

Белорусские астрономические олимпиады

III ЭТАП РЕСПУБЛИКАНСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ

Решения и схема оценивания задач теоретического тура

18 января 2011 года

Задача 1. Высота небесного тела в верхней кульминации определяется по формуле:
 $h = 90^\circ \pm \phi \mp \delta$, в которой выбор знака соответствует его положению относительно зенита.

В нашем случае записываем уравнение (Вега в Минске кульминирует над горизонтом):
 $\phi - \delta = \delta - \phi_x$.

Решив это уравнение, получим искомую географическую широту:
 $\phi_x = 2\delta - \phi = 2 \cdot 38^\circ 48' - 52^\circ 51' = 24^\circ 45'$.

Ответ: $\phi_x = 24^\circ 45'$.

Задача 2. Будем считать, что XXI век начался 1 января 2001 года и закончится 31 декабря 2100 года. Всего 100 лет, из них високосных в григорианском календаре 24, а в юлианском - 25.

Таким образом:

в григорианском календаре продолжительность XXI века составляет: $100 \cdot 365 + 24 = 36524$ (суток), или 5217 полных недель и 5 суток.

Осталось определить, какой день недели был 1 января 2001 года. В текущем году 1 января суббота. Прошло 10 полных лет, в каждом из которых день недели сдвигается на один и два 29 февраля, так что сдвиг дней недели произошел на 12. «Откручиваем» от субботы 5 дней назад, получаем понедельник (век тяжелый)

Ответ: понедельников, вторников, сред, четвергов, пятниц по 5218, суббот и воскресений по 5217.

Задача 3. Солнечное затмение на Луне происходит в момент лунного затмения на Земле. В течение одного сароса происходит в среднем 41 солнечное и 29 лунных затмений. Поэтому, отношение числа солнечных затмений происходящих на Земле и Луне в течение исторически длинного промежутка времени $\frac{41}{29} = 1,4$.

Ответ: число солнечных затмений, происходящих на Земле в 1,4 раза больше, чем на Луне.

Задача 4. Для того, чтобы скорость была минимальной, перигей орбиты должен совпадать с радиусом Земли (атмосферу не учитываем): Запишем закон сохранения энергии и II закон Кеплера:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{V_{\min}^2}{2} - \frac{GM_{Earth}}{r_A} = \frac{V_{at\ Earth}^2}{2} - \frac{GM_{Earth}}{R_{Earth}} \\ V_{\min} r_A = V_{at\ Earth} R_{Earth} \end{array} \right.$$

Отсюда: $V_{\min} = 7,08 \text{ км/с}$

Ответ: минимальная скорость $V_{\min} = 7,08 \text{ км/с}$.

Задача 5. В решении ограничимся приближением круговых орбит. Линейные скорости движения Земли и Марса вокруг Солнца:

$$v_3 = \sqrt{\frac{GM_C}{a_3}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}{1,50 \cdot 10^{11}}} \text{ м/с} = 29,8 \text{ км/с},$$

$$v_M = \sqrt{\frac{GM_C}{a_M}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}{2,28 \cdot 10^{11}}} \text{ м/с} = 24,1 \text{ км/с}.$$

В противостоянии скорости Земли и Марса направлены в одну сторону, а в соединении в противоположные, поэтому, используя закон сохранения импульса, получим:

$$v(m_3 + m_M) = m_3 v_3 + m_M v_M \Rightarrow \frac{v_{opposition}}{v_{conjunction}} = \frac{5,97 \cdot 10^{24} \cdot 29800 + 6,42 \cdot 10^{23} \cdot 24100}{5,97 \cdot 10^{24} \cdot 29800 - 6,42 \cdot 10^{23} \cdot 24100} = 1,19.$$

Ответ: в противостоянии скорость центра масс системы Земля-Марс относительно Солнца в 1,19 раза больше, чем в соединении.

Задача 6. Сравним проникающую способность телескопа и глаза:

$$m - m_{eye} = 2,5 \lg \frac{D^2}{D_{eye}^2} \Rightarrow m = m_{eye} - 5 \lg D_{eye} + 5 \lg D = 6,0 - 5 \lg 6,3 \text{ (мм)} + 5 \lg D \text{ (мм)} = 2,0 + 5 \lg D \text{ (мм)}.$$

Откуда найдем диаметр входного отверстия телескопа: $D = 10^{\frac{m-2,0}{5}} = 100 \text{ (мм)}$. Разрешающую способность телескопа найдем по формуле дифракционного предела:

$$\psi = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 1,22 \frac{530 \times 10^{-9}}{100 \times 10^{-3}} = 6,466 \times 10^{-6} \text{ радиан} \approx 1,3''.$$

Ответ: разрешающая способность телескопа $\psi = 1,3''$.

Задача 7. Используя значение солнечной постоянной, расстояние от Солнца до Земли и массу Солнца, найдем:

$$\frac{P}{m} = \frac{4\pi a^2 b}{m} = \frac{4\pi (1,50 \cdot 10^{11})^2 \cdot 1370}{1,99 \cdot 10^{30}} \text{ Вт/кг} = 1,95 \cdot 10^{-4} \text{ Вт/кг}.$$

Поиск земных аналогий неизбежно приводит нас к удельной мощности некоторых наиболее распространенных автомобилей.

Porsche Carrera GT	330 Вт/кг
Porsche Boxster	140 Вт/кг
Bugatti Veyron	380 Вт/кг
Koenigsegg CCX	510 Вт/кг

Даже Nissan Micra имеет удельную мощность 65 Вт/кг.

Батарейки Panasonic R03 AAA Zinc-carbon: 3,3 Вт/кг (20 мА), 24 Вт/кг (150 мА).

Подходит только энергия естественного разложения биомассы.

Ответ: $\frac{P}{m} = 1,94 \cdot 10^{-4} \frac{\text{Вт}}{\text{кг}}$ – куча навоза гниющих листьев.

Задача 8. Светимость звезды (L) – энергия (E), выделяемая за единицу времени (t). Для звезд главной последовательности:

$$L = E/t.$$

Воспользуемся соотношением Эйнштейна для вычисления энергии, выделяющейся в результате горения водорода:

$$E = fMc^2,$$

Где f – доля массы звезды M , превращающейся в энергию. Комбинируя полученные выражения, находим время жизни звезды на главной последовательности:

$$t_{MS} \sim M/L.$$

Используем соотношение масса светимость:

$$t_{MS} \sim M/M^{3.5} \sim M^{-2.5}.$$

Следовательно: $t_{MS} = t_{MS\odot} \times (M/M_\odot)^{-2.5} = t_{MS\odot} \times (1/2)^{-2.5} \approx 5,7 t_{MS\odot}$.

Ответ: в 5,7 раз.

Задача 9. Светимость небесного тела не зависит от расстояния, на котором находится наблюдатель.

Ответ: светимость Солнца одинакова для любых наблюдателей.

Задача 10. Найдем расстояние до звезды в настоящее время:

$$r_0 = \frac{1}{\pi''} = \frac{1}{0,01} = 100(nk) = 3,09 \cdot 10^{15} \text{ км}.$$

Звезда приближается к нам со скоростью:

$$v_r = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cdot c = 0,0001 \cdot 3 \cdot 10^5 = 30 \left(\frac{\text{км}}{c} \right).$$

Через один миллион лет она окажется от нас на расстоянии:

$$r = r_0 - v_r t = (3,09 \cdot 10^{15} - 30 \cdot 1000000 \cdot 365,25 \cdot 86400) \text{ км} = 2,15 \cdot 10^{15} \text{ км} = 69,5 nk.$$

Изменение видимой звездной величины определим по формуле:

$$m - m_0 = 5 \cdot \lg \left(\frac{r}{r_0} \right) = 5 \cdot \lg \left(\frac{2,15}{3,09} \right) \approx -0,8.$$

Ответ: $m - m_0 = -0,8$.

Задача 11. Считая распределение массы сферически-симметричным, вычислим массу внутренней части Галактики по формуле:

$$M = \frac{v^2 r}{G} = \frac{(250000)^2 \cdot 8 \cdot 10^3 \cdot 1,5 \cdot 10^{11} \cdot 206265}{6,67 \cdot 10^{-11}} \text{ кг} = 2,32 \cdot 10^{41} \text{ кг}.$$

Считая звезды солнцеподобными (приближение не является обязательным, можно использовать и другие при условии их обоснованности), оценим их число, разделив их суммарную массу на массу Солнца.

$$\text{Таким образом: } N = \frac{2,32 \cdot 10^{41}}{2 \cdot 10^{30}} = 1,16 \cdot 10^{11} = 116 \text{ млрд}.$$

Ответ: $N = 116 \text{ млрд}.$

Задача 12. Фиолетовое относительное смещение линий в спектре галактики означает его некосмологическую природу. Поэтому в данной задаче нельзя применять закон Хаббла. Согласно эффекту Доплера галактика приближается к нам со скоростью $v = 0,0001 \cdot c = 30 \text{ км/с}$. Поскольку влияние вращения Земли вокруг оси и вокруг Солнца, а также движения Солнечной системы в нашей Галактике учтено, фиолетовое смещение линий может указывать на движение галактики в Местной группе галактик. Характерный радиус которой $R_{LG} \sim 1.5 \text{ Mpc}$.

Ответ: $\sim 1.5 \text{ Mpc}$.

Схема оценивания

1. Каждая задача: **5 баллов**
2. Если решение есть, но ответ неверен: **2 балла**
3. Если в ответе неверно указана размерность: **-1 балл**
4. Неверное число значащих цифр в ответе: **-1 балл**

Всего за теоретический тур: 60 баллов.