

11.5. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что оба числа $n^3 - n$ и $(n + 1)^3 - (n + 1)$ делятся на 2025.

11.6. Точка H – основание высоты, опущенной из вершины A треугольника ABC . На прямых AB и AC отмечены точки X и Y соответственно так, что описанные окружности треугольников BXH и CYH касаются друг друга, обозначим эти окружности через ω_B и ω_C соответственно. Касательные к окружностям ω_B и ω_C , проходящие через точки X и Y соответственно, пересекаются в точке Z .

Докажите, что точка Z равноудалена от точек A и H .

11.7. Положительные вещественные числа $a_1 > a_2 > \dots > a_n$ с суммой s таковы, что уравнение $nx^2 - sx + 1 = 0$ имеет положительный корень a_{n+1} , меньший a_n .

Докажите, что найдётся натуральное число r , не превосходящее n , для которого выполнено неравенство $a_r a_{r+1} \geq \frac{1}{r}$.

11.8. В некоторые клетки таблицы 2025×2025 поставили по одному крестику. Множество, состоящее из 2025 клеток, назовём *ладейным*, если любые две из них находятся в разных строках и разных столбцах. Известно, что каждое ладейное множество содержит хотя бы k крестиков.

Найдите наименьшее k , при котором крестики заведомо возможно окрасить в два цвета так, что любое ладейное множество будет содержать крестики обоих цветов.