

BLR-3 A-1 C-1

BLR-3 A-1 C
Syrakovash Artsemi

Data Analysis

Data Analysis 1: Scaling Relations

Cover sheet

Please return this cover sheet together with all the related question sheets.

DA1: Масштабные соотношения (75 баллов)

Пожалуйста, прочитайте общие инструкции перед началом работы.

Сpirальные галактики — дисковые вращающиеся структуры, динамическое состояние которых описывается кривыми вращения, определяющими среднюю скорость вращения диска в зависимости от расстояния до центра (рис. 1, кривая B). Интересной особенностью является плоский участок кривой, который объясняется наличием тёмной материи. В её отсутствие скорость вращения убывала бы по кривой A.

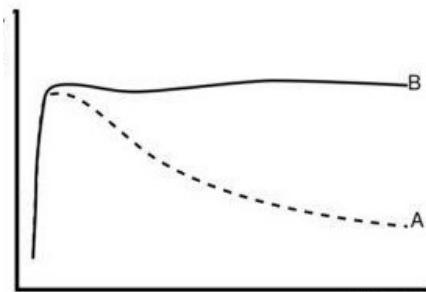


Рис. 1. Кривые вращения: зависимость круговой скорости от радиуса

Для дисковых галактик замечена сильная корреляция между собственной светимостью галактики и асимптотической скоростью вращения (скоростью вращения на краю — R_{\max}), которая известна как соотношение Талли-Фишера. Эта связь существует и в случае, когда светимость определена в какой-либо спектральной полосе. На рис. 2 показана зависимость абсолютной звёздной величины галактик некоторого скопления в фильтре K от $\log_{10}(V_{\max})$. Сплошная линия на графике — наилучшее линейное приближение указанной зависимости.

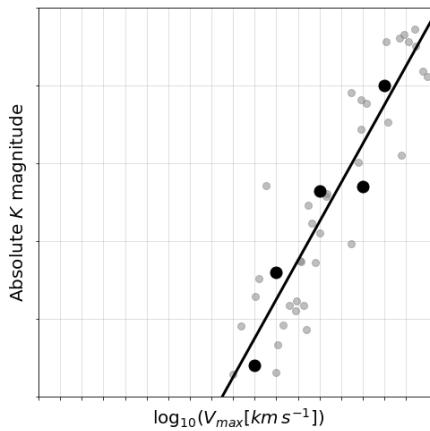


Рис. 2. Зависимость абсолютной звёздной величины в фильтре K от $\log_{10}(V_{\max} [\text{km s}^{-1}])$. Соотношение Талли-Фишера. Каждая точка отвечает некоторой галактике. Данные для 5 выделенных галактик приводятся далее в части 1.2.

Data Analysis



BLR-3 A-1 Q-2

Q1-2
BLR (Belarus)

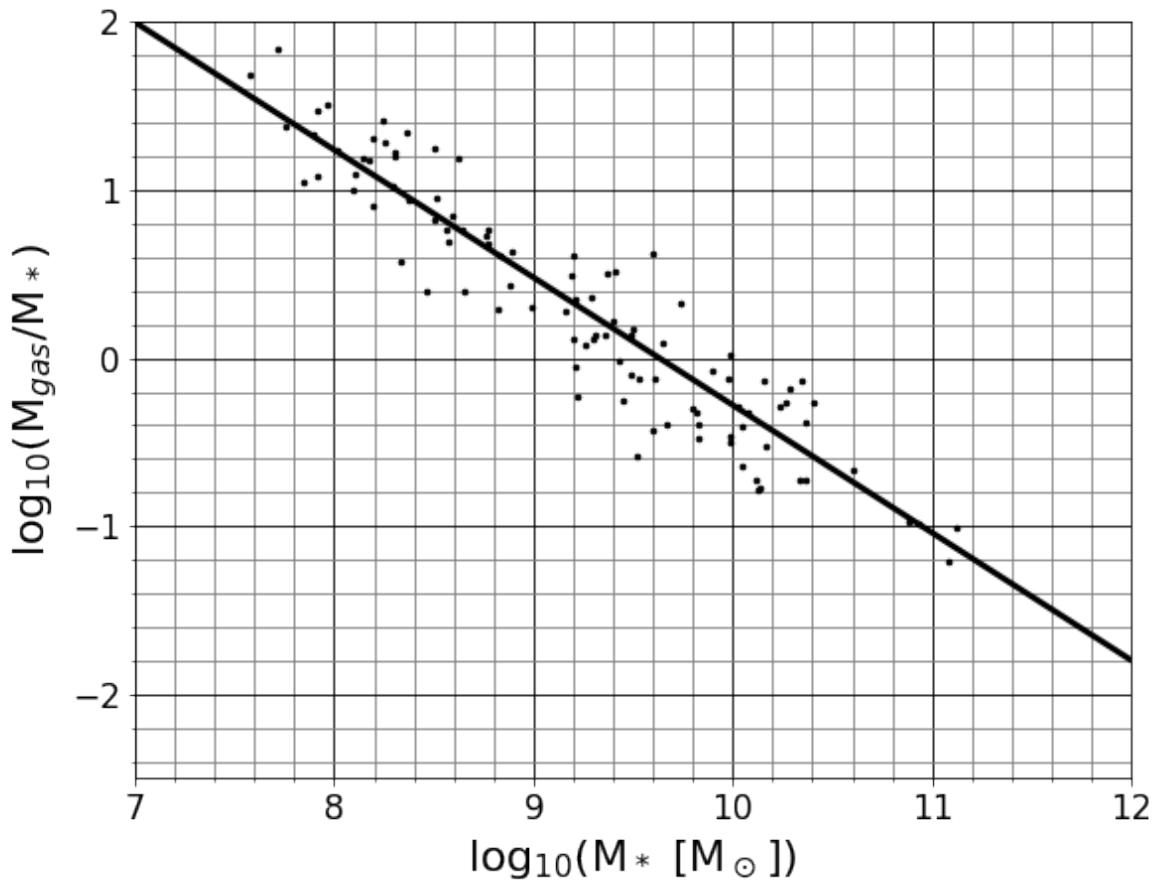


Рис. 3. Соотношение между массовой долей галактического газа и массой звёзд

Другому соотношению посвящён рис. 3: диски с большей массой звёзд (M_*), как правило, имеют меньшую массовую долю газа (M_{gas}/M_*).

Вам предстоит определить физические параметры галактик используя вышеописанные масштабные соотношения. Исходите из следующих предположений и обозначений:

- Для всех галактик V_{max} измерена на одном и том же радиусе R_{max} на плоском участке кривой вращения далеко за пределами звёздного диска.
- M_{dm} — масса тёмной материи внутри шара радиусом R_{max} , M_{tot} — суммарная масса всех компонент (газа, звёзд и тёмной материи).
- Все галактики имеют схожие звёздные населения¹, а межзвёздный газ не взаимодействует с излучением звёзд.
- Рассматриваемое скопление галактик находится достаточно далеко, расстояние до него существенно больше размеров скопления.
- Сила гравитационного взаимодействия сферически-симметричного распределения масс с пробной частицей на расстоянии r от центра распределения равна силе гравитационного

Data Analysis



BLR-3 A-1 Q-3

Q1-3
BLR (Belarus)

взаимодействия материальной точки массы $M(\leq r)$ (где M - масса, заключённая внутри сферы радиуса r), расположенной в центре шара, с пробной частицей.

¹Термин «звёздное население» относится к относительным количествам различных типов звёзд в галактике.

Часть 1 (20 баллов)

1.1 Используя рис. 3, определите параметры зависимости $M_{gas} = a \times M_*^b$ 5.0pt

$$a = ?$$

$$b = ?$$

Data Analysis



BLR-3 A-1 Q-4

Q1-4
BLR (Belarus)

- 1.2** На графике для соотношения Талли-Фишера были выделены 5 галактик, данные для которых представлены ниже. Используйте эти данные для вычисления параметров соотношения Талли-Фишера методом наименьших квадратов. 15.0pt

Указание: рассматривайте $\log_{10}(V_{\max})$ как переменную x и K — как y .

| V_{\max} [km/s] | K [mag] |
|-------------------|-----------|
| 79.4 | -16.8 |
| 100.1 | -19.2 |
| 158.5 | -21.3 |
| 251.2 | -21.4 |
| 316.2 | -24.0 |

$$K = c \times \log_{10}(V_{\max}) + d$$

$$c = ?$$

$$d = ?$$

Часть 2 (16 баллов)

Для двух галактик, G1 и G2, в скоплении зарегистрированные видимые звездные величины:

$$k_1 = 19.2 \quad ; \quad k_2 = 25.2$$

Используя эту информацию и соотношения, определенные в Части 1, найдите правильные показатели в следующих уравнениях:

2.1
$$\frac{M_{*1}}{M_{*2}} = 10^e \quad ; \quad e = ?$$
 6.0pt

2.2
$$\frac{M_{gas1}}{M_{gas2}} = 10^f \quad ; \quad f = ?$$
 4.0pt

2.3
$$\frac{M_{tot1}}{M_{tot2}} = 10^g \quad ; \quad g = ?$$
 6.0pt

Часть 3 (15 баллов)

Data Analysis



BLR-3 A-1 Q-5

Q1-5

BLR (Belarus)

3.1

15.0pt

| Галактика | Видимая звёздная величина k | $M_{gas}[M_\odot]$ | $M_* [M_\odot]$ | $M_{dm}[M_\odot]$ | $M_{tot}[M_\odot]$ |
|-----------|-------------------------------|--------------------|-----------------|-------------------|-----------------------|
| G_1 | 19.2 | | | | 4.39×10^{11} |

Заполните пропуски в таблице, если известно, что для галактики G_1 отношение массы тёмной материи к массе барионной материи, заключённых внутри шара радиусом R_{\max} , равно 6.82.

Часть 4 (24 балла)

4.1

Пусть систематическая погрешность измерения видимой звёздной величины составляет $\sigma_{sys} = \pm 0.2$ ввиду неточностей калибровки ПЗС-матрицы. Тогда $k_1 = 19.2 \pm 0.2$, то есть k_1 , вероятно, лежит в «доверительном» интервале [19.0, 19.4]. Аналогично для k_2 . Найдите «доверительный» интервал для показателя степени e в отношении $\frac{M_{*1}}{M_{*2}} = 10^e$ (ранее оцененном в вопросе 2.1), рассмотрев наибольшие возможные отклонения k_1 и k_2 от средних значений.

4.0pt

$$e \in [?, ?]$$

4.2

Однако и сами соотношения выполняются не с абсолютной точностью. Для заданного значения K соотношение Талли-Фишера даёт единственное значение $\log_{10}(V_{\max})$, в то время как разумнее говорить о некотором диапазоне возможных значений, окружающем среднее — предсказанное значение. Будем называть это статистической погрешностью σ_{stat} . Оцените статистическую погрешность для предсказания $\log_{10}(V_{\max})$ по значениям K при помощи соотношения Талли-Фишера, параметры которого определялись в вопросе 1.2. Для этого вычислите для каждой галактики отклонение между предсказанным и измеренным значениями $\log_{10}(V_{\max})$, и положите σ_{stat} равным удвоенному RMS[†] (среднему квадратическому) этих отклонений.

10.0pt

$$\sigma_{stat} = ?$$

[†]RMS набора значений — это квадратный корень из среднего арифметического квадратов этих значений.

4.3

Найдите «доверительный» интервал для показателя степени g в отношении $\frac{M_{tot1}}{M_{tot2}} = 10^g$, рассмотрев наибольшие возможные отклонения параметров в силу систематических и статистических погрешностей:

10.0pt

$$g \in [?, ?]$$

Data Analysis



BLR-3 A-1 Q-1

Q1-1

English (Official)

Data Analysis 1: Scaling Relations (75 points)

Please read the general instructions in the separate envelope before you start this problem.

Spiral galaxies are disk-like rotating structures, whose dynamical state is fairly grasped by the so-called rotation curves, quantifying the mean rotational velocity of the disk at different distances from the center (see Figure 1, curve B). An interesting feature is the flat region of the curve, which is attributed to the presence of dark matter. Without it, rotation velocities would drop steadily at large radii from the center, as depicted in curve A.

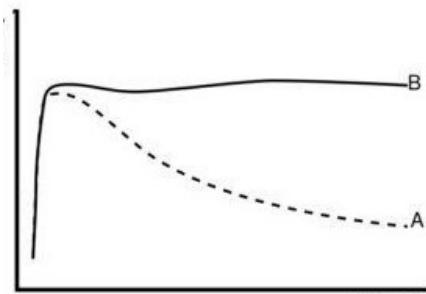


Figure 1: Rotation curves. Circular velocity (Y-axis) vs Radius (X-axis)

In disk galaxies a strong correlation has been observed between the intrinsic luminosity of the whole galaxy and the asymptotic rotational velocity (as given by the rotation curve for the outer edge of the galaxy i.e. R_{\max}), a result that is known as the Tully-Fisher relation. This relation also holds if you use the luminosity in a specific band. This is shown on Figure 2 for a number of galaxies in a galaxy cluster. Every dot is a galaxy, and the solid line is the best-fit linear relation between absolute magnitude in K band and $\log_{10}(V_{\max})$ for the whole sample.

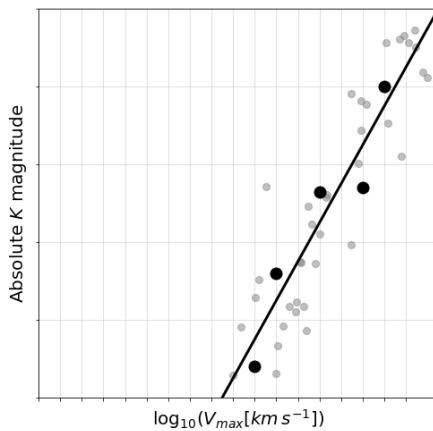


Figure 2: Absolute magnitude in K band vs $\log_{10}(V_{\max} [\text{km s}^{-1}])$. Tully-Fisher relation for several galaxies. Every dot represents a galaxy. The dark points are five selected galaxies, for which we will provide some numbers in part 1.2.

Data Analysis



BLR-3 A-1 Q-2

Q1-2

English (Official)

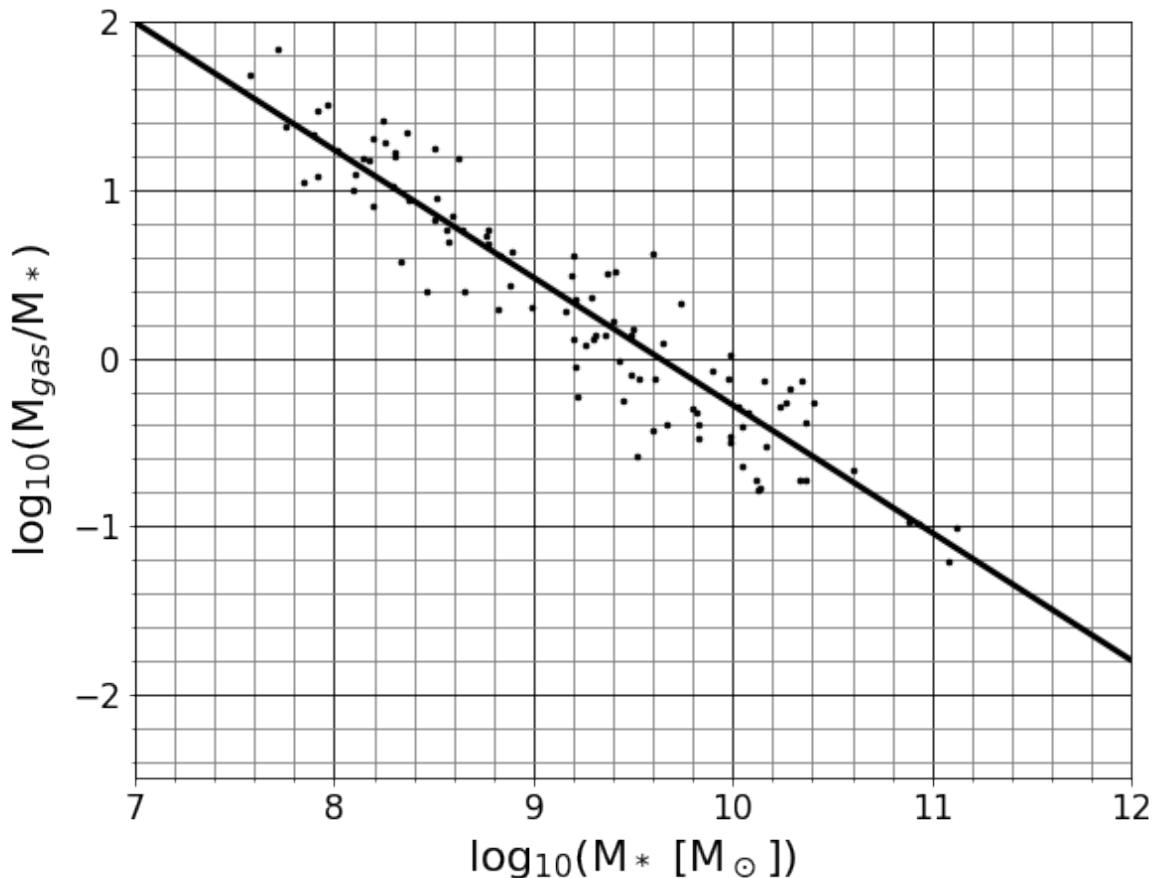


Figure 3: Gas fraction vs stellar mass.

Another interesting trend is shown in Figure 3: disks with larger stellar masses (M_*) tend to have smaller gas fractions (M_{gas}/M_*).

In the following questions you will be asked to extract physical information about the galaxies using the scaling relations just introduced. Consider the following guidelines:

- Assume that V_{max} was measured at the same radius for all galaxies (R_{max}), in the flat part of the rotation curves and well beyond the end of the stellar disk.
- Use M_{dm} for the dark matter mass up to R_{max} and M_{tot} for the sum of all components.(gas, stars and dark matter)
- Assume that all galaxies have identical stellar populations¹, and assume that the gaseous component does not interact with the stellar light .
- The galaxy cluster is far away. Its distance is much larger than the cluster size.
- In spherically-symmetric mass distributions, to infer the gravitational effect on a particle at distance r from the center, it suffices to consider the total mass enclosed up to that radius $M(\leq r)$ as if it were placed at the very center of the distribution.

Data Analysis



BLR-3 A-1 Q-3

Q1-3

English (Official)

¹The term stellar population refers to the type of stars that are present in a galaxy, and the relative amount of each type with respect to the total number of stars.

Part 1 (20 points).

- 1.1** From an analysis of Figure 3, find the appropriate constants in the following relation: $M_{\text{gas}} = a \times M_*^b$ 5.0pt

$$a = ?$$

$$b = ?$$

- 1.2** In the plot of the Tully-Fisher relation there are 5 highlighted points. Data for these 5 galaxies is given in the following table. Use this dataset to find the appropriate constants for TF relation presented below the table, by means of a linear fit using the method of least squares. 15.0pt

Note: Treat $\log_{10}(V_{\text{max}})$ as the x variable and K as the y variable in the linear fit.

| $V_{\text{max}}[\text{km/s}]$ | $K[\text{mag}]$ |
|-------------------------------|-----------------|
| 79.4 | -16.8 |
| 100.1 | -19.2 |
| 158.5 | -21.3 |
| 251.2 | -21.4 |
| 316.2 | -24.0 |

$$K = c \times \log_{10}(V_{\text{max}}) + d$$

$$c = ?$$

$$d = ?$$

Part 2 (16 points).

For two galaxies, G1 and G2, in the cluster, the recorded *apparent* magnitudes are:

$$k_1 = 19.2 \quad ; \quad k_2 = 25.2$$

Using this information and the relations calibrated in Part 1 find the correct exponents in the following equations:

- 2.1** $\frac{M_{*1}}{M_{*2}} = 10^e \quad ; \quad e = ?$ 6.0pt

Data Analysis



BLR-3 A-1 Q-4

Q1-4

English (Official)

2.2

4.0pt

$$\frac{M_{gas1}}{M_{gas2}} = 10^f \quad ; \quad f = ?$$

2.3

6.0pt

$$\frac{M_{tot1}}{M_{tot2}} = 10^g \quad ; \quad g = ?$$

Part 3 (15 points).

3.1

15.0pt

| Galaxy | Apparent magnitude k | $M_{gas}[M_\odot]$ | $M_* [M_\odot]$ | $M_{dm}[M_\odot]$ | $M_{tot}[M_\odot]$ |
|--------|------------------------|--------------------|-----------------|-------------------|-----------------------|
| G_1 | 19.2 | | | | 4.39×10^{11} |

Fill in the missing values in the table using the fact that for galaxy G_1 , the dark-to-baryonic mass ratio up to R_{\max} is 6.82.

Part 4 (24 points).

4.1

Consider a systematic uncertainty of $\sigma_{sys} = \pm 0.2$ in each apparent magnitude due to CCD calibration errors. Then k_1 must be read as $k_1 = 19.2 \pm 0.2$, i.e., the only thing we know is that k_1 most likely lies in the interval $[19.0, 19.4]$. The same goes for k_2 .

Recalculate the exponent in the scaling relation $\frac{M_{*1}}{M_{*2}} = 10^e$ (found in 2.1), expressing e as an interval estimated by considering the extreme possible variations in k_1 and k_2 .

$$e \in [?, ?]$$

Data Analysis



BLR-3 A-1 Q-5

Q1-5

English (Official)

- 4.2** Now we consider that there is always a natural spread of the data around any relation. For instance, for a given value of the K magnitude the TF relation gives a single value of $\log_{10}(V_{\max})$, but it would be more realistic to report an interval of plausible values, derived from the natural spread of the data around the mean TF relation. We call this the statistical uncertainty, σ_{stat} .
Estimate the statistical uncertainty if $\log_{10}(V_{\max})$ is inferred from K using the TF relation from question 1.2. For this, consider for each point the difference between the value of $\log_{10}(V_{\max})$ estimated from K using your linear fit and the actual measurement of $\log_{10}(V_{\max})$, and take σ_{stat} as two times the root mean square (RMS) of these differences[†].

$$\sigma_{\text{stat}} = ?$$

[†]The RMS of a set of values is the square root of the arithmetic mean of the squares of those values.

- 4.3** Recalculate the exponent in the scaling relation $\frac{M_{\text{tot1}}}{M_{\text{tot2}}} = 10^g$, expressing g as an interval estimated by considering the extreme possible variations arising from both the systematic and statistical uncertainties:

$$g \in [?, ?]$$

Data Analysis



BLR-3 A-1 A-1

A1-1
BLR (Belarus)

DA1: Масштабные соотношения (75 баллов)

Часть 1 (20 баллов)

1.1 (5.0 pt)

$a =$

$b =$

1.2 (15.0 pt)

$c =$

$d =$

Часть 2 (16 баллов)

2.1 (6.0 pt)

$e =$

Data Analysis



BLR-3 A-1 A-2

A1-2
BLR (Belarus)

2.2 (4.0 pt)

$f =$

2.3 (6.0 pt)

$g =$

Часть 3 (15 баллов)

3.1 (15.0 pt)

| Галактика | Видимая звёздная величина k | $M_{gas}[M_\odot]$ | $M_* [M_\odot]$ | $M_{dm}[M_\odot]$ | $M_{tot} [M_\odot]$ |
|-----------|-------------------------------|--------------------|-----------------|-------------------|-----------------------|
| G_1 | 19.2 | | | | 4.39×10^{11} |

Data Analysis



BLR-3 A-1 A-3

A1-3
BLR (Belarus)

Часть 4 (24 балла).

4.1 (4.0 pt)

$$e \in [\quad , \quad]$$

4.2 (10.0 pt)

$$\sigma_{stat} =$$

4.3 (10.0 pt)

$$g \in [\quad , \quad]$$

Data Analysis



BLR-3 A-1 W-1

W1-1

Data Analysis



BLR-3 A-1 W-2

W1-2

do not write on the back of this page

Data Analysis



BLR-3 A-1 W-3

W1-3

Data Analysis



BLR-3 A-1 W-4

W1-4

Data Analysis



BLR-3 A-1 W-5

W1-5

Data Analysis



BLR-3 A-1 W-6

W1-6

Data Analysis



BLR-3 A-1 W-7

W1-7

Data Analysis



BLR-3 A-1 W-8

W1-8

Data Analysis



BLR-3 A-1 W-9

W1-9

do not write on the back of this page

Data Analysis



BLR-3 A-1 W-10

W1-10

Data Analysis



BLR-3 A-1 W-11

W1-11

Data Analysis



BLR-3 A-1 W-12

W1-12

Data Analysis



BLR-3 A-1 W-13

W1-13

Data Analysis



BLR-3 A-1 W-14

W1-14

Data Analysis



BLR-3 A-1 W-15

W1-15