

9.1. В треугольнике ABC высоты BE и CF пересекаются в точке H . Из точки H опущен перпендикуляр HT на прямую EF . Описанные окружности треугольников ABC и BHT пересекаются в точках B и X .

Докажите, что $\angle TXA = \angle BAC$.

9.2. Белоснежка и семь гномов живут в своём домике в лесу. В течение нескольких дней некоторые гномы работали в алмазной шахте, в то время как остальные собирали грибы. Каждый гном выполнял только один вид работы в течение всего дня. Известно, что какие бы два подряд идущих дня ни выбрать, найдутся ровно три гнома, которые в эти три дня выполняли оба вида работы. Кроме того, для любых двух дней найдётся гном, выполнявший оба вида работы в эти дни.

Какое наибольшее количество дней могла продолжаться описанная ситуация?

9.3. Пусть a_1, a_2, a_3, \dots – последовательность всех составных чисел, упорядоченных по возрастанию. Последовательность b_1, b_2, b_3, \dots задана при всех натуральных i равенством

$$b_i = ia_1^2 + (i-1)a_2^2 + \dots + 2a_{i-1}^2 + a_i^2.$$

Какое наибольшее число подряд идущих элементов последовательности b_1, b_2, b_3, \dots делится на 3?

9.4. Найдите все натуральные числа $n \geq 3$, для которых существует множество S , состоящее из рациональных чисел, такое, что одновременно выполнены следующие два условия:

1) любое рациональное число представимо в виде суммы не более чем n элементов множества S ;

2) существует рациональное число, не представимое в виде суммы не более чем $n-1$ элемента множества S .

(При составлении суммы элементы множества S могут повторяться.)