

LXXI Белорусская математическая олимпиада школьников

11 класс

1. Найдите все функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие при всех действительных значениях переменных x и y равенству

$$f(x - 0,25) + f(y - 0,25) = f(x + [y + 0,25] - 0,25)$$

(Через $[x]$ как обычно обозначена целая часть числа x .)

2. Точки A_1 , B_1 и C_1 лежат на сторонах BC , AC и AB , соответственно, остроугольного треугольника ABC . Обозначим точки пересечения отрезков BB_1 и CC_1 , CC_1 и AA_1 , AA_1 и BB_1 , через P , Q и R соответственно. Известно, что треугольник PQR подобен треугольнику ABC .

Докажите, что двойное равенство $\angle AB_1C_1 = \angle BC_1A_1 = \angle CA_1B_1$ возможно только, если треугольник ABC равносторонний.

3. Дан многочлен $P(x)$ степени 2021 с действительными коэффициентами, такой что какое бы действительное число a ни выбрать, у многочлена $x^{2022} + aP(x)$ есть хотя бы один действительный корень.

Найдите все возможные значения числа $P(0)$.

4. Государство состоит из 2021 города, между некоторыми из которых есть прямые авиаперелёты. Каждая пара городов соединена не более, чем одним прямым перелётом, а каждый перелёт обслуживается одной из 2021 авиакомпаний. Набор городов назовём *неполным*, если хотя бы одна авиакомпания не осуществляет ни одного прямого перелёта между ними.

Найдите наибольшее число m , такое что гарантированно найдётся неполный набор из m городов.

Пользоваться калькулятором не разрешается.
Время работы: 5 часов