

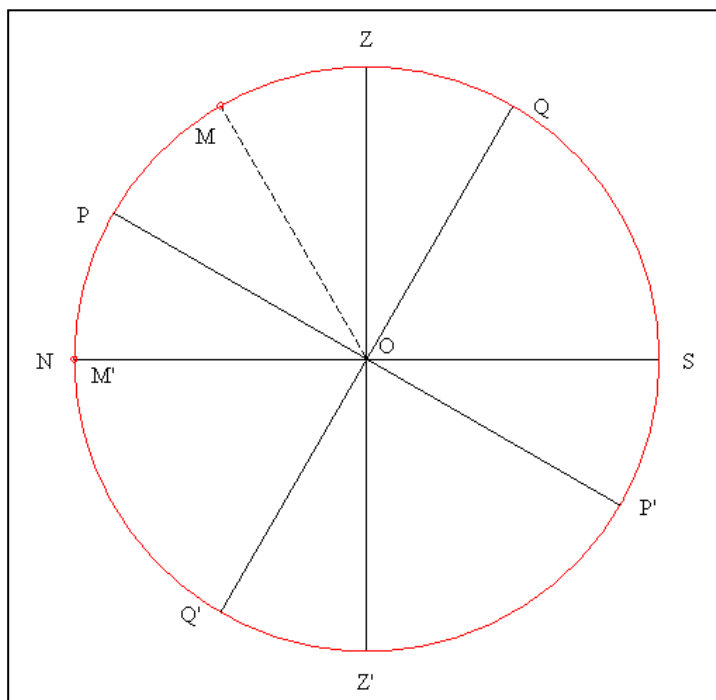
★ III этап республиканской олимпиады по астрономии ★

2–6 января 2007 года

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО ТУРА

❶ «Большие и малые круги»

Поскольку альмукантарат (малый круг небесной сферы, параллельный плоскости математического горизонта) звезды равен ее вертикалу (большому полуокружению, проходящему через зенит и надир), то высота звезды в верхней кульминации $h_M = 60^\circ$. В нижней кульминации альмукантарат звезды вдвое больше, чем в верхней кульминации и совпадает с математическим горизонтом. Поэтому высота звезды в нижней кульминации $h_{M'} = 0$. Учитывая тот факт, что обе кульминации по одну (северную) сторону от зенита (азимуты равны), строим сечение небесной сферы плоскостью небесного меридиана.



Из чертежа следует: склонение звезды $\delta = 60^\circ$, географическая широта места наблюдения: $\varphi = \frac{h_M + h_{M'}}{2} = 30^\circ$.

Ответ: $\delta = 60^\circ$, $\varphi = 30^\circ$

❷ «Галилеевы спутники» В задаче речь идет об измерении в 1675 году датским астрономом Оле Ремером скорости света по запаздыванию выхода из тени Юпитера его галилеевых спутников (Ио, Каллисто, Ганимед и Европа), обусловленному конечностью распространения света. Физически время запаздывания получается вследствие разности расстояний от Земли до Юпитера в противостоянии и квадратуре. При проведении оценки данного времени эллиптичностью орбит Земли и Юпитера пренебрегаем.

Расстояние от Земли до Юпитера в противостоянии равно разности больших полуосей их орбит:

$$r_p = a_{Ю} - a_{\oplus} = 5,203 - 1,000 = 4,203(a.e.).$$

Расстояние от Земли до Юпитера в квадратуре находим по формуле:

$$r_Q = \sqrt{(a_{Ю})^2 + (a_{\oplus})^2} = \sqrt{(5,203)^2 - 1,000^2} = 5,106 \text{ (a.e.)}.$$

Разность расстояний от Земли до Юпитера в квадратуре и противостоянии равна:

$$\Delta r = r_Q - r_P = 0,903 \text{ a.e.} = 135088405 \text{ км}.$$

Рассчитываем время запаздывания:

$$\Delta t = \frac{\Delta r}{c} = \frac{135088405}{300000} = 450 \text{ (с)}.$$

3 «Третья космическая скорость на Марсе» Третью космическую скорость рассчитываем (без учета вращения Марса вокруг своей оси) по формуле:

$$V_3 = \sqrt{V_{\text{дон}}^2 + V_2^2},$$

где $V_{\text{дон}}$ – дополнительная скорость, которую надо сообщить телу относительно Марса, чтобы оно полетело относительно Солнца по параболе; V_2 – вторая космическая скорость на Марсе.

Для определения дополнительной скорости в перигелии и афелии рассчитаем скорость движения Марса в данных точках своей орбиты.

$$\begin{aligned} V_{\Pi} &= \frac{2\pi a_M}{T_M} \sqrt{\frac{1+e_M}{1-e_M}} = \frac{2\pi \cdot 1,524 \cdot 149600000000}{687,0 \cdot 86400} \sqrt{\frac{1+0,0934}{1-0,0934}} = \\ &= 26504 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right) = 26,504 \frac{\text{км}}{\text{с}}, \\ V_A &= \frac{2\pi a_M}{T_M} \sqrt{\frac{1-e_M}{1+e_M}} = \frac{2\pi \cdot 1,524 \cdot 149600000000}{687,0 \cdot 86400} \sqrt{\frac{1-0,0934}{1+0,0934}} = \\ &= 21976 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right) = 21,976 \frac{\text{км}}{\text{с}}. \end{aligned}$$

Параболическую (по отношению к Солнцу) скорость в перигелии и афелии находим по формулам:

$$\begin{aligned} V_{n\Pi} &= \frac{2\pi a_M}{T_M} \sqrt{\frac{2}{1-e_M}} = \frac{2\pi \cdot 1,524 \cdot 149600000000}{687,0 \cdot 86400} \sqrt{\frac{2}{1-0,0934}} = \\ &= 35845 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right) = 35,845 \frac{\text{км}}{\text{с}}, \\ V_{nA} &= \frac{2\pi a_M}{T_M} \sqrt{\frac{2}{1+e_M}} = \frac{2\pi \cdot 1,524 \cdot 149600000000}{687,0 \cdot 86400} \sqrt{\frac{2}{1+0,0934}} = \\ &= 32640 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right) = 32,640 \frac{\text{км}}{\text{с}}. \end{aligned}$$

Дополнительная скорость в перигелии и афелии равна:

$$V_{\text{дон}\Pi} = V_{n\Pi} - V_{\Pi} = 9,342 \frac{\text{км}}{\text{с}},$$

$$V_{\text{дон}A} = V_{nA} - V_A = 10,664 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Отсюда видно, что старт из перигелия требует меньшей дополнительной скорости, поэтому $V_{\text{дон}} = V_{\text{дон II}} = 9,342 \frac{\text{км}}{\text{с}}$.

Вторая космическая скорость на Марсе:

$$V_2 = \sqrt{\frac{2GM_M}{R_M}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 0,107 \cdot 5,973 \cdot 10^{24}}{3393000}} =$$

$$= 5013 \left(\frac{\text{м}}{\text{с}} \right) = 5,013 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

Третья космическая скорость на Марсе, таким образом, равна:

$$V_3 = \sqrt{9,342^2 + 5,013^2} = 10,602 \left(\frac{\text{км}}{\text{с}} \right).$$

Ответ: $V_3 = 10,602 \frac{\text{км}}{\text{с}}$.

4 «Источник солнечной энергии» В XIX веке считалось, что источник солнечной энергии - его гравитационное сжатие. Однако, в начале XX века данные геологических исследований (процентное содержание свинца как продукта естественного радиоактивного распада) показали, что возраст земной коры не меньше 3 млрд. лет. Возник вопрос, каков должен быть темп изменения радиуса Солнца вследствие его гравитационного сжатия, чтобы его энерговыделение соответствовало известному значению солнечной постоянной.

Проведем оценку запасов гравитационной энергии Солнца по формуле $W \sim -GM_{\odot}^2/R_{\odot}$ (коэффициент пропорциональности не изменит порядок). Мощность излучения Солнца определим по формуле:

$$P = 4\pi \cdot a^2 \cdot b = 4\pi \cdot 149\,600\,000\,000^2 \cdot 1370 = 3,85 \cdot 10^{26} \text{ Вт}.$$

Энергия, излученная Солнцем при уменьшении его радиуса в два раза до современного значения:

$$W = W_1 - W_2 = -\frac{GM_{\odot}^2}{2R_{\odot}} - \left(-\frac{GM_{\odot}^2}{R_{\odot}} \right) = \frac{GM_{\odot}^2}{2R_{\odot}} =$$

$$= \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (1,99 \cdot 10^{30})^2}{2 \cdot 696000000} = 1,898 \cdot 10^{41} \text{ (Дж)}.$$

Время, необходимое для этого (оценка!):

$$\Delta t = \frac{W}{P} = \frac{1,898 \cdot 10^{41}}{3,85 \cdot 10^{26}} = 4,92 \cdot 10^{14} \text{ (с)} = 5,70 \cdot 10^9 \text{ суток} = 15,6 \text{ млн. лет}.$$

Оценим время, в течение которого размеры Солнца уменьшились от одной астрономической единицы до 696 000 км:

$$\Delta t_0 = \frac{-\frac{GM_{\odot}^2}{a} - \left(-\frac{GM_{\odot}^2}{R_{\odot}} \right)}{P} = 31,07 \text{ млн. лет}.$$

Эта величина существенно меньше 3 млрд. лет, что опровергает гипотезу о только гравитационных источниках солнечной энергии.

Ответ: $\Delta t = 15,6$ млн. лет.

5 «Удаляющиеся квазары» Совершенно очевидно, что речь идет о релятивистском эффекте Доплера, так как скорости квазаров не пропорциональны их красным смещениям. В этом случае используем формулу:

$$\frac{V}{c} = \frac{z^2 + 2z}{z^2 + 2z + 2}.$$

Из условия задачи: $z_1 = 2z_2$, $V_1 = 4V_2/3$.

Поскольку:
$$\begin{cases} \frac{V_1}{c} = \frac{z_1^2 + 2z_1}{z_1^2 + 2z_1 + 2} \\ \frac{V_2}{c} = \frac{z_2^2 + 2z_2}{z_2^2 + 2z_2 + 2} \end{cases}, \text{ то: } \frac{4}{3} = \frac{4z_2^2 + 4z_2}{4z_2^2 + 4z_2 + 2} \cdot \frac{z_2^2 + 2z_2 + 2}{z_2^2 + 2z_2}.$$

Далее:

$$2(2z_2^2 + 2z_2 + 1)(z_2 + 2) = 3(z_2^2 + 2z_2 + 2)(z_2 + 1),$$

$$z_2^3 + 3z_2^2 - 2z_2 - 2 = 0,$$

$$z_2^3 - z_2^2 + 2z_2^2 - 2z_2 + 2z_2^2 - 2 = 0,$$

$$z_2^2(z_2 - 1) + 2z_2(z_2 - 1) + 2(z_2 - 1) = 0,$$

$$(z_2 - 1)(z_2^2 + 2z_2 + 2) = 0.$$

Имеем один действительный корень: $z_2 = 1$, следовательно: $z_1 = 2$. Рассчитываем скорости квазаров: $V_1 = 4c/3 = 240\,000$ км/с, $V_2 = 3c/5 = 180\,000$ км/с. Расстояние до квазаров определим по формуле: $V = H \cdot r$, откуда: $r_1 = 240\,000/72 = 3300$ Мпк и $r_2 = 180\,000/72 = 2500$ Мпк.

Ответ: $r_1 = 240\,000/72 = 3300$ Мпк и $r_2 = 180\,000/72 = 2500$ Мпк.

Баллы по задачам

Задачи 1-5	по 5 баллов за каждую	Сумма: 25 баллов
------------	-----------------------	------------------

С.С. Секержицкий

Дорогие друзья!

Мы рады сообщить Вам об открытии официального сайта Белорусских астрономических олимпиад. Ждем Вас на нашем сайте.

Ассоциация «Белорусские астрономические олимпиады»

www.belastro.org

