

10.1. Найдите все пары натуральных чисел (a, b) , для которых выполняется равенство

$$(3^a - 1)^b = 3^b + a! + 3,$$

где через $a!$ обозначено произведение всех натуральных чисел от 1 до a .

10.2. Пусть n – натуральное число. На доске записана дробь $\frac{1}{2^n - 1}$. За ход можно увеличить либо уменьшить числитель или знаменатель записанной на доске дроби ровно на 1 так, чтобы числитель и знаменатель полученной дроби остались натуральными числами. Если числитель и знаменатель полученной дроби не взаимно просты, то можно сократить их на любой общий делитель, не потратив при этом хода.

Для каждого натурального n найдите наименьшее возможное количество ходов, за которое можно получить дробь, равную единице.

10.3. Каждой паре (x, y) целых чисел сопоставили некоторое целое число и обозначили его через $x \circ y$. При этом числа $x \circ y$ и $y \circ x$ могут быть различными. Оказалось, что для любых целых чисел a, b, c и d выполняется равенство

$$(a \circ b + d) \circ c = (a - b) \circ (c - d) + 1.$$

Найдите значение $2025 \circ 1991$.

10.4. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB , BC и CA в точках C_1 , A_1 и B_1 , соответственно. Точки D и E – середины отрезков A_1B_1 и A_1C_1 , соответственно. Прямые B_1E и C_1D пересекают вписанную окружность во второй раз в точках F и G , соответственно.

Докажите, что точки B , F , G и C лежат на одной окружности.