

10.1. Гардероб в кинотеатре работает с перерывами в течение дня. Общее время работы гардероба в день – 8 часов. Оказалось, что для любого фильма, продолжительностью не более 12 часов, можно так указать его начало показа в период с девяти утра до девяти вечера, что гардероб будет открыт в течение часа до и после сеанса (фильмы показываются без антракта).

Найдите наименьшее возможное количество перерывов в работе гардероба в течение дня.

10.2. Пусть n – натуральное число, а $P(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами такой, что $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, \dots , $P(n) = n$.

Докажите, что число $P(0)$ делится на $2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

10.3. Даны два смежных угла ACT и TCB . В первый из них вписана окружность α , а во второй – β , причём α касается AB и CT в точках A и E , а β касается AB и CT в точках B и $F \neq E$ соответственно. Прямые AE и BF пересекаются в точке P . Описанная окружность ω треугольника PEF повторно пересекает α и β в точках X и Y соответственно.

Докажите, что прямые AX и BY пересекаются на ω .

10.4. Можно ли в каждую целочисленную точку (x, y) координатной плоскости вписать по натуральному числу $a_{x,y}$ так, чтобы для любых целых чисел i и j выполнялось равенство

$$a_{i,j} = \text{НОД}(a_{i-1,j}, a_{i+1,j}) + \text{НОД}(a_{i,j-1}, a_{i,j+1})?$$