

10.5. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . На стороне BC отметили точку P такую, что $\angle HPC = \angle BAC$.

Докажите, что центр описанной окружности треугольника BHP лежит на прямой AB .

10.6. Найдите все пары (p, q) простых чисел, удовлетворяющих равенству

$$p^{2q+1} = q^p + 2023.$$

10.7. В выпуклом n -угольнике провели несколько диагоналей так, что каждая проведённая диагональ пересекается во внутренних точках не более, чем с одной другой. В результате n -угольник разбился на меньшие многоугольники.

Определите, какое максимальное количество треугольников могло оказаться среди них.

10.8. На доске записали три многочлена с действительными коэффициентами:

$$x^4 + a_1x^3 + b_1x^2 - 2x + 1, \\ x^4 + a_2x^3 + b_2x^2 - 2x + 1 \quad \text{и} \quad x^4 + a_3x^3 + b_3x^2 - 2x + 1.$$

Оказалось, что $a_1b_2 > a_2b_1$, $a_2b_3 > a_3b_2$ и $a_3b_1 > a_1b_3$.

Докажите, что хотя бы один из записанных на доске многочленов имеет действительный корень.