

Полет к Луне

В данной задаче Вам предстоит выполнить расчет траектории полета к Луне, включающей старт с круговой орбиты вокруг Земли, облет Луны и возвращение на Землю. Подобные задачи решались инженерами NASA при подготовке и управлении полетами космических аппаратов «Аполлон».

Будем считать, что космический аппарат движется под действием силы тяжести Земли до попадания в сферу гравитационного действия Луны (ее радиус $r_S = 62600$ км), внутри которой его движение происходит только под действием силы тяжести Луны. Будем также считать орбиту Луны круговой, а траекторию полета — лежащей в ее плоскости.

Масса Земли	$m_E = 5.974 \times 10^{24}$ кг
Масса Луны	$m_M = 7.348 \times 10^{22}$ кг
Радиус орбиты Луны	$d = 384400$ км
Гравитационная постоянная	$G = 8.649 \times 10^{-13}$ км ³ кг ⁻¹ ч ⁻²
Радиус Земли	$R_E = 6378$ км
Радиус Луны	$R_M = 1738$ км
Орбитальная скорость Луны	$V_M = 3644$ км/ч

Космический аппарат находится на круговой орбите радиуса $R_{EO} = 6563$ км вокруг Земли. Через некоторое время третья ступень ракеты-носителя сообщает касательный импульс **в направлении, совпадающем с вращением Луны вокруг Земли**, достаточный для того, чтобы аппарат подошел к границе сферы действия Луны с геоцентрической скоростью $V_{in} = 2636$ км/ч, находясь при этом на расстоянии $d_S = 349700$ км от Земли.

- Изобразите схематически всю траекторию полета в инерциальной геоцентрической системе отсчета.
- Найдите расстояние наибольшего сближения с Луной.
- Какой дополнительный к траектории импульс ΔV (**в км/ч**) должен сообщить аппарату его маршевый двигатель после выхода из сферы действия Луны, чтобы аппарат попал в необходимый коридор входа в атмосферу Земли $5.5^\circ - 7.5^\circ$ на высоте 100 км от ее поверхности? Коридор входа — угол между вектором скорости и нормалью к радиус-вектору.
- Вычислите длительность полета.

Приложение 1: Связь между положением тела на орбите и временем

Эллиптическая орбита

$$\tan(\theta/2) = \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^{1/2} \tan(E/2)$$
$$E - e \sin(E) = M$$
$$M = \left(\frac{GM}{a^3} \right)^{1/2} \tau$$

θ — истинная аномалия, E — эксцентрическая аномалия, M — средняя аномалия, e — эксцентриситет орбиты, a — большая полуось, τ — время после прохождения перицентра.

Гиперболическая орбита

$$\tan(\theta/2) = \left(\frac{e+1}{e-1} \right)^{1/2} \tanh(H/2)$$
$$e \sinh(H) - H = \left[\frac{GM(e-1)^3}{r_p^3} \right]^{1/2} \tau$$

H — гиперболическая аномалия, r_p — расстояние в перицентре.

Приложение 2: Гиперболические функции

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

Полет к Луне

РЕШЕНИЕ

Come and take a trip in my rocket ship
We'll have a lovely afternoon
Kiss the world goodbye and away we fly
Destination moon
Nat King Cole / Dinah Washington "Destination Moon"

До попадания в сферу гравитационного действия Луны, космический аппарат (КА) будет двигаться по сильно вытянутой эллиптической орбите относительно Земли, после попадания — по гиперболе относительно Луны (см. рис. 1). Во время движения КА в сфере действия Луны, Луна перемещается на своей орбите относительно Земли. Поэтому траектория полета будет иметь вид «восьмерки». Траектория с возвратом на Землю, параметры которой будут рассчитаны далее, изображена на рис. 2.

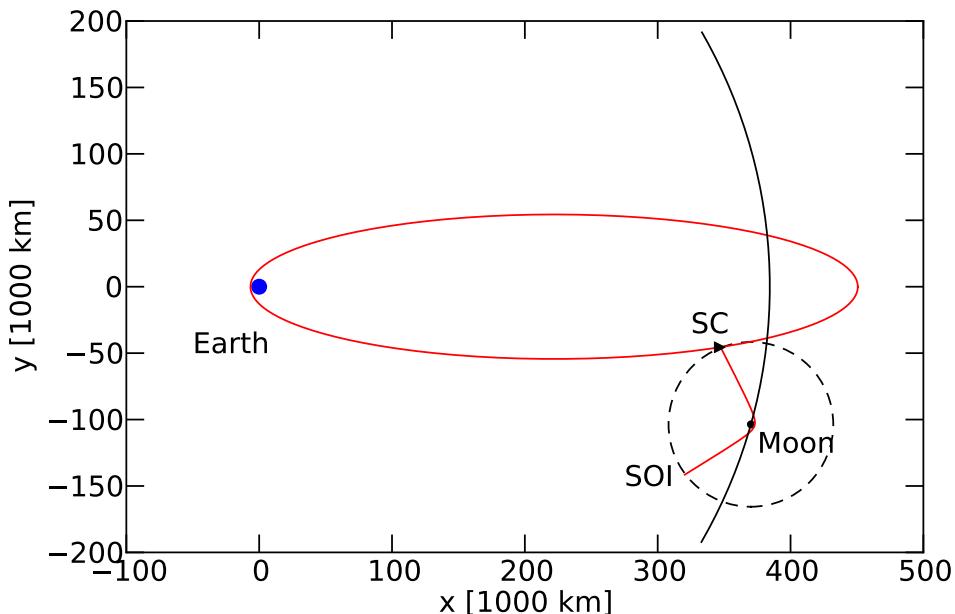


Рис. 1: Траектории космического аппарата: эллиптическая, при отсутствии гравитационного воздействия Луны, и гиперболическая, в сфере действия Луны. Показано положение аппарата на границе сферы действия Луны. Орбитальное движение Луны не отображено. SC — spacecraft, SOI — shpere of influence.

Транслунная траектория

Скорость КА в момент старта с круговой орбиты (V_E):

$$\frac{V_E^2}{2} - \frac{Gm_E}{R_{EO}} = \frac{V_{in}^2}{2} - \frac{Gm_E}{d_s} \implies V_E = 39395 \text{ км/ч.} \quad (1)$$

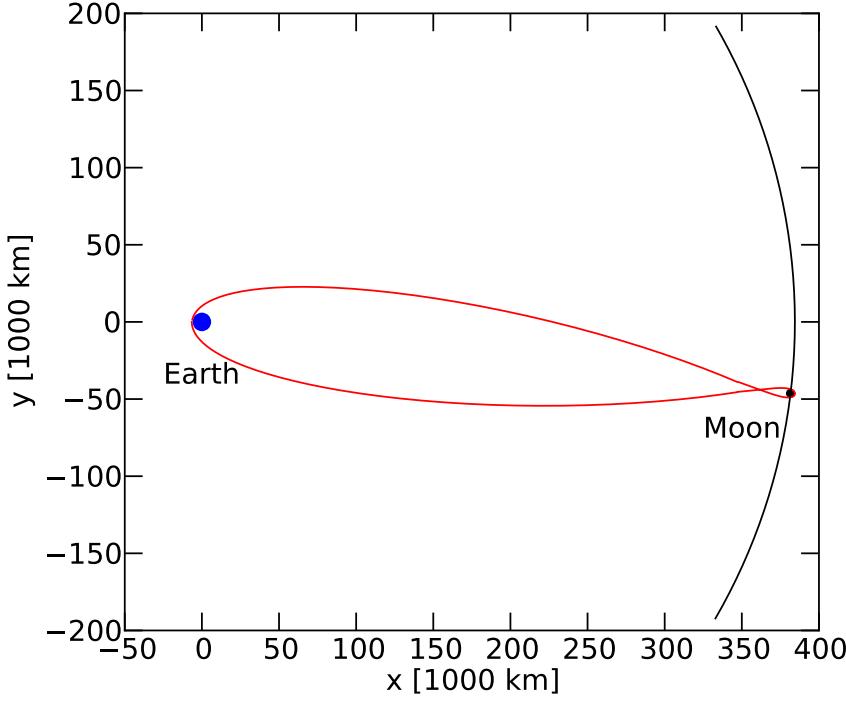


Рис. 2: Траектория полета космического аппарата в геоцентрической инерциальной системе координат.

Угол (α) между вектором скорости и радиус-вектором в момент попадания в сферу действия Луны (рис. 3):

$$V_E R_{EO} = V_{in} d_s \sin \alpha \implies \alpha = 16.2888^\circ. \quad (2)$$

Угол (β) между расстоянием от КА до Луны на границе сферы ее действия (r_s) и расстоянием от Земли до Луны (d):

$$d_s^2 = r_s^2 + d^2 - 2r_s d \cos \beta \implies \cos \beta = \frac{r_s^2 + d^2 - d_s^2}{2r_s d_s} \implies \beta = 52.3584^\circ. \quad (3)$$

Угол (γ) между расстояниями от КА до Земли (d_s) и до Луны (r_s) на границе сферы действия Луны:

$$\frac{d}{\sin \gamma} = \frac{d_s}{\sin \beta} \implies \sin \gamma = \frac{d}{d_s} \sin \beta \implies \gamma = 119.492^\circ. \quad (4)$$

Угол (ε) между векторами \mathbf{V}_{in} и \mathbf{V}_M :

$$\varepsilon = 180^\circ - (90^\circ - \beta) - \delta = 65.5621^\circ, \quad (5)$$

где

$$\delta = 180^\circ - (\gamma - \alpha) = 76.7963^\circ. \quad (6)$$

V_s — начальная сelenоцентрическая скорость КА после попадания в сферу действия Луны (рис. 4):

$$V_s^2 = V_M^2 + V_{in}^2 - 2V_M V_{in} \cos \varepsilon \implies V_s = 3505.2 \text{ км/ч}. \quad (7)$$

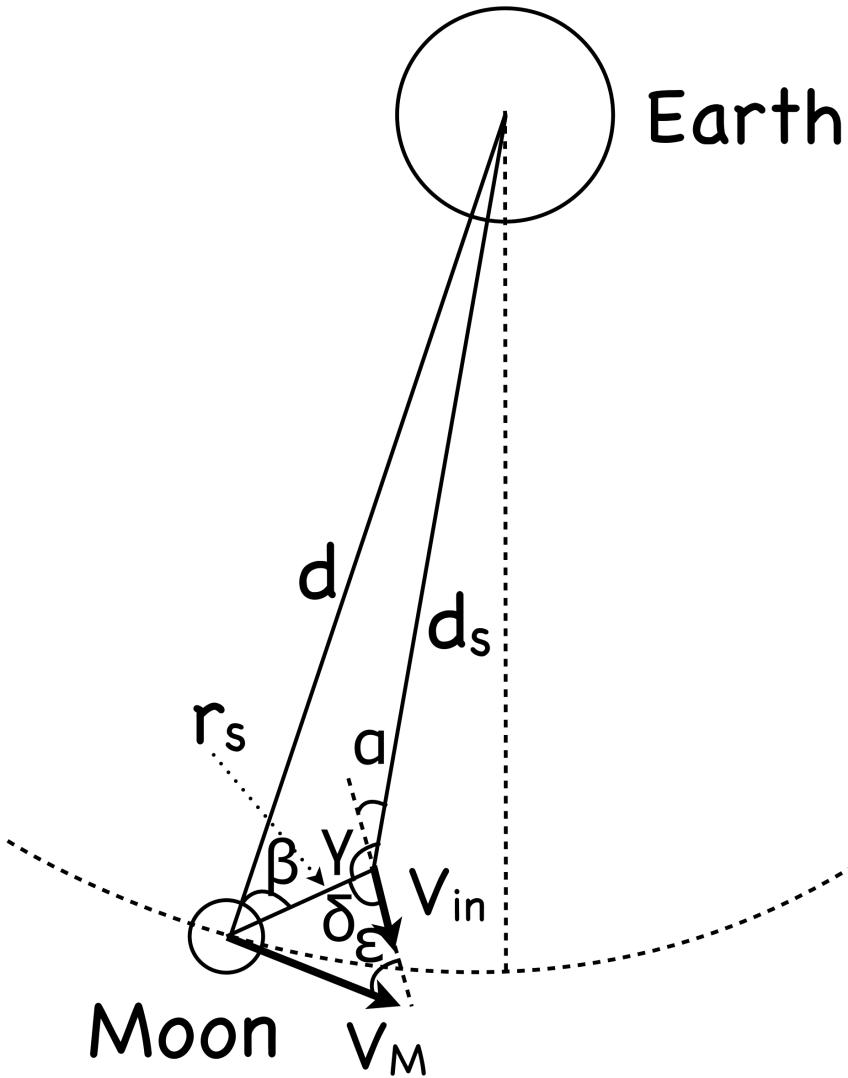


Рис. 3: Положение и направление движения космического аппарата в момент входа в сферу действия Луны.

Угол (ζ) между векторами \mathbf{V}_S и \mathbf{V}_{in} :

$$\frac{V_M}{\sin \zeta} = \frac{V_S}{\sin \varepsilon} \implies \sin \zeta = \frac{V_M}{V_S} \sin \varepsilon \implies \zeta = 71.2144^\circ \quad (8)$$

Углы между векторами здесь и далее определяются так, как обозначено на рисунках.

Угол (ι) между сelenоцентрическим радиус-вектором КА и вектором \mathbf{V}_S :

$$\iota = \delta - \zeta = 5.5820^\circ. \quad (9)$$

Находим расстояние и скорость в периселении (r_p и V_p):

$$\left\{ \begin{array}{l} r_S V_S \sin \iota = r_p V_p \\ \frac{V_S^2}{2} - \frac{G m_M}{r_S} = \frac{V_p^2}{2} - \frac{G m_M}{r_p} \end{array} \right. \implies r_p = 2902.6 \text{ км}, V_p = 7351.15 \text{ км/ч}. \quad (10)$$

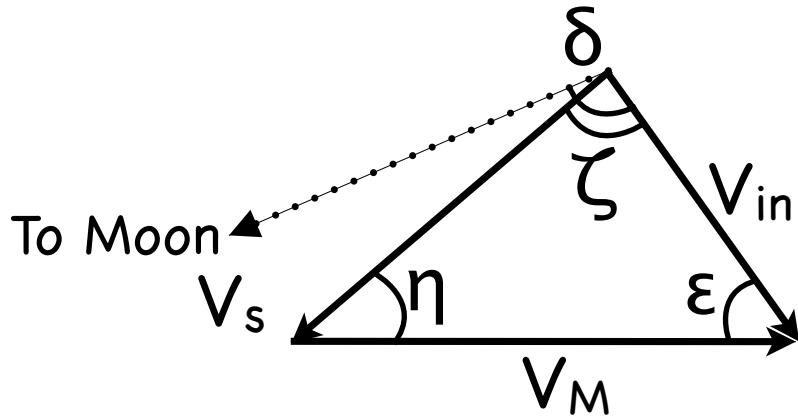


Рис. 4: Треугольник скоростей космического аппарата в момент входа в сферу действия Луны.

Расстояние от КА до поверхности Луны в периселении:

$$h = r_p - R_M = 1165 \text{ км.} \quad (11)$$

Эксцентриситет (e) гиперболической сelenоцентрической орбиты КА:

$$V_p^2 = \frac{Gm_M(1+e)}{r_p} \implies e = \frac{V_p^2 r_p}{Gm_M} - 1 = 1.46809. \quad (12)$$

Угол (ψ), на который повернется вектор сelenоцентрической скорости (угол между асимптотами гиперболы):

$$e = \sec\left(\frac{\psi}{2}\right) \implies \psi = 2\text{arcsec}(e) = 94.132^\circ. \quad (13)$$

Угол (η) между векторами \mathbf{V}_s и \mathbf{V}_M в момент входа КА в сферу действия Луны:

$$\eta = 180^\circ - \zeta - \varepsilon = 43.2235^\circ. \quad (14)$$

V_{out} — геоцентрическая скорость выхода из сферы действия Луны (рис. 5).

При движении КА в сфере действия Луны, его сelenоцентрическая орбита перемещается вместе с орбитальным движением Луны. Направление осей геоцентрической инерциальной системы координат не меняется. Чтобы найти вектор \mathbf{V}_{out} , нужно вычислить угол поворота вектора орбитальной скорости Луны (ϕ) за время пролета КА сферы действия Луны.

Длительность облета Луны

θ_S — истинная сelenоцентрическая аномалия входа (и выхода) в сферу действия Луны:

$$r_S = \frac{r_p(1+e)}{1+e \cos \theta_S} \implies \cos \theta_S = \frac{1}{e} \left[\frac{r_p(1+e)}{r_S} - 1 \right]. \quad (15)$$

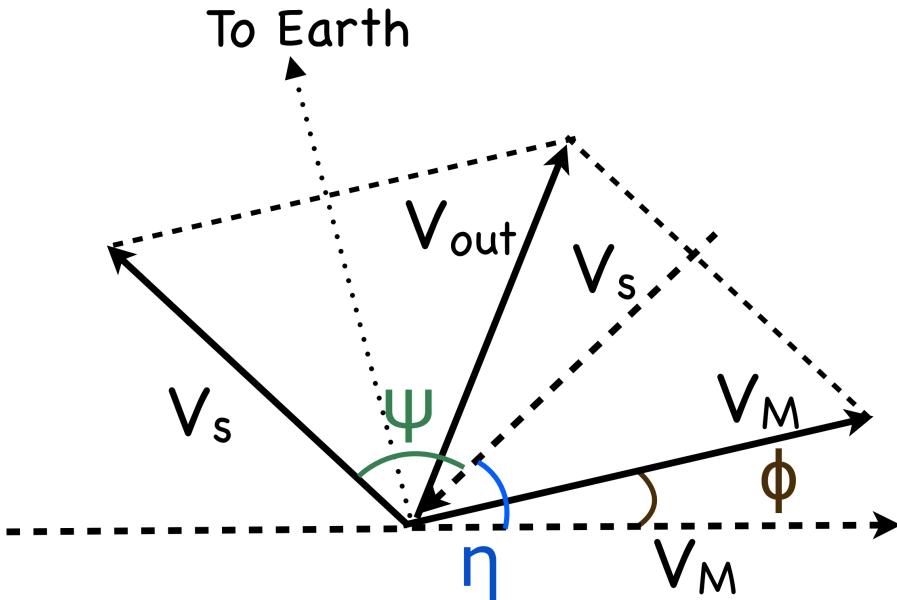


Рис. 5: Векторная диаграмма скоростей космического аппарата в момент выхода из сферы действия Луны.

Гиперболическая аномалия (H_S):

$$\tanh\left(\frac{\mathsf{H}_S}{2}\right) = \left(\frac{e+1}{e-1}\right)^{-1/2} \tan\left(\frac{\theta_S}{2}\right). \quad (16)$$

Время (t_M) облета Луны:

$$t_M = 2(e \sinh \mathsf{H}_S - \mathsf{H}_S) \left[\frac{Gm_M(e-1)^3}{r_p^3} \right]^{-1/2} = 32.1006 \text{ ч.} \quad (17)$$

Траектория возврата

Угол поворота Луны:

$$\phi = \omega_M t_M = \frac{V_M}{d} t_M = 0.304304 \text{ радиан.} \quad (18)$$

Радиальная и тангенциальная компоненты скорости V_{out} :

$$\begin{cases} V_{out}^r &= V_s \sin [\psi + (\eta - \phi)] \\ V_{out}^\tau &= V_M - V_s \cos [\pi - \psi - (\eta - \phi)] \end{cases} \implies V_{out} = \sqrt{(V_{out}^r)^2 + (V_{out}^\tau)^2} = 3580.46 \text{ км/ч.} \quad (19)$$

Селеноцентрический угол (θ) между направлением на Землю и вектором \mathbf{V}_{out} :

$$\cos \theta = \frac{V_{out}^r}{V_{out}} \implies \theta = 31.9768^\circ. \quad (20)$$

Найдем аналогичный угол с центром в КА при его выходе из сферы действия Луны (рис. 6). d_r — расстояние от КА до Земли при его выходе из сферы действия Луны.

$$d_r^2 = d^2 + r_S^2 - 2dr_S \cos(\psi + \eta - \phi - \frac{\pi}{2}) \implies d_r = 331617 \text{ км.} \quad (21)$$

$$\frac{r_s}{\sin \lambda} = \frac{d_r}{\sin(\psi + \eta - \phi - \frac{\pi}{2})} \implies \lambda = 5.40288^\circ, \quad (22)$$

где λ — угол между d_r и d .

Таким образом, $(\theta - \lambda) = 26.574^\circ$ — искомый угол между вектором геоцентрической скорости и направлением на Землю с центром в точке нахождения КА при его выходе из сферы действия Луны.

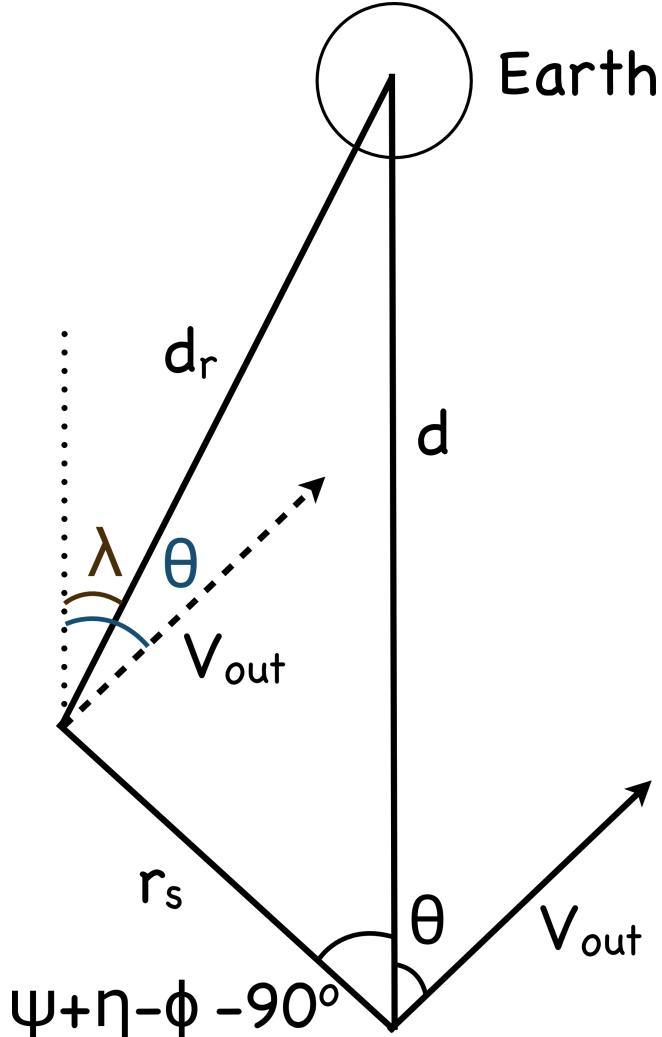


Рис. 6: Положение и направление движения космического аппарата в момент выхода из сферы действия Луны.

Коридор возврата

Найдем расстояние (R_{Ep}) и скорость (V_{Ep}) в перигее при рассчитанных выше параметрах полета в момент выхода из сферы действия Луны. Механическая энергия и момент импульса КА после выхода из сферы действия Луны равны соответствующим величинам в перигее:

$$\begin{cases} \frac{V_{Ep}^2}{2} - \frac{Gm_E}{r_{Ep}} = \frac{V_{out}^2}{2} - \frac{Gm_E}{d_r} \\ R_{Ep}V_{Ep} = V_{out}d_r \sin(\theta - \lambda). \end{cases} \quad (23)$$

Расстояние в перигее:

$$R_{Ep} = \frac{Gm_E(e_2 - 1)}{2E_2} = 28771 \text{ км.} \quad (24)$$

При данном значении расстояния в перигее, КА не сможет войти в атмосферу и вернуться на Землю (см. рис. 7).

Подбираем величину корректирующего импульса ΔV таким образом, чтобы новая геоцентрическая скорость выхода из сферы действия Луны ($V_{out}^{new} = V_{out}^{old} + \Delta V$) удовлетворяла закону сохранения энергии и второму закону Кеплера,

$$\begin{cases} \frac{(V_{out}^{new})^2}{2} - \frac{Gm_E}{d_r} = \frac{V_r^2}{2} - \frac{Gm_E}{R_E + 100 \text{ км}} \\ V_{out}^{new} d_r \sin(\theta - \lambda) = V_r(R_E + 100 \text{ км}) \sin(90^\circ - \nu), \end{cases} \quad (25)$$

и величина угла входа в атмосферу (ν) лежала в пределах допустимого коридора. V_r — скорость входа в атмосферу. При значении $\nu = 6.50^\circ$ (середина коридора) получаем

$$\boxed{\Delta V = -1863 \text{ км/ч.}}$$

Новая траектория изображена на рис. 2. Все допустимые значения корректирующего импульса приведены на графике (рис. 8).

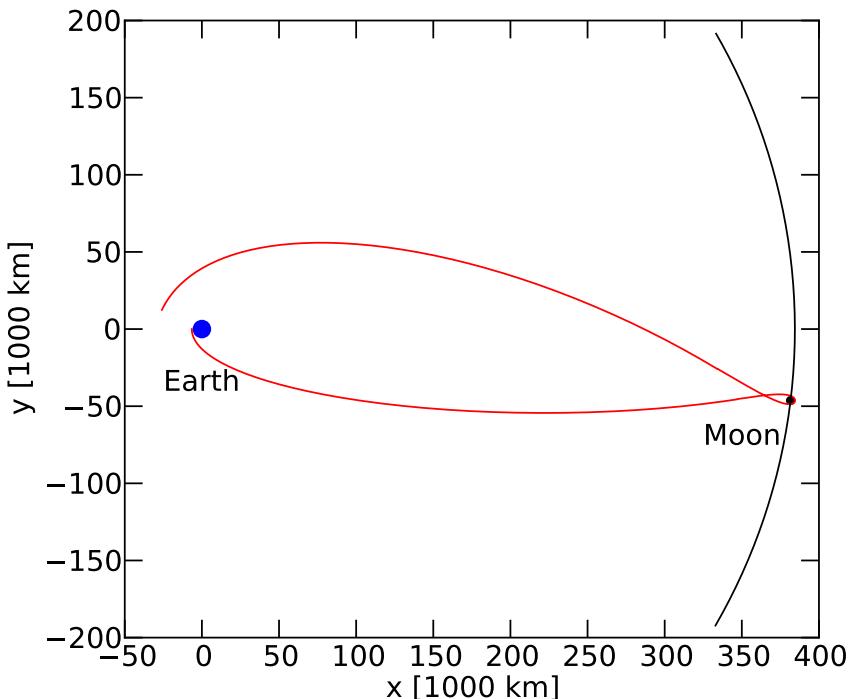


Рис. 7: Траектория возврата космического аппарата без коррекции.

Длительность полета

Земля — Луна

Эксцентризитет орбиты (e_1):

$$V_E^2 = \frac{Gm_E}{R_{EO}}(1 + e_1) \implies e_1 = 0.971291. \quad (26)$$

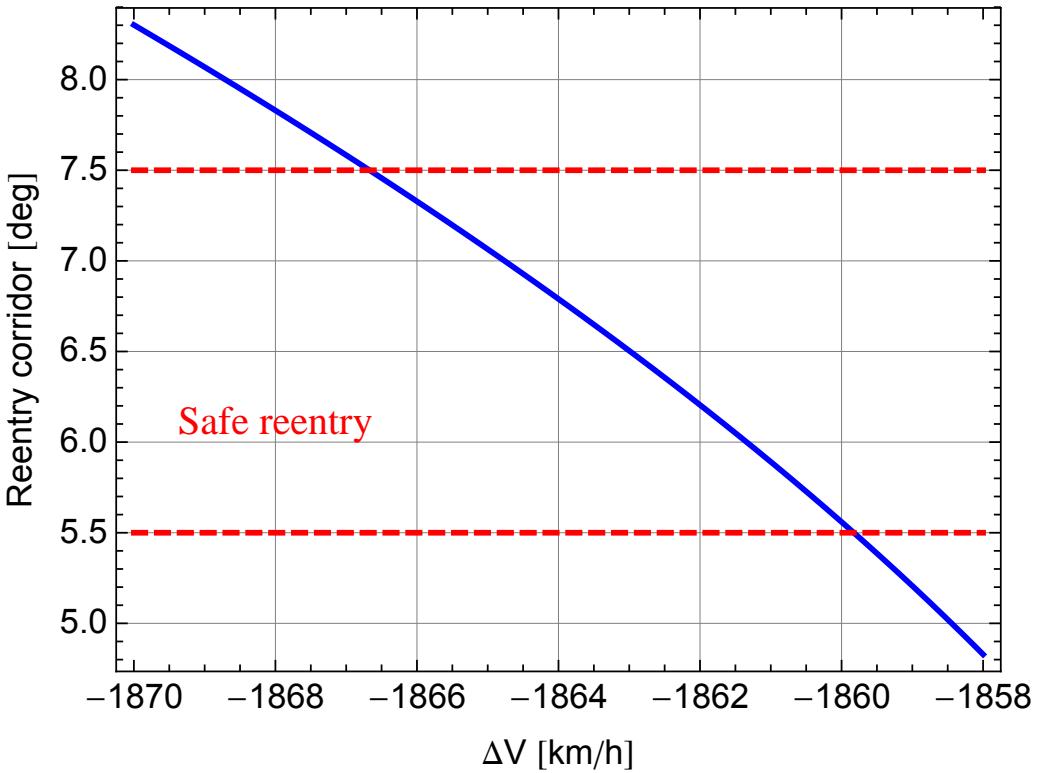


Рис. 8: Допустимые значения корректирующего касательного импульса в момент выхода космического аппарата из сферы действия Луны.

Истинная геоцентрическая аномалия входа в сферу действия Луны (θ_1):

$$d_S = \frac{R_{EO}(1 + e_1)}{1 + e_1 \cos \theta_1} \implies \theta_1 = 3.01087 \text{ радиан.} \quad (27)$$

Эксцентрисическая аномалия (E_1):

$$\tan(E_1/2) = \left(\frac{1 + e_1}{1 - e_1} \right)^{-1/2} \tan(\theta_1/2) \implies E_1 = 2.14764 \text{ радиан.} \quad (28)$$

Средняя аномалия (M_1):

$$M_1 = E_1 - e_1 \sin E_1 = 1.33351 \text{ радиан.} \quad (29)$$

Длительность полета от старта с круговой орбиты вокруг Земли до входа в сферу действия Луны:

$$t_1 = M_1 \left[\frac{R_{EO}^3}{Gm_E(1 - e_1)^3} \right]^{1/2} = 64.1218 \text{ ч.} \quad (30)$$

Луна — Земля

Зная новое значение скорости V_{out}^{new} , находим расстояние в перигее и эксцентриситет орбиты:

$$R_{Ep} = 6393.38 \text{ км, } e_2 = 0.965091.$$

Истинная геоцентрическая аномалия выхода из сферы действия Луны (θ_2):

$$d_r = \frac{R_{Ep}(1 + e_2)}{1 + e_2 \cos \theta_2} \implies \theta_2 = 3.06303 \text{ радиан.} \quad (31)$$

Истинная геоцентрическая аномалия входа в атмосферу (θ_3):

$$R_E + 100 \text{ км} = \frac{R_{Ep}(1 + e_2)}{1 + e_2 \cos \theta_3} \implies \theta_3 = 0.23116 \text{ радиан.} \quad (32)$$

Соответствующие эксцентриские аномалии (E_2 и E_3):

$$\tan(E_2/2) = \left(\frac{1 + e_2}{1 - e_2} \right)^{-1/2} \tan(\theta_2/2), \quad (33)$$

$$\tan(E_3/2) = \left(\frac{1 + e_2}{1 - e_2} \right)^{-1/2} \tan(\theta_3/2). \quad (34)$$

Средние аномалии (M_2 и M_3):

$$M_2 = E_2 - e_2 \sin E_2, \quad (35)$$

$$M_3 = E_3 - e_2 \sin E_3. \quad (36)$$

Длительность полета выхода из сферы действия Луны до перигея:

$$t_2 = M_2 \left[\frac{R_{Ep}^3}{Gm_E(1 - e_2)^3} \right]^{1/2} = \mathbf{70.4945} \text{ ч.} \quad (37)$$

Длительность полета от входа в атмосферу до перигея:

$$t_3 = M_3 \left[\frac{R_{Ep}^3}{Gm_E(1 - e_2)^3} \right]^{1/2} = \mathbf{0.0374127} \text{ ч.} \quad (38)$$

Общая длительность полета:

$$T = t_1 + t_M + (t_2 - t_3) = 166.7 \text{ ч} \simeq 167 \text{ ч.} \quad (39)$$