

# ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП ХХIII РЕСПУБЛИКАНСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ

## Теоретический тур



28 марта 2017 года

### Задача 1. Сумерки.

В течение некоторого времени после захода и перед восходом Солнца поверхность Земли освещается солнечным светом, рассеянным атмосферой. Этот период времени называется сумерками.

- (a) Очертите границы областей поверхности Земли, в которых иногда случаются «белые» ночи, а «черные» ночи происходят круглый год. Ответ подтвердите расчетами.
- (b) Для места проведения нашей олимпиады ( $\varphi = 53^\circ 40'$ ,  $\lambda = 23^\circ 49'$ ) рассчитайте:
  - (i) Максимальную, в течение года, продолжительность вечерних гражданских, навигационных и астрономических сумерек. Гражданские, навигационные и астрономические сумерки – время, когда высота Солнца равна от  $0^\circ$  до  $-6^\circ$ , от  $-6^\circ$  до  $-12^\circ$  и от  $-12^\circ$  до  $-18^\circ$  под горизонтом соответственно.
  - (ii) Максимальное (в течение года) время, на которое рефракция увеличивает продолжительность светового дня.

### Задача 2. Первый спутник.

В этом году мы будем отмечать 60-летний юбилей запуска первого искусственного спутника Земли. Вот что нам известно о нем: масса 83,6 кг, максимальный диаметр 0,58 м, большая полуось орбиты 6955,2 км, эксцентриситет 0,05201, наклонение  $65,1^\circ$ , период обращения 96,7 мин, высота спутника над поверхностью Земли в апоцентре – 939 км, вperiцентре – 215 км.

- (a) Спутник запустили 4 октября 1957 года в  $19^{\text{ч}}28^{\text{м}}34^{\text{с}}$  по времени UTC. Сколько полных суток прошло с этого исторического момента до момента решения Вами этой задачи?
- (b) Знание элементов орбиты спутника позволяет «измерить» как радиус Земли, так и ее массу (в приближении сферически симметричного тела). Рассчитайте и Вы эти две величины независимо от их значений в таблице справочных данных.
- (c) В каких областях Земли (укажите географические широту и долготу) можно было наблюдать первый спутник в зените?
- (d) Какова видимая звездная величина первого спутника при наиболее благоприятных условиях его наблюдения и возможно ли его наблюдение невооруженным глазом?  
*Информация: очень многие очевидцы этого события утверждают, что они видели полет первого спутника, и яркость его соответствовала достаточно ярким звездам.*
- (e) Чему была равна максимальная скорость первого спутника относительно поверхности Земли, когда он пересекал экватор?

### **Задача 3. Главная последовательность.**

Рассмотрим две звезды главной последовательности, полное время нахождения которых на ней отличается от полного времени нахождения на ней Солнца на 20% в противоположные стороны.

- (a) Чему равно полное время нахождения каждой из них на главной последовательности?
- (b) Рассчитайте массу и радиус каждой из этих звезд.
- (c) Чему равны температуры фотосфер этих звезд?
- (d) На сколько процентов отличаются температуры в центрах этих звезд от температуры в центре Солнца?

### **Задача 4. Аккреционный диск.**

В этой задаче мы рассмотрим упрощенную модель аккреционного диска вокруг звезды. Она важна для понимания процесса формирования звёзд, планетных систем, обмена звёздным материалом в кратных системах и т. д.

Представим систему из двух звёзд, в которой идёт обмен веществом темпом  $\dot{M}$  (т.е. размерность  $[\dot{M}] = \text{кг с}^{-1}$ ). Орбитальное движение двух звёзд приводит к тому, что вещество, перетекающее от одной звезды массой  $m$  к другой звезде массой  $M$  (размер букв, обозначающих звёзды, не имеет отношения к массе самих звёзд), не падает прямо на нее, а переходит на орбиту вокруг этой звезды, образуя аккреционный диск. В результате трения между собой частицы теряют кинетическую энергию, поэтому радиус орбит отдельных частиц постепенно, с достаточно медленным темпом, уменьшается, вещество приближается к звезде и впоследствии поглощается. С другой стороны, полная энергия частиц сообразно теореме вириала переходит в их термальную энергию – диск нагревается и излучает в соответствующем волновом диапазоне.

- (a) Чему равна излученная полная энергия частиц, проходящих за время  $t$  через участок диска, ограниченный радиусами  $r, r + \Delta r$  ( $\Delta r \ll r$ )? При решении учитывайте теорему вириала.
- (b) Чему равна светимость, соответствующая этому участку диска?
- (c) Чему равна температура этого участка диска? Подсказка: диск излучает с двух сторон.
- (d) Звезда, поглощающая материю, имеет радиус  $R$ . Выразите температуру участка диска, полученную в с), как  $T(r) = C \left(\frac{r}{R}\right)^n$ , где  $n$  – показатель степенной зависимости температуры участка диска от радиуса участка, а  $C$  – некоторая постоянная величина, не зависящая от  $r$ . Чему равны  $n, C$ ?
- (e) Величина  $C$  может быть интерпретирована как характерная температура диска. Чему равна  $C$  для белого карлика массой  $0.85M_\odot$ , радиусом  $0.0095R_\odot$  и потоком массы  $1.3 \times 10^{-9} M_\odot/\text{год}$ ? Какова характерная длина волны излучения диска и в каком участке волнового спектра она находится?
- (f) Исходя из размерностей величин, найдите аккреционную светимость звезды и диска с точностью до некоторой безразмерной константы  $K$ . В выражении для светимости должны присутствовать лишь следующие величины:  $K, G, M, \dot{M}, R$ .
- (g) Константа  $K$  равна единице. Найдите аккреционную светимость диска и звезды для параметров, данных в е). Половина этой светимости излучается непосредственно самим диском, а половина энергии высвобождается у поверхности звезды при взаимодействии быстро врачающейся падающей материи и медленно врачающейся звезды.

### **Задача 5. Поверхностная яркость и разбегание галактик.**

- (а) Выведите формулу для поверхностной яркости объекта (количества звездных величин на единицу площади) в зависимости от его звёздной величины и угловой площади на небесной сфере.
- (б) Покажите, что величина поверхностной яркости объекта не зависит от расстояния до него.
- (с) Найдите поверхностную яркость Солнца в звездных величинах на квадратную угловую секунду.
- (д) Найдите поверхностную яркость галактики M51, видимая звёздная величина которой  $V = 8.10$ , а угловой размер –  $11'12'' \times 6'54''$ . Если считать, что звёзды в этой галактике солнцеподобные, то какую часть видимой площади галактики они занимают?
- (е) Галактики M51 («Водоворот») и M63 («Подсолнух») являются доминирующими в небольшой, слабо связанный группе галактик M51, удалённой от Млечного Пути на расстояние порядка 10 Мпк. Расстояние до M51 – 23 млн св. лет, а радиальная скорость этой галактики равна 463 км/с. Для M63 эти параметры составляют 37 млн св. лет и 484 км/с соответственно. Чему равны хаббловские и радиальные пекулярные скорости галактик?

### **Задача 6. Рождение Земли.**

На протяжении тысячелетий человека интересовало то, как образовалась планета Земля, а уже в XVIII столетии это исследовали научными методами П. Лаплас и И. Кант. Гипотеза Канта-Лапласа гласит: Солнечная система образовалась из протопланетной туманности, которая когда-то вращалась вокруг молодого Солнца. Это прямо следует из того, что орбиты планет в Солнечной системе лежат примерно в одной плоскости и близки к круговым, а планеты вращаются по ним в одном направлении, совпадающем с направлением вращения Солнца. Похожие туманности сегодня мы можем наблюдать вокруг маломассивных звёзд типа Т Тельца и более массивных звёзд Хербига (Ae/Be).

Протопланетный диск состоит примерно из 98-99% газа и 1-2% пыли, из которой и образуются планеты. Однозначного ответа на вопрос, как из  $10^{40}$  пылинок диаметром 1 мкм возникла Земля, пока ещё нет.

- (а) Считается, что образование планет начинается примерно тогда, когда масса диска составляет примерно 10% массы звезды. Темп акреции составляет при этом  $\dot{M} \approx 10^{-8} M_{\odot}$  в год. Какова аккреционная температура протопланетного диска Солнечной системы на расстоянии 1 а. е. от Солнца? Считайте массу Солнца равной его сегодняшней массе. Какова температура абсолютно поглощающих излучение пылинок на расстоянии 1 а. е. от Солнца? Светимость Солнца считайте равной его светимости в настоящее время. За счёт какого процесса в основном поддерживается температура аккреционного диска?
- (б) Популярной моделью протопланетной туманности является так называемая «Minimum mass solar nebula». Она имеет следующие теоретические значения поверхностной плотности компонент на расстоянии  $r$  от Солнца:

Газ	$\Sigma_{gas}$	=	$17 \times 10^3 \left( \frac{r}{1 \text{ а. е.}} \right)^{-3/2} \text{ кг м}^{-2}$
Пыль	$\Sigma_{dust}$	=	$70 \left( \frac{r}{1 \text{ а. е.}} \right)^{-3/2} \text{ кг м}^{-2}$
Лёд	$\Sigma_{ice}$	=	$220 \left( \frac{r}{1 \text{ а. е.}} \right)^{-3/2} \text{ кг м}^{-2} (r > 2.7 \text{ а. е.})$

Считайте, что все пылинки уже сконцентрировались в планетезимали радиусом 1 км и плотностью  $1 \text{ кг м}^{-3}$ .

- i) Найдите массу одной планетезимали  $m_{pts}$ . Сколько таких планетезималей потребуется, чтобы образовалась Земля?
- ii) Найдите примерные значения расстояний  $r_1, r_2$  ( $r_1 < 1$  а. е.  $< r_2$ ), чтобы в области туманности, ограниченной этими радиусами, находились планетезимали, общая масса которых равнялась бы массе Земли.
- iii) Найдите среднюю поверхностную концентрацию планетезималей  $\sigma_{pts}$  в этой области, а также поверхностную концентрацию планетезималей для  $r = 1$  а. е.
- iv) Для образования планет решающими являются возмущения орбит отдельных планетезималей: без этого частицы просто вращались бы по круговым орбитам, не взаимодействуя между собой. Таким образом, для малых значений эксцентриситета и наклонения орбиты скорость отдельной частицы можно записать как  $\vec{v} = \vec{v}_k + \Delta\vec{v}$ , где  $\vec{v}_k$  – кеплеровская скорость вращения, а  $\Delta\vec{v}$  – небольшое возмущение (либо дисперсия скоростей). Найдите “динамическую температуру” планетезималей, аналогичную температуре газа, частицы которого движутся со среднеквадратичной скоростью  $\Delta v = 1$  км/с.
- v) Эта «температура» (не являющаяся температурой в буквальном смысле!) приводит к тому, что планетезимали находятся не в одной плоскости, а распределены в области высотой  $2H$ , где  $H = r \frac{\Delta v}{v_k}$ . Найдите  $H$ , а также среднюю пространственную концентрацию планетезималей  $n_{pts}$  в области между радиусами  $r_1, r_2$  и концентрацию для  $r = 1$  а. е.
- vi) Предположим, что одна достаточно крупная планетезималь плотностью  $\rho_E$  и массой  $m_0$  ( $m_{pts} \ll m_0 \ll M_E$ ) начинает случайно сталкиваться с другими планетезималиями, увеличиваясь в результате их «налипания». Выразите количество столкновений в секунду как функцию от  $n_{pts}, \Delta v$  и радиуса планетезималии  $R_0$ .
- vii) Найдите формулу для прироста массы планетезимали за секунду  $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ .
- viii) Найдите прирост радиуса планетезимали в год  $\frac{\Delta R}{\Delta t}$  и вычислите его, используя значения, данные выше. Сколько времени потребовалось бы для образования Земли согласно данным расчётам?  
Влияют ли на это время величины  $\Delta v, m_{pts}$  и за счёт чего образование планет проходит намного быстрее?

## Справочные данные

Масса Солнца	$M_{\odot}$	$1.9891 \times 10^{30}$ кг
Радиус Солнца	$R_{\odot}$	$6.95508 \times 10^8$ м
Эффективная температура Солнца	$T_{\odot,eff}$	5777 К
Температура центра Солнца	$T_{\odot}$	$1.5 \times 10^7$ К
Видимая звёздная величина Солнца в V-лучах	$V_{\odot}$	-26.75
Время нахождения Солнца на главной последовательности	$t_{\odot}$	$10^{10}$ лет
Постоянная Стефана-Больцмана	$\sigma$	$5.670400 \text{ Вт м}^{-2}\text{К}^{-4}$
Постоянная Больцмана	$k$	$1.38065 \times 10^{-23} \text{ Дж К}^{-1}$
Гравитационная постоянная	$G$	$6.67 \times 10^{-11} \text{ м}^3\text{с}^{-2}\text{кг}^{-1}$
Скорость света в вакууме	$c$	$2.99792458 \times 10^8 \text{ м с}^{-1}$
Постоянная Вина	$b$	$2.8977729 \times 10^{-3} \text{ м К}$
Постоянная Хаббла	$H$	$67.8 \text{ км с}^{-1}\text{Мпк}^{-1}$
Парsec	1 пк	$3.0857 \times 10^{16}$ м
Астрономическая единица	1 а.е.	$1.496 \times 10^{11}$ м
Юлианский год	1 год	365.25 сут
Большая полуось орбиты Земли	$a_e$	1.0000 а.е.
Сидерические сутки	$P_e$	$23^{\text{ч}}56^{\text{м}}04.0905309^{\text{с}}$
Масса Земли	$M_E$	$5.9736 \times 10^{24}$ кг
Средняя плотность Земли	$\rho_E$	$5515 \text{ кг м}^{-3}$
Сферическое альбедо Земли	$A_E$	0.306
Средний радиус Земли	$R_e$	$6.371 \times 10^6$ м
Экваториальный радиус Земли	$R_{eq}$	$6.378 \times 10^6$ м
Сферическое альбедо Нептуна	$A_N$	0.29
Средний радиус Нептуна	$R_N$	$3.88 R_e$
Величина рефракции у горизонта	$\xi$	35'

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x + \Delta x} \approx \frac{\Delta x}{x^2} \text{ для } \Delta x \ll x$$

Эмпирические зависимости для звёзд:

$t \sim M^{-3}$  – время нахождения звезды на главной последовательности

$L \sim R^{5.2}, L \sim M^{3.9}$  – светимость звезды

$T \sim R^{1/3}$  – температура в центре звезды