рассмотрите трехмерное пространство как поверхность четырехмерного шара, постройте искомое преобразование как вращения в четырех измерениях, а затем выразите его через координаты Робертсона—Уокера.)

Также найдите соответствующее преобразование в случае  $K = -1$ .

2. Предположим, что полное давление и плотность энергии во Вселенной связаны соотношением  $p = -\rho + \rho^2/\rho_1$ , где  $\rho_1$  — константа. Предположим, что пространственная кривизна равна нулю. Найдите  $\rho$  как функцию от масштабного фактора Робертсона—Уокера, положив  $a = a_1$  при  $\rho = \infty$ . Найдите  $a$  и  $\rho$  как функции от времени, выбрав  $t = 0$  в качестве момента времени при  $\rho = \infty$ . Вычислите возраст Вселенной и параметр замедления  $q_0$  для заданной современной плотности  $\rho_0$ .
3. Рассмотрите космологию без вещества и излучения, с  $\Omega_m = \Omega_i = \Omega_\Lambda = 0$ . В такой космологической модели найдите фотометрическое расстояние и расстояние по угловому диаметру как функции от красного смещения. Каков возраст Вселенной как функция современного значения постоянной Хаббла?
4. Допустим, что астрономы измеряют возраст некоторой галактики с красным смещением  $z = 2,5$ . Насколько старой должна быть эта галактика (на тот момент, когда она излучила видимый нами свет) чтобы исключить гипотезу того, что  $\Omega_m = 1$ , а плотность энергии вакуума и излучения пренебрежимо мала? Считайте, что  $H_0 = 70$  (км/с)/Мпк.
5. Предположим, что  $\Omega_m = 0,25$  и  $\Omega_\Lambda = 0,75$ , а  $\Omega_i$  пренебрежимо мало. Каково значение красного смещения, при котором расширение Вселенной прекращает замедляться и начинает ускоряться?
6. Предположим, что гравитационная потенциальная энергия пары галактик, отстоящих друг от друга на расстояние  $r$ , вместо  $r^{-1}$  убывает как  $r^{-n}$ . Какую комбинацию массы вириального скопления этих галактик и постоянной Хаббла можно вычислить на основе измерений расстояний по угловому диаметру и дисперсий скоростей двух составляющих галактик?
7. Предположим, что флуктуации температуры реликтового излучения описываются изотропной, трансляционно-инвариантной гауссовой функцией распределения. Найдите величину  $\langle (C_\ell^{\text{наб}} - C_\ell)^2 \rangle / C_\ell^2$  как функцию от  $\ell$ .
8. Предположим, что существует некоторая новая безмассовая элементарная частица, которая эффективно отделяется от всего остального уже при температуре  $10^{16}$  К. Предположим, что частицы, масса которых меньше (на самом деле, много меньше) 1 ТэВ, являются частицами Стандартной модели: три поколения кварков, лептоны, антикварки и антилептоны со спиральностью  $\pm 1/2$ ;  $W^\pm$  и  $Z^0$  со спиральностью  $\pm 1$  и 0; фотон и восемь безмассовых глюонов со спиральностью  $\pm 1$  и единственный нейтральный бозон со спиральностью равной нулю; а также античастицы (в том случае, когда они отличны от частиц). Каково современное отношение температуры новых безмассовых частиц к температуре фотонов?
9. Предположим, что энергия связи дейтерия была бы на 5 % меньше. Оцените, как это отразилось бы на содержании  $\text{He}^4$ , образованного в ранней Вселенной.
10. Предположим, что помимо обычных сохраняющихся величин Стандартной модели, вместо  $B-L$ , сохраняется только комбинация  $3B-L$  барионного и лептонного чисел. Рассматривая частицы минимальной (не суперсимметричной) Стандартной модели, найти плотности

чисел барионов и лептонов в состоянии теплового равновесия при заданной плотности числа  $3B - L$ .

11. Предположим, что: масштабный фактор Робертсона—Уокера возрастает во время инфляции в  $e^{50}$  раз; масштабный фактор в начале эры доминирования излучения был таким же, как в конце инфляции; плотность энергии в конце инфляции составляла  $[2 \times 10^{16} \text{ ГэВ}]^4$ ; плотность энергии в начале эры доминирования излучения составляла  $[2 \times 10^{15} \text{ ГэВ}]^4$ . В каком диапазоне углов можно ожидать, что температура реликтового излучения будет практически однородна?
12. Воспользуйтесь приближением «медленного скатывания» и вычислите поле инфлатона  $\varphi(t)$  как функцию от времени для потенциала  $V(\varphi) = g\varphi^n$ , где  $g$  и  $n$  — положительные константы.
13. Найдите два независимых решения полевых уравнений и законов сохранения для скалярных возмущений далеко за пределами горизонта в ньютоновской калибровке в случае идеальной жидкости, для которой  $p = w\rho$ , причем  $w$  — константа. Воспользуйтесь полученным результатом для вычисления величины  $\mathcal{R} \equiv -\dot{\Psi} + H\dot{\nu}$  для каждого решения.
14. Рассмотрим уравнения скалярных возмущений в ньютоновской калибровке во Вселенной, в которой присутствует только холодная темная материя. Найдите два решения системы уравнений для  $\Phi_q$  и  $\delta u_q$ . (Решения можно нормировать удобным, но простым способом.) Для каждого решения вычислите  $\mathcal{R}_q$ ,  $\delta\rho_q$  и  $\zeta_q$ . Никакие предположения о величине волнового числа не допускаются.
15. Рассмотрим векторное поле

$$V^\mu(\mathbf{x}, t) = \bar{V}^\mu(t) + \delta V^\mu(\mathbf{x}, t),$$

где невозмущенные пространственные компоненты  $\bar{V}^i$  равны нулю, а невозмущенная временная компонента  $\bar{V}^0$  является функцией только времени. Найти изменение  $\delta V^0$  и  $\delta V^i$ , индуцированное калибровочным преобразованием общего вида.

16. Повторите анализ из разд. 5.2 в случае векторных флуктуаций.
17. Предположим, что дифференциальное сечение рассеяния нейтрино в процессах со всеми остальными частицами постоянно, не зависит от направления или энергии. (На самом деле это не так.) Для заданной полной частоты столкновений нейтрино  $\omega_c(t)$  вывести уравнение Больцмана, которому будет подчиняться фазовая функция распределения нейтрино  $n_\nu(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  для метрики пространства-времени с компонентами  $g_{00} = -1$ ,  $g_{i0} = 0$  и произвольными  $g_{ij}(\mathbf{x}, t)$ . Для случая  $g_{ij}(\mathbf{x}, t) = a^2(t)\delta_{ij} + \delta g_{ij}(\mathbf{x}, t)$  вывести уравнение Больцмана для возмущения фазовой плотности  $\delta n_\nu(\mathbf{x}, t)$ , определенного уравнением (6.1.39), в первом порядке по  $\delta g_{ij}$  и  $\delta n_\nu$ .
18. Предположим, что  $H_0$  удваивается, а  $\Omega_u$  и  $\Omega_m$  уменьшаются в четыре раза. К какому количественному эффекту это приведет на графике зависимости  $\ell^2 C_\ell$  от  $\ell$  при  $\ell \gg 1$ ?
19. Предположим, что основной вклад в  $C_{TT, \ell}^S$  определяется сопутствующим волновым числом, равным  $\ell/r_{\text{п.р.}}$  при последнем рассеянии, где  $r_{\text{п.р.}}$  — это сопутствующая радиальная координата поверхности последнего рассеяния. Помимо этого пренебрежем эффектом Доплера и для передаточных функций выберем  $S = 5$  и  $T = 1$ . Имея это ввиду, найти приближенную формулу для отношения высот первого и второго акустических пиков в  $C_{TT, \ell}^S$ .
20. Какое значение мультипольного порядка  $\ell$  соответствует сопутствующей длине волн, равной диаметру сопутствующей сферы, окружающей галактическое скопление суммарной массы  $10^{15} M_\odot$  (с учетом массы холодной темной материи)?
21. Определите средний квадрат флуктуации плотности вещества в виде

$$\sigma_R^2 \equiv \left\langle \left( \frac{1}{(\sqrt{\pi} R)^3} \int d^3x \delta_m(\mathbf{x}, t) e^{-\mathbf{x}^2/R^2} \right)^2 \right\rangle,$$

где интеграл берется по всему пространству. В какой момент времени  $\sigma_R^2$  становится равным 0,1 при  $R$  равном диаметру сопутствующей сферы, окружающей большую галактику

суммарной массы  $10^{12} M_\odot$  (с учетом массы холодной темной материи)? Считайте, что имеется спектр первичных возмущений Зельдовича—Гаррисона с  $|N| = 2 \times 10^{-5}$ .

22. Получите формулу для мультипольных коэффициентов в корреляционной функции между флуктуациями температуры реликтового излучения в направлении  $\hat{n}$  и флуктуациями плотности массы во Вселенной с красным смещением  $z$  и направлением  $\hat{n}'$ . Воспользуйтесь любым уместным с вашей точки зрения приближением, но при этом внятно объясните свой выбор.
23. Как влияет произвольное бесконечно малое вращение на тензор поляризаций  $e_{ij}(\hat{n}, \pm 2)$  гравитационной волны, распространяющейся в направлении  $\hat{n}$  вдоль 1-оси?
24. Предположим, что распределение вероятности тензорных флуктуаций инвариантно относительно трансляций и вращений, но не инвариантно относительно пространственных инверсий. К чему это приведет для среднего  $\langle \beta(\mathbf{q}, \lambda) \beta^*(\mathbf{q}', \lambda') \rangle$ , где  $\beta(\mathbf{q}, \lambda)$  — стохастический параметр для волнового числа  $\mathbf{q}$  и спиральности  $\lambda$ ? Найдите в этом случае формулу для мультипольного коэффициента  $C_{EB, \ell}^T$ .
25. Предположим что проходящий сквозь галактику свет отклоняется в сторону центра галактики на угол  $A/b^n$ , где  $A$  и  $n$  являются константами, а  $b$  — минимальное расстояние от светового луча до центра галактики. Найдите уравнение линзы, т. е. соотношение между наблюдаемым углом  $\beta$  между лучами зрения от Земли к линзирующей галактике и к более удаленному источнику света и углом  $\alpha$ , который был бы между этими лучами зрения в отсутствии отклонения. Найдите формулу для видимой светимости изображения источника в терминах угла  $\beta$ .
26. Определите мультипольные коэффициенты  $C_{\gamma E, \ell}$  соотношением

$$\langle a_{\gamma, \ell m} a_{E, \ell m'}^* \rangle = \delta_{\ell \ell'} \delta_{mm'} C_{\gamma E, \ell},$$

где  $a_{\gamma, \ell m}$  и  $a_{E, \ell m}$  — это коэффициенты парциального разложения параметров сдвига и параметров Стокса, определенных в разд. 9.5 и 7.4. Найдите формулу для корреляционных функций

$$\langle \gamma_1(\hat{n}) Q(\hat{n}') \rangle, \quad \langle \gamma_2(\hat{n}) Q(\hat{n}') \rangle, \quad \langle \gamma_1(\hat{n}) U(\hat{n}') \rangle, \quad \langle \gamma_2(\hat{n}) U(\hat{n}') \rangle$$

параметров сдвига и параметров Стокса через введенные выше мультипольные коэффициенты.

27. Предположим, что инфляция управляет одним полем инфлатона  $\varphi$  с потенциалом

$$V(\varphi) = g \exp(-\lambda \varphi^2).$$

Каковы условия на  $\lambda$  и  $\varphi$ , которые позволяют использовать приближение медленного скатывания? Предполагая, что данные условия выполнены, найдите значения скалярного и тензорного параметра наклона  $n_S$  и  $n_T$ . Во сколько  $e$ -кратностей расширяется Вселенная за время изменения  $\varphi$  в 100 раз?

28. Какой будет зависимость возмущений скалярного поля от волнового числа за горизонтом в случае мультиполевой инфляции, если учесть небольшое изменение потенциала в эпоху пересечения горизонта?

# Именной указатель

**А**ндерсон М. 17

**Б**арнс Т. 17

Бенедикт Ф. 17

Бертшингер Э. 17,

*см. также* Bertschinger E.

Бессель Ф. В. 36

Биркгоф Г.Д. 60

Бойл Л. 17,

*см. также* Boyle L. A.

Бонд Д. 17,

*см. также* Bond J. R.

Боретц Д. Л. 17

**В**атанабе Ю. 17,

*см. также* Watanabe Y.

**Г**ебхардт К. 17

Гёндерсон Т. 36

Гёршпрунг Э. 40

Грин П. 17

Гут А. 17, *см. также* Guth A.

**Д**аффи Я. 18

Дикус Д. 17,

*см. также* Dicus D. A.

**З**альдарриага М. 18,

*см. также* Zaldarriaga M.

**К**ан Р. 17, *см. также* Cahn R.

Киршнер Р. 18,

*см. также* Kirshner R. P.

Комацу Е. 17,

*см. также* Komatsu E.

Компанеец А. 567

**Л**и Бо 17

Линде А. Д. 18,

*см. также* Linde A. D.

Линдер Э. 18,

*см. также* Linder E. V.

**М**атцнер Р. 17

Муханов В. Ф. 18,

*см. также* Mukhanov V. F.

**П**ерлмуттер С. 18,

*см. также* Perlmutter S.

Притчард Дж. 18,  
*см. также* Pritchard J. R.

**Р**асселл Г. Н. 40

Рили Т. 18

Рис А. 18,

*см. также* Riess A. G.

Родерер Я. 17

**С**ельджак У. 18,

*см. также* Seljak U.

Стейнхардт П. 18,

*см. также* Steinhardt P. J.

**Т**ай Г. 233

Тернер Э. 18,

*см. также* Turner E. L.

**У**илер К. 17,

*см. также* Wheeler J. C.

**Ф**ишлер В. 17,

*см. также* Fischler W.

Флаугтер Р. 17,

*см. также* Flauger R.

**Ч**айчердзакул К. 17,

*см. также* Chaicherdsakul K.

**Ш**апиро П. 17,

*см. также* Shapiro P. R.

**А**аронсон М. 47

Аббаси Р. У. 135

Абботт Л. Ф. 229, 245, 247, 401,  
519

Абней М. 530

Адамс В. С. 130

Адэ Р. 421

Аффлек Л. А. 214

Афшорди Н. 77, 368

Агуирре А. 74

Аhn K. 397

Ахтар Е. А. 52

Акериб Д. С. 226

Альбрехт А. 119, 234, 241

Альбуэрке И. Ф. М. 135

Альканиз Ж. С. 89

Алcock С. 104, 478

Аллен С. В. 79, 513

Алнер Г. Џ. 226

Альфер Р. А. 129, 189

Альварес М. А. 397

Андертнах Г. 92

Англохер Г. 226

Арагон-Салмана А. 68

Аренуо F. 41

Аристархус of Samos 36

Армандариз-Пикон С. 514, 522

Астие P. 78

Аудузе J. 202

Авила-Ресе V. 80

Аймон J. 159

**Б**абул А. 467

Бекас C. 159

Бэкон D. J. 503

Бахкалл J. N. 135

Бахкалл N. A. 93, 100

Балби A. 368

Баллингер W. E. 106, 110

Бальсер D. S. 201

Бандай A. 159

Бания T. M. 201

Барасуэ E. 77

Барбер A. J. 76

Бардин J. M. 271, 278, 279,  
345, 507, 531

Барон E. 76

Барреиро T. 530

Баррис B. J. 49, 72

Бартелманн M. 493, 498

Бартоло N. 166, 252

Барвик S. W. 228

Башински S. 287, 325, 362

Басилакос S. 92

Баскарлан D. 301, 352, 403

Баттие R. 144

Бодис L. 226

Баумгаудт H. 45

Бенар R. 186

Беккер R. H. 103, 105

Бирс T. C. 202

Белл J. S. 162

Бенедикт G. F. 42, 46

Бенетти P. 226

Бенитеz N. 77

Беннетт C. L. 159, 176, 395

Беннетт J. R. J. 217

Беноа A. 395

- Berestetskii V. B. 162  
 Bergström L. 522  
 Bernabei R. 226  
 Bernacca P. L. 41  
 Bernstein G. 488, 504  
 Bertone G. 222  
 Bertschinger E. 275, 290, 297,  
     325, *см. также Бергштерн*  
 Best P. N. 89  
 Bethe H. A. 129  
 Bharadwaj S. 21  
 Bhattacharya K. 513  
 Biggs A. D. 488  
 Binney J. 93, 97  
 Birkinshaw M. 162  
 Blakeslee J. P. 49, 52  
 Blanchard A. 80  
 Blandford C. D. 488  
 Blanton M. L. 94  
 Blatt J. M. 400  
 Blumenthal G. R. 217  
 Boardman W. J. 150  
 Boden A. F. 38  
 Boehm C. 228  
 Boisson C. 150  
 Bonanos A. Z. 43  
 Bondi H. 67  
 Bond J. R. 163, 297, 345, 350,  
     360, 384, 454, 462,  
     *см. также Бонд Д.*  
 Bono G. 42  
 Borgani S. 111  
 Bottino A. 227  
 Bougna S. P. 368  
 Bouwens R. J. 111  
 Boyle L. A. 355, 533,  
     *см. также Бойл Л.*  
 Branch D. 50, 53, 76  
 Brandenberger R. H. 356, 517,  
     522  
 Brandenburg A. 232  
 Briggs F. 102  
 Brinkmann J. 368  
 Broadhurst T. J. 110  
 Brough S. 68  
 Brown M. 454  
 Brunthaler A. 39  
 Bryan G. L. 397  
 Buchmüller W 210  
 Bunch T. S. 513  
 Buonanno A. 358  
 Burbridge G. 189  
 Burgess C. P. 522  
 Burles S. 107, 199
- C**abré A. 368  
 Cahn R. 120, 121,  
     *см. также Каин Р.*  
 Caldwell R. R. 78  
 Caputo F. 42, 46
- Carlberg R. G. 92  
 Garretta E. 88  
 Carswell R. F. 468  
 Cassé M. 202  
 Cassini G. D. 36  
 Castander F. 368  
 Catchpole R. M. 45  
 Cavaliere A. 97, 162  
 Cayrel R. 85, 202  
 Cerviño M. 198  
 Chaboyer B. 87, 88  
 Chae K.-H. 478  
 Chaicherdsakul K. 166,  
     *см. также Чайчердасакул К.*  
 Challinor A. 160, 291, 413  
 Chardin G. 226  
 Cheng Y.-C. N. 483  
 Chen G. H. 471  
 Chiba M. 483  
 Chiba T. 55  
 Chibisov G. V. 507  
 Chkvorets O. 186  
 Chluba J. 144  
 Chongchitnan S. 358  
 Choudhury T. R. 397  
 Chung D. J. H. 77  
 Churazov E. 228  
 Ciardullo R. 53  
 Clauser J. F. 131  
 Clementini G. 88  
 Cline J. M. 522  
 Clocchiatti A. 75  
 Clowe D. 217  
 Cohen A. G. 215  
 Cohen M. R. 40  
 Coleman P. H. 21  
 Coleman S. 241  
 Coles J. 488  
 Cole A. A. 44  
 Cole S. 163, 450, 455, 462  
 Colless M. 111, 450  
 Combes F. 68  
 Conklin E. K. 159  
 Cooray A. R. 76, 358, 359, 483  
 Copeland E. J. 505, 530  
 Corasaniti P.-S. 34  
 Cornish N. J. 30  
 Costa L., da 111  
 Coulson D. 407  
 Covi L. 232  
 Cowan J. J. 85, 86  
 Cowie L. 103  
 Cox A. N. 549  
 Creech-Eakman M. 38  
 Crittenden R. 119, 297, 350, 368,  
     407  
 Croom S. M. 106  
 Croots A. P. S. 107  
 Csikor F. 210
- D**amour T. 522  
 Danese L. 162  
 Danielsson U. H. 522  
 Dashen R. F. 210  
 Davies P. C. W. 513  
 Davies R. L. 53  
 Davis R. L. 297, 350, 407  
 Davoudiasl H. 215  
 Dearborn D. S. P. 202  
 Dettbarn C. 45  
 Dey A. 454  
 Dicke R. H. 129, 235  
 Dickinson C. 395  
 Dicus D. A. 189, 218, 229, 343,  
     360, 362,  
     *см. также Дикус Д.*  
 Dietz A. 186  
 Dimopoulos S. 206  
 Dine M. 214, 229  
 Djorgovski S. G. 103  
 Dobler G. 228  
 Dodds S. J. 346  
 Dodelson S. 501, 529  
 Dolgov A. D. 182, 215, 247  
 Dolney D. 504  
 Donahue M. 51  
 Donato F. 227  
 Dorman V. 93  
 Drabkin I. E. 40  
 Dressler A. 49, 52  
 Drukier A. K. 226  
 Dubrovich V. K. 144  
 Duffy L. D. 232  
 Dunlop J. S. 89  
 Durrell P. R. 87
- E**asterhuis R. 522, 535  
 Ebeling H. 79  
 Eckart C. 558  
 Eddington A. S. 32, 67  
 Edmonds A. R. 410  
 Efstathiou G. 111, 176, 297, 350,  
     454, 462, 533, 535  
 Eggleton P. P. 202  
 Egret D. 45  
 Ehlers J. 468  
 Eidelman S. 548  
 Einstein A. 66, 101  
 Eisenhauer F. 39  
 Eisenstein D. J. 344, 454, 455  
 Ellingson E. 92  
 Ellis G. F. R. 30  
 Ellis J. 207, 226  
 Ellis R. S. 110, 111, 503  
 Ens C. 226  
 Ettori S. 79  
 Evans N. W. 478  
 Evrard A. E. 98

**F**abbri R. 398  
 Faber S. M. 49, 217  
 Fabian A. C. 79  
 Fairall A. P. 35  
 Falcke H. 39  
 Falco E. E. 468, 483  
 Fang Li-zhi 278  
 Fantino E. 42  
 Farhi E. 247  
 Fassnacht C. D. 488  
 Feast M. W. 35, 45, 46  
 Federspeil M. 51  
 Feldman H. A. 356, 517  
 Ferramacho L. D. 80  
 Ferrara A. 397  
 Ferrarese L. 50, 53  
 Field G. 102, 131  
 Filippenko A. V. 69  
 Finkbeiner D. P. 228  
 Firmani C. 80  
 Fischer P. 488  
 Fischler W. 229, 507,  
     см. также Фишлер В.  
 Fishbone L. 161  
 Fisher J. R. 47  
 Fixsen D. J. 132, 159  
 Flanagan É. É. 77  
 Flauger R. 404, 430,  
     см. также Flaугер Р.  
 Fodor Z. 210  
 Folkes S. 94  
 Follin Jr. J. W. 189  
 Ford W. K. 93  
 Fornengo N. 227  
 Fort B. 468  
 Fosalba P. 368  
 Fowler W. A. 49, 189  
 Frebel A. 86  
 Freedman W. L. 44, 45, 48, 50,  
     53, 189, 488  
 Freese K. 215, 226  
 Freivogel B. 458  
 Frenk C. S. 98, 99  
 Friedmann A. 59  
 Friedman B. 358  
 Frieman J. A. 226  
 Fuchs B. 45  
 Fukugita M. 110, 203, 210, 483  
 Fukushige T. 99  
 Furlanetto S. 102  
 Fusco-Fermiano R. 97

**G**aillard M. K. 207  
 Gaitskill R. J. 226  
 Gamow G. 129  
 Gautschi A. 45  
 Gaztañaga E. 368  
 Georgi H. 229  
 Gerardy C. 50, 51  
 Geshnizjani G. G. 77  
 Ghirlanda G. 80

Ghisellini G. 80  
 Gibbon G. W. 248  
 Gibson B. 50  
 Gieren W. 50  
 Gilliland R. L. 74  
 Giovannelli R. 47, 48  
 Girardi L. 42, 44  
 Giroux M. L. 467  
 Glashow S. L. 229  
 Gleeson A. M. 189  
 Glennon B. M. 149  
 Goldberg J. N. 435  
 Goldhaber G. 82  
 Goldman S. P. 150  
 Goldstone J. 280  
 Gold T. 67  
 Goncharov A. S. 250  
 Gondolo P. 227  
 Goobar A. 76, 77  
 Gorenstein M. V. 159  
 Górski K. M. 176  
 Gott J. R. 457, 482, 505  
 Gould A. 42, 44, 226  
 Grachev S. I. 144  
 Gradshteyn I. S. 383, 429, 502  
 Gratton R. G. 88  
 Greene B. R. 522  
 Greenhill L. J. 39  
 Greenstein J. L. 150  
 Greisen K. 134  
 Griffiths R. E. 483  
 Grishchuk L. P. 301, 352, 403,  
     507  
 Groenewegen M. A. T. 42  
 Groth E. J. 331  
 Guinan E. F. 43, 44  
 Gunnarsson C. 76  
 Gunn J. E. 102, 457, 476  
 Guth A. 129, 233, 240, 248, 507,  
     531, см. также Гут А.

**H**aiman Z. 397  
 Halverson N. W. 395  
 Hamuy M. 50  
 Hanley C. J. 42  
 Hansen Ruiz C. S. 41  
 Hansen F. K. 166  
 Hansen S. H. 182  
 Hanson R. B. 42  
 Harnden F. R., jr. 228  
 Harries T. J. 43  
 Harrison E. R. 171  
 Harris J. 44  
 Harris W. E. 53, 87  
 Harvey J. A. 211  
 Hasslacher B. 210  
 Hata N. 202  
 Hawking S. W. 235, 240, 248,  
     507, 531  
 Hawley S. L. 42  
 Hayashi C. 189  
 Haymes R. C. 228  
 Hearnshaw J. B. 39  
 Heath T. L. 36  
 Heavens A. F. 106, 110  
 Heck A. 42, 45  
 Heitger J. 210  
 Henkel C. 39  
 Herbig G. H. 131  
 Herman R. C. 129, 189  
 Herrnstein J. 39  
 Hewitt J. N. 471  
 Hilditch R. W. 43  
 Hill V. 85  
 Hinshaw G. 176, 396  
 Hirata C. M. 77, 368  
 Hitchcock J. L. 131  
 Hoekstra H. 452, 504  
 Hoffman M. B. 533  
 Höflich P. 50, 51, 77  
 Hogan C. J. 203  
 Holman R. 522  
 Holtzman J. A. 345, 454  
 Holz D. E. 76  
 Hooft G. 't 209  
 Hooper D. 222, 228  
 Horns D. 227  
 Howarth I. D. 43  
 Howell D. 77  
 Hoyle F. 49, 67, 189  
 Hubble E. P. 33  
 Huchra J. 47  
 Hudson M. J. 49  
 Hui L. 107  
 Hummer D. G. 150  
 Huterer D. 34, 76, 119  
 Hu E. 103  
 Hu W. 308, 331, 340, 344, 435,  
     454

**I**chiki K. 363  
 Ignatiev A. Yu. 207  
 Iliev I. T. 397  
 Illingworth G. D. 111  
 Im M. 483  
 Ishibashi A. 77  
 Israel W. 235  
 Itoh N. 160  
 Ivans I. I. 85  
 Iye M. 34  
 Izotov Y. I. 197

**J**ackson R. E. 49  
 Jacoby G. H. 53  
 Jain B. 504  
 Jarvis M. 504  
 Jeans J. 464  
 Jean P. 228  
 Jeffrey A. 383, 429, 502  
 Jetzer P. 99  
 Jha S. 50, 77

Jimenez R. 90  
 Johnson W. N. 228  
 Jones B. J. T. 154, 156  
 Joras S. E. 522

**K**aizer N. 163, 328, 345, 419,  
 462, 497, 503, 505, 584  
 Kajantie K. 210  
 Kaloper N. 522  
 Kamionkowski M. 78, 356, 358,  
 359, 407, 413, 429, 436  
 Kaplan D. B. 215  
 Kawamura S. 358  
 Kazanas D. 233  
 Kelson D. D. 49  
 Kempf A. 522  
 Kervella P. 38  
 Khlopov M. Yu. 239  
 Kibble T. W. B. 505  
 Kilkenney D. 41  
 Kim A. 77, 78  
 Kim H. B. 232  
 Kim J. E. 229, 232  
 King I. R. 97  
 Kinney W. H. 522, 533, 535  
 Kirkman D. 200  
 Kirshner R. P. 30, 77,  
 см. также Киршнер Р.

Kitano R. 215  
 Kitayam T. 163  
 Klapdor-Kleingroth H. V. 186  
 Kleban M. 458, 522  
 Klein O. 418  
 Klemola A. R. 42  
 Klinkhamer F. R. 210  
 Knöldlseder J. 228  
 Knop R. 72, 74  
 Kobayashi C. 76  
 Kochanek C. S. 471, 483, 488  
 Kodama H. 277  
 Kofman L. 247  
 Kogut A. 30, 159, 176, 396, 420  
 Kohyama U. 160  
 Kolb E. W. 77, 189, 218, 229, 530  
 Komatsu E. 99, 163, 166, 358,  
 см. также Комату Е.  
 Koopmans L. V. E. 488  
 Korn A. J. 203  
 Kosowsky A. 407, 413, 436  
 Kovac J. 420  
 Kowal C. T. 50  
 Krasnikov N. V. 207  
 Krauss L. M. 89, 483  
 Kribs G. D. 215  
 Krisciunas K. 39  
 Krivosheina I. V. 186  
 Kuchner M. J. 38  
 Kudryavtsev V. 478  
 Kulkarni S. B. 38  
 Kundic T. 488  
 Kuo C. L. 395

Kurt V. G. 144  
 Kuster M. 228  
 Kuzmin V. A. 134, 207, 210

**L**achièze-Rey M. 30  
 Lahav O. 21  
 Laine M. 210  
 Landau L. D. 410  
 Lane B. F. 38  
 Lasenby A. 160  
 Laserre T. 478  
 Lattanzio J. C. 202  
 Lattanzi M. 360  
 Lauer T. R. 93  
 Lawrence A. 522  
 Layden A. 42  
 Leach S. M. 518  
 Leavitt H. S. 43  
 Lebreton Y. 41  
 Leeuwen F., van 41  
 Lee A. T. 395  
 Lee B. W. 218  
 Lee H.-C. 543  
 Lee J. 462  
 Leibundgut B. 82  
 Lemaître G. 67  
 Lemieux F. 522  
 Lemke D. 111  
 Lewis A. 144, 291, 413  
 Liddle A. R. 278, 279, 284, 518,  
 530  
 Lidman C. 488  
 Lidsey J. E. 530  
 Lidz A. 107  
 Lifshitz E. M. 162, 251, 274, 410  
 Liguori M. 166  
 Lima J. A. S. 89  
 Lim E. A. 522  
 Linder E. V. 50, 51, 114, 119,  
 522, см. также Линдер Э.  
 Linde A. D. 234, 241, 245,  
 247–250,  
 см. также Линде А. Д.  
 Linde D. A. 250  
 Lineweaver C. 159  
 Linsky J. L. 200  
 Lin W.-C. 107  
 Lipovetsky V. A. 197  
 Livio M. 51  
 Loeb A. 34, 90, 102  
 Loh E. D. 110  
 Loh Y.-S. 368  
 López-Cruz O. 92  
 Lopez R. E. 197, 198  
 Loveday J. 111  
 Lovell J. E. J. 488  
 Lubin D. 200  
 Lubin L. M. 82, 93  
 Lucchin F. 245, 519  
 Lucey J. R. 49  
 Luminet J.-P. 30

Lundmark K. 33  
 Luridiana V. 198  
 Lynden-Bell D. 96  
 Lynds R. 468  
 Lyth D. H. 245, 278, 279, 284,  
 515, 517, 519, 530, 531,  
 535, 536

**M**accio A. V. 488  
 MacFarlane A. J. 435  
 Mack K. J. 533, 535  
 Macorra A., de la 186  
 Macri L. M. 46  
 Maddox S. J. 111  
 Madore B. F. 45  
 Maeder A. 41  
 Majerotto E. 119  
 Makarov A. 176  
 Makino J. 99  
 Maldacena J. 166, 277  
 Malik K. A. 279, 284  
 Mangano G. 182  
 Manton N. S. 210  
 Maoz D. 483  
 Marconi M. 46  
 Marinucci D. 368  
 Marion H. 50, 51  
 Martel H. 442, 457  
 Martinez M. N. 458  
 Martin J. 522  
 Mason B. S. 163  
 Matarrese S. 77, 166, 245, 252,  
 519  
 Mather J. C. 131, 132  
 Ma C.-P. 275, 290, 297  
 McDonald P. 107  
 McKellar A. 131  
 McMahon R. 103  
 Melchiorri A. 34, 132, 186, 358  
 Melendez J. 202  
 Mellier Y. 468  
 Mészáros P. 330  
 Mermilliod J.-C. 41  
 Meyer B. S. 84  
 Meylan G. 498  
 Meynet G. 41  
 Mezhlumian A. 250  
 Miele G. 182  
 Mihalas D. 145  
 Miller A. 395  
 Miller M. C. 483  
 Miralda-Escudeé J. 107  
 Misner C. 329  
 Mohanty S. 513  
 Monaco P. 462  
 Montani G. 360  
 Montuori M. 21  
 Moore B. 99  
 Mörtstell E. 76  
 Mosier C. 132  
 Moss I. G. 240

- Mottola E. 513  
 Mould J. R. 47  
 Mo H. J. 462  
 Mukhanov V. F. 189, 250, 308,  
     356, 507, 517, 522,  
     см. также Муханов В. Ф.  
 Muller R. A. 159  
 Muñoz J. A. 483  
 Munshi D. 498  
 Murayama H. 215  
 Musella I. 46  
 Myers R. C. 505
- N**akamura T. 55, 358  
 Nanopoulos D. V. 207, 209  
 Narayan V. K. 49  
 Navarro J. F. 98, 99  
 Neveu A. 210  
 Newman E. T. 435  
 Newman J. A. 46  
 Ng K. 356  
 Niemann H. B. 200  
 Niemeyer J. C. 522  
 Nishina Y. 418  
 Nollett K. M. 199  
 Norman C. 111  
 Norman M. L. 107  
 Norris J. E. 202  
 Notari A. 77  
 Novello M. 30  
 Novikov I. D. 161  
 Nozawa S. 160  
 Nugent P. E. 74, 76, 78
- O**'Meara J. M. 200  
 Oh S. P. 102  
 Okamoto T. 522  
 Oliver S. J. 111  
 Olive K. A. 100, 197, 200, 202,  
     218, 226  
 Oort J. H. 90  
 Ostriker J. P. 482  
 Outram P. J. 106
- P**aczynski B. 46  
 Padmanabhan N. 368  
 Pagels H. 223  
 Page L. 396, 406, 421, 422  
 Palous J. 68  
 Panagia N. 38, 51, 69  
 Pandey B. 21  
 Parentani R. 522  
 Pasquini L. 189  
 Pastor S. 182  
 Paul J. 228  
 Peacock J. A. 106, 110, 346  
 Pearson T. J. 395  
 Peccci R. D. 210, 229  
 Pecci F. F. 88
- Peebles P. J. E. 78, 114, 115, 129,  
     144, 149, 164, 189, 203,  
     217, 235, 290, 328, 331,  
     454, 457, 465  
 Peimbert A. 198  
 Peimbert M. 198  
 Peiris H. V. 119, 533  
 Peloso M. 182  
 Penrose J. 435  
 Penrose R. 410  
 Penzias Arno 129  
 Péquignot D. 150  
 Percival S. M. 41, 44  
 Percival W. J. 450, 451, 455  
 Perez Bergliaffa S. E. 30  
 Perlmutter S. 69, 70, 76–78,  
     см. также Перлмуттер С.  
 Perryman M. A. C. 37, 41, 45  
 Persic M. 93  
 Peterson B. A. 102, 111  
 Petijkean P. 150  
 Petrosian V. 468  
 Phillips M. M. 50, 74  
 Phillips N. G. 30  
 Piazza F. 119  
 Picat J. P. 468  
 Pierce M. J. 53  
 Pietrobon D. 368  
 Pietronero L. 21  
 Pitaevskii L. P. 162  
 Pi S.-Y. 507, 531  
 Plionis M. 92  
 Podsiadlowski P. 76  
 Pogson N. 40  
 Polchinski J. 505  
 Pollock M. D. 398  
 Polnarev A. G. 301, 352, 403, 407  
 Pont F. 45  
 Popowski P.  
 Powell B. A. 535  
 Preskill J. 229, 239  
 Press W. H. 50, 460, 476  
 Pretzl K. 99  
 Primack J. R. 217, 223  
 Pritchard J. R. 356, 429,  
     см. также Притчард Дж.  
 Putter R., de 522
- Q**uashnock J. M. 483  
 Quimby R. 77  
 Quinn H. 229
- R**affelt G. G. 229, 232  
 Rakic A. 175  
 Ramachers Y. 226  
 Ramirez I. 202  
 Randall L. 214  
 Randich S. 189  
 Rangarajan R. 215, 513  
 Räsänen S. 175
- Ratnatunga K. U. 483  
 Ratra B. 78, 114, 115, 507  
 Rawlings S. 111  
 Rebouças M. J. 30  
 Reese E. D. 163  
 Rees M. J. 21, 175, 217, 407, 438  
 Refrigier A. R. 498, 503  
 Refsdal S. 483  
 Reid M. J. 39  
 Rephaeli Y. 160, 163  
 Repko W. 362  
 Ribas I. 43  
 Richer J. 36  
 Riess A. G. 50, 69, 71, 74, 75,  
     77, см. также Рис А.  
 Rindler W. 124  
 Rines K. 79  
 Ringeval C. 522  
 Riotto A. 77, 166, 252, 536  
 Rix H.-W. 483  
 Robertson H. P. 22  
 Robichon N. 41  
 Rockmann J. 45  
 Roll P. G. 129, 130  
 Roncadelli M. 203  
 Rood R. T. 201  
 Rorlich F. 435  
 Rosati P. 80, 111  
 Rose M. E. 410  
 Roszkowski L. 232  
 Röttgering H. J. A. 102  
 Rozo E. 501  
 Rubakov V. A. 210, 398, 507  
 Rubin V. C. 93  
 Ruhl J. E. 395  
 Ruiz-Lapuente P. 69  
 Rummukainen K. 210  
 Ryan S. G. 202  
 Ryzhik I. M. 383, 429, 502
- S**achs R. K. 167, 374  
 Sadat R. 80  
 Saha P. 488  
 Sahu K. C. 479  
 Sakai S. 48  
 Sakharov A. D. 204  
 Salam A. 280  
 Salaris M. 41, 42, 44  
 Salpeter E. E. 196  
 Salucci P. 93  
 Sandage A. 34, 50, 51, 82  
 Sanders R. H. 21  
 Sanglard V. 226  
 Santoso Y. 226  
 Sarker S. 200  
 Sasaki M. 277, 285, 543  
 Sasaki S. 79, 99, 517  
 Sasselov D. D. 144, 150, 152, 405  
 Sato K. 233  
 Sazhin M. V. 398, 506, 507  
 Schaeffer R. 360, 384

- Schatz H. 85  
 Schechter P. L. 460  
 Scheuer P. A. G. 102  
 Schindler S. 99, 100  
 Schlegel D. 368  
 Schmidt B. P. 69  
 Schmidt R. W. 79  
 Schneider D. P. 51, 368  
 Schneider P. 468, 493, 495, 498  
 Schramm D. N. 84, 88  
 Schwarz D. J. 175  
 Sciamo D. W. 175  
 Scopel S. 227  
 Scott D. 144, 150, 152, 405  
 Seager S. 144, 150, 152, 405  
 Seery D. 515  
 Seitz C. 495  
 Seljak U. 77, 99, 163, 175, 176,  
     287, 290, 300, 368, 369,  
     381, 402, 407, 410, 411,  
     413, 416, 427, 452,  
     см. также Сельджак У.  
 Semikoz D. V. 182  
 Serra P. 186  
 Seshadri T. R. 21  
 Seto N. 358  
 Shafer R. A. 132  
 Shandarin S. F. 450, 462  
 Shanks T. 110  
 Shapiro I. 483  
 Shapiro P. R. 397, 457, 467,  
     см. также Шапиро П.  
 Shaposhnikov M. E. 210  
 Shellard E. P. S. 505  
 Shenker S. 522  
 Sheth R. K. 462  
 Shiu G. 522  
 Shklovsky I. S. 102  
 Shull M. 397  
 Sikivie P. 228, 229, 231  
 Siklos S. T. C. 248  
 Silk J. 162, 222, 228, 297, 329,  
     360, 384  
 Sironi G. 132  
 Sitter W., de 63  
 Skillman E. 197  
 Slipher V. M. 32  
 Slosar A. 176  
 Smith M. W. 149  
 Smith P. F. 217  
 Smith T. L. 358, 359  
 Smoot G. F. 132, 135, 159, 175  
 Sneden C. 85  
 Soderblom D. R. 41  
 Songalia A. 103  
 Soucail G. 468  
 Spanos V. C. 226  
 Speliotopoulos A. 356  
 Spergel D. N. 176, 186, 226, 391,  
     396, 397, 449, 527, 535, 536  
 Speybroeck L., van 79  
 Spillar E. J. 110  
 Spiro M. 384  
 Spite F. 202  
 Spite M. 202  
 Spitzer L. 150  
 Spooner N. 478  
 Springel V. 463  
 Srednicki M. 215, 229  
 Stanek K. Z. 42, 44  
 Starobinsky A. A. 233, 247, 401,  
     507, 531, 532  
 Stebbins A. 107, 407, 413, 436,  
     501, 505  
 Stecker F. W. 134  
 Steffen F. D. 232  
 Steiger R., von 99  
 Steigman G. 197, 199  
 Steinhardt P. J. 115, 122, 215,  
     234, 241, 248, 279, 297,  
     350, 355, 407, 507, 531,  
     533, см. также Стейн-  
     хардт П.  
 Stel F. 93  
 Stewart E. D. 245, 517, 519, 529,  
     530, 543  
 Stewart J. M. 240  
 Stodolsky L. 226  
 Strauss M. A. 368  
 Sudarshan E. C. G. 189, 435  
 Sugiyama N. 308, 331, 340, 346,  
     454  
 Sullivan M. 74, 76  
 Sunyaev R. A. 144, 160, 164,  
     290, 328, 454  
 Surpi G. 488  
 Susskind L. 206, 458, 507, 522  
 Suto Y. 99  
 Suzuki N. 200  
 Suzuki T. K. 202  
 Sykes J. B. 162  
 Sylos-Labini F. 21  
 Szalay A. S. 345
- T**ago E. 92  
 Takahara F. 110  
 Takeda M. 135  
 Tammann G. A. 50, 51  
 Tanaka T. 543  
 Tavkhelidze A. N. 207  
 Tayler R. J. 189  
 Tegmark M. 450, 452, 454, 455  
 Teplitz V. L. 189, 218, 229  
 Thaddeus P. 131  
 Thomas L. H. 329  
 Thomas S. 214  
 Thompson G. B. 135  
 Thonnard N. 93  
 Thorne K. S. 435  
 Thuan T. X. 197  
 Tolman R. C. 81  
 Tomita K. 252
- Torrey J. L. 49, 51–53, 72  
 Tormen G. 462  
 Totani T. 76, 104  
 Toussaint B. 207  
 Tozzi P. 80, 111  
 Treiman S. B. 207  
 Tremaine S. 93, 97  
 Tren T. 488  
 Tripp R. 50  
 Tsuchiya K. 227  
 Tsyplin M. 210  
 Tully R. B. 47  
 Tung W.-K. 410  
 Turner E. L. 482, 483,  
     см. также Тернер Э.  
 Turner M. S. 100, 189, 197–199,  
     211, 229, 279, 507, 530,  
     531, 533  
 Turok N. 88, 368, 407, 533  
 Turon C. 41  
 Tutui Y. 47  
 Tyson J. A. 110  
 Tytler D. 200
- U**dalski A. 42, 44, 479
- V**alageas P. 498  
 Vangioni-Flam E. 202  
 Venkatesan A. 397  
 Verde L. 392  
 Veryaskin A. V. 398, 507  
 Vilenkin A. 248, 505, 506  
 Visser M. 55  
 Vogt N. P. 68
- W**agoner R. V. 189, 229  
 Wald R. M. 77  
 Walker A. G. 22  
 Walsh D. 468  
 Wanajo S. 85  
 Wands D. 279, 284, 288  
 Wang L. 115, 122  
 Watanabe Y. 358,  
     см. также Ватанабе Ю.  
 Waxman E. 135  
 Weidenspointer G. 228  
 Weiler K. 69  
 Weinberg E. J. 240, 241  
 Weinberg N. N. 78  
 Weinberg S. 23, 80, 129, 148,  
     166, 188, 205, 207, 209,  
     218, 223, 224, 228, 279,  
     280, 285, 286, 301, 328,  
     331, 340, 345, 352, 354,  
     360, 384, 403, 404, 430,  
     457, 460  
 Weisskopf V. F. 400

- Weiss A. 42  
Welch D. L. 53  
Weller J. 119, 144  
Wetterich C. 115  
Weymann R. J. 468  
Wheeler J. C. 77,  
см. также Уилер К.  
White M. 435  
White S. D. M. 98, 99, 162, 438  
Wielen R. 45  
Wiese W. L. 149  
Wilczek F. 207, 228, 229  
Wilkinson D. T. 129, 130, 132  
Williams L. L. R. 488  
Wilson M. L. 297  
Wilson R. 129  
Wirtz C. 33  
Wise M. B. 229, 245, 247, 401,  
519  
Witten E. 226, 505
- Wolfe A. M. 167, 374  
Wong W. Y. 144  
Wood-Vesey M. 79  
Woolf N. J. 131  
Woudt P. 35  
Wright E. L. 176  
Wu K. K. S. 21  
Wyse R. F. 154, 156
- Y**adav J. 21  
Yamaguchi M. 363  
Yamashita K. 110  
Yanagida T. 210  
Yao W.-M. 185  
Yee H. K. C. 92  
Yock P. 479  
Yokayama J. 363  
Yokoyama S. 543  
York D. G. 450  
Yoshii Y. 110, 202, 483
- Yoshimura M. 206  
Yu J. T. 164, 290, 328, 454
- Z**akharov A. F. 479  
Zaldarriaga M. 102, 107, 290,  
300, 369, 381, 402, 407,  
410, 411, 413, 416, 427,  
434, см. также Зальдар-  
риага М.  
Zaritsky D. 44, 68  
Zatsepin G. T. 134  
Zee A. 207, 278  
Zel'dovich Ya. B. 144, 160, 161,  
164, 171, 189, 239, 290,  
328, 450, 454  
Zinn-Justin J. 360, 384  
Zioutas K. 231  
Zlatev I. 115, 122  
Zotti G., de 162  
Zwicky F. 90, 92

# Предметный указатель

**А**бсолютная звездная величина (определение) 40  
абсолютная светимость (определение) 39  
адиабатические флуктуации 173, 284, 310–312,  
537, 544  
аксино 232  
аксионы 228–232  
акустический горизонт 173–174, 389  
Алкока—Пачинского метод 104–108  
амплитуды парциальных волн  
    для скалярных мод 297–298, 303  
    для тензорных мод 350  
анизотропная инерция 257, 354–355  
аффинная связность 25  
    для малых флуктуаций 252–253  
    для метрики Робертсона—Уокера 26  
    для обобщенного пространства-времени  
        552–553  
    для полевого пространства 539  
Аффлека—Дайна механизм 214

**Б**анча—Дэвиса вакуум 513, 543  
барионные акустические осцилляции 454–456  
барионов и лептонов сохранение числа 28,  
204–206  
бариосинтез и лептосинтез 203–216  
Бесселя функции сферические 169, 172, 383  
Биркофга теорема 60  
Бозе—Эйнштейна распределение 179  
Больцмана уравнение 260, 290, 295–296, 348,  
575–584  
бурная релаксация 96  
быстрые моды 326–329, 333–334, 336–337

**В**акуума энергия (и  $\Omega_\Lambda$ ) 29, 63–66, 76, 79,  
125, 460  
    измерение по корреляциям облаков  
        Лайман- $\alpha$  108  
    измерение по рентгеновской  
        освещенности скоплений галактик 79  
    измерение по соотношению красного  
        смещения и расстояния  
        до сверхновых 69–73, 79  
    измерение по статистическим данным  
        линзирования 482–483  
взвешенные спиновые сферические гармоники  
409–412, 435, 499–500  
видимая звездная величина (определение) 40  
видимая светимость  
    общая формула 54  
    определение 39  
вириальная теорема 91, 452

внутренняя температурная флуктуация  
    (на последнем рассеянии) 167, 174–175  
возраст  
    Вселенной 64, 70, 88  
    тяжелых элементов 83–86  
    шаровых скоплений 87–88  
Волосы Вероники, звездное скопление 33, 92, 452  
вязкость 328, 558, 584

**Г**ало 462, 478  
гамма-излучения вспышки 80, 104  
Ганна—Петерсона эффект 102–103  
Гаррисона—Зельдовича спектр 171, 176  
Гауссовы распределения 165, 261, 514, 537, 543,  
569–570  
гелий ( $^3\text{He}$ )  
    распространенность 201  
    синтез 195–196, 200  
гелий ( $^4\text{He}$ )  
    распространенность 199  
    рекомбинация 141, 152  
    синтез 196–197  
Герцшprunga—Расселла диаграмма 40, 86–87  
Гиады, звездное скопление 37, 41  
горизонт событий 124–126  
горизонт частиц 124–125, 172  
горизонты  
    и сохраняющиеся величины 278–289  
    проблемы горизонтов 237–238  
гравитационное линзирование  
    временная задержка 483–489  
    космическими струнами 505–506  
    микролинзирование 478  
    протяженной массой 479–483  
    сильное линзирование 473–478  
    слабое линзирование 413, 489–505  
    точечной массой 468–471, 473–479  
    увеличение 471–474, 479  
гравитино 222–225  
Грайзена—Засепина—Кузьмина эффект 134–135

**Д**авление 28–29, 539  
    для нулевого химического  
        потенциала 179–180  
    для скалярных полей 561  
    релятивистского газа 180  
де Ситтера модель 63, 67, 476–477  
Дева, звездное скопление 33, 92  
дейтерий  
    распространенность 200–201  
    синтез 195–196, 200

Лжиписи полное число 464  
Лжиписи масса 464, 466–467  
Лонгера эффект 167, 174, 369

**З**атухание 328  
звезды популяции III 100  
звезды типа RR Лиры 42–43, 46

**И**зотермальные сферы 96–97  
изотропность Вселенной 22  
импульс 26, 27, 136  
индуцированное излучение 100  
интеграл на линии прямой видимости 300, 352,  
365–366, 414, 422  
инфлатон 242, 508, 537  
инфляция  
  вечная 248–250  
  возникновение скалярных флуктуаций  
    507–524, 527–531, 533–547  
  возникновение тензорных флуктуаций  
    524–527, 531–536, 546–547  
  обоснования 233–240  
  приближение медленного скатывания  
    240–248  
  хаотическая 248–250

**К**вадрупольная матрица  
(изображений галактик) 492–497  
квазары 106–107  
квинтэssенция 80, 114–124, 126  
Клейна–Нишины формула для  
  фотон-электронного рассеяния 418  
Компанейца уравнение 160, 567  
корреляционные функции  
  возмущений плотности 171, 444–445  
  параметров Стокса 434–437  
  слабого линзирования 503–504  
  флуктуаций температуры  
    микроволнового фонового  
      излучения 165  
космическая дисперсия 166–167  
космические лучи 134–135  
космический телескоп «Хаббл» (КТХ) 41, 45, 47,  
75, 82, 506  
  HST Key  $H_0$  Project, исследовательская  
    группа 48, 50, 53  
  Hubble Deep Field, изображение области  
    в созвездии Большой Медведицы 74  
космологическая постоянная 66–67, 254  
Коулмена–Э. Вайнберга механизм 242  
красное сгущение, звезды 42, 44, 46  
красное смещение 30–34  
критическая длина волны 314

**Л**андая затухание 386–388  
Лебедь А, радиогалактика 102  
Леметра модели 67  
лентогенезис 210–214  
линии поглощения CN 130–131

линия Лайман- $\alpha$  102–107, 143, 146, 149, 452  
литий ( $^6\text{Li}$  и  $^7\text{Li}$ ), синтез и распространность  
202–203

**М**агелланово облако большое 43–47, 478  
Магелланово облако малое 43, 47  
Максвелла–Больцмана распределение 136,  
141, 192  
масштабная инвариантность 544–545  
матрица интенсивностей  $J_{ij}$ , определение 295, 348  
матрица плотности  $N^{ij}$  573–575, 578  
матрица плотности числа частиц  $n^{ij}$  293, 578  
медленные моды 329–331, 334–337  
Месароша уравнение 331  
модуль расстояния, определение 40  
монополя проблема 239–240  
мультипольные коэффициенты  $C_\ell$  и  $C_{TT, \ell}$   
наблюдения 175–176, 395–398  
определение 165, 379–380  
расчет для скалярных мод  
  в терминах формфакторов 383–384  
  общая формула 381  
  при малом  $\ell$  170  
  численные результаты 393–394  
расчет для тензорных мод 399–406  
мультипольные коэффициенты  $C_{TE, \ell}$ ,  $C_{EE, \ell}$   
и  $C_{BB, \ell}$   
измерение 422  
определение 413  
расчет для скалярных мод 414–420  
расчет для тензорных мод 422–432  
Муханова–Сасаки уравнение 517, 528

**Н**ейтрино  
вырождение 188  
затухание тензорных мод 353, 360–363  
как темная материя 222, 225  
массы 184–186  
отщепление 180–182  
уравнение Больцмана 576–577  
нейтроны, конверсия в протоны 189–194  
непрозрачность 153–155  
нуклеосинтез 193–203  
ньютонова космология 59–61, 73–74, 570–572  
ニュтоновская калибровка 271–272, 275–277,  
280–282, 378, 509, 540

**О**бщая теория относительности (обзор) 549–563  
однородность Вселенной 22  
оптическая глубина 101–103

**П**араллакс (тригонометрический) 36–37  
параллельный перенос  
  поляризации 574–575, 578  
  тензоров 562  
параметр замедления 55, 62, 65, 70–72  
параметр плотности барионов  $\Omega_b$  98  
  измерение по анизотропии  
  микроволнового фона 396

- измерение по распространенности  
дейтерия 197
- измерение по рентгеновскому  
излучению скоплений галактик  
98–100
- оценка в теориях бариосинтеза 209–210
- параметр плотности массы  $\Omega_m$  63
- измерение по анизотропии  
микроволнового фона 396
- измерение по барийонным акустическим  
осцилляциям 455
- измерение по вириализованным  
скоплениям 94
- измерение по рентгеновскому  
излучению скоплений галактик 99
- измерение по соотношению красного  
смещения и расстояния  
до сверхновых 69–79
- параметр энергии излучения  $\Omega_{\text{II}}$  133
- передаточные функции  
для скалярных мод 339–346  
для тензорных мод 360–361
- Планка распределение 127
- Плеяды, звездное скопление 41
- плоскостности проблема 62, 233
- плотность критическая 61
- плотность числа лептонов 186, 203
- плотность энергии 28, 539  
для нулевого химического  
потенциала 179–180
- для скалярных полей 561  
нейтрино и антинейтрино 186  
электронов, позитронов и фотонов 183
- поверхностная яркость 51, 81, 473–474, 492–493
- подсчет количества 108–111  
галактик 110–111  
радиоисточников 111–114
- полевая метрика 538
- поляризация  $B$ -типа  
определение 413  
отсутствие для скалярных  
флуктуаций 416
- поляризация  $E$ -типа  
измерение 420–422  
определение 413  
пики 419
- поляризация гравитонов 265–266, 525
- поляризация фотонов 293, 573–575
- последнее рассеяние 154–156
- постньютоновское приближение 480
- потенциал скорости 257, 419, 439, 539
- Пресса–Шехтера метод 460–463
- приближение медленного скатывания  
для инфляции 234, 241, 527–537,  
543–545  
для квинтэssенции 117–121
- прямоугольное распределение 448
- Пуля, кластер галактик 217
- P**ардиотелескоп LOFAR (Low Frequency ARray) 102
- расстояние по угловому диаметру 56
- резонансное поглощение 100–102
- реионизация 389, 397, 406, 422
- рекомбинация 140–156
- рентгеновское излучение скоплений галактик 79,  
92, 94–100, 162–163
- репер (для метрики поля) 542
- Риччи тензор 57, 562  
для малых флуктуаций 253  
для метрики Робертсона–Уокера 57–58
- Робертсона–Уокера метрика 22–30
- аффинная связность 26
- геодезические 25–27
- масштабный фактор 24
- постоянная кривизны  $K$  24, 61, 62,  
234–237
- собственное расстояние 22–27
- тензор Риччи 57–58
- энергии–импульса тензор 29
- рывок 55
- Рэлея–Джинса формула 130, 161
- C**акса–Вольфе эффект 167–171, 174  
интегральный 167, 175, 367–369, 377
- Саха уравнение 142, 147
- сверхновые 49, 78
- сдвиг (при слабом линзировании) 490–505
- серая пыль 74
- Силка затухание 329, 387, 582–584
- синхронная калибровка 272–277, 288, 292, 369
- скалярные поля 561–562
- скорость звука 173
- слабовзаимодействующие массивные  
частицы (WIMPs)  
поиски 226–228  
расчетная распространенность 217–225
- слабое гравитационное линзирование 76
- слабые взаимодействия 180, 181
- следящее решение 116–118, 122–124
- собственное движение 37–39  
движущиеся скопления звезд 37
- мазеры 39
- статистический параллакс 38
- соотношение нуклонов и фотонов 198
- сопутствующая калибровка 277
- сопутствующие координаты 25
- сохранение энергии 29, 59, 60
- стационарная модель 67, 112–114
- степенная спектральная функция  $P(k)$   
зависимость от слабого  
линзирования 501  
измерение 450–453  
определение 443  
расчет 446–447, 450
- Стокса параметры  
декомпозиция по парциальным  
волнам 410
- корреляционные функции 434–437
- определение 408
- преобразование при вращениях 409
- преобразование при инверсии  
пространства 412, 436

суперсимметрия 222–225, 232  
 сферические гармоники 164  
 схождение (при слабом линзировании) 490–492,  
 497–500, 504  
 Сюняева–Зельдовича эффект 160–163

**T**алли–Фишера соотношение 47–48, 68  
 2dF Redshift Survey, обзор 106, 450, 455  
 линия на длине волны 21 см 47–48, 102  
 темная материя 216–232, 292, 347, 441–443  
 темные века 104  
 температурная история 135–138, 177–188  
 тензор энергии–импульса  
     для малых флуктуаций 255–257, 538–539  
     для метрики Робертсона–Уокера 29, 254  
     для обобщенного пространства–времени  
         556–557, 559–560  
     жидкостей 557–559  
 теплопроводность 328, 558, 584  
 тип Ia сверхновые 49–51, 69–77, 80, 505  
 толчок 55  
 Томсона рассеяние 138–140, 563–567, 578–580  
 топология Вселенной 29  
 трития распад 188

**Y**равнение состояния, параметр  $w$  29, 75, 78, 79,  
 119–124, 504  
 условия непротиворечивости приближения  
     медленного скатывания 533  
 «уставший свет» 81–83

**Φ**абер–Джексона соотношение 49  
 фантомная энергия 78  
 Ферми–Дирака распределение 179  
 флуктуации  
     векторные модели 256–257, 259  
     калибровочные преобразования 268–277  
     полевые уравнения 251–260  
     разложение Фурье 260–262, 292  
     скалярные модели 256–258  
         среднеквадратичная флуктуация  
             плотности  $\sigma_R^2$  447–449  
         эволюция (линейная) 291–346,  
             439–443, 463–467  
         эволюция (нелинейная) 457–460  
     сохраняющиеся величины  $\zeta$   $\mathcal{R}$   
         278–289, 507–508, 515–521, 544–547  
     стохастические параметры 261–268, 292  
     тензорные модели 256–257, 259–260,  
         264–268, 280–283  
         эволюция 347–363

фон космического микроволнового излучения  
     дипольная анизотропия 157–160  
     квадрупольный момент 176  
     негауссовские эффекты 166  
     открытие 129  
     первичная температурная  
         анизотропия 164–176, 364–406  
         плотность числа частиц 133–134  
         плотность энергии 133

плотность энтропии 136–137  
 поляризация 407–436  
 предсказание 129  
 спектр 127–132  
 температура 131, 132  
 формфакторы  $F(q)$  и  $G(q)$  для анизотропии  
     микроволнового фона 371, 377–378, 381  
 фотометрическое расстояние  
     общая формула 65  
     определение 54  
     увеличение при красном  
         смещении 54–55  
 Фридмана уравнение 59, 457, 509  
 фундаментальная плоскость 49  
 функции источника  
     для скалярных мод 297, 299–300, 366  
     для тензорных мод 349–350, 399, 404

**X**аббла постоянная  
 измерение методом основной  
     плоскости 49  
 измерение по анизотропии  
     микроволнового фона 396  
 измерение по временной задержке  
     линзы 488–489  
 измерение с помощью сверхновых  
     типа Ia 50–51  
 измерение с помощью соотношения  
     Талли–Фишера 48, 50, 53  
 измерение с помощью флуктуаций  
     поверхностной яркости 52  
 определение 32  
 химический потенциал 141, 192–194  
 холодная материя 29, см. также темная материя

**Ц**ефеиды 38, 43–47, 52

**Ч**андра», спутник с рентгеновскими  
 детекторами 79

**Э**волюция галактик 68, 110–111, 113  
 Эддингтона–Леметра модели 67  
 Эйнштейна кольцо 471, 481  
 Эйнштейна модель 66  
 Эйнштейна полевые уравнения 57–59, 251–260,  
 562–563  
 Эйнштейна–де Ситтера модель 62, 477–478  
 эквивалентности принцип 512, 550  
 экспоненциальный потенциал 245–246, 519–523  
 энтропия  
     на барион,  $\sigma$  136, 173  
     плотность для нулевого химического  
         потенциала 177–180  
     электронов, позитронов и фотонов 182  
 эргодическая теорема 165, 444, 515, 568–569

**ACBAR** (Arcminute Cosmology Bolometer Array  
 Receiver), эксперимент по изучению  
 микроволнового фона 395, 397

AGASA (Akeda Giant Air Shower Array),  
детектор 135

ARCHEOPS, эксперимент по изучению  
микроволнового фона 395

**B**D+17°3248, звезда 85

BOOMERANG (Ballon Observations Of Millimetric  
Extragalactic Radiation ANd Geophysics),  
эксперимент по изучению микроволнового  
фона 395

**C**, СР и СРТ сохранение 204–206, 209

CAMB, компьютерная программа 291

CBI, эксперимент по изучению микроволнового  
фона 395, 397

CDMP & MAT/TOCO, эксперименты по  
изучению микроволнового фона 395

CMBfast, компьютерная программа 290, 303, 347

COBE (COsmic Background Explorer), спутник 131,  
159, 175, 395

CS 22892–052, звезда 85

CTIO, обзор 505

**D**ASI (Degree Angular Scale Interferometer),  
телескоп 395, 420

**E**SSENCE, обзор сверхновых 79

**H**E 1523–0903, звезда 85

High Resolution Fly's Eye, эксперимент 135

High-*z*, группа поиска сверхновых 69–73, 76

Higher-*z*, группа поиска сверхновых 74

Hipparcos, спутник 41–42, 45, 88

HV2274, вращающаяся двойная звезда 44

**K**-поправка 77

**M**31, галактика 32, 40, 43, 47

M33, галактика 39, 43, 47

MAXIMA (Millimeter wave Anisotropy Experiment  
Imagining Array), эксперимент по изучению  
микроволнового фона 395

**N**GC 4258, галактика 39, 46, 51

**Q**0957+561, линзированный квазар 468

**R**-сохранение 222, 232

**S**2, звезда 38

SDSSp J103027.10+052455.0, квазар 103

Sloan Digital Sky Survey, обзор 79, 103, 450, 455

SN 1987, сверхновая 38

SN 1997ff, сверхновая 74, 76

Supernova Cosmology Project, исследовательская  
группа 69–73, 83

Supernova Legacy Survey, обзор 78

**V**SA, эксперимент по изучению микроволнового  
фона 395

**W**ide Synoptic Legacy Survey, обзор 504

WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe),  
космический аппарат 176, 395–398, 420–422,  
449, 527

$\zeta$  Близнец, звезда 38

$\zeta$  Змееносца, звезда 130