

LXXI Белорусская математическая олимпиада школьников

**8 класс**

- 1.** Докажите, что существует такое 2021-значное натуральное число  $\overline{a_1a_2 \dots a_{2021}}$ , записанное ненулевыми цифрами, что для любого номера  $n$  от 1 до 2020 выполнено равенство

$$\overline{a_1a_2 \dots a_n} \cdot \overline{a_{n+1}a_{n+2} \dots a_{2021}} = \overline{a_1a_2 \dots a_{2021-n}} \cdot \overline{a_{2022-n}a_{2023-n} \dots a_{2021}},$$

причём все четыре числа из этого равенства попарно различны.

- 2.** Даны квадратные трёхчлены  $P(x) = x^2 + ax + b$  и  $Q(x) = x^2 + cx + d$ , в которых  $a > c$ . Известно, что, какие бы действительные числа  $t$  и  $s$  с условием  $t + s = 1$  ни выбрать, многочлен  $B(x) = tP(x) + sQ(x)$  всегда имеет по крайней мере один действительный корень.

Докажите, что  $bc \geq ad$ .

- 3.** Вписанная окружность треугольника  $ABC$  касается сторон  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  соответственно. В треугольниках  $AB_1C_1$ ,  $BC_1A_1$  и  $CB_1A_1$  отметили соответственно точки  $H_1$ ,  $H_2$  и  $H_3$  пересечения их высот.

Докажите, что треугольники  $A_1B_1C_1$  и  $H_1H_2H_3$  равны.

- 4.** В шеренгу выстроились несколько рядовых. По команде «равняйся!» каждый из них случайным образом повернул голову направо или налево. Каждую секунду все рядовые одновременно делают следующую операцию: 1) если рядовой смотрит направо и видит, что среди тех, кто стоит правее его, большинство смотрит налево, то он поворачивает голову налево; 2) если рядовой смотрит налево и видит, что среди тех, кто стоит левее его, большинство смотрит направо, то он поворачивает голову направо; 3) в остальных случаях рядовой ничего не предпринимает.

Докажите, что в какой-то момент этот процесс остановится.

---

Пользоваться калькулятором не разрешается.  
Время работы: 4,5 часа