

11.1. На множестве G задана операция $*: G \times G \rightarrow G$, которая каждой паре (x, y) элементов G ставит в соответствие элемент $x * y \in G$, причём для любых элементов $x, y, z \in G$ верно равенство $(x * y) * z = x * (y * z)$. Множество G разбили на три непустых подмножества A , B и C .

Могло ли оказаться так, что для любых трёх элементов $a \in A$, $b \in B$ и $c \in C$ выполнены условия $a * b \in C$, $b * c \in A$ и $c * a \in B$?

11.2. На доске был нарисован треугольник ABC . Влад отметил внутри этого треугольника произвольную точку D и нарисовал точки A_1 , C_1 и B_1 , симметричные точкам A , C и B относительно середин отрезков CD , BD и AD соответственно. Когда Влад отвернулся, к доске подбежал Дима и стёр с доски всё, кроме точек A_1 , C_1 и B_1 .

Может ли Влад при помощи мела, линейки и циркуля восстановить на доске точку D ?

11.3. Докажите, что для любого заданного целого числа a уравнение $(m! + a)^2 = n! + a^2$ имеет конечное количество решений в натуральных числах m и n .

11.4. Обозначим через $\mathbb{R}_{>0}$ множество всех положительных действительных чисел. Найдите все функции $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ такие, что для любых $x, y \in \mathbb{R}_{>0}$ верно равенство

$$f(y)f(x + f(y)) = f(1 + xy).$$