

1. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC . На сторонах BC , AC и AB отмечены точки X , Y и Z соответственно так, что треугольники ABC и YZX подобны. Точка W симметрична точке X относительно середины стороны BC .

Докажите, что точки X , Y , Z и W лежат на одной окружности.

2. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{2022!} > \frac{1^2}{2!} + \frac{2^2}{3!} + \frac{3^2}{4!} + \dots + \frac{2022^2}{2023!}.$$

3. Натуральные числа a и b удовлетворяют равенству $a + \tau(a) = b^2 + 2$, где через $\tau(n)$ обозначено количество всех натуральных делителей числа n , включая 1 и само число n .

Докажите, что число $a + b$ чётно.

4. На доске записаны числа $1, 2, \dots, 50$. Аня проделывает следующие действия: стирает с доски любые два числа a и b , записывает на доску вместо них одно число — их сумму $a + b$, после чего выписывает себе в блокнот число $ab(a + b)$. Когда после 49 таких действий на доске осталось ровно одно число, Аня нашла сумму S всех 49 чисел, выписанных в блокнот.

- а)** Докажите, что S не зависит от порядка действий Ани.
б) Вычислите S .