

1. Даны $n \geq 2$ различных целых чисел, больших -10 . Оказалось, что среди них количество нечётных чисел равно максимальному чётному числу, а количество чётных — максимальному нечётному числу.

а) Найдите наименьшее возможное значение n .

б) Найдите наибольшее возможное значение n .

2. Дан треугольник ABC , в котором $\angle CAB = 30^\circ$ и $\angle ACB = 60^\circ$. На продолжении луча AB за точку B выбирается произвольная точка D , а на продолжении луча CB за точку B отмечается точка E такая, что $\angle BDE = 60^\circ$. Прямые AC и DE пересекаются в точке F .

Докажите, что описанная окружность треугольника AEF проходит через некоторую фиксированную точку, отличную от A и не зависящую от выбора точки D .

3. Докажите, что для любого натурального числа n существуют взаимно простые натуральные числа a и b такие, что при всех k от 1 до n числа $a + k$ и $b + k$ не являются взаимно простыми.

4. Существует ли многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами, удовлетворяющий равенствам

$$p(\sqrt{2}) = \sqrt{2} \quad \text{и} \quad p(2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} + 2?$$