

1. В клетки таблицы размера 2022×2022 записаны натуральные числа от 1 до 2022^2 , в каждой клетке — ровно одно число, все числа использованы по разу. Для каждой строки Влад выписал себе по одному числу, являющемуся вторым по убыванию в этой строке. А Дима проделал то же для каждого столбца. Оказалось, что мальчики выписали 4044 попарно различных числа и найдутся k чисел, выписанных Владом, каждое из которых меньше любого числа, выписанного Димой.

Найдите наибольшее возможное значение числа k .

2. Вписанная окружность прямоугольного треугольника ABC касается гипотенузы AB в точке P , а катетов AC и BC — в точках Q и R соответственно. Точки C_1 и C_2 симметричны точке C относительно прямых PQ и PR .

Найдите градусную меру угла C_1IC_2 , где I — центр вписанной окружности треугольника ABC .

3. Числа $-1011, -1010, \dots, -1, 1, 2, \dots, 1010, 1011$ образуют в некотором порядке последовательность $a_1, a_2, \dots, a_{2022}$.

Найдите наибольшее возможное значение суммы

$$|a_1| + |a_1 + a_2| + |a_1 + a_2 + a_3| + \dots + |a_1 + a_2 + \dots + a_{2022}|.$$

4. Многочлен $P(x, y)$ двух переменных с целыми коэффициентами удовлетворяет следующим двум условиям: 1) для каждого целого числа a существует, причём ровно одно, целое значение y такое, что $P(a, y) = 0$; и 2) для каждого целого числа b существует, причём ровно одно, целое значение x такое, что $P(x, b) = 0$.

а) Докажите, что, если степень $P(x, y)$ равна двум, то он делится на многочлен $x - y + C$ либо на многочлен $x + y + C$, где C — целое число.

б) Существует ли такой многочлен $P(x, y)$, не кратный ни одному многочлену вида $x - y + C$ и $x + y + C$, где C — целое число?