

LXXII Белорусская математическая олимпиада школьников

10 класс

5. На доске написано число

$$1234567891234567891234567.$$

Двое по очереди вычеркивают цифры. Проигрывает тот, после чьего хода либо не осталось цифр, либо число, образованное ими, делится на 3.

Кто выиграет (начинающий или второй игрок) независимо от игры соперника?

6. Известно, что положительные действительные числа x , y и z удовлетворяют равенству

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$

Докажите неравенство

$$xyz + x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 6(x + y + z).$$

7. Найдите все пары целых чисел (x, y) , удовлетворяющих равенству

$$x(x^3 - y) = y^2(y + 1)^2.$$

8. Окружность ω с центром I вписана в треугольник ABC и касается его сторон BC , AC и AB в точках D , E и F соответственно. Прямая DI повторно пересекает ω в точке G , а прямая AG повторно пересекает ω в точке H . Пусть P – точка пересечения прямой EF и описанной окружности треугольника GIH , лежащая вне ω .

Докажите, что PH касается ω .

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов