

1. Внутри треугольника ABC расположены три непересекающихся круга радиуса 1. (Круги могут касаться друг друга и сторон треугольника, но не могут иметь общих внутренних точек.)

Найдите наибольшее значение r , при котором можно гарантированно утверждать, что внутри треугольника возможно нарисовать четвёртый круг радиуса r , не пересекающийся с уже нарисованными тремя кругами.

2. Клетчатую доску размера 2022×2022 разрезали на фигуры двух видов: L-тетрамино  и Z-тетрамино . Каждое тетрамино состоит из четырёх единичных квадратов, тетрамино можно поворачивать и переворачивать.

Определите, какое наименьшее количество Z-тетрамино могло получиться.

3. Многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами удовлетворяет равенству $p(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \sqrt{2} - \sqrt{3}$.

а) Найдите все возможные значения $p(\sqrt{2} - \sqrt{3})$.

б) Приведите пример хотя бы одного многочлена $p(x)$, удовлетворяющего условию.

4. Витя и Маша играют в игру. Сначала Витя загадывает три различных целых числа. За один раз Маша может спросить одну из следующих величин: либо сумму чисел, либо сумму попарных произведений чисел, либо произведение чисел, загаданных Витей. Маша задаёт вопросы последовательно, причём Витя даёт ответ до того, как будет задан следующий вопрос.

а) Докажите, что Маша всегда может отгадать числа, загаданные Витей.

б) За какое наименьшее число вопросов Маша гарантированно сможет это сделать вне зависимости от того, какие числа загадал Витя?

в) Ребята решили усложнить игру: теперь Витя загадывает четыре целых числа, а не три, а Маша может спросить одну из четырёх величин: либо сумму чисел, либо сумму попарных произведений чисел, либо сумму произведений чисел, взятых по три, либо произведение всех чисел, загаданных Витей. Может ли Витя играть так, чтобы Маша не могла отгадать его числа, какие бы три вопроса ни задала?