

LXXI Белорусская математическая олимпиада школьников

9 класс

1. Окружность проходит через вершины B и C треугольника ABC и пересекает стороны AB и AC в точках C_1 и B_1 , соответственно. Прямая B_1C_1 пересекает окружность ω , описанную вокруг треугольника ABC , в точках X и Y . Прямые BB_1 и CC_1 пересекают ω соответственно в точках P и Q ($P \neq B$ и $Q \neq C$).

Докажите, что $QX = PY$.

2. Жук ползает по поверхности кубика Рубика (куб $3 \times 3 \times 3$ с клетчатой поверхностью). Он умеет переползать в соседнюю по стороне клеточку на грани либо в смежную по ребру клеточку соседней грани. Однажды жук прополз по всем клеточкам и вернулся в начальную, причём во всех клеточках он побывал ровно по одному разу.

Докажите, что жук совершил чётное количество переходов на соседнюю грань через ребро.

3. Найдите все натуральные числа n , такие что

$$S(n^2) + (S(n))^2 = n,$$

где $S(m)$ обозначает сумму цифр числа m .

4. В таблицу размера $n \times n$ выписаны по спирали числа от 1 до n с повторением (см. пример для $n = 5$).

При каких n в клетках на главной диагонали все числа различны? (Главной диагональю называется диагональ, проведённая из левого верхнего угла таблицы в правый нижний.)

1	2	3	4	5
1	2	3	4	1
5	4	5	5	2
4	3	2	1	3
3	2	1	5	4

Пользоваться калькулятором не разрешается.

Время работы: 5 часов