

LXXI Белорусская математическая олимпиада школьников

11 класс

1. Окружность пересекает параболу $y = x^2$ в трёх точках: A , B и C , причём в точке C касательные к этим параболе и окружности совпали. Проекция отрезка AB на ось абсцисс равна 2.

Найдите величину угла ACB .

Ответ: 90° .

2. Найдите все натуральные числа a , b и c , для которых выполнено равенство

$$2^a + 2b^2 = 3^c + 67.$$

Ответ: $a = 2$, $b = 6$, $c = 2$.

3. На высоте AH остроугольного треугольника ABC выбрана точка X . Прямые BX и CX пересекают стороны AC и AB в точках B_1 и C_1 , соответственно. Точка P — основание высоты, опущенной из вершины B на прямую HC_1 , а точка Q — основание высоты, опущенной из вершины C на прямую HB_1 .

Докажите, что описанная окружность треугольника PQH проходит через середину стороны BC .

4. В группе из 2020 человек каждый послал по одной открытке каждому своему знакомому из этой группы. Оказалось, что каждый человек получил не более трёх открыток и для каждого человека все его знакомые получили различные количества открыток.

Найдите максимально возможное количество посланных открыток.

Ответ: 4038.