

LXXII Белорусская математическая олимпиада школьников

**11 класс**

**1.** Данна окружность  $\omega$  с центром  $O$  и точка  $P$  вне ее. На окружности отмечена точка  $B$ , причем  $O, B$  и  $P$  не лежат на одной прямой. На радиусе  $OB$  отмечена точка  $C$  так, что  $OC : CB = 2 : 3$ . Около треугольника  $PBC$  построена описанная окружность.

Докажите, что независимо от выбора точки  $B$  все эти окружности проходят через одну точку, отличную от  $P$ .

**2.** На левой ветви гиперболы  $y = \frac{1}{x}$  отмечены точки  $A$  и  $B$ , а на правой ветви – точки  $C$  и  $D$ . Оказалось, что прямые  $AB$  и  $CD$  параллельны. Пусть  $E$  – точка пересечения прямых  $AC$  и  $BD$ , а  $F$  – точка пересечения прямых  $AD$  и  $BC$ .

Докажите, что прямая  $EF$  проходит через начало координат.

**3.** Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел  $n$  таких, что

$$\begin{aligned} n &= a_1 \cdot a_2 \cdot a_3, \\ n &= b_1 \cdot b_2 \cdot b_3, \end{aligned}$$

для некоторых натуральных *непарно взаимно простых* чисел  $a_1, a_2, a_3$  и натуральных *непарно взаимно простых* чисел  $b_1, b_2, b_3$ , причем

$$\begin{aligned} a_1 &\geq a_2 \geq a_3, \\ b_1 &\geq b_2 \geq b_3, \\ a_1 &> b_1 \end{aligned}$$

и

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3.$$

**4.** Найдите все функции  $f$ , определенные на на множестве действительных чисел и принимающие действительные значения, для которых равенство

$$f(x + xy) + 2xy + f(y) = f(x + y) + 2yf(x) + f(xy)$$

выполняется для всех действительных значений  $x$  и  $y$ .

---

Пользоваться калькулятором не разрешается.  
Время работы: 5 часов