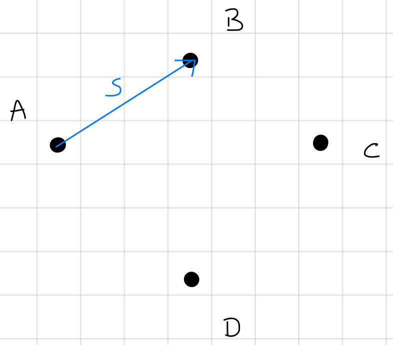
Meccanica aerospaziale

RICHIAMI DI CALCOLO VETTORIALE



COPPIA ORDINATA (A, B)

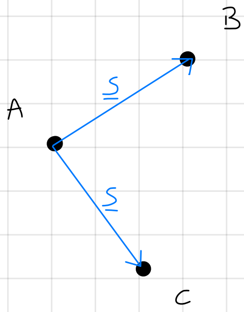
s É OPERATORE CHE PRENDE A E LO PORTA IN B

↳ SIMBOLICAMENTE : $B = A + \underline{s}$

OPPURE $\underline{s} = B - A$

- OSS 1: DATA $(A, B) \Rightarrow \underline{s}$ UNICO

↳ MA DATO $\underline{s} \not\Rightarrow (A, B)$ UNICA → ESEMPIO



$\underline{s}$ É LO STESSO MA HO ASSOCIATO DUE

COPPIE ORDINATE DI PUNTI DIVERSE

- OSS 2: PER CONFRONTARE DUE VETTORI HO BISOGNO DEI CONCETTI DI:

MODULO - DIREZIONE - VERSO

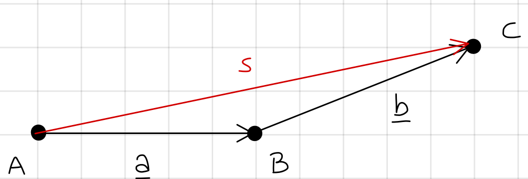
⟶ $\forall\, u, v \Rightarrow u = v \Leftrightarrow$ STESSO MODULO - DIREZIONE - VERSO

- VETTORE NULLO : VETTORE CHE PORTA UN PUNTO IN SE STESSO

$$A = A + \underline{0}$$

- VERSORE : VETTORE $\underline{u}$ TC $\|u\| = 1$

- COMPOSIZIONE DI SPOSTAMENTI : SOMMA DI VETTORI



$\underline{s}$ É COMPOSIZIONE DI SPOSTAMENTI $\underline{a}$ E $\underline{b}$

$\underline{a} = B - A \qquad \underline{b} = C - B \qquad \underline{s} = C - A$

$\rightsquigarrow$ NOTA: $(C - A) = (\cancel{B} - A) + (C - \cancel{B})$

- PROPRIETÀ DELLA SOMMA:

1) ESISTENZA DELLO ZERO: $\forall \underline{a}, \ \exists! \ \underline{0} \cdot \underline{a} - \underline{a} = \underline{0}$

2) PROPRIETÀ ASSOCIATIVA: $\forall \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \Rightarrow (\underline{a} + \underline{b}) + \underline{c} = \underline{a} + (\underline{b} + \underline{c})$

3) ESISTENZA VETTORE OPPOSTO: $\forall \underline{a} \ \exists! \ (-\underline{a}) : \underline{a} + (-\underline{a}) = \underline{0}$

4) PROPRIETÀ COMMUTATIVA: $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$

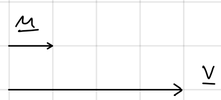
- **MOLTIPLICAZIONI PER UNO SCALARE:**

$\forall \underline{a}, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ DEFINIAMO $\underline{b} = \lambda \underline{a}$

$$\begin{cases} \text{STESSA DIREZIONE DI } \underline{a} \\ \text{STESSO VERSO DI } \underline{a} \text{ SE } \lambda > 0 \\ \text{VERSO OPPOSTO AD } \underline{a} \text{ SE } \lambda < 0 \\ \|\underline{b}\| = \lambda \|\underline{a}\| \end{cases}$$

GRAFICAMENTE:

$\rightsquigarrow$ CONSEGUENZA: DATO $\underline{u}$ T.C $\|\underline{u}\| = 1 \ \wedge \ \forall \underline{v} \parallel \underline{u}$

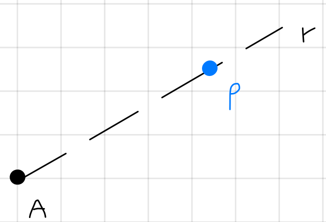


$\underline{v} = \lambda \underline{u}$ COME TROVO λ?

$\sim \|v\| = \lambda \|u\|$, MA $\|u\| = 1 \Rightarrow \lambda = \|v\|$

$$\sim \operatorname{sign}(\lambda) = \begin{cases} +1 & \text{se } \underline{v} \text{ STESSO VERSO DI } \underline{u} \\ -1 & \text{se } \underline{v} \text{ VERSO OPPOSTO AD } \underline{u} \end{cases}$$

- **EQUAZIONE DELLA RETTA:**

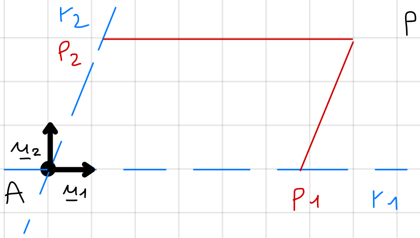


$(P - A) \parallel r \Rightarrow$ PRENDO VERSORE $\underline{u}$

$\Rightarrow (P - A) \parallel \underline{u}$

$\longrightarrow P - A = \lambda \underline{u}$ $\quad \boxed{P = A + \lambda \underline{u}}$ EQUAZIONE RETTA

- EQUAZIONE DEL PIANO:



$$P - A = (P_1 - A) + (P - P_1)$$

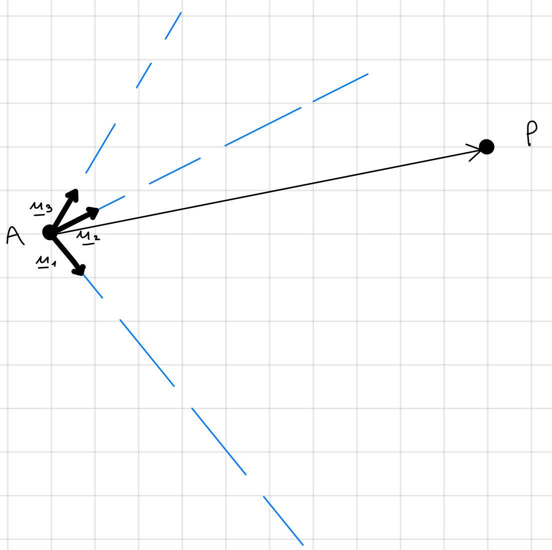
$$P - A = (P_1 - A) + (P_2 - A)$$

MA $(P_1 - A) \parallel \underline{u}_1 \Rightarrow (P_1 - A) = \lambda_1 \underline{u}_1$

$(P_2 - A) \parallel \underline{u}_2 \Rightarrow (P_2 - A) = \lambda_2 \underline{u}_2$

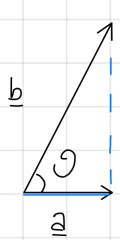
$\longrightarrow P - A = \lambda_1 \underline{u}_1 + \lambda_2 \underline{u}_2$ $\quad \boxed{P = A + \lambda_1 \underline{u}_1 + \lambda_2 \underline{u}_2}$ EQUAZIONE PIANO

- 3 DIMENSIONI:



$$\boxed{P = A + \lambda_1 \underline{u}_1 + \lambda_2 \underline{u}_2 + \lambda_3 \underline{u}_3}$$

- PRODOTTO SCALARE:



$$\underline{a} \circ \underline{b} = \|\underline{a}\| \cdot \|\underline{b}\| \cos\theta$$

- OSS1: $\|a\| \circ \underbrace{(\|\underline{b}\| \cos\theta)}$ $\rightarrow$ È LA PROIEZIONE DI $\|\underline{b}\|$ SU $\underline{a}$

- OSS2: NON VALE LEGGE DI ANNULLAMENTO DEL PRODOTTO:

$\underline{a} \circ \underline{b} = 0 \not\Rightarrow \underline{a} = 0 \vee \underline{b} = 0$. INFATTI $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2 + k\pi$

- PROPRIETÀ:

1) COMMUTATIVA: $\underline{a} \circ \underline{b} = \underline{b} \circ \underline{a}$

2) DISTRIBUTIVA: $(\underline{a} + \underline{b}) \circ \underline{c} = \underline{a} \circ \underline{c} + \underline{b} \circ \underline{c}$

- DECOMPOSIZIONE CARTESIANA DI UN VETTORE:

DATI 3 VERSORI $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3$ $\forall \underline{v}$, $\underline{v} = \lambda_1 \underline{u}_1 + \lambda_2 \underline{u}_2 + \lambda_3 \underline{u}_3$

$\hookrightarrow$ PB: DETERMINARE $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ $\rightarrow$

$$
\begin{cases}
\underline{v} \circ \underline{u}_1 = (\lambda_1 \underline{u}_1 + \lambda_2 \underline{u}_2 + \lambda_3 \underline{u}_3) \circ \underline{u}_1 = \sum_i^n \lambda_i \underline{u}_i \circ \underline{u}_1 \\
\underline{v} \circ \underline{u}_2 = \sum_i^n \lambda_i \underline{u}_i \circ \underline{u}_2 \\
\underline{v} \circ \underline{u}_2 = \sum_i^n \lambda_i \underline{u}_i \circ \underline{u}_3
\end{cases}
$$

HO OTTENUTO 3 EQUAZIONI SCALARI LE CUI INCOGNITE SONO $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

- CASO PARTICOLARE: $\underline{u}_1 \perp \underline{u}_2 \perp \underline{u}_3$

~ $\underline{u}_i \circ \underline{u}_j = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

~ NEL NOSTRO CASO:

$$
\begin{cases}
\underline{v} \circ \underline{u}_1 = \lambda_1 \\
\underline{v} \circ \underline{u}_2 = \lambda_2 \\
\underline{v} \circ \underline{u}_3 = \lambda_3
\end{cases}
$$

- NOTAZIONE: 3 VERSORI ORTOGONALI IDENTIFICANO LA TERNA CARTESIANA

$$\boxed{\underline{u}_i, \underline{u}_j, \underline{u}_k}$$

- DATI $\underline{a}$, $\underline{b}$ E TERNA CARTESIANA:

$$\underline{a} = a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k}$$
$$\underline{b} = b_x \underline{i} + b_y \underline{j} + b_z \underline{k}$$
$$\longrightarrow \underline{a} \circ \underline{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$\longrightarrow$ CONSEGUENZA: $\underline{a} \circ \underline{a} = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = \|a\|^2$

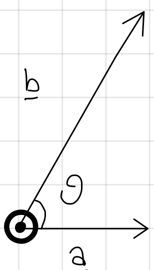
$$\boxed{\underline{a} \circ \underline{a} = \|a\|^2}$$

- SISTEMA DI RIFERIMENTO: PER RENDERE BIUNIVOCA $(\underline{P} - 1) \Leftrightarrow \underline{S}$

SCELGO UN PUNTO A CHE IDENTIFICO COME ORIGINE O E A TALE PUNTO AGGIUNGO UNA TERNA CARTESIANA $\underline{u}_i, \underline{u}_j, \underline{u}_k$

$\hookrightarrow$ $O + \{\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}\}$:= SISTEMA DI RIFERIMENTO

- PRODOTTO VETTORIALE:



$$\underline{a} \wedge \underline{b} = \begin{cases} \text{MODULO: } \|a\| \|b\| \sin\theta \\ \text{DIREZIONE: } \perp \underline{a}, \underline{b} \\ \text{VERSO: REGOLA MANO DX} \end{cases}$$

- PROPRIETÀ:

~ $\underline{a} \wedge \underline{b} = -\underline{b} \wedge \underline{a}$

~ $\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c}) \neq (\underline{a} \wedge \underline{b}) \wedge \underline{c}$

~ $\underline{a} \wedge \underline{b} = 0 \not\Rightarrow \underline{a}, \underline{b} = 0$ INFATTI $\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 + k\pi$

- FORMA CARTESIANA DEL PRODOTTO VETTORIALE:

~ DATI $\underline{a}$, $\underline{b}$ E TERNA CARTESIANA:

$$\underline{a} = a_x \underline{i} + a_y \underline{j} + a_z \underline{k}$$

$$\underline{b} = b_x \underline{i} + b_y \underline{j} + b_z \underline{k}$$

~ APPLICHIAMO IL DETERMINANTE SIMBOLICO:

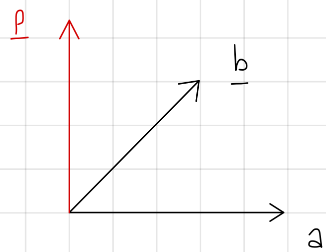
$$\underline{a} \wedge \underline{b} = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{pmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\underline{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\underline{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\underline{k}$$

- DOPPIO PRODOTTO VETTORE:

~ ABBIAMO NOTATO CHE $(\underline{a} \wedge \underline{b}) \wedge \underline{c} \neq \underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c})$ VERIFICHIAMOLO

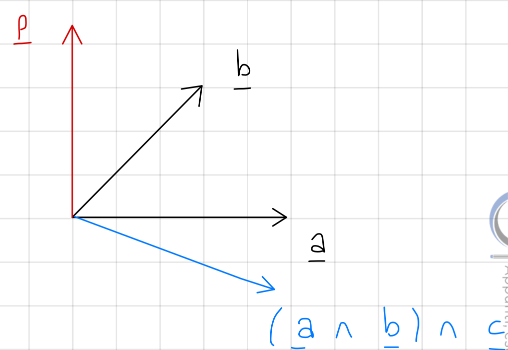
1) $(\underline{a} \wedge \underline{b}) \wedge \underline{c}$

~ DEFINIAMO $\underline{p} = \underline{a} \wedge \underline{b}$



$\Rightarrow (\underline{a} \wedge \underline{b}) \wedge c = \underline{p} \wedge \underline{c}$ QUINDI $\underline{p} \wedge \underline{c}$ GIACE NEL PIANO DI $\underline{a}$, $\underline{b}$

$(\underline{a} \wedge \underline{b}) \wedge c$ APPARTIENE AL PIANO $\underline{a}$, $\underline{b}$



~ CONSEGUENZA: $(\underline{a} \wedge \underline{b}) \wedge \underline{c} = \lambda_a \underline{a} + \lambda_b \underline{b}$

○ LUNGO x : $[(\underline{a} \wedge \underline{b}) \wedge \underline{c}]_x = \lambda_a \, \underline{a}_x + \lambda_b \, \underline{b}_x$

~ $[(\underline{a} \wedge \underline{b}) \wedge \underline{c}]_x = [\underline{p} \wedge \underline{c}]_x = (p_y c_z - p_z c_y)$

DET. FORMALE

~ $\begin{cases} p_y = a_z b_x - a_x b_z \\ p_z = a_x b_y - a_y b_x \end{cases}$ DAL PRODOTTO SCALARE $\underline{a} \wedge \underline{b}$

$\longrightarrow [(a \wedge b) \wedge c]_x = (a_z b_x - a_x b_z) c_z - (a_x b_y - a_y b_x) c_y =$

$= -(b_y c_y + b_z c_z) a_x + (a_y c_y + a_z c_z) b_x + a_x b_x c_x - a_x b_x c_x =$

LI AGGIUNGO IO

$= -(b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z) a_x + (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) b_x =$

$= -(\underline{b} \circ \underline{c}) a_x + (\underline{a} \circ \underline{c}) b_x$

~ $-(\underline{b} \circ \underline{c}) a_x + (\underline{a} \circ \underline{c}) b_x = \lambda_a a_x + \lambda_b b_x$

$\Rightarrow \lambda_a = -(b \circ c) \qquad \lambda_B = (a \circ c) \longrightarrow (\underline{a} \wedge \underline{b}) \wedge \underline{c} = \lambda_a \underline{a} + \lambda_b \underline{b}$

~ QUINDI: $(\underline{a} \wedge \underline{b}) \wedge \underline{c} = -(b \circ c) \, \underline{a} + (a \circ c) \, \underline{b}$

~ VEDIAMO CHE: $a \wedge (b \wedge c) = -[(\underline{b} \wedge \underline{c}) \wedge \underline{a}] =$

$= -[-(\underline{c} \circ \underline{a}) \underline{b} + (b \circ a) \underline{c}] = (a \circ c) \underline{b} - (a \circ b) \underline{c}$

- RIEPILOGO:

$$\boxed{(\underline{a} \wedge \underline{b}) \wedge \underline{c} = (\underline{a} \circ \underline{c}) \underline{b} - (\underline{b} \circ \underline{c}) \underline{a}}$$

- PRODOTTO MISTO: $(\underline{a} \wedge \underline{b}) \circ \underline{c}$
- PROPRIETÀ:

~ $(\underline{a} \wedge \underline{b}) \circ \underline{c} = (\underline{c} \wedge \underline{a}) \circ \underline{b} = (\underline{b} \wedge \underline{c}) \circ \underline{a}$ PERMUTAZIONE

- SOLUZIONE DELL' EQUAZIONE $\underline{a} \wedge \underline{x} = \underline{b}$

↳ PB: VOGLIO TROVARE $\underline{x}$

- OSS1: $\underline{b}$ DEVE ESSERE $\perp$ $\underline{a}$ (CONDIZIONE NECESSARIA)

↳ $\underline{a} \circ \underline{b} = 0$

- OSS2: LE SOLUZIONI DI QUESTA EQUAZIONE, QUANDO ESISTONO, SONO INFINITE

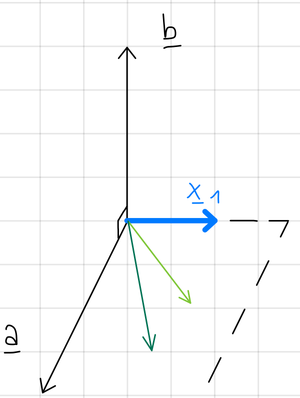
↳ DIM:

~ SUPPONGO x_1: $\underline{a} \wedge \underline{x_1} = \underline{b}$

~ TUTTE LE SOLUZIONI $\underline{x_2} = \underline{x_1} + \lambda \underline{a}$ SONO SOLUZIONI DELL' EQUAZIONE, INFATTI:

$$\underline{a} \wedge \underline{x_2} = \underline{a} \wedge (\underline{x_1} + \lambda \underline{a}) = \underline{a} \wedge \underline{x_1} + \cancel{\underline{a} \wedge \lambda \underline{a}} \qquad \boxed{\text{\%}}$$

↳ TROVIAMO UNA SOLUZIONE PARTICOLARE:



~ $x_1 = k(\underline{b} \wedge \underline{a})$

~ IMPONIAMO CHE x_1 SIA SOLUZIONE, QUINDI:

$$\underline{a} \wedge \underline{x_1} = \underline{b} \longrightarrow [\underline{a} \wedge k(\underline{b} \wedge \underline{a})] = \underline{b}$$

~ USO IL DOPPIO PRODOTTO VETTORE CHE RIPRENDO:

$$\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c}) = (\underline{a} \circ \underline{c})\, \underline{b} - (\underline{a} \circ \underline{b})\, \underline{c}$$

↳ QUINDI

$$k[\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{a})] = \underline{b}$$

$$\sim \quad k\left[\|\underline{a}\|^2\,\underline{b} - \cancel{(\underline{a}\circ\underline{b})}\,\underline{a}\right] = \underline{b}$$

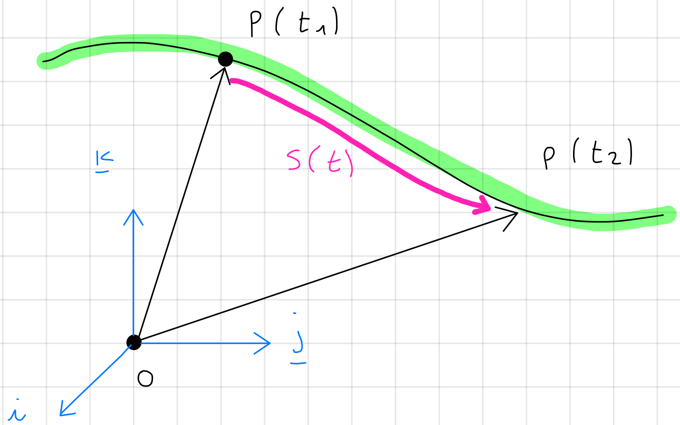
$$\sim \quad k\,\|\underline{a}\|^2\,\underline{b} = \underline{b} \longrightarrow k = \frac{1}{\|\underline{a}\|^2}$$

$$\longrightarrow \quad x_1 = \frac{\underline{b}\wedge\underline{a}}{\|\underline{a}\|^2} \longrightarrow \underbrace{x_2 = \frac{\underline{b}\wedge\underline{a}}{\|\underline{a}\|^2} + \lambda\,\underline{a}}$$

TUTTE LE POSSIBILI SOLUZIONI (RETTA)

$$\boxed{x = \frac{\underline{b}\wedge\underline{a}}{\|\underline{a}\|^2} + \lambda\,\underline{a}}$$

CINEMATICA DEL PUNTO



POSIZIONE DI P DEFINITA DALLA FUNZIONE VETTORIALE : $t \rightarrow (p(t)-0)$

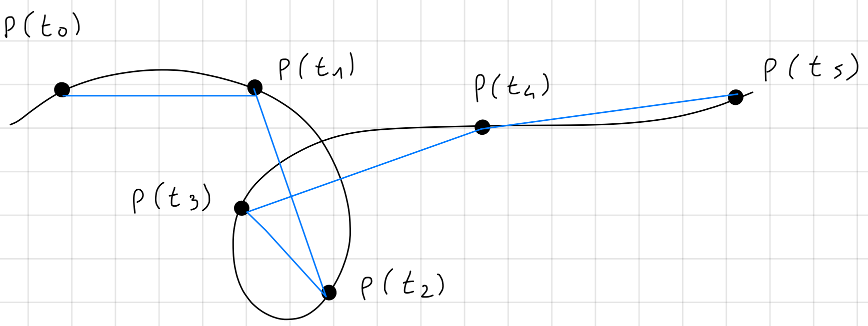
$$\begin{cases} x(t) = (P(t)-0)\circ\underline{i} \\ y(t) = (p(t)-0)\circ\underline{j} \\ z(t) = (p(t)-0)\circ\underline{k} \end{cases}$$

- LE 3 RELAZIONI SCALARI SONO LE EQUAZIONI DEL MOTO
- TRAIETTORIA : LUOGO DEI PUNTI PERCORSI DA $P(t)$
- CURVA ORARIA : FUNZIONE SCALARE $t \rightarrow s(t)$ DOVE s È LA LUNGHEZZA DI ARCO DI TRAIETTORIA PERCORSO A PARTIRE DA $P_0 = P(t_0)$
- VELOCITÀ MEDIA : $V_M = \dfrac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}$
- VELOCITÀ ISTANTANEA : $V(t) = \dfrac{dP(t)}{dt} = \dot{P}(t) = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t}$

- OSS: $v(t) \perp$ ALLA TRAIETTORIA IN CORRISPONDENZA DI $P(t)$

- DATO UN SISTEMA CARTESIANO: $v(t) = \dot{x}(t)\underline{i} + \dot{y}(t)\underline{j} + \dot{z}(t)\underline{k}$

- RELAZIONE TRA VELOCITÀ E CURVA ORARIA:



~ LUNGHEZZA SPEZZATA: $l_s = \sum_{k=1}^{n} \| P(t_k) - P(t_{k-1}) \|$

~ SUPPONIAMO LA TRAIETTORIA RETTIFICABILE: DATE TUTTE LE POSSIBILI SUDDIVISIONI

$\exists$ FINITO $\lim_{n \to +\infty} l_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \| P(t_k) - P(t_{k-1}) \|$

~ OSS: $\| P(t_k) - P(t_{k-1}) \| = \underbrace{\left\| \frac{P(t_k) - P(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right\|}_{v_i} (t_k - t_{k-1})$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \left\| \frac{P(t_k) - P(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right\| (t_k - t_{k-1})$$

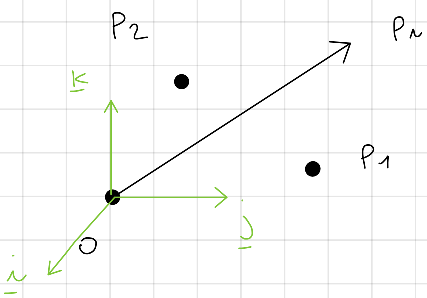
~ PER $n \to +\infty$ $\quad l_n \to s$ E $\frac{P(t_k) - P(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = v(t) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} = \int_{t_0}^{t}$

$\longrightarrow$ PER $n \to +\infty$: $s(t) = \int_{t_0}^{t} \| v(t) \| \, dt$

OPPURE $\dot{s}(t) = \| v(t) \| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

CINEMATICA DEI PUNTI

- DATI N PUNTI P_i ($i = 1, \dots, N$) E ORIGINE O.
- INTRODUCIAMO UN SDR CARTESIANO $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$

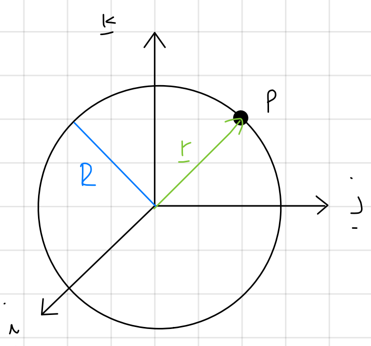


HO BISOGNO DI 3N COORDINATE PER IDENTIFICARE LA CONFIGURAZIONE DI N PUNTI

- VINCOLO: RELAZIONI SULLE COORDINATE CHE RIDUCONO LA MOBILITÀ DEL SISTEMA

  ↳ CONSEGUENZA: RIDUCONO # DI COORDINATE NECESSARIE PER DESCRIVERE IL SISTEMA

- ESEMPIO 1: PUNTO VINCOLATO A MUOVERSI SU UNA SFERA



$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$ VINCOLO

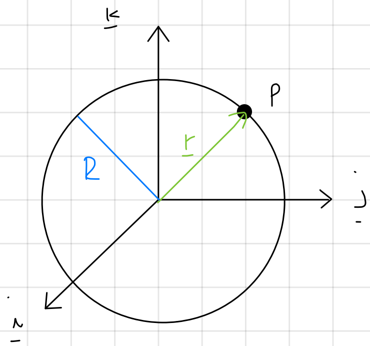
- $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \longrightarrow z = \pm \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} = z(x, y)$

$\Rightarrow \underline{r} = x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z(x,y)\,\underline{k} = \underline{r}(x, y)$

↳ DA 3 COORDINATE IL VINCOLO MI HA PERMESSO DI RIDURRE A 2 COORDINATE LIBERE

• OSS: LA SCELTA DELLE COORDINATE LIBERE É ARBITRARIA

↳ SE USO LE COORDINATE SFERICHE r, θ, φ:



$$\begin{cases} x = r \sin\theta \cos\varphi \\ y = r \sin\theta \sin\varphi \\ z = r \cos\theta \end{cases}$$

VINCOLO: $r = R$

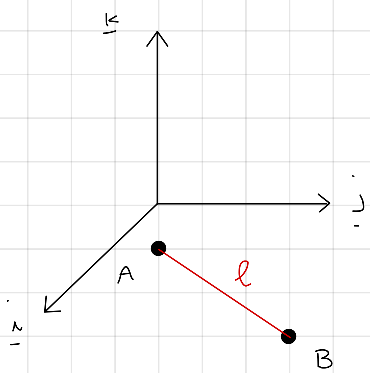
$$\begin{cases} x = R \sin\theta \cos\varphi \\ y = R \sin\theta \sin\varphi \\ z = R \cos\theta \end{cases} \longrightarrow 2 \text{ COORDINATE LIBERE}$$

• ESEMPIO 2: MANUBRIO SUL PIANO

• MANUBRIO. DATI A, B.

$$\underline{r}_A = x_A \underline{i} + y_A \underline{j} + z_A \underline{k}$$

$$\underline{r}_B = x_B \underline{i} + y_B \underline{j} + z_B \underline{k}$$



<u>VINCOLI</u>

1) $A, B \in$ PIANO $\longrightarrow \begin{cases} z_A = 0 \\ z_B = 0 \end{cases}$

2) MANUBRIO DI LUNGHEZZA ℓ.

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = \ell^2$$

CONSEGUENZA: 6 COORDINATE − 3 RELAZIONI DI VINCOLO = 3 COORDINATE LIBERE

~ SFRUTTO I VINCOLI:

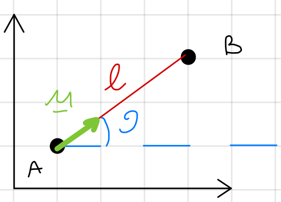
i) $\begin{cases} z_A = 0 \\ z_B = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} \underline{r}_A = x_A \underline{i} + y_A \underline{j} \\ \underline{r}_B = x_B \underline{i} + y_B \underline{j} \end{matrix}$

ii) $(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = \ell^2 \longrightarrow$ ISOLO P. ES. $y_A \longrightarrow y_A = y_A(x_A, x_B, y_B)$

$\rightsquigarrow$ QUINDI:
$$\begin{cases} \underline{r}_A = x_A \underline{i} + y_A(x_A, x_B, y_B)\underline{j} \\ \underline{r}_B = x_B \underline{i} + y_B \underline{j} \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} \underline{r}_A = \underline{r}_A(x_A, x_B, y_B) \\ \underline{r}_B = \underline{r}_B(x_A, x_B, y_B) \end{matrix}$$

MA AVREI POTUTO PARAMETRIZZARE DIVERSAMENTE:

i)
$$\begin{cases} z_A = 0 \\ z_B = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} \underline{r}_A = x_A \underline{i} + y_A \underline{j} \\ \underline{r}_B = x_B \underline{i} + y_B \underline{j} \end{matrix}$$



$(B - A) = \ell \underline{u}$ DOVE $\underline{u} = \cos\vartheta \underline{i} + \sin\vartheta \underline{j} = \underline{u}(\vartheta)$

NOTO CHE:

$$\left.\begin{aligned} \underline{r}_A &= x_A \underline{i} + y_A \underline{j} \\ \underline{r}_A &= (A - O) + (B - A) \\ &= \underline{r}_A + (B - A) \\ &= x_A \underline{i} + y_A \underline{j} + \ell \underline{u}(\vartheta) \end{aligned}\right\} \quad \begin{matrix} \underline{r}_A = \underline{r}_A(x_A, y_A, \vartheta) \\ \underline{r}_B = \underline{r}_B(x_A, y_A, \vartheta) \end{matrix}$$

- GENERALIZZAZIONE:

- # COORD. LIBERE = # COORD SENZA VINCOLI − # RELAZIONI DI VINCOLO
- DATI N PUNTI P_i $(i = 1, \dots, n)$ SOGGETTI A M $(< 3N)$ RELAZIONI DI VINCOLO.

$$g_\ell(r_1, \dots, r_N, t) = 0 \qquad \ell = 1, \dots, M$$

$$\begin{cases} g_1(r_1, \dots, r_N, t) = 0 \\ g_M(r_1, \dots, r_N, t) = 0 \end{cases}$$ SISTEMA DI M EQUAZIONI IN 3N VARIABILI

- DIVIDIAMO 3N COORDINATE: $\overbrace{\underbrace{r_{1x}, r_{1y}, \dots}_{M}\underbrace{\dots, r_{Ny}, r_{Nx}}_{3N - M}}^{3N}$

- SFRUTTURIAMO IL SISTEMA PER AVERE M COORD. IN FUNZIONE DELLE RIMANENTI 3N − M

⟶ CONSEGUENZA: $\forall P_i$, $\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \dots, q_n, t)$ $\quad i = 1, \dots, N \quad n = 3N - M$

- NOTAZIONE: $q_1, \dots, q_n$ SONO COORD. LIBERE

  $n = 3N - M$ È IL NUMERO DI GRADI DI LIBERTÀ

CLASSIFICAZIONE DEI VINCOLI:

1) I VINCOLI ESPRESSI DA $g_\ell(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, t) = 0$ SONO VINCOLI OLONOMI

1.1) VINCOLI FISSI: $\forall \ell \quad \dfrac{\partial g_\ell}{\partial t} = 0 \Rightarrow g_\ell(r_1, \dots, r_N) = 0 \Rightarrow \underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \dots, q_N)$

1.2) VINCOLI MOBILI: $\exists \ell : \dfrac{\partial g_\ell}{\partial t} \neq 0 \Rightarrow g_\ell(r_1, \dots, r_N, t) = 0 \Rightarrow \underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \dots, q_N, t)$

- ATTO DI MOTO DI UN SISTEMA DI PUNTI: INSIEME DELLE VELOCITÀ $v_i, \dots, v_N$ DI UN SISTEMA

- ATTO DI MOTO DI UN SISTEMA OLONOMO:

- DATI N PUNTI SOGGETTI A M RELAZIONI DI VINCOLO ALLORA:

  $\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \dots, q_n, t) \quad \underline{i} = 1, \dots, N \quad n = 3N - M$

- DERIVIAMO: $v_i = \dfrac{d r_i}{dt} = \dfrac{\partial r_i}{\partial t} + \dfrac{\partial r_i}{\partial q_i}\dot{q}_i + \dots + \dfrac{\partial r_i}{\partial q_n}\dot{q}_n =$

$$= \boxed{\frac{\partial r_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_k}\dot{q}_k}$$ ATTO DI MOTO DI UN SISTEMA OLONOMO

• $\underline{v}_i$ È UNA SOMMA DI $n+1$ CONTRIBUTI:

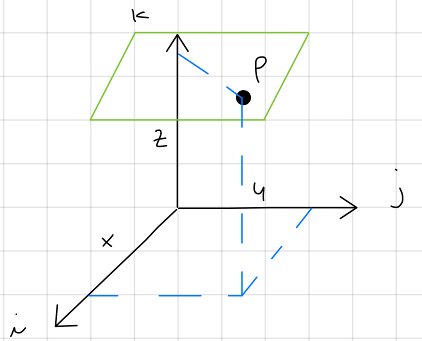
1) $\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t}$: CONGELO TUTTE LE q_k E FACCIO VARIARE SOLO t

→ VELOCITÀ DI TRASCINAMENTO DEL VINCOLO MOBILE

2) $\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_{\bar{k}}} \dot{q}_{\bar{k}}$: CONGELO VINCOLO MOBILE E FISSO TUTTE q_k TRANNE $q_{\bar{k}}$

→ ATTO DI MOTO COMPLESSIVO È LA SOVRAPPOSIZIONE DI ATTI DI MOTO ASSOCIATI ALLA VARIAZIONE DELLE SINGOLE COORD. LIBERE

• ESEMPIO: PUNTO SU PIATTAFORMA MOBILE



$\underline{r} = x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z\,\underline{k}$

VINCOLO: $z = h(t)$

$z - h(t) = 0$

$g(x, y, z, t) = 0$

~ CONSEGUENZA $n = 3N - M = 3 - 1 = 2$

↳ INFATTI $\underline{r} = \underline{x}\,\underline{i} + \underline{y}\,z + h(t)\,\underline{k} = \underline{r}(\overset{q_1}{x}, \overset{q_2}{y}, t)$

~ ATTO DI MOTO: $v = \frac{d\underline{r}}{dt} = \underbrace{\dot{x}\,\underline{i}}_{\frac{\partial r}{\partial q_1}\dot{q}_1} + \underbrace{\dot{y}\,\underline{j}}_{\frac{\partial r}{\partial q_2}\dot{q}_2} + \dot{h}(t)\,\underline{k}$ $\quad \frac{\partial r}{\partial t}$

⇝ $\frac{\partial r}{\partial t} = \dot{h}(t)\,\underline{k}$

$\frac{\partial r}{\partial q_1}\dot{q}_1 = \frac{\partial r}{\partial x}\dot{x} = \underline{i}\,\dot{x} = \dot{x}\,\underline{i}$

$$\frac{\partial r}{\partial q_2}\dot{q}_2 = \frac{\partial r}{\partial y}\dot{y} = \underline{j}\,\dot{y} = \dot{y}\,\underline{j}$$

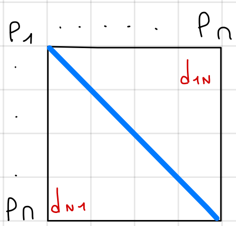
CINEMATICA DEL CORPO RIGIDO

- **DEFINIZIONE CORPO RIGIDO:** SISTEMA DI PUNTI CON DISTANZE RECIPROCHE COSTANTI

~ SUPPONIAMO N PUNTI $\longrightarrow$ $3N$ COORDINATE SENZA VINCOLI

1) VINCOLO DI RIGIDITÀ: $\| P_i - P_j \| = d_{ij} \quad \forall i, j$ CON $i \neq j$

~ CONTIAMO RELAZIONI DI VINCOLO:



- ESCLUDO $i = j$, IN CUI HO N ELEMENTI

$$\Rightarrow M = N^2 - N = N(N-1)$$

~ ⚠ $\| P_N - P_1 \| = d_{N1}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \|$

$\quad\; \| P_1 - P_N \| = d_{1N}$ $\Rightarrow$ VINCOLI DIPENDENTI $\Rightarrow$ $M = \dfrac{N(N-1)}{2}$

NE HO PRESI LA METÀ

~ CALCOLIAMO $n = 3N - M = 3N - \dfrac{N(N-1)}{2}$

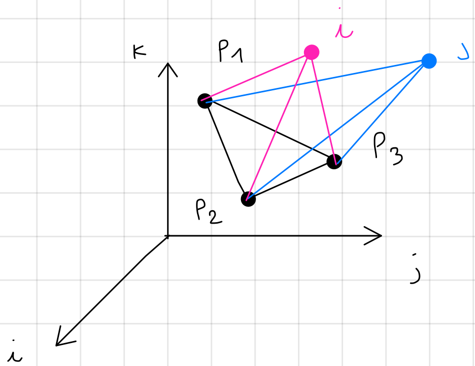
~ NOTA: CON LA FORMULA $(*)$ CON $\begin{cases} N = 7 \Rightarrow n = 0 \\ N > 7 \Rightarrow n < 0 \end{cases}$

$\longrightarrow$ LA FORMULA $(*)$ VA RIVISTA

$\downarrow$

LA RIVEDO GRAFICAMENTE

• CONSIDERIAMO UN SISTEMA N PUNTI E IMPONGO CHE SIANO SOLIDALI TRA LORO



$$\left.\begin{aligned} \|P_2 - P_1\| &= d_{12} \\ \|P_2 - P_3\| &= d_{23} \\ \|P_3 - P_1\| &= d_{13} \end{aligned}\right\} \text{3 RELAZIONI}$$

PRENDO P_i E P_j E IMPONGO CHE SIANO SOLIDALI A P_1, P_2, P_3

$$P_i) \left.\begin{aligned} \|P_i - P_1\| &= cost = d_{1i} \\ \|P_i - P_2\| &= cost = d_{2i} \\ \|P_i - P_3\| &= cost = d_{3i} \end{aligned}\right\} 3 \qquad P_j) \left.\begin{aligned} \|P_j - P_1\| &= cost = d_{1j} \\ \|P_j - P_2\| &= cost = d_{2j} \\ \|P_j - P_3\| &= cost = d_{3j} \end{aligned}\right\} 3$$

$\longrightarrow$ 3 RELAZIONI $\forall P_i \neq P_1, P_2, P_3$

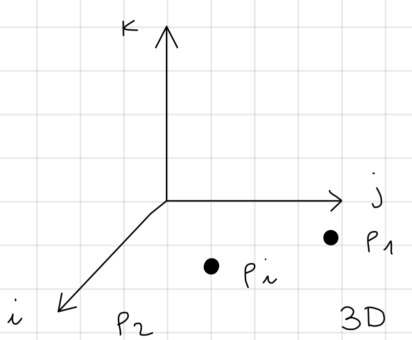
3 ELEMENTI IN MENO (P_1, P_3, P_3)

$$M = \underbrace{3}_{P_1, P_2, P_3} + \underbrace{3(N - 3)}_{P_i \neq P_1, P_2, P_3} = 3N - 6$$

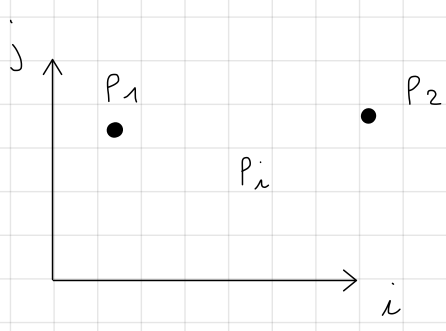
$$\boxed{n = 3N - M = 3N - (3N - 6) = 6}$$

! IL NUMERO DI GRADI DI LIBERTÀ DI UN CORPO LIBERO È UGUALE A 6

• CORPO RIGIDO PIANO:



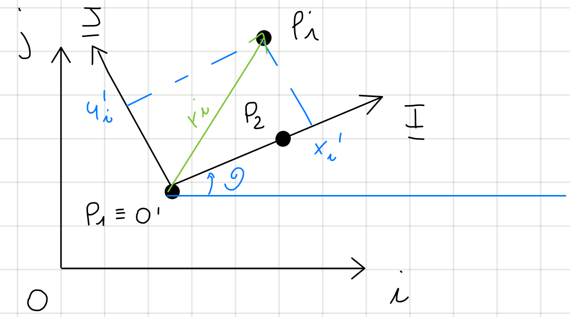
$\longrightarrow$



- SCEGLIAMO P_1, P_2

- $P_1 \equiv O'$

- $\underline{I} = \dfrac{P_2 - P_1}{\| P_2 - P_1 \|} \Rightarrow \underline{J} \perp \underline{I}$



- $\underline{r}_i = (P_1 - O) + (P_i - P_1) = x_1 \underline{i} + y_1 \underline{j} + x_i' \underline{I} + y_i' \underline{J}$

$\rightsquigarrow$ VANTAGGIO: x_i', y_i' COSTANTI

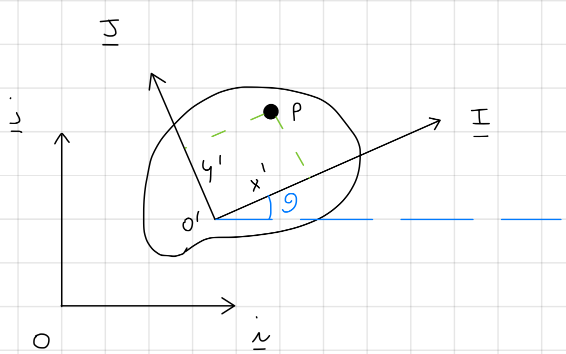
- OSS: $\underline{I} = \cos\vartheta \, \underline{i} + \sin\vartheta \, \underline{j} = \underline{I}(\vartheta)$

$\underline{J} = -\sin\vartheta \, \underline{i} + \cos\vartheta \, \underline{j} = \underline{J}(\vartheta)$

- $r_i = x_1 \underline{i} + y_1 \underline{j} + x_i' I(\vartheta) + y_i' J(\vartheta)$

$\Rightarrow r_i(x_1, y_1, \vartheta) \Rightarrow$ 3 GDL NEL PIANO

- CORPO RIGIDO CONTINUO:



$r_P = x_{O'} \underline{i} + y_{O'} \underline{j} + x' \underline{I} + y' \underline{J}$

DOVE

$\underline{I} = \cos\vartheta \, \underline{i} + \sin\vartheta \, \underline{j}$

$\underline{J} = -\sin\vartheta \, \underline{i} + \cos\vartheta \, \underline{j}$

- ATTO DI MOTO RIGIDO PIANO:

~ DERIVIAMO $\underline{r}_P$: $\underline{v}_P = \dfrac{d r_P}{dt} = \underbrace{\dot{x}_{O'} \underline{i} + \dot{y}_{O'} \underline{j}}_{\underline{v}_{O'}} + \left(x' \dfrac{d I}{dt} + y' \dfrac{d J}{dt} \right)$

~ MA: $\dfrac{d I}{dt} = \dfrac{d I}{d\vartheta} \dfrac{d\vartheta}{dt} = \dot{\vartheta} \dfrac{d I}{d\vartheta}$

$\dfrac{d J}{dt} = \dot{\vartheta} \dfrac{d J}{d\vartheta}$

~ DOVE: $\dfrac{d\underline{I}}{d\vartheta} = -\sin\vartheta\,\underline{i} + \cos\vartheta\,\underline{j} = \underline{J}$

$$\frac{d\underline{J}}{d\vartheta} = -\cos\vartheta\,\underline{i} - \sin\vartheta\,\underline{j} = -\underline{I}$$

- NOTA: $\left.\begin{array}{l} \underline{I} \wedge \underline{J} = \underline{k} \\ \underline{k} \wedge \underline{I} = \underline{J} \\ \underline{J} \wedge \underline{k} = \underline{I} \end{array}\right| \longrightarrow \begin{array}{l} \underline{J} = \underline{k} \wedge \underline{I} \\ -\underline{I} = -\underline{J} \wedge \underline{k} = \underline{k} \wedge \underline{J} \end{array}$

- $\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\underline{I}}{dt} = \dot{\vartheta}\,\underline{k} \wedge \underline{I} \\ \dfrac{d\underline{J}}{dt} = \dot{\vartheta}\,\underline{k} \wedge \underline{J} \end{array}\right\} \quad \underline{V}_P = \underline{V}_{O'} + \left(x'\,\dot{\vartheta}\,\underline{k} \wedge \underline{I} + y'\,\dot{\vartheta}\,\underline{k} \wedge \underline{J}\right)$

- $\underline{V}_P = \underline{V}_{O'} + \dot{\vartheta}\,\underline{k} \wedge \underbrace{\left(x'\underline{I} + y'\underline{J}\right)}_{P - O'}$

$\downarrow$

$$\underline{V}_P = \underline{V}_{O'} + \dot{\vartheta}\,\underline{k} \wedge (P - O')$$

- DEFINIAMO $\omega = \dot{\vartheta}\,\underline{k}$ VELOCITÀ ANGOLARE

$$\hookrightarrow \boxed{\underline{V}_P = \underline{V}_{O'} + \omega \wedge (P - O')}$$

- OSS1: $\underline{\omega}$ HA LA STESSA DIREZIONE DI $\underline{k}$

NOTA: SCELTO ϑ POSITIVO ANTIORARIO, ALLORA:

- ROTAZIONE ANTIORARIA (STESSO VERSO DI $\underline{k}$) $\longrightarrow \dot{\vartheta} > 0$

- OSS2: $\|\omega\| = \|\dot{\vartheta}\|$ È DERIVATA DI ANGOLO TRA DIREZIONE FISSA $\underline{i}$ E DIREZIONE SOLIDALE AL CORPO RIGIDO ($\underline{I}$)

- OSS3: $\underline{\omega}$ NON DIPENDE DA $\underline{P}$ MA È PROPRIETÀ DEL C.R.
- OSS4: LA FORMULA VALE $\forall$ A, B $\in$ C.R

DIM:

$A \longrightarrow \underline{v}_A = v_{O'} + \omega \wedge (A - O')$ 1

$B \longrightarrow \underline{v}_B = v_{O'} + \omega \wedge (B - O')$ 2

2 - 1 : $\underline{v}_B - \underline{v}_A = \underline{\omega} \wedge (B - A) \longrightarrow v_B = v_A + \omega \wedge (B - A)$

PROPRIETÀ FONDAMENTALI ATTO DI MOTO RIGIDO PIANO

- TIPOLOGIE DI MOTO:

1) ATTO DI MOTO TRASLATORIO: ATTO DI MOTO IN CUI $\omega = 0$

↳ CONSEGUENZA: $\forall \underline{P} \Rightarrow \underline{v}_P = \underline{v}_{O'}$

DIM: SE A, B, CON A ≠ 0, HANNO $\underline{v}_A = \underline{v}_B$ => ATTO DI MOTO TRASLATORIO

~ $A \longrightarrow \underline{v}_A = v_{O'} + \omega \wedge (A - O')$

~ $B \longrightarrow \underline{v}_B = v_{O'} + \omega \wedge (B - O')$

~ $\underline{v}_B - \underline{v}_A = \underline{\omega} \wedge (B - A) \Rightarrow \omega \wedge (B - A) = 0$

~ 2 POSSIBILITÀ:

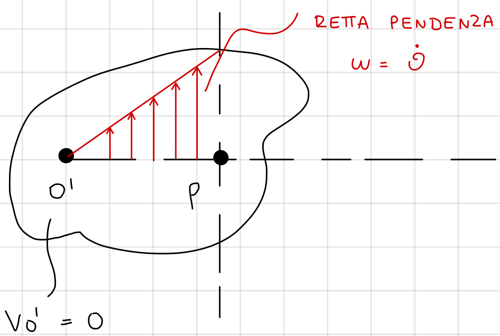
1. $\omega = 0$
2. $\omega \parallel (B - A)$ IMPOSSIBILE: $\omega \perp (B - A)$

1) ATTO DI MOTO ROTATORIO: ESISTE UN PUNTO CON VELOCITÀ NULLA

~ SUPPONIAMO CHE TALE PUNTO SIA $v_{O'} = 0$

↳ CONSEGUENZA: $v_P = \cancel{v_{O'}} + \omega \wedge (P - O') \longrightarrow \boxed{v_P = \omega \wedge (P - O')}$

- DIAGRAMMA VELOCITÀ:



~ $\underline{V}_P = \underline{\omega} \wedge (P - O')$

~ DIREZIONE $\omega \wedge (P - O')$

$$\Rightarrow \begin{cases} \perp \underline{\omega} \\ \perp (P - O') \end{cases}$$

~ MODULO: $\| V_P \| = \| \omega \wedge (P - O') \| = \| \underline{\omega} \| \| P - O' \|$

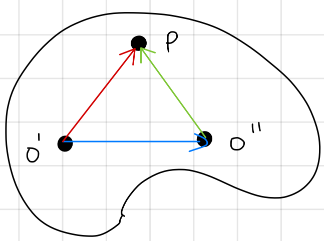
- NEL <u>CASO GENERALE</u>:

$$\boxed{\underline{V}_P = V_{O'} + \underline{\omega} \wedge (P - O')}$$

L'ATTO DI MOTO GENERALE PUÒ SEMPRE ESSERE VISTO COME LA COMPOSIZIONE DI DUE ATTI FONDAMENTALI: TRASLATORIO E ROTATORIO

- OSS: $\exists$ INFINITE SCOMPOSIZIONI IN ATTO DI MOTO TRASLATORIO + ROTATORIO

↳ DIM:



~ $O' \Rightarrow \underline{V}_P = \underline{V}_{O'} + \omega \wedge (P - O')$

~ PRENDIAMO O''

$$(P - O') = (O'' - O') + (P - O'')$$

$$V_P = V_{O'} + \omega \wedge [(O'' - O') + (P - O'')]$$

$$= \underbrace{V_{O'} + \omega \wedge (O'' - O')}_{V_{O''}} + \underline{\omega} \wedge (P - O'')$$

$$\Rightarrow \underline{V}_P = V_{O''} + \underline{\omega} \wedge (P - O'')$$

- **TEOREMA:** OGNI ATTO DI MOTO RIGIDO PIANO NON TRASLATORIO PUÓ SEMPRE ESSERE RICONDOTTO AD UN ATTO DI MOTO ROTATORIO

DIM: $\sim O' \Rightarrow \underline{v}_P = \underline{v}_{O'} + \underline{\omega} \wedge (P - O')$

$\sim O'' \Rightarrow \underline{v}_P = \underline{v}_{O''} + \underline{\omega} \wedge (P - O'')$

~ DOBBIAMO TROVARE UN PUNTO C TALE CHE $\underline{v}_C = 0$

~ DATO O' COMUNQUE $\underline{v}_P = \underline{v}_{O'} + \underline{\omega} \wedge (P - O')$

~ IMPONIAMO $\underline{v}_P = 0 \longrightarrow 0 = v_{O'} + \omega \wedge (C - O') \longrightarrow \omega \wedge \underbrace{(C - O')}_{\text{INCOGNITA}} = -v_{O'}$

$$\underline{a} \wedge \underline{x} = \underline{b}$$

~ CONDIZIONE NECESSARIA: $\omega \perp v_{O'}$

~ SOLUZIONE. $\underline{x} = \dfrac{\underline{b} \wedge \underline{a}}{\|\underline{a}\|^2} + \lambda \underline{a} \quad \Rightarrow (C - O') = \dfrac{-v_{O'} \wedge \underline{\omega}}{\|\omega\|^2} + \cancel{\lambda} \underline{\omega}$

$\lambda = 0$ NEL CASO DI MOTO RIGIDO PIANO

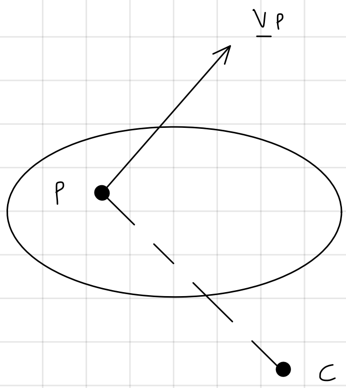
$$\boxed{(C - O') = \frac{\underline{\omega} \wedge v_{O'}}{\|\omega\|^2}}$$

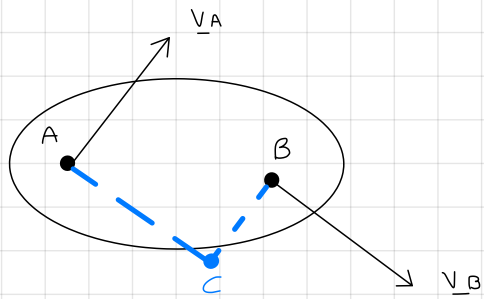
CENTRO DI ISTANTANEA ROTAZIONE - CIR

- OSS1: IL CIR PUÓ CAMBIARE NEL TEMPO
- OSS2: IL CIR PUÓ NON APPARTENERE AL CORPO RIGIDO
- OSS3: DATI $\omega, v_{O'} \Rightarrow (C - O') = \dfrac{\omega \wedge v_{O'}}{\|\omega\|^2}$ METODO ANALITICO

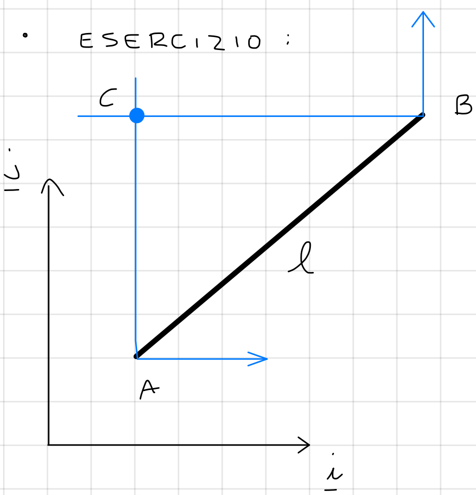
$\hookrightarrow$ **TEOREMA DI CHASLES (METODO GEOMETRICO):**

~ SE C ESISTE $\Rightarrow \underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge (P - C) \Rightarrow v_P \perp (P - C)$





• ESERCIZIO :



ASTA AB DI LUNGHEZZA ℓ

$\underline{V}_A = V_A\ \underline{i}$

$\underline{V}_B = 3 V_A\ \underline{j}$

QUESITO: DETERMINARE $\underline{\omega}$

1) TROVO IL CIR GRAFICAMENTE

2) ~ RICORDANDO CHE NEL CIR $\underline{V}_C = 0$:

$$\underline{V}_A = V_A\, \underline{i} = \underline{\omega} \wedge (A - C) \Rightarrow \| V_A \| = V_A = \| \omega \| \, \| A - C \|$$

$$\| \omega \| = \frac{V_A}{\| A - C \|}$$

~ ANALOGAMENTE: $\| \omega \| = \dfrac{3 \| V_A \|}{\| B - C \|}$

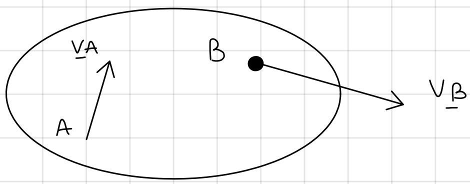
~ $\dfrac{\cancel{\| V_A \|}}{\| A - C \|} = \dfrac{3 \cancel{\| V_A \|}}{\| B - C \|} \longrightarrow \| B - C \| = 3 \| A - C \|$

~ $\| A - C \|^2 + \| B - C \|^2 = \ell^2$ IN QUANTO $A\hat{B}C$ T. RETTANGOLO

$$\| A - C \|^2 + 9 \| A - C \|^2 = \ell^2 \rightarrow \| A - C \| = \sqrt{\frac{\ell^2}{10}}$$

$$\| \omega \| = \frac{V_A}{\| A - C \|} = \frac{V_A \sqrt{10}}{\ell}$$

- DETERMINAZIONE DI $\underline{\omega}$ DA $\underline{V}_A$, $\underline{V}_B$ CON A, B $\in$ C R.



~ $\underline{V}_B = \underline{V}_A + \underline{\omega} \wedge (B - A)$

↳ $\omega \wedge (B - A) = V_B - V_A$

~ $(B - A) \wedge \underline{\omega} = \underline{V}_A - \underline{V}_B$

~ CONDIZIONE NECESSARIA: $(\underline{V}_A - \underline{V}_B) \perp (B - A) \Rightarrow (V_A - V_B) \circ (B - A) = 0$

~ SOLUZIONE: $\underline{x} = \dfrac{b \wedge \underline{a}}{\| \underline{a} \|^2} + \lambda \underline{a}$

$$\Rightarrow \underline{\omega} = \frac{(\underline{V}_A - V_B) \wedge (B - A)}{\| B - A \|^2} + \cancel{\lambda} (B - A)$$

↳ 0 IN CASO PIANO

DIMOSTRIAMO CHE $(\underline{V}_A - \underline{V}_B) \circ (B - A) = 0$ PER C.R. PIANO:

~ $\| B - A \| = \text{cost} = d_{AB}$

$\| B - A \|^2 = \text{cost} = d_{AB}^2$

$(B - A) \circ (B - A) = d_{AB}^2$

~ DERIVIAMO: $\dfrac{d}{dt} \left[(B - A) \circ (B - A) \right]$

$$(v_B - v_A) \circ (B-A) + (B-A) \circ (v_B - v_A) = 0$$

$$\sim 2 (v_B - v_A) \circ (B-A) = 0 \quad \Rightarrow \quad (v_B - v_A) \circ (B-A) = 0$$

$$\sim -(v_A - v_B) \circ (B-A) = 0$$

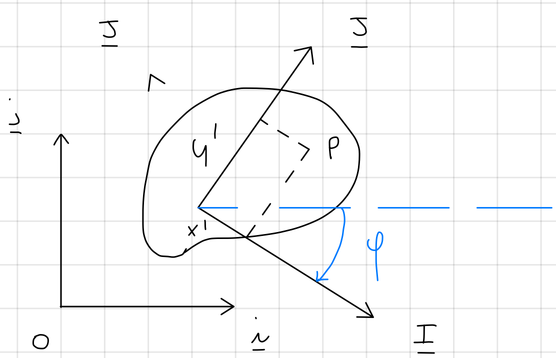
- OSS: $(\underline{v}_B - \underline{v}_A) \circ (B-A) = 0 \longrightarrow \underline{v}_B \circ (B-A) - \underline{v}_A (B-A) = 0$

MA $(B-A) = \| B-A \| \underline{u} \longrightarrow$ VERSORE

$\hookrightarrow \quad v_B \cancel{\| B-A \|} \underline{u} - v_A \cancel{\| B-A \|} \underline{u} = 0 \qquad v_B \underline{u} = v_A \underline{u}$

COORDINATE ANGOLARI

- MI CHIEDO: COSA ACCADE SE LA COORDINATA ANGOLARE É POSITIVA IN SENSO ORARIO



$$\sim (P - O) = (O' - O) + (P - O')$$
$$= x_{O'} \underline{i} + y_{O'} \underline{j} + x' \underline{I} + y' \underline{J}$$

$\sim$ DOVE: $\underline{I} = \cos\varphi \, \underline{i} - \sin\varphi \, \underline{j}$

$\underline{J} = \sin\varphi \, \underline{i} + \cos\varphi \, \underline{j}$

$\sim$ CALCOLIAMO LA VELOCITÀ $\underline{v}_P$:

$$v_P = \frac{d(P-O)}{dt} = \dot{x}_{O'} \underline{i} + \dot{y}_{O'} \underline{j} + x' \frac{d\underline{I}}{dt} + y' \frac{d\underline{J}}{dt}$$

DOVE: $\dfrac{d\underline{I}}{dt} = \dfrac{d\underline{I}}{d\varphi} \dot{\varphi} \qquad \dfrac{d\underline{J}}{dt} = \dfrac{d\underline{J}}{d\varphi} \dot{\varphi}$

MA: $\dfrac{d\underline{I}}{d\varphi} = -\sin\varphi \, \underline{i} - \cos\varphi \, \underline{j} = -\underline{J} = -\underline{k} \wedge \underline{I}$

$\dfrac{d\underline{J}}{d\varphi} = \cos\varphi \, \underline{i} - \sin\varphi \, \underline{j} = \underline{I} = \underline{J} \wedge \underline{k} = -\underline{k} \wedge \underline{J}$

~ SOSTITUIAMO:

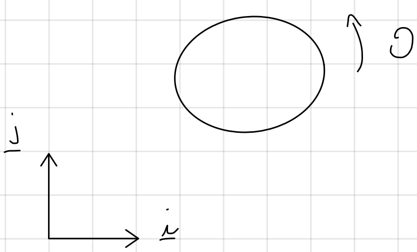
$$\underline{v}_P = \underline{v}_{O'} - \dot{\varphi}\,\underline{k} \wedge (x'\underline{I} + y'\underline{J}) = v_{O'} + \omega \wedge (P - O') \quad \text{DOVE: } \boxed{\omega = -\varphi\,\underline{k}}$$

$$\longrightarrow \quad \underline{v}_P = v_{O'} + \omega \wedge (P - O')$$

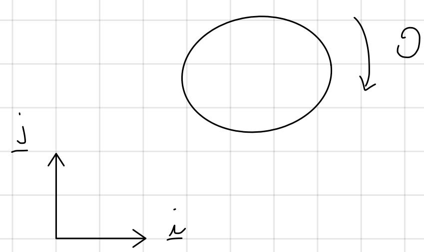
- OSS1: $\| \omega \| = \| \dot{\varphi} \|$ È DERIVATA DI ANGOLO TRA DIREZIONE FISSA E DIREZIONE SOLIDALE AL C.R.

- OSS2: SCEGLIENDO φ POSITIVO SE IN SENSO ORARIO:
  - ROTAZIONI ANTIORARIE ($\underline{\omega}$ STESSO VERSO DI $\underline{k}$) $\Rightarrow \dot{\varphi} < 0$
  - ROTAZIONI ORARIE ($\underline{\omega}$ VERSO OPPOSTO A $\underline{k}$) $\Rightarrow \dot{\varphi} > 0$

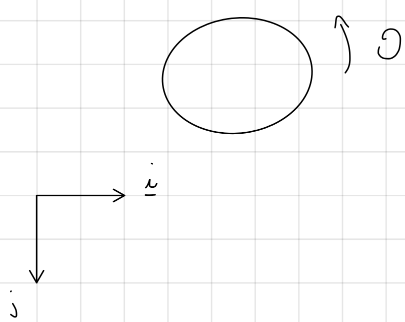
RIASSUMENDO:



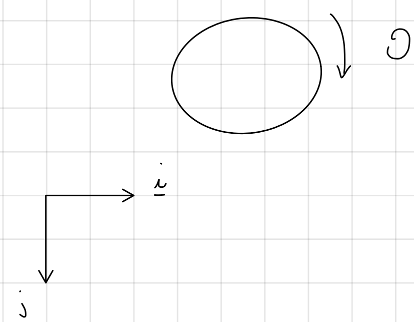
$\underline{\omega} = \vartheta\,\underline{k}$



$\underline{\omega} = -\vartheta\,\underline{k}$



$\underline{\omega} = -\vartheta\,\underline{k}$



$\underline{\omega} = \vartheta\,\underline{k}$

VINCOLI

- OGNI VINCOLO OLONOMO SU UN SISTEMA DI N PUNTI P_i $(i = 1, \dots, N)$

PUÒ ESSERE ESPRESSO COME: $g_\ell(r_1, \dots, r_N, t) = 0 \qquad \ell = 1, \dots, M$

↳ DERIVIAMO RISPETTO AL TEMPO:

$$\frac{d g_\ell}{dt} = 0 \implies \frac{\partial g_\ell}{dt} + \nabla_{\underline{r}_1} g_\ell \circ \dot{\underline{r}}_1 + \dots + \nabla_{\underline{r}_N} g_\ell \circ \dot{\underline{r}}_N = 0$$

CHE POSSO SCRIVERE COME: $\displaystyle \frac{\partial g_\ell}{\partial t} = \frac{\partial g_\ell}{\partial r_1} \circ \dot{r}_1 + \frac{\partial g_\ell}{\partial r_N} \circ \dot{r}_N = 0$

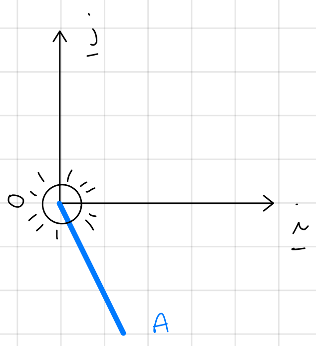
- I VINCOLI SONO ANCHE RELAZIONI CINEMATICHE: LEGANO LA VELOCITÀ AI PUNTI DEL SISTEMA

1 CERNIERA

- **CERNIERA PIANA 2D APPLICATA A UN CORPO RIGIDO:**

IL PUNTO IN CUI APPLICO LA CERNIERA HA COORDINATE COSTANTI NEL TEMPO

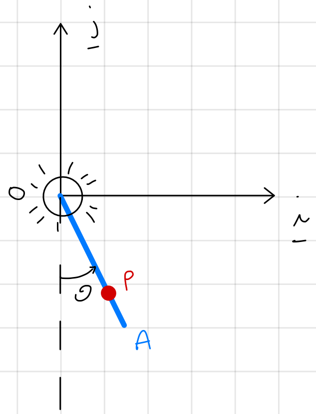
↳ ESEMPIO: PENDOLO SEMPLICE



~ ASTA AO INCERNIERATA IN O

~ VINCOLO: $\left.\begin{array}{l} x_O = 0 \\ y_O = 0 \end{array}\right\}$ 2 RELAZIONI SCALARI

$$\#\, g.d.\ell.\,(n) = \underbrace{3\ g d\ell}_{\text{ASTA NON VINCOLATA}} - 2\ \text{REL. VINCOLO} = 1$$



$$\begin{cases} x_P = \|P-O\| \sin\theta \\ y_P = -\|P-O\| \cos\theta \end{cases} \quad \underline{r}_P = \underline{r}_P(\theta) \qquad 1 \text{ g.d.l.}$$

- **METODO PRATICO PER IL CALCOLO DEI GRADI DI LIBERTÀ:**

● AZIONE DA SVOLGERE ● DOMANDA DA PORSI

$\boxed{n = 0}$

$\boxed{\text{IL SISTEMA SI PUÒ MUOVERE ?}}$

NO → FINE

SI → $n = n + 1$ → SCELGO UNA COORDINATA LIBERA E LA BLOCCO (NON SI MUOVE NEL TEMPO) → IL SISTEMA SI PUÒ MUOVERE ?

- **RELAZIONE CINEMATICA:**

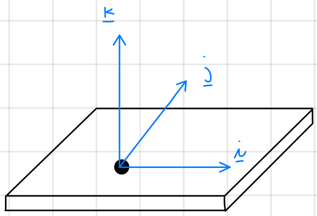
$$\begin{cases} x_O = 0 \\ y_O = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_O = 0 \\ \dot{y}_O = 0 \end{cases} \longrightarrow O \text{ COINCIDE CON IL CIR}$$

$\Rightarrow \forall P$ SU ASTA: $\underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge (P-O) = \dot{\theta}\, \underline{k} \wedge (P-O)$

$$\|v_P\| = \|\dot{\theta}\| \, \|P-O\| \quad \Rightarrow \quad \|v_P\| \propto \|P-O\|$$

NEL CASO 3D ABBIAMO 2 CERNIERE:

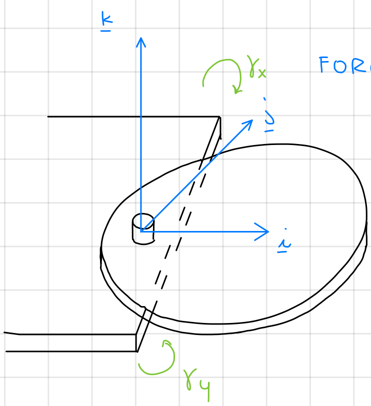
- **CERNIERA SFERICA:**



VINCOLO: $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases}$ 3 RELAZIONI SCALARI

$\# \text{ g.d.l} = \underbrace{6 \text{ g.d.l.}}_{\text{C.R. SENZA VINCOLI}} - 3 \text{ REL. VINCOLO} = 3$

- **CERNIERA PIANA 3D:**

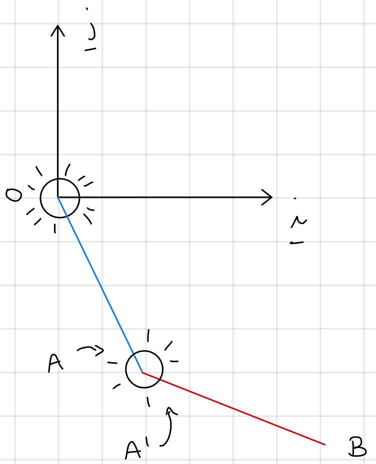


FORO DOVE FACCIO PASSARE IL BULLONE

$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \\ \gamma_x = 0 \\ \gamma_y = 0 \end{cases}$ 5 REL. VINCOLO

$\# \text{ g.d.l.} = 6 \text{ g.d.l.} - 5 \text{ REL. VINCOLO} = 1$

- SISTEMI DI CORPI RIGIDI · DOPPIO PENDOLO

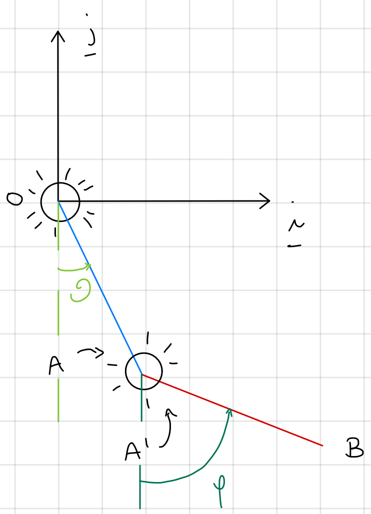


VINCOLO: $\begin{cases} x_A = x_{A'} \\ y_A = y_{A'} \end{cases}$ 2 REL. VINCOLO

$\# \text{ g.d.l.} = \underbrace{(3+3)}_{\text{3 gdl PER OGNI ASTA LIBERA}} \text{ g.d.l.} - (2 + 2) = 2$

(2 + 2): CERNIERA IN A, CERNIERA IN O

- METODO PRATICO:



SCELGO θ E LA BLOCCO

SI MUOVE? SI

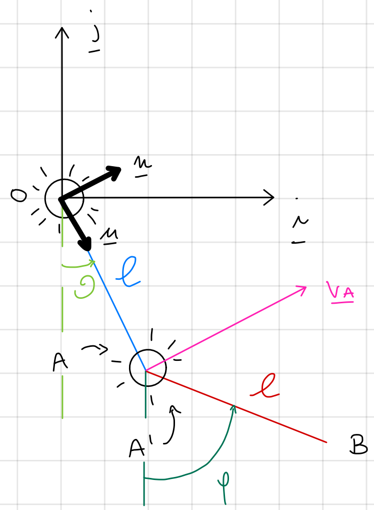
SCELGO φ E LA BLOCCO

SI MUOVE? NO $\Rightarrow$ 2 g.d.l.

- **RELAZIONE CINEMATICA:**

$x_A = x_{A'}$
$y_A = y_{A'}$ $\longrightarrow$ $\begin{cases} \dot{x}_A = \dot{x}_{A'} \\ \dot{y}_A = \dot{y}_{A'} \end{cases}$

ESERCIZIO:



~ ℓ

~ ϑ, φ COORD. LIBERE

~ AD UN CERTO t SONO DATE $\dot{\vartheta}, \dot{\varphi}$

i) CIR ASTA AB

↓

NOTA IMPORTANTE: IL CIR È UNA PROPRIETÀ DEL CORPO RIGIDO. OGNI C.R. HA IL SUO CIR

~ IL CIR DELL'ASTA OA COINCIDE CON O.

~ DATO CHE CIR OA ≡ O $\quad V_A = \omega_{OA} \wedge (A-O)$

$$= \dot{\vartheta}\, \underline{k} \wedge (A-O)$$

~ DISEGNO I VERSORI $\underline{m}, \underline{n}$: SCELTO $\underline{m} \parallel OA \Rightarrow (A-O) = \ell\, \underline{m}$

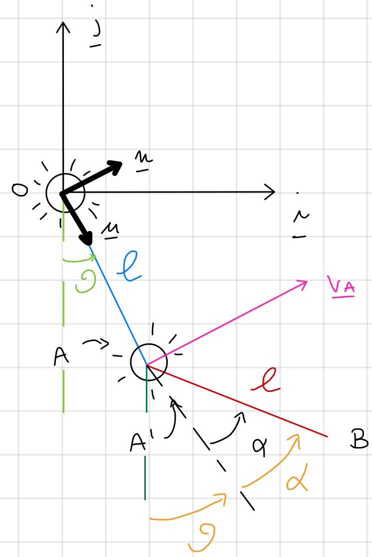
~ SOSTITUISCO: $V_A = \dot{\vartheta}\, \underline{k} \wedge \ell\, \underline{m} = \dot{\vartheta}\, \ell\, \underbrace{\underline{k} \wedge \underline{m}}_{\underline{n}} = \dot{\vartheta}\, \ell\, \underline{n}$

~ PASSIAMO ALL'ASTA AB: PER IL TEO. DI CHASLES IL CIR DI AB SI TROVA LUNGO LA DIREZIONE DI $\underline{m}$

~ METODO ANALITICO: $(C_{AB} - A) = \dfrac{\omega_{AB} \wedge V_A}{\|\omega_{AB}\|^2} = \dfrac{\cancel{\dot{\varphi}}\, \underline{k} \wedge \dot{\vartheta}\, \ell\, \underline{n}}{\dot{\varphi}\cancel{^2}} =$

$$= \frac{\dot{\vartheta}}{\dot{\varphi}}\, \ell\, \underline{k} \wedge \underline{n} = -\frac{\dot{\vartheta}}{\dot{\varphi}}\, \ell\, \underline{m}$$

• OSS: LA SCELTA DELLA COORDINATA LIBERA È ARBITRARIA.



α È SOLIDALE AD AB, MA ANCHE SOLIDALE A OA (E NON FISSA)

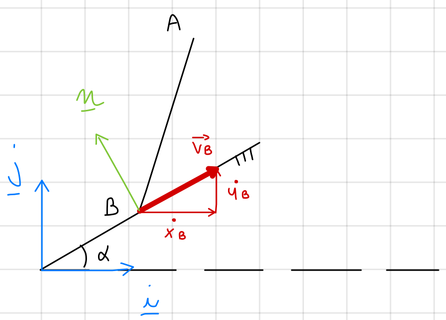
$\downarrow$

NON VA BENE

POSSO CONSIDERARE PERÒ L'ANGOLO $(\theta + \alpha)$

$\boxed{2}$ APPOGGIO

- **1 CORPO RIGIDO.**



ASTA AB APPOGGIATA SUL PIANO INCLINATO IN B

VINCOLO: B DEVE MUOVERSI LUNGO IL PIANO INCLINATO

$$y_B = x_B \, tg \, \alpha$$

$\longrightarrow \quad y_B - x_B \, tg \, \alpha = 0$ 1. REL. VINCOLO

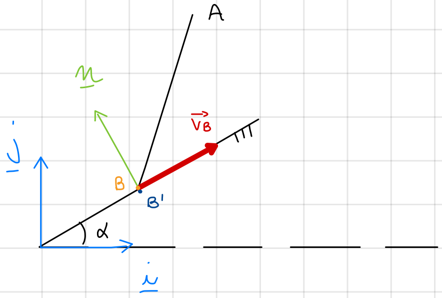
$$\# \, g.d.\ell. = \underbrace{3 \; g.d.\ell.}_{\text{ASTA LIBERA}} - 1 \text{ REL VINCOLO} = 2 \; g.d.\ell.$$

- RELAZIONE CINEMATICA

$$y_B - x_B \, tg \, \alpha = 0 \longrightarrow \dot{y}_B - \dot{x}_B \, tg \, \alpha = 0 \qquad tg \, \alpha = \frac{\dot{y}_B}{\dot{x}_B}$$

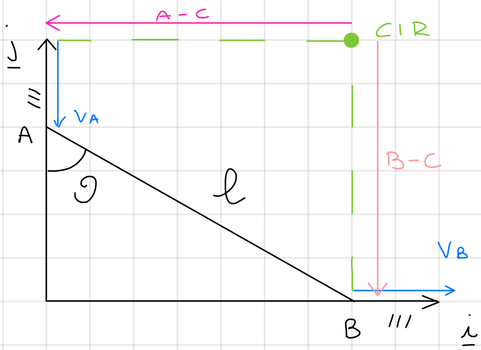
$\Rightarrow \; v_B \; // \;$ PIANO $\; \Rightarrow \; \boxed{v_B \cdot n = 0} \longrightarrow$ CONDIZIONE DI NON PENETRAZIONE O NON DISTACCO

- OSS: IN B ABBIAMO IN REALTÀ 2 PUNTI:



- B ∈ AB
- B' ∈ PIANO
- LA NORMALE $\underline{n}$ È DEFINITA RISPETTO ALLA SUPERFICIE DI CONTATTO PIÙ REGOLARE TRA QUELLE INTERESSATE ALL'APPOGGIO

- ESERCIZIO:



- ASTA AB DI LUNGHEZZA ℓ
- APPOGGIO IN A, B
- # g.d.l. = 3 − 1 − 1 = 1 g.d.l
- i) $v_A(\vartheta, \dot{\vartheta}) = ?$ $\quad v_B(\vartheta, \dot{\vartheta}) = ?$

~ $\left.\begin{array}{l} v_A \parallel \underline{j} \text{ PER APPOGGIO} \\ v_B \parallel \underline{i} \text{ PER APPOGGIO} \end{array}\right\}$ CIR LO TROVO GRAFICAMENTE

~ $\underline{v}_A = \underline{\omega} \wedge (A - C) = \dot{\vartheta}\, \underline{k} \wedge \underline{(A - C)} = \dot{\vartheta}\, \underline{k} \wedge (-\ell \sin\vartheta\, \underline{i}) =$

$= -\dot{\vartheta}\, \ell \sin\vartheta\, \underline{j}$

~ $\underline{v}_B = \underline{\omega} \wedge (B - C) = \dot{\vartheta}\, \underline{k} \wedge (-\ell \cos\vartheta\, \underline{j}) = \dot{\vartheta}\, \ell \cos\vartheta\, \underline{i}$

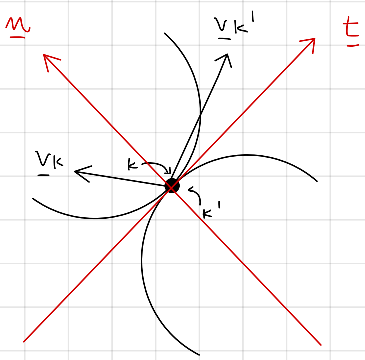
- OSS 1: I LEGAMI CINEMATICI VALGONO ∀ SEGNO E VALORE DI $\dot{\vartheta}$
- OSS 2: METODO ALTERNATIVO

$$\begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = \ell \cos\vartheta \end{cases} \xrightarrow{\text{DERIVO}} \begin{cases} \dot{x}_A = 0 \\ \dot{y}_A = -\ell \dot{\vartheta} \sin\vartheta \end{cases} \longrightarrow \underline{v}_A = -\ell \dot{\vartheta} \sin\vartheta\, \underline{j}$$

=> 2 APPROCCI RISOLUTIVI → DERIVAZIONE DELLE COMPONENTI
→ ATTO DI MOTO RIGIDO

- OSS 3: UN VINCOLO CINEMATICAMENTE (NON DINAMICAMENTE) IDENTICO ALL' APPOGGIO È IL <u>CARRELLO</u>

- <u>2 CORPI RIGIDI</u>



- K PUNTO DI CONTATTO
- $K \in$ C.R. 1
- $K' \in$ C.R. 2

- RELAZIONE CINEMATICA: $\boxed{\underline{v}_K \cdot \underline{n} = \underline{v}_{K'} \cdot \underline{n}}$ → CONDIZIONE DI NON PENETRAZIONE O NON DISTACCO

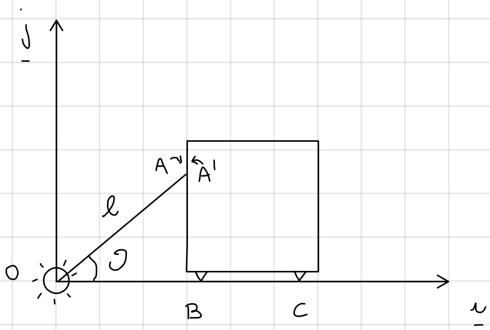
- NOTA: $\underline{v}_K$ PUÒ ESSERE $\neq$ DA $\underline{v}_{K'}$ MA PROIEZIONE IN $\underline{n}$ DEVE ESSERE LA STESSA

$\#$ g.d.l. $= 3 - 1 = 2$ → STRISCIARE RECIPROCAMENTE
→ ROTAZIONE RELATIVA

↓

COMPETRENAZIONE

- ESERCIZIO:



- ASTA LUNGHEZZA l
- LAMINA QUADRATA CON APPOGGIO IN B E C
- O CERNIERA
- APPOGGIO IN A
- i) $v_B(\vartheta, \dot{\vartheta}) = ?$

~ $\# \text{g.d.l.} = 6 \underbrace{- 2}_{\text{CERNIERA}} \underbrace{- 1 - 1 - 1}_{\text{APPOGGI}} = 1$

~ LA LAMINA HA MOTO TRASLATORIO $\underline{v}_B = \dot{x}_B \, \underline{i}$

↳ CI SERVE LEGAME CINEMATICO $\dot{x}_O(\vartheta, \dot{\vartheta})$

~ APPOGGIO IN A: $\begin{cases} A \in \text{ASTA} \\ A' \in \text{LAMINA} \end{cases} \Rightarrow \underline{v}_A \circ \underline{i} = \underline{v}_{A'} \circ \underline{i}$

~ $v_{A'} = v_B$ ESSENDO L'ATTO DI MOTO DELLA LAMINA TRASLATORIO

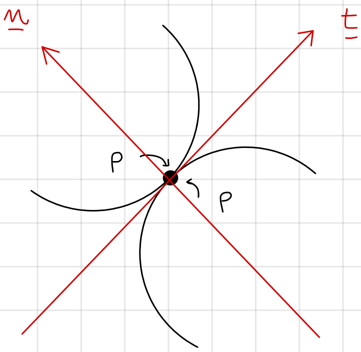
~ $O \equiv CIR_{OA} \Rightarrow \underline{v}_A = \underline{\omega}_A \wedge (A - O) = \dot{\vartheta} \, \underline{k} \wedge (l \cos\vartheta \, \underline{i} + l \sin\vartheta \, \underline{j}) =$

$= \dot{\vartheta} l \cos\vartheta \, \underline{j} - \dot{\vartheta} l \sin\vartheta \, \underline{i}$

↳ RIPRENDO: $\underline{v}_A \circ \underline{i} = \underline{v}_{A'} \circ \underline{i} \longrightarrow (\dot{\vartheta} l \cos\vartheta \, \underline{j} - \dot{\vartheta} l \sin\vartheta \, \underline{i}) \circ \underline{i} = \underline{v}_B \circ \underline{i}$

$0 - \dot{\vartheta} l \sin\vartheta = \dot{x}_B \, \underline{i} \circ \underline{i}$ $\qquad -\dot{\vartheta} l \sin\vartheta = \dot{x}_B$

3 PURO ROTOLAMENTO (ROTOLAMENTO SENZA STRISCIAMENTO)



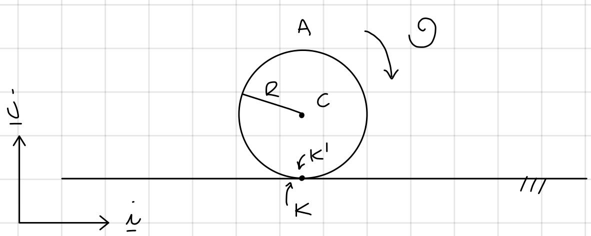
- RELAZIONE CINEMATICA:

$$\begin{cases} \underline{v}_P \circ \underline{n} = \underline{v}_{P'} \circ \underline{n} & \text{NON COMPENETRAZIONE} \\ \underline{v}_P \circ \underline{t} = \underline{v}_{P'} \circ \underline{t} & \text{NON STRISCIAMENTO} \end{cases} \longrightarrow \boxed{\underline{v}_P = \underline{v}_{P'}}$$

=> ISTANTE PER ISTANTE IL PUNTO DI CONTATTO PUÒ CAMBIARE, MA LA VELOCITÀ DEI 2 PUNTI A CONTATTO IN QUELL' ISTANTE DEVE ESSERE LA STESSA

- OSS: IL PURO ROTOLAMENTO È SIMILE ALLA CERNIERA, MA IL PUNTO DI CONTATTO NELLA CERNIERA NON CAMBIA ISTANTE PER ISTANTE

- ESEMPIO: DISCO CHE ROTOLA SENZA STRISCIARE SU UNA GUIDA ORIZZONTALE:



$\# \, g.d.l. = 1$

i) CIR

ii) $\underline{v}_C(\vartheta, \dot{\vartheta}) = ?$

iii) $\underline{v}_A(\vartheta, \vartheta) = ?$

1) $\begin{cases} K \in \text{GUIDA} \\ K' \in \text{DISCO} \end{cases}$ PURO ROTOLAMENTO: $\underline{v}_{K'} = \underline{v}_K = 0$

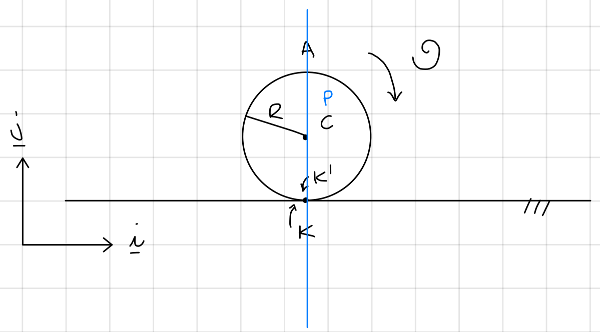
PUNTO DELLA GUIDA

=> IN OGNI ISTANTE IL CIR COINCIDE CON IL PUNTO DI CONTATTO

2) $\underline{v}_C = \underline{\omega} \wedge (\underline{C} - \underline{K}) = -\dot{\vartheta}\,\underline{k} \wedge (R\,\underline{j}) = \dot{\vartheta} R\,\underline{i}$

3) $\underline{v}_A = -\dot{\vartheta}\,\underline{k} \wedge 2R\,\underline{j} = 2\dot{\vartheta} R\,\underline{i}$

- OSS 1:



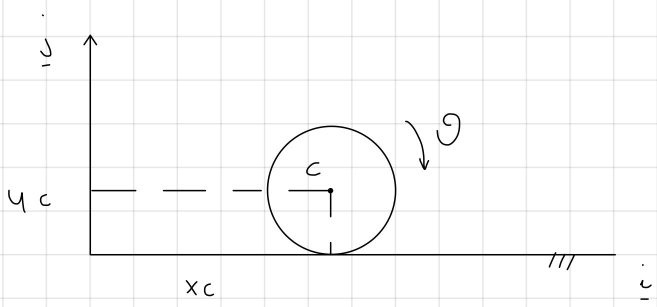
$\forall\, \underline{P}: \quad \underline{v}_P = \underline{\omega} \wedge (P - K)$

$= -\dot{\vartheta}\,\underline{k} \wedge y_P\,\underline{j}$

$= \dot{\vartheta}\, y_P\,\underline{i}$

$\Rightarrow \|\underline{v}_P\| \propto \|y_P\|$

- OSS 2: RIUSCIAMO A TROVARE LE 2 RELAZIONI SCALARI



- SE DISCO LIBERO: 3 gdl (x_C, y_C, ϑ)

- VINCOLO PURO ROTOLAMENTO:

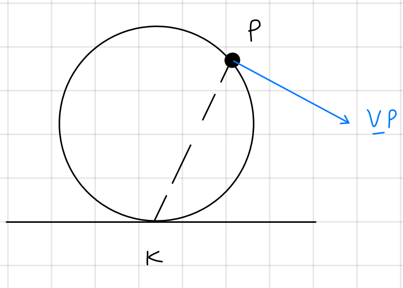
1) $y_C = 0$

2) $\underline{v}_C = R\dot{\vartheta}\,\underline{i} \Rightarrow \dot{x}_C = R\dot{\vartheta} \Rightarrow$ INTEGRO: $x_C = R\vartheta + x_{C0}$

- OSS 3: SE PURO ROTOLAMENTO TOGLIE 2 gdl $\Rightarrow$ # gdl = 1

  ↳ EFFETTIVAMENTE $\forall$ VELOCITÀ L'HO ESPRESSA IN FUNZIONE DI $\vartheta, \dot{\vartheta}$

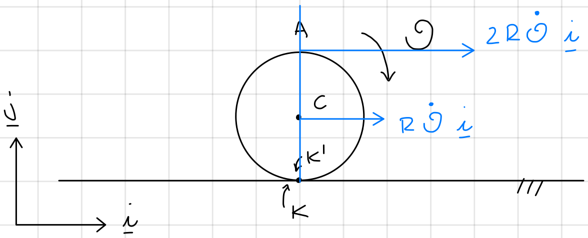
- OSS 4:



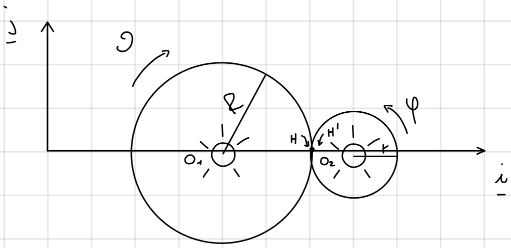
$\underline{v}_P \perp (P - K)$ PERCHÉ $K \equiv$ CIR

- OSS 5: TROVIAMO CON COORDINATE LA $\underline{v}_K$:

$$\begin{cases} x_K = x_C \\ y_K = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{DERIVO}} \begin{cases} \dot{x}_K = \dot{x}_C \\ \dot{y}_K = 0 \end{cases} \longrightarrow \underline{v}_K = \dot{x}_C \, \underline{i} = \underline{v}_C \neq 0$$



- ESEMPIO:



~ PURO ROTOLAMENTO IN H

~ i) $\dot{\varphi}(\vartheta, \dot{\vartheta}) = ?$

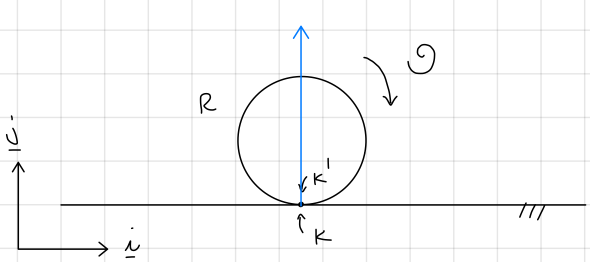
~ PURO ROTOLAMENTO: $\underline{v}_H = \underline{v}_{H'}$

~ $\underline{v}_H$: $O_1 \equiv$ CIR DISCO R $\Rightarrow$ $\underline{v}_H = \underline{\omega}_R \wedge (H - O_1) = -\dot{\vartheta}\,\underline{k} \wedge R\,\underline{i} = -\dot{\vartheta} R\,\underline{j}$

~ $\underline{v}_{H'}$: $O_2 \equiv$ CIR DISCO R' $\Rightarrow$ $\underline{v}_{H'} = \underline{\omega}_r (H' - O_2) = \dot{\vartheta}\,\underline{k} \wedge r\,\underline{i} = -\dot{\varphi}\, r\,\underline{j}$

~ IMPONGO PURO ROTOLAMENTO: $-\dot{\vartheta} R\,\underline{j} = -\dot{\varphi}\, r\,\underline{j}$ $\qquad \dot{\varphi} = \dfrac{R}{r}\dot{\vartheta}$

$\boxed{4}$ ROTOLAMENTO CON STRISCIAMENTO



UNICO MOVIMENTO IMPEDITO: DISTACCO/PENETRAZIONE

$$\underline{v}_K \circ \underline{n} = \underline{v}_{K'} \circ \underline{n}$$

$\Rightarrow$ IDENTICO ALL' APPOGGIO $\qquad$ g.d.l. = 3 − 1 REL. VINCOLO = 2

QUINDI QUALSIASI VELOCITÀ PUÒ ESSERE ESPRESSA CON 2 COORDINATE LIBERE

→ AD ESEMPIO (x_C, θ):

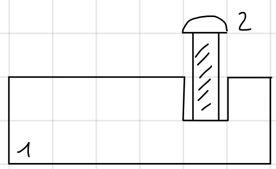
$$V_C: \begin{cases} x_C = x_C \\ y_C = R \end{cases} \longrightarrow V_C = \dot{x}_C \, \underline{i}$$

V_K: $\underline{V}_K = \underline{V}_C + \underline{\omega}_C \wedge (K - C)$ ATTO DI MOTO RIGIDO

$$\underline{V}_K = \dot{x}_C \, \underline{i} - \dot{\theta} \, \underline{k} \wedge (-R \, \underline{j}) \longrightarrow \underline{V}_K = \dot{x}_C \, \underline{i} - \dot{\theta} R \, \underline{i}$$

$\boxed{5}$ INCASTRO

- DUE CORPI RIGIDI SOGGETTI TRA LORO A INCASTRO SI COMPORTANO TRA LORO COME UN UNICO CORPO RIGIDO
- ESEMPIO:

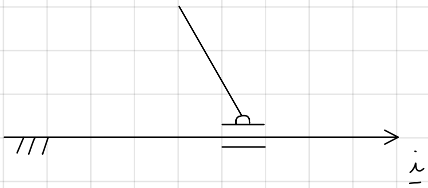


1, 2 SONO VINCOLATI CON INCASTRO, SI COMPORTANO COME UN UNICO CORPO RIGIDO

2D) $g.d.l. = \underbrace{6 \; g.d.l}_{2 \text{ C.R. LIBERI}} - \underbrace{3 \text{ REL VINCOLO}}_{\text{INCASTRO}} = 3 \; g.d.l.$

3D) $g.d.l. = \underbrace{12 \; g.d.l}_{2 \text{ C.R. LIBERI}} - \underbrace{6 \text{ REL VINCOLO}}_{\text{INCASTRO}} = 6 \; g.d.l.$

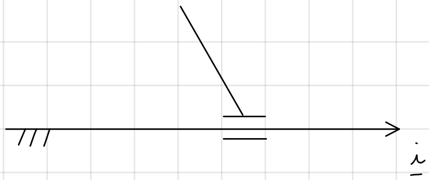
$\boxed{6}$ PATINO



- CARRELLO: NON CONSENTE SPOSTAMENTI $\perp$ ASSE $\underline{i}$

  ↳ 1 REL. VINCOLO

⤳ IL PATINO SI OTTIENE SOSTITUENDO LA CERNIERA CON UN INCASTRO

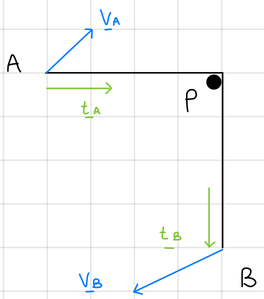


PATTINO NON CONSENTE:

$\left.\begin{array}{l} \text{1. SPOSTAMENTI } \perp \text{ ASSE } \underline{i} \\ \text{2. ROTAZIONE ASTA} \end{array}\right\}$ 2 REL. VINCOLO

$\boxed{7}$ FILO IDEALE: 1. FILO INESTENSIBILE

2 DI MASSA TRASCURABILE

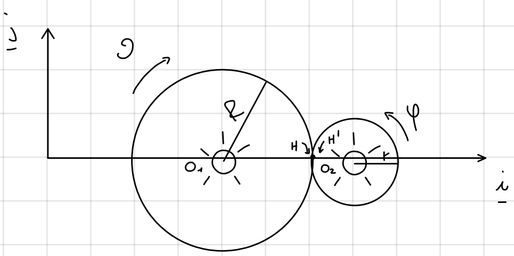


DATI $\underline{t}_A, \underline{t}_B$ VERSORI TANGENTI AL FILO IN A, B.

$\boxed{V_A \circ t_A = V_B \circ t_B}$ IN QUANTO INESTENSIBILE

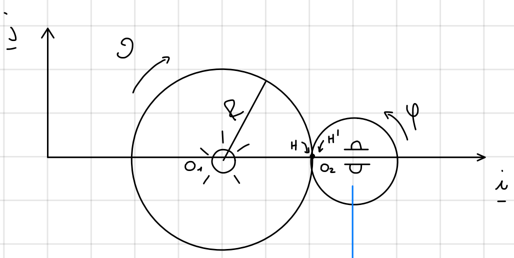
→ LUNGO LA CONGIUNGENTE

• OSS FINALE:



$$g.d.l. = \underbrace{6\ g.d.l.}_{2\ C.R.} \underbrace{-2-2}_{\text{CERNIERE}} - \underbrace{2}_{\text{PURO ROTOLAMENTO}} = 0$$

→ IL SISTEMA NON FUNZIONA SE SOVRAVINCOLATO:

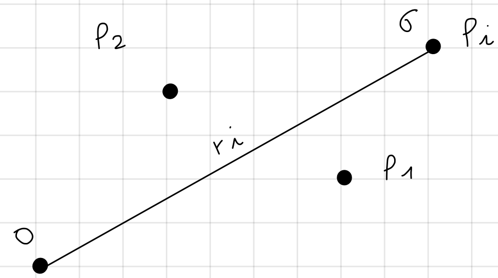


SISTEMA CINEMATICAMENTE IDENTICO AL PRECEDENTE

→ HO SOSTITUITO CARRELLO A CERNIERA

$$g.d.l. = 6 - 2 - 2 - \underbrace{1}_{\text{CARRELLO}} = 1$$

GEOMETRIA DELLE MASSE



- **CENTRO DI MASSA:**

- SISTEMA DI PUNTI P_i $(i = 1, \dots, N)$

- P_i DOTATI DI MASSA m_i

- DATA L'ORIGINE O $\Rightarrow$ $\forall P_i$ É UNIVOCAMENTE DETERMINATO DA $\underline{r}_i (P_i - O)$

$\longrightarrow$ SI DEFINISCE CENTRO DI MASSA IL VETTORE:

$$\boxed{G - O = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i (P_i - O)}{\sum_{i=1}^{N} m_i}}$$

- DATO IL SISTEMA DI RIFERIMENTO CARTESIANO POSSO PROIETTARE:

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \\[2ex] y_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \\[2ex] z_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \end{cases}$$

$\sum_{i=1}^{N} m_i = M$ MASSA TOTALE DEL SISTEMA

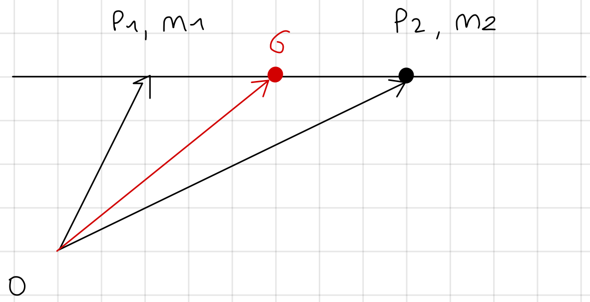
- OSS: $(G - O) = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i (P_i - O)}{M} = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{m_i}{M} (P_i - O)$

- QUINDI G:

1) É UN PUNTO CHE NON NECESSARIAMENTE COINCIDE CON UN PUNTO FISICO DEL SISTEMA

2) VIENE CALCOLATO COME MEDIA PESATA

- PROPRIETÀ DEL CENTRO DI MASSA:



SI DIMOSTRA CHE:

1) IL CENTRO DI MASSA $\in$ $P_2 - P_1$

2) IL CENTRO DI MASSA DIVIDE $P_2 - P_1$ IN 2 PARTI TALI CHE:

$$\| G - P_1 \| \propto m_2$$

$$\| G - P_2 \| \propto m_1$$

- DIM:

~ DALLA DEFINIZIONE: $G - O = \dfrac{m_1 (P_1 - O) + m_2 (P_2 - O)}{m_1 + m_2}$

~ $(P_2 - O) = (P_1 - O) + (P_2 - P_1)$

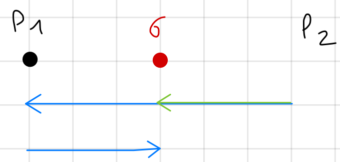
~ SOSTITUISCO: $G - O = \underbrace{\dfrac{m_1}{m_1 + m_2} (P_1 - O) + \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} (P_1 - O)}_{(P_1 - O)} + \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} (P_2 - P_1)$

~ $(G - O) - (P_1 - O) = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} (P_2 - P_1)$

~ $(G - P_1) = \underbrace{\boxed{\dfrac{m_2}{m_1 + m_2}}}_{\beta} (P_2 - P_1)$

$\Rightarrow$
- $G \in$ RETTA $(P_2 - P_1)$
- $0 < \beta < 1 \Rightarrow G$ È TRA P_1 E P_2
- $\| G - P_1 \| = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} \| P_2 - P_1 \|$
  - $\hookrightarrow \| G - P_1 \| \propto m_2$

~ INOLTRE: $(G - P_2) = (P_1 - P_2) + G - P_1$



$$\sim \quad G - P_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(P_2 - P_1) + (P_1 - P_2)$$

$$= \frac{m_2}{m_1 + m_2}(P_2 - P_1) - (P_2 - P_1)$$

$$= \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} - 1 \right)(P_2 - P_1) = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}(P_2 - P_1) = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(P_1 - P_2)$$

$$\Rightarrow \quad \| G - P_2 \| = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \| P_1 - P_2 \| \qquad \Rightarrow \quad \| G - P_2 \| \propto m_1$$

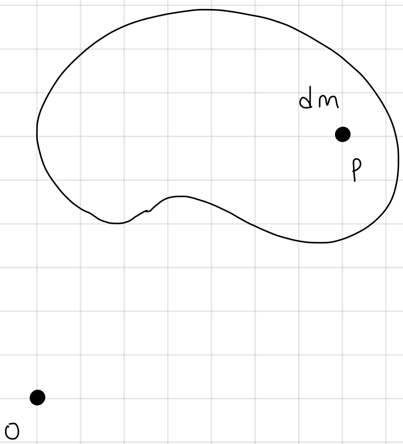
- OSS:

$$\left\{ \begin{array}{l} \| G - P_1 \| = \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} \| P_2 - P_1 \| \\[2ex] \| G - P_2 \| = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} \| P_1 - P_2 \| \end{array} \right\} \quad \text{se } m_2 > m_1 \Rightarrow \| G - P_1 \| > \| G - P_2 \|$$

- CENTRO DI MASSA PER CORPO RIGIDO CONTINUO:

- SE SISTEMA DISCRETO DI PUNTI: $G - O = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i (P_i - O)}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$

- SE SISTEMA CONTINUO:



~ IL RUOLO DI m_i DA ELEMENTO INFINITESIMALE dm INTORNO A P

~ LA SOMMATORIA DIVENTA UN INTEGRALE (PUNTI INFINITI)

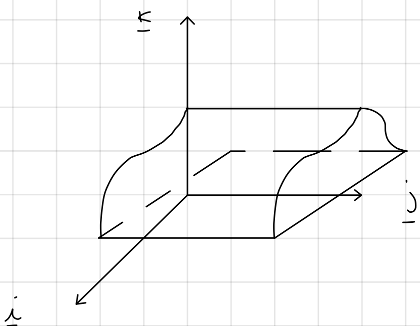
$$G - O = \frac{\int_V (P - O)\, dm}{\int_V dm} = \frac{\int_V (P - O)\, dm}{M}$$

~ MA $dm = \rho(P)\, dV \longrightarrow \boxed{G - O = \dfrac{\int_V \rho(P)(P-O)\, dV}{\int_V \rho(P)\, dV}} = \dfrac{\int_V \rho(P)(P-O)\, dV}{M}$

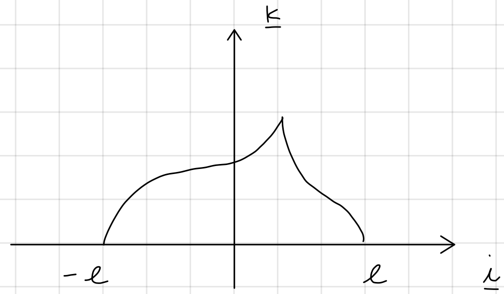
• PROPRIETÀ DEL CENTRO DI MASSA PER CORPI RIGIDI:

1) SE UN C.R. POSSIEDE UN PIANO DI SIMMETRIA MATERIALE $\Rightarrow G \in$ PIANO

· DIM: SUPPONIAMO C.R. CON UN PIANO DI SIMMETRIA MATERIALE y, z



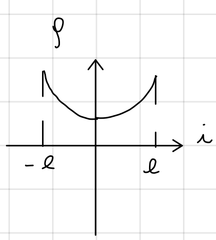
$\Rightarrow$



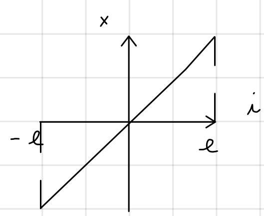
~ DATA SIMMETRIA MATERIALE $\Rightarrow \rho(x, y, z) = \rho(-x, y, z) \quad \forall x, y, z$

~ VOGLIO DIMOSTRARE CHE $\rho(x, y, z) = \rho(-x, y, z) \Rightarrow x_G = 0$

~ DEFINIZIONE: $x_G = \dfrac{\int_V \rho(x,y,z)\, x\, dV}{M} = \dfrac{1}{M} \iint dy\, dz \int x\, \rho(x, y, z)\, dx$

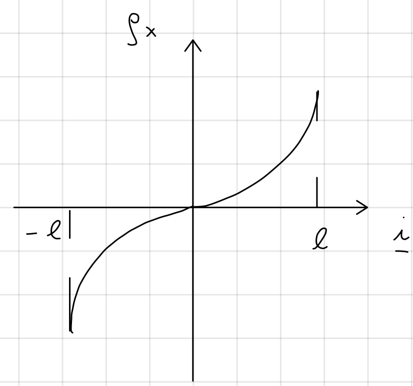


PARI



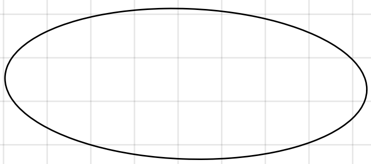
DISPARI

$\longrightarrow$



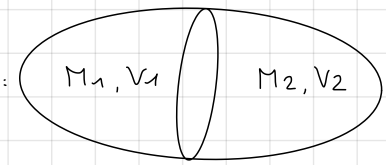
DISPARI

2) PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA DEI CENTRI DI MASSA:

~ 

M_{TOT}, V_{TOT}

VOGLIAMO TROVARE: $G - O = \dfrac{\int_{V_{TOT}} \rho(P)(P-O)\, dV}{M}$

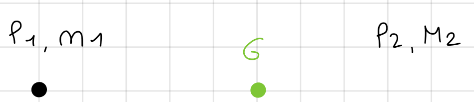
~ SUDDIVIDIAMO IL C.R. IN 2 PARTI DI CUI CONOSCIAMO IL C.M: 

$$
\begin{cases}
G_1 - O = \dfrac{\int_{V_1} \rho(P)(P-O)\, dV}{M_1} \longrightarrow \int_{V_1} \rho(P)(P-O)\, dV = M_1 (G_1 - O) \\[2ex]
G_2 - O = \dfrac{\int_{V_2} \rho(P)(P-O)\, dV}{M_2} \longrightarrow \int_{V_2} \rho(P)(P-O)\, dV = M_2 (G_2 - O)
\end{cases}
$$

$$G - O = \frac{\int_{V_1} \rho(P)(P-O)\, dV + \int_{V_2} \rho(P)(P-O)\, dV}{M_{TOT}}$$

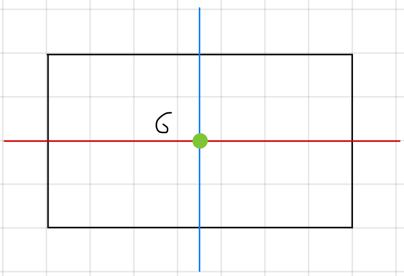
$$\downarrow$$

$$\boxed{(G - O) = \frac{M_1 (G_1 - O) + M_2 (G_2 - O)}{M_{TOT}}}$$

• OSS: 

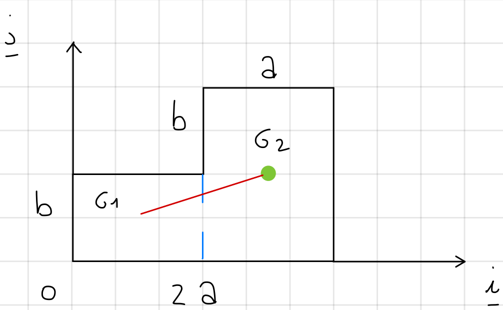
$(G - O)$ È CENTRO DI MASSA DI 2 PUNTI VIRTUALI G_1, G_2 DI MASSA M_1, M_2

- ESEMPIO 1:



2 PIANI DI SIMMETRIA $\Rightarrow$ G SI TROVA ALL' INTERSEZIONE

- ESEMPIO 2:



- $\rho = cost$

~ APPLICO LA PROPRIETÀ DISTRIBUTIVA

$$\begin{cases} G_1 - O = \frac{a}{2}\,\underline{i} + \frac{b}{2}\,\underline{j} \\ G_2 - O = \frac{3}{2}a\,\underline{i} + b\,\underline{j} \end{cases}$$

$$G - O = \frac{M_1\,(G_1 - O) + M_2\,(G_2 - O)}{M_1 + M_2}$$

~ NOTIAMO CHE $\begin{cases} A_1 = a \cdot b \\ A_2 = a \; 2b \end{cases}$ OSSIA $A_2 = 2A$

SICCOME $\rho = cost$: $M_2 = 2M_1$

$$G - O = \frac{\cancel{M_1}\,(G_1 - O) + 2\cancel{M_1}(G_2 - O)}{3\cancel{M_1}} = \frac{1}{3}(G_1 - O) + \frac{2}{3}(G_2 - O) =$$

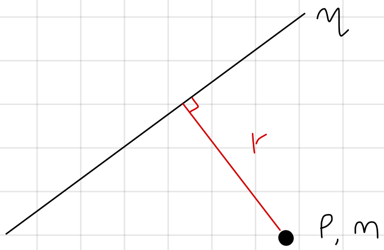
$$= \frac{a}{6}\,\underline{i} + \frac{b}{6}\,\underline{j} + a\,\underline{i} + \frac{2}{3}b\,\underline{j} = \frac{7}{6}a\,\underline{i} + \frac{5}{6}b\,\underline{j}$$

$\Rightarrow$ IL CENTRO DI MASSA SI TROVA TRA I 2 PUNTI VIRTUALI G_1, G_2, QUINDI

NECESSARIAMENTE SULLA LORO CONGIUNGENTE

MOMENTO D'INERZIA

- **1 PUNTO:**



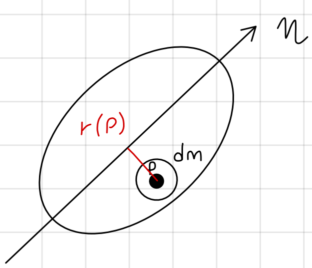
DATI P, m E ASSE η SI DEFINISCE MOMENTO DI INERZIA DI P RISPETTO A η.

$$I_\eta = m r^2$$

SISTEMA DI PUNTI: DATI P_i, $i = 1, \dots, N$ E DATO ASSE η, IL MOMENTO D'INERZIA È:

$$I_\eta = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

- **CORPO RIGIDO CONTINUO:**

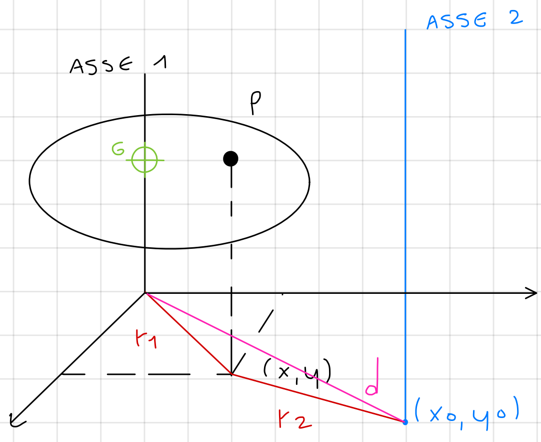


- $m_i = dm$ INTORNO AL PUNTO GENERICO P
- $\Sigma \longrightarrow \int$

$$\Rightarrow \quad I_\eta = \int_V r^2(P)\, dm = \int_V \rho(P)\, r^2(P)\, dV$$

- OSS: A PARITÀ DI MASSA, PIÙ LONTANA È UNA MASSA DEL C.R. DA η MAGGIORE È IL MOMENTO D'INERZIA

• MOMENTO D'INERZIA RISPETTO AD ASSI PARALLELI:



CONOSCIAMO $I_1 = \int_V \rho(P)\, r^2(P)\, dV = \int_V \rho(P)\,(x^2+y^2)\, dV$

~ PRENDIAMO ASSE 2 // ASSE 1: LO IDENTIFICHIAMO CON L'INTERSEZIONE (x_0, y_0) SU $\underline{i}$, $\underline{j}$

~ $I_2 = \int_V \rho(P)\, r_2^2(P)\, dV = \int_V \rho(P)\left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right] dV =$

$= \int_V \rho(P)\left[(x^2+y^2) + (x_0^2+y_0^2) - 2x_0 x - 2y_0 y\right] dV =$

$= \underbrace{\int_V \rho(P)\,(x^2+y^2)\, dV}_{I_1} + \int_V \rho(P)\,(x_0^2+y_0^2)\, dV - \int \rho(P)\, 2x_0 x\, dV - \int_V \rho(P)\, 2y_0 y\, dV =$

$= I_1 + (x_0^2+y_0^2)\int_V \rho(P)\, dV - 2x_0\int_V \rho(P)\, x\, dV - 2y_0\int_V \rho(P)\, y\, dV =$

$= I_1 + M d^2 - 2x_0\int_V \rho(P)\, x\, dV - 2y_0\int_V \rho(P)\, y\, dV =$

~ MA DA DEFINIZIONE DI C.M.:

$x_G = \dfrac{\int_V \rho(P)\, x\, dV}{M} \qquad y_G = \dfrac{\int_V \rho(P)\, y\, dV}{M}$

$$\longrightarrow \quad \int_V \rho(P)\, x \, dV = M x_G \qquad \int_V \rho(P)\, y \, dV = M y_G$$

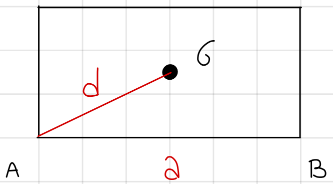
^ SOSTITUIAMO: $I_2 = I_1 + M d^2 - 2M x_0 x_G - 2M y_0 y_G$

- CASO PARTICOLARE: ASSE 1 BARICENTRALE ($G \in$ ASSE 1):

$x_G, y_G = 0 \longrightarrow \boxed{I_2 = I_G + M d^2}$ TEOREMA DI HUYGENS

- OSS1: L'ASSE BARICENTRALE È L'ASSE DI MINIMA INERZIA

- OSS2:



- SUPPONIAMO NOTO: $I_G \Rightarrow I_A = I_G + Md^2$

$I_B = I_G + Md^2$

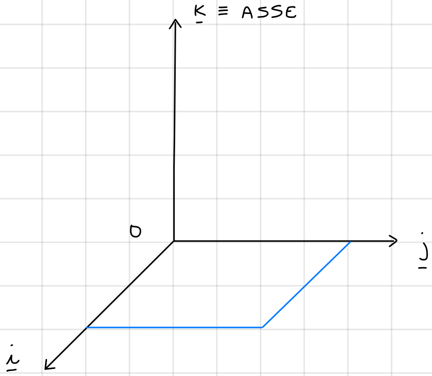
- SUPPONIAMO NOTA I_A:

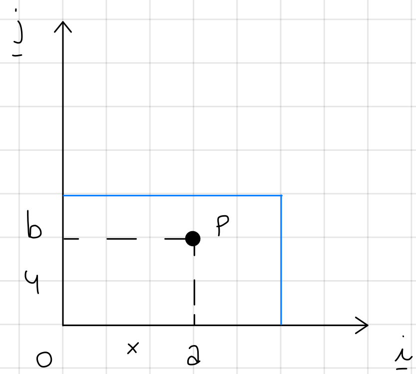
$\cancel{I_B = I_A + M a^2}$ ERRATA !

- $I_G = I_A - Md^2$

- $I_G = I_G + Md^2$

- ESEMPIO - LAMINA RETTANGOLARE OMOGENEA:





i) $I_O = ?$

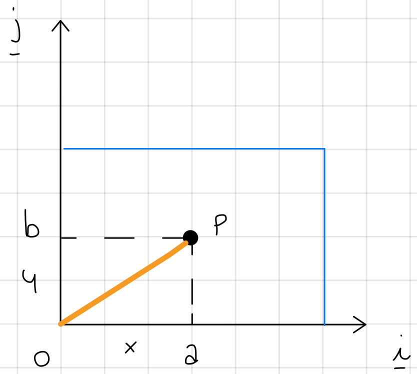
$$I_O = \int_A \rho(P)\,(x^2 + y^2)\, dA \qquad \rho(P) = \frac{M}{ab}$$

$$I_O = \frac{M}{ab}\int_0^a dx \int_0^b (x^2+y^2)\,dy = \frac{M}{ab}\int_0^a \left[x^2 y + \frac{1}{3}y^3\right] dx =$$

$$= \frac{M}{ab}\int_0^a \left(x^2 b + \frac{b^3}{3}\right) dx = \ldots = \frac{1}{3} M \left(a^2+b^2\right)$$

ii) $I_G = ?$

~ SFRUTTO IL TEO. DI HUYGENS:



$$I_G = I_O - M\left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right)$$

$$\to I_G = \frac{1}{12} M \left(a^2 + b^2\right)$$

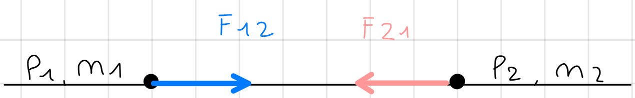
DINAMICA DEI CORPI RIGIDI

- RICHIAMI DI DINAMICA NEWTONIANA:

1 - PRINCIPIO D'INERZIA) $\exists$ UN SDR INERZIALE IN CUI UN PUNTO ISOLATO (NON SOGGETTO A FORZE) PERMANE IN UNO STATO DI QUIETE O DI MOTO RETTILINEO UNIFORME

2 - LEGGE FONDAMENTALE DELLA DINAMICA) IN UN SDR INERZIALE, UN PUNTO DI MASSA m SOGGETTO A FORZA F SUBISCE UN'ACCELERAZIONE T.C.: $\underline{F} = m \cdot \underline{a}$

3 - LEGGE DI AZIONE E REAZIONE) DATI 2 PUNTI INTERAGENTI



$\underline{F}_{21} = -\underline{F}_{12}$

- QUANTITÀ DI MOTO: DATO P_i, m_i DOTATO DI UNA SUA VELOCITÀ v_i, SI DEFINISCE QUANTITÀ DI MOTO DEL PUNTO: $\underline{q}_i = m_i \underline{v}_i$

→ PER UNA QUANTITÀ DI PUNTI P_i, $i = 1, \dots, N$ LA QUANTITÀ DI MOTO È ADDITIVA: $\underline{Q} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i$

- OSS: DALLA DEF. DI CENTRO DI MASSA:

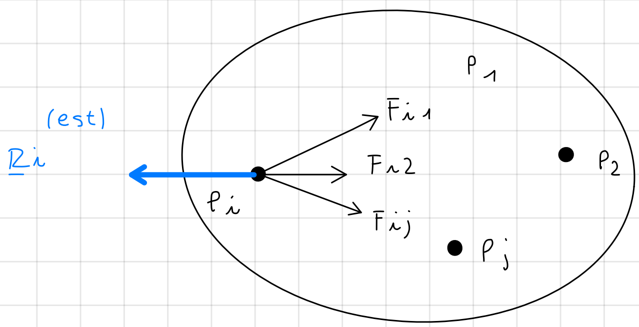
$$(G-O) = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i (P_i - O)}{M} \longrightarrow M(G-O) = \sum_{i=1}^{N} m_i (P_i - O)$$

~ DERIVO RISPETTO AL TEMPO:

$$M \frac{d(G-O)}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} m_i (P_i - O)$$

$$M \underline{v}_G = \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d(P_i - O)}{dt} \longrightarrow M \underline{v}_G = m_i \underline{v}_i \longrightarrow \boxed{\underline{Q} = M \underline{v}_G}$$

I EQUAZIONE CARDINALE:



• SU P_i AGISCONO:

~ FORZE DOVUTE ALLE INTERAZIONI CON ALTRI PUNTI DEL SISTEMA: $\underline{F}_{ij} \longrightarrow$ FORZE INTERNE

~ FORZE DOVUTE A PUNTI NON APPARTENENTI AL MIO SISTEMA: $R_i^{(est)} \longrightarrow$ FORZE ESTERNE

~ STUDIO IL MOTO DI P_i CON 2° LEGGE DI NEWTON:

$$m_i \ddot{r}_i = \underbrace{\sum_{j=1}^{N} \underline{F}_{ij}}_{R_i^{(int)}} + R_i^{(est)} \qquad i = 1, \dots, N$$

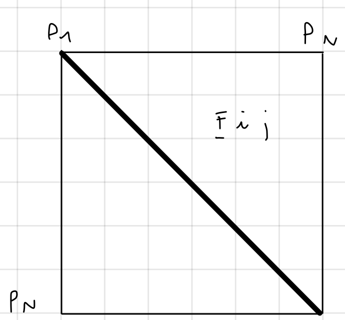
~ NOTO CHE: $m_i \ddot{r}_i = m_i \dfrac{d v_i}{dt} = \dfrac{d\, m_i v_i}{dt} = \dfrac{d(m_i v_i)}{dt} = \underline{R}_i^{(int)} + \underline{R}_i^{(est)}$

~ SOMMO SU INTERO SISTEMA: $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{d(m_i v_i)}{dt} = \sum_{i=1}^{N} R_i^{(int)} + \sum_{i=1}^{N} R_i^{(est)} = R^{(int)} + R^{(est)}$

~ NOTO CHE: $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{d(m_i v_i)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i v_i\right) = \frac{dQ}{dt}$

$$\longrightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = \underline{R}^{(int)} + \underline{R}^{(est)}$$

~ NOTO CHE: $\displaystyle \underline{R}^{(int)} = \sum_{i=1}^{N} R_i^{(int)} = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \underline{F}_{ij}$

~ 

LA SOMMATORIA CONTIENE TUTTI I TERMINI DELLA MATRICE

$$R^{(int)} = F_{12} + F_{21} + \dots + \underbrace{F_{ij} + F_{ji}}_{} \quad = 0 \;\; (\text{III LEGGE DI NEWTON})$$

$$\longrightarrow \underline{R}^{(int)} = 0 \longrightarrow \boxed{\frac{d\underline{Q}}{dt} = \underline{R}^{(est)}}$$ 1^a EQUAZIONE CARDINALE

- OSS 1: $\underline{R}_i^{(int)} \neq 0$, $\underline{R}^{(int)} = 0$
- OSS 2: $\underline{Q} = M \underline{v}_G$
- 1^a EQ. CARDINALE: $M \frac{d\underline{v}_G}{dt} = \underline{R}^{(est)} \longrightarrow M \underline{a}_G = \underline{R}^{(est)}$

IL CENTRO DI MASSA SI MUOVE COME UN PUNTO SU CUI CONCENTRIAMO TUTTA LA MASSA DEL SISTEMA E APPLICHIAMO LA RISULTANTE DELLE $\underline{F}^{(est)}$

- DOMANDA: VALE PER UN CORPO RIGIDO ?

↳ UN C.R. É COMUNQUE UN SISTEMA DI PUNTI, DI CONSEGUENZA VARRÁ ANCORA

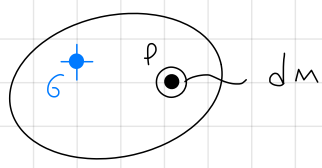
$$\frac{d\underline{Q}}{dt} = \underline{R}^{(int)} + \underline{R}^{(est)}$$

↳ LE F. INTERNE INCLUDONO LE FORZE CHE I PUNTI SI SCAMBIANO PER RESTARE A DISTANZA FISSA

⟶ QUINDI CONTINUA A VALERE: $\frac{d\underline{Q}}{dt} = \underline{R}^{(est)}$

- DOMANDA 2: VALE ANCORA $\underline{Q} = M \underline{v}_G$ PER UN C.R. ?

DIM:



~ PER SISTEMA DI PUNTI: $\underline{Q} = \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i$

~ IN UN C.R. CONTINUO m_i DIVENTA dm, ALLORA:

$$\underline{Q} = \int_V \underline{v}_P \, dm = \int_V \rho(P) \underline{v}_P \, dV$$

~ SCEGLIAMO $G \Rightarrow P, G$ SONO SOLIDALI AL C.R., QUINDI POSSO APPLICARE L'ATTO DI MOTO RIGIDO: $\underline{v}_P = \underline{v}_G + \underline{\omega} \wedge (P - G)$

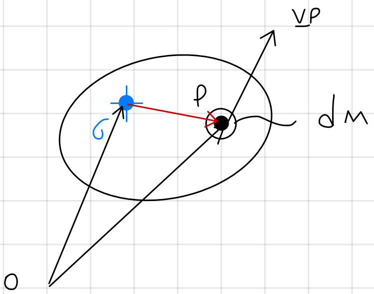
~ SOSTITUIAMO: $\int_V \rho(P)\left[\underline{v}_G + \underline{\omega} \wedge (P-G)\right] dV =$

$$= \int_V \rho(P)\, \underline{v}_G \, dV + \int_V \rho(P)\, \underline{\omega} \wedge (P-G)\, dV =$$

$$= \underline{v}_G \int_V \rho(P)\, dV + \omega \wedge \int_V \rho(P)\,(P-G)\, dV =$$

$$= M\, \underline{v}_G + \omega \wedge \underbrace{\int_V \rho(P)\,(P-G)\, dV}_{} =$$

→ CONSIDERO QUESTO TERMINE CHE DENOTO a

~ 

$$(P-G) = (P-O) - (G-O)$$

$$a = \int_V \rho(P)\left[(P-O) - (G-O)\right] dV =$$

$$= \int_V \rho(P)\,(P-O)\, dV - \int_V \rho(P)\,(G-O)\, dV =$$

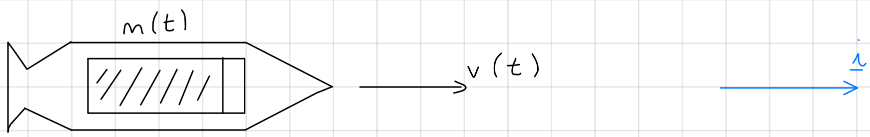
$$= \int_V \rho(P)\,(P-O)\, dV - (G-O)\int_V \rho(P)\, dV = \int_V \rho(P)(P-O)\, dV - M(G-O)$$

~ NOTIAMO CHE: $(G-O) = \dfrac{\int_V \rho(P)\,(P-O)\, dV}{M} \longrightarrow \int_V \rho(P)(P-O)\, dV = M(G-O)$

$$\longrightarrow \quad a = M(G-O) - M(G-O) = 0$$

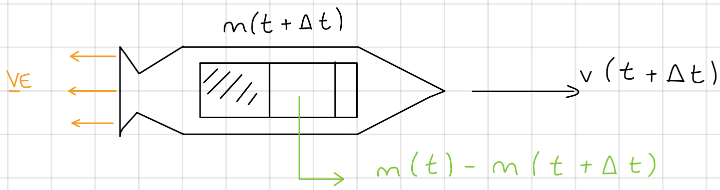
• QUINDI $\underline{Q} = M\, \underline{v}_G$ ANCHE PER UN C.R.

- ESEMPIO: MOTO DEL RAZZO NEL VUOTO



~ $\underline{Q} = M(t)\, v(t)\, \underline{i}$

~ IN t IL MOTORE VIENE ACCESO $\longrightarrow$ STUDIAMO COSA ACCADE IL $\underline{t + dt}$.



VE = VELOCITÀ RELATIVA DEL GAS RISPETTO AL RAZZO

~ $\underline{Q}(t+\Delta t) = \left\{ m(t+\Delta t)\, v(t+\Delta t) + \left[\underline{m(t) - m(t+\Delta t)} \right] \cdot V_{GAS} \right\} \underline{i}$

~ $V_{GAS}\, \underline{i} = v(t)\, \underline{i} - V_E\, \underline{i} = (v(t) - V_E)\, \underline{i}$

$\longrightarrow \underline{Q}(t+\Delta t) = \left\{ m(t+\Delta t)\, v(t+\Delta t)\underline{i} + \left[m(t) - m(t+\Delta t) \right] (v(t) - V_E)\underline{i} \right\}$

~ I EQUAZIONE CARDINALE: $\dfrac{d\underline{Q}}{dt} = R^{(est)} = 0 \longrightarrow$ SONO NEL VUOTO (SISTEMA ISOLATO)

~ QUINDI $\underline{Q} = \text{cost} \longrightarrow \underline{Q}(t) = \underline{Q}(t+\Delta t)$:

~ $m(t)\, v(t) = \left\{ m(t+\Delta t)\, v(t+\Delta t) + \left[m(t) - m(t+\Delta t) \right] (v(t) - V_E) \right\}$

~ $\cancel{m(t)\, v(t)} = m(t+\Delta t)\, v(t+\Delta t) + \cancel{m(t)\, v(t)} - m(t)\, V_E - m(t+\Delta t)\, v(t) + m(t+\Delta t)\, V_E$

~ $m(t+\Delta t) \underbrace{\left[v(t+\Delta t) - v(t) \right]}_{\Delta v} + \underbrace{\left[m(t+\Delta t) - m(t) \right]}_{\Delta m} V_E = 0$

~ $m(t+\Delta t)\dfrac{\Delta v}{dt} + \Delta m \dfrac{v_E}{dt} = 0$

~ SE PONGO $\Delta t \longrightarrow 0$: $m\dfrac{dv}{dt} + \dfrac{v_E}{dt} = 0$

~ $\dfrac{dv}{dt} = - v_E \cdot \dfrac{1}{m}\dfrac{dm}{dt}$

~ MA $\dfrac{d}{dt}\log m = \dfrac{1}{m}\dfrac{dm}{dt} \longrightarrow \dfrac{dv}{dt} = - v_E \dfrac{d}{dt}\log m$

~ INTEGRIAMO IN $[t_0, t]$:

$$v(t) - v(t_0) = -v_E\left[\log m(t) - \log m(t_0)\right]$$

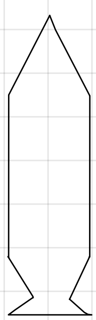
$$v(t) = v(t_0) + v_E\left[\log m(t_0) - \log m(t)\right]$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{v(t) = v(t_0) + v_E \log\frac{m_0}{m(t)}}$$

EQUAZIONE DI TSILOKOVSKY

CON FORZA PESO :



g = cost

I EQ. CARDINALE : $\dfrac{dQ}{dt} = -mg$

GRAVITY LOSS

· RIFACENDO I CALCOLI : $\boxed{v(t) = v(t_0) + v_E \log\dfrac{m_0}{m(t)} - \boxed{g(t-t_0)}}$

- PONIAMO $t_0 = 0$, $v(t_0) = 0$ $\longrightarrow$ $\boxed{v(t) = v_E \log \frac{m_0}{m(t)} - g t}$

- INDICHIAMO:

1) t_f : TEMPO DI FINE COMBUSTIBILE (BURN OUT)

2) m_P : MASSA TOTALE

3) m_D : MASSA DRY (SENZA PROPELLENTE)

~ IN CORRISPONDENZA DI t_f : $v_f = v_E \log \frac{m_P + m_D}{m_D} - g t_f$

~ SUPPONIAMO: $\begin{cases} m_P = 10\ m_D \\ v_E = 2500\ m/s \end{cases}$ $\longrightarrow$ $v_f = 2500 \cdot \log 11 - g t_f$

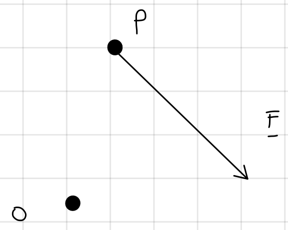
ESEMPIO: $\begin{cases} t_f = 60\ s \longrightarrow v_f = 5,4\ km/s \\ t_f = 150\ s \longrightarrow v_f = 4,5\ km/s \end{cases}$

$\hookrightarrow$ LA VELOCITÀ DI SATELLITE È 8 km/s PER LE ORBITE BASSE:

$$t_f = \frac{1}{g} \left[2500 \cdot \log 11 - v_f \right] \longrightarrow t_f = -204\ s$$

$\rightsquigarrow$ NON SI RIESCE CON UNO STADIO SOLO $\Rightarrow$ MISSILI MULTISTADIO

MOMENTO DI UNA FORZA



O : POLO (NON NECESSARIAMENTE L'ORIGINE)

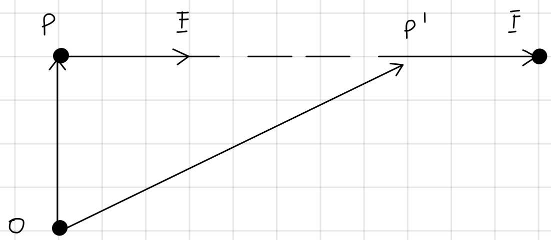
SI DEFINISCE MOMENTO DI $\underline{F}$ RISPETTO A O : $\underline{M}_O = (P-O) \wedge \underline{F}$

SI DEFINISCE RETTA DI APPLICAZIONE DI $\underline{F}$ LA RETTA CHE PASSA PER P ED È // A F

- PROPRIETÀ :

1) $\underline{M}_O$ NON VARIA SE SPOSTIAMO P ($\Rightarrow$ F) LUNGO LA RETTA DI APPLICAZIONE DI $\underline{F}$

· DIM :

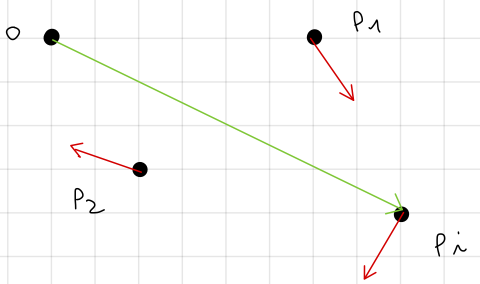


~ SO CHE : $\underline{M}_O = (P'-O) \wedge \underline{F}$

~ NOTO CHE : $(P'-O) = (P-O) + (P'-P)$

~ SOSTITUISCO : $\underline{M}_O = [(P-O) + (P'-P)] \wedge \underline{F} = \underbrace{(P-O) \wedge \underline{F}}_{\underline{M}_O} + (P'-P) \wedge \underline{F}$

• DATO SISTEMA P_i, $i = 1, \dots, N$ SU CUI AGISCONO $\underline{F}_i$, DATO POLO O:



$$\underline{M}_{O,i} = (P_i - O) \wedge \underline{F}_i$$

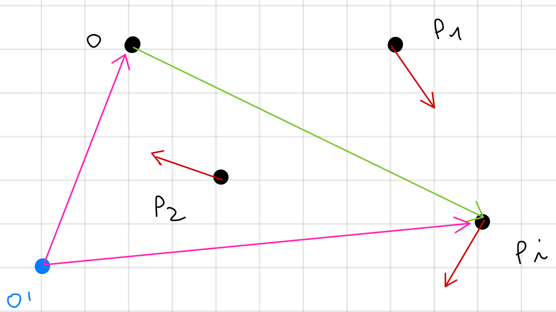
IL MOMENTO DEL SISTEMA DI FORZE É LA RISULTANTE DEI SINGOLI MOMENTI:

$$\underline{M}_O = \sum_{i=1}^{N} \underline{M}_{O,i} = \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge \underline{F}_i$$

PROPRIETÀ: FORMULA DI TRASPORTO DEI MOMENTI

$$\left.\begin{array}{l} \text{DATI } P_i, \underline{F}_i \text{ PER } i = 1, \dots, N \\ \text{DATI 2 POLI } O, O' \text{ DISTINTI} \end{array}\right\} \quad \boxed{\underline{M}_{O'} = \underline{M}_O + (O - O') \wedge \underline{R}}$$

DIM:



$\rightsquigarrow \underline{M}_{O'} = \sum_{i=1}^{N} (P_i - O') \wedge \underline{F}_i$

$\rightsquigarrow (P_i - O') = (O - O') + (P_i - O)$

$\rightsquigarrow$ SOSTITUISCO: $\underline{M}_{O'} = \sum_{i=1}^{N} \left[(O - O') + (P_i - O) \right] \wedge \underline{F}_i =$

$$= \sum_{i=1}^{N} (O - O') \wedge \underline{F}_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge \underline{F}_i}_{\underline{M}_O}$$

MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

- P, m

$$\boxed{\underline{\gamma}_O = (P - O) \wedge m\underline{v}}$$

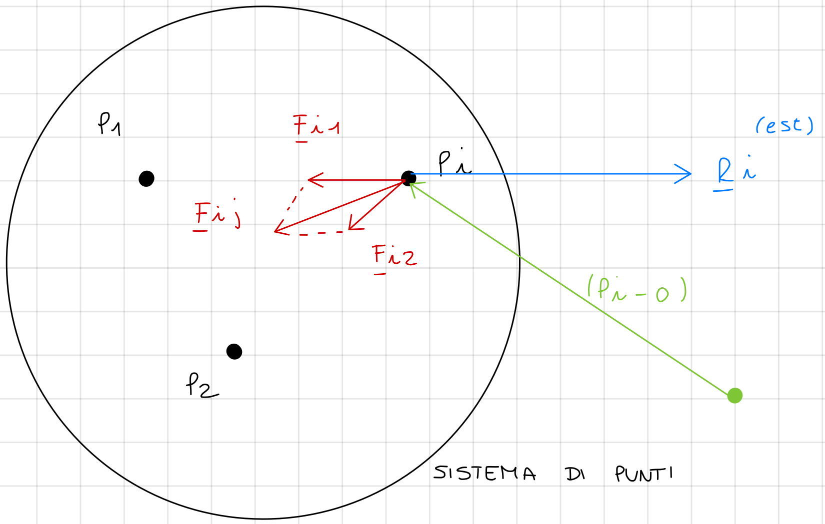
- DATI P_i, $i = 1, \dots, N$ DOTATI DI VELOCITÀ $\underline{v}_i$ E DATO UN POLO O SI DEFINISCE MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO DEL SISTEMA:

$$\boxed{\underline{\Gamma}_O = \sum_{i=1}^{N} \gamma_{O,i} = \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge m_i v_i}$$

- PROPRIETÀ: VALE LA FORMULA DEL TRASPORTO DEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO:

$$\boxed{\underline{\Gamma}_{O'} = \underline{\Gamma}_O + (O - O') \wedge \underline{Q}'}$$

SECONDA EQUAZIONE CARDINALE DELLA DINAMICA



$i = 1, \dots, N$

- SU P_i AGISCONO:

1. FORZE INTERNE AL SISTEMA $\underline{F}_{ij}$
2. FORZE ESTERNE AL SISTEMA $\underline{R}_i^{(est)}$

~ SU P_i VALE LA 2^a LEGGE DELLA DINAMICA: $m_i \ddot{\underline{r}}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \underline{F}_{ij} + \underline{R}_i^{(est)}$

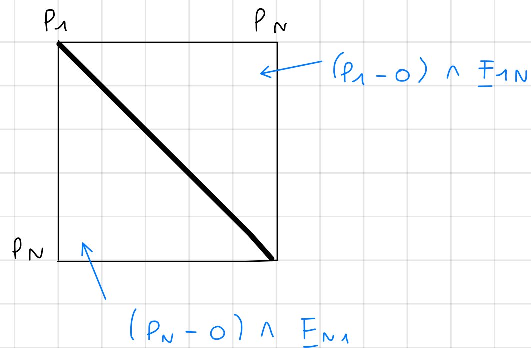
~ PRE-MOLTIPLICHIAMO VETTORIALMENTE PER $(P_i - O)$:

$$(P_i - O) \wedge m_i \ddot{\underline{r}}_i = (P_i - O) \wedge \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \underline{F}_{ij} + (P_i - O) \wedge \underline{R}_i^{(est)}$$

~ SOMMIAMO SU TUTTE LE i PER DERIVARE EQ. SU INTERO SISTEMA:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge m_i \ddot{\underline{r}}_i}_{\to\, b} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \underline{F}_{ij}}_{\underline{M}_O^{(int)} \,\to\, a} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge \underline{R}_i^{(est)}}_{\underline{M}_O^{(est)}}$$

~ $a = \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} (P_i - O) \wedge \underline{F}_{ij}$



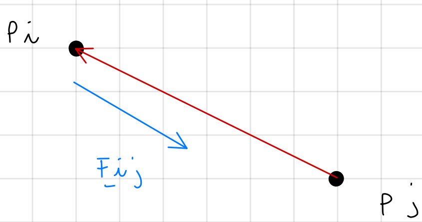
$\longrightarrow$ LA SOMMATORIA ALLORA ASSUME LA FORMA:

$$(P_1 - O) \wedge \underline{F}_{12} + (P_2 - O) \wedge \underline{F}_{21} + \dots + \underbrace{(P_i - O) \wedge \underline{F}_{ij} + (P_j - O) \wedge \underline{F}_{ji}}_{\underline{F}_{ij} = -\underline{F}_{ji}} + \dots$$

$$(P_i - O) \wedge \underline{F}_{ij} - (P_j - O) \wedge \underline{F}_{ij} =$$

$$= [(P_i - O) - (P_j - O)] \wedge \underline{F}_{ij} = (P_i - P_j) \wedge \underline{F}_{ij}$$

GRAFICAMENTE:



$(P_i - P_j) \parallel \underline{F}_{ij} \Rightarrow (P_i - P_j) \wedge \underline{F}_{ij} = 0$

$$\boxed{M_O^{(int)} = 0}$$

~ $\underline{b} = \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge m_i \ddot{\underline{r}}_i$

~ CONSIDERIAMO: $\underline{\Gamma}_O = \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge m_i \underline{v}_i$

~ DERIVIAMO: $\dfrac{d\underline{\Gamma}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{N} (\underline{v}_i - \underline{v}_O) \wedge m_i \underline{v}_i + \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge m_i \ddot{\underline{r}}_i$

PERCHÉ $\underline{v}_O$ NON È L'ORIGINE, MA SEMPLICEMENTE UN POLO (PUÒ MUOVERSI)

~ $\dfrac{d\underline{\Gamma}_O}{dt} = \cancel{\sum_{i=1}^{N} \underline{v}_i \wedge m_i \underline{v}_i} - \sum_{i=1}^{N} \underline{v}_O \wedge m_i \underline{v}_i + \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge m_i \ddot{\underline{r}}_i =$

$\underline{v}_i \parallel \underline{v}_i$

$= -\underline{v}_O \wedge \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge m_i \ddot{\underline{r}}_i}_{\underline{b}} = -\underline{v}_O \wedge \underline{Q} + \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge m_i \ddot{\underline{r}}_i$

~ $\underline{b} = \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge m_i \ddot{\underline{r}}_i = \dfrac{d\underline{\Gamma}_O}{dt} + \underline{v}_O \wedge \underline{Q}$

$$\boxed{\dfrac{d\underline{\Gamma}_O}{dt} + \underline{v}_O \wedge \underline{Q} = \underline{M}_O^{(est)}}$$

II EQUAZIONE CARDINALE DELLA DINAMICA

· OSS: LA II EQ. CARDINALE ASSUME UNA FORMA PIÙ SEMPLICE QUANDO:

1) $\underline{v}_O = 0$ $\quad O \equiv CIR$

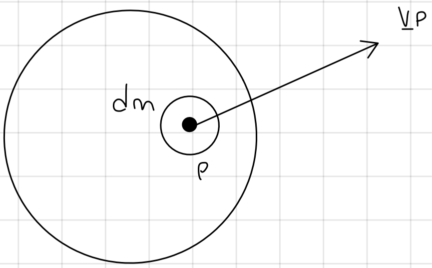
2) $\underline{Q} = 0 \longrightarrow \underline{v}_O = 0$

3) $\underline{v}_O \parallel \underline{Q} \longrightarrow \underline{v}_O \parallel \underline{v}_G$ $\quad O \equiv G$

II EQUAZIONE CARDINALE DELLA DINAMICA PER UN C.R.

IL C.R. CONTINUO È UN SISTEMA DI PUNTI $\longrightarrow$ MA Γ_O QUANTO VALE ?

DIM: MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO PER UN C.R.:



~ PER UN SISTEMA DI PUNTI:

$$\Gamma_O = \sum_{i=1}^{n} (P_i - O) \wedge m_i v_i$$

~ PER C.R:

1) $\Sigma \longrightarrow \int$

2) $m_i \longrightarrow dm$

~ $\Gamma_O = \int_V (P-O) \wedge v_P \, dm = \int_V \rho(P) \, (P-O) \wedge v_P \, dV$

~ COMINCIO CON UN POLO O' SOLIDALE CON IL C.R. $\longrightarrow$ $\underline{v}_P = \underline{v}_{O'} + \omega \wedge (P-O')$

~ $$\Gamma_{O'} = \underbrace{\int_V \rho(P) \, (P-O') \wedge v_{O'} \, dV}_{a} + \underbrace{\int_V \rho(P)(P-O') \wedge [\omega \wedge (P-O')] \, dV}_{b}$$

~ NOTO CHE: $G - O' = \dfrac{\int_V \rho(P)(P-O') \, dV}{M}$

~ $a = (G-O') \wedge M v_{O'}$

~ DOPPIO PRODOTTO VETTORE: $\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c}) = (\underline{a} \circ \underline{c}) \, \underline{b} - (\underline{a} \circ \underline{b}) \, \underline{c}$

$$\hookrightarrow \quad b = \int_V \rho(P) \left\{ \|P-O\|^2 \underline{\omega} - \cancel{[\omega \circ (P-O')]} (P-O') \right\} dV$$

$$b = \int_V \rho(P)\,\|P-O'\|^2\,\underline{\omega}\,dV = \underbrace{\left[\int_V \rho(P)\,\|P-O'\|^2\,dV\right]}_{I_{O'}\ \text{MOMENTO D'INERZIA}}\underline{\omega}$$

$\longrightarrow$ QUINDI PER UN C.R. E O' SOLIDALE AD ESSO:

$$\boxed{\Gamma_{O'} = (G-O)\wedge M v_{O'} + I_{O'}\,\underline{\omega}}$$

- OSS:

- MOTO ROTATORIO RISPETTO A O' $\Rightarrow$ $O' \equiv CIR$ $\Rightarrow$ $v_{O'} = 0$ $\Rightarrow$ $\Gamma_{O'} = I_{O'}\,\underline{\omega}$
- SE $O' \equiv G$ $\Rightarrow$ $\Gamma_{O'} = \Gamma_G = I_G\,\underline{\omega}$
- SE MOTO TRASLATORIO $\Rightarrow$ $\omega = 0$ $\Rightarrow$ $\Gamma_O = (G-O)\wedge \underline{Q}$

- PER UN POLO O GENERICO $\Rightarrow$ TRASPORTO DEL MOMENTO:

~ $\Gamma_O = \Gamma_{O'} + (O'-O)\wedge \underline{Q}$

~ SE SCELGO: $O' \equiv G$ $\longrightarrow$ $\Gamma_O = \Gamma_G + (G-O)\wedge \underline{Q}$

~ $\Gamma_O = I_G\,\underline{\omega} + (G-O)\wedge \underline{Q}$

- RIASSUMENDO:

$$\frac{d\Gamma_O}{dt} + \underline{v}_O \wedge \underline{Q} = M_O^{(est)}$$

$$\begin{cases} \underline{Q} = M\,\underline{v}_G \\ \Gamma_O = I_G\,\omega + (G-O)\wedge \underline{Q} \end{cases}$$

CON CASI PARTICOLARI:

~ $O \equiv CIR$: $\Gamma_O = I_O\,\underline{\omega}$

~ $O \equiv G$: $\Gamma_G = I_G\,\underline{\omega}$

~ TRASLATORIO : $\Gamma_O = (G-O)\wedge \underline{Q}$

- OSS 1. SE $O \equiv G \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\Gamma_G}{dt} = M_G^{(est)} \\ \Gamma_G = I_G \underline{\omega} \end{cases} \longrightarrow I_G \dot{\omega} = M_G^{(est)}$

$I_G \dot{\omega} = M_G^{(est)}$

$M a_G = R^{(est)}$

I_G È IL PARALLELO DELLA MASSA: È UN' INERZIA ALLA ROTAZIONE

- OSS 2: $M_G^{(est)} = 0$? $\Rightarrow \dfrac{d\Gamma_G}{dt} = 0 \Rightarrow \Gamma_G = cost \Rightarrow I_G \underline{\omega} = cost$

Sistema cardinale della dinamica

$$\frac{d\underline{Q}}{dt} = R^{(est)}$$

$$\frac{d\Gamma_O}{dt} + \underline{V}_O \wedge \underline{Q} = \underline{M}_O^{(est)}$$

- # EQUAZIONI IN CASO 2D:

1) $\dfrac{d\underline{Q}}{dt} = R^{(est)} \longrightarrow$ 2 COMPONENTI: $\begin{cases} \left(\dfrac{d\underline{Q}}{dt}\right)_x = R_x^{(est)} \\ \left(\dfrac{d\underline{Q}}{dt}\right)_y = R_y^{(est)} \end{cases}$

2) $\Gamma_O = \underbrace{I_G \omega}_{// \underline{k}} + \underbrace{(G-O)\, \underline{Q}}_{// \underline{k}}$

$\hookrightarrow (G-O)$ E $\underline{Q} \in [\underline{i}, \underline{j}]$

- $\underline{V}_O \wedge \underline{Q} \;//\; \underline{k}$ PERCHÉ V_O E $\underline{Q} \in [\underline{i}, \underline{j}]$

$\longrightarrow \underline{M}_O^{(est)} \;//\; \underline{k}$

II EQ. CARDINALE IN 2D È UNA SOLA EQ. DIFFERENZIALE ORDINARIA SCALARE

$\longrightarrow$ IL SISTEMA CARDINALE DELLA DINAMICA FORNISCE 3 EQUAZIONI NEL 2D

$\forall$ SISTEMA DI N PUNTI => 2N gdl, MA 3 EQUAZIONI => NON SUFFICIENTE

$\forall$ C.R. 2D HO 3 gdl E 3 EQUAZIONI $\longrightarrow$ IL SISTEMA CARDINALE DELLA DINAMICA È SUFFICIENTE PER DETERMINARE IL MOTO DI UN C.R. NELLO SPAZIO

EQUIVALENZA E RIDUZIONE DI SISTEMI DI FORZE

- ANALIZZIAMO IL CASO DEL C.R.

↳ VALE IL SISTEMA CARDINALE DELLA DINAMICA => SUPPONIAMO C.R. SOGGETTO A SISTEMA DI FORZE S_1 CHE HANNO $\underline{R}_1^{(est)}$, $\underline{M}_{O,1}^{(est)}$

↳ IL MOTO È DETERMINATO DA:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{Q}}{dt} = \underline{R}_1^{(est)} \\ \dfrac{d\underline{\Gamma}_O}{dt} + \underline{v}_O \wedge \underline{Q} = \underline{M}_{O,1}^{(est)} \end{cases}$$

- SUPPONIAMO DI AVERE UN SISTEMA DI FORZE S_2 CON RISULTANTI:

$$\underline{R}_2^{(est)} = \underline{R}_1^{(est)}, \quad \underline{M}_{O,2}^{(est)} = \underline{M}_{O,1}^{(est)} \quad \forall \text{ POLO } O$$

- APPLICO SISTEMA CARDINALE:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\underline{Q}}{dt} = \underline{R}_2^{(est)} = \underline{R}_1^{(est)} \\ \dfrac{d\underline{\Gamma}_O}{dt} + \underline{v}_O \wedge \underline{Q} = \underline{M}_{O,2}^{(est)} = \underline{M}_{O,1}^{(est)} \end{array}\right\} \quad S_1, S_2 \text{ GENERANO LO STESSO MOTO}$$

- DEFINIZIONE DI FORZE EQUIVALENTI (EQUIPOLLENTI): DUE FORZE SI DICONO EQUIVALENTI SSE HANNO LO STESSO $\underline{R}^{(est)}$ E STESSO $\underline{M}_O^{(est)}$ $\forall$ POLO O

- OSS: SI DIMOSTRA CHE:

SE S_1 E S_2 SONO TALI CHE $R_1^{(est)} = R_2^{(est)}$, $M_{\bar{O},1}^{(est)} = M_{\bar{O},2}^{(est)}$

(RISPETTO AL POLO $\bar{O}$), ALLORA DATO UN ALTRO POLO O POSSO APPLICARE

IL TRASPORTO:

$$\left.\begin{array}{l} M_{O,1} = M_{\bar{O},1} + (\bar{O} - O) \wedge \underline{R}_1 \\ \quad\quad\quad\; \| \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\; \| \\ M_{O,2} = M_{\bar{O},2} + (\bar{O} - O) \wedge \underline{R}_2 \end{array}\right\} \quad M_{O,1}^{(est)} = M_{O,2}^{(est)}$$

$\longrightarrow$ SI PUÒ RILASSARE LA DEF. PRECEDENTE:

$\hookrightarrow$ **DEFINIZIONE RILASSATA DI FORZE EQUIVALENTI:** DUE SISTEMI DI FORZE SONO EQUIVALENTI SSE HANNO LA STESSA $R^{(est)}$ E $\exists$ POLO $\bar{O}$ TALE CHE ABBIANO LO STESSO $\underline{M}_{\bar{O}}$

- ESEMPIO:

CASO 1

COMPRESSIONE

$$\underline{R} = \underline{F} - \underline{F} = 0$$

$$\underline{M}_O = (P_1 - O) \wedge \underline{F} + (P_2 - O) \wedge (-\underline{F}) =$$

$$= [(P_1 - O) - (P_2 - O)] \wedge (\underline{F}) =$$

$$= (P_1 - P_2) \wedge (\underline{F}) = 0$$

$$(P_1 - P_2) \parallel \underline{F}$$

SISTEMI EQUIVALENTI

CASO 2:

$$\underline{R} = \underline{F} - \underline{F} = 0$$

$$M_O = (P_1 - O) \wedge (-\underline{F}) + (P_2 - O) \wedge \underline{F}$$

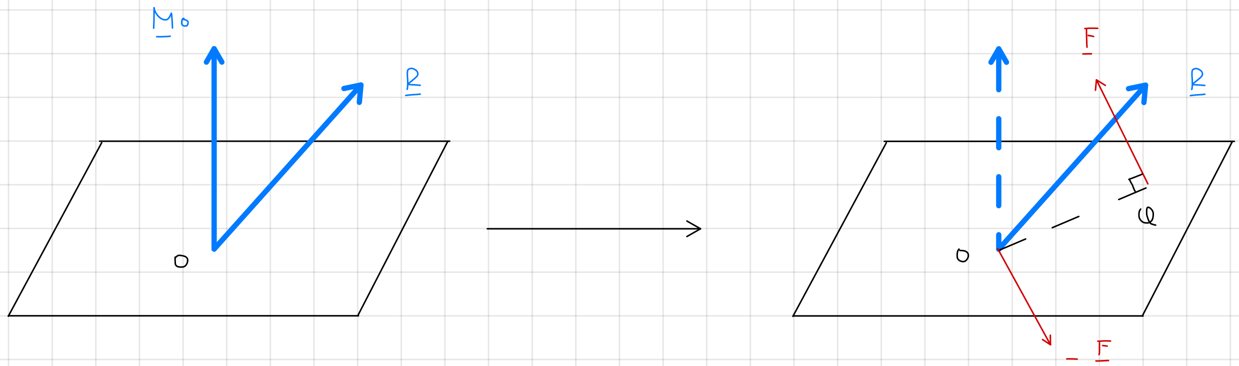
$$= [(P_2 - O) - (P_1 - O)] \wedge (\underline{F}) =$$

$$= (P_2 - P_1) \wedge (\underline{F}) = 0$$

$$(P_2 - P_2) \parallel \underline{F}$$

RIDUZIONE DI UN SISTEMA DI FORZE

- SISTEMA DI FORZE DI RISULTANTI $\underline{R}$, $\underline{M}_O$:



~ SCELGO $Q \in$ PIANO $\perp \underline{M}_O$

~ APPLICO $\underline{F}$ IN Q CON $\in$ PIANO $\perp \underline{M}_O$

~ APPLICO $-\underline{F}$ IN O

$$\underline{R},\ \underline{M}_O \longrightarrow \underline{R},\ \underline{F},\ -\underline{F}$$

~ IMPONIAMO EQUIVALENZA:

$$\begin{cases} \underline{R}_2 = \underline{R} + \underline{F} - \underline{F} = \underline{R} \\ \underline{M}_{O,2} = (O-O) \wedge (-\underline{F}) + (O-O) \wedge \underline{R} + (Q-O) \wedge (\underline{F}) = (Q-O) \wedge \underline{F} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ PER AVERE EQUIVALENZA: $\underline{M}_O = \underline{M}_{O,2}$: $(Q-O) \wedge \underline{F} = \underline{M}_O$

SUPPONIAMO CHE $\underline{F}$ SIA NOTA, $\underline{M}_O$ É NOTO PER HP $\Rightarrow (Q-O)$ INCOGNITA

CI RICONDUCIAMO A UN' EQUAZIONE DEL TIPO $\underline{a} \wedge \underline{x} = \underline{b}$

~ $\underline{F} \wedge (Q-O) = -\underline{M}_O$ COND. NECESSARIA: $\underline{F} \circ \underline{M}_O = 0$

PER COSTRUZIONE

~ $\underline{x} = \dfrac{\underline{b} \wedge \underline{a}}{\|\underline{a}\|^2} + \lambda \underline{a} \longrightarrow (Q-O) = \dfrac{-\underline{M}_O \wedge \underline{F}}{\|\underline{F}\|^2} + \lambda \underline{F} =$

$= \dfrac{F \wedge M_O}{\|F\|^2} + \cancel{\lambda F}$

$\quad \hookrightarrow = 0$ PER COSTRUZIONE

→ QUALSIASI SISTEMA DI FORZE DI RISULTANTI $\underline{R}$, $\underline{M}_O$ PUÓ ESSERE RIDOTTA A 3 FORZE:

1) $\underline{R}$ APPLICATA IN O

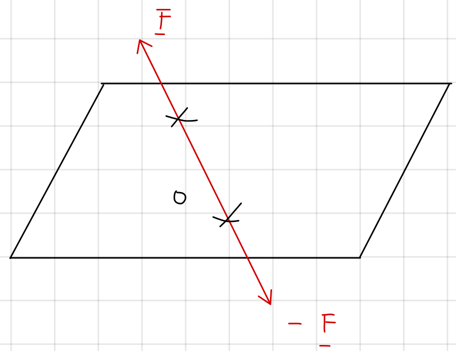
2) COPPIA DI FORZE $\underline{F}$, $-\underline{F}$ CON $\underline{F} \perp \underline{M}_O$ APPLICATE IN O E Q

TALI CHE $Q - O = \dfrac{\underline{F} \wedge \underline{M}_O}{\|\underline{F}\|^2}$

• CASI PARTICOLARI:

1) $\underline{R} = 0$, $\underline{M}_O = 0$

$$(Q - O) = \frac{F \wedge \overset{\circ}{\widehat{M_O}}}{\|F\|^2} = 0$$



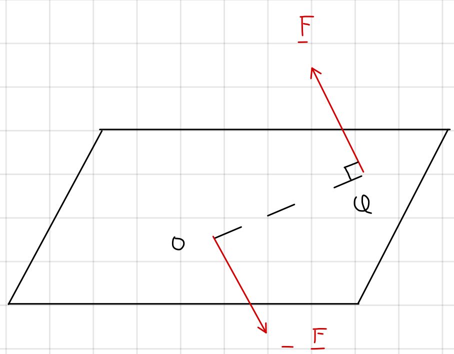
UN SISTEMA DI FORZE CON $\underline{R} = 0$, $\underline{M}_O = 0$ É EQUIVALENTE AL SISTEMA DI FORZE NULLO

• OSS: SE $\underline{R} = 0$, $\underline{M}_O = 0$ SI DIMOSTRA CHE $\underline{M}_O = 0$ $\forall O$

DIM:

~ DATO $\forall O' \neq O$: $\underline{M}_{O'} = \overset{\circ}{\widehat{M_O}} + (O - O') \wedge \overset{\circ}{\widehat{\underline{R}}} = 0$

2) $\underline{R} = 0$, $\underline{M}_O \neq 0$

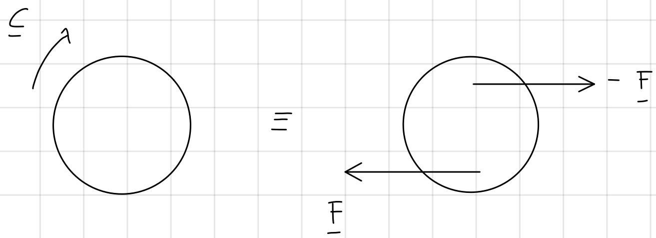


UN SISTEMA CON $\underline{R} = 0$, $\underline{M}_O \neq 0$ É RIDUCIBILE A UN SISTEMA CON UNA COPPIA DI FORZE $\underline{F}$ E $-\underline{F}$ APPLICATE IN Q ED O T.C.: $(Q - O) = \dfrac{F \wedge M_O}{\|F\|^2}$

• OSS: SI DIMOSTRA CHE $\forall O' \neq O \Rightarrow \underline{M}_{O'} = \underline{M}_O$

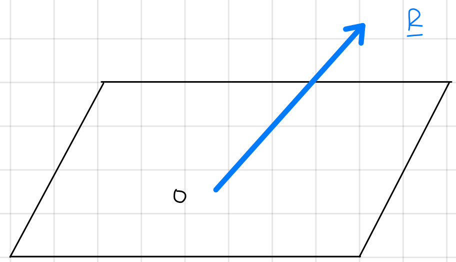
DIM: $\forall O' \neq O$: $\underline{M}_{O'} = \underline{M}_O + (O - O') \wedge \overset{\circ}{\widehat{\underline{R}}} = \underline{M}_O = \boxed{\underline{C}} \rightarrow$ COPPIA

• ESEMPIO DI COPPIA:



3) $\underline{R} \neq 0$, $\underline{M}_O = 0$

$$\sim(\ell - O) = \frac{\underline{F} \wedge \overset{\circ}{\widehat{\underline{M}_O}}}{\|F\|^2} = 0$$



IL SISTEMA CON $\underline{R} \neq 0$, $\underline{M}_O = 0$ É RIDUCIBILE AL SOLO RISULTANTE APPLICATO IN O

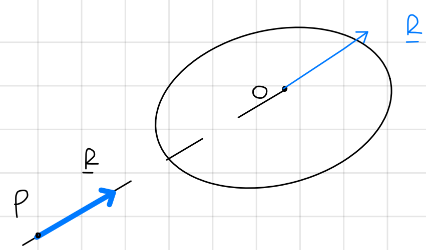
• OSS: IN GENERALE IL VALORE DEL MOMENTO DIPENDERÀ DAL POLO, INFATTI:

DIM: $\exists O' \neq O$: $\underline{M}_{O'} = \underline{M}_O + (O - O') \wedge \underline{R} = (O - O') \wedge \underline{R}$

• OSS2: SE $\underline{R} \neq 0$, $\underline{M}_O = 0$ IL SISTEMA DI FORZE É RIDUCIBILE A $\underline{R}$ APPLICATA IN $\forall$ PUNTO DELLA RETTA CHE PASSA PER O ED É $/\!/ \ \underline{R}$

$\underbrace{\text{RETTA CHE PASSA PER O ED É } /\!/ \ \underline{R}}_{\text{RETTA DI APPLICAZIONE}}$

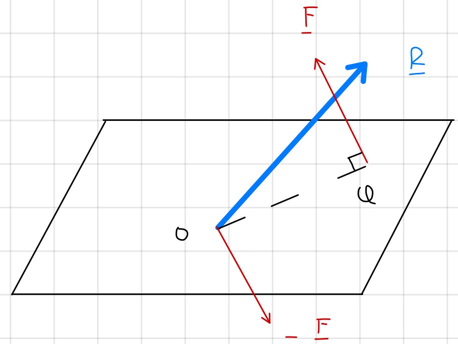
DIM: $\underline{M}_O = (P - O) \wedge \underline{R} = 0$ SICCOME $(P - O) /\!/ \ \underline{R}$



• DEF: LA RETTA DI APPLICAZIONE DEL RISULTANTE É IL LUOGO DEI PUNTI T.C.

$\underline{M}_O = 0$

4) $\underline{R} \neq 0$, $\underline{M}_O \neq 0$ $\longrightarrow$



• METTIAMOCI NEL CASO: $\underline{M}_O \neq 0$, $\underline{R} \neq 0$

↳ IL MOMENTO DIPENDE DAL POLO

~ DOMANDA: $\exists'$ O' T.C. $\underline{M}_{O'} = 0$? LO TROVO IMPONENDO $\underline{M}_{O'} = 0$

~ $\underline{M}_O + (O - O') \wedge \underline{R} = 0 \longrightarrow (O - O') \wedge \underline{R} = -\underline{M}_O$

$-\underline{R} \wedge (O - O') = -\underline{M}_O \longrightarrow \underline{R} \wedge (O - O') = \underline{M}_O$

$\underline{a} \wedge \underline{x} = \underline{b}$

~ CONDIZIONE NECESSARIA: $\underline{R} \circ \underline{M}_O = 0$, MA ALLORA:

$$(O - O') = -\frac{\underline{M}_O \wedge \underline{R}}{\|\underline{R}\|^2} + \lambda \underline{R} = \frac{\underline{R} \wedge \underline{M}_O}{\|R\|^2} + \lambda \underline{R}$$

$$\longrightarrow \boxed{(O - O') = \frac{\underline{R} \wedge \underline{M}_O}{\|R\|^2} + \lambda \underline{R}}$$ RETTA DI APPLICAZIONE DEL RISULTANTE

IN CONCLUSIONE: SE $\underline{R} \circ \underline{M}_O = 0$ IL SISTEMA CON RISULTANTI $\underline{R}$, $\underline{M}_O$ È RIDUCIBILE A $\underline{R}$ APPLICATA IN $\forall$ PUNTO DELLA RETTA DI APPLICAZIONE DEL RISULTANTE

• OSS IN 2D:

1. $\underline{R} \in$ PIANO MOTO
2. $\underline{M}_O \perp$ PIANO MOTO

$\Big\}$ $\underline{R} \circ \underline{M}_O = 0$ $\Rightarrow$ IN MOTO PLANARE $\exists$ SEMPRE LA RETTA DI APPLICAZIONE DEL RISULTANTE

• **DEFINIZIONE:** $\underline{R} \circ \underline{M}_O = I$ È DETTO **INVARIANTE SCALARE DINAMICO**

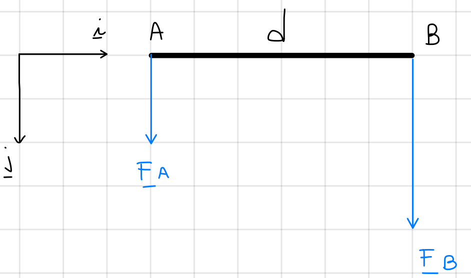
$\downarrow$

NON DIPENDE DAL POLO RISPETTO AL QUALE LO SI CALCOLA

DIM: $\sim \forall O' \neq O: \quad \underline{M}_{O'} = \underline{M}_O + (O - O') \wedge \underline{R}$

$$\sim \underline{R} \circ \underline{M}_{O'} = \underline{R} \circ \underline{M}_O + \underbrace{\underline{R} \circ [\underbrace{(O - O') \wedge \underline{R}}_{\perp \, \mathbb{R}}]}_{\underline{R} \circ (\text{qualcosa} \perp \underline{R}) = 0} = \underline{R} \circ \underline{M}_O$$

• ESEMPIO:



$\underline{F}_B = 2 \underline{F}_A$

i) DIM. CHE $\exists$ LA RETTA DI APPLICAZIONE DEL RISULTANTE

ii) DETERMINARLA

i)

$$\begin{cases} I = \underline{R} \circ \underline{M}_O = \underline{R} \circ \underline{M}_A = 3 F_A \underline{j} \circ 2 F_A d \underline{k} = 0 \\ \underline{R} = \underline{F}_A + \underline{F}_B = 3 F_A \underline{j} \\ \underline{M}_A = (B - A) \wedge \underline{F}_B = d \underline{i} \wedge 2 F_A \underline{j} = 2 F_A d \underline{k} \end{cases}$$

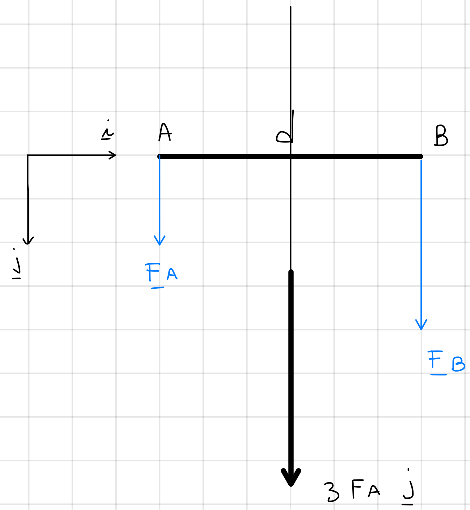
$I = 0 \implies \exists$ RETTA DI APPLICAZIONE DEL RISULTANTE

ii) $$(O' - A) = \frac{R \wedge M_A}{\|R\|^2} + \lambda \underline{R} = \frac{\cancel{3}\cancel{F_A} \underline{j} \wedge \cancel{2}\cancel{F_A} d \underline{k}}{\|\cancel{3} F_A \underline{j}\|^{\cancel{2}}} + \lambda (3 F_A \underline{j}) =$$

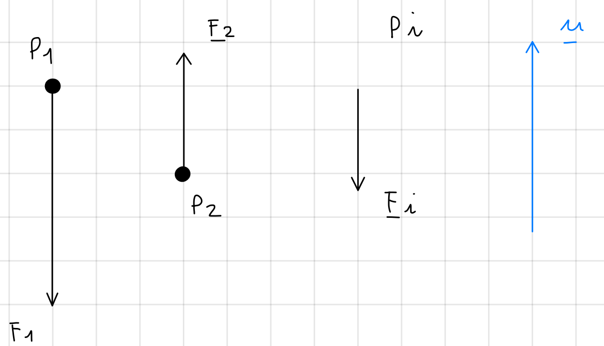
$$= \frac{2}{3} d \underline{i} + \lambda (3 F_A \underline{j})$$

$\sim$ MA: $-\infty < \lambda < \infty \longrightarrow -\infty < 3 \lambda F_A < \infty \rightsquigarrow 3 \lambda F_A = \lambda'$

$$(O' - A) = \frac{2}{3} d \, \underline{i} + \lambda' \, \underline{j}$$



• RETTA DI APPLICAZIONE DI r PER SISTEMA DI FORZE PARALLELE:



~ $\forall \, F_i \parallel u \implies \underline{F_i} = F_i \, \underline{u}$

~ $\underline{R} = \sum_{i=1}^{N} \underline{F_i} = \sum_{i=1}^{N} F_i \, \underline{u} = \underline{u} \left(\sum_{i=1}^{N} F_i \right) \parallel u$

~ DOMANDA: POSSO DETERMINARE LA RETTA DI APPLICAZIONE $\underline{R}$?

~ $I = \underline{R} \circ \underline{M_O}$ DOVE $\underline{M_O} = \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge F_i \, \underline{u}$

~ $I = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\underline{R}}_{\parallel u} \circ \underbrace{\left[(P_i - O) \wedge F_i \, \underline{u} \right]}_{\perp \underline{u}} = 0$

~ DETERMINIAMOLA: $(O' - O) = \dfrac{\underline{R} \wedge \underline{M_O}}{\| \underline{R} \|^2} + \lambda \, \underline{R}$ DOVE $\| R \| = \sum_{i=1}^{N} F_i \, \| u \|$

$$\sim \quad (O' - O) = \frac{\cancel{\left(\sum_{i=1}^{N} F_i\right)} \underline{u} \wedge \sum_{i=1}^{N} (P_i - O) \wedge F_i \underline{u}}{\left(\sum_{i=1}^{N} F_i\right)^{\cancel{2}}} + \underbrace{\lambda \sum_{i=1}^{N} F_i \, \|u\|}_{\lambda'} =$$

$$= (O' - O) = \frac{\sum_{i=1}^{N} F_i \left\{ \underline{u} \wedge \left[(P_i - O) \wedge \underline{u} \right] \right\}}{\sum_{i=1}^{N} F_i} + \lambda' \underline{u} =$$

$$\sim \quad \underline{u} \wedge \left[(P_i - O) \wedge \underline{u} \right] = (P_i - O) - \left[(P_i - O) \circ \underline{u} \right] \underline{u}$$

$$\underline{a} \wedge (\underline{b} \wedge \underline{c}) = (\underline{a} \circ \underline{c}) \underline{b} - (\underline{a} \circ \underline{b}) \underline{c}$$

$\sim$ SOSTITUIAMO: $$(O' - O) = \frac{\sum_{i=1}^{N} F_i \left\{ (P_i - O) - \left[(P_i - O) \circ \underline{u} \right] \right\}}{\sum_{i=1}^{N} F_i} + \lambda' \underline{u}$$

$$(O' - O) = \frac{\sum_{i=1}^{N} F_i (P_i - O)}{\sum_{i=1}^{N} F_i} - \frac{\sum_{i=1}^{N} F_i \left[(P_i - O) \circ u \right]}{\sum_{i=1}^{N} F_i} \underline{u} + \lambda' \underline{u}$$

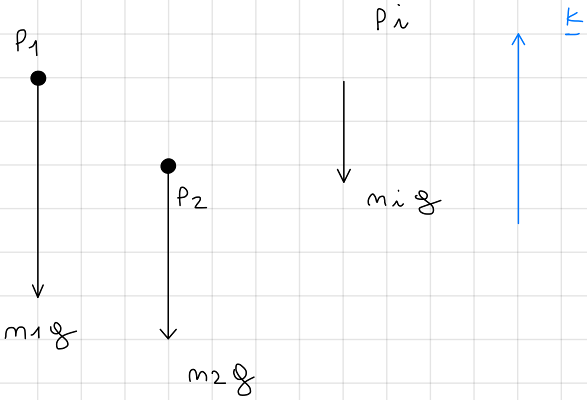
$$\sim \quad \boxed{(O' - O) = \frac{\sum_{i=1}^{N} F_i (P_i - O)}{\sum_{i=1}^{N} F_i} + \lambda'' \underline{u}}$$

$\longrightarrow$ QUALSIASI SISTEMA DI FORZE PARALLELE È EQUIVALENTE A UN'UNICA FORZA $\underline{R} = \sum_{i=1}^{N} F_i \underline{u}$ APPLICATA IN O'

- **DEF:** IL PUNTO $(C - O) = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} F_i (P_i - O)}{\sum_{i=1}^{N} F_i}$ È DETTO CENTRO DEL SISTEMA DI FORZE PARALLELE $(\lambda'' = 0)$

- <u>CASO PARTICOLARE: FORZA PESO</u>

IN QUESTO CASO IL CENTRO DEL SISTEMA DI FORZE SI CHIAMA **BARICENTRO**



$$\underline{F}_i = \underbrace{-m_i g}_{f_i} \, \underline{k} \, , \qquad k = \text{cost}$$

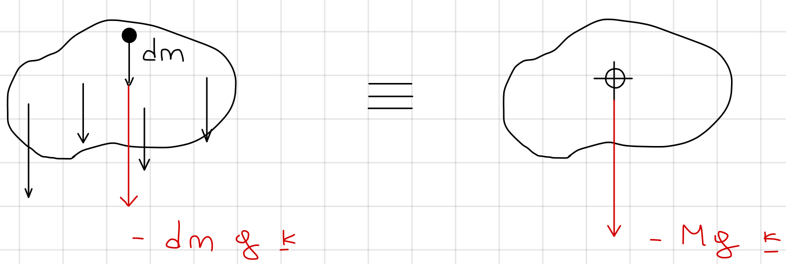
IL BARICENTRO SI TROVA: $(C - O) = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} f_i (P_i - O)}{\sum_{i=1}^{N} f_i} = \dfrac{-\sum_{i=1}^{N} m_i g (P_i - O)}{-\sum_{i=1}^{N} m_i g} =$

$$= \frac{g \sum_{i=1}^{N} m_i (P_i - O)}{g \sum_{i=1}^{N} m_i} = (G - O)$$

$\longrightarrow$ SE LA FORZA PESO É APPROSSIMATA CON IL SISTEMA DI FORZE PARALLELE E SE $g = \text{cost}$ IL BARICENTRO COINCIDE CON IL CENTRO DI MASSA.

INOLTRE: $\underline{R} = \left(\sum_{i=1}^{N} f_i\right) \underline{u} = -g \sum_{i=1}^{N} m_i \, \underline{k} = -Mg \, \underline{k}$

- OSS:

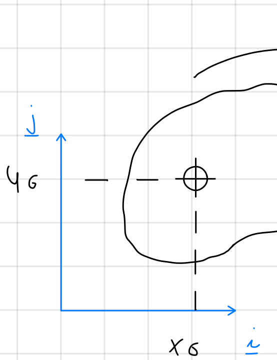


CENNI ALLA STATICA DEI CORPI RIGIDI

- SISTEMA CARDINALE DELLA DINAMICA:
$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{Q}}{dt} = \underline{R}^{(est)} \\[2ex] \dfrac{d\underline{\Gamma}_0}{dt} + \underline{v}_0 \wedge \underline{Q} = \underline{M}_0^{(est)} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ È SUFFICIENTE A DETERMINARE IL MOTO DI UN C.R.

COSA SIGNIFICA?



~ TROVIAMO: $\underline{R}^{(est)}(x_G, y_G, \vartheta, t)$

$\underline{M}_0^{(est)}(x_G, y_G, \vartheta, t)$

~ DEFINIAMO CONDIZIONI INIZIALI:

$x_G(t_0) = x_{G,0}$ $\quad y_G(t_0) = y_{G,0}$ $\quad \vartheta(t_0) = \vartheta_0$

$\dot{x}_G(t_0) = \dot{x}_{G,0}$ $\quad \dot{y}_G(t_0) = \dot{y}_{G,0}$ $\quad \dot{\vartheta}(t_0) = \dot{\vartheta}_0$

$\longrightarrow$ INTEGRO TROVANDO IL MOTO: $x_G(t)$, $y_G(t)$, $\vartheta(t)$

~ SOLUZIONI DI EQUILIBRIO:

- CASO PARTICOLARE:
$$\begin{cases} \underline{R}^{(est)}(x_G, y_G, \vartheta) \\ \underline{M}_0^{(est)}(x_G, y_G, \vartheta) \end{cases}$$
$\longrightarrow$ NO DIPENDENZA ESPLICITA DAL TEMPO

- **DEFINIZIONE DI SOLUZIONI D'EQUILIBRIO:** SOLUZIONI COSTANTI DEL SISTEMA CARDINALE

~ CIOÈ:
$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{Q}}{dt} = \underline{R}^{(est)}(x_G, y_G, \vartheta) \\[2ex] \dfrac{d\underline{\Gamma}_0}{dt} + \underline{v}_0 \wedge \underline{Q} = \underline{M}_0^{(est)}(x_G, y_G, \vartheta) \end{cases}$$

~ CERCHIAMO LE SOLUZIONI DEL TIPO:

$$\begin{cases} x_G(t) = \bar{x}_G = cost \\ y_G(t) = \bar{y}_G = cost \\ \vartheta(t) = \bar{\vartheta} = cost \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{x}_G(t) = 0 \\ \dot{y}_G(t) = 0 \\ \dot{\vartheta}(t) = 0 \end{cases}$$

SISTEMA FERMO

~ IDENTIFICO LE CONDIZIONI NECESSARIE PER AVERE UN SISTEMA FERMO:

~ SE $O \equiv G$:
$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{Q}}{dt} = \underline{R}^{(est)}(x_G, y_G, \vartheta) \\ \dfrac{d\underline{\Gamma}_O}{dt} + \underline{v}_O \wedge \underline{Q} = M_O^{(est)}(x_G, y_G, \vartheta) \end{cases}$$

~ MA $\underline{Q} = M\,\underline{v}_G$, $\underline{\Gamma}_G = \underline{I}_G\,\underline{\omega}$

$$\dfrac{M\,d\underline{v}_G}{dt} = \underline{R}^{(est)}(x_G, y_G, \vartheta)$$

$$\underline{I}_G\,\underline{\omega} = \underline{M}_G^{(est)}(x_G, y_G, \vartheta)$$

~ NELLE SOLUZIONI DELL'EQUILIBRIO: $\underline{v}_G = 0 = cost$ $\quad \underline{\omega} = 0 = cost$

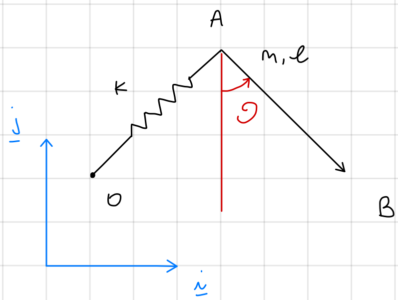
$$\begin{cases} \underline{R}^{(est)}(x_G, y_G, \vartheta) = 0 \\ M_G^{(est)}(x_G, y_G, \vartheta) = 0 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ QUINDI: CONDIZIONE NECESSARIA PERCHÉ CONFIGURAZIONE D'EQUILIBRIO

É CHE $\underline{R}^{(est)} = 0$, $\underline{M}_G^{(est)} = 0$

• SI DIMOSTRA CHE TALE CONDIZIONE É NECESSARIA E <u>SUFFICIENTE</u>

• ESEMPIO:



~ MOLLA OA DI COSTANTE ELASTICA k

~ ASTA AB DI MASSA M, LUNGHEZZA ℓ SOGGETTA A F. PESO

i) CONFIGURAZIONE D'EQUILIBRIO

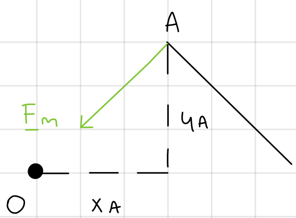
~ $\#\, gdl = 3$ ⟶ COORDINATE LIBERE: x_A, y_A, θ

~ PER TROVARE EQUILIBRIO: $\begin{cases} \underline{R}^{(est)}(x_A, y_A, \theta) = 0 \\ \underline{M}_O^{(est)}(x_A, y_A, \theta) = 0 \end{cases}$ PER O QUALSIASI

1) ISOLO L'ASTA:

● FORZE ATTIVE

● FORZE REATTIVE



~ $\begin{cases} \|F_m\| = k\,\|O - A\| \\ \text{VERSO: } \dfrac{(O-A)}{\|O-A\|} \end{cases}$

$\|F_m\| = k\,\cancel{\|O-A\|} \cdot \dfrac{(O-A)}{\cancel{\|O-A\|}} = k\,(O-A)$

~ $\|F_m\| = k\,(-x_A\,\underline{i} - y_A\,\underline{j}) = -k x_A\,\underline{i} - k y_A\,\underline{j}$

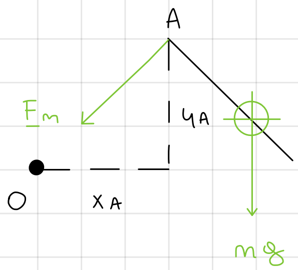
~ $\underline{F}_P = -mg\,\underline{j}$

⟶ $\underline{R}^{(est)}(x_A, y_A, \theta) = \underline{F}_m + \underline{F}_P = -k x_A\,\underline{i} - k y_A\,\underline{j} - mg\,\underline{j}$

~ PONGO: $\underline{R}^{(est)} = 0 \qquad -k x_A\,\underline{i} - (k y_A + mg)\,\underline{j} = 0$

$\begin{cases} -k x_A = 0 \\ k y_A + mg = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_A = 0 \longrightarrow \bar{x}_A \\ y_A = -\dfrac{mg}{k} \longrightarrow \bar{y}_A \end{cases}$

~ $M_O^{(est)}(x_A, y_A, \vartheta) = 0 \longrightarrow M_A^{(est)}(x_A, y_A, \vartheta) = 0$

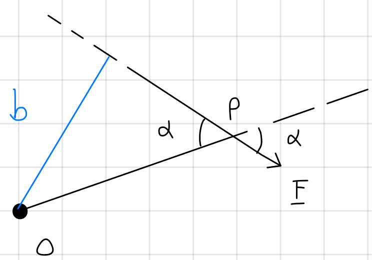


$$M_A^{(est)} = \cancel{(A-A)} \wedge \underline{F}_m + (G-A) \wedge \underline{F}_P$$

DOVE $\quad (G-A) = \dfrac{\ell}{2}\sin\vartheta\, \underline{i} - \dfrac{\ell}{2}\cos\vartheta\, \underline{j}$

~ $$M_A^{(est)} = \left(\frac{\ell}{2}\sin\vartheta\, \underline{i} - \frac{\ell}{2}\cos\vartheta\, \underline{j}\right) \wedge (-mg\, \underline{j}) = -mg\frac{\ell}{2}\sin\vartheta\, \underline{k}$$

• NOTA:



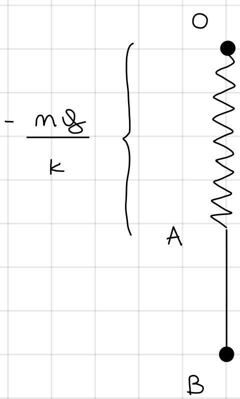
$$\underline{M}_O = (P-O) \wedge \underline{F}$$

$$\| M_O \| = \| P-O\| \, \|F\| \sin\alpha = \|F\| \, \underbrace{\|P-O\| \sin\alpha}_{b}$$

~ $M_A^{(est)} = 0 \longrightarrow -mg\dfrac{\ell}{2}\sin\vartheta\, \underline{k} = 0 \longrightarrow \sin\vartheta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \bar{\vartheta}_1 = 0 \\ \bar{\vartheta}_2 = \pi \end{cases}$

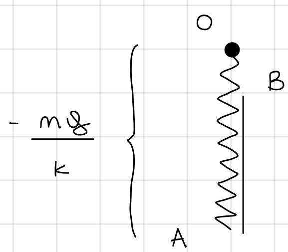
~ SOLUZIONE 1:

$\bar{x}_A = 0 \,,\quad \bar{y}_A = -\dfrac{mg}{k} \qquad \bar{\vartheta} = 0$



SOLUZIONE 2:

$\bar{x}_A = 0 \,,\quad \bar{y}_A = -\dfrac{mg}{k} \qquad \bar{\vartheta} = \pi$



- TIPI DI FORZE:

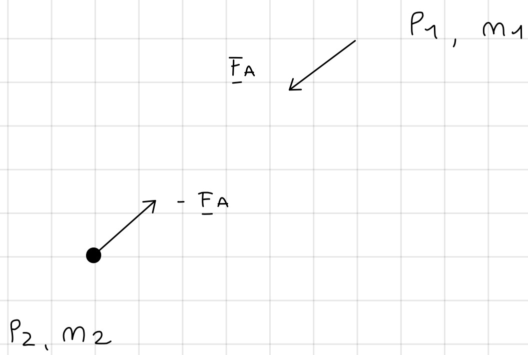
1) FORZE ATTIVE

FORZA PESO:

- OGNI CORPO LIBERO CADE VERSO LA SUPERFICIE TERRESTRE CON LEGGE:

$$m\underline{a} = m\underline{g}$$

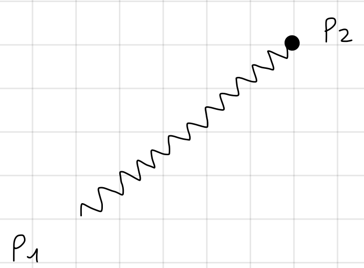
ATTRAZIONE GRAVITAZIONALE:



- $$\underline{F}_A = G\, m_1 m_2 \frac{(P_1 - P_2)}{\| P_1 - P_2 \|^3} =$$

$$= -G\, m_1 m_2 \frac{(P_2 - P_1)}{\| P_2 - P_1 \|^3}$$

FORZA ELASTICA:



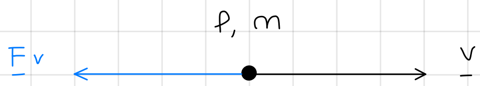
- FORZA ELASTICA // $(P_2 - P_1)$
- HP: LUNGHEZZA A RIPOSO = 0
  - → FORZA ATTRATTIVA
  - → $\| F_m \| \propto \| P_2 - P_1 \|$

$$F_{m,2} = k\,(P_1 - P_2) = -k\,(P_2 - P_1)$$

$$F_{m,1} = k\,(P_2 - P_1)$$

FORZA VISCOSA:

- FORZA SU UN PUNTO CHE SI MUOVE IN UN MEZZO VISCOSO
- CARATTERISTICHE: → OPPOSTA A $\underline{v}$
  → MODULO DIPENDE DA $\underline{v}$



$$\underline{F}_v = -k(\|\underline{v}\|)\,\underline{v}$$

con $k(\|\underline{v}\|) > 0$

- IN PARTICOLARE:

1 RESISTENZA VISCOSA: $\underline{F}_v = -k\,\underline{v}$, $k = \text{cost}$

2. RESISTENZA IDRAULICA: $\underline{F}_v = \underbrace{-c\|\underline{v}\|}\,\underline{v}$

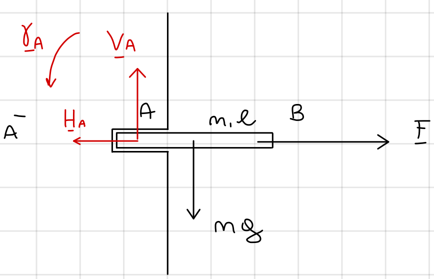
$$k\|\underline{v}\| = c\|\underline{v}\|$$

2) FORZE REATTIVE (REAZIONI VINCOLARI)

- FORZE DOVUTE ALLA PRESENZA DI VINCOLI
- OSS: ∀ SISTEMA DI FORZE PUÒ ESSERE RIDOTTO A UNA FORZA E UNA COPPIA

INCASTRO:

- ASTA INCASTRATA A PARETE IN UN ESTREMITÀ



~ ASTA IN EQUILIBRIO:

$$\begin{cases} R^{(est)} = 0 \\ M_A^{(est)} = 0 \end{cases}$$

TOLGO (est) SOTTOINTENDENDOLO PER COMODITÀ

ATTIVE REATTIVE

$$\begin{cases} \underline{R}^a + \underline{R}^r = 0 \\ \underline{M}_A^a + \underline{M}_A^r = 0 \end{cases}$$

PROIETTO IN $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$

$$\begin{cases} R_x^a + R_x^r = 0 \\ R_y^a + R_y^r = 0 \\ M_A^a + M_A^r = 0 \end{cases}$$

~ SUPPONIAMO SOLO V_A COME FORZA REATTIVA:

$$\begin{cases} R_x^a = F \\ R_y^a = -mg \\ M_A^a = -mg\dfrac{l}{2}\underline{k} \end{cases} \qquad \begin{matrix} R_x^r = 0 \\ R_y^r = V_A \\ M_A^r = 0 \end{matrix} \longrightarrow \begin{cases} \underline{F} = 0 & \text{IMPOSSIBILE} \\ -mg + V_A = 0 & mg = V_A \\ -mg\dfrac{l}{2} = 0 & \text{IMPOSSIBILE} \end{cases}$$

~ SUPPONIAMO V_A, H_A COME FORZE REATTIVE:

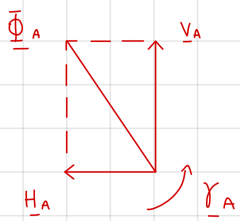
$$\begin{cases} R_x^a = F \\ R_y^a = -mg \\ M_A^a = -mg\dfrac{l}{2}\underline{k} \end{cases} \qquad \begin{matrix} R_x^r = H_A \\ R_y^r = V_A \\ M_A^r = 0 \end{matrix} \longrightarrow \begin{cases} \underline{F} - H_A = 0 & \underline{F} = \underline{H}_A \\ -mg + V_A = 0 & mg = \underline{V}_A \\ -mg\dfrac{l}{2} = 0 & \text{IMPOSSIBILE} \end{cases}$$

~ SUPPONIAMO V_A, H_A, γ_A COME FORZE REATTIVE:

$$\begin{cases} R_x^a = F \\ R_y^a = -mg \\ M_A^a = -mg\dfrac{l}{2}\underline{k} \end{cases} \qquad \begin{matrix} R_x^r = H_A \\ R_y^r = V_A \\ M_A^r = \gamma_A \end{matrix} \longrightarrow \begin{cases} \underline{F} - H_A = 0 & \underline{F} = \underline{H}_A \\ -mg + V_A = 0 & mg = \underline{V}_A \\ -mg\dfrac{l}{2} + \gamma_A = 0 & \gamma_A = mg\dfrac{l}{2} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ L' INCASTRO FORNISCE H_A, V_A, γ_A COME REAZIONI VINCOLARI

• OSS1: NON DOVEVAMO AVERE 1 FORZA E 1 COPPIA?



~ 1 FORZA $\underline{\Phi}_A$ E 1 COPPIA γ_A

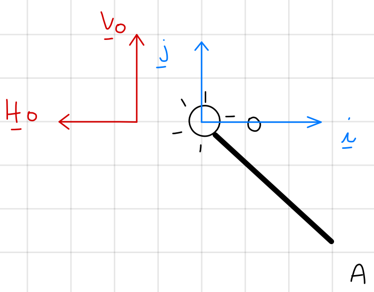
$\Rightarrow$ NON CONOSCIAMO A PRIORI DIREZIONE DI $\underline{\Phi}_A$

• OSS: L' INCASTRO IMPEDISCE: TRASLAZIONE IN $\underline{i}$, TRASLAZIONE IN $\underline{j}$, ROTAZIONE

$\longrightarrow$ A OGNI VINCOLO SI ASSOCIA UNA RELAZIONE VINCOLARE

CERNIERA

1) 1 CORPO RIGIDO

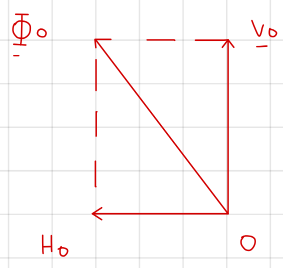


VINCOLO:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

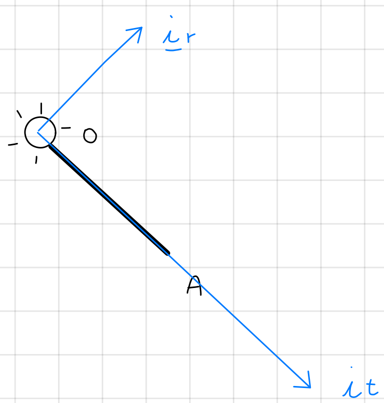
LA CERNIERA IMPEDISCE GLI SPOSTAMENTI IN $\underline{i}$, $\underline{j}$ $\rightarrow$ $\underline{V_0}$, $\underline{H_0}$

- OSS 1: H_0 E V_0 POSSONO ESSERE COMBINATE:



CERNIERA FORNISCE UNA FORZA DI CUI NON CONOSCO A PRIORI LA DIREZIONE $\longrightarrow$ H_0, V_0 MI SERVONO

- OSS 2:

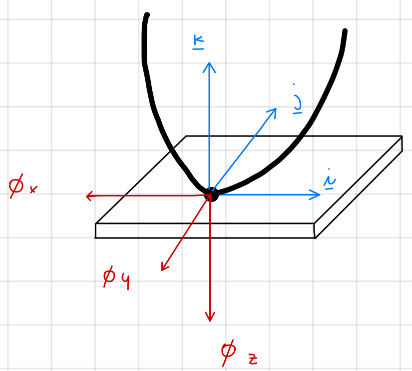


CERNIERA IMPEDISCE:

- SPOSTAMENTI IN $\underline{i}_r$: ϕ_r
- SPOSTAMENTI IN $\underline{i}_t$: ϕ_t

$\longrightarrow$ $\phi_r, \phi_t \neq H_0, V_0$ $\longrightarrow$ MA COMPONENTI DELLA STESSA $\underline{\Phi}_0$

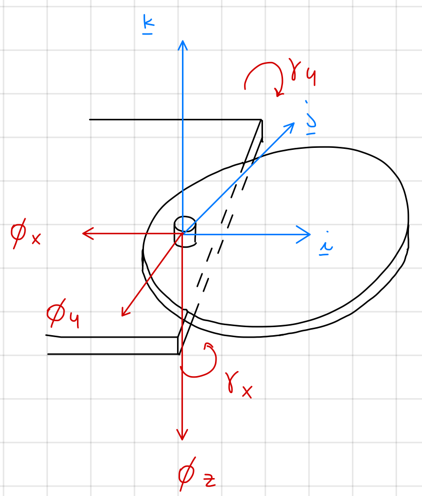
2) CERNIERA SFERICA:



IMPEDISCE:

$$\begin{cases} \text{SPOSTAMENTI IN } i \longrightarrow \phi_x \\ \text{SPOSTAMENTI IN } j \longrightarrow \phi_y \\ \text{SPOSTAMENTI IN } k \longrightarrow \phi_z \end{cases}$$

3) CERNIERA PIANA 3D:

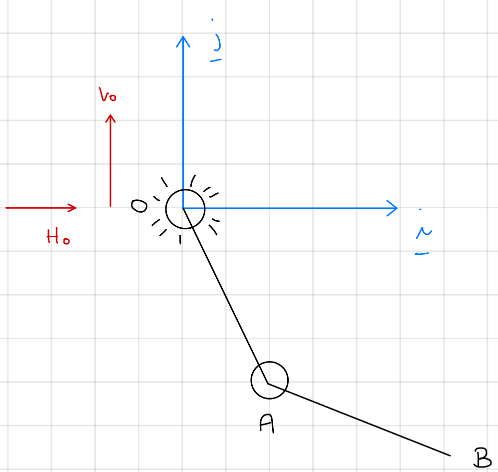


IMPEDISCE:

$$\begin{cases} \text{SPOSTAMENTI IN } i \longrightarrow \phi_x \\ \text{SPOSTAMENTI IN } j \longrightarrow \phi_y \\ \text{SPOSTAMENTI IN } k \longrightarrow \phi_z \end{cases}$$

ROTAZIONI INTORNO A $i, j \longrightarrow \underbrace{\gamma_x, \gamma_y}_{\text{2 COPPIE}}$

4) 2 CORPI RIGIDI:



~ CERNIERA A TERRA $\Rightarrow H_0, V_0$

~ CERNIERA IN A IMPEDISCE:

- TRASLAZIONE RELATIVA IN i
- TRASLAZIONE RELATIVA IN j

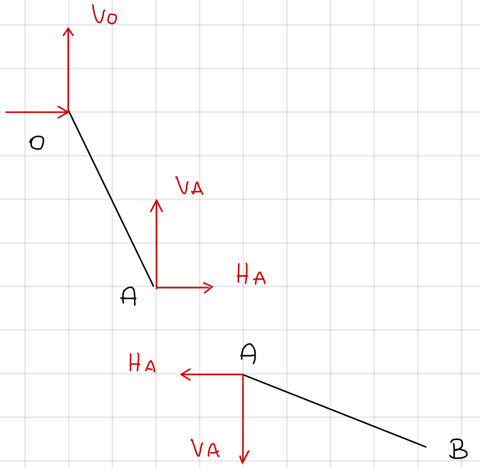
LE REAZIONI VINCOLARI IN O SONO ESTERNE AL SISTEMA, MENTRE LE REAZIONI IN A SONO INTERNE

~ APPLICHIAMO IL SISTEMA CARDINALE SUL SISTEMA:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{Q}^{sis}}{dt} = \underline{R}^{a,sis} + \underline{R}^{r,sis} \\[2ex] \dfrac{d\underline{\Gamma}_O^{sis}}{dt} + \underline{v}_O \wedge \underline{Q} = \underline{M}_O^{a,sis} + \underline{M}_O^{r,sis} \end{cases}$$

$\underline{M}_O^{r,sis} \rightarrow H_O, V_O$

$\longrightarrow$ DEVO RENDERE LE RELAZIONI INTERNE ESTERNE $\longrightarrow$ SPEZZO IL SISTEMA:



$\Rightarrow$ HA, VA DIVENTANO ESTERNE

non ne sarei così sicuro

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{Q}^{OA}}{dt} = \underline{R}^{a,OA} + \underline{R}^{r,OA} \\[2ex] \dfrac{d\underline{\Gamma}^{OA}}{dt} + \underline{v}_O \wedge \underline{Q} = \underline{M}_O^{a,OA} + \underline{M}_O^{r,OA} \end{cases}$$

$\underline{R}^{r,OA} \rightarrow H_O, V_O, H_A, V_A$

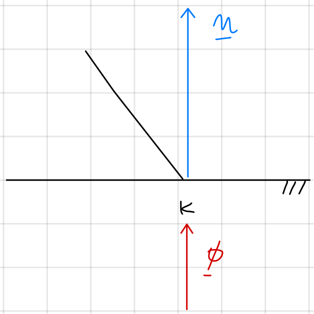
$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{Q}^{AB}}{dt} = \underline{R}^{a,AB} + \underline{R}^{r,AB} \\[2ex] \dfrac{d\underline{\Gamma}^{AB}}{dt} + \underline{v}_O \wedge \underline{Q} = \underline{M}_O^{a,AB} + \underline{M}_O^{r,AB} \end{cases}$$

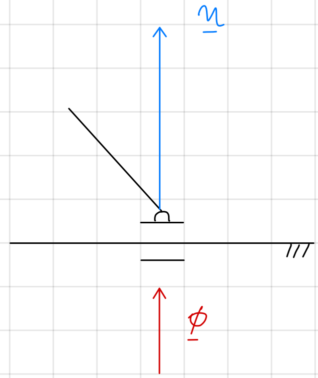
$\underline{R}^{r,AB} \rightarrow H_A, V_A$

- OSS: IN SISTEMI DI PIÙ CORPI RIGIDI BISOGNERÀ SCEGLIERE L'EQUAZIONE CARDINALE DA APPLICARE E IL SOTTOSISTEMA SU CUI APPLICARLA

APPOGGIO E CARRELLO

1) 1 CORPO RIGIDO

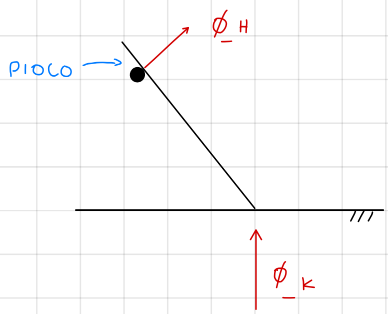




~ IMPEDISCONO:

TRASLAZIONE IN DIREZIONE NORMALE ALL' APPOGGIO/CARRELLO

- OSS1: LA NORMALE È SEMPRE INTESA RISPETTO ALLA SUPERFICIE PIÙ REGOLARE



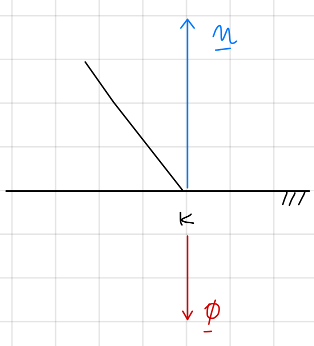
FRA PIOLO (PUNTO) E ASTA È PIÙ REGOLARE L'ASTA

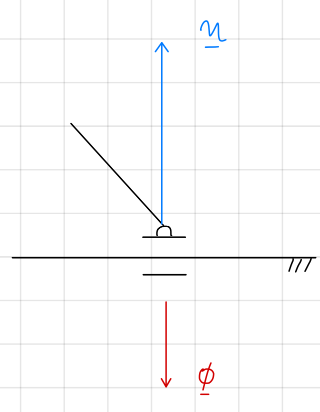
- OSS 2: LA DIREZIONE DELLA REAZIONE È NOTA A PRIORI
- OSS 3: DIFFERENZA DINAMICA CARRELLO - APPOGGIO:

~ CARRELLO IMPEDISCE DINAMICAMENTE COMPENETRAZIONE E DISTACCO => $\phi \gtrless 0$

~ APPOGGIO IMPEDISCE DINAMICAMENTE SOLO LA COMPENETRAZIONE => $\phi > 0$

- OSS 4:



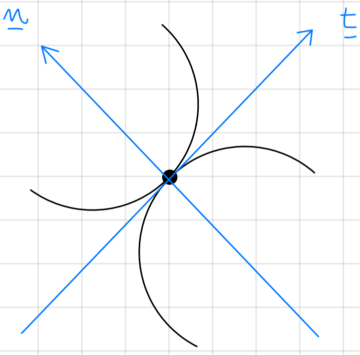


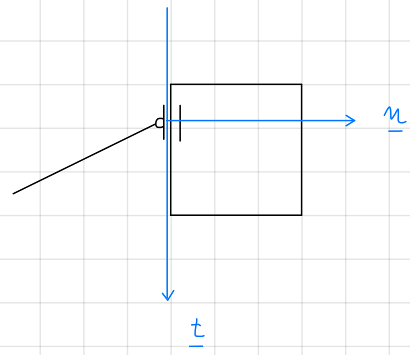
$\phi < 0$ $\phi \gtrless 0$

- OSS 5: PRATICAMENTE RISOLVIAMO IL MOTO SUPPONENDO APPOGGIO VALIDO.

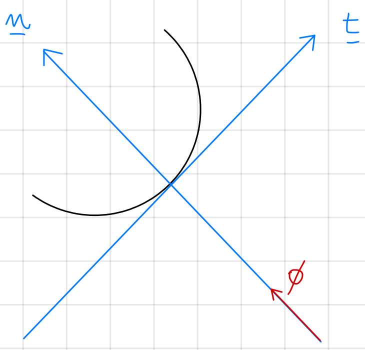
  A POSTERIORI CONTROLLIAMO CHE L'APPOGGIO SIA VERIFICATO

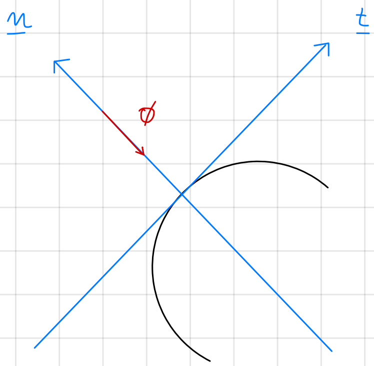
2) 2 CORPI RIGIDI

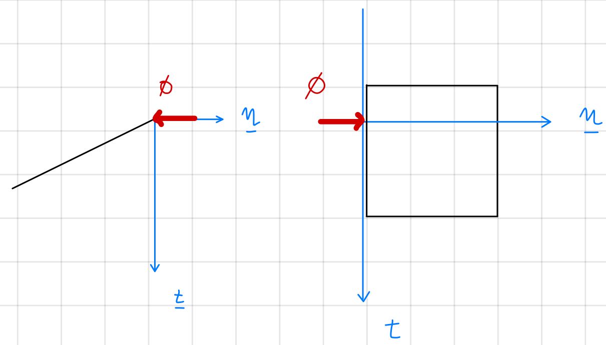




~ SPEZZO IL SISTEMA PER NON AVERE FORZE INTERNE

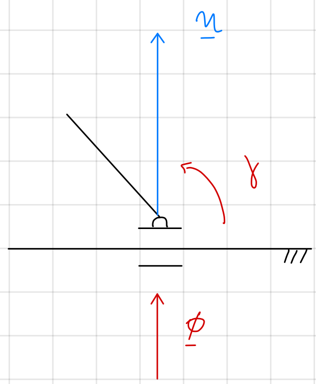






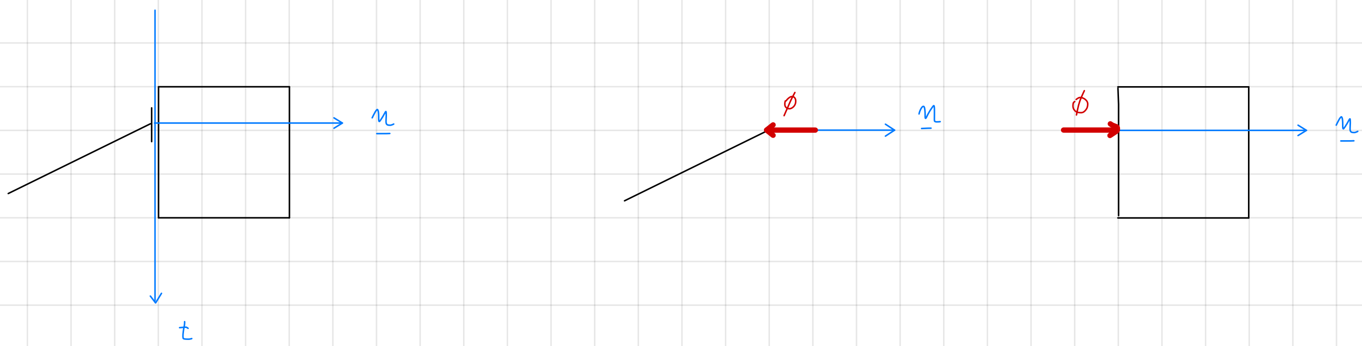
PATTINO

1) 1 CORPO RIGIDO



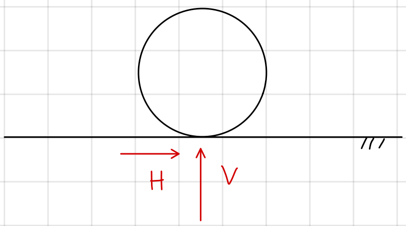
- IL PATTINO IMPEDISCE:
  - ~ TRASLAZIONE NORMALE ALLA GUIDA => ϕ
  - ~ ROTAZIONE ASTA => γ
- SEGNI:
  - ~ $\phi > 0$
  - ~ $\gamma \gtrless 0$

2) CORPI RIGIDI:



PURO ROTOLAMENTO:

1) UN CORPO RIGIDO:

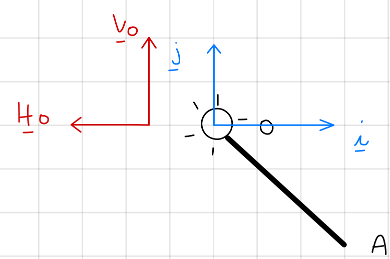


CINEMATICAMENTE IMPEDISCE:

~ COMPENETRAZIONE

~ DISTACCO

- OSS: È UNA SITUAZIONE SIMILE ALLA CERNIERA:

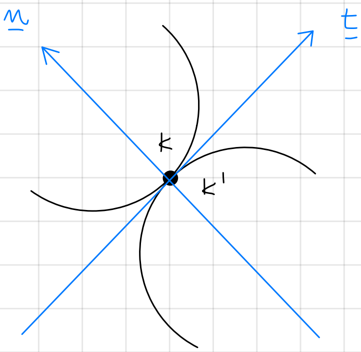


→ DIFFERENZA DINAMICA CERNIERA - PURO ROTOLAMENTO:

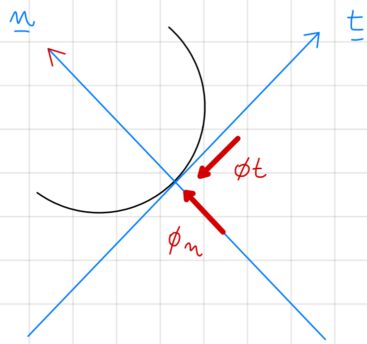
- CERNIERA: $H_0, V_0 \gtrless 0$

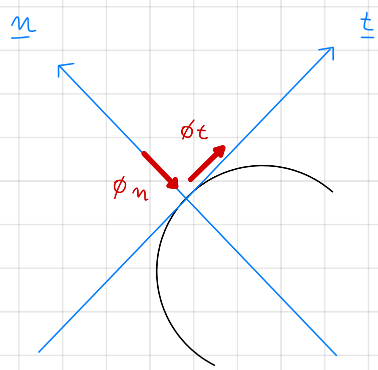
- PURO ROTOLAMENTO: $H_0 \gtrless 0$, $V > 0$ (IMPEDISCE SOLO IL DISTACCO)

2) 2 CORPI RIGIDI:



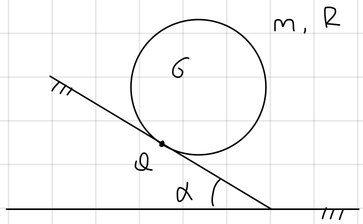
=>





~ SEGNI: $\phi_t \gtrless 0$, $\phi_n > 0$ (PER CONVENZIONE PRESA)

• ESEMPIO:



~ PURO ROTOLAMENTO IN Q

~ SISTEMA SU PIANO VERTICALE

~ AGISCE FORZA PESO

i) EQUAZIONE DEL MOTO

ii) MOTO

• OSS: DATI n gdl: $q_1, \dots, q_N$

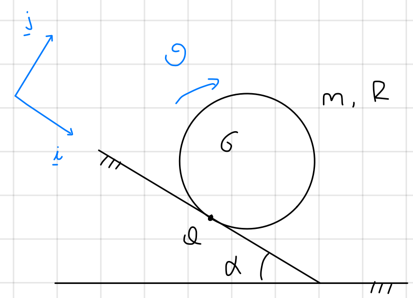
└→ EQUAZIONE PURA DEL MOTO: $f_i(\ddot{q}_1, \dots, \ddot{q}_N, t) = 0 \qquad i = 1, \dots, N$

$\longrightarrow$ MOTO: $q_1(t), \dots, q_N(t)$

- NEL NOSTRO CASO: $gdl = 1 \Rightarrow \vartheta$ C.L. :

$$\begin{cases} \text{EQUAZIONE DEL MOTO: } f(\ddot{\vartheta}, \dot{\vartheta}, \vartheta, t) = 0 \\ \text{MOTO: } \vartheta(t) \end{cases}$$

STEP 1) ANALISI CINEMATICA: TROVARE VELOCITÀ DEI BARICENTRI E VELOCITÀ ANGOLARI DI TUTTI I C.R. DEL SISTEMA IN FUNZIONE DELLE C.L.



$$\underline{\omega} = -\dot{\vartheta}\,\underline{k}$$

$$V_G = -\dot{\vartheta}\,\underline{k} \wedge (G - Q) = -\dot{\vartheta}\,\underline{k} \wedge R\,\underline{j} = R\dot{\vartheta}\,\underline{i}$$

$Q \equiv$ CIR

STEP 2) APPLICARE SISTEMA CARDINALE DELLA DINAMICA

~ EVIDENZIAMO FORZE ATTIVE, REATTIVE:

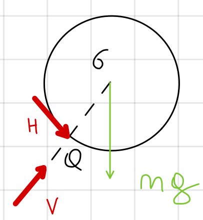


DIAGRAMMA DI CORPO LIBERO

~ I EQ. CARDINALE - DIREZIONE X:

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)_x = R_x^a + R_x^r \longrightarrow \frac{dQ}{dt} = MR\ddot{\vartheta}\,\underline{i} \longrightarrow \left(\frac{dQ}{dt}\right)_x = MR\ddot{\vartheta}$$

$$Q = M V_G = MR\dot{\vartheta}\,\underline{i}$$

N.B. PRIMA CALCOLO LA DERIVATA E POI PRENDO LA COMPONENTE CHE MI SERVE

~ $R_x^a = mg \sin\alpha, \quad R_x^r = H$

$$\Rightarrow MR\ddot{\vartheta} = mg\sin\alpha + H$$

a) NON È EQUAZIONE DEL MOTO PERCHÈ COMPARE H

~ I EQ. CARDINALE - DIREZIONE y :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{dQ}{dt}\right)_y = \underline{R}_x^a + \underline{R}_x^r \\ Q = M\, V_G = M R \dot{\theta}\, \underline{i} \end{cases} \longrightarrow \frac{dQ}{dt} = M R \ddot{\theta}\, \underline{i} \qquad \left(\frac{dQ}{dt}\right)_y = 0$$

~ $R_y^a = -mg\cos\alpha$

$V - mg\cos\alpha = 0$ b) NON È EQUAZIONE DI MOTO PERCHÉ COMPARE V

~ $R_y^r = V$

~ II EQUAZIONE CARDINALE - POLO G :

$$\frac{d\Gamma_G}{dt} + \cancel{\underline{V}_G \wedge \underline{Q}} = \underline{M}_O^a + \underline{M}_O^r$$

$Q = M V_G$

$$\begin{cases} \Gamma_G = I_G\, \underline{\omega} = -I_G \dot{\theta}\, \underline{k} \\ \underline{M}_O^a = 0 \\ \underline{M}_O^r = HR \end{cases} \longrightarrow -I_G \ddot{\theta} = HR \quad \text{c)}$$

NON È EQUAZIONE DI MOTO

~ UNISCO a), b), c)

$$\begin{cases} M R \ddot{\theta} = mg\sin\alpha + H \\ V - mg\cos\alpha = 0 \\ -I_G \ddot{\theta} = HR \end{cases} \leadsto H = -\frac{I_G \ddot{\theta}}{R}$$

$$\leadsto m R \ddot{\theta} = mg\sin\alpha - \frac{I_G \ddot{\theta}}{R} \qquad \text{EQUAZIONE DEL MOTO}$$

ii) INTEGRAZIONE: $\int \ddot{\theta} = \int \dfrac{mg\sin\alpha}{mR + \frac{I_G}{R}} \longrightarrow \theta(t) = \dfrac{1}{2}\, \dfrac{mg\sin\alpha}{mR + \frac{I_G}{R}}\, t^2$

· OSS 1: ABBIAMO OTTENUTO SISTEMA DI:

3 EQUAZIONI IN INCOGNITE $H, V, \vartheta(t)$

$\longrightarrow$ IL SISTEMA CARDINALE É SUFFICIENTE PER DETERMINARE L'EQUAZIONE DEL MOTO

· OSS 2: ABBIAMO TROVATO: $\ddot{\vartheta} = \dfrac{mg\sin\alpha}{mR + \dfrac{I_G}{R}}$

CASO 1: DISCO PIENO

$I_G = \dfrac{mR^2}{2} \longrightarrow \ddot{\vartheta} = \dfrac{2}{3}\dfrac{g}{R}\sin\alpha$

CASO 2: ANELLO

$I_G = mR^2 \longrightarrow \ddot{\vartheta} = \dfrac{1}{2}\dfrac{g}{R}\sin\alpha$

$\longrightarrow$ IL MOMENTO D'INERZIA RAPPRESENTA LA TENDENZA DI UN CORPO AD OPPORSI A UN ROTOLAMENTO. SE I_G, A PARITÀ DI MASSA, É MINORE ALLORA IL CORPO AVRÀ UN'ACCELERAZIONE MAGGIORE

· OSS 3: APPLICO II EQUAZIONE CARDINALE IN Q:

$$\frac{d\Gamma_Q}{dt} + \underline{v}_Q \wedge \underline{Q} = M_Q^{a} + \underbrace{\cancel{M_Q^{r}}}_{=0}$$

$\cancel{\underline{v}_Q \wedge \underline{Q}} = 0$ ERRATO! SE DICO $\underline{v}_Q = 0$ HO SCELTO UN PUNTO FISICO SUL DISCO

$\longrightarrow$ FURBIZIA: SCELGO IL POLO Q INTESO COME IL PUNTO VIRTUALE CHE ISTANTE PER ISTANTE SI SOVRAPPONE AL PUNTO DI CONTATTO:

~ $(Q - O) = x_G\,\underline{i} \Rightarrow \underline{v}_Q = \dot{x}_G\,\underline{i} = \underline{v}_G$

~ $\underline{v}_Q \wedge \underline{Q} = \underline{v}_G \wedge \underline{Q} = \underline{v}_G \wedge M\underline{v}_G = 0$

~ $\underline{\Gamma}_Q = \underline{\Gamma}_G + (G-Q) \wedge \underline{Q} = I_G\, \underline{\omega} + (G-Q) \wedge \underline{Q} =$

$$= -\frac{mR^2}{2}\dot{\theta}\,\underline{k} + R\,\underline{j} \wedge mR\dot{\theta}\,\underline{i} = -\frac{mR^2}{2}\dot{\theta}\,\underline{k} - mR^2\dot{\theta}\,\underline{k} = -\frac{3}{2}mR^2\dot{\theta}\,\underline{k}$$

FILO IDEALE

- INESTENSIBILE
  PERFETTAMENTE FLESSIBILE
  SENZA MASSA

- CONSIDERIAMO P, m:

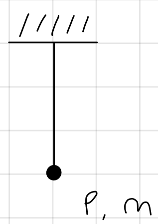
- LA REAZIONE VINCOLARE È UNA TENSIONE CHE SI MANIFESTA NELLA DIREZIONE DEL FILO

- OSS: DAL PUNTO DI VISTA CINEMATICO IMPEDISCE ALLUNGAMENTO E COMPRESSIONE

  DAL PUNTO DI VISTA DINAMICO IMPEDISCE SOLO ALLUNGAMENTO: $T > 0$

  $T > 0 \implies$ FILO TESO

- ESEMPIO 1:



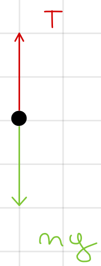
~ MOTO LUNGO y

~ FILO IDEALE TRA P E SUOLO

- $gdl = 2 - 1 - 1 = 0 \implies$ SISTEMA IN EQUILIBRIO

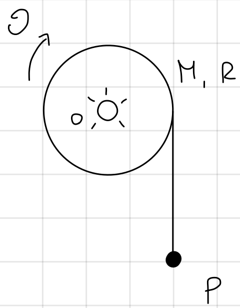
  └→ GRADI DI LIBERTÀ DI UN PUNTO

~ APPLICO LA STATICA:



$$\underline{R}^{a} + \underline{R}^{r} = 0 \longrightarrow T = mg$$

- ESEMPIO 2:



~ SUPPONGO CHE P ABBIA MOTO VERTICALE

~ $gdl = 1 \longrightarrow \theta$ COORDINATA LIBERA

i) T FILO

ii) MOTO SISTEMA

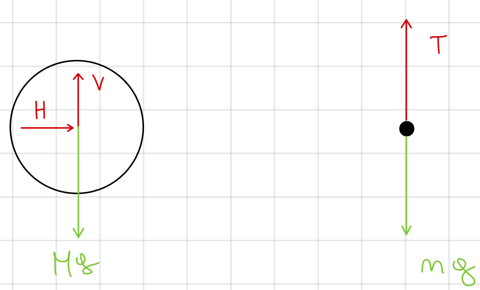
iii) VERIFICARE VINCOLO FILO IDEALE $(T > 0)$

STEP 1) ANALISI CINEMATICA

~ DISCO $\begin{cases} \underline{\omega} = \dot{\theta}\, \underline{k} \\ V_O = 0 \end{cases}$

~ PUNTO P: $\quad V_P = \omega \wedge (Q - O) = \dot{\theta}\, \underline{k} \wedge R\, \underline{i} = \dot{\theta} R\, \underline{j}$

STEP 2) DIAGRAMMA CORPO LIBERO + S.C.D.:



• I EQUAZIONE CARDINALE - PUNTO P - DIREZIONE y :

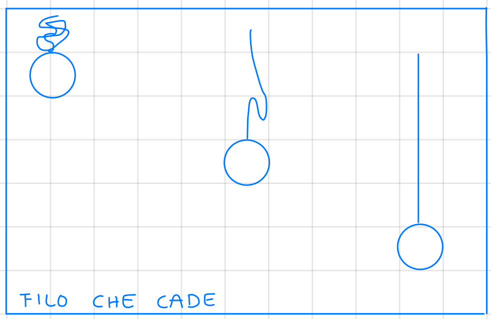
$$\sim \left(\frac{dQ}{dt}\right)_y = \underline{R}_y^{a,P} + \underline{R}_y^{r,P}$$

$$\sim \underline{Q}_P = m\,\underline{v}_P = mR\dot{\theta}\,\underline{j} \longrightarrow \frac{dQ^P}{dt} = mR\ddot{\theta}\,\underline{j} \longrightarrow \left(\frac{dQ}{dt}\right)_y = mR\ddot{\theta}$$

$$\sim R_y^{a,P} = mg \quad , \quad R_y^{r,P} = -T$$

$$\Rightarrow mR\ddot{\theta} = mg - T \longrightarrow T = mg - mR\ddot{\theta} \qquad a)$$

NOTA BENE: $T = mg$ SOLO ALL' EQUILIBRIO! NON QUANDO CI SONO ACCELERAZIONI



• II EQUAZIONE CARDINALE - DISCO - POLO O :

$$\sim \frac{d\Gamma_O^D}{dt} + \cancel{V_O \wedge \underline{Q}^D} = \underline{M}_O^{a,D} + \underline{M}_O^{r,D} \longrightarrow \frac{MR^2}{2}\ddot{\theta} = TR$$

$V_O = 0$

$$\sim O \equiv CIR \Rightarrow \Gamma_O = I_D\,\underline{\omega} = \frac{MR^2}{2}\dot{\theta}\,\underline{k}$$

$$\Rightarrow \frac{MR}{2}\ddot{\theta} = T \qquad b)$$

~ METTO A SISTEMA a), b) :

$$\frac{MR^2}{2}\ddot{\theta} = mg - mR\ddot{\theta} \longrightarrow \ddot{\theta} = \frac{mg}{\left(\frac{M}{2} + m\right)R} \qquad \text{EQ. DEL MOTO}$$

~ INTEGRO: $\vartheta(t) = \frac{1}{2} \frac{mg}{\left(\frac{M}{2}+m\right)R} t^2 + \dot{\vartheta}_0 t + \vartheta_0$ MOTO

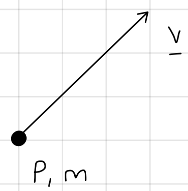
~ $T = mg - mR\ddot{\vartheta} = mg - \frac{m^2 g}{\left(\frac{M}{2}+m\right)R}$

IMPONIAMO CHE $T > 0$:

$mg - \frac{m^2 g}{\left(\frac{M}{2}+m\right)R} > 0 \Rightarrow \frac{m}{\frac{M}{2}+m} < 1$ SEMPRE VERIFICATO => FILO TESO

ENERGIA CINETICA

- 1 PUNTO MATERIALE:



$T = \frac{1}{2} m \|\underline{v}\|^2 = \frac{1}{2} m v^2$

~ OSS: T È UNA QUANTITÀ SCALARE ≥ 0

- SISTEMA DI PUNTI: $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2$

- TEOREMA DI KÖNIG: L'ENERGIA CINETICA IN UN SISTEMA DI PUNTI PUÒ ESSERE SCRITTA COME $T = \frac{1}{2} M V_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i'^2$

M: MASSA TOTALE	V_G: VELOCITÀ CENTRO DI MASSA
v_i': VELOCITÀ RELATIVA DI P_i RISPETTO A G $(v_i - V_G)$	

• DIM:

$$\begin{cases} T = \dfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 \\ \text{MA} \quad \underline{v}_i' = \underline{v}_i - \underline{v}_G \longrightarrow \underline{v}_i = \underline{v}_i' + \underline{v}_G \end{cases}$$

DA CUI: $T = \dfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \| \underline{v}_G + \underline{v}_i' \|^2 = \dfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (\underline{v}_G + \underline{v}_i') \circ (\underline{v}_G + \underline{v}_i') =$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\underline{v}_G^2 + \underline{v}_i'^2 + 2 \underline{v}_G \circ \underline{v}_i' \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i'^2 + \sum_{i=1}^{N} m_i (\underline{v}_G \circ \underline{v}_i') =$$

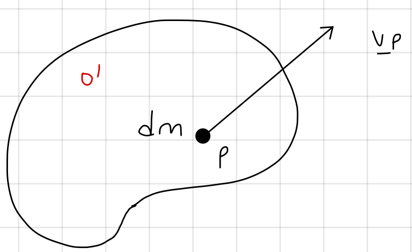
$$= \frac{1}{2} M \underline{v}_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i'^2 + \underline{v}_G \circ \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i'$$

$$\sum m_i \underline{v}_i' = \sum m_i (\underline{v}_i - \underline{v}_G) = \sum m_i \underline{v}_i - \sum m_i \underline{v}_G = \underline{Q} - \underbrace{M \underline{v}_G}_{\underline{Q}} = 0$$

$\longrightarrow$ QUINDI: $T = \underbrace{\dfrac{1}{2} M \underline{v}_G^2}_{} + \underbrace{\dfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i'^2}_{}$

EC DEL CENTRO DI MASSA — EC DEI PUNTI RISPETTO AL CENTRO DI MASSA

• ENERGIA CINETICA PER UN CORPO RIGIDO:



$m_i \longrightarrow dm$

$\sum \longrightarrow \int$

~ $T = \frac{1}{2} \int_V dm \, v_P^2 = \frac{1}{2} \int_V \rho(P) \, v_P^2 \, dV$

~ DATO $O' \in$ C.R. APPLICO L'ATTO DI MOTO RIGIDO:

$\underline{v}_P = \underline{v}_{O'} + \underline{\omega} \wedge (P - O')$

~ $T = \frac{1}{2} \int_V \rho(P) \, \| \underline{v}_{O'} + \underline{\omega} \wedge (P - O') \|^2 \, dV$

~ CASI PARTICOLARI:

1) ATTO DI MOTO TRASLATORIO. $\underline{\omega} = 0 \Rightarrow \underline{v}_P = \underline{v}_{O'} \quad \forall P$

$$\longrightarrow \quad T = \frac{1}{2} \int_V \rho(P) \, v_{O'}^2 \, dV = \frac{1}{2} v_{O'}^2 \int_V \rho(P) \, dV = \boxed{\frac{1}{2} M \, v_{O'}^2}$$

2) ATTO DI MOTO ROTATORIO INTORNO O' ($O' \equiv$ CIR): $v_{O'} = 0$

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho(P) \, \| \underline{\omega} \wedge (P - O') \|^2 \, dV = \frac{1}{2} \| \underline{\omega} \|^2 \int_V \rho(P) \, \| P - O' \|^2 \, dV$$

IN 2D:

$$\| \underline{\omega} \wedge (P - O') \| = \| \underline{\omega} \| \, \| P - O' \| \sin \frac{\pi}{2}$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{T = \frac{1}{2} I_{O'} \, \| \underline{\omega} \|^2}$$

~ CASO GENERALE:

$T = \frac{1}{2} \int_V \rho(P) \, \| \underline{v}_{O'} + \underline{\omega} \wedge (P - O') \| \, dV =$

$$\frac{1}{2}\int_V \rho(P)\left\{ v_{O'}^2 + \| \omega \wedge (P-O') \|^2 + 2 v_{O'} \circ [\omega \wedge (P-O')] \right\} dV =$$

$$= \frac{1}{2}\int_V \rho(P)\, \underline{v}_{O'}^2 \, dV + \frac{1}{2}\int_V \rho(P) \| \underline{\omega} \wedge (P-O') \|^2 \, dV + \int_V \rho(P)\, \underline{v}_{O'} \circ [\underline{\omega} \wedge (P-O')]$$

- $$\frac{1}{2} M \underline{v}_O^2 + \frac{1}{2} I_G \| \underline{\omega} \|^2 + M \underline{v}_{O'} \circ [\underline{\omega} \wedge (P-O')] = \frac{1}{2} M \underline{v}_G^2 + \frac{1}{2} I_G \| \underline{\omega} \|^2$$

$O' \equiv G$ $\longrightarrow$ $\boxed{T = \frac{1}{2} M \underline{v}_G^2 + \frac{1}{2} I_G \| \underline{\omega} \|^2}$

- OSS: PER SISTEMA DI PUNTI:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i^2 \, , \quad \underline{v}_i = \underline{v}_i' + \underline{v}_G \longrightarrow T = \underline{\frac{1}{2} M \underline{v}_G^2} + \underline{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v}_i'^2} \qquad (a)$$

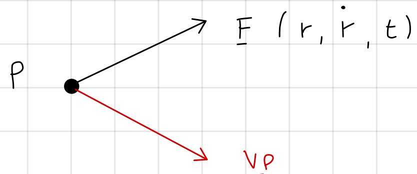
APPLICANDO IL TEO DI KÖNIG:

$$T = \frac{1}{2}\int_V \rho(P)\, \underline{v}_P^2 \, dV \, , \quad \underline{v}_P = \underline{v}_G + \underline{v}_{P'} \longrightarrow T = \underline{\frac{1}{2} M v_G^2} + \underline{\frac{1}{2}\int_V \rho(P)\, v_{P'}^2 \, dV}$$

$\sim \underline{v}_P' = \underline{\omega} \wedge (P-G)$ SE SI SOSTITUISCE IN (a) LE RELAZIONI COINCIDONO

- **TEOREMA DELL'ENERGIA CINETICA:**

- **PER UN PUNTO MATERIALE:**



$$\underline{r} = (P - O)$$

$$\underline{\dot r} = \underline{V}_P$$

~ VALE IL II TEO. DELLA DINAMICA: $m\underline{\ddot r} = \underline{F}$

~ MOLTIPLICHIAMO SCALARMENTE PER $\underline{\dot r}$: $m\underline{\dot r} \circ \underline{\ddot r} = \underline{F} \circ \underline{\dot r}$

~ CONSIDERIAMO: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}\underline{\dot r}^2\right) = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}\underline{\dot r} \circ \underline{\dot r}\right) = \underline{\dot r} \circ \underline{\ddot r}$

~ SOSTITUISCO:

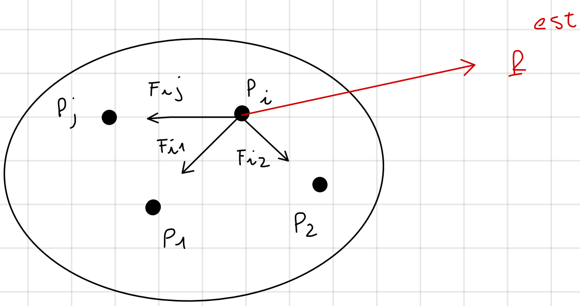
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \underline{\dot r}^2\right) = \underline{\dot r} \circ \underline{F}$$

~ MA $\underline{\dot r} = \underline{V}_P \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2} M V_P^2\right) = \underline{V}_P \circ \underline{F} \Rightarrow \dfrac{dT}{dt} = \underline{F} \circ \underline{V}_P$

IL TERMINE $\underline{F} \circ \underline{V}_P$ É DETTO $\Pi \longrightarrow$ POTENZA DI $\underline{F}$ APPLICATA IN $\underline{P}$

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = \Pi}$$

- **SISTEMA DI PUNTI:**



~ VALE II LEGGE DINAMICA:

$$m_i \underline{\ddot r}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} \underline{F}_{ij} + \underline{R}_i^{est}$$

~ MOLTIPLICO SCALARMENTE PER $\underline{\dot r}_i$:

$$\underbrace{m_i \underline{\dot r}_i \circ \underline{\ddot r}_i}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \dot r_i^2\right)} = \sum_{j=1}^{N} \underline{F}_{ij} + \underline{R}_i^{est} \circ \underline{\dot r}_i$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2\right) = \sum_{j=1}^{N} \dot{\underline{r}}_i \circ \underline{F}_{ij}' + \dot{\underline{r}}_i \circ \underline{R}_i^{est}$$

~ SOMMO SU TUTTI I PUNTI:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2\right) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \dot{\underline{r}}_i \circ \underline{F}_{ij} + \sum_{i=1}^{N} \dot{\underline{r}}_i \circ \underline{R}_i^{est}$$

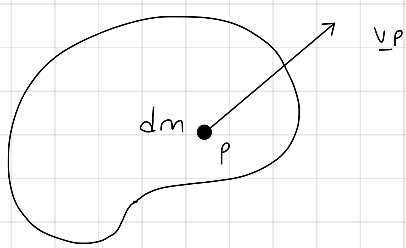
$$\sim \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2\right) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \dot{\underline{r}}_i \circ \underline{F}_{ij} + \sum_{i=1}^{N} \dot{\underline{r}}_i \circ \underline{R}_i^{est}$$

$$\sim \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2\right)}_{T} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \underline{v}_i \circ \underline{F}_{ij}}_{\Pi^{int}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \underline{v}_i \circ \underline{R}_i^{est}}_{\Pi^{est}}$$

$\longrightarrow$ PER UN SISTEMA DI PUNTI: $\frac{dT}{dt} = \Pi^{int} + \Pi^{est}$

- OSS1. $\Pi^{int} \neq 0$ IN GENERALE (SOLO IN ALCUNI CASI $\Pi^{int} = 0$)
- OSS2: IL TEO. DELL' ENERGIA CINETICA FORNISCE UNA EQ. SCALARE

- **1 CORPO RIGIDO:**



UN CORPO RIGIDO É UN SISTEMA DI PUNTI:

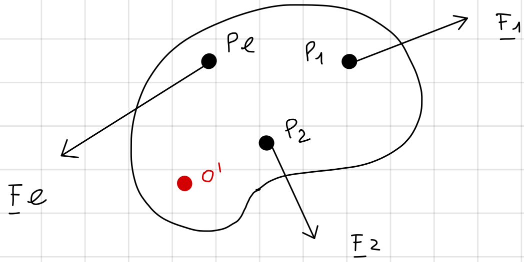
VALE: $\frac{dT}{dt} = \Pi^{int} + \Pi^{est}$

~ LA DIFFERENZA COL SISTEMA DI PUNTI É CHE IN UN C.R. $\Pi^{int} = 0$:

- **DIM:**

PARTE 1: ESPRESSIONE DELLA POTENZA DI UN GENERICO SISTEMA DI FORZE APPLICATO

A UN C.R. :



~ CORPO RIGIDO SOGGETTO A SISTEMA DI FORZE $\underline{F}_e$

$e = 1, \dots, M$

~ $\Pi = \sum_{e=1}^{M} \underline{v}_e \circ \underline{F}_e$

~ DATO QUALSIASI $O' \in$ C.R. : $\underline{v}_e = \underline{v}_{O'} + \underline{\omega} \wedge (P_e - O')$

~ SOSTITUIAMO : $\Pi = \sum_{e=1}^{M} \left[\underline{v}_{O'} + \underline{\omega} \wedge (P_e - O') \right] \circ \underline{F}_e =$

$$= \sum_{e=1}^{M} \underline{v}_{O'} \circ \underline{F}_e + \sum_{e=1}^{M} \underline{\omega} \wedge (P_e - O') \circ \underline{F}_e = \underline{v}_{O'} \sum_{e=1}^{M} \underline{F}_e + \sum_{e=1}^{M} \underline{\omega} \wedge (P_e - O') \circ \underline{F}_e$$

$$= \underline{v}_{O'} \circ \underline{R} + \underline{\sum_{e=1}^{M} \underline{\omega} \wedge (P_e - O') \circ \underline{F}_e}$$

$(a \wedge b) \circ c = (c \wedge a) \circ b = (b \wedge c) \circ a$

$$(\underline{F}_e \wedge \underline{\omega}) \circ (P_e - O') = \underline{\left[(P_e - O') \wedge \underline{F}_e \right] \circ \underline{\omega}}$$

SCEGLO QUESTO

~ $\Pi = \underline{v}_{O'} \circ \underline{R} + \underbrace{\sum_{e=1}^{M} \left[(P_e - O') \wedge \underline{F}_e \right]}_{\underline{M}_{O'}} \circ \underline{\omega} = \underline{v}_{O'} \circ \underline{R} + \underline{\omega} \circ \underline{M}_{O'}$

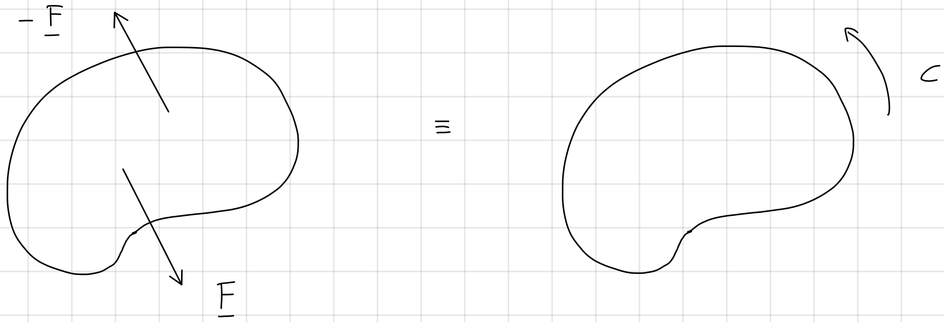
$$\boxed{\Pi = \underline{v}_{O'} \circ \underline{R} + \underline{\omega} \circ \underline{M}_{O'}}$$

PARTE 2 : APPLICO A F^{int} : $\Pi = \underline{v}_{O'} \circ \underbrace{\cancel{\underline{R}^{int}}}_{=0} + \underline{\omega} \circ \cancel{\underline{M}^{int}_{O'}} = 0$

= 0 PER UN C.R.

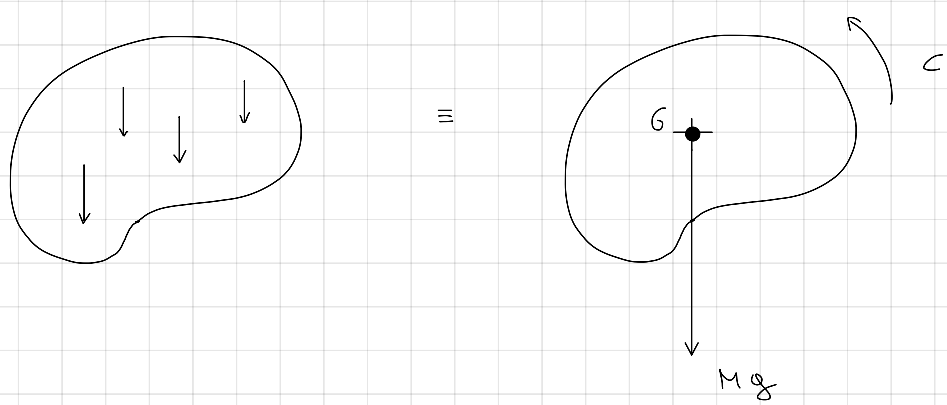
$\longrightarrow$ PER UN C.R. $\dfrac{dT}{dt} = \Pi^{est}$

• **OSS 1: POTENZA DI UNA COPPIA:**



$\Pi = V_{O'} \circ \underline{R} + \underline{\omega} \circ \underline{M}_{O'}$ MA $\underline{R} = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\Pi_{coppia} = \underline{C} \circ \underline{\omega}}$

• **OSS 2: POTENZA FORZA PESO:**



~ $\Pi = V_{O'} \circ \underline{R} + \underline{\omega} \circ \underline{M}_{O'}$

~ SCELGO $O' \equiv G$ $\Rightarrow$ $\Pi_{peso} = V_G \circ \underline{R} + \underline{\omega} \circ \cancel{M_G} = \underline{V}_G \circ Mg$

$$\boxed{\Pi_{peso} = \underline{V}_G \circ Mg}$$

• **OSS IMPORTANTE:** L'EQUAZIONE DELL'ENERGIA CINETICA NON È INDIPENDENTE DALLE EQUAZIONI CARDINALI

• **DIM:** BASTA DIMOSTRARE CHE L'EQ. È RICAVABILE DALLE EQ. CARDINALI

$$\sim \begin{cases} \dfrac{d\,\underline{Q}}{dt} = \underline{R}^{est,a} + \underline{R}^{est,r} = \underline{R}^{est} \\[2ex] \dfrac{d\,\underline{\Gamma}_o}{dt} + \underline{v}_o \wedge \underline{Q} = \underline{M}_o^{est,a} + \underline{M}_o^{est,r} = \underline{M}_o^{est} \end{cases}$$

$$\sim \quad \underline{Q} = M\,\underline{v}_G \quad , \quad \Gamma_G = I_G\,\underline{\omega}$$

$$\sim \begin{cases} M \dfrac{d\,\underline{v}_G}{dt} = \underline{R}^{est} & a) \\[2ex] I_G \dfrac{d\,\underline{\omega}}{dt} = \underline{M}_G^{est} & b) \end{cases}$$

$\sim$ CALCOLO $\quad a) \circ \underline{v}_G$: $\qquad M\,\underline{v}_G \circ \dfrac{d\,\underline{v}_G}{dt} = \underline{v}_G \circ \underline{R}^{est}$

$\sim$ NOTO CHE : $\qquad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2} v_G^2\right) = \underline{v}_G \circ \dfrac{d\,\underline{v}_G}{dt}$

$$\sim \quad M\,\underline{v}_G \circ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} v_G^2\right) = \underline{v}_G \circ \underline{R}^{est}$$

$\sim$ CALCOLO $\quad b) \circ \underline{\omega}$: $\qquad I_G \cdot \underbrace{\underline{\omega} \circ \dfrac{d\,\underline{\omega}}{dt}}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\omega^2\right)} = \underline{M}_G^{est}$

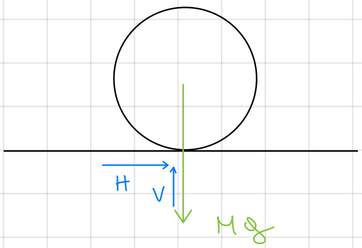
$$\sim \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} I_G\,\underline{\omega}^2\right) = \underline{\omega} \circ \underline{M}_G^{est}$$

$\sim$ SOMMO $\quad (a) \circ \underline{v}_G) + (b) \circ \underline{\omega})$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} M\,v_G^2 + \frac{1}{2} I_G\,\underline{\omega}\right) = \underline{v}_G \circ \underline{R}^{est} + \underline{\omega} \circ \underline{M}_G^{est}$$

- IN GENERALE ABBIAMO A CHE FARE CON C.R. VINCOLATI:

  ↳ ESEMPIO:



$\sim$ Q PURO ROTOLAMENTO

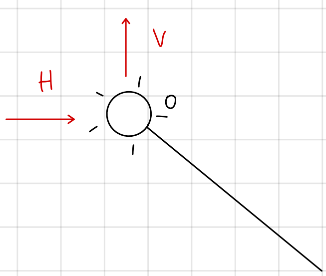
- $$\frac{dT}{dt} = \Pi^{est} = \Pi^{est,a} + \underline{\Pi^{est,r}}$$

  ↳ QUANTO VALE ?

1) APPOGGIO, CARRELLO:

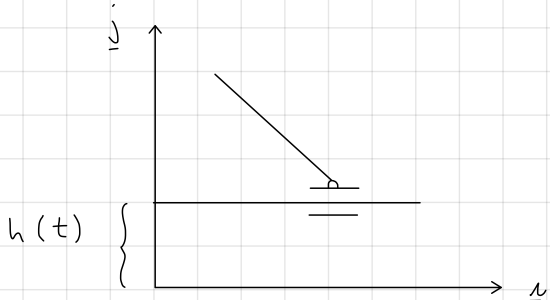
$$\Pi^{r} = \phi \circ \underline{V}_B \quad , \quad \text{MA} \quad \phi \perp \underline{V}_B \longrightarrow \Pi^{r} = 0$$

2) CERNIERA:



$$\Pi^{r} = H \circ V_0 + V \circ V_0 \quad , \quad \text{MA} \quad V_0 = 0 \longrightarrow \Pi^{r} = 0$$

3) PIATTAFORMA CHE SI MUOVE CON LEGGE $h(t)$ NOTA E $h(t) \neq \text{cost}$



$$\begin{cases} \Pi^{r} = \phi \circ \underline{V}_B = \phi\, \underline{j} \circ \underline{V}_B \\ (B-O) = x_B\, \underline{i} + h(t)\, \underline{j} \\ V_B = \dot{x}_B\, \underline{i} + \dot{h}(t)\, \underline{j} \end{cases}$$

$\longrightarrow \quad \Pi^{r} = \phi\, \underline{j} \circ \left(\dot{x}_B\, \underline{i} + \dot{h}(t)\, \underline{j} \right) = \phi\, \dot{h}(t) \neq 0$

$\longrightarrow$ IN GENERALE: $\Pi^{est,r} = 0$ SSE I VINCOLI SONO IDEALI E FISSI

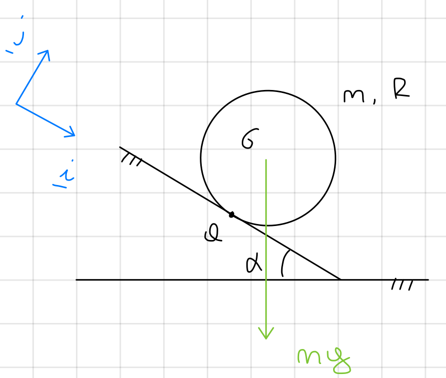
$\Pi^{est,r} \neq 0$ SSE I VINCOLI NON SONO IDEALI O SONO MOBILI

- OSS: SE VINCOLI IDEALI E FISSI IL TEO. DELL' ENERGIA CINETICA DIVENTA:

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = \Pi^{est,a}}$$

EQ PURA DEL MOTO (NO R. VINCOLARI)

- ESEMPIO:



~ PURO ROTOLAMENTO IN Q

~ SISTEMA SU PIANO VERTICALE

~ AGISCE FORZA PESO

i) EQUAZIONE DEL MOTO

1) ANALISI CINEMATICA:

$\underline{\omega} = -\dot{\theta}\, \underline{k} \quad , \quad \underline{v}_G = R\dot{\theta}\, \underline{i}$

2) VINCOLI ESTERNI IDEALI FISSI: $\dfrac{dT}{dt} = \Pi^{est,a}$

~ SICCOME $Q \equiv CIR \longrightarrow T = \dfrac{1}{2} I_Q\, \underline{\omega}^2$

- OSS: VALE COMUNQUE: $T = \dfrac{1}{2} m\, \underline{v}_G^2 + \dfrac{1}{2} I_G\, \underline{\omega}^2$

$\sim \quad I_Q = \frac{3}{2} m R^2 \longrightarrow T = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 = \frac{3}{4} m R^2 \dot{\theta}^2$

$$\sim \begin{cases} \Pi^{est,a} = \Pi^{FP} = \underline{F}_P \circ \underline{v}_G \\ \underline{F}_P = mg \sin\alpha \, \underline{i} - mg \cos\alpha \, \underline{j} \end{cases} \longrightarrow \Pi^{est,a} = (mg \sin\alpha \, \underline{i} - mg\cos\alpha \, \underline{j}) \circ R\dot{\theta}\underline{i} = mgR\dot{\theta}\sin\alpha$$

- APPLICO TEO. ENERGIA CINETICA:

$$\frac{3}{2} m R^2 \cancel{\dot{\theta}} \ddot{\theta} = m g R \cancel{\dot{\theta}} \sin\alpha$$

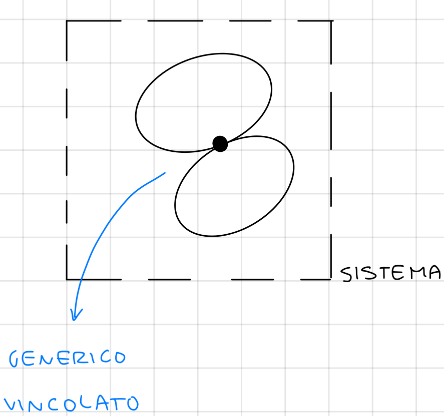
$$\hookrightarrow \ddot{\theta} = \frac{2}{3} \frac{g}{R} \sin\alpha$$

- OSS: SE $\#$ gdl > 1 ALLORA IL TEO. DELL'ENERGIA CINETICA NON BASTA PER TROVARE IL MOTO DEL SISTEMA

SISTEMA DI CORPI RIGIDI:

- PER UN C.R. $\Pi^{int} = 0$ DOVE Π^{int} SONO LE FORZE CHE SI SCAMBIANO I SINGOLI PUNTI DELLO STESSO CORPO RIGIDO

$\hookrightarrow$ SE HO UN SISTEMA DI C.R.:



$$\frac{dT}{dt} = \Pi^{est} + \Pi^{int}$$

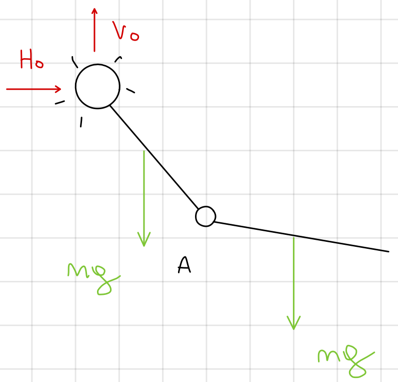
$$\frac{dT}{dt} = \left(\Pi^{est,a} + \cancel{\Pi^{est,r}}\right) + \left(\Pi^{int,a} + \Pi^{int,r}\right)$$

?

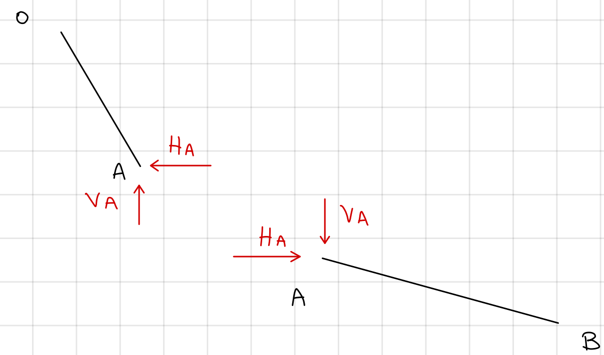
SE I VINCOLI SONO IDEALI E FISSI

- COSA ACCADE A $\pi^{int,r}$?

CERNIERA



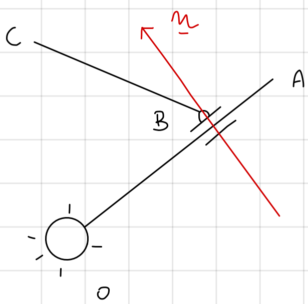
SCOMPONGO $\longrightarrow$



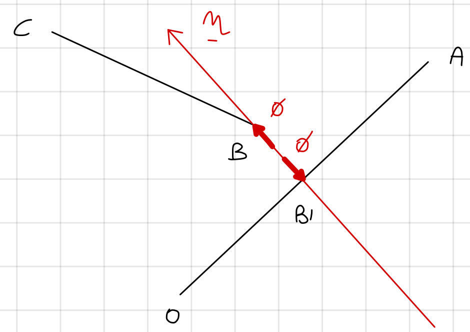
$$\sim \pi^{int,r} = H_A \circ \underline{v}_A + V_A \circ \underline{v}_A + H_A \circ \underline{v}_A - V_A \circ \underline{v}_A = 0$$

$\underline{v} \longrightarrow$ VELOCITÀ

CARRELLO :



SCOMPONGO $\longrightarrow$



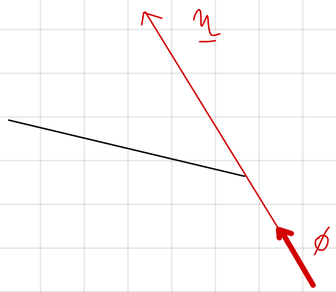
$$\pi^{int,r} = \phi \circ \underline{v}_C - \phi \circ \underline{v}_C'$$

$\longrightarrow$ OSS1 : SE APPLICO $\frac{dT}{dt} = \pi$ SU UN SISTEMA DI CORPI RIGIDI ALLORA :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ SE VINCOLI IDEALI (INTERNI , ESTERNI)} \\ \bullet \text{ SE VINCOLI ESTERNI FISSI} \end{array} \right. \longrightarrow \pi^{est,r} = \pi^{int,r} = 0$$

$$\boxed{\frac{dT}{dt} = \pi^{est,a} + \pi^{int,a}}$$

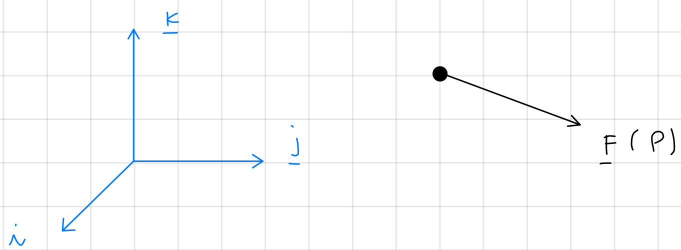
• OSS 2: SE APPLICO $\dfrac{dT}{dt} = \Pi$ SU UNO SOLO DEI CORPI RIGIDI DI UN SISTEMA



$$\Pi^{est,r} \neq 0$$

RICHIAMI SU: LAVORO, FORZE CONSERVATIVE, POTENZIALE

• SUPPONIAMO DI AVERE $\underline{F}(P)$ POSIZIONALE:

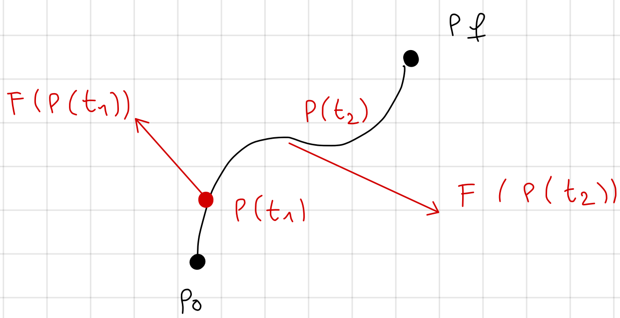


• LAVORO ELEMENTARE: $dL = \underline{F}(P) \circ d\underline{P}$

→ IN COORDINATE CARTESIANE:

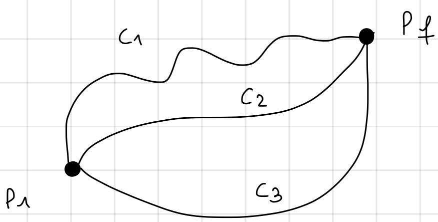
$$dL = F_x(x,y,z) \circ dx + F_y(x,y,z) \circ dy + F_z(x,y,z) \circ dz$$

• DATE 2 POSIZIONI GENERICHE P_0, P_f E UN CAMMINO TRA ESSE:



• LAVORO: $\displaystyle\int_c dL = \int_c \underline{F}(P) \circ dP = \int_c F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz$

• IN ALCUNI CASI L DIPENDE SOLO DA P_0, P_f :



$$L_1 = L_2 = L_3 = L(P_0, P_f) = \int_{C_i} F(P) \circ dP \quad \forall C_i$$

⟶ CIÓ ACCADE QUANDO:

1) $\underline{F}(P)$ SI DICE CONSERVATIVA

2) DATO UN PUNTO DI RIFERIMENTO P_0, PER $\forall P$ POSSIAMO COSTRUIRE LA FUNZIONE: $P \longrightarrow L(P_0, P_f)$

3) LA FUNZIONE $L(P_0, P_f)$ É DETTA POTENZIALE DI $F(P)$:

$$U(P) = L(P_0, P_f)$$

• OSS 1: IN $U(P)$ OMETTO P_0

• OSS 2: $U(P) = \int_c \underline{F} \circ d\underline{P}$ CON c $\forall$ CAMMINO DA P_0 A P

$$\downarrow$$

$$dU = \underline{F} \circ d\underline{P}$$

$$\longrightarrow \quad dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz = \nabla(U) \circ d\underline{P}$$

QUINDI PER FORZE CONSERVATIVE $\underline{F} \circ d\underline{P} = \nabla U \circ d\underline{P}$

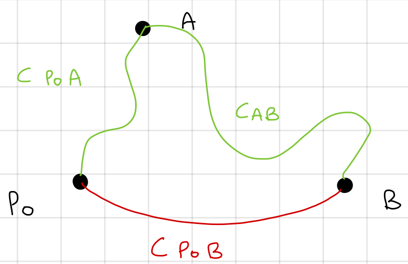
$$\longrightarrow \boxed{\underline{F} = \nabla \underline{U}}$$

CIOÈ :

- SE CONOSCIAMO $\underline{U}(\underline{P})$ CALCOLEREMO $\underline{F}$ COME : $\underline{F} = \nabla U$
- SE CONOSCIAMO $\underline{F}(P)$ E SAPPIAMO CHE È CONSERVATIVA CALCOLO U COME :

$$U = \int_C \underline{F}(\underline{P}) \cdot d\underline{P}$$

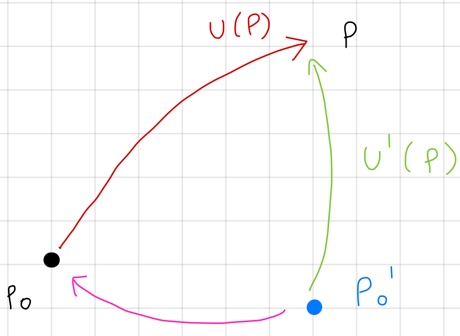
- OSS 3 :



$$U(B) = \int_{C_{P_0B}} \underline{F}(P) \cdot dP = \underbrace{\int_{C_{P_0A}} \underline{F}(P) \cdot dP}_{U(A)} + \underbrace{\int_{C_{AB}} \underline{F}(P) \cdot dP}_{\mathcal{L}_{A \to B}}$$

$$\longrightarrow \quad U(B) = U(A) + \mathcal{L}_{A \to B} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\mathcal{L}_{A \to B} = U(B) - U(A)}$$

- OSS 4 :



$$\sim \quad U(P) = \int_{P_0}^{P} \underline{F}(P) \cdot d\underline{P}$$

$$\sim \quad U(P) = \int_{P_0'}^{P} \underline{F}(P) \cdot d\underline{P}$$

$\sim$ COMPONGO I CAMMINI : $U'(P) = \displaystyle\int_{P_0}^{P} \underline{F}(P) \cdot d\underline{P} = \underbrace{\int_{P_0'}^{P} \underline{F}(P) \cdot d\underline{P}}_{cost} + \underbrace{\int_{P_0}^{P} \underline{F} \cdot d\underline{P}}_{U(P)}$

$$U'(P) = U(P) + cost$$

~ NOTO CHE: $\nabla U'(P) = \nabla(U) + \cancel{\nabla(cost)} = \nabla U$

$\longrightarrow$ $U'(P)$, $U(P)$ SONO EQUIVALENTI AI FINI DEL MOTO

• OSS 5: SE $\underline{F}$ È DEFINITA SU DOMINIO SEMPLICEMENTE CONNESSO E $rot\,\underline{F} = 0$

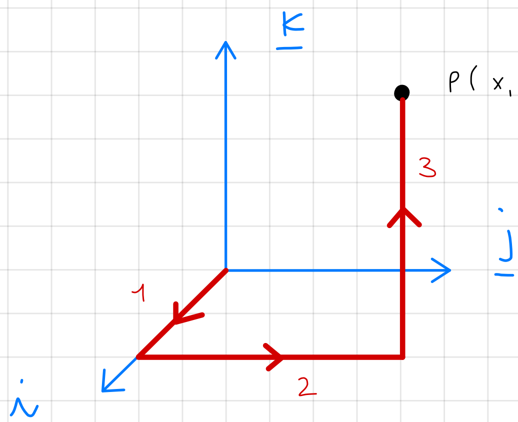
$\Rightarrow$ $\underline{F}$ CONSERVATIVA

• ESEMPIO: FORZA COSTANTE

~ $\underline{F}(P) = \underline{F}_0 = cost$

~ $rot\,\underline{F} = 0 \longrightarrow$ FORZA CONSERVATIVA

~ CALCOLO U:



~ $\underline{F}(P) = \underline{F}_0 = F_{0x}\,\underline{i} + F_{0y}\,\underline{j} + F_{0z}\,\underline{k}$

$d\underline{P} = dx\,\underline{i} + dy\,\underline{j} + dz\,\underline{k}$

~ $d\underline{P} \begin{cases} \text{TRATTO 1: } dx\,\underline{i} \\ \text{TRATTO 2: } dy\,\underline{j} \\ \text{TRATTO 3: } dz\,\underline{k} \end{cases}$

~ $$U(P) = \int_{C_1} \underline{F}(P) \circ d\underline{P} + \int_{C_2} \underline{F}(P) \circ d\underline{P} + \int_{C_3} \underline{F}(P) \circ d\underline{P} =$$

$$= \int_0^x (F_{0x}\,\underline{i} + F_{0y}\,\underline{j} + F_{0z}\,\underline{k}) \circ dx\,\underline{i} + \int_0^y (F_{0x}\,\underline{i} + F_{0y}\,\underline{j} + F_{0z}\,\underline{k}) \circ dy\,\underline{j} +$$

$$+ \int_0^z (F_{0x}\,\underline{i} + F_{0y}\,\underline{j} + F_{0z}\,\underline{k}) \circ dz\,\underline{k} =$$

$$= \int_0^x F_{0x}\,dx + \int_0^y F_{0y}\,dy + \int_0^z F_{0z}\,dz =$$

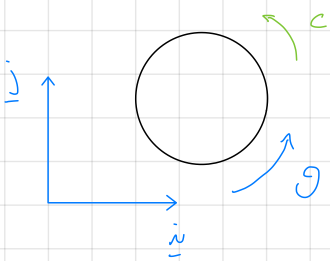
$$= F_{0x}\, x + F_{0y}\, y + F_{0z}\, z = \underline{F}_0 \circ (P-O)$$

$$\longrightarrow \boxed{U(P) = \underline{F}_0 \circ (P-O)}$$

- CASO PARTICOLARE: FORZA PESO:

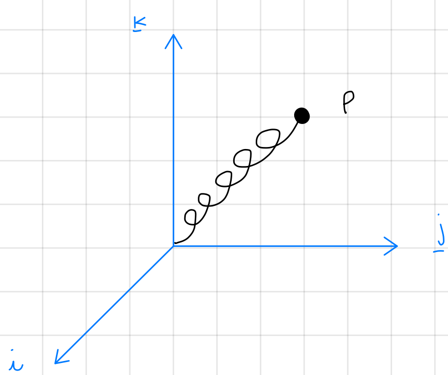
$$F_0 = -mg\,\underline{k} \longrightarrow U(P) = -mg\,\underline{k} \circ (x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z\,\underline{k}) = -mgz$$

- OSS: COPPIA COSTANTE



$$U_c = \underline{C} \circ \underline{\theta} = C \circ \theta\, \underline{k}$$

- <u>ESEMPIO: FORZA ELASTICA:</u>



$$\sim \underline{F}(P) = -k\,(P-O)$$

$$\underline{F}(P) = -kx\,\underline{i} - ky\,\underline{j} - kz\,\underline{k}$$

$$\sim U(P) = -\int_0^x kx\,dx - \int_0^y ky\,dy - \int_0^z kz\,dz =$$

$$= -\frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}ky^2 - \frac{1}{2}kz^2 = -\frac{1}{2}k(x^2+y^2+z^2) =$$

$$\boxed{U_{el}(P) = -\frac{1}{2}k\,\|P-O\|^2}$$

- TEOREMA ENERGIA CINETICA PER FORZE CONSERVATIVE:

~ $$\frac{dT}{dt} = \pi = \underline{F} \circ \underline{v}$$

~ $\underline{F}$ CONSERVATIVA: $\underline{F} = \nabla U \longrightarrow \frac{dT}{dt} = \nabla U \circ \underline{v}$

~ $$\nabla U \circ \underline{v} = \left(\frac{\partial U}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \underline{k} \right) \circ \left(\dot{x} \underline{i} + \dot{y} \underline{j} + \dot{z} \underline{k} \right) =$$

$$= \frac{\partial U}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z} \dot{z} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$= \frac{dU}{dt}$$

$$\longrightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{dT}{dt} \qquad \frac{d(T-U)}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad T - U = cost$$

- DEF 1: UNA QUALSIASI FUNZIONE $I(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ CHE É COSTANTE NEL TEMPO É DETTA INTEGRALE PRIMO DEL MOTO

- DEF 2: LA QUANTITÀ $V = -U$ É ENERGIA POTENZIALE

  LA QUANTITÀ $E = T - U = T + V$ É ENERGIA MECCANICA

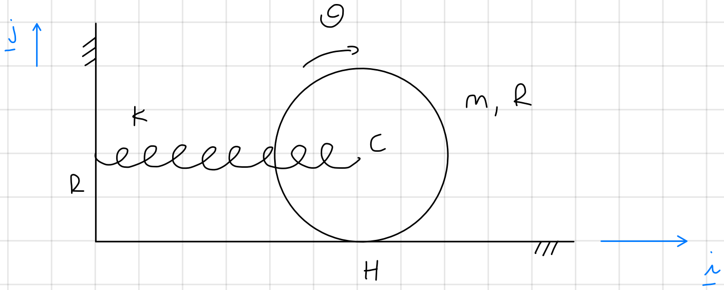
- SE ALCUNE FORZE NON SONO CONSERVATIVE E/O I VINCOLI NON SONO IDEALI:

$$\frac{d(T-U)}{dt} = \pi^{est,a} + \pi^{est,r}$$

U: FORZE ATTIVE CONSERVATIVE

$\pi^{est,a}$: FORZE ATTIVE NON CONSERVATIVE

• ESEMPIO:



~ PURO ROTOLAMENTO IN H

~ # g dl = 1 ⟶ x_c C.L.

STEP 1) ANALISI CINEMATICA

~ $\underline{v_c} = \dot{x}_c \, \underline{i}$

$\underline{\omega} = -\dot{\theta} \, \underline{k}$

~ MA $v_c = \omega \wedge (C-H) = -\dot{\theta} \, \underline{k} \wedge R \, \underline{j} = R\dot{\theta} \, \underline{i}$

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_c = R\dot{\theta} \qquad \dot{\theta} = \frac{\dot{x}_c}{R} \, \underline{k}$$

STEP 2) TEO. ENERGIA CINETICA

~ VINCOLI IDEALI E FISSI: $\dfrac{dT}{dt} = \Pi^{est,a}$

~ $T = \dfrac{1}{2} I_H \omega^2 = \dfrac{1}{2} \dfrac{3}{2} m \cancel{R^2} \dfrac{\dot{x}_c^{\,2}}{\cancel{R^2}} = \dfrac{3}{4} m \dot{x}_c^{\,2}$

$$\sim \begin{cases} \Pi^{est,a} = \Pi^{M} + \Pi^{P} \\ \Pi^{P} = -mg \, \underline{j} \circ \underline{v_c} = -mg \, \underline{j} \circ \dot{x}_c \, \underline{i} = 0 \\ \Pi^{M} = -k x_c \, \underline{i} \circ \underline{v_c} = -k x_c \, \underline{i} \circ \dot{x}_c \, \underline{i} = -k x_c \dot{x}_c \end{cases}$$

~ TH. EN. CINETICA: $\dfrac{3}{2} m \dot{x}_c \ddot{x}_c = -k x_c \dot{x}_c \longrightarrow \dfrac{3}{2} m \ddot{x}_c + k x_c = 0$

STEP 3 - PROVO CON CONSERVAZIONE $E = T - U = cost$)

$\hookrightarrow$ VINCOLI IDEALI / FORZE CONSERVATIVE

~ $U = U_M + U_P = -\frac{1}{2} k x_c^2 - mgR$

~ $E = T - U = \frac{3}{4} m \dot{x}_c^2 + \frac{1}{2} k x_c^2 + mgR = cost$

~ DERIVIAMO :

$$\frac{3}{2} m \dot{x}_c \ddot{x}_c + k x_c \dot{x}_c = 0 \longrightarrow \frac{3}{2} \ddot{x}_c + k x_c = 0$$

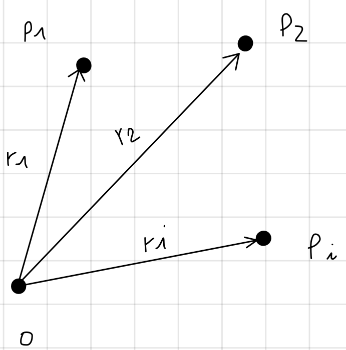
IDENTICO !

MECCANICA ANALITICA

- SCOPO: FORNIRE UN PROCEDIMENTO PER OTTENERE # EQUAZIONI DEL MOTO PARI A # gdl SISTEMA
- PASSI:

1) VINCOLI OLONOMI
2) CENNI AI VINCOLI ANAOLONOMI
3) SPOSTAMENTO VIRTUALE $\longrightarrow$ VINCOLI IDEALI
4) EQUAZIONI DI LAGRANGE IN I FORMA
5) EQUAZIONI DI LAGRANGE IN II FORMA

1 VINCOLI OLONOMI

- 

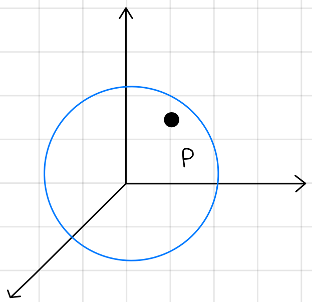
~ LA POSIZIONE DEI PUNTI È UNIVOCAMENTE DETERMINATA DA r_i , $i = 1, \dots, N$

~ SISTEMA DI PUNTI SOGGETTO A VINCOLI OLONOMI SE I VINCOLI SONO ESPRIMIBILI COME:

$$g_\ell (r_1, \dots, r_N, t) = 0 \qquad \text{CON} \quad \ell = 1, \dots, M \quad , \quad M \leq 3N$$

VINCOLI FISSI: $\dfrac{\partial g_{\bar{\ell}}}{\partial t} = 0$ VINCOLI MOBILI: $\dfrac{\partial g_{\bar{\ell}}}{\partial t} \neq 0$

~ ESEMPIO:



~ P ∈ SUP. STERA

~ $\underline{r} = P - O = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$

~ VINCOLO: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

$\longrightarrow \quad g(\underline{r}) = g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$

- OSS1: SE $R(t)$ HA LEGGE NOTA: $g(r, t) = g(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2(t) = 0$

- OSS2: CONSIDERIAMO $g(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2(t) = 0$

~ CALCOLIAMO: $\nabla g = \dfrac{\partial g}{\partial r} = \dfrac{\partial g}{\partial x}\underline{i} + \dfrac{\partial g}{\partial y}\underline{j} + \dfrac{\partial g}{\partial z}\underline{k} =$

$= 2x\,\underline{i} + 2y\,\underline{j} + 2z\,\underline{k} = 2(x\,\underline{i} + y\,\underline{j} + z\,\underline{k}) = 2\underline{r}$

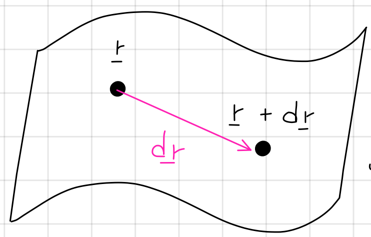
$\Rightarrow$ QUINDI $\nabla g \parallel 2\underline{r}$

~ NOTO CHE $\forall t$, IL VETTORE $\underline{r} \perp$ SFERA $\longrightarrow$ $\nabla g \perp$ SUPERFICIE DEFINITA DA $g(r, t) = 0$

- PROP: IN GENERALE: $\nabla g(r, t) \perp g(r, t) = 0$

DIM

~ DATO IL VINCOLO $g(r, t) \Rightarrow$ SUPERFICIE



~ $r \in$ SUP, $(r + dr) \in$ SUP $\Big\}$ $d\underline{r}$ TG. ALLA SUPERFICIE

~ MA: $\begin{cases} \text{SE } \underline{r} \in \text{SUP} \Rightarrow g(\underline{r}, t) = 0 & a \\ \text{SE } r + dr \in \text{SUP} \Rightarrow g(\underline{r} + d\underline{r}, t) = 0 & b \end{cases}$

~ $b - a$: $g(\underline{r} + d\underline{r}, t) - g(\underline{r}, t) = 0$

ESPANSIONE DI TAYLOR AL 1° ORDINE INTORNO A $d\underline{r} = 0$:

$g(\underline{r} + d\underline{r}, t) \simeq g(\underline{r}, t) + \nabla g(\underline{r}, t) \cdot d\underline{r}$

~ SOSTITUIAMO:

$\cancel{g(r, t)} + \nabla g(r, t) \cdot dr - \cancel{g(r, t)} = 0$

$\Rightarrow \nabla g(\underline{r}, t) \cdot d\underline{r} = 0 \Rightarrow \nabla g \perp d\underline{r} \Rightarrow \nabla g \perp$ SUPERFICIE $g(\underline{r}, t) = 0$

~ QUESTA DIM È GENERALIZZABILE PER SISTEMI DI PUNTI:

$$\nabla_{\underline{r}_i} g \cdot d\underline{r}_i = 0 \longrightarrow \nabla_{\underline{r}_i} g \perp \text{ SUPERFICIE } g(r_1, \dots, r_N, t) = 0$$

• COORDINATE LIBERE.

UN SISTEMA DI M VINCOLI OLONOMI SI TRADUCE IN UN SISTEMA DI EQUAZIONI:

$$\left.\begin{array}{l} g_1(r_1, \dots, r_N, t) = 0 \\ \vdots \\ g_M(r_1, \dots, r_N, t) = 0 \end{array}\right\} \text{ M EQUAZIONI IN 3N INCOGNITE + TEMPO}$$

$\longrightarrow$ POSSO USARE IL SISTEMA PER TROVARE M INCOGNITE IN $3N - M$

COORDINATE LIBERE $\Rightarrow n = 3N - M = gdl$

2 VINCOLI ANAOLONOMI

• DATO UN VINCOLO OLONOMO $g_l(r_1, \dots, r_N, t) = 0$, POSSO DERIVARLO:

$$\frac{dg_l}{dt} = 0$$

$$\sim \frac{dg_l}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial g_l}{\partial \underline{r}_i} \cdot \frac{d\underline{r}_i}{dt} + \frac{\partial g_l}{\partial t} = 0$$

$$\boxed{\frac{dg_l}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial g_l}{\partial r_i} \underline{v}_i + \frac{\partial g_l}{\partial t}}$$ VINCOLA LE MIE VELOCITÀ

QUINDI: DATO UN VINCOLO OLONOMO $\longrightarrow$ <u>VINCOLO SULLE VELOCITÀ</u>

$\downarrow$

<u>VINCOLI DI MOBILITÀ</u>

(NON VINCOLI MOBILI)

- ATTENZIONE: DATO UN VINCOLO DI MOBILITÀ NON È SEMPRE POSSIBILE DERIVARE UN VINCOLO OLONOMO, INFATTI:

~ DATO UN GENERICO VINCOLO DI MOBILITÀ: $\sum_{i=1}^{N} \underline{a}_i(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, t) \cdot \underline{v}_i + b(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, t) = 0$

~ CONFRONTO CON VINCOLO OLONOMO: $\dfrac{dg_l}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \dfrac{\partial g_l}{\partial \underline{r}_i} \underline{v}_i + \dfrac{\partial g_l}{\partial t}$

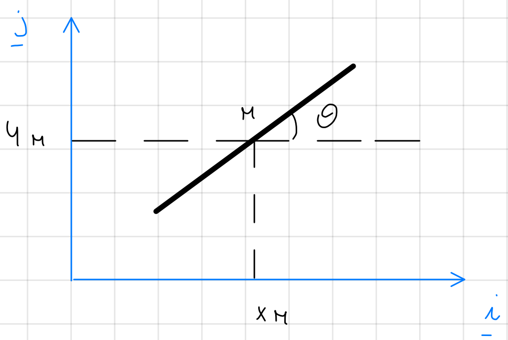
~ RIESCO DA UN VINCOLO DI MOBILITÀ A RISALIRE A UN VINCOLO OLONOMO SE

$\exists\, g_l(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, t)$ T.C. $\underline{a}_i = \dfrac{\partial g_l}{\partial \underline{r}_i}$, $\quad b = \dfrac{\partial g_l}{\partial t}$

- SE $\nexists\, g_l$ T.C. $\underline{a}_i = \dfrac{\partial g_l}{\partial \underline{r}_i}$, $\quad b = \dfrac{\partial g_l}{\partial t}$ IL VINCOLO DI MOBILITÀ SI DICE VINCOLO ANAOLONOMO

- OSS: SE NON RIESCO A TROVARE $g_l(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, t)$ ALLORA NON POTRÒ IMPORRE CONDIZIONI DEL TIPO $g_l(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_N, t) = 0$, IL CHE SIGNIFICA CHE I VINCOLI ANAOLONOMI NON TOLGONO GRADI DI LIBERTÀ.

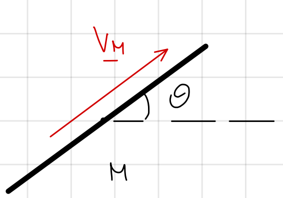
- ESEMPIO DI VINCOLO ANAOLONOMO: SCI



~ MODELLO SCI COME UN ASTA

$\hookrightarrow$ 3 gdl

~ VINCOLO SCI: $\underline{v}_M = \dot{x}_M \underline{i} + \dot{y}_M \underline{j}$ $\qquad \dfrac{\dot{y}_M}{\dot{x}_M} = \tan\theta$



$$tg\,\vartheta \cdot \dot{x}_M - \dot{y}_M = 0 \iff a_1(x_M, y_M, \vartheta)\,\dot{x}_M + a_2(x_M, y_M, \vartheta)\,\dot{y}_M + a_3(x_M, y_M, \vartheta)\,\dot{\vartheta} + b(x_M, y_M, \vartheta)$$

$$\begin{cases} a_1(x_M, y_M, \vartheta) = tg\,\vartheta \\ a_2(x_M, y_M, \vartheta) = -1 \\ a_3(x_M, y_M, \vartheta) = 0 \\ b(x_M, y_M, \vartheta) = 0 \end{cases} \longrightarrow \nexists\, g \text{ T.C. } \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x_M} = tg\,\vartheta \\ \dfrac{\partial g}{\partial y_M} = -1 \\ \dfrac{\partial g}{\partial \vartheta_M} = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

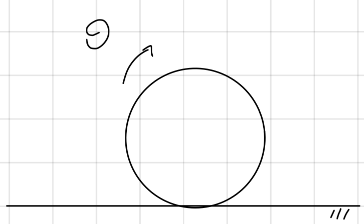
3 SPOSTAMENTI VIRTUALI

- SISTEMA SOGGETTO A VINCOLI OLONOMI => TROVO LE COORDINATE LIBERE q_k $k = 1, \dots, N$

~ $\forall P_i \Rightarrow r_i = r_i(q_1, \dots, q_n, t)$ $\quad i = 1, \dots, N$

~ UNA VARIAZIONE DI QUALSIASI q_k PROVOCHERÀ UNO SPOSTAMENTO DI TUTTI I PUNTI r_i

ESEMPIO:



CAMBIANDO ϑ SPOSTO TUTTI I PUNTI DEL C.R.

~ LO SPOSTAMENTO INFINITESIMO È: $$d\underline{r} = \underbrace{\frac{\partial r_i}{\partial t}\,dt}_{d\underline{r_i}^*} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_k}\,dq_k}_{\delta \underline{r_i}}$$

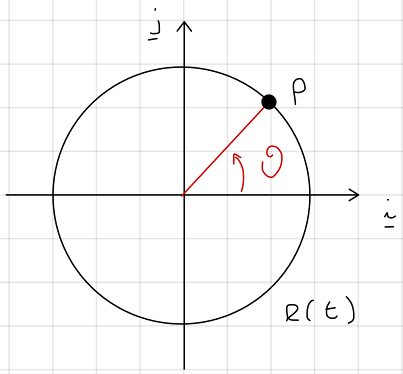
$\Rightarrow d\underline{r} = d\underline{r_i}^* + \delta \underline{r_i}$ DOVE:

1) $d r_i^* = \dfrac{\partial r_i}{\partial t}\,dt$: SPOSTAMENTO CHE SI OTTIENE BLOCCANDO TUTTE LE COORDINATE LIBERE E FACENDO VARIARE SOLO I VINCOLI MOBILI

2) $\delta \underline{r}_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \, dq_k$: SPOSTAMENTO CHE SI OTTIENE CONGELANDO I VINCOLI MOBILI IN t GENERICO E FACENDO VARIARE SOLO LE COORDINATE LIBERE

$\longrightarrow$ **SPOSTAMENTO VIRTUALE**

- QUINDI: LO SPOSTAMENTO VIRTUALE É UNO SPOSTAMENTO INFINITESIMO COMPATIBILE CON TUTTI I VINCOLI CONGELATI ALL' ISTANTE t
- OSS: SE VINCOLI FISSI: $d\underline{r}_i^* = 0 \longrightarrow d\underline{r}_i$ É VIRTUALE ($d\underline{r}_i = \delta \underline{r}_i$)
- ESEMPIO: PUNTO P VINCOLATO SU UNA CIRCONFERENZA DI RAGGIO VARIABILE



~ SENZA VINCOLO: # gdl = 2

~ VINCOLO: $x^2 + y^2 = R^2(t)$

$\Rightarrow g(x,y) = x^2 + y^2 - R^2(t) = 0$

~ É UN VINCOLO OLONOMO $\Rightarrow$ TOGLIE 1 gdl $\Rightarrow$ 1 COORDINATA LIBERA (ϑ)

$$\begin{cases} x = R(t)\cos\vartheta \\ y = R(t)\sin\vartheta \end{cases}$$

~ $r(\vartheta, t) = R(t)\left(\cos\vartheta \, \underline{i} + \sin\vartheta \, \underline{j}\right) = R(t)\, \underline{u}(\vartheta)$

~ CALCOLO $d\underline{r}$:

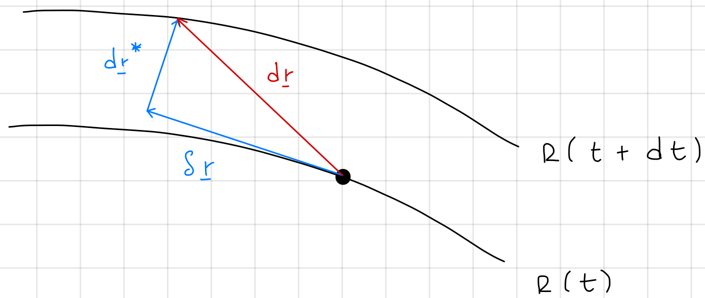
$$d\underline{r} = \frac{\partial r}{\partial t} dt + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial q_k} dq_k = \underbrace{\frac{\partial r}{\partial t} dt}_{d\underline{r}^*} + \underbrace{\frac{\partial r}{\partial \vartheta} d\vartheta}_{\delta \underline{r}}$$

DOVE: $d\underline{r}^* = \frac{\partial r}{\partial t} dt = \dot{R}(t)\, \underline{u}\, dt$ // $\underline{u}$

$\delta \underline{r} = \frac{\partial r}{\partial \vartheta} d\vartheta = R(t)\left(-\sin\vartheta \, \underline{i} + \cos\vartheta \, \underline{j}\right) d\vartheta$

~ MA $\underline{t}(\vartheta) = -\sin\vartheta\, \underset{\sim}{i} + \cos\vartheta\, \underline{j} \longrightarrow \delta\underline{r} = R(t)\, \underline{t}(\vartheta)\, d\vartheta \quad // \ \underline{t}(\vartheta)$

- GRAFICAMENTE:



QUINDI: $d\underline{r}$ É COMPOSIZIONE DI 2 SPOSTAMENTI:

- $\delta\underline{r}$ É TANGENTE ALLA CIRCONFERENZA $\forall t$

  ↳ SI OTTIENE CONGELANDO IL VINCOLO A ISTANTE t GENERICO

- dr RADIALE

  ↳ SI OTTIENE BLOCCANDO LA COORDINATA LIBERA E VARIANDO SOLO IL VINCOLO MOBILE $(R(t))$

- OSS: DATO IL GENERICO VINCOLO OLONOMO $g(x,y,z,t) \Rightarrow \nabla g \perp$ SUPERFICIE DEFINITA DA $g(x,y,z,t) = 0$

↳ ANCHE $\delta\underline{r}$ É TANGENTE ALLA SUPERFICIE DEFINITA DA $g(x,y,z,t)$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla g \perp \delta\underline{r}}$$

3.2 VINCOLI IDEALI

- DATO IL SISTEMA DI PUNTI SOGGETTO A VINCOLI, SU OGNI PUNTO AGISCE UNA REAZIONE VINCOLARE $\underline{\phi}_i$

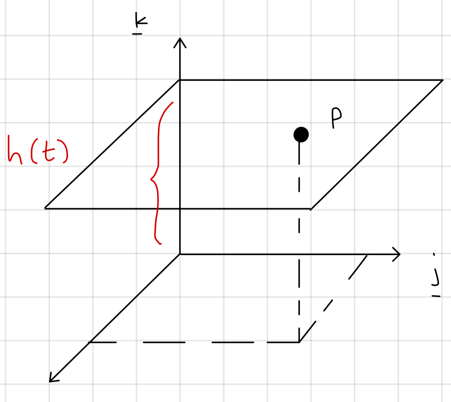
- **DEFINIZIONE DI LAVORO VIRTUALE:** È IL LAVORO CHE LE REAZIONI COMPIONO PER UNO SPOSTAMENTO VIRTUALE DEI PUNTI DEL SISTEMA:

$$\boxed{\delta L = \sum_{i=1}^{N} \underline{\phi}_i \circ \delta \underline{r}_i}$$

- **DEFINIZIONE DI VINCOLI IDEALI:** I VINCOLI SONO IDEALI SE IL LAVORO VIRTUALE DELLE REAZIONI VINCOLARI È NULLO QUALSIASI SIA LO SPOSTAMENTO VIRTUALE DEI PUNTI DEL SISTEMA

$$\boxed{\text{VINCOLI IDEALI SE: } \delta L = \sum_{i=1}^{N} \underline{\phi}_i \circ \delta \underline{r}_i = 0 \quad \forall \delta \underline{r}_i}$$

- ESEMPIO:



~ $h(t)$ È LEGGE NOTA

~ $\underbrace{\underline{r}(x,y,t)}_{\underline{r}(q_1,\dots,q_n,t)} = x\underline{i} + y\underline{j} + h(t)\underline{k}$

~ SPOSTAMENTO GENERICO ELEMENTARE:

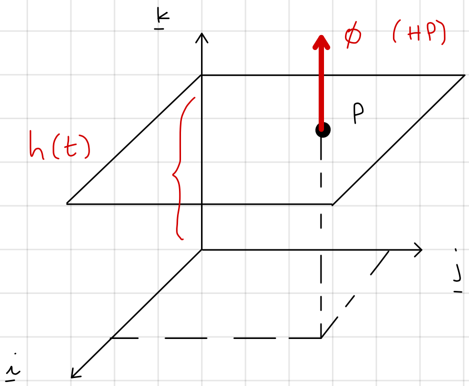
$$d\underline{r} = \frac{\partial \underline{r}}{\partial t}dt + \sum_{k=1}^{N}\frac{\partial \underline{r}}{\partial q_k}dq_k = \frac{\partial \underline{r}}{\partial t}dt + \frac{\partial \underline{r}}{\partial x}dx + \frac{\partial \underline{r}}{\partial y}dy$$

$$= \underbrace{\dot{h}(t)\,dt\,\underline{k}}_{\delta \underline{r}^*} + \underbrace{dx\,\underline{i} + dy\,\underline{j}}_{\delta \underline{r}}$$

~ INDICHIAMO: $\delta \underline{r} = \delta x \, \underline{i} + \delta y \, \underline{j}$

• DIM: APPOGGIO LISCIO <=> APPOGGIO VINCOLO IDEALE

1) $\underbrace{\text{APPOGGIO LISCIO}}_{HP}$ => APPOGGIO VINCOLO IDEALE

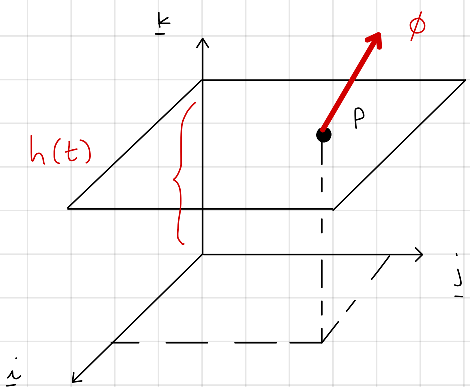


~ APPOGGIO LISCIO => $\phi \parallel \underline{k}$ => $\phi \parallel \lambda \underline{k}$

~ CALCOLO IL LAVORO VIRTUALE: $\delta L = \phi \circ d\underline{r} = \lambda \underline{k} \circ (\delta x \, \underline{i} + \delta y \, \underline{j}) = 0$

VINCOLO IDEALE

2) APPOGGIO LISCIO <= $\underbrace{\text{APPOGGIO VINCOLO IDEALE}}_{HP}$



~ NON POSSO PIÚ SUPPORRE CHE $\phi \parallel \underline{k} \longrightarrow \phi = \phi_x \, \underline{i} + \phi_y \, \underline{j} + \phi_z \, \underline{k}$

~ $\delta L = \phi \circ d\underline{r} = 0 \quad \forall \, \delta \underline{r}$

$$(\phi_x \, \underline{i} + \phi_y \, \underline{j} + \phi_z \, \underline{k}) \circ (\delta x \, \underline{i} + \delta y \, \underline{j}) = 0 \qquad \forall \, \delta x, \delta y$$

$$\phi_x \delta x + \phi_y \delta y = 0 \qquad \forall \, \delta x, \delta y$$

~ SE DEVE VALERE $\forall \delta x, \delta y$ ALLORA DEVE ESSERE VERA ANCHE PER I SEGUENTI CASI PARTICOLARI:

1) $\delta x = 1 \quad \delta y = 0 \xrightarrow{\text{SOSTITUISCO}} \phi_x = 0$

2) $\delta x = 0 \quad \delta y = 1 \xrightarrow{\text{SOSTITUISCO}} \phi_y = 0$

~> QUINDI $\underline{\phi} = \phi_z \underline{k}$ => APPOGGIO LISCIO

• OSS 1: NELLA DEF. DI VINCOLO IDEALE MI INTERESSA SOLO IL LAVORO VIRTUALE DELLE REAZIONI VINCOLARI ⟶ UN VINCOLO PUÓ ESSERE IDEALE ANCHE SE MOBILE

• OSS 2: TUTTI I VINCOLI VISTI SONO VINCOLI IDEALI

• OSS 3: VINCOLO IDEALE => $\delta L = \underline{\phi} \circ \delta \underline{r} = 0$ => $\underline{\phi} \perp \delta \underline{r}$

~ MA AVEVAMO VISTO CHE $\delta \underline{r}$ É TANGENTE ALLA SUPERFICIE DEL VINCOLO $g(\underline{r}, t) = 0$

~ MA $\nabla g \perp$ SUPERFICIE DEFINITA DA $g(r, t) = 0$

=> VINCOLO IDEALE: $\underline{\phi} \parallel \nabla g$ => $\boxed{\phi = \lambda \nabla \underline{g}}$

• <u>GENERALIZZAZIONE A SISTEMA DI PUNTI SOGGETTO A M VINCOLI OLONOMI:</u>

~ VINCOLI IDEALI => $\delta L = \sum_{i=1}^{N} \underline{\phi}_i \circ \delta \underline{r}_i = 0 \quad \forall \delta \underline{r}_i$

$= \phi_1 \circ \delta r_1 + \phi_2 \circ \delta r_2 + \dots + \phi_N \delta r_N = 0 = \phi_i \circ \delta r_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, N$

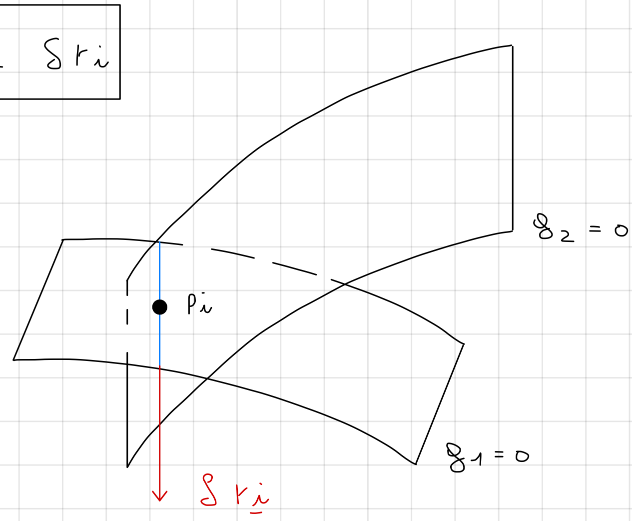
$\longrightarrow \boxed{\phi_i \perp \delta r_i}$

~ MA VINCOLI OLONOMI:

$g_1(r_1, \dots, r_N, t) = 0$

$\vdots$

$g_M(r_1, \dots, r_N, t) = 0$



~ OGNI PUNTO P_i DEVE $\in$ A INTERSEZIONE TRA LE 2 SUPERFICI

~ $\delta \underline{r}_i$ DEVE ESSERE TANGENTE ALL' INTERSEZIONE

~ AVEVAMO VISTO:

$\nabla_{\underline{r}_i} g_1 \perp$ SUPERFICIE $g_1 = 0 \Rightarrow \nabla_{r_i} g_1 \perp \delta r_i$

$\nabla_{\underline{r}_i} g_2 \perp$ SUPERFICIE $g_2 = 0 \Rightarrow \nabla_{r_i} g_2 \perp \delta r_i$

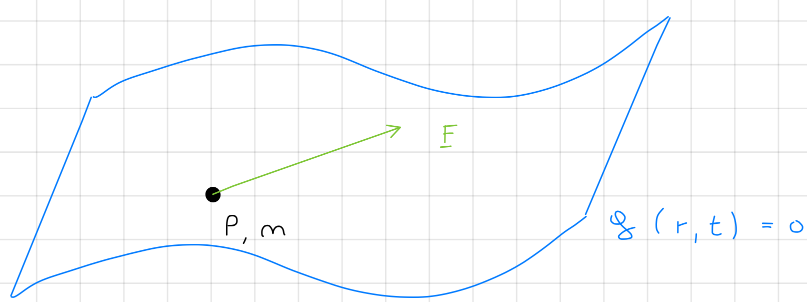
$\Rightarrow \nabla_{r_i} g_\ell \perp \delta \underline{r}_i \quad \forall$ COMBINAZIONE LINEARE DI $\nabla_{\underline{r}_i} g_\ell$

$$\boxed{\sum_{\ell=1}^{M} \lambda_\ell \nabla_{\underline{r}_i} g_\ell \perp \delta r_i}$$

EQUAZIONE DI LAGRANGE IN I FORMA

• MOTO DI UN PUNTO SU UNA SUPERFICIE LISCIA:

~ DATO PUNTO P SOGGETTO A GENERICA FORZA ATTIVA F CHE SI MUOVE SU UNA SUPERFICIE : $g(r,t) = 0$



~ APPLICO II LEGGE DI NEWTON: $m\ddot{r} = \underline{F} + \underline{\phi}$ 3 EQUAZIONI IN 6 INCOGNITE

~ METTO A SISTEMA CON IL VINCOLO: $\begin{cases} m\ddot{r} = \underline{F} + \underline{\phi} \\ g(r,t) = 0 \end{cases}$ 4 EQUAZIONI IN 6 INCOGNITE

~ INTRODUCO HP - VINCOLI IDEALI: $\underline{\phi} = \lambda \nabla g$

$$\begin{cases} m\ddot{r} = \underline{F} + \lambda \nabla g \\ g(r,t) = 0 \end{cases}$$

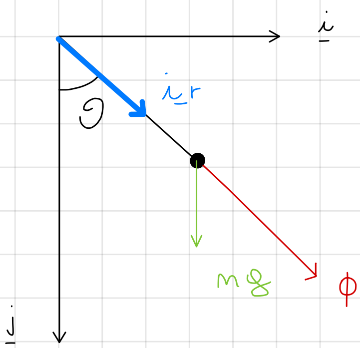
4 EQUAZIONI IN 4 INCOGNITE

$x(t), y(t), z(t), \lambda$

$$\boxed{\begin{cases} m\ddot{\underline{r}} = \underline{F} + \lambda \nabla g \\ g(\underline{r}, t) = 0 \end{cases}}$$

EQUAZIONE DI LAGRANGE IN I FORMA

- ESEMPIO:



~ II LEGGE: $m\ddot{\underline{r}} = mg\,\underline{j} + \underline{\phi}$

~ VINCOLO: $\|\underline{r}\| = \ell \longrightarrow \underline{r} \circ \underline{r} - \ell^2 = 0$

~ $\begin{cases} m\ddot{\underline{r}} = mg\,\underline{j} + \underline{\phi} \\ \underline{r} \circ \underline{r} - \ell^2 = 0 \end{cases}$ 4 EQUAZIONI IN 6 INCOGNITE

~ HP: FILO = VINCOLO IDEALE $\Rightarrow \phi \parallel \nabla g$

~ $\nabla g = 2\underline{r}$

$\Rightarrow \phi \parallel 2\underline{r} \Rightarrow \phi \parallel \underline{r} \Rightarrow \phi = \lambda \underline{r}$

~ $\begin{cases} m\ddot{\underline{r}} = mg\,\underline{j} + \lambda \underline{r} & a) \\ \underline{r} \circ \underline{r} - \ell^2 = 0 & b) \end{cases}$ 4 EQUAZIONI IN 4 INCOGNITE

~ PROVO A CALCOLARE LA TENSIONE

~ DERIVO b): $\underline{v} \circ \underline{r} + \underline{r} \circ \underline{v} = 0 \Rightarrow \underline{v} \circ \underline{r} = 0$

~ DERIVO ANCORA: $\ddot{\underline{r}} \circ \underline{r} + \underline{v}^2 = 0$

~ $\partial \circ \underline{r}$: $\quad m\ddot{\underline{r}} \circ \underline{r} = mg\,\underline{j} \circ \underline{r} + \lambda r^2$

$$-mv^2 = mg\,\underline{j} \circ \underline{r} + \lambda r^2$$

$$\lambda r^2 = -(mg\,\underline{j} \circ \underline{r} + mv^2)$$

$$\lambda = \frac{-(mg\,\underline{j} \circ \underline{r} + mv^2)}{r^2}$$

~ $$T = \lambda \underline{r} = \frac{-(mg\,\underline{j} \circ \underline{r} + mv^2)}{r^2} \circ \underline{r} = \frac{-(mg\,\underline{j} \circ \underline{r} + mv^2)}{\|r\|} \circ \underline{r} =$$

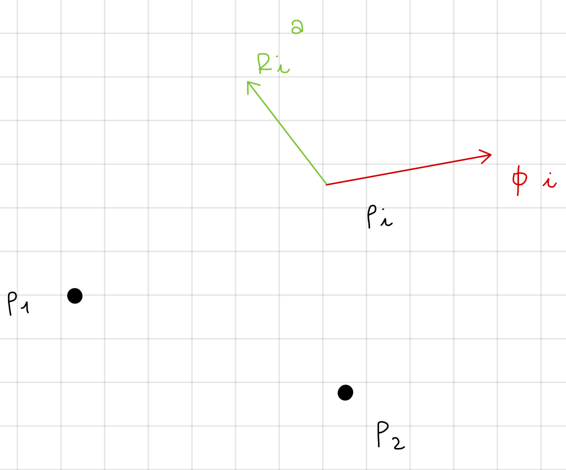
$$= \frac{-(mg\,\underline{j} \circ \underline{r} + mv^2)}{\|r\|} \circ \frac{r}{\|r\|} = -\frac{(mg\,\underline{j} \circ \underline{r} + mv^2)}{\|r\|} \circ \underline{i}_r =$$

$$= -\left(mg\,\underline{j} \circ \frac{r}{\|r\|} + m\frac{v^2}{\|r\|}\right)\underline{i}_r = -\left(mg\,\underbrace{\underline{j} \circ \underline{i}_r}_{\cos\theta} + \frac{mv^2}{\|r\|}\right) \circ \underline{i}_r =$$

~ $$T = \lambda \underline{r} = -\left(mg\cos\theta + \frac{mv^2}{\|r\|}\right) \circ \underline{i}_r$$

• EQUAZIONE DI LAGRANGE IN I FORMA – GENERALIZZAZIONE :

~ n PUNTI MATERIALI SOGGETTI A M VINCOLI OLONOMI IDEALI



~ APPLICO 2° LEGGE DI NEWTON : $\quad m_i \ddot{r}_i = \underline{R}_i^a + \underline{\phi}_i \qquad i = 1, \dots, N$

3N EQUAZIONI IN 6N INCOGNITE

~ VINCOLI OLONOMI: $g_\ell(r_1, \dots, r_N, t) = 0 \qquad \ell = 1, \dots, M$

~ METTO A SISTEMA:

$$\begin{cases} m_i \ddot{r}_i = \underline{R}_i^a + \underline{\phi}_i & i = 1, \dots, N \\ g_\ell(r_1, \dots, r_N, t) = 0 & \ell = 1, \dots, M \end{cases}$$

$3N + M$ EQUAZIONI

$6N$ INCOGNITE

NOTA: $M < 3N$

~ VINCOLI IDEALI: $\phi_i = \sum_{\ell=1}^{M} \lambda_\ell \nabla_{r_i} g_\ell \qquad i = 1, \dots, N$

~ SOSTITUISCO:

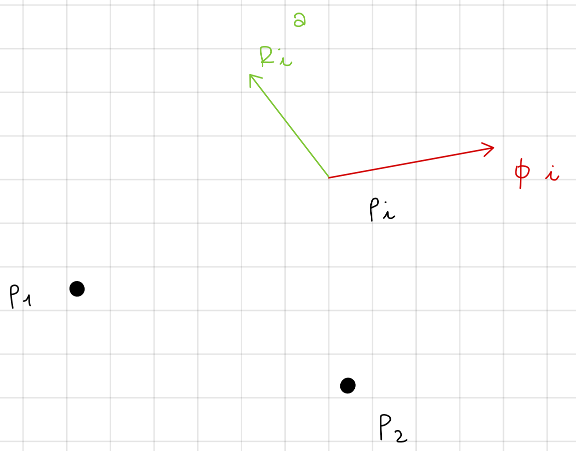
$$\begin{cases} m_i \ddot{r}_i = R_i^a + \sum_{\ell=1}^{M} \lambda_\ell \nabla_{r_i} g_\ell \\ g_\ell(r_1, \dots, r_N, t) = 0 \qquad \ell = 1, \dots, M \end{cases}$$

$3N + M$ EQUAZIONI

$3N + M$ INCOGNITE

EQUAZIONE DI LAGRANGE IN II FORMA

- DATO SISTEMA DI PUNTI P_i $i = 1, \dots, N$ SOGGETTO A VINCOLI.



IPOTESI

1) VINCOLI OLONOMI: $r_i = r_i(q_1, \dots, q_N, t) \quad \forall i$

2) VINCOLI IDEALI: $\delta L = \sum_{i=1}^{N} \underline{\phi}_i \circ \delta \underline{r}_i = 0$

- STUDIO IL MOTO DEI PUNTI $\longrightarrow$ 2° LEGGE DI NEWTON

$m_i \ddot{r}_i = \underline{R}_i^a + \underline{\phi}_i \qquad i = 1, \dots, N \qquad$ a

- VINCOLI IDEALI: $\delta L = \sum_{i=1}^{N} \underline{\phi}_i \circ \delta \underline{r}_i = 0 \qquad \forall \delta \underline{r}_i \qquad$ b

- SOSTITUISCO IN b:

$$\boxed{\delta L = \sum_{i=1}^{N} \left(m_i \ddot{r}_i - R_i^a \right) \circ \delta \underline{r}_i = 0}$$

EQUAZIONE SIMBOLICA DELLA DINAMICA

- SFRUTTIAMO IL FATTO CHE DEVE VALERE $\forall\, \delta \underline{r_i}$:

VINCOLI OLONOMI: $\underline{r_i} = \underline{r_i}(q_1, \dots, q_N, t)$

$$\delta \underline{r_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k \longrightarrow \forall\, \delta \underline{r_i} \equiv \forall\, (\delta q_1, \dots, \delta q_n)$$

- SOSTITUISCO IN EQUAZIONE SIMBOLICA DELLA DINAMICA:

$$\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{r}_i - R_i^{a}) \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k = 0 \qquad \forall\, (\delta q_1, \dots, \delta q_k)$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{n} (m_i \ddot{r}_i - R_i^{a}) \circ \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k = 0 \qquad \forall\, (\delta q_1, \dots, \delta q_k)$$

- INVERTO SOMMATORIE:

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{r}_i - R_i^{a}) \circ \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k = 0 \qquad \forall\, (\delta q_1, \dots, \delta q_k)$$

- PORTO FUORI q_k:

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{r}_i - R_i^{a}) \circ \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \right] \delta q_k = 0 \qquad \forall\, (\delta q_1, \dots, \delta q_k)$$

- SE DEVE VALERE $\forall\, (\delta q_1, \dots, \delta q_k)$ ALLORA VALE ANCHE PER I SEGUENTI CASI PARTICOLARI:

1) $\delta q_1 = 1,\ \delta q_2 = 0, \dots, \delta q_n = 0 \longrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{r}_i - R_i^{a}) \circ \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = 0$

2) $\delta q_1 = 0,\ \delta q_2 = 1, \dots, \delta q_n = 0 \longrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{r}_i - R_i^{a}) \circ \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = 0$

⋮

IN GENERALE: $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} (m_i \ddot{r}_i - R_i^{a}) \circ \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = 0 \qquad k = 1, \dots, N$

n EQUAZIONI PURE DEL MOTO

- SCRIVIAMO QUESTE EQUAZIONI IN FORMA PIÚ SEMPLICE.

PASSO 1:

~ DEFINIZIONE DI COMPONENTE GENERALIZZATA DELLA SOLLECITAZIONE ATTIVA IN DIREZIONE q_k:

$$Q_k(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = \sum_{i=1}^{N} \underline{R}_i \circ \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}$$

~ RISCRIVO EQUAZIONE: $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\underline{r}}_i \circ \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = Q_k$

PASSO 2: VEDREMO CHE $\displaystyle\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\underline{r}}_i \circ \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \iff T$

2.1) FACCIO $\displaystyle\frac{d}{dt}\left(m_i \underline{v}_i \circ \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}\right) = m_i \ddot{r}_i \circ \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} + m_i \underline{v}_i \circ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}\right)$

$$\Rightarrow m_i \ddot{r}_i \circ \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(m_i \underline{v}_i \circ \frac{\partial r_i}{\partial q_k}\right) - m_i \underline{v}_i \circ \frac{d}{dt} \frac{\partial r_i}{\partial q_k}$$

2.2) $\displaystyle\frac{d}{dt}\frac{\partial r_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k}\frac{d r_i}{dt}$

$$\Rightarrow m_i \ddot{\underline{r}}_i \circ \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(m_i \underline{v}_i \circ \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}\right) - m_i \underline{v}_i \circ \frac{\partial}{\partial q_k} \frac{d \underline{r}_i}{dt} \quad \underline{v}_i$$

$$m_i \ddot{\underline{r}}_i \circ \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(m_i \underline{v}_i \circ \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}\right) - m_i \underline{v}_i \circ \frac{\partial v_i}{\partial q_k}$$

2.3) VINCOLI OLONOMI: $\underline{r}_i = \underline{r}_i(q_1, \dots, q_n, t)$

$$\Rightarrow \underline{v}_i = \frac{d \underline{r}_i}{dt} = \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k =$$

$$= \frac{\partial r_i}{\partial t} + \frac{\partial r_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial r_i}{\partial q_n}\dot{q}_n$$

$$\sim \begin{cases} \dfrac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_1} = \dfrac{\partial r_i}{\partial q_1} \\[2ex] \dfrac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_2} = \dfrac{\partial r_i}{\partial q_2} \\[2ex] \dots \end{cases}$$

$\sim$ SOSTITUISCO:
$$m_i \ddot{r}_i \circ \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\underbrace{\left(m_i v_i \circ \frac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_k} \right)}_{\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_k}} - \underbrace{m_i v_i \circ \frac{\partial v_i}{\partial q_k}}_{\frac{\partial T_i}{\partial q_k}}$$

2.4) $\sim$ PER PUNTI P_i: $T_i = \dfrac{1}{2} m_i v_i^2$ DOVE $v_i = v_i(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$

$\sim$ QUINDI:
$$\begin{cases} \dfrac{\partial T_i}{\partial q_k} = m_i v_i \circ \dfrac{\partial v_i}{\partial q_k} \\[3ex] \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = m_i v_i \circ \dfrac{\partial v_i}{\partial \dot{q}_k} \end{cases} \longrightarrow m_i \ddot{r}_i \circ \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T_i}{\partial q_k}$$

2.5) TORNO ALLA SOMMATORIA:

$$\sim \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T_i}{\partial q_k} \right] = Q_k \qquad k = 1, \dots, n$$

$$\sim \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Sigma T_i}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \Sigma T_i}{\partial q_k} = Q_k \qquad k = 1, \dots, n$$

$$\sim \text{MA } T = \sum_{i=1}^{N} T_i \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \qquad k = 1, \dots, n}$$

- PROBLEMA: COME CALCOLO Q_k?

~ $Q_k(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) = \sum_{i=1}^{N} \underline{R}_i^{a} \circ \frac{\partial r_i}{\partial q_k}$

~ CONSIDERIAMO: LAVORO VIRTUALE DELLE SOLLECITAZIONI ATTIVE: $\delta L^{a} = \sum_{i=1}^{N} \underline{R}_i^{a} \circ \delta \underline{r}_i$

~ MA VINCOLI OLONOMI: $r_i(q_1, \dots, q_n, t)$, $\delta \underline{r}_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k$

~ SOSTITUIAMO IN c:

$$\delta L^{a} = \sum_{i=1}^{N} \underline{R}_i^{a} \circ \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} \underline{R}_i^{a} \circ \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k} \right)}_{Q_k} \delta q_k$$

$$\longrightarrow \quad \delta L^{a} = \sum_{k=1}^{n} Q_k \, \delta q_k$$

- <u>PROCEDURA PER IL CALCOLO DI Q_k:</u>

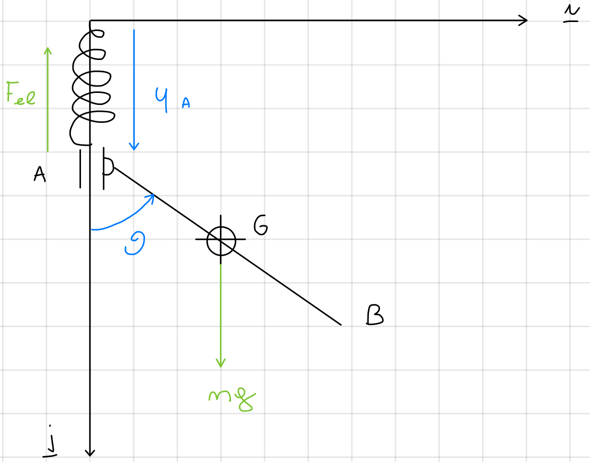
1) CALCOLO $\delta L^{a} = \sum_{i=1}^{N} \underline{R}_i^{a} \circ \delta \underline{r}_i$ a

2) SCRIVO $\underline{R}_i^{a}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$
   $\delta r_i(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$ b

3) SOSTITUISCO b IN a: $\delta L^{a} = \sum_{k=1}^{n} Q_k \, \delta q_k$

4) ESTRAGGO Q_k

- ESEMPIO:



- $\#\, gdl = 2 \quad (\text{c.L} \quad y_A, \vartheta)$

i) $Q_K = \,? \longrightarrow Q_{y_A},\ Q_\vartheta$

- PASSO 1: $\delta L^{a} = \sum_{i=1}^{N} \underline{R}_i^{a} \circ \delta \underline{r}_i = \underline{F}_{el} \circ \delta r_A + \underline{F}_P \circ \delta \underline{r}_G$

- PASSO 2: • $\underline{R}_i^{a}(q_1, \dots, q_n, \dot q_1, \dots, \dot q_n, t) \longrightarrow \underline{R}_i^{a}(y_A, \vartheta, \dot y_A, \dot\vartheta)$

• $\delta \underline{r}_i(q_1, \dots, q_n, \dot q_1, \dots, \dot q_n, t) \longrightarrow \delta \underline{r}_i(y_A, \vartheta, \dot y_A, \dot\vartheta)$

- $\underline{R}_i^{a} = -k y_A \underline{j}$ LA ESPRIMO IN FUNZIONE DELLE C.L.

- $\underline{F}_P = mg\, \underline{j}$

- $\delta \underline{r}_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial r_i}{\partial y_A} \delta y_A + \frac{\delta r_i}{\partial \theta} \delta\vartheta$

$\underline{r}_A = y_A \underline{j} \longrightarrow \delta \underline{r}_A = \frac{\partial r_A}{\partial y_A} \delta y_A + \cancel{\frac{\partial r_A}{\partial \theta} \delta \vartheta} = \delta y_A \underline{j}$

NON DIPENDE DA θ

- $r_G = \frac{\ell}{2} \sin\theta\, \underline{i} + \left(y_A + \frac{\ell}{2}\cos\theta \right) \underline{j}$

$\longrightarrow \delta r_G = \delta y_A \underline{j} + \frac{\ell}{2} \cos\theta\, \delta\vartheta\, \underline{i} - \frac{\ell}{2} \sin\vartheta\, \delta\vartheta\, \underline{j} =$

$= \frac{\ell}{2} \cos\theta\, \delta\vartheta\, \underline{i} + \left(\delta y_A - \frac{\ell}{2} \sin\vartheta\, \delta\vartheta \right) \underline{j}$

- PROCEDURA ALTERNATIVA RAPIDA PER IL CALCOLO DI Q_k:

SE I VINCOLI SONO FISSI $\longrightarrow$ $d\underline{r}_i = \delta \underline{r}_i$

~ TROVO $v_i(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \longrightarrow \underline{v}_i = \frac{d\underline{r}_i}{dt}$ $\quad d\underline{r}_i = \underline{v}_i dt$

$\rightarrow$ LO APPLICO ALL' ESEMPIO:

$$\underline{v}_A = \dot{y}_A \underline{j}$$

$$\underline{v}_G = \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\cos\theta\, \underline{i} + \left(\dot{y}_A - \frac{\ell}{2}\dot{\theta}\sin\theta\right)\underline{j}$$

MA $\underline{v}_i = \frac{d\underline{r}_i}{dt} \longrightarrow d\underline{r}_i = \underline{v}_i\, dt$

$$d\underline{r}_A = \dot{y}_A\, dt\, \underline{j} = \frac{dy_A}{dt}\, dt\, \underline{j} = dy_A\, \underline{j}$$

$$d\underline{r}_G = \underline{v}_G\, dt = \frac{\ell}{2}\, d\theta\cos\theta\, \underline{i} + \left(d y_A - \frac{\ell}{2}\, d\theta\sin\theta\right)\underline{j}$$

VINCOLI FISSI: $\quad d\underline{r}_A = \delta\underline{r}_A = \delta y_A\, \underline{j}$

$$d\underline{r}_G = \delta\underline{r}_G = \frac{\ell}{2}\delta\theta\cos\theta\, \underline{i} + \left(\delta y_A - \frac{\ell}{2}\delta\theta\sin\theta\right)\underline{j}$$

- PASSO 3: METTO I RISULTATI DEL PASSO 2 IN PASSO 1

$$\delta L^a = \sum_{i=1}^{N} \underline{R}_i^a \circ \delta\underline{r}_i = \sum_{k=1}^{n} Q_k\, \delta q_k = Q_{y_A}\delta y_A + Q_\theta\, \delta\theta$$

$$\longrightarrow \delta L^a = -k y_A\, \underline{j} \circ \delta y_A\, \underline{j} + mg\, \underline{j} \circ \left[\frac{\ell}{2}\delta\theta\cos\theta\, \underline{i} + \left(\delta y_A - \frac{\ell}{2}\delta\theta\sin\theta\right)\underline{j}\right]$$

$$= -k y_A \delta y_A + mg\,\delta y_A - mg\frac{\ell}{2}\sin\theta\,\delta\theta = \underbrace{(mg - k y_A)}_{Q_{y_A}}\delta y_A \underbrace{- mg\frac{\ell}{2}\sin\theta}_{Q_\theta} d\theta$$

EQUAZIONE DI LAGRANGE IN II FORMA PER FORZE CONSERVATIVE

- VINCOLI IDEALI E OLONOMI: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \qquad k = 1, \dots, N$

DOVE $Q_k = \sum_{i=1}^{N} \underline{R}_i^{a} \circ \frac{\partial r_i}{\partial q_k}$

~ FORZE CONSERVATIVE: $\exists V = -U$ T.C $\underline{R}_i^{a} = -\nabla_{\underline{r}_i} V = -\frac{\partial V}{\partial r_i}$

~ $Q_k = \sum_{i=1}^{N} \underline{R}_i^{a} \circ \frac{\partial r_i}{\partial q_k} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial r_i} \circ \frac{\partial r_i}{\partial q_k}$

~ NOTO CHE $U(r_1, \dots, r_N)$, $V(r_i, \dots, r_N)$ DOVE $\underline{r}_i(q_1, \dots, q_n)$

$$\longrightarrow V\left(r_i(q_1, \dots, q_n), \dots, r_N(q_1, \dots, q_n)\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial V}{\partial q_k} = \frac{\partial V}{\partial r_1} \circ \frac{\partial r_1}{\partial q_k} + \dots + \frac{\partial V}{\partial r_N} \circ \frac{\partial r_N}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial V}{\partial r_i} \circ \frac{\partial r_i}{\partial q_k}$$

~ QUINDI $Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$

~ SOSTITUISCO IN EQUAZIONE DI LAGRANGE:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad k = 1, \dots, n$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial (T - V)}{\partial q_k} = 0 \qquad k = 1, \dots, n$$

- DEFINIZIONE DI LAGRANGIANA: $\mathcal{L} \triangleq T - V$

~ $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \qquad k = 1, \dots, n$$

~ NOTIAMO CHE $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \dfrac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}$

~ MA $V\left(r_1(q_1, \dots, q_n), \dots, r_N(q_1, \dots, q_n)\right) \Rightarrow \dfrac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$

~ QUINDI:
$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0 \qquad k = 1, \dots, n}$$

- OSS1.
$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L} &= T - V = T + U \\ E &= T + V = T - U \end{aligned}\right\} \quad \mathcal{L} \neq E$$

- OSS2. SE SOLO ALCUNE FORZE SONO CONSERVATIVE.

$$\underline{R}_i^{a} = \underline{R}_i^{a,c} + \underline{R}_i^{a,NC} = \underbrace{-\frac{\partial V}{\partial r_i}}_{\text{ENERGIA POTENZIALE DELLE FORZE CONSERVATIVE}} + R_i^{a,NC}$$

IL RISULTATO SARÀ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k^{NC} \qquad k = 1, \dots, n$$

Q_k^{NC} = COMPONENTE GENERALIZZATA DELLE SOLLECITAZIONI ATTIVE NON CONSERVATIVE

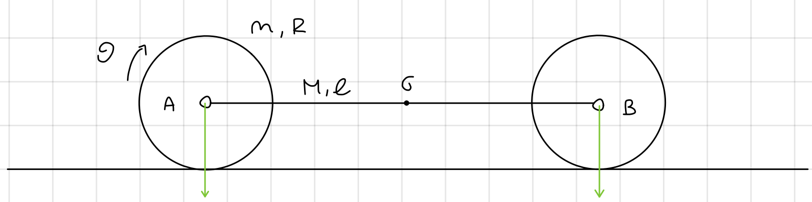
- OSS 3: RIASSUNTO

1) FORMA GENERALE: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$

2) FORZE CONSERVATIVE (LAGRANGIANA): $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$

3) FC + FNC (LAGRANGIANA): $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k^{NC}$

- ESEMPIO:



ANALISI CINEMATICA

$$\begin{cases} V_A = R\dot{\theta}\,\underline{i} \\ \omega_{D1} = -\dot{\theta}\,\underline{k} \end{cases} \qquad \begin{cases} V_B = R\dot{\theta}\,\underline{i} \\ \omega_{D2} = -\dot{\theta}\,\underline{k} \end{cases} \qquad \underline{V}_G = R\dot{\theta}\,\underline{i}$$

- FORZE ATTIVE: FORZA PESO CONSERVATIVA

COPPIA (UNA COPPIA COSTANTE È CONSERVATIVA, MA AI FINI DELL'ES. LA TRATTO COME N.C.)

N.B. NELLA LAGRANGIANA CONSIDERO TUTTE LE FORZE ATTIVE, SIA INTERNE CHE ESTERNE

- APPLICO: $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k^{NC}$

$$\longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = Q_\theta^{NC}$$

- $\mathcal{L} = T - V \quad \sim \quad T = \dfrac{1}{2}(3m + M) R^2 \dot{\theta}^2$

$$\sim \quad V = mgR + mgR + MgR = (2m + M) gR$$

$$\longrightarrow \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2}(3m + M) R^2 \dot{\theta}^2 - (2m + M) gR$$

- QUINDI: $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = (3m + M) R^2 \dot{\theta} \longrightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = (3m + M) R^2 \ddot{\theta}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0$$

- $Q_\theta^{NC} = Q_\theta^{C}$

- PASSO 1: $\delta L^a = \underline{C} \cdot \delta \underline{\varphi} = -C \cdot \delta \phi_{ASTA}$

- PASSO 2: $\underline{C} = -C \underline{k}$

$$\underline{\omega}_1 = -\dot{\theta}\, \underline{k} \longrightarrow d\theta = -\delta\theta\, \underline{k}$$

$$\omega_a = 0 \longrightarrow \delta\phi_A = 0$$

- PASSO 3: $\delta L^a = -C \underline{k} \cdot (-\delta\theta\, \underline{k}) = C\, \delta\theta$

- EQ. DI LAGRANGE: $(3m + M) R^2 \ddot{\theta} = C$

MOMENTO CINETICO CONIUGATO A COORDINATA LIBERA IGNORABILE

- HP: VINCOLI OLONOMI
  VINCOLI IDEALI
  FORZE CONSERVATIVE

$$\left.\begin{array}{l}\text{VINCOLI OLONOMI}\\ \text{VINCOLI IDEALI}\\ \text{FORZE CONSERVATIVE}\end{array}\right\} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$$

- DEFINIZIONE DI MOMENTO CINETICO CONIUGATO A q_k: $p_k = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$

$$\longrightarrow \quad p_k(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$$

- DEFINIZIONE DI COORDINATA LIBERA IGNORABILE: $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$

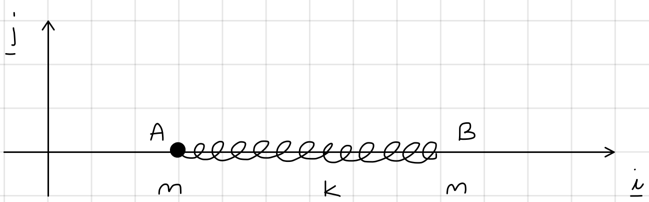
- CONSEGUENZA: SE q_k È IGNORABILE, DA EQ. DI LAGRANGE:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \cancel{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}} = 0 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) \longrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = cost \longrightarrow p_k = cost$$

QUINDI IL MOMENTO CINETICO CONIUGATO A UNA COORDINATA LIBERA IGNORABILE

È INTEGRALE PRIMO DEL MOTO

- ESEMPIO:



~ A, B SI MUOVONO LUNGO $\underline{i}$

~ # gdl = 2

- SCEGLIAMO x_A, x_B COME C.L.

- MI COSTRUISCO LA FUNZIONE DI LAGRANGE PER VEDERE SE SONO C.L. IGNORABILI

$$\begin{cases} \mathcal{L} = T - V \\ T = \frac{1}{2} m (\dot{x}_A^2 + \dot{x}_B^2) \\ V = \frac{1}{2} k (x_B - x_A)^2 \end{cases} \qquad \mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{x}_A^2 + \dot{x}_B^2) - \frac{1}{2} k (x_B - x_A)^2$$

$$\longrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_A} \neq 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_B} \neq 0 \longrightarrow$$ XA , XB NON SONO IGNORABILI

↳ CAMBIO C.L.

- SCELGO COME C.L. : x_A , s :

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} m \dot{x}_A^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_A^2 + \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + m \dot{x}_A \dot{s} = m \dot{x}_A^2 + \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + m \dot{x}_A \dot{s} \\ V = \frac{1}{2} k s^2 \end{cases}$$

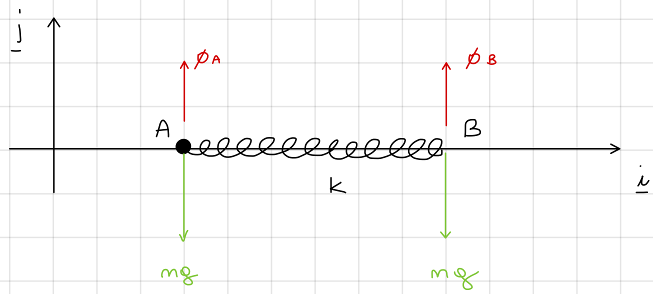
$$\mathcal{L} = m \dot{x}_A^2 + \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + m \dot{x}_A \dot{s} - \frac{1}{2} k s = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_A} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} \neq 0 \longrightarrow$$ x_A C.L. IGNORABILE

- OSS: 1° EQUAZIONE CARDINALE - SISTEMA - DIR. X :

$$\sim \left(\frac{dQ}{dt}\right)_x = R_x^a + R_x^r$$

$$\frac{dQ}{dt} = 0$$



$$\sim \left(\frac{dQ}{dt}\right)_x = \frac{dQ_x}{dt} = 0 \longrightarrow Q_x = cost$$

$$\sim \underline{Q} = \overset{V_A}{m \dot{x}_A \underline{i}} + (\overset{V_B}{m \dot{x}_A \underline{i} + m \dot{s} \underline{i}}) = (2 m \dot{x}_A + m \dot{s}) \underline{i} = cost$$

INTEGRALE GENERALIZZATO DELL' ENERGIA

- HP: VINCOLI OLONOMI, IDEALI $\longrightarrow$ VALGONO EQUAZIONI DI LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k^{NC}$$

- CONSIDERO LA FUNZIONE DI HAMILTON $\quad H \triangleq \sum_{k=1}^{n} p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}$

$\hookrightarrow$ LA DERIVO: $\quad \dfrac{dH}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \left(\dot{p}_k \dot{q}_k + p_k \ddot{q}_k\right) - \dfrac{d\mathcal{L}}{dt}$

- MA $\mathcal{L}(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) \longrightarrow \dfrac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}\dot{q}_k + \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k\right) + \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$

- SOSTITUIAMO IN $\dfrac{dH}{dt}$:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\dot{p}_k \dot{q}_k + p_k \ddot{q}_k\right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k\right)\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\dot{p}_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k + \cancel{\left(p_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right)\ddot{q}_k}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

- MA $p_k \triangleq \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \longrightarrow \quad p_k - \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = 0$

$$\dot{p}_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k$$

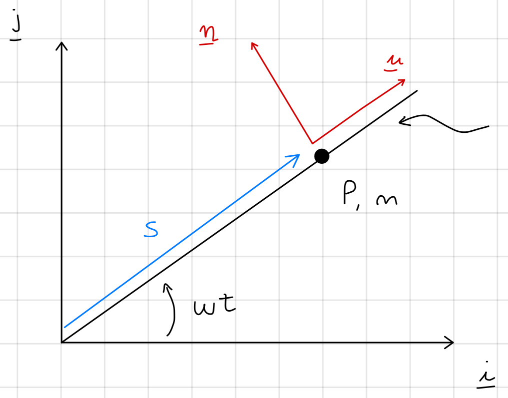
DEFINIZIONE

$$\longrightarrow \quad \frac{dH}{dt} = \sum_{k=1}^{N} Q_k^{NC} \dot{q}_k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}$$

• QUINDI: SE $\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} Q_k^{NC} \dot{q}_k = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \end{cases}$ $\xrightarrow{\text{ALLORA}}$ $\frac{dH}{dt} = 0 \longrightarrow H = \text{cost}$

$\longrightarrow$ H É UN INTEGRALE PRIMO DEL MOTO (INTEGRALE GENERALIZZATO DELL' ENERGIA)

• ESEMPIO CHE MOSTRA CHE $H \neq E$ IN GENERALE.



~ PIANO ORIZZONTALE

~ P, m SCORRE LUNGO LA GUIDA

gdl = 1 (c.L.: s)

• VINCOLI: OLONOMI E IDEALI

• NON CI SONO FORZE ATTIVE: $\sum_{i=1}^{n} Q_k^{NC} \dot{q}_k = 0$ / $V = 0$

• $\mathcal{L} = T - \cancel{V} = \frac{1}{2} m (\dot{s}^2 + \omega^2 s^2) \longrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \longrightarrow H = \text{cost}$

• $\begin{cases} H = \sum_{i=1}^{n} p_k \dot{q}_k - \mathcal{L} = p_s \dot{s} - \mathcal{L} = m \dot{s}^2 - \frac{1}{2} m (\dot{s}^2 + \omega^2 s^2) \\ p_s = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{s}} = m \dot{s} \end{cases}$

$\longrightarrow H = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 s^2 = \text{cost}$

- OSS1: $E = T + V = T = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 s^2$

  $\longrightarrow H \neq E$

- OSS2:
  - VINCOLI IDEALI ✓
  - FORZE CONSERVATIVE ✓
  - VINCOLI FISSI ✗ $\longrightarrow$ I VINCOLI SONO MOBILI: $\Pi^{est,r} \neq 0$

  $\Rightarrow E$ NON SI CONSERVA

- **TEO**: $H = E$ QUANDO:
  - VINCOLI IDEALI
  - FORZE CONSERVATIVE
  - VINCOLI FISSI

- **DIM**:

- 2 STEP:

1) STRUTTURA DI T PER SISTEMA OLONOMO SOGGETTO A VINCOLI FISSI

2) $H = E$

1) ~ $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \underline{v_i}^2$ a)

~ SE SISTEMA OLONOMO: $\underline{r_i}(q_1, \dots, q_n, t) \longrightarrow \underline{v_i} = \frac{d\underline{r_i}}{dt} = \frac{\partial \underline{r_i}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \underline{r_i}}{\partial q_k} \dot{q}_k$

~ VINCOLI FISSI: $\frac{\partial \underline{r_i}}{\partial t} = 0 \longrightarrow \underline{v_i} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \underline{r_i}}{\partial q_k} \dot{q}_k$

~ SOSTITUISCO IN a) $T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \underline{v_i} \circ \underline{v_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \underline{r_i}}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \circ \left(\sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial \underline{r_i}}{\partial q_\ell} \dot{q}_\ell \right)$

CAMBIATO INDICE PER GENERALIZZARE NEL CASO LA TERNA NON FOSSE DX

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k} \dot{q}_k \right) \circ \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_l} \dot{q}_l \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \Bigg[\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k} \circ \frac{\partial r_i}{\partial q_l} \right)}_{a_{kl}} \Bigg] \dot{q}_k \dot{q}_l =$$

DEFINIAMO $a_{kl} \triangleq \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial r_i}{\partial q_k} \circ \frac{\partial r_i}{\partial q_l} \right)$

OSS 1: $a_{kl} = a_{lk}$ PERCHÉ PRODOTTO SCALARE É COMMUTATIVO

OSS 2: $\underline{r}_i (q_1, q_n) \longrightarrow \frac{\partial r_i}{\partial q_k}, \frac{\partial r_i}{\partial q_l} (q_1, \dots, q_n) \longrightarrow a_{kl} (q_1, \dots, q_n)$

~ QUINDI: $T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} (q_1, \dots, q_n) \dot{q}_k \dot{q}_l$

2) ~ TORNIAMO AD H: $H = \sum_{k=1}^{n} p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}$

DOVE $p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial (T - V)}{\partial \dot{q}_k} - \cancel{\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}}$

$V (q_1, \dots, q_n)$ ⇝ DERIVATA POSIZIONALE, OSSIA DIPENDE DA $q_1, \dots, q_n$ MA NON DALLE SUE DERIVATE

$$= \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k}$$

~ ESEMPIO: $\left. \begin{array}{l} q_1, q_2 \\ 2 \text{ c.c.} \end{array} \right\} T = \frac{1}{2} a_{11} \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} a_{21} \dot{q}_2 \dot{q}_1 + \frac{1}{2} a_{22} \dot{q}_2^2 =$

$$= \frac{1}{2} \left(a_{11} \dot{q}_1^2 + a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{21} \dot{q}_2 \dot{q}_1 + a_{22} \dot{q}_2^2 \right) =$$

COMMUTATIVA

$$= \frac{1}{2} \left(a_{11} \dot{q}_1^2 + 2 a_{12} \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22} \dot{q}_2^2 \right)$$

~ IN GENERALE: $p_k = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, \dot{q}_l$

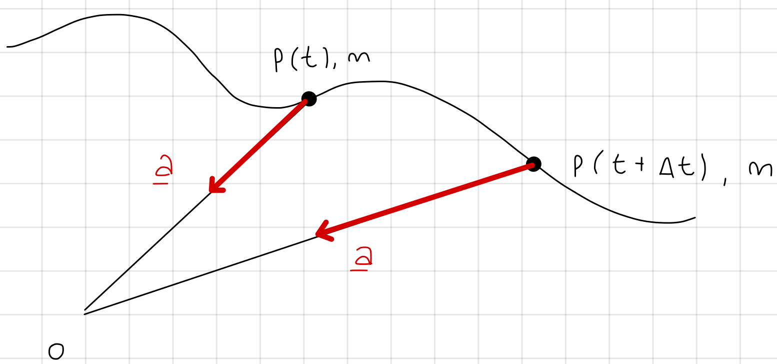
~ SOSTITUIAMO IN H:

$$H = \sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k \sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, \dot{q}_l - \mathcal{L} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}\, \dot{q}_k\, \dot{q}_l}_{2T} - \mathcal{L}$$

~ $H = 2T - L = 2T - T + V = T + V = E = \text{cost}$

$\boxed{\text{MOTI CENTRALI}}$

• **DEFINIZIONE:** DATO UN PUNTO P, m E UN' ORIGINE O UN MOTO SI DICE CENTRALE SE L'ACCELERAZIONE $\underline{a}$ DI P HA SEMPRE LA STESSA DIREZIONE DI $(P-O)$, OSSIA $\underline{a} \parallel (P-O)\ \forall t$



• OSS 1: O È DETTO **CENTRO DEL MOTO**

O NON DEVE ESSERE FISICO, È SOLO UN PUNTO GEOMETRICO CHE MI ATTIRA

• OSS 2: $(P-O) \wedge \underline{a} = 0\ \forall t$

• **PROPRIETÀ:**

P1) OGNI MOTO CENTRALE È UN MOTO PIANO, OVVERO LA TRAIETTORIA GIACE SU UN PIANO FISSO

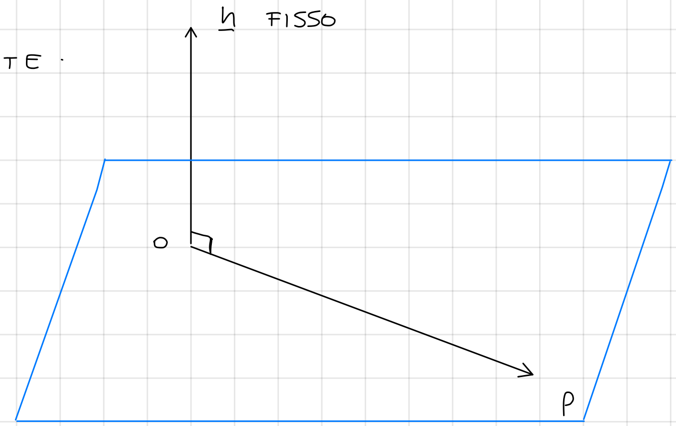
• **DIM:**

~ CONSIDERO: $h = (P-O) \wedge \underline{v}$

~ CALCOLO: $\frac{dh}{dt} = \underline{v} \wedge \underline{v} + \underbrace{(P-O) \wedge \underline{a}}_{\text{MOTO CENTRALE}} = 0$

$\longrightarrow \quad h = (P-O) \wedge \underline{v} = \text{cost}$

~ GRAFICAMENTE:

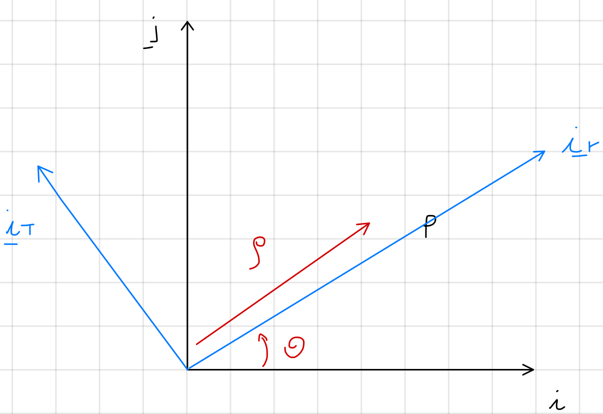


h FISSO, $(P-O) \perp h$ $\forall t$ PER DEFINIZIONE $\Rightarrow$ $(P-O) \in$ PIANO $\pi \perp h$ $\forall t$

- π UNIVOCAMENTE DEFINITO DA O, h, MA SICCOME $h = \text{cost}$ È DEFINITO DA $(P-O)$ E v INIZIALE. QUINDI PER DEFINIRE π:

1) ORIGINE
2) POSIZIONE DI P
3) VELOCITÀ DI P

P2) DATO CHE IL MOTO È PIANO, CI METTIAMO SU TALE PIANO:



~ USO COORDINATE POLARI:

$\sim (P-O) = \rho \, \underline{i}_r$

NOTA: POSSO USARE C. POLARI SOLO PERCHÉ HO DIM. CHE È UN MOTO PIANO $\xrightarrow{\text{ALTRIMENTI}}$ C. SFERICHE

~ CALCOLIAMO $\underline{v}$: $\underline{v} = \dfrac{d(P-O)}{dt} = \dot{\rho}\,\underline{i}_r + \rho\,\dfrac{d\underline{i}_r}{dt} =$

~ $\dfrac{d\underline{i}_r}{dt} = \rho\left(-\dot{\theta}\sin\theta\,\underline{i} + \dot{\theta}\cos\theta\,\underline{j}\right) = (-\sin\theta\,\underline{i} + \cos\theta\,\underline{j})\,\dot{\theta} = \dot{\theta}\,\underline{i}_\theta$

$\longrightarrow \quad \underline{v} = \dot{\rho}\,\underline{i}_r + \dot{\theta}\,\underline{i}_\theta$

~ AVEVAMO TROVATO CHE $h = cost \longrightarrow$ SCRIVO h IN COORDINATE POLARI:

$$\underline{h} = (P-O)\wedge\underline{v} = \rho\,\underline{i}_r \wedge\left(\dot{\rho}\,\underline{i}_r + \dot{\theta}\,\underline{i}_\theta\right) = \rho^2\dot{\theta}\,\underbrace{\underline{i}_r\wedge\underline{i}_\theta}_{k /\!/ h} = cost$$

$$\longrightarrow \boxed{\rho^2\dot{\theta} = cost}$$

• OSS: PROCEDURA ALTERNATIVA:

~ CALCOLO $\underline{a} = \dfrac{d\underline{v}}{dt} = \ddot{\rho}\,\underline{i}_r + \dot{\rho}\,\dfrac{d\underline{i}_r}{dt} + \ddot{\theta}\,\underline{i}_\theta + \dot{\theta}\,\dfrac{d\underline{i}_\theta}{dt} =$

$= \ddot{\rho}\,\underline{i}_r + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\,\underline{i}_\theta + \rho\ddot{\theta}\,\underline{i}_\theta + \rho\dot{\theta}\,\dfrac{d\underline{i}_\theta}{dt}$

~ MA $\underline{i}_\theta = -\sin\theta\,\underline{i} + \cos\theta\,\underline{j} \longrightarrow \dfrac{d\underline{i}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\cos\theta\,\underline{i} - \dot{\theta}\sin\theta\,\underline{j} =$

$= -\dot{\theta}\,(\cos\theta\,\underline{i} + \sin\theta\,\underline{j}) = -\dot{\theta}\,\underline{i}_r$

~ SOSTITUIAMO IN $\underline{a}$: $\underline{a} = \ddot{\rho}\,\underline{i}_r + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\,\underline{i}_\theta + \rho\ddot{\theta}\,\underline{i}_\theta - \rho\dot{\theta}^2\,\underline{i}_r =$

$= \underbrace{\left(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2\right)}_{\text{ACC. RADIALE}}\underline{i}_r + \underbrace{\left(\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\right)}_{\text{ACC. TANGENZIALE}}\underline{i}_\theta$

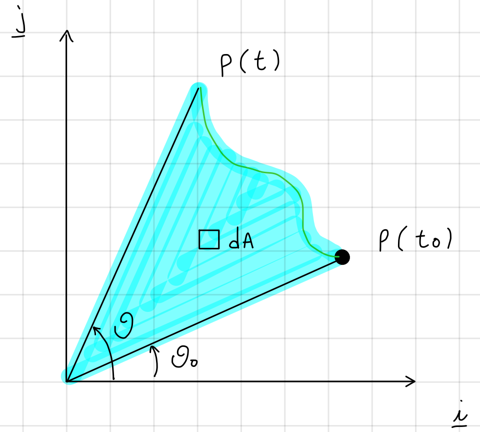
~ MA IL MOTO É CENTRALE: $\underline{a} /\!/ (P-O) \longrightarrow a /\!/ \underline{i}_r \longrightarrow a_\theta = 0$

$\rho\ddot{\theta} + 2\dot{\rho}\dot{\theta} = 0$ a)

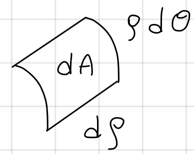
~ PROVIAMO A CALCOLARE: $\dfrac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\theta}\right) = 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho^2\ddot{\theta} = \rho\,(2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})$

~ a) DIVENTA: $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\theta}\right) = 0 \longrightarrow \dfrac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\theta}\right) = 0 \longrightarrow \rho^2\dot{\theta} = cost$

COINCIDE CON AFFERMARE CHE LA VELOCITÀ AREOLARE É COSTANTE



~ CALCOLIAMO AREA SOTTESA:



$dA = \rho \, d\theta \, d\rho$

~ $A = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' \int_0^{\rho(\theta')} \rho' \, d\rho' = \frac{1}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} \rho^2(\theta') \, d\theta'$

~ $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \rho^2(\theta)$

~ $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dA}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\theta}$

$\longrightarrow$ QUINDI $\rho^2 \dot{\theta} = cost \longrightarrow \boxed{\frac{dA}{dt} = cost}$ KEPLERO: SPAZZO AREE UGUALI IN TEMPI UGUALI

- **FORMULA DI BINET:**

~ ABBIAMO VISTO: $\underline{a} = a_r \underline{i}_r + \cancel{a_\theta} \, i_\theta$ MOTO CENTRALE

$\hookrightarrow$ IL MOTO È CARATTERIZZATO DALLA SOLA ACCELERAZIONE RADIALE:

$$\boxed{a_r = \ddot{\rho} - \rho \, \dot{\theta}^2}$$

QUESTA FORMULA METTE IN RELAZIONE $a_r \longrightarrow \rho(t), \theta(t)$

~ POSSIAMO RIFORMULARE a_r PER AVERE UNA RELAZIONE: $a_r = \rho(\theta)$ TRAIETTORIA

TRAIETTORIA: LUOGO DEI PUNTI PERCORSI DAL CORPO, MA NON HA UNA RELAZIONE COL TEMPO. NON MI DICE DOVE SONO A UN DATO $\tilde{t}$

~ $a_r = \ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2$, MA $\| h \| = \rho^2 \dot{\theta} = cost = h \longrightarrow \dot{\theta} = \frac{h}{\rho^2}$

~ SOSTITUISCO:

$$a_r = \ddot{\rho} - \rho \frac{h^2}{\rho^4} = \ddot{\rho} - \frac{h^2}{\rho^3}$$

~ $$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\rho}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{d\rho}{d\theta} \frac{h}{\rho^2} = h \cdot \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{d\rho}{d\theta} \right)$$

~ NOTIAMO CHE: $\dot{\rho} = h \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{1}{\rho} \right) = -h \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{\rho} \right)$

~ $$\ddot{\rho} = \frac{d\dot{\rho}}{dt} = \frac{d\dot{\rho}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{h^2}{\rho^2} \frac{d\dot{\rho}}{d\theta} = \frac{h^2}{\rho^2} \frac{d}{d\theta} \left[-\frac{h}{d\theta} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right] =$$

$= -\frac{h^2}{\rho^2} \frac{dh}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) \longrightarrow$ LA SOSTITUISCO IN a_r:

$$a_r = -\frac{h^2}{\rho^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) - \frac{h^2}{\rho^3}$$

$$\boxed{a_r = -\frac{h^2}{\rho^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} \right]}$$

FORMULA DI BINET

• OSS: DATO $a_r(\rho, \theta) \xrightarrow{\text{INTEGRO}} \rho(\theta)$ = TRAIETTORIA

SE VOGLIAMO $\rho(t)$ BASTA TROVARE $\theta(t)$:

$$\dot{\theta} = \frac{h}{\rho^2} \longrightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{\rho(\theta)^2} \longrightarrow \rho^2(\theta)\, d\theta = h\, dt$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE A VARIABILI SEPARABILI

INTEGRAZIONE DI BINET NEL CASO DI MOTI KEPLERIANI

- $a_r = -\dfrac{k}{\rho^2}$

- $$-\frac{h^2}{\cancel{\rho^2}}\left[\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\right] = -\frac{k}{\cancel{\rho^2}}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)+\frac{1}{\rho} = \frac{k}{h^2} \longrightarrow \text{CAMBIO VARIABILI: } w = \frac{1}{\rho}$$

$$\boxed{\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = \frac{k}{h^2}}$$ OSCILLATORE ARMONICO CON FORZANTE COSTANTE

- SOLUZIONE PARTICOLARE: $w_P = \dfrac{k}{h^2}$

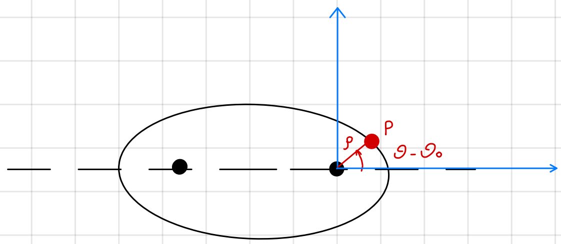
$$\longrightarrow w(\theta) = w_0 + w_P = A\cos(\theta-\theta_0) + \frac{k}{h^2}, \quad \text{MA } w = \frac{1}{\rho}$$

- QUINDI: $$\rho(\theta) = \frac{1}{\frac{k}{h^2} + A\cos(\theta-\theta_0)} = \frac{\frac{h^2}{k}}{1 + \frac{Ah^2}{k}\cos(\theta-\theta_0)} = \frac{p}{1 + e\cos(\theta-\theta_0)}$$

CONICA

$$\begin{cases} p = \dfrac{h^2}{k} & \text{SEMILATO RETTO DELLA CONICA} \\ \\ e = \dfrac{Ah^2}{k} = Ap \geq 0 & \text{ECCENTRICITÀ DELLA CONICA} \end{cases}$$

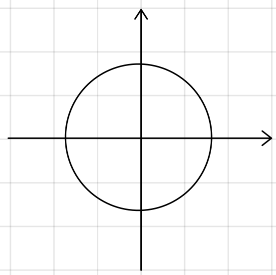
- GRAFICAMENTE:



- FUOCHI

<u>CATALOGAZIONE DELLE ORBITE</u> $\quad e \geq 0 \quad , \quad \rho(\vartheta) = \dfrac{p}{1 + e\cos(\vartheta-\vartheta_0)}$

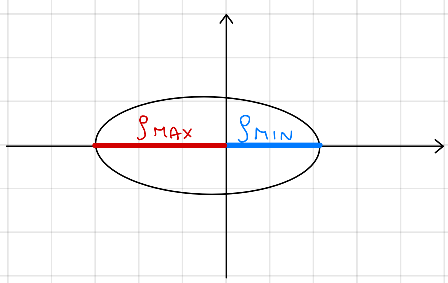
1) $e = 0 \longrightarrow \rho = cost$



2) $0 < e < 1 \longrightarrow 1 + e\cos(\vartheta - \vartheta_0) > 0$

- ρ_{MIN} QUANDO $\cos(\vartheta - \vartheta_0) = 1 \qquad \vartheta - \vartheta_0 = 0 \longrightarrow \rho_{MIN} = \dfrac{p}{1+e}$

- ρ_{MAX} QUANDO $\cos(\vartheta - \vartheta_0) = -1 \qquad \vartheta - \vartheta_0 = \pi \longrightarrow \rho_{MAX} = \dfrac{p}{1-e}$

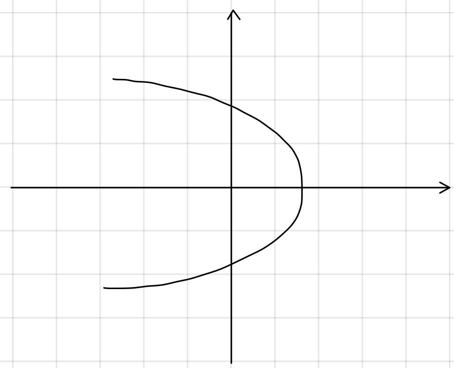


3) $e = 1 \longrightarrow 1 + \cos(\vartheta - \vartheta_0) \geq 0$

- $1 + \cos(\vartheta - \vartheta_0) = 0$

ρ_{MIN} QUANDO $\cos(\vartheta - \vartheta_0) = 1$ $\quad \vartheta - \vartheta_0 = 0 \longrightarrow \rho_{MIN} = \dfrac{p}{2}$

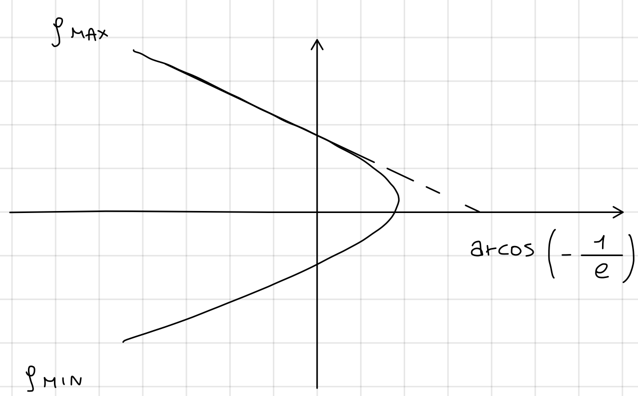
ρ_{MAX} QUANDO $\cos(\vartheta - \vartheta_0) = -1$ $\quad \vartheta - \vartheta_0 = \pi \longrightarrow \rho_{MAX} = \infty$



4) $e > 1 \longrightarrow 1 + \cos(\vartheta - \vartheta_0) \gtrless 0$

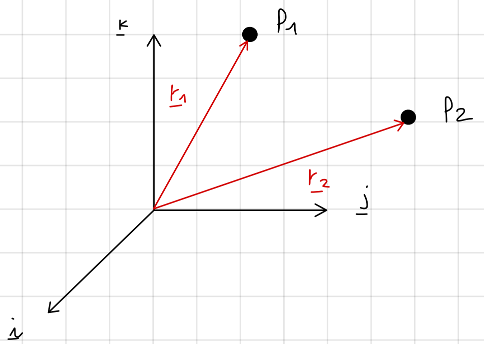
ρ_{MIN} QUANDO $\cos(\vartheta - \vartheta_0) = 1$ $\quad \vartheta - \vartheta_0 = 0$ $\quad \rho_{MIN} = \dfrac{p}{1+e}$

ρ_{MAX} QUANDO $\cos(\vartheta - \vartheta_0) \longrightarrow 0$ $\quad \cos(\vartheta - \vartheta_0) \longrightarrow -\dfrac{1}{e}$



IL PROBLEMA DEI DUE CORPI NEL FORMALISMO LAGRANGIANO

- DATI P_1, m_1 E P_2, m_2



~ $\#$ gdl $= 6 \longrightarrow \underline{r}_1, \underline{r}_2$ COORDINATE LIBERE

~ Hp: PUNTI INTERAGISCONO CON FORZE CONSERVATIVE DI ENERGIA POTENZIALE $V(\|r_2 - r_1\|)$

- NO VINCOLI
  FORZE CONSERVATIVE $\Bigg\}$ MOTO DESCRITTO DA $\mathcal{L} = T - V$

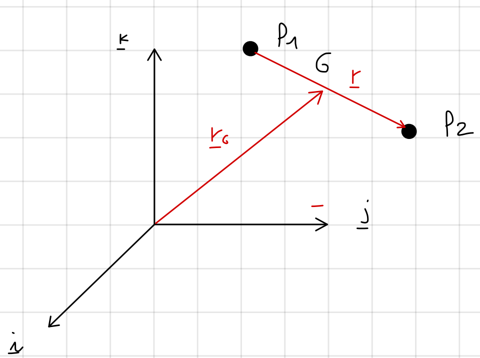
- $T = \dfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \dfrac{1}{2} m_2 v_2^2 = \dfrac{1}{2} m_1 \|\dot{\underline{r}}_1\|^2 + \dfrac{1}{2} m_2 \|\dot{\underline{r}}_2\|^2$

- $V(\|r_2 - r_1\|)$

- $\mathcal{L} = \dfrac{1}{2} m_1 \|\underline{r}_1\|^2 + \dfrac{1}{2} m_2 \|\underline{r}_2\|^2 - V(\|\underline{r}_2 - \underline{r}_1\|)$

- NOTO CHE $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_1} \neq 0$, $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial r_2} \neq 0 \longrightarrow$ NON SONO IGNORABILI

- CAMBIO COORDINATE LIBERE:



$\underline{r}_G = \underline{x}_G\, \underline{i} + y_G\, \underline{j} + z_G\, \underline{k}$

$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k}$

DOVE $\begin{cases} \underline{r}_G = \dfrac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m} \\ \underline{r} = \underline{r}_2 - \underline{r}_1 \end{cases}$

• TROVO $r_1(\underline{r}, \underline{r}_G)$ E $r_2(\underline{r}, \underline{r}_G)$:

$$\begin{cases} m_1 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2 = M \underline{r}_G & a \\ -m_2 \underline{r}_1 + m_2 \underline{r}_2 = m_2 \underline{r} & b \end{cases}$$

$\sim a - b$: $M \underline{r}_1 = M \underline{r}_G - m_2 \underline{r} \longrightarrow \underline{r}_1 = \underline{r}_G - \frac{m_2}{M} \underline{r}$

$$\longrightarrow \dot{\underline{r}}_1 = \dot{\underline{r}}_G - \frac{m_2}{M} \dot{\underline{r}}$$

$\sim b$: $\underline{r}_2 = \underline{r}_1 + \underline{r} = \underline{r}_G - \frac{m_2}{M} \underline{r} + \underline{r} \longrightarrow \underline{r}_2 = \underline{r}_G + \frac{m_1}{M} \underline{r}$

$$\longrightarrow \dot{\underline{r}}_2 = \dot{\underline{r}}_G + \frac{m_1}{M} \dot{\underline{r}}$$

• SOSTITUISCO IN T :

$$\sim T = \frac{1}{2} m_1 \| \dot{\underline{r}}_1 \|^2 + \frac{1}{2} m_2 \| \dot{\underline{r}}_2 \|^2 = \frac{1}{2} m_1 \left\| \dot{\underline{r}}_G - \frac{m_2}{M} \dot{\underline{r}} \right\|^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} m_2 \left\| \dot{\underline{r}}_G + \frac{m_1}{M} \dot{\underline{r}} \right\|^2 \overset{\text{CALCOLI}}{=} \dots = \frac{1}{2} M \dot{\underline{r}}_G^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{M} \dot{\underline{r}}^2 =$$

MASSA RIDOTTA

$$\longrightarrow T = \frac{1}{2} M \dot{\underline{r}}_G^2 + \frac{1}{2} m_R \dot{\underline{r}}^2$$

• PER QUANTO RIGUARDA V : $V(\| \underline{r}_2 - \underline{r}_1 \|) = V(\| \underline{r} \|) = V(r)$

<u>QUINDI</u> : $\mathcal{L} = \frac{1}{2} M \dot{\underline{r}}_G^2 + \frac{1}{2} m_R \dot{\underline{r}}^2 - V(r)$

• OSS 1 : $\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} M \dot{\underline{r}}_G^2}_{\mathcal{L}_G} + \underbrace{\frac{1}{2} m_R \dot{\underline{r}}^2 - V(r)}_{\mathcal{L}_r} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_r$

• OSS 2: $\mathcal{L}(r, \underline{\dot r}, \dot r_G)$

~ QUINDI $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{r}_G} = 0 \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_G} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{L}}{y_G} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_G} = 0 \end{cases} \longrightarrow$ $\underline{r}_G = x_G \underline{i} + y_G \underline{j} + z_G \underline{k}$ È VETTORE DI COORDINATE LIBERE IGNORABILI

~ $p_G = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot r_G} = cost \longrightarrow \begin{cases} p_{xG} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot x_G} = cost \\[2ex] p_{yG} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot y_G} = cost \\[2ex] p_{z,G} = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot z_G} = cost \end{cases}$

~ MA:

$$\underline{p}_{xG} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot x_G} = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot x_G} = \frac{\partial}{\partial \dot x_G}\left[\frac{1}{2} M \dot r_G^2\right] = \frac{\partial}{\partial \dot x_G}\left[\frac{1}{2} M \left(\dot x_G^2 + \dot y_G^2 + \dot z_G^2\right)\right]$$

$$\underline{p}_{yG} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot y_G} = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot y_G} = \frac{\partial}{\partial \dot y_G}\left[\frac{1}{2} M \dot r_G^2\right] = \frac{\partial}{\partial \dot y_G}\left[\frac{1}{2} M \left(\dot x_G^2 + \dot y_G^2 + \dot z_G^2\right)\right]$$

$$\underline{p}_{zG} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot z_G} = \frac{\partial \mathcal{L}_G}{\partial \dot z_G} = \frac{\partial}{\partial \dot z_G}\left[\frac{1}{2} M \dot r_G^2\right] = \frac{\partial}{\partial \dot z_G}\left[\frac{1}{2} M \left(\dot x_G^2 + \dot y_G^2 + \dot z_G^2\right)\right]$$

$$\longrightarrow \quad \underline{p}_G = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \underline{\dot r}_G} = M \dot r_G = cost$$

• OSS: $M \dot r_G = cost \longrightarrow \dot r_G = cost \longrightarrow$ G O È FERMO O SI MUOVE DI MRU

$\longrightarrow \underline{r}_G = \underline{r}_G(t_0) + \dfrac{\underline{p}_G}{M}(t - t_0)$ DOVE $\underline{p}_G = cost = \underline{p}_G(t_0) = M \dot r_G(t_0)$

• MOTO RELATIVO:

~ APPLICO LAGRANGE SU r:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial r} = 0 \qquad \text{DOVE} \quad \mathcal{L}_r = \frac{1}{2} m_r \dot{r}^2$$

CON $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j} + z\underline{k} \longrightarrow r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2}$

$$\longrightarrow \dot{r} = \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)^{1/2}$$

$$\longrightarrow \mathcal{L}_r = \frac{1}{2} m_r \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) - V(r)$$

~ LAGRANGE SU x:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial x} = 0 \qquad \text{DOVE} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m_r \dot{x} \longrightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \dot{x}} = m_r \ddot{x}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{dV}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}$$

MA $r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{1/2} \longrightarrow \dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2}} = \dfrac{x}{r}$

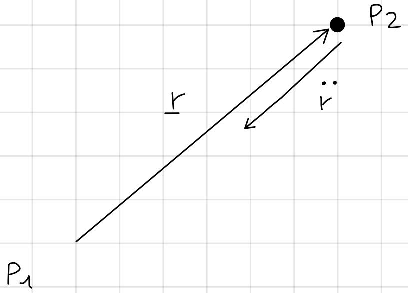
$$\longrightarrow \frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial x} = -\frac{dV}{dr}\frac{x}{r}$$

• SU TUTTE LE COMPONENTI:

$$\begin{cases} m_r \ddot{x} = -\dfrac{dV}{dr}\dfrac{x}{r} \\ m_r \ddot{y} = -\dfrac{dV}{dr}\dfrac{y}{r} \\ m_r \ddot{z} = -\dfrac{dV}{dr}\dfrac{z}{r} \end{cases} \xrightarrow{\text{FORMA VETTORIALE}} \boxed{m_r \ddot{\underline{r}} = -\frac{dV}{dt}\frac{\underline{r}}{r}}$$

VERSORE // $\underline{r}$

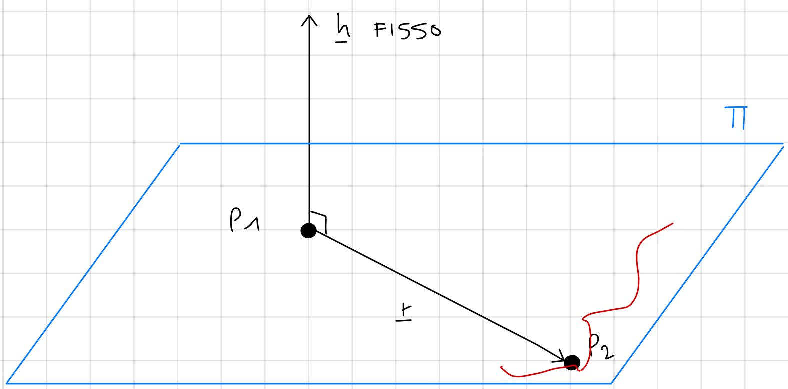
• QUINDI :



IL MOTO RELATIVO È GOVERNATO DA UN' EQUAZIONE DEL MOTO CHE HA LA FORMA DI UN MOTO CENTRALE

$\longrightarrow$ VALGONO SU $\underline{r}$ LE STESSE PROPRIETÀ DEI MOTI CENTRALI :

1) IL MOTO RELATIVO DI P_1, P_2 È UN MOTO PIANO :

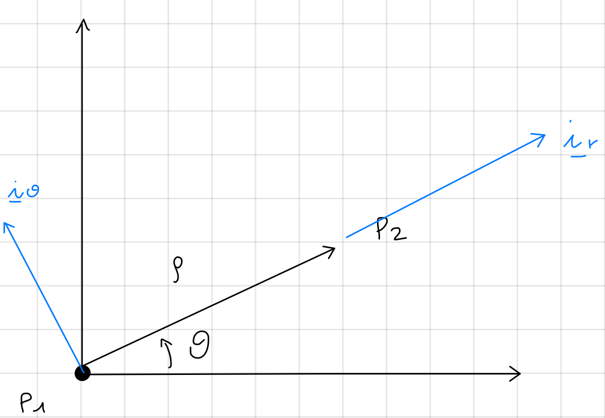


$\underline{r} \perp \underline{h}$ CHE È FISSO

$\downarrow$

$r \in \Pi \perp \underline{h}$ FISSO

2) SE IL MOTO È PIANO $\longrightarrow$ DESCRIVO TUTTO SUL PIANO CON COORDINATE POLARI



$$\begin{cases} \underline{r} = \rho \, \underline{i}_r \\ \dot{\underline{r}} = \dot{\rho} \, \underline{i}_r + \rho \dot{\theta} \, \underline{i}_\theta \end{cases}$$

$$\sim \mathcal{L}_r = \frac{1}{2} m_r \dot{r}^2 - V(r) = \frac{1}{2} m_r \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2 \right) - V(\rho)$$

• OSS: $\frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \theta} = 0 \longrightarrow \theta$ È COORDINATA LIBERA IGNORABILE

$$\longrightarrow p_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \dot{\theta}} = \text{cost}$$

MA $\frac{\partial \mathcal{L}_r}{\partial \dot{\theta}} = m r \rho^2 \dot{\theta} \longrightarrow \boxed{\rho^2 \dot{\theta} = \text{cost}}$

CINEMATICA DEL CORPO RIGIDO IN 3D

• RICHIAMI IN 2D: DATO UN C.R. SUL PIANO: IL MOTO DEL C.R. È DESCRIVIBILE MEDIANTE UNA TERNA SOLIDALE.

1) SCEGLIAMO P_1, P_2 NON COINCIDENTI E CONSIDERIAMO $O' \equiv P_1$

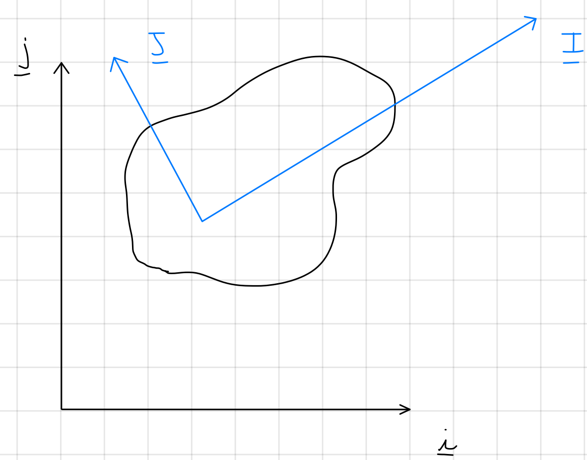
2) DEFINIAMO $\underline{I} = \frac{P_2 - P_1}{\| P_2 - P_1 \|}$

3) PRENDIAMO $\underline{J} \perp \underline{I}$ E APPARTENENTE A PIANO $\underline{i}, \underline{j}$

4) $\underline{K} = \underline{I} \wedge \underline{J}$

$\longrightarrow$ CONSEGUENZA: $\forall \underline{P}$ PUÒ ESSERE IDENTIFICATO DA x', y' SU $\underline{I}, \underline{J}$

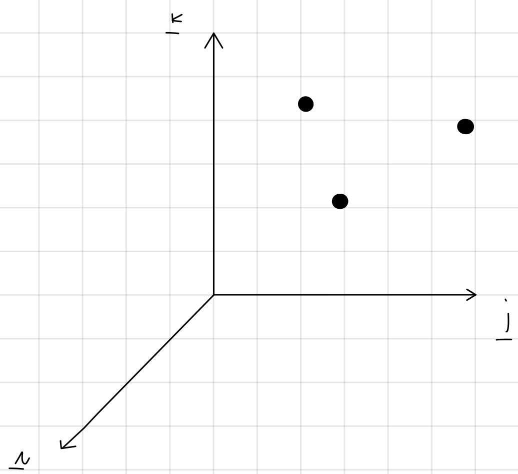
T.C. $(P-O) = (O'-O) + (P-O') = x_{O'} \underline{i} + y_{O'} \underline{j} + \underbrace{x'}_{\text{COSTANTI}} \underline{I}' + \underbrace{y'}_{\text{COSTANTI}} \underline{J}$

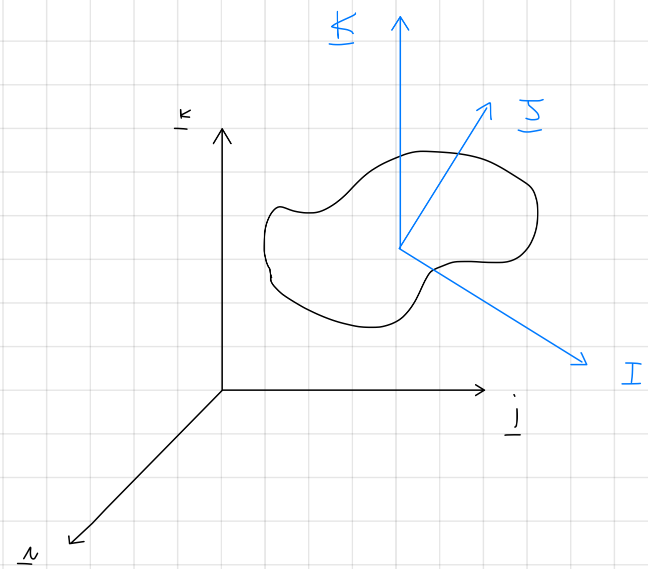


$\longrightarrow P(t)$ UNIVOCAMENTE DETERMINATO DA $\underbrace{x_{O'}(t), y_{O'}(t), I(t), J(t)}_{\text{6 PARAMETRI}}$

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ \ \|\underline{I}\| = 1 \\ 2)\ \ \|\underline{J}\| = 1 \\ 3)\ \ \underline{I} \cdot \underline{J} = 0 \end{array}\right\} \quad 3 \text{ VINCOLI} \longrightarrow gdl = 6 - 3 = 3$$

• CASO 3D:





• IL MOTO DEL C.R. PUÓ ESSERE DESCRITTO CON TERNA SOLIDALE

1) SCEGLIAMO P_1, P_2, P_3 NON ALLINEATI E CONSIDERO $O' \equiv P_1$

2) DEFINIAMO: $\underline{I} = \dfrac{P_2 - P_1}{\|P_2 - P_1\|}$

3) P_1, P_2, P_3 DEFINISCONO UN PIANO $\longrightarrow$ SCELGO $\underline{J} \perp \underline{I}$ E $\in$ AL PIANO DI P_1, P_2, P_3

4) $\underline{K} = \underline{I} \wedge \underline{J}$

$\longrightarrow$ CONSEGUENZA: QUALSIASI P É UNIVOCAMENTE DETERMINATO DA COMPONENTI x', y', z' IN $\underline{I}, \underline{J}, \underline{K}$

$\longrightarrow$ $(P - O) = (O' - O) + (P - O') = x_o \underline{i} + y_o \underline{j} + z_o \underline{k} + x' \underline{I} + y' \underline{J} + z' \underline{K} =$

$\rightsquigarrow$ $P(t)$ É UNIVOCAMENTE DETERMINATA DA $\underbrace{x_{o'}(t), y_{o'}(t), z_{o'}(t), \underline{I}(t), \underline{J}(t), \underline{K}(t)}_{12 \text{ VARIABILI}}$

- MA C.R. IN 3D HA 6 gdl: INFATTI $\underline{I}$, $\underline{J}$, $\underline{K}$ DEVONO SODDISFARE:

$$\begin{cases} \|\underline{I}\| = 1 & \underline{I} \circ \underline{J} = 0 \\ \|\underline{J}\| = 1 & \underline{J} \circ \underline{K} = 0 \\ \|\underline{K}\| = 1 & \underline{K} \circ \underline{I} = 0 \end{cases} \longrightarrow 6 \text{ VINCOLI} \rightsquigarrow gdl = 12 - 6 = 6$$

- ANALOGAMENTE AL MOTO 2D, CI ASPETTIAMO DI POTER DESCRIVERE $P(t)$ CON:

$$x_{o'}(t), \quad y_{o'}(t), \quad z_{o'}(t), \quad \alpha(t), \quad \beta(t), \quad \gamma(t)$$

- ATTO DI MOTO RIGIDO IN 3D:

$$\rightsquigarrow (P-O) = (O'-O) + (P-O') = x_o \underline{i} + y_o \underline{j} + z_o \underline{k} + x' \underline{I} + y' \underline{J} + z' \underline{K}$$

$\rightsquigarrow$ PROIETTO SU $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$:

$$\begin{cases} x = (P-O)\circ \underline{i} = x_{o'} + x' \underbrace{(\underline{I} \circ \underline{i})}_{I_x} + y' \underbrace{(\underline{J} \circ \underline{i})}_{J_x} + z' \underbrace{(\underline{K} \circ \underline{i})}_{K_x} \\ y = (P-O)\circ \underline{j} = y_{o'} + x' \underbrace{(\underline{I} \circ \underline{j})}_{I_y} + y' \underbrace{(\underline{J} \circ \underline{j})}_{J_y} + z' \underbrace{(\underline{K} \circ \underline{j})}_{K_y} \\ z = (P-O)\circ \underline{k} = z_{o'} + x' \underbrace{(\underline{I} \circ \underline{k})}_{I_z} + y' \underbrace{(\underline{J} \circ \underline{k})}_{J_z} + z' \underbrace{(\underline{K} \circ \underline{k})}_{K_z} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ SCRIVIAMO IN FORMA COMPATTA DEFINENDO I SEGUENTI VETTORI:

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \underline{x}_{o'} = \begin{pmatrix} x_{o'} \\ y_{o'} \\ z_{o'} \end{pmatrix} \qquad \underline{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} I_x & J_x & K_x \\ I_y & J_y & K_y \\ I_z & J_z & K_z \end{pmatrix}$$ MATRICE DI ROTAZIONE

$$\Longrightarrow \quad \underline{x} = \underline{x}_{o'} + \hat{R}\, \underline{x}' = \underline{x}_{o'}(t) + \hat{R}(t)\, \underline{x}'$$

• OSS: SI DIMOSTRA CHE $\hat{R}$ È ORTOGONALE

• DIM: $\hat{R}^{-1} = \hat{R}^T$ DEF. DI MATRICE ORTOGONALE

1) SI NOTA CHE $\hat{R} \cdot \hat{R}^T = \hat{I}d$

2) SE $\hat{R}\hat{R}^T = Id$ ALLORA ANCHE $\det(\hat{R}\hat{R}^T) = \det(\hat{I}d)$

~ MA $\begin{cases} \det(\hat{R}\hat{R}^T) = \det^2 \hat{R} \\ \det(\hat{I}d) = 1 \end{cases}$

$\longrightarrow \det^2 \hat{R} = 1 \longrightarrow \det \hat{R} = \pm 1 \neq 0$ INVERTIBILE

~ $\hat{R}$ INVERTIBILE $\longrightarrow \exists\ \hat{R}^{-1}$ T.C. $\hat{R}^{-1} \cdot \hat{R} = \hat{R}\hat{R}^{-1} = \hat{I}d$

~ $\hat{R}^T \hat{R} = Id$ MOLTIPLICO AMBO I LATI $\underbrace{\hat{R}^T \hat{R} \hat{R}^{-1}}_{\hat{I}d} = I \hat{R}^{-1}$

$\longrightarrow R^T = R^{-1}$ ORTOGONALE!

• CONSEGUENZA: $\underline{x} = \underline{x}_{o'} + \hat{R}\underline{x}'$ È INVERTIBILE:

$\longrightarrow \hat{R}\underline{x}' = \underline{x} - \underline{x}_{o'} \longrightarrow x' = \hat{R}^{-1}(\underline{x} - \underline{x}_{o'}) \longrightarrow \underline{\underline{x}' = \hat{R}^T(\underline{x} - \underline{x}_o)}$

• PASSO ALL'ATTO DI MOTO: VELOCITÀ: $(P-O) = \underline{x} = \underline{x}_{o'} + \hat{R}\underline{x}'$

~ $\dfrac{d(P-O)}{dt} = v_P = \dfrac{d x_{o'}}{dt} + \dfrac{d\hat{R}}{dt} \underbrace{R^T(\underline{x} - \underline{x}_{o'})}_{x'} = V_{o'} + \dfrac{d\hat{R}}{dt} \hat{R}^T (P - O')$

~ DEFINIAMO $\hat{\Omega} = \dfrac{d\hat{R}}{dt}\hat{R}^T \longrightarrow \boxed{\underline{V}_P = \underline{V}_{o'} + \Omega'(P-O')}$

• PROP: $\hat{\Omega}$ È EMISIMMETRICA: $\hat{\Omega} = -\hat{\Omega}^T$

DIM:

~ $\hat{R}^{-1} = \hat{R}^T \longrightarrow \hat{R}\hat{R}^T = \hat{I}d$

~ DERIVIAMO NEL TEMPO: $\dfrac{d}{dt}\hat{R}\hat{R}^T = \dfrac{d}{dt}\hat{I}d = \underline{0}$

$\longrightarrow \dfrac{d\hat{R}}{dt}\hat{R}^T + \hat{R}\dfrac{d\hat{R}^T}{dt} = 0$

~ MA $\hat{\Omega} = \dfrac{d\hat{R}}{dt}\hat{R}^T \longrightarrow \hat{\Omega}^T + \hat{R}\dfrac{d\hat{R}^T}{dt} = 0$ $\qquad (AB)^T = B^T A^T$

~ $\hat{\Omega} + \hat{\Omega}^T = 0 \longrightarrow \hat{\Omega} = -\hat{\Omega}^T$

- OSS 2: UNA MATRICE EMISIMMETRICA HA FORMA: $\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ -\Omega_{21} & 0 & \Omega_{23} \\ -\Omega_{13} & -\Omega_{23} & 0 \end{pmatrix}$

- RIPRENDO IL CALCOLO DELLE VELOCITÀ:

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ -\Omega_{21} & 0 & \Omega_{23} \\ -\Omega_{13} & -\Omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_{12}\, y + \Omega_{13}\, z \\ -\Omega_{12}\, x + \Omega_{23}\, z \\ -\Omega_{13}\, x - \Omega_{23}\, y \end{pmatrix}$$

~ PRENDO: $\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$ E CALCOLO $\underline{\omega} \wedge \underline{x}$:

$$\underline{\omega} \wedge \underline{x} = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_z\, y + \omega_y\, z \\ \omega_z\, x - \omega_x\, z \\ -\omega_y\, z + \omega_x\, y \end{pmatrix}$$

~ NOTO CHE SE SCELGO:

$$\begin{cases} \omega_x = -\Omega_{23} \\ \omega_y = \Omega_{13} \\ \omega_z = -\Omega_{12} \end{cases} \longrightarrow \hat{\Omega}\,\underline{x} = \underline{\omega} \wedge \underline{x}$$

<u>QUINDI</u>: SE DEFINIAMO $\underline{\omega} = (-\Omega_{23}, \Omega_{13}, -\Omega_{12})$

$$\longrightarrow \boxed{\underline{v}_P = \underline{v}_{O'} + \underline{\omega} \wedge (P - O')}$$

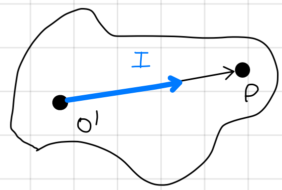
- OSS:
$$\begin{cases} 2D \longrightarrow \underline{\omega} = \dot{\vartheta}\,\underline{k} \\ 3D \longrightarrow \underline{\omega} \text{ È FATTA DA COMPONENTI DI } \dfrac{d\hat{R}}{dt}\,\hat{R}^T \end{cases}$$

FORMULE DI POISSON DIRETTE

- $\underline{\omega}, \underline{I}, \underline{J}, \underline{k} \longrightarrow \dot{\underline{I}}, \dot{\underline{J}}, \dot{\underline{k}}$

- $\underline{v}_P = \underline{v}_{O'} + \underline{\omega} \wedge (P - O')$

  ↳ MI METTO NEL CASO PARTICOLARE IN CUI: $(P - O') = \underline{I}$



$$\underline{v}_{P'} - \underline{v}_{O'} = \underline{\omega} \wedge \underline{I}$$ (P E O' SONO MOBILI)

$$\frac{d(P - O')}{dt} = \underline{\omega} \wedge \underline{I} \longrightarrow \dot{\underline{I}} = \underline{\omega} \wedge \underline{I}$$

- RIPETO LO STESSO RAGIONAMENTO PER $\underline{J}, \underline{k}$:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\underline{I}} &= \underline{\omega} \wedge \underline{I} \\ \dot{\underline{J}} &= \underline{\omega} \wedge \underline{J} \\ \underline{k} &= \underline{\omega} \wedge \underline{k} \end{aligned}}$$

FORMULE DI POISSON INVERSE

- $\underline{I}, \underline{J}, \underline{k}, \dot{\underline{I}}, \dot{\underline{J}}, \dot{\underline{k}} \longrightarrow \underline{\omega}$

- PREMOLTIPLICO VETTORIALMENTE PER $\underline{I}$: $\underline{I} \wedge \dot{\underline{I}} = \underline{I} \wedge (\underline{\omega} \wedge \underline{I})$

  $a \wedge (b \wedge c)$

- $a \wedge (b \wedge c) = (\underline{a} \circ \underline{c})\, b - (\underline{a} \circ \underline{b})\, \underline{c}$

$$\longrightarrow \quad \underline{I} \wedge \dot{\underline{I}} = \underline{w} - w_x \underline{I} \qquad a)$$

- RIPETO SU TUTTE LE FORMULE DIRETTE:

$$\begin{cases} \underline{J} \wedge \dot{\underline{J}} = \underline{J} \wedge (\underline{w} \wedge \underline{J}) = \underline{w} - w_y \underline{J} \\ \underline{K} \wedge \dot{\underline{K}} = \underline{K} \wedge (\underline{w} \wedge \underline{K}) \quad \underline{w} - w_z \underline{K} \end{cases}$$

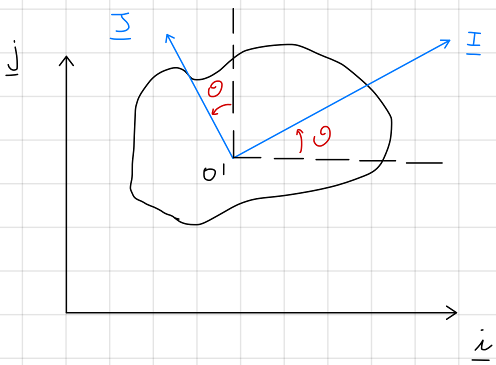
$$\underline{I} \wedge \dot{\underline{I}} + \underline{J} \wedge \dot{\underline{J}} + \underline{K} \wedge \underline{K} = 3\underline{w} - \overbrace{(w_x \underline{I} + w_y \underline{J} + w_z \underline{K})}^{w}$$

$$\boxed{\underline{w} = \frac{1}{2} \left(\underline{I} \wedge \dot{\underline{I}} + \underline{J} \wedge \dot{\underline{J}} + \underline{K} \wedge \underline{K} \right)}$$

- IN 3D PER APPLICARE POISSON DOBBIAMO CONOSCERE:

$$I(\alpha, \beta, \gamma), \quad J(\alpha, \beta, \kappa)$$

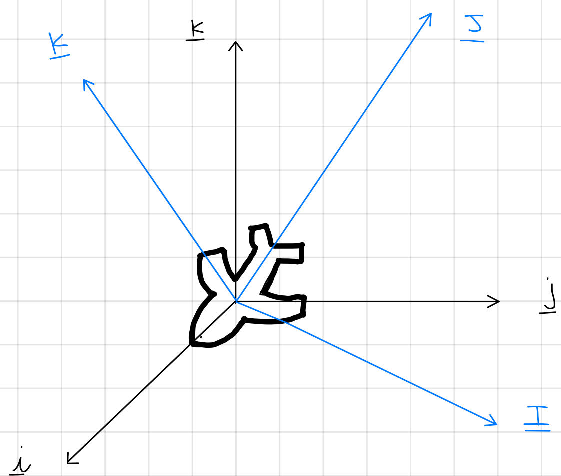
COORDINATE ANGOLARI - ANGOLI DI CARDANO



ANALOGIA IN 2D

θ PORTA $\underline{i}, \underline{j} \longrightarrow \underline{I}, \underline{J}$

- IN 3D: α, β, γ SONO ANGOLI DI ROTAZIONE PER PORTARE $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k} \longrightarrow \underline{I}, \underline{J}, \underline{K}$



$\underline{i}$: ASSE DI ROLLIO

$\underline{j}$: ASSE DI BECCHEGGIO

$\underline{k}$: ASSE DI IMBARDATA

$\downarrow$

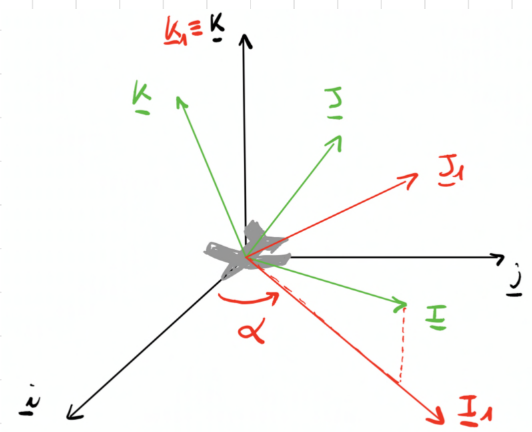
VOGLIO PORTARE

$\underline{i} \longrightarrow \underline{I}$

$\underline{j} \longrightarrow \underline{J}$

$\underline{k} \longrightarrow \underline{K}$

ROTAZIONE 1: IMBARDATA



CONSEGUENZA:

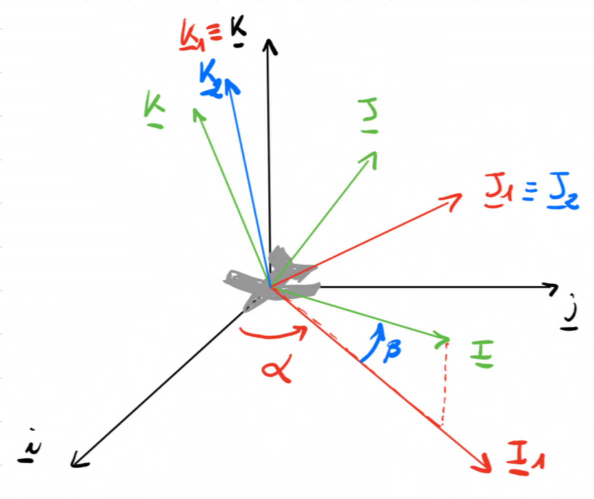
$\underline{k} \equiv \underline{k}_1$

$\underline{J}_1 \perp \underline{I}_1, \underline{k}_1 \longrightarrow \underline{J}_1 \in \underline{i}, \underline{j}$

ANALITICAMENTE

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \cos\alpha \, \underline{i} + \sin\alpha \, \underline{j} \\ \underline{J}_1 = -\sin\alpha \, \underline{i} + \cos\alpha \, \underline{j} \\ \underline{k}_1 = \underline{k} \end{cases} \qquad 1$$

ROTAZIONE 2: BECCHEGGIO



- RUOTO $\underline{I}_1$ INTORNO A $\underline{J}_1$ DI ANGOLO β (BECCHEGGIO). $\underline{I}_1 \rightarrow \underline{I}$
- CONSEGUENZE SU ALTRI ASSI:

$\underline{J}_2 \equiv \underline{J}_1$

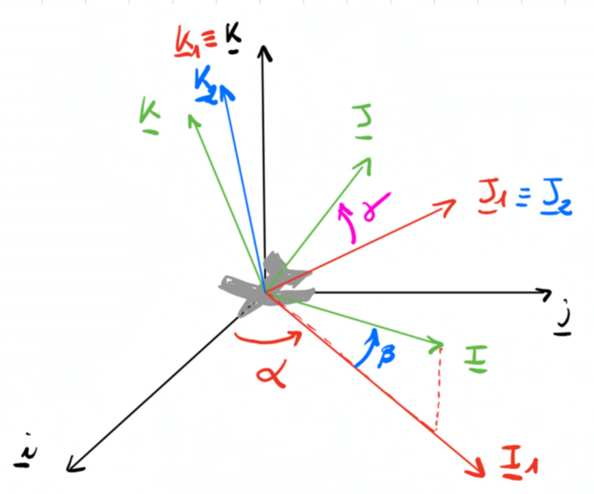
$\underline{k}_2 \perp \underline{I}$

$\longrightarrow$ OTTENGO TERNA $\underline{I}, \underline{J}_2, \underline{k}_2$

- ANALITICAMENTE:

$$\begin{cases} \underline{I} = \cos\beta\, \underline{I}_1 + \sin\beta\, \underline{k}_1 \\ \underline{J}_2 = \underline{J}_1 \\ \underline{k}_2 = -\sin\beta\, \underline{I}_1 + \cos\beta\, \underline{k}_1 \end{cases} \qquad 2$$

ROTAZIONE 3: ROLLIO



- RUOTO $\underline{J}_2, \underline{k}_2$ INTORNO A $\underline{I}$ DI ANGOLO γ (ROLLIO). $\underline{J}_2, \underline{k}_2 \longrightarrow \underline{J}, \underline{k}$
- CONSEGUENZE: $\underline{J}_2, \underline{k}_2 \longrightarrow \underline{J}, \underline{k}$

$$\begin{cases} \underline{I} = \underline{I} \\ \underline{J} = \cos\gamma\, \underline{J}_2 + \sin\gamma\, \underline{k}_2 \\ \underline{k} = -\sin\gamma\, \underline{J}_2 + \cos\gamma\, \underline{k}_2 \end{cases} \qquad 3$$

$\longrightarrow$ **COMPLESSIVAMENTE:** $\underline{I}(\alpha, \beta, \gamma), \underline{J}(\alpha, \beta, \gamma), \underline{k}(\alpha, \beta, \gamma)$ SI TROVANO COMPONENDO 1, 2, 3

- AD ESEMPIO: $I(\alpha, \beta, \gamma)$

3 $\quad \underline{I} = \underline{I}$

1 $\quad \underline{I}_1 = \cos\alpha \, \underline{i} + \sin\alpha \, \underline{j}$

$\quad \underline{K}_1 = \underline{k}$

$\longrightarrow \quad \underline{I} = \cos\beta \left(\cos\alpha \, \underline{i} + \sin\alpha \, \underline{j} \right) + \sin\beta \, \underline{k} = \cos\beta \cos\alpha \, \underline{i} + \cos\beta \sin\alpha \, \underline{j} + \sin\beta \, \underline{k}$

- SU GLI ALTRI ASSI, ANALOGAMENTE:

$$\underline{J} = -\left(\cos\alpha \sin\beta \sin\gamma + \sin\alpha \cos\gamma \right) \underline{i} + \left(\cos\alpha \cos\gamma - \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \right) \underline{j} + \cos\beta \cos\gamma \, \underline{k}$$

$$\underline{K} = \left(\sin\alpha \sin\gamma - \cos\alpha \sin\beta \cos\gamma \right) \underline{i} - \left(\cos\alpha \sin\gamma - \sin\alpha \sin\beta \cos\gamma \right) \underline{j} + \cos\beta \cos\gamma \, \underline{k}$$

- POISSON: $\quad \underline{\omega} = \dfrac{1}{2} \left(\underline{I} \wedge \dot{\underline{I}} + \underline{J} \wedge \dot{\underline{J}} + \underline{K} \wedge \underline{K} \right)$

- RISULTATO: SE $\quad \underline{\omega} = p \, \underline{I} + q \, \underline{J} + r \, \underline{K}$:

$$p = \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin\beta$$

$$q = \dot{\alpha} \cos\beta \sin\gamma - \dot{\beta} \cos\gamma$$

$$r = \dot{\beta} \sin\gamma + \dot{\alpha} \cos\beta \cos\gamma$$

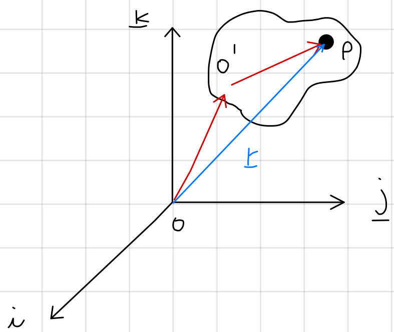
SOVRAPPOSIZIONE DI ATTI DI MOTO ELEMENTARI

- PER SISTEMA OLONOMO E VINCOLI FISSI:

$$r(q_1, \dots, q_n) \longrightarrow \underline{v} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial q_k} \dot{q}_k = \frac{\partial r_1}{\partial q_1} q_1 + \dots + \frac{\partial r_n}{\partial q_n} \dot{q}_n$$

ATTI DI MOTO ELEMENTARI CHE SI OTTENGONO VARIANDO UNA SINGOLA C.L. ALLA VOLTA

- CIÒ VALE ANCHE PER C.R. IN 3D:



$$\underline{r} = (P-O) = \underline{r}(x_{O'}, y_{O'}, z_{O'}, \alpha, \beta, \gamma)$$

$$\underline{v}_P = \underbrace{\frac{\partial r}{\partial x_{O'}} \dot{x}_{O'} + \frac{\partial r}{\partial y_{O'}} \dot{y}_{O'} + \frac{\partial r}{\partial z_{O'}} \dot{z}_{O'}}_{v_{O'}} + \frac{\partial r}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial r}{\partial \beta} \dot{\beta} + \frac{\partial r}{\partial \gamma} \dot{\gamma}$$

- MA IO SO CHE: $\underline{v}_P = v_{O'} + \underline{\omega} \wedge (P-O')$:

$$\longrightarrow \quad \underline{\omega} \wedge (P-O') = \frac{\partial r}{\partial \alpha} \dot{\alpha} + \frac{\partial r}{\partial \beta} \dot{\beta} + \frac{\partial r}{\partial \gamma} \dot{\gamma}$$

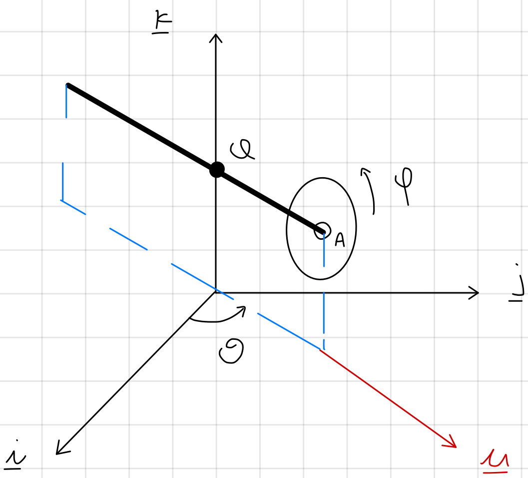
- OGNUNO DEI 3 TERMINI A DESTRA È ROTAZIONE ELEMENTARE ATTORNO AD UN ASSE:

  - $\frac{\partial r}{\partial \alpha} \dot{\alpha}$ SI OTTIENE FISSANDO O', β, γ E VARIANDO SOLO α
    - IL RISULTATO SI PUÒ ESPRIMERE COME $\omega_\alpha \wedge (P-O')$
  - $\frac{\partial r}{\partial \beta} \dot{\beta}$ SI OTTIENE FISSANDO O', α, γ E VARIANDO SOLO β
    - IL RISULTATO SI PUÒ ESPRIMERE COME $\omega_\beta \wedge (P-O')$
  - $\frac{\partial r}{\partial \gamma} \dot{\gamma}$ SI OTTIENE FISSANDO O', α, γ E VARIANDO SOLO γ
    - IL RISULTATO SI PUÒ ESPRIMERE COME $\omega_\gamma \wedge (P-O')$

QUINDI: $\underline{\omega} \wedge (P-O') = \omega_\alpha \wedge (P-O') + \omega_\beta \wedge (P-O') + \omega_\gamma \wedge (P-O')$

$$\longrightarrow \boxed{\underline{\omega} = \underline{\omega}_\alpha + \underline{\omega}_\beta + \underline{\omega}_\gamma}$$

- ESEMPIO:



~ ASTA $\perp$ $\underline{k}$ DURANTE IL MOTO GRAZIE A CERNIERA PIANA IN Q

~ CERNIERA IN A T.C. PIANO DISCO SIA $\perp$ ASTA

i) $\underline{\omega} = ?$

- $\#\, gdl = 2 \quad (\vartheta, \varphi)$

1) ω_{ASTA}: SOVRAPPOSIZIONE DI ATTI DI MOTO ELEMENTARI

~ BLOCCO ϑ, VARIO φ: $\quad \underline{\omega}_A^{\varphi} = 0$

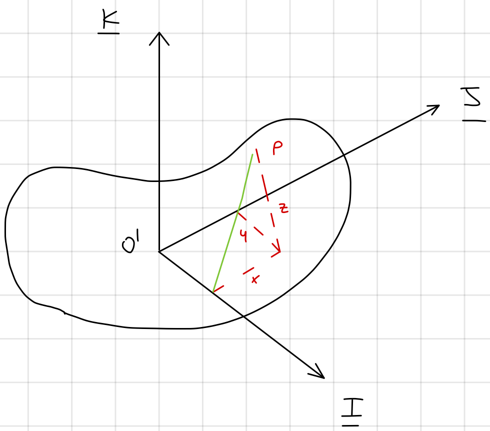
~ BLOCCO φ, VARIO ϑ: $\quad \underline{\omega}_A^{\vartheta} = \dot{\vartheta}\, \underline{k}$

2) ω_{DISCO}: SOVRAPPOSIZIONE DI ATTI DI MOTO ELEMENTARI

~ BLOCCO ϑ, VARIO φ: $\quad \underline{\omega}_A^{\varphi} = \dot{\varphi}\, \underline{u}$

~ BLOCCO φ, VARIO ϑ: $\quad \underline{\omega}_A^{\vartheta} = \dot{\vartheta}\, \underline{k}$

MATRICE D'INERZIA



SI DEFINISCE **MATRICE D' INERZIA**:

$$\hat{I}_{O'} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

$$I_{xx} = \int_V \rho \, (y^2 + z^2) \, dV \longrightarrow$$ MOMENTO D' INERZIA RISPETTO A $\underline{I}$

$$I_{yy} = \int_V \rho \, (x^2 + z^2) \, dV \longrightarrow$$ MOMENTO D' INERZIA RISPETTO A $\underline{J}$

$$I_{zz} = \int_V \rho \, (x^2 + y^2) \, dV \longrightarrow$$ MOMENTO D' INERZIA RISPETTO A $\underline{K}$

$$I_{xy} = -I_{yx} = -\int \rho \, xy \, dV$$

$$I_{xz} = -I_{zx} = -\int \rho \, xz \, dV$$

$$I_{yz} = -I_{zy} = -\int \rho \, yz \, dV$$

PRODOTTI D' INERZIA

DINAMICA IN 3D

LA DINAMICA DEI C.R. IN 3D VERRÁ TRATTATA CON:

1) EQUAZIONI CARDINALI:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{Q}}{dt} = \underline{R}^{a,est} + \underline{R}^{r,est} \\ \dfrac{d\Gamma_o}{dt} + V_o \wedge \underline{Q} = M_o^{a,est} + M_o^{r,est} \end{cases}$$

2) EQUAZIONE DI LAGRANGE:

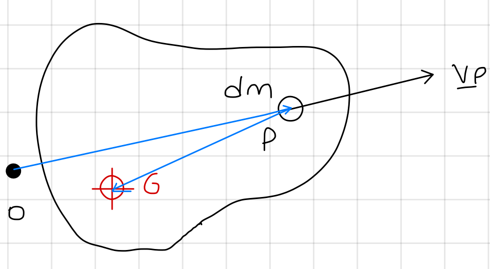
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = 0$$

3) EQUAZIONE ENERGIA CINETICA:

$$\frac{dT}{dt} = \Pi^{a,est} + \Pi^{a,int}$$

⟶ LE EQ. NON CAMBIANO SICCOME LE AVEVAMO DIMOSTRATE PER UN SISTEMA DI PUNTI ⟶ CAMBIA IL CALCOLO DELLE QUANTITÁ MECCANICHE:

QUANTITÁ DI MOTO IN 3D:



~ $\underline{Q} = \int_V \rho(P)\, \underline{v}_P \, dV$

~ P, G ∈ C.R. : $\underline{v}_P = \underline{v}_G + \underline{\omega} \wedge (P-G)$

~ SOSTITUIAMO: $\int_V \rho(P)\left[v_G + \underline{\omega} \wedge (P-G)\right] dV =$

$$= \int_V \rho(P)\, \underline{v}_G \, dV + \underline{\omega} \wedge \int_V \rho(P)(P-G)\, dV =$$

$$= v_P \underbrace{\int_V \rho(P)\, dV}_{M} + \omega \wedge \int_V \rho(P)(P-G)\, dV =$$

$\sim \quad (P-G) = (P-O) - (G-O)$

$$\sim \int \rho(P) \left[(P-O) - (G-O) \right] dV = \int_V \rho(P)(P-O)\, dV - \int_V \rho(P)(G-O)\, dV =$$

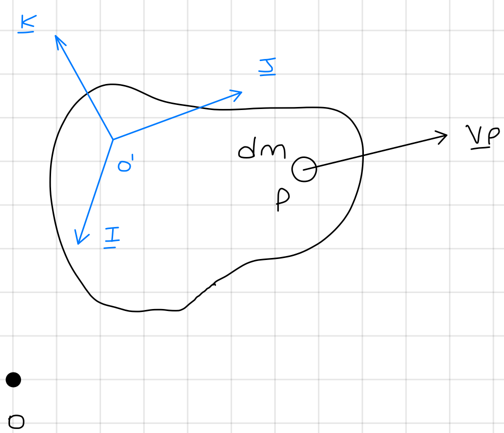
$$= \int \rho(P)(P-O)\, dV - (G-O) \underbrace{\int \rho(P)\, dV}_{M} =$$

$$= \int \rho(P)(P-O)\, dV - M(G-O) =$$

MA PER DEF: $(G-O) \triangleq \dfrac{\int_V \rho(P)(P-O)\, dV}{M} \longrightarrow \int_V \rho(P)(P-O)\, dV = M(G-O)$

$$\longrightarrow \int \rho(P)(P-O)\, dV - M(G-O) = 0 \longrightarrow \underline{Q} = M\, \underline{v}_G$$

MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO IN 3D:



$$\sim \quad \Gamma_O = \int_V \rho(P)(P-O) \wedge \underline{v}_P\, dV$$

$\sim$ SCELGO $O' \in$ C.R.:

$$\Gamma_{O'} = \int_V \rho(P)(P-O') \wedge \underline{v}_P\, dV$$

$\sim \quad O', P \in$ C.R.: $\quad \underline{v}_P = \underline{v}_{O'} + \underline{\omega} \wedge (P-O')$

$\sim$ SOSTITUISCO: $\quad \Gamma_{O'} = \displaystyle\int_V \rho(P)(P-O') \wedge \left[v_{O'} + \underline{\omega} \wedge (P-O') \right] dV =$

$$= \underbrace{\int_V \rho(P)(P-O') \wedge v_{O'}\, dV}_{a} + \underbrace{\int_V \rho(P)(P-O') \wedge \left[\underline{\omega} \wedge (P-O') \right] dV}_{b}$$

• a) $$\int_V \rho(P)(P-O') \wedge v_{O'}\, dV = \underbrace{\left[\int_V \rho(P)(P-O')\, dV\right]}_{M(G-O')} \wedge v_{O'} =$$

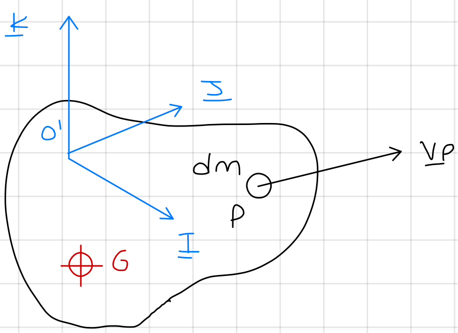
$$= (G-O') \wedge M v_{O'}$$

• b) $$\int_V \rho(P)(P-O') \wedge [\underline{\omega} \wedge (P-O')]\, dV =$$

$$a \wedge b \wedge c = (a \circ c)\, \underline{b} - (a \circ b)\, \underline{c}$$

$$= \int_V \rho(P) \left\{ \|P-O'\|^2 \underline{\omega} - [(P-O') \circ \underline{\omega}]\, (P-O') \right\} dV$$

~ DEFINISCO UNA TERNA $\underline{I}, \underline{J}, \underline{K}$ SOLIDALE AL C.R E INDICO:



~ $(P-O') = x\underline{I} + y\underline{J} + z\underline{K}$

$\underline{\omega} = p\underline{I} + q\underline{J} + r\underline{K}$

$\downarrow$

SOSTITUISCO IN b

$$\sim \|P-O'\|^2 \underline{\omega} - [(P-O') \circ \underline{\omega}]\, (P-O') = \begin{pmatrix} (\cancel{x^2} + y^2 + z^2)p - (\cancel{xp} + yq + zr)x \\ (x^2 + \cancel{y^2} + z^2)q - (xp + \cancel{yq} + zr)y \\ (x^2 + y^2 + \cancel{z^2})r - (xp + yq + \cancel{zr})z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (y^2 + z^2)p - (yq + zr)x \\ (x^2 + z^2)q - (xp + zr)y \\ (x^2 + y^2)r - (xp + yq)z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (y^2 + z^2)p - xyq + xzr \\ -xyp + (x^2 + y^2)q - yzr \\ -xzp - yzq + (x^2 + y^2)r \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ z \end{pmatrix}$$

~ RISOLVO: $\displaystyle\int_V \rho(P) \left\{ \|P-O'\|^2 \underline{\omega} - \left[(P-O') \circ \underline{\omega} \right] (P-O') \right\} dV$:

$$\int_V \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} p \\ q \\ z \end{pmatrix}}_{\text{NON DIPENDE DA } V} \rho(P)\, dV =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \int_V \rho(P)(y^2+z^2)\,dV & -\int_V \rho(P)\,xy\,dV & -\int_V \rho(P)\,xz\,dV \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}}_{\hat{I}_{O'}} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} =$$

~ $\Rightarrow$ $b = \hat{I}_{O'}\,\underline{\omega}$

~ QUINDI: $\boxed{\Gamma_{O'} = (G-O') \wedge M \underline{v}_{O'} + \hat{I}_{O'}\,\underline{\omega}}$

CASI PARTICOLARI:

1) $V_{O'} = 0 \longrightarrow \Gamma_{O'} = \hat{I}_{O'} \, \underline{\omega}$

2) $O' \equiv G \longrightarrow \Gamma_G = \hat{I}_G \, \underline{\omega}$

- OSS: IN 2D: $\Gamma_{O'} = I_{O'} \, \underline{\omega} \Rightarrow \Gamma_{O'} \parallel \underline{\omega}$

  IN 3D: $\Gamma_{O'} = \hat{I}_{O'} \, \underline{\omega} \not\Rightarrow \Gamma_{O'} \parallel \underline{\omega}$ — LA MATRICE PUÒ CAMBIARE MODULO E DIREZIONE DEL VETTORE

- SE SCEGLIAMO O NON APPARTENENTE AL C.R.: MOMENTO DI TRASPORTO:

$$\Gamma_O = \Gamma_{O'} + (O' - O) \wedge \underline{Q} \xrightarrow{\text{SCELGO } O' \equiv G} \Gamma_O = \Gamma_G + (G - O) \wedge \underline{Q} =$$

$$= \hat{I}_G \, \underline{\omega} + (G - O) \wedge \underline{Q}$$

3) MOTO TRASLATORIO: $\underline{\omega} = 0$: $\Gamma_O = (G - O) \wedge \underline{Q}$

- RIASSUMENDO:

GENERICO	$\Gamma_{O'} = (G - O') \wedge M \underline{V_{O'}} + \hat{I}_{O'} \, \underline{\omega}$
$V_{O'} = 0$	$\Gamma_{O'} = \hat{I}_{O'} \, \underline{\omega}$
$O' \equiv G$	$\Gamma_G = \hat{I}_G \, \underline{\omega}$
TRASLAZIONE	$\Gamma_O = (G - O) \wedge \underline{Q}$

- PROPRIETÀ MATRICE D'INERZIA:

$$\hat{I}_O = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

DOVE

$$I_{xx} = \int_V \rho(P) \, (y^2 + z^2) \, dV$$

$$I_{zz} = \int_V \rho(P) \, (x^2 + y^2) \, dV$$

$$I_{xy} = I_{yx} = -\int_V \rho(P) \, xy \, dV$$

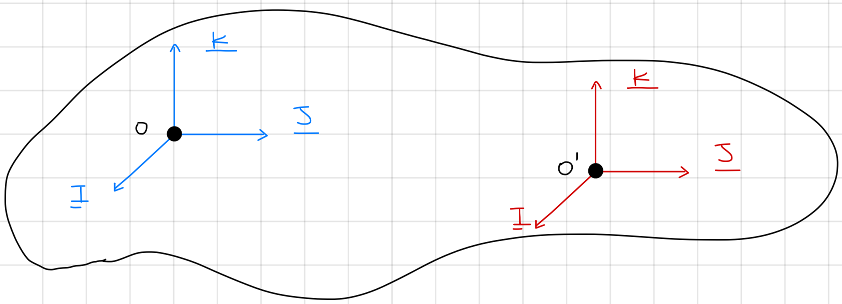
$$I_{xz} = I_{zx} = -\int_V \rho(P) \, xz \, dV$$

- OSS1: $\hat{I}$ è SIMMETRICA CON DIAGONALE POSITIVA

- OSS2: DATE 2 TERNE: $O, \underline{I}, \underline{J}, \underline{K}$, $O', \underline{I}', \underline{J}', \underline{K}'$ $\longrightarrow$ $\hat{I}_O \neq \hat{I}_{O'}$

- **FORMULE DI TRASFORMAZIONE DELLA MATRICE D'INERZIA:**

1) TRASLAZIONE DELLA TERNA



~ INDICO CON x, y, z COORD. DI P IN $O, \underline{I}, \underline{J}, \underline{K}$

~ INDICO CON x', y', z' COORD. DI P IN $O', \underline{I}', \underline{J}', \underline{K}'$

~ $(P-O) = x\underline{I} + y\underline{J} + z\underline{K}$

$(P-O') = x'\underline{I} + y'\underline{J} + z'\underline{K}$

~ MA $(P-O) = (O'-O) + (P-O') \longrightarrow \begin{cases} x = x_{O'} + x' \\ y = y_{O'} + y' \\ z = z_{O'} + z' \end{cases}$ DOVE $x_{O'}, y_{O'}, z_{O'}$ SONO LE COORD DI O' IN $O, \underline{I}, \underline{J}, \underline{K}$

- MOMENTI D'INERZIA:

~ $I_{xx,O} = \int_V \rho(P)\,(y^2+z^2)\,dV = \int \rho(P)\,(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz =$

$\longrightarrow$ CAMBIO COORDINATE:

$I_{xx,O} = \int_V \left[\rho(P)\,\left((y_{O'}+y')^2 + (z_{O'}+z')^2\right)\right] dx'dy'dz' =$

$= \underbrace{\int_V \rho(P)\,(y'^2 + z'^2)\,dx'dy'dz'}_{a} + \underbrace{\int_V \rho(P)\,(y_{O'}^2 + z_{O'}^2)\,dx'dy'dz'}_{b} +$

$$+ \int_V \rho(P)\, 2\, y_{o'} y'\, dx'dy'dz' + \int_V \rho(P)\, 2\, z_{o'} z'\, dx'dy'dz'$$

c $\qquad\qquad$ d

$\sim \quad a = I_{xx,o'}$

$\sim \quad b = (y_{o'}^2 + z_{o'}^2) \int_V \rho(P)\, dV = M\,(y_{o'}^2 + z_{o'}^2)$

$\sim \quad c = 2 y_{o'} \int_V \rho(P)\, y'\, dV \qquad$ MA $\qquad y'_G \triangleq \dfrac{\int_V \rho(P)\, y'\, dV}{M}$

$\longrightarrow \quad \int_V \rho(P)\, y'\, dV = M y'_G \quad \longrightarrow \quad c = 2M y_{o'} y'_G$

$\sim \quad d = 2 z_{o'} \int_V \rho(P)\, z'\, dV \qquad$ MA $\qquad z'_G \triangleq \dfrac{\int_V \rho(P)\, z'\, dV}{M}$

$\longrightarrow \quad \int_V \rho(P)\, z'\, dV = M z'_G \quad \longrightarrow \quad c = 2M z_{o'} z'_G$

- $I_{xx,o} = I_{xx,o'} + M(y_{o'}^2 + z_{o'}^2) + 2M(y_{o'} y'_G) + 2M(z_{o'} z'_G)$

<u>CASO PARTICOLARE: $o' \equiv G$</u> $\longrightarrow \quad y'_G = z'_G = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} I_{xx,o} &= I_{xx,G} + M(y_G^2 + z_G^2) \\ I_{yy,o} &= I_{yy,G} + M(x_G^2 + z_G^2) \\ I_{zz,o} &= I_{zz,G} + M(x_G^2 + y_G^2) \end{aligned}}$$

- PRODOTTI D' INERZIA:

$$\sim I_{xy,O} = -\int_V \rho(P)\, xy\, dV = -\int_V \rho(P)\,(x_{O'} + x')(y_{O'} + y')\, dV =$$

$$= \underbrace{-\int_V \rho(P)\, x'y'\, dV}_{I_{xy,O'}} \underbrace{- \int_V \rho(P)\, x_{O'}y_{O'}\, dV}_{M x_{O'} y_{O'}} \underbrace{- \int_V \rho(P)\, x_{O'}y'\, dV}_{M x_{O'} y'_G} \underbrace{- \int_V \rho(P)\, y_{O'}x'\, dV}_{M y_{O'} x'_G}$$

$$I_{xy,O} = I_{xy,O'} - M x_{O'} y_{O'} - M x_{O'} y'_G - M y_{O'} x'_G$$

CASO PARTICOLARE: $O' \equiv G \longrightarrow y_G' = z_G' = 0 \longrightarrow I_{xy,O} = I_{xy,G} - M x_G y_G$

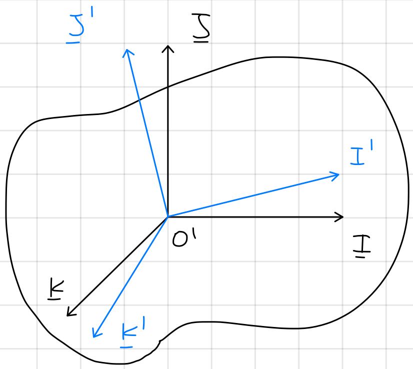
$$\boxed{\begin{aligned} I_{xy,O} &= I_{xy,G} - M x_G y_G \\ I_{yz,O} &= I_{yz,G} - M y_G z_G \\ I_{xz,O} &= I_{xz,G} - M x_G z_G \end{aligned}}$$

PRODOTTI D' INERZIA

$\longrightarrow$ GENERALIZZAZIONE DEL TEOREMA DI HUYGENS:

$$\hat{I}_O = \hat{I}_G + M \begin{pmatrix} y_G^2 + z_G^2 & -x_G y_G & -x_G z_G \\ -x_G y_G & x_G^2 + z_G^2 & -y_G z_G \\ -x_G z_G & -y_G z_G & x_G^2 + y_G^2 \end{pmatrix}$$

2) ROTAZIONE ASSI: $O', \underline{I}, \underline{J}, \underline{K} \longrightarrow O', \underline{I}', \underline{J}', \underline{K}'$



SUPPONGO $\underline{v}_{O'} = 0$

~ IN $O', \underline{I}, \underline{J}, \underline{K}$: $\underline{\Gamma}_{O'} = \hat{I}_{O'} \underline{\omega}$ DOVE:

$$\underline{\Gamma}_{O'} = \Gamma_{O',x}\,\underline{I} + \Gamma_{O',y}\,\underline{J} + \Gamma_{O',z}\,\underline{K}$$

~ IN $O', \underline{I}', \underline{J}', \underline{K}'$: $\underline{\Gamma}_{O'}' = \hat{I}_{O'}' \underline{\omega}'$ DOVE:

$$\underline{\Gamma}_{O'}' = \Gamma_{O',x}'\,\underline{I}' + \Gamma_{O',y}'\,\underline{J}' + \Gamma_{O',z}'\,\underline{K}'$$

~ DATA MATRICE DI ROTAZIONE $\hat{R}$ CHE PORTA $O', \underline{I}, \underline{J}, \underline{K} \longrightarrow O', \underline{I}', \underline{J}', \underline{K}'$

→ DATO ∀ VETTORE $\underline{x}'$ IN TERNA $\underline{I}', \underline{J}', \underline{K}'$ POTREMO RICAVARE LE SUE COMPONENTI IN $\underline{I}, \underline{J}, \underline{K}$ COME $\underline{x} = R\,\underline{x}'$

→ DATO ∀ VETTORE $\underline{x}$ IN TERNA $\underline{I}, \underline{J}, \underline{K}$ POTREMO RICAVARE LE SUE COMPONENTI IN $\underline{I}', \underline{J}', \underline{K}'$ COME $\underline{x}' = \hat{R}^T \underline{x}$

~ APPLICO QUESTE TRASFORMAZIONI AL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO:

$$\underline{\Gamma}_{O'}' = \hat{I}_{O'}' \underline{\omega}'$$

~ PREMOLTIPLICO PER $\hat{R} \longrightarrow \underbrace{\hat{R}\,\underline{\Gamma}_{O'}'}_{\underline{\Gamma}_{O'}} = \hat{R}\,\hat{I}_{O'}'\,\underline{\omega}'$

~ MA $\underline{\omega}' = \hat{R}^T \underline{\omega} \longrightarrow \underline{\Gamma}_{O'} = \hat{R}\,\hat{I}_{O'}'\,\hat{R}^T \underline{\omega}$

CONFRONTO

~ RIPRENDO LA RELAZIONE $\underline{\Gamma}_{O'} = \hat{I}_{O'} \underline{\omega}$

$$\hat{R}\,\hat{I}_{O'}'\,\hat{R}^T \cancel{\underline{\omega}} = \hat{I}_{O'} \cancel{\underline{\omega}}$$

$$\boxed{\hat{I}_{O'} = \hat{R}\,\hat{I}_{O'}'\,\hat{R}^T}$$

~ POSSIAMO OTTENERE L'INVERSA: $\hat{R}^T \hat{I}_{O'} = \underbrace{\hat{R}^T \hat{R}}_{\hat{I}_d} \hat{I}_{O'}{}' \hat{R}^T$

$\longrightarrow \hat{R}^T \hat{I}_{O'} \hat{R} = \hat{I}_{O'}{}' \underbrace{\hat{R}_T \hat{R}}_{\hat{I}_d}$

$$\boxed{\hat{I}_{O'}{}' = \hat{R}^T \hat{I}_{O'} \hat{R}}$$

• OSS 1: SI DIMOSTRA CHE LA MATRICE D'INERZIA È DIAGONALIZZABILE, CIOÈ: DATA MATRICE D'INERZIA CON ORIGINE O' È SEMPRE POSSIBILE TROVARE UNA TERNA $\underline{I}, \underline{J}, \underline{K}$ IN CUI ESSA ASSUME LA FORMA:

$$\hat{I}_{O'} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$

~ IN TALE TERNA: $\underline{I}, \underline{J}, \underline{K} \triangleq$ TERNA PRINCIPALE D'INERZIA

$A, B, C \triangleq$ MOMENTI PRINCIPALI D'INERZIA

~ IN PARTICOLARE: DATA $\hat{I}_{O'}$ IN $\forall$ TERNA, POSSIAMO TROVARE LA TERNA PRINCIPALE D'INERZIA CONSIDERANDO CHE:

$\longrightarrow \underline{I}, \underline{J}, \underline{K} \equiv$ AUTOVETTORI DI $\hat{I}_{O'}$ NORMALIZZATI

$\longrightarrow A, B, C \equiv$ AUTOVALORI DI $\hat{I}_{O'}$

• OSS 2: SUPPONIAMO DI CONOSCERE TERNA PRINCIPALE D'INERZIA $\underline{I}, \underline{J}, \underline{K}$ CENTRATA IN O' E SUPPONIAMO CHE $\underline{v}_{O'} = 0$

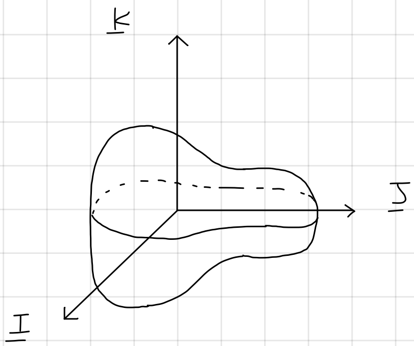
~ ALLORA: $\Gamma_{O'} = \hat{I}_{O'} \underline{\omega}$, DOVE $\underline{\omega} = p\underline{i} + q\underline{j} + r\underline{k}$

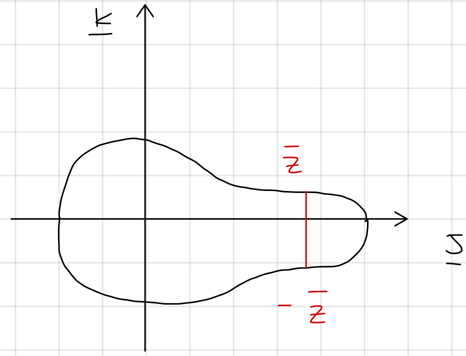
~ MA $O', \underline{I}, \underline{J}, \underline{K}$ È TERNA PRINCIPALE D'INERZIA:

$$\Gamma_{O'} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = A p \underline{I} + B q \underline{J} + C r \underline{K}$$

SIMMETRIE MATERIALI

- DATO UN C.R. CON SIMMETRIA MATERIALE RISPETTO AL PIANO x, y :



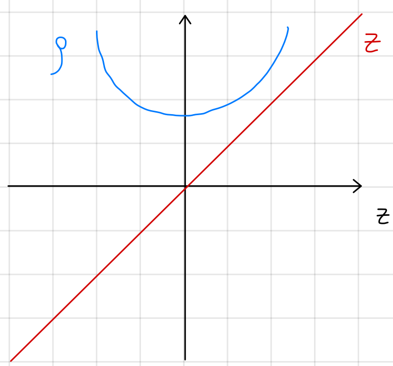


- CALCOLO I_{xz} : $\qquad \rho(x,y,z) = \rho(x,y,-z)$

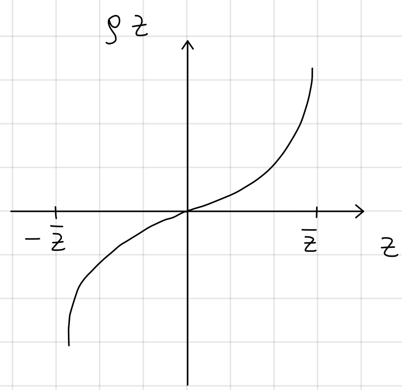
$$I_{xz} = -\int \rho(x,y,z)\, xz \; dx\,dy\,dz = -\int_{xy} dx\,dy \int_{-\bar{z}}^{\bar{z}} xz\, \rho(x,y,z)\, dz =$$

$$= -\int_{xy} x \; dx\,dy \int_{-\bar{z}}^{\bar{z}} z\,\rho(x,y,z)\, dz$$

$\longrightarrow$ STUDIO QUESTA FUNZIONE



$\Rightarrow$



FUNZIONE DISPARI

$$\longrightarrow \int_{-\bar{z}}^{\bar{z}} z\,\rho(x,y,z)\, dz = 0 \longrightarrow I_{xz} = 0$$

- STESSA COSA PER I_{yz}: $\quad I_{yz} = \int_{yz} y \, dx\,dy \int_{-\bar{z}}^{\bar{z}} z \, \rho(x,y,z) = 0$

- LA MATRICE D'INERZIA ASSUME LA FORMA:

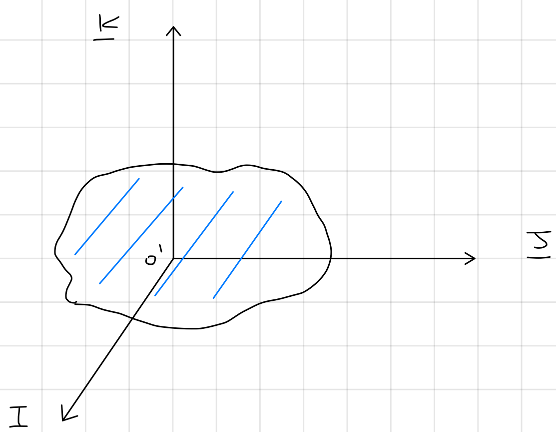
$$\hat{I}_{o'} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{yx} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \longrightarrow$$

VERSORE $\underline{k}$ È AUTOVETTORE E $\underline{I}_{zz}$ È AUTOVALORE

CONCLUSIONE:

IL VERSORE PERPENDICOLARE AL PIANO DI SIMMETRIA DEL C.R. È UN ASSE PRINCIPALE D'INERZIA E IL MOMENTO D'INERZIA ASSOCIATO È UN MOMENTO PRINCIPALE D'INERZIA.

- MATRICE D'INERZIA PER UNA DISTRIBUZIONE PIANA DI MASSA:



~ x, y È UN PIANO DI SIMMETRIA PERCHÈ

$\rho(x, y, \bar{z}) = \rho(x, y, -\bar{z}) = 0$

$\longrightarrow \underline{I}_{xz} = \underline{I}_{yz} = 0$

$$\hat{I}_{o'} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{yx} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$\underline{k}$ ASSE PRINCIPALE D'INERZIA

• OSS: CALCOLIAMO:

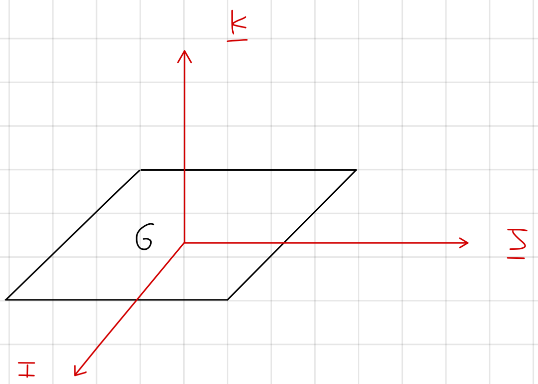
$$\sim I_{xx} = \int_V \rho(x,y)\,(y^2 + \cancelto{0}{z^2})\,dx\,dy = \int_V \rho(x,y)\,y^2\,dx\,dy$$

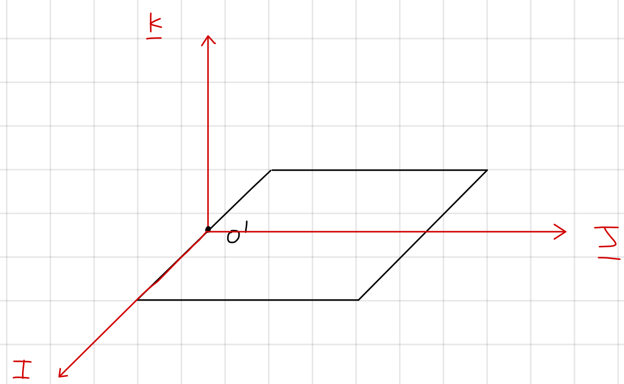
$$\sim I_{yy} = \int_V \rho(x,y)\,(x^2 + \cancelto{0}{z^2})\,dx\,dy = \int_V \rho(x,y)\,x^2\,dx\,dy$$

$$\sim I_{zz} = \int_V \rho(x,y)\,(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$\longrightarrow$ DISTRIBUZIONI PIANE: $\boxed{I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}}$

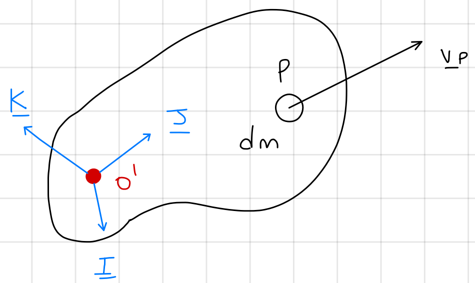
• ESEMPIO:





$\longrightarrow$ ESEMPIO 2: PER IDENTIFICARE LA TERNA PRINCIPALE D'INERZIA BASTANO 2 PIANI DI SIMMETRIA (DISEGNO $\underline{I}$, $\underline{K}$). IL TERZO ($\underline{J}$) LO TROVO CON LA REGOLA DELLA MANO DX.

ENERGIA CINETICA IN 3D



$$\cdot \; T = \frac{1}{2}\int_V \rho(P)\, \underline{v}_P^2 \, dV$$

- SCELGO O' $\in$ C.R: $\quad \underline{v}_P = \underline{v}_{O'} + \underline{\omega} \wedge (P - O')$
- SOSTITUISCO:

$$T = \frac{1}{2}\int_V \rho(P)\, v_{O'}^2 \, dV + \frac{1}{2}\int_V \rho(P) \, \| \underline{\omega} \wedge (P-O') \|^2 \, dV + \int_V \rho(P)\, \underline{v}_{O'} \circ [\underline{\omega} \wedge (P-O')] \, dV =$$

$$= \frac{1}{2} M \underline{v}_{O'}^2 + \frac{1}{2}\int_V \rho(P)\, \| \underline{\omega} \wedge (P-O') \|^2 \, dV + M \underline{v}_{O'} \circ [\underline{\omega} \wedge (G-O')]$$

- PRENDIAMO: $\underline{I}, \underline{J}, \underline{K}$: $\quad \underline{\omega} = p\underline{I} + q\underline{J} + r\underline{K}$

$$(P-O') = x\underline{I} + y\underline{J} + z\underline{K}$$

- $$\underline{\omega} \wedge (P-O') = \det \begin{pmatrix} p & q & r \\ x & y & z \end{pmatrix} = (qz - ry)\underline{I} + (rx - pz)\underline{J} + (py - qx)\underline{K}$$

- $$\| \underline{\omega} \wedge (P-O') \|^2 = (qz-ry)^2 + (rx-pz)^2 + (py-qx)^2 =$$

$$= q^2z^2 + r^2y^2 - 2qzyr + r^2x^2 + p^2z^2 - 2rxpz + p^2y^2 + q^2x^2 - 2pyqx =$$

$$= (y^2+z^2)p^2 + (x^2+z^2)q^2 + (x^2+y^2)r^2 - 2xypq - 2xzpr - 2yzqr$$

- $$\int_V \rho(P) \| \underline{\omega} \wedge (P-O') \|^2 = \int_V \rho\,(y^2+z^2)p^2\, dV + \int \rho\,(x^2+y^2) r^2 \, dV +$$

$$\int_V \rho\,(x^2+y^2) r^2 dV - 2\int_V \rho\, xypq\, dV - 2\int_V \rho\, xzpr\, dV - 2\int_V \rho\, yzqr\, dV =$$

$= I_{xx} p^2 + I_{yy} q^2 + I_{zz} r^2 + 2 I_{xy} pq + 2 I_{xz} pr + 2 I_{yz} qr$

- OSS: FACCIO $\underline{\omega}^T \hat{I}_{O'} \underline{\omega} = (p \quad q \quad r) \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} =$

$= I_{xx} p^2 + I_{yy} q^2 + I_{zz} r^2 + 2 I_{xy} pq + 2 I_{xz} pr + 2 I_{yz} qr$

UGUALE !

$$\longrightarrow \frac{1}{2} \int_V \rho(P) \| \underline{\omega} \wedge (P - O') \|^2 \, dV = \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \hat{I}_O \underline{\omega}$$

- COMPLESSIVAMENTE: $\boxed{T = \frac{1}{2} M v_{O'}^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \hat{I}_O \underline{\omega} + M \underline{v}_{O'} \circ [\underline{\omega} \wedge (G - O')]}$

- **CASI PARTICOLARI:**

1) MOTO TRASLATORIO: $\underline{\omega} = 0 \longrightarrow T = \frac{1}{2} M v_{O'}^2$

2) MOTO ROTATORIO INTORNO AD O': $v_{O'} = 0 \longrightarrow T = \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \hat{I}_O \underline{\omega}$

$\longrightarrow$ INOLTRE, SE $\underline{I}, \underline{J}, \underline{K}$ ASSI PRINCIPALI D'INERZIA:

$$T = \frac{1}{2} (p \quad q \quad r) \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(A_{O'} p^2 + B_{O'}^2 q^2 + C_{O'} r^2 \right)$$

3) CASO GENERALE: SCELGO $O' \equiv G$ $\longrightarrow$ $T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \underline{\omega}^T \hat{I}_G \underline{\omega}$

$\hookrightarrow$ INOLTRE, SE $\underline{I}, \underline{J}, \underline{K}$ ASSI PRINCIPALI D'INERZIA:

$$T = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} \left(A_G p^2 + B_G q^2 + C_G r^2 \right)$$

- OSS: VALE IDENTICO IL TEO. DELL'ENERGIA CINETICA:

$\longrightarrow$ 1 CORPO RIGIDO: $\frac{dT}{dt} = \Pi^{est,a}$

SE VINCOLI IDEALI FISSI
NOTA: SU UN C.R. NON ESISTONO FORZE INTERNE ATTIVE

- PROP:

$\frac{dT}{dt} = \Pi^{est,a}$ VALE COME CONSEGUENZA DEL SISTEMA CARDINALE:

- DIM: $O \equiv G$

$$\sim \begin{cases} \frac{d\underline{Q}}{dt} = \underline{R}^{est} & a \\ \frac{d\underline{\Gamma}_G}{dt} = \underline{M}_G^{est} & b \end{cases}$$

$\sim$ CALCOLO: $\begin{cases} a \circ \underline{v}_G \\ b \circ \underline{\omega} \end{cases}$ $\longrightarrow$ $\begin{cases} M \underline{v}_G \circ \frac{d\underline{v}_G}{dt} = \underline{R}^{est} \circ \underline{v}_G \\ \underline{\omega} \circ \frac{d\underline{\Gamma}_G}{dt} = \underline{M}_G^{est} \circ \underline{\omega} \end{cases}$

$\sim$ LE SOMMO: $M \underline{v}_G \circ \frac{d\underline{v}_G}{dt} + \underline{\omega} \circ \frac{d\underline{\Gamma}_G}{dt} = \underline{R}^{est} \circ \underline{v}_G + \underline{M}_G^{est} \circ \underline{\omega}$ $\ast$

IDENTIFICO TERNA P.I. $\underline{I}, \underline{J}, \underline{K}$ E SU TALE TERNA:

$\underline{\omega} = p\underline{I} + q\underline{J} + r\underline{K}$ $\qquad$ $\underline{\Gamma}_G = Ap\underline{I} + Bq\underline{J} + Cr\underline{K}$

- $$\frac{d\underline{\Gamma}_G}{dt} = A\dot{p}\,\underline{I} + B\dot{q}\,\underline{J} + C\dot{r}\,\underline{K} + A p\,\dot{\underline{I}} + B q\,\dot{\underline{J}} + C r\,\dot{\underline{K}}$$

$$\Big\downarrow \text{ FORMULE DI POISSON}$$

- $$\frac{d\underline{\Gamma}_G}{dt} = A\dot{p}\,\underline{I} + B\dot{q}\,\underline{J} + C\dot{r}\,\underline{K} + \underline{\omega} \wedge \underbrace{\left(A p\,\underline{I} + B q\,\underline{J} + C r\,\underline{K}\right)}_{\underline{\Gamma}_G} =$$

$$= A\dot{p}\,\underline{I} + B\dot{q}\,\underline{J} + C\dot{r}\,\underline{K} + \underline{\omega} \wedge \underline{\Gamma}_G$$

- QUINDI: $$\underline{\omega} \circ \frac{d\underline{\Gamma}_G}{dt} = \underline{\omega} \circ \left(A\dot{p}\,\underline{I} + B\dot{q}\,\underline{J} + C\dot{r}\,\underline{K}\right) + \cancel{\underline{\omega} \circ \underbrace{[\underline{\omega} \wedge \underline{\Gamma}_G]}_{\perp\,\underline{\omega}}}$$

$$\longrightarrow \quad \underline{\omega} \circ \frac{d\underline{\Gamma}_G}{dt} = \underline{\omega} \circ \left(A\dot{p}\,\underline{I} + B\dot{q}\,\underline{J} + C\dot{r}\,\underline{K}\right) =$$

$$= \left(p\,\underline{I} + q\,\underline{J} + r\,\underline{K}\right) \circ \left(A\dot{p}\,\underline{I} + B\dot{q}\,\underline{J} + C\dot{r}\,\underline{K}\right) =$$

$$= A p \dot{p} + B q \dot{q} + C r \dot{r}$$

- OSS: CALCOLO $$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(A p^2 + B q^2 + C r^2\right) = A p \dot{p} + B q \dot{q} + C r \dot{r}$$

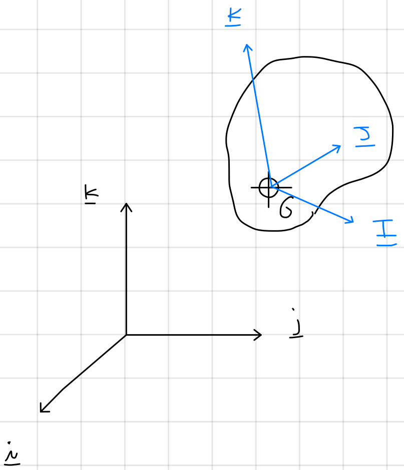
$$\longrightarrow \quad \underline{\omega} \circ \frac{d\underline{\Gamma}_G}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(A p^2 + B q^2 + C r^2\right)$$

- QUINDI $*$ DIVENTA:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} M \underline{v}_G^{\,2}\right) + \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(A p^2 + B q^2 + C r^2\right)\right] = \Pi^{est}$$

$$\frac{d}{dt}\Big[\underbrace{\frac{1}{2} M \underline{v}_G^{\,2} + \frac{1}{2}\left(A p^2 + B q^2 + C r^2\right)}_{T}\Big] = \Pi^{est} \qquad \frac{dT}{dt} = \Pi^{est}$$

EQUAZIONI DI EULERO



- $\# \, gdl = 6 \;\Rightarrow\; \underbrace{x_G, y_G, z_G, \alpha, \beta, \gamma}$

ANGOLI DI CARDANO

- MOTO UNIVOCAMENTE DETERMINATO DA EQ. CARDINALI:

1° $\dfrac{d\underline{Q}}{dt} = R^{est}(x_G, y_G, z_G, \alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ DERIVATE

2° $\dfrac{d\underline{\Gamma}_O}{dt} + \underline{v}_O \wedge \underline{Q} = \underline{M}_O^{est}(x_G, y_G, z_G, \alpha, \beta, \gamma, \ldots)$

- SCELGO $O \equiv G$:

$$\begin{cases} M \dfrac{d v_G}{dt} = R^{est}(x_G, y_G, z_G, \alpha, \beta, \gamma, \ldots) & a \\[2ex] \dfrac{d\Gamma_G}{dt} + \underline{v}_G \wedge \underline{Q} = \underline{M}_G^{est}(x_G, y_G, z_G, \alpha, \beta, \gamma, \ldots) & b \end{cases}$$

a

- $M \ddot{x}_G = R_x^{est}(x_G, y_G, z_G, \alpha, \beta, \gamma, \ldots)$

$M \ddot{y}_G = R_y^{est}(x_G, y_G, z_G, \alpha, \beta, \gamma, \ldots)$

$M \ddot{z}_G = R_z^{est}(x_G, y_G, z_G, \alpha, \beta, \gamma, \ldots)$

SONO EQUAZIONI CHE CONTENGONO ESPLICITAMENTE DERIVATE DELLE COORDINATE LIBERE

- ANALIZZO b: $\dfrac{d\Gamma_G}{dt} = \underline{M}_G^{est}$

~ MA $\underline{I}, \underline{J}, \underline{K}$ TERNA P. I. IN G.

$\underline{\omega} = p\underline{I} + q\underline{J} + r\underline{K}$

$\underline{\Gamma}_G = \hat{I}_G \underline{\omega} = Ap\underline{I} + Bq\underline{J} + Cr\underline{K}$

~ DERIVO $\dot{\underline{\Gamma}}_G = A\dot{p}\underline{I} + B\dot{q}\underline{J} + C\dot{r}\underline{K} + Ap\dot{\underline{I}} + Bq\dot{\underline{J}} + Cr\dot{\underline{K}} =$

POISSON

$= A\dot{p}\underline{I} + B\dot{q}\underline{J} + C\dot{r}\underline{K} + Ap\,\underline{\omega} \wedge \underline{I} + Bq\,\underline{\omega} \wedge \underline{J} + Cr\,\underline{\omega} \wedge \underline{K} =$

$= A\dot{p}\underline{I} + B\dot{q}\underline{J} + C\dot{r}\underline{K} + \underbrace{\underline{\omega} \wedge (Ap\underline{I} + Bq\underline{J} + Cr\underline{K})}_{\text{LO STUDIO}}$

$\sim \quad \underline{w} \wedge (Ap\underline{I} + Bq\underline{J} + Cr\underline{K}) = \det \begin{pmatrix} \underline{I} & \underline{J} & \underline{K} \\ p & q & r \\ Ap & Bq & Cr \end{pmatrix}$

$\sim$ b DIVENTA:

$$\boxed{\begin{aligned} A\dot{p} + (C-B)qr &= \underline{M}_G^{est} \circ \underline{I} \\ B\dot{q} + (A-C)pr &= \underline{M}_G^{est} \circ \underline{J} \\ C\dot{r} + (B-A)pq &= \underline{M}_G^{est} \circ \underline{K} \end{aligned}}$$

EQUAZIONI DI EULERO

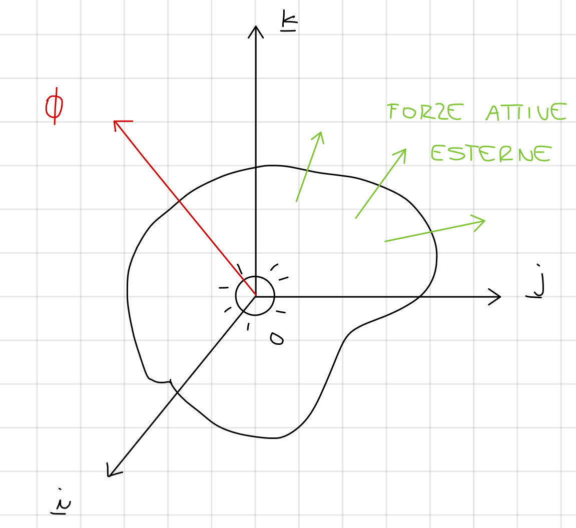
- OSS: PER OTTENERE $\ddot{\alpha}, \ddot{\beta}, \ddot{\gamma}$ DOBBIAMO INTRODURRE PARAMETRIZZAZIONE ANGOLARE $\longrightarrow \underline{w}(\alpha, \beta, \gamma, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$

$\downarrow$

AD ESEMPIO, CON GLI ANGOLI DI CARDANO:

$$\begin{cases} p = \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin\beta \\ q = \dot{\alpha} \cos\beta \sin\gamma - \dot{\beta} \sin\gamma \\ r = \dot{\beta} \sin\gamma + \dot{\alpha} \cos\beta \cos\gamma \end{cases}$$

MOTO PER INERZIA DI UN CORPO RIGIDO CON PUNTO FISSO



- CERNIERA SFERICA A TERRA IN O
- $\#\, gdl = 6-3 = 3$
- SUPPONGO AGISCANO FORZE ATTIVE DI RISULTANTI $\underline{R}^a$, $\underline{M}_O^a$
- CI SARÀ SOLO UNA FORZA REATTIVA ϕ (NON CI SONO COPPIE REATTIVE)

- IL MOTO DEL SISTEMA È DETERMINATO DA:

$$\begin{cases} \dfrac{d\underline{Q}}{dt} = \underline{R}^a + \underline{R}^r \; \phi \\ \dfrac{d\underline{\Gamma}_o}{dt} + \underline{V}_o \wedge \underline{Q} = \underline{M}_o^a + \cancel{\underline{M}_o^r} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dfrac{d\underline{Q}}{dt} = \underline{R}^a + \phi \\ \boxed{\dfrac{d\underline{\Gamma}_o}{dt} = \underline{M}_o^a} \end{cases}$$

3 EQUAZIONI PURE DI MOTO IN 3 C.L.

- IL MOTO È UNIVOCAMENTE DETERMINATO DA: $\dfrac{d\underline{\Gamma}_o}{dt} = \underline{M}_o^a$

- PRENDO TERNA P.I. IN O $(\underline{I}, \underline{J}, \underline{K})$:

$$\sim \begin{cases} \underline{\omega} = p\underline{I} + q\underline{J} + r\underline{K} \\ \underline{\Gamma}_o = \hat{I}_o \underline{\omega} = Ap\underline{I} + Bq\underline{J} + Cr\underline{K} \end{cases}$$

O PUNTO FISSO

~ CALCOLO $\dfrac{d\underline{\Gamma}_o}{dt} = A\dot{p}\underline{I} + Bq\underline{J} + C\dot{r}\underline{K} + Ap\dot{\underline{I}} + Bq\dot{\underline{J}} + Cr\dot{\underline{K}} =$

POISSON

$A\dot{p}\underline{I} + Bq\underline{J} + C\dot{r}\underline{K} + Ap\underline{\omega}\wedge\underline{I} + Bq\underline{\omega}\wedge\underline{J} + Cr\underline{\omega}\wedge\underline{K}$

- - TROVO DI NUOVO LE EQUAZIONI DI EULERO

$$\boxed{\begin{aligned} A\dot{p} + (C-B)qr &= \underline{M}^{est} \circ \underline{I} \\ B\dot{q} + (A-C)pr &= \underline{M}_o^{est} \circ \underline{J} \\ C\dot{r} + (B-C)pq &= M_o^{est} \circ \underline{K} \end{aligned}}$$

$\longrightarrow$ LE EQUAZIONI DI EULERO HANNO LA STESSA FORMA SIA CHE IL POLO SIA G CHE O

• CONSIDERO IL CASO DEL MOTO PER INERZIA: LE FORZE ATTIVE HANNO MOMENTO RISULTANTE NULLO RISPETTO AL PUNTO FISSO ($M_O^a = 0$)

CONSEGUENZA 1: $\frac{d\Gamma_O}{dt} = M_O^a = 0 \longrightarrow \Gamma_O = \text{cost}$ (E FISSO)

CONSEGUENZA 2: LE EQUAZIONI DI EULERO DIVENTANO:

$$\begin{aligned} A\dot{p} + (C-B)qr &= \underline{M}_O^{est} \cdot \underline{I} \\ B\dot{q} + (A-C)pr &= \underline{M}_O^{est} \cdot \underline{J} \\ C\dot{r} + (B-C)pq &= \underline{M}_O^{est} \cdot \underline{K} \end{aligned} \longrightarrow \boxed{\begin{aligned} A\dot{p} + (C-B)qr &= 0 \\ B\dot{q} + (A-C)pr &= 0 \\ C\dot{r} + (B-C)pq &= 0 \end{aligned}}$$

SISTEMA DI EQ. DIFFERENZIALI IN p, q, r

=> LO RISOLVIAMO PER $p(t), q(t), r(t)$

• RISOLVIAMO NEI CASI:

1) $A = B = C$

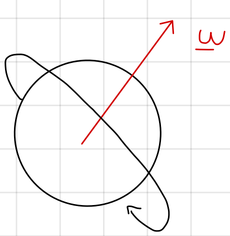
~ MOTO PER INERZIA: $\Gamma_O = \text{cost}$

~ $\Gamma_O = Ap\underline{I} + Bq\underline{J} + Cr\underline{K}$

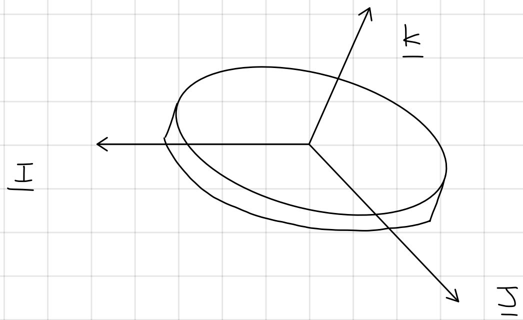
$\hookrightarrow \Gamma_O = Ap\underline{I} + Aq\underline{J} + Ar\underline{K} = A(p\underline{I} + q\underline{J} + r\underline{K}) = A\underline{\omega} = \text{cost}$

~ MA $A = \text{cost} \longrightarrow \underline{\omega} = \text{cost}$

=> QUINDI SE $A = B = C$ IL MOTO PER INERZIA È UNA ROTAZIONE UNIFORME INTORNO A VETTORE $\underline{\omega}$ FISSO NELLO SPAZIO



2) $A = B \neq C$ (CORPO A STRUTTURA GIROSCOPICA)



~ $\omega \neq cost$, MA $\|\underline{\omega}\| = cost$

DIM:

~ MOTO D' INERZIA $\Gamma_0 = cost$

~ $\Gamma_0 = A p \underline{I} + B q \underline{J} + C r \underline{K} \longrightarrow \Gamma_0 = A (p \underline{I} + q \underline{J}) + C r \underline{K}$

~ PRENDO 3° EQUAZIONE DI EULERO:

$$C \dot{r} + \cancel{(B-A)} p q = 0 \longrightarrow C \dot{r} = 0 \longrightarrow r(t) = cost = r_0$$

~ $\Gamma_0 = A (p \underline{I} + q \underline{J}) + C r_0 \underline{K} = cost$

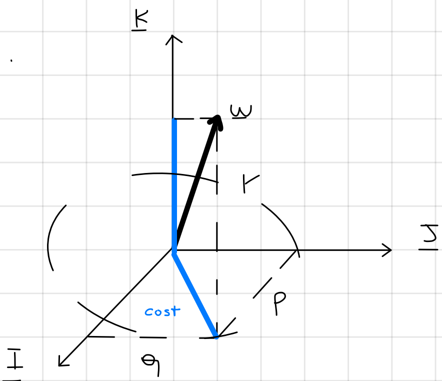
$\longrightarrow \|\Gamma_0\|^2 = A^2 (p^2 + q^2) + C^2 r_0^2 = cost$

$\longrightarrow A^2 (p^2 + q^2) = \|\Gamma_0\|^2 - C^2 r_0^2 = cost$

$$\longrightarrow A^2 (p^2 + q^2) = cost \longrightarrow p^2 + q^2 = cost$$

~ SE CONSIDERO: $\|\underline{\omega}\|^2 = p^2 + q^2 + r^2 = cost \longrightarrow \|\underline{\omega}\| = cost$

• OSS:



MI ASPETTO CHE $p \underline{I} + q \underline{J}$ SI MUOVA SU UNA CIRCONFERENZA

- DIMOSTRAZIONE: $r = cost = r_0$ DIMOSTRATO CON 3^a EQUAZIONE DI EULERO

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr = 0 & 1^a \text{ EQ. EULERO} \\ B\dot{q} + (A-C)pr = 0 & 2^a \text{ EQ EULERO} \end{cases} \xrightarrow{A=B} \begin{cases} A\dot{p} + (C-A)qr = 0 \\ A\dot{q} + (A-C)pr = 0 \end{cases}$$

~ MA $r = r_0 = cost$

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-A)r_0 q = 0 \\ A\dot{q} + (A-C)r_0 p = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \dot{p} + \dfrac{C-A}{A} r_0 q = 0 \\ \dot{q} + \dfrac{A-C}{A} r_0 p = 0 \end{cases}$$

~ DEFINISCO: $\Omega = \dfrac{C-A}{A} r_0$:

$$\begin{cases} \dot{p} + \Omega q = 0 \\ \dot{q} - \Omega p = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{DERIVO}} \begin{cases} \ddot{p} + \Omega \dot{p} = 0 \\ \dot{q} = \Omega p \end{cases} \longrightarrow \boxed{\ddot{p} + \Omega^2 p = 0}$$

OSCILLATORE ARMONICO

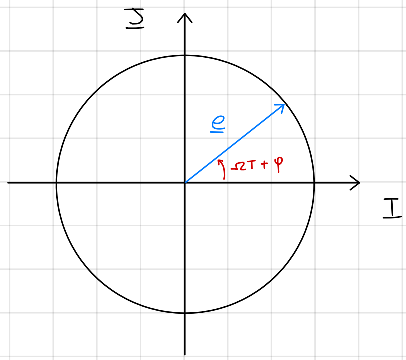
~> SOLUZIONE OSCILLATORE ARMONICO: $p(t) = A\cos(\Omega t + \varphi)$

~ $q = \dfrac{-\dot{p}}{\Omega} \longrightarrow q(t) = A\sin(\Omega t + \varphi)$

~ ALLORA: $\begin{cases} p(t) = A\cos(\Omega t + \varphi) \\ q(t) = A\sin(\Omega t + \varphi) \end{cases}$

- OSS 1: $p^2 + q^2 = e^2 = cost$

- OSS 2:

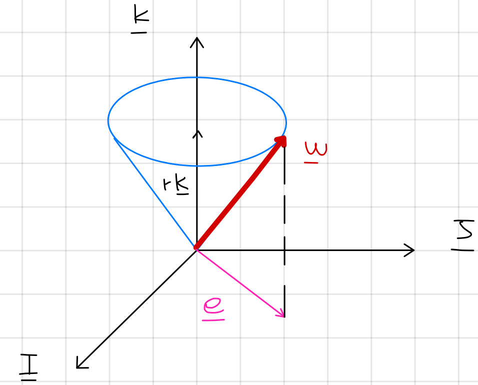


$$\underline{e} = e\cos(\Omega t + \phi)\underline{I} + e\sin(\Omega t + \phi)\underline{J}$$

$$\longrightarrow \underline{e} = p\underline{I} + q\underline{J}$$

MOTO CIRCOLARE UNIFORME INTORNO A $\underline{k}$

GRAFICAMENTE:

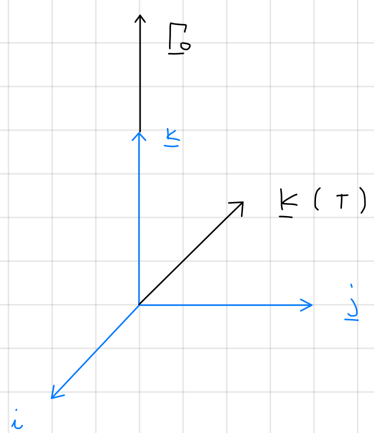


- DEFINIZIONE: $\underline{e} = p\underline{I} + q\underline{J}$ É DETTO COMPONENTE EQUATORIALE DELLA VELOCITÀ ANGOLARE

- STUDIAMO MOTO DI $\underline{K}$ RISPETTO AD ASSE FISSO IN $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$:

~ MOTO PER INERZIA: $\Gamma_0 = cost \longrightarrow$ LO SCELGO COME DIREZIONE FISSA

~ STUDIO MOTO DI $\underline{K}$ RISPETTO A $\underline{\Gamma_0}$:



PRENDO TERNA FISSA CON $\underline{k} \parallel \Gamma_0$

$\longrightarrow \Gamma_0 = \Gamma_0 \, \underline{k}$

~ APPLICO POISSON: $\dot{\underline{K}} = \underline{\omega} \wedge \underline{K}$

$\hookrightarrow$ MA $\Gamma_0 = Ap\,\underline{I} + Bq\,\underline{J} + Cr\,\underline{K}$

~ DOVE $A = B$ $\quad \Gamma_0 = A(p\underline{I} + q\underline{J}) + C r_0 \underline{K} = cost$

~ SOMMO E SOTTRAGGO $A r_0 \underline{K}$:

$$\Gamma_0 = A(p\underline{I} + q\underline{J}) + C r_0 \underline{K} + A r_0 \underline{K} - A r_0 \underline{K} = cost$$

$$= A(\underbrace{p\underline{I} + q\underline{J} + r_0 \underline{K}}) + (C - A) r_0 \underline{K} = cost$$

~ $\Gamma_0 = A\underline{\omega} + (C-A) r_0 \underline{K} = cost$

$$\longrightarrow \quad \underline{\omega} = \frac{\Gamma_0}{A} + \frac{A-C}{A} r_0 \underline{K}$$

~ INSERISCO IN POISSON:

$$\dot{\underline{K}} = \left(\frac{\Gamma_0}{A} + \frac{A-C}{A} r_0 \underline{K} \right) \wedge \underline{K} = \frac{\Gamma_0}{A} \wedge \underline{K}$$

~ MA $\Gamma_0 = \Gamma_0 \underline{k} \longrightarrow \dot{K} = \frac{\Gamma_0}{A} \underline{k} \wedge \underline{K}$ $\quad \partial$

~ CONSIDERO $\underline{K} = K_x \underline{i} + K_y \underline{j} + K_z \underline{k}$

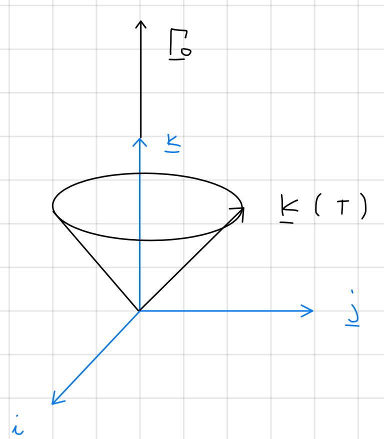
$$\longrightarrow \quad \underline{k} \wedge \underline{K} = \underline{k} \wedge (K_x \underline{i} + K_y \underline{j} + K_z \underline{k}) = K_x \underline{j} - K_y \underline{i}$$

~ ∂
$$\begin{cases} \dot{K}_x = -\frac{\Gamma_0}{A} K_y \\ \dot{K}_y = \frac{\Gamma_0}{A} K_x \\ \dot{K}_z = 0 \end{cases}$$

~ DEFINISCO: $\Omega = \frac{\Gamma_0}{A}$

$$\begin{cases} K_x + \Omega K_y = 0 \\ K_y - \Omega K_x = 0 \\ K_z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{SOLUZIONE}} \begin{cases} K_x = \bar{K} \cos(\Omega t + \varphi) \\ K_y \quad \bar{K} \sin(\Omega t + \varphi) \\ K_z = \text{cost} \end{cases}$$

· GRAFICAMENTE:



3) $A \neq B \neq C$

- SI DIMOSTRA CHE $\underline{\omega} \neq \text{cost}$ SIA IN MODULO CHE IN DIREZIONE
- DIM:

$$\sim \begin{cases} A\dot{p} + (C-B)\,qr = 0 \\ B\dot{q} + (A-C)\,pr = 0 \\ C\dot{r} + (B-A)\,pq = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} p\dot{p} = \dfrac{B-C}{A}\,qr\,p \\ q\dot{q} = \dfrac{C-A}{B}\,pr\,q \\ r\dot{r} = \dfrac{A-B}{C}\,pq\,r \end{cases}$$

~ SOMMIAMO:

$$p\dot{p} + q\dot{q} + r\dot{r} = \left(\frac{B-C}{A} + \frac{C-A}{B} + \frac{A-B}{C} \right) pqr$$

~ CONSIDERIAMO $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}\|\omega\|^2\right) = \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{1}{2}(p^2+q^2+r^2)\right] = p\dot{p} + q\dot{q} + r\dot{r}$

$$\sim \frac{d}{dt}\|\underline{\omega}\| \neq 0 \longrightarrow \|\underline{\omega}\| \neq \text{cost}$$

~ SI POSSONO TROVARE 2 INTEGRALI PRIMI DEL MOTO:

Γ_0) MOTO PER INERZIA $\Rightarrow \Gamma_0 = \text{cost} = Ap\,\underline{I} + Bq\,\underline{J} + Cr\,\underline{K} = \text{cost}$

T) $\dfrac{dT}{dt} = \Pi^{est}$

~ MA $\Pi^{est} = \underline{R^{est}} \circ \underline{v_0} + \underline{M_0^{est}} \circ \underline{\omega}$

$R^{est,a} / R^{est,r}$ $\quad M_0^{est,a} / M_0^{est,r}$

$$\Pi^{est} = \cancel{R^a \circ \underline{v_0}} + \cancel{\phi \circ \underline{v_0}} + \cancel{M_0^a \circ \underline{\omega}} = 0 \longrightarrow T = \text{cost}$$

$v_0 = 0,\ M_0^a = 0 \longrightarrow$ MOTO CON PUNTO FISSO

ROTAZIONI PERMANENTI

- EQUAZIONI DI EULERO:
$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr = \underline{M}_G^{est} \cdot \underline{I} \\ B\dot{q} + (A-C)pr = \underline{M}_G^{est} \cdot \underline{J} \\ C\dot{r} + (B-A)pq = M_G^{est} \cdot \underline{K} \end{cases}$$

- CASO 1) $p(t) = p_0 = cost$, $q(t) = 0$, $r(t) = 0$
- CASO 2) $q(t) = q_0 = cost$, $p(t) = 0$, $r(t) = 0$
- CASO 3) $r(t) = r_0 = cost$, $p(t) = 0$, $q(t) = 0$

3 SOLUZIONI PARTICOLARI DELLE EQUAZIONI DI EULERO

CASO 1: SE METTIAMO IN ROTAZIONE IL C.R. CON:

$p(t_0) = p_0 = cost$, $q(t_0) = 0$, $r(t_0) = 0$ ALLORA IL C.R. EVOLVE IN:

$p(t) = p_0 = cost$, $q(t) = 0$, $r(t) = 0$

~ $\underline{\omega} = p\underline{I} + q\underline{J} + r\underline{K} \longrightarrow \underline{\omega} = p_0\underline{I} \longrightarrow \underline{\omega} \parallel \underline{I}$

~ $\underline{\Gamma}_0 = Ap\underline{I} + Bq\underline{J} + Cr\underline{K} \longrightarrow \underline{\Gamma}_0 = Ap_0\underline{I} \longrightarrow \underline{\Gamma}_0 \parallel \underline{\omega} \parallel \underline{I}$

MA MOTO PER INERZIA $\longrightarrow \underline{\Gamma}_0 = cost \longrightarrow \underline{I} = cost \longrightarrow \underline{\omega} = cost$

CASO 2:
$$\begin{cases} \underline{\omega} = q_0\underline{J} \\ \underline{\Gamma}_0 = Bq_0\underline{J} \end{cases} \longrightarrow \underline{\Gamma}_0 \parallel \underline{\omega} \parallel \underline{J}$$

MA MOTO PER INERZIA $\longrightarrow \underline{\Gamma}_0 = cost \longrightarrow \underline{J} = cost \longrightarrow \underline{\omega} = cost$

CASO 3:
$$\begin{cases} \underline{\omega} = r_0\underline{K} \\ \underline{\Gamma}_0 = Cr_0\underline{K} \end{cases} \longrightarrow \underline{\Gamma}_0 \parallel \underline{\omega} \parallel \underline{K}$$

MA MOTO PER INERZIA $\longrightarrow \underline{\Gamma}_0 = cost \longrightarrow \underline{K} = cost \longrightarrow \underline{\omega} = cost$

STABILITÀ DELLE ROTAZIONI PERMANENTI

- **DEFINIZIONE DI SOLUZIONE STABILE:** SE LE SOLUZIONI CHE PARTONO DA $\forall$ C.I. VICINA A QUELLA DELLA NOSTRA SOLUZIONE RESTANO VICINE $\forall t$
- **DEFINIZIONE DI SOLUZIONE INSTABILE:** SE LE SOLUZIONI CHE PARTONO DA $\forall$ C.I. VICINA A QUELLA DELLA NOSTRA SOLUZIONE SI ALLONTANANO INDEFINITAMENTE NEL TEMPO

<u>QUINDI:</u> SE ROTAZIONE PERMANENTE STABILE: REALIZZABILE

SE ROTAZIONE PERMANENTE INSTABILE: IRREALIZZABILE

- STUDIO IL CASO 3: $\bar{r}(t) = r_0 \qquad p(t), q(t) = 0$

$$\begin{cases} p(t) = \bar{p}(t) + \varepsilon_1(t) \\ q(t) = \bar{q}(t) + \varepsilon_2(t) \\ r(t) = \bar{r}(t) + \varepsilon_3(t) \end{cases}$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ SCOSTAMENTI DI p, q, r DA $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$

$$\Rightarrow \begin{cases} p(t) = \varepsilon_1(t) \\ q(t) = \varepsilon_2(t) \\ r(t) = r_0(t) + \varepsilon_3(t) \end{cases}$$

~ VALGONO EQUAZIONI DI EULERO:
$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr = \underline{M}_G^{est} \cdot \underline{I} \\ B\dot{q} + (A-C)pr = \underline{M}_G^{est} \cdot \underline{J} \\ C\dot{r} + (B-A)pq = \underline{M}_G^{est} \cdot \underline{K} \end{cases}$$

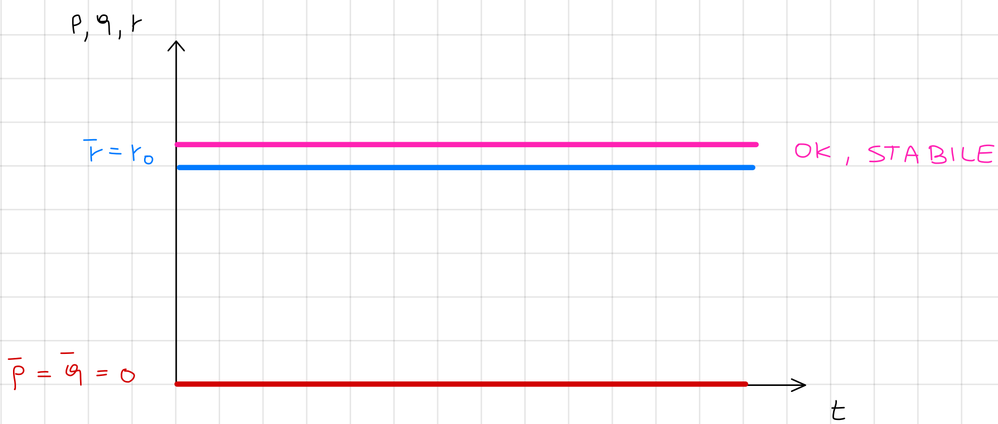
$$\sim \begin{cases} A\dot{\varepsilon}_1 + (C-B)(r_0 + \varepsilon_3)\varepsilon_2 = 0 \\ B\dot{\varepsilon}_2 + (A-C)(r_0+\varepsilon_3)\varepsilon_1 = 0 \\ C\dot{\varepsilon}_3 + (B-A)\varepsilon_1\varepsilon_2 = 0 \end{cases}$$

~ MI INTERESSANO p, q, r VICINE A $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ $\longrightarrow$ LINEARIZZO IN $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_1, \dot{\varepsilon}_2, \dot{\varepsilon}_3$

$\hookrightarrow$ TRASCURIAMO I TERMINI QUADRATICI DEL TIPO: $\varepsilon_1\varepsilon_2$, $\dot{\varepsilon}_1\varepsilon_1$ ...

$$\Rightarrow \begin{cases} A\dot{\varepsilon}_1 + (C-B)r_0\varepsilon_2 = 0 \\ B\dot{\varepsilon}_2 + (A-C)r_0\varepsilon_1 = 0 \\ C\dot{\varepsilon}_3 = 0 \end{cases}$$

$C\dot{\varepsilon}_3 = 0 \longrightarrow \dot{\varepsilon}_3 = 0 \Rightarrow \varepsilon_3 = \text{cost} = \varepsilon_3(t_0)$



~ CONSIDERO LE PRIME 2 EQ. DI EULERO:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 + \dfrac{C-B}{A} r_0 \varepsilon_2 = 0 \\ \dot{\varepsilon}_2 + \dfrac{A-C}{B} r_0 \varepsilon_1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{DERIVO}} \begin{cases} \ddot{\varepsilon}_1 + \dfrac{C-B}{A} r_0 \dot{\varepsilon}_2 = 0 \\ \ddot{\varepsilon}_2 + \dfrac{A-C}{B} r_0 \dot{\varepsilon}_1 = 0 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad \ddot{\varepsilon}_1 + \frac{(C-B)(C-A)}{AB} r_0^2 \, \varepsilon_1 = 0$$

LA FORMA DELLA SOLUZIONE DIPENDE DAL SEGNO DI $(C-B)(C-A)$:

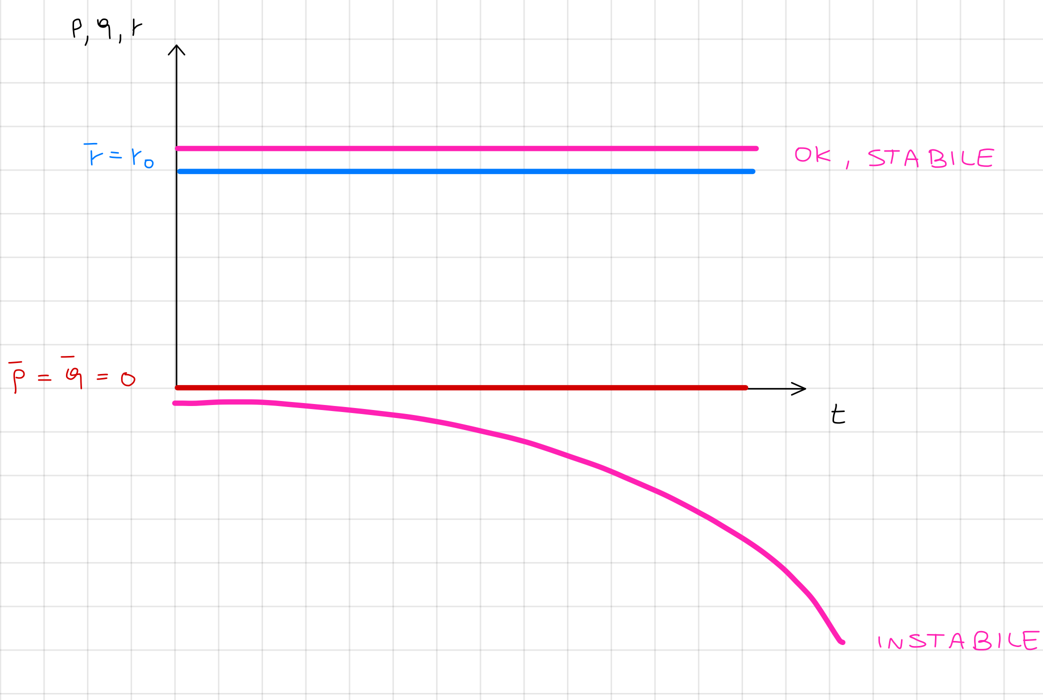
$$\boxed{(C-B)(C-A) < 0} \longrightarrow \begin{cases} C-B > 0 \quad \& \quad C-A < 0 \\ C-B < 0 \quad \& \quad C-A > 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A < \boxed{C} < B \\ B < \boxed{C} < A \end{cases}$$

C MOMENTO D'INERZIA INTERMEDIO

$$\longrightarrow \quad \frac{(C-B)(C-A)}{AB} r_0^2 = -\Omega^2 < 0$$

~ SOSTITUIAMO: $\ddot{\varepsilon}_1 - \Omega^2 \varepsilon_1 = 0$

<u>SOLUZIONE</u>: $\varepsilon_1(t) = a e^{-\Omega t} + b e^{-\Omega t}$



$$\boxed{(C-B)(C-A) > 0} \longrightarrow \begin{cases} C-B > 0 \quad \& \quad C-A > 0 \\ C-B < 0 \quad \& \quad C-A < 0 \end{cases}$$

$\boxed{C} > A > B$

$\boxed{C} < A < B$

C ASSE DI MASSIMA/MINIMA INERZIA

$$\longrightarrow \frac{(C-B)(C-A)}{AB} r_0^2 = \Omega^2 > 0$$

~ SOSTITUISCO: $\ddot{\varepsilon}_1 + \Omega \varepsilon_1 = 0$ OSCILLATORE ARMONICO

~ SOLUZIONE: $\varepsilon_1(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)$

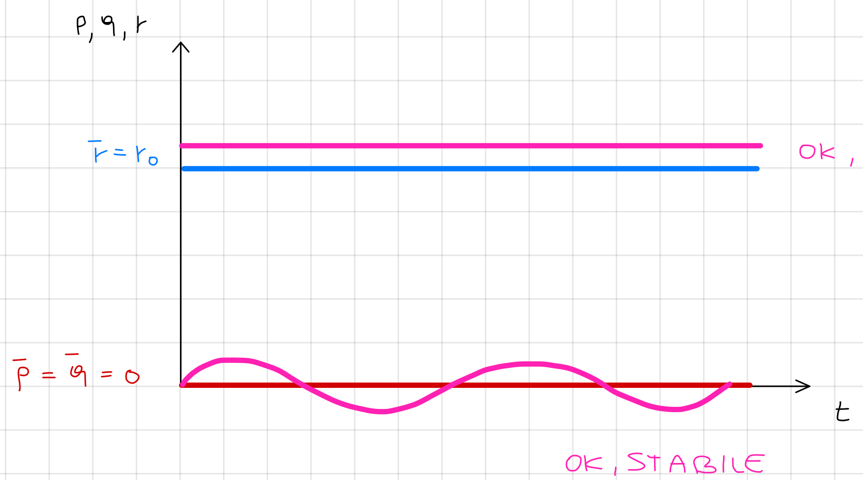
(STESSO ANDAMENTO ANCHE PER ε_2)

→ ROTAZIONE PERMANENTE LINEARMENTE STABILE

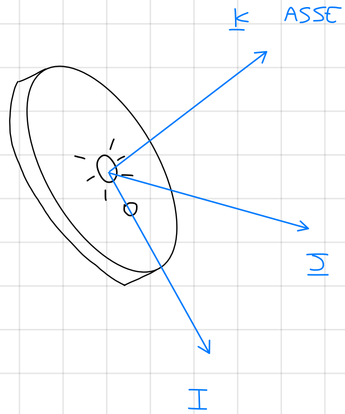
→ OTTENUTE CON SISTEMA LINEARIZZATO

SI DIMOSTRA CHE SE UNA SOLUZIONE È LINEARMENTE INSTABILE LO È ANCHE PER IL SISTEMA ORIGINARIO.

SE È LINEARMENTE STABILE, NON È DETTO CHE IL SISTEMA ORIGINARIO LO SIA



- CASO PARTICOLARE DI CORPO RIGIDO: GIROSCOPIO



~ CERNIERA SFERICA IN O

~ MOTO PER INERZIA: $\underline{M}_O^a = 0$

~ PRENDO ASSI P. I. $\underline{I}, \underline{J}, \underline{k}$

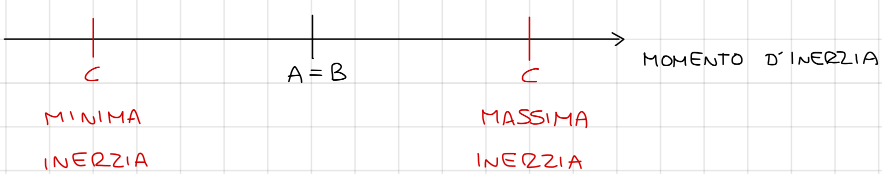
- PROBLEMA: LA ROTAZIONE PERMANENTE INTORNO A ASSE GIROSCOPICO È STABILE?

$\hookrightarrow$ SI

- DIM 1: $\underline{I}, \underline{J}, \underline{k}$ MA CORPO GIROSCOPICO: $A = B$

$\underline{I} \to A$, $\underline{J} \to B$, $\underline{k} \to C$

QUINDI

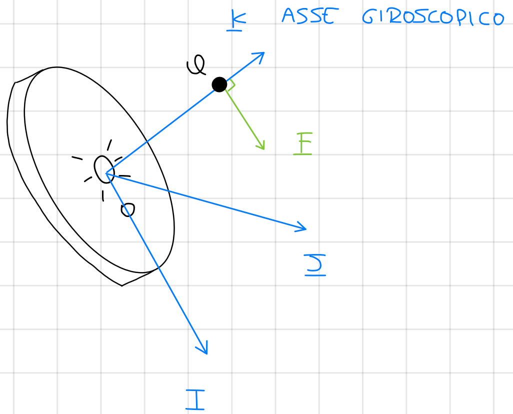


$\longrightarrow$ COMUNQUE LA RELAZIONE È STABILE

- DIM 2: $\ddot{\varepsilon}_1 + \dfrac{(C-B)(C-A)}{AB} r_0^2 \, \varepsilon_1 = 0$

~ MA $A = B$: $\ddot{\varepsilon}_1 + \underbrace{\dfrac{(C-A)^2}{A^2}}_{>0} r_0^2 \, \varepsilon_1 = 0$

• FENOMENI GIROSCOPICI ELEMENTARI



~ APPLICO $\underline{F}$ = cost $\perp$ $\underline{k}$

~ OSS1: NON È MOTO PER INERZIA

~ OSS2: $\underline{F}$ = cost $\longrightarrow$ CONTINUA IN t E COSTANTE

~ STUDIAMO MOTO: # gdl = 3

~ 2^a EQUAZIONE CARDINALE: $\frac{d\Gamma_o}{dt} = M_o^a$ | 3 EQUAZIONI DEL MOTO IN 3 gdl

~ MA $\underline{M}_o^a = (Q-O)\wedge \underline{F} \longrightarrow \frac{d\Gamma_o}{dt} = (Q-O)\wedge\underline{F}$

$\hookrightarrow$ NON RISOLVIAMO MA RICAVIAMO EQUAZIONE CHE REGOLA IL MOTO DI $\underline{k}$:

$$\begin{cases} A\dot{p} + (C-B)qr = M_o^a \circ \underline{I} \\ B\dot{q} + (A-C)pr = \underline{M}_o^a \circ \underline{J} \\ C\dot{r} + (B-A)pq = \underline{M}_o^a \circ \underline{k} \end{cases} \xrightarrow{A=B} \begin{cases} A\dot{p} + (C-A)qr = M_o^a \circ \underline{I} \\ A\dot{q} + (A-C)pr = \underline{M}_o^a \circ \underline{J} \\ \boxed{C\dot{r} + (A-A)pq = \underline{M}_o^a \circ \underline{k}} \end{cases}$$

~ $\underline{M}_o^a \circ \underline{k} = (\|Q-O\|\,\underline{k}\wedge\underline{F})\circ\underline{k} = 0$

$\longrightarrow C\dot{r} = 0 \longrightarrow \dot{r} = 0 \longrightarrow r(t) = r_o = \text{cost}$

~ POSSIAMO SCRIVERE: $\underline{w} = \underbrace{p\underline{I} + q\underline{J}}_{\underline{e}} + r_o\underline{k} = \underline{e} + r_o\underline{k}$

~ $\Gamma_o = Ap\underline{I} + Aq\underline{J} + Cr_o\underline{k} = A\underline{e} + Cr_o\underline{k}$

~ TROVO RELAZIONE $e \Leftrightarrow \dot{\underline{k}}$:

$$\begin{cases} \text{POISSON: } \dot{\underline{k}} = \underline{\omega} \wedge \underline{k} \\ \text{MA } \underline{\omega} = \underline{e} + r_0 \underline{k} \end{cases} \Rightarrow \dot{\underline{k}} = (\underline{e} + r_0 \underline{k}) \wedge \underline{k} = \underline{e} \wedge \underline{k}$$

$$\longrightarrow \dot{\underline{k}} = \underline{e} \wedge \underline{k}$$

~ RICAVO $e(\underline{k}, \dot{\underline{k}})$:

$\underline{e} \wedge \underline{k} = \dot{\underline{k}}$

$-\underline{k} \wedge \underline{e} = \dot{\underline{k}}$

$\underline{k} \wedge \underline{e} = -\dot{\underline{k}}$

$\underline{a} \wedge \underline{x} = \underline{b}$

~ CONDIZIONE NECESSARIA: $\underline{a} \circ \underline{b} = 0 \longrightarrow \underline{k} \circ \dot{\underline{k}} = 0 \longrightarrow \dot{\underline{k}} \perp \underline{k}$

~ SOLUZIONE: $\underline{x} = \dfrac{b \wedge a}{\|a\|^2} + \lambda a$

$\Rightarrow \underline{e} = -\dot{\underline{k}} \wedge \underline{k} + \cancel{\lambda \underline{k}} = \underline{k} \wedge \dot{\underline{k}}$

$\longrightarrow$ SICCOME $e = p \underline{I} + q \underline{J} \longrightarrow \lambda = 0$

~ SOSTITUISCO IN $\underline{\Gamma_0}$:

$\underline{\Gamma_0} = A \underline{e} + C r_0 \underline{k} = A(\underline{k} \wedge \dot{\underline{k}}) + C r_0 \underline{k}$

~ 2^a EQ. CARDINALE:

$$\frac{d \underline{\Gamma_0}}{dt} = \underline{M_0} \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt} A(\underline{k} \wedge \dot{\underline{k}}) + C r_0 \dot{\underline{k}} = \underline{M_0}}$$

EQUAZIONE DEL GIROSCOPIO

- TENACIA DEL GIROSCOPIO:

~ SUPPONGO $\underline{k}(t)$ NOTO E CALCOLO $\underline{M}_o$ NECESSARIO

CASO 0: $r_o = 0 \longrightarrow \underline{M}_o = A \dfrac{d}{dt}(\underline{k} \wedge \dot{\underline{k}})$

CASO 1: $r_o \neq 0 \longrightarrow M_o^1 = A \dfrac{d}{dt}(\underline{k} \wedge \dot{\underline{k}}) + C r_o \dot{\underline{k}}$

QUINDI $\underline{M}_o^1 = \underline{M}_o^0 + C r_o \dot{\underline{k}}$

INOLTRE $M_o^1 \propto r_o \longrightarrow$ MAGGIORE È r_o, MAGGIORE SARÀ $\underline{M}_o$ DA APPLICARE PER AVERE STESSO MOTO

- PARALLELISMO AL MOMENTO SOLLECITANTE:

~ SUPPONGO GIROSCOPIO IN MOTO RAPIDO: $r_o \gg p, q \Rightarrow r_o \gg \|\underline{e}\|$

~ $\underline{\Gamma}_o = A\underline{e} + C r_o \underline{k} \simeq C r_o \underline{k}$

~ 2^a EQ. CARDINALE: $\dfrac{d\,\underline{\Gamma}_o}{dt} = M_o^a \Rightarrow \dfrac{d(C r_o \underline{k})}{dt} = M_o^a$

$C r_o \dot{\underline{k}} = M_o$ $\boxed{\dot{\underline{k}} = \dfrac{M_o}{C r_o}}$

~ QUINDI: SE $r_o > 0$: $\dot{\underline{k}} \parallel \underline{M}_o$ CON STESSO VERSO

$\longrightarrow$ $\underline{k}$ RUOTA IN DIREZIONE DI $\underline{M}_o$

STABILITÀ DELLE SOLUZIONI D'EQUILIBRIO

1) CONFIGURAZIONI DI EQUILIBRIO

2) DEFINIZIONE DI STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO

3) CONDIZIONI SUFFICIENTI PER CAPIRE LA STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO

• **DETERMINAZIONE DELLE CONFIGURAZIONI DI EQUILIBRIO:**

• HP FONDAMENTALI:

a) SISTEMA OLONOMO $\underline{r}_i(q_1, \dots, q_n, t)$

b) VINCOLI FISSI $\underline{r}_i(q_1, \dots, q_n)$

c) FORZE NON DIPENDENTI ESPLICITAMENTE DA t $\longrightarrow$ $\underline{R}_i^a(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$

$\longrightarrow$ IN TALI HP VALGONO LE EQUAZIONI DI LAGRANGE:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \qquad k = 1, \dots, n$$

N.B. SE IL MOTO DEL SISTEMA È DESCRIVIBILE MEDIANTE LE EQ. DI LAGRANGE ALLORA VALE LO STESSO PER LE SOLUZIONI

~ SISTEMA OLONOMO + VINCOLI FISSI (a + b) $\longrightarrow$ $T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{kl}(q_1, \dots, q_n) \cdot \dot{q}_k \dot{q}_l$

~ INOLTRE: $Q_k \triangleq \sum_{i=1}^{\tilde{n}} \underline{R}_i^a \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}$, DOVE:

$$\left.\begin{array}{ll} c) & \underline{R}_i^a(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \\ a+b) & \underline{r}_i(q_1, \dots, q_n) \longrightarrow \frac{\partial \underline{r}_i}{\partial q_k}(q_1, \dots, q_n) \end{array}\right\} \; Q_k(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$$

$\hookrightarrow$ SEMPLIFICO: MI METTO NEL CASO $k = 1$. $\Rightarrow$ 1 g d l

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q$$

~ DOVE: $T = \frac{1}{2} a(q)\,\dot q^2$ CON $a(q) > 0$ PERCHÉ È EN. CINETICA

└→ $Q = Q(q, \dot q)$

~ SVILUPPO L'EQ. DI LAGRANGE:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_k} = a(q)\cdot \dot q \longrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_k}\right) = a(q)\cdot \ddot q + \frac{\partial a}{\partial q}\cdot \dot q \cdot \dot q =$$

$$= a(q)\,\ddot q + \frac{da}{dq}\,\dot q$$

~ $$\frac{\partial T}{\partial q} = \frac{1}{2}\,\frac{da}{dq}\,\dot q^2$$

~ SOSTITUIAMO: $$a(q)\,\ddot q + \frac{da}{dq}\,\dot q^2 - \frac{1}{2}\,\frac{da}{dq}\cdot \dot q^2 = Q(q, \dot q)$$

$$\longrightarrow \boxed{a(q) + \frac{1}{2}\,\frac{da}{dq}\,\dot q^2 = Q(q, \dot q)}$$

OGNI MOTO È DESCRIVIBILE CON QUESTA EQUAZIONE *

• SI DIMOSTRA CHE CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE AFFINCHÉ $q(t) = q_0 = \text{cost}$ SIA DI EQUILIBRIO È $Q(q_0, 0) = 0$

CONDIZIONE NECESSARIA: SUPPONIAMO DI SAPERE CHE $q(t) = q_0 = \text{cost}$ È UNA SOLUZIONE DI EQUILIBRIO

└→ INSERISCO IN * E TROVO LA CONDIZIONE CHE DEVE ESSERE SODDISFATTA: $Q(q, 0) = 0$

CONDIZIONE SUFFICIENTE: SUPPONGO DI AVER TROVATO UNA SOLUZIONE q_0 DELL'EQUAZIONE $Q(q, 0) = 0$ ⟶ PARTO DA QUESTA, TROVO SOL q_0 E INSERISCO IN *

~ COSTRUIAMO IL MOTO: $\begin{cases} q(t_0) = q_0 & q(t) = q_0 \quad \forall t > t_0 \\ \dot{q}(t_0) = 0 & \dot{q}(t) = 0 \quad \forall t > t_0 \end{cases}$

$\longrightarrow$ SOSTITUISCO IN * $\longrightarrow$ $Q = 0$ $\longrightarrow$ IL MOTO DI EQUILIBRIO COSTRUITO È ANCHE SOLUZIONE D'EQUILIBRIO

- OSS1: SE LE FORZE SONO POSIZIONALI.

$R_i^a(q_1, \dots, q_n) \longrightarrow Q_k(q_1, \dots, q_n) \xrightarrow{n=1}$ CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE

PER EQUILIBRIO: $Q(q_0) = 0$

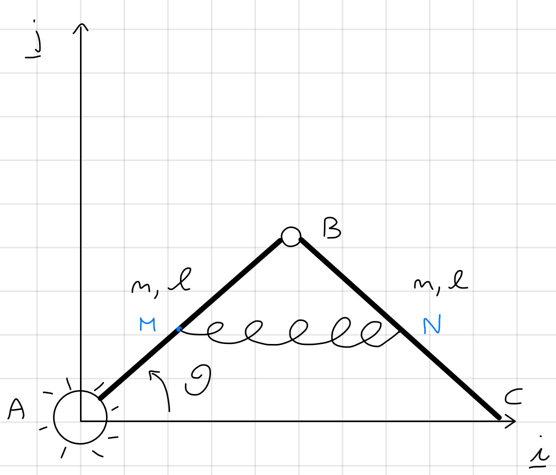
- OSS2: SE LE FORZE SONO POSIZIONALI E CONSERVATIVE.

~ $Q_k(q_1, \dots, q_n) = \dfrac{-\partial V(q_1, \dots, q_n)}{\partial q_k} \xrightarrow{n=1}$ CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE

PER EQUILIBRIO: $\dfrac{dV}{dq}(q_0) = 0$

$\longrightarrow$ LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO SONO I PUNTI STAZIONARI DI V

- ESEMPIO: PANTOGRAFO



~ APPOGGIO IN C

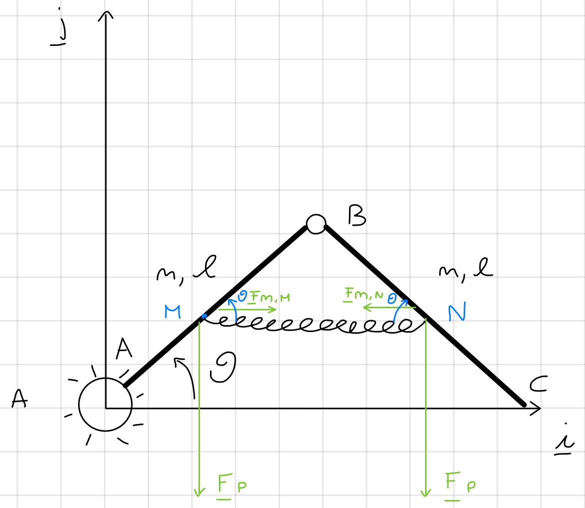
i) TROVARE LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO

- # gdl = 1 (θ c.l.)

~ IL SISTEMA HA LE SEGUENTI CARATTERISTICHE:

1. OLONOMO

2. VINCOLI FISSI



~ $\underline{F}_P = -mg\,\underline{j}$

~ $F_{m,M} = k(N-M) = k\ell\cos\theta\,\underline{i} = -F_{m,N}$

→ NO DIPENDENZA ESPLICITA DA t

\+

SONO FORZE CONSERVATIVE

POSSO APPLICARE STAZIONARITÀ DI V ←

~ $V = V_P + V_m = \left(mg\dfrac{\ell}{2}\sin\theta\right)2 + \dfrac{1}{2}k(\ell\cos\theta)^2 =$

$= mg\ell\sin\theta + \dfrac{1}{2}k\ell^2\cos^2\theta$

~ TROVO PUNTI DI STAZIONARIETÀ $\dfrac{dV}{dq} = 0$

$$\frac{dV}{d\theta} = mg\ell\cos\theta - k\ell^2\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$\left(mg - \frac{k}{\ell}\sin\theta\right)\cos\theta = 0$$

1°) $\cos\theta = 0$ $\quad\theta_1 = \dfrac{\pi}{2}$ $\quad\theta_2 = \dfrac{-\pi}{2}$

2°) $mg - \dfrac{k}{\ell}\sin\theta = 0$ $\quad\sin\theta = \dfrac{mg}{k\ell}$ $\quad\theta_3 = \arcsin\left(\dfrac{mg}{k\ell}\right)$

ATTENZIONE: g_3 ESISTE SSE: $\frac{mg}{kl} \leq 1 \longrightarrow k \geq \frac{mg}{l}$

- OSS: TUTTO PUÒ ESSERE ESTESO A $n > 1$:

DATO SISTEMA:

$$\begin{cases} \text{OLONOMO} \\ \text{VINCOLI FISSI} \\ \text{FORZE NON DIPENDENTI ESPLICITAMENTE DA } t \end{cases}$$

$\longrightarrow$ CONDIZIONE NECESSARIA E SUFFICIENTE PER EQUILIBRIO:

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_1(q_1, \dots, q_n) = 0 \\ \vdots \\ \mathcal{Q}_n(q_1, \dots, q_n) = 0 \end{cases}$$

~ SE FORZE POSIZIONALI E CONSERVATIVE:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial q_1}(q_1, .., q_n) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial V}{\partial q_n}(q_1, .., q_n) = 0 \end{cases}$$

- **STABILITÀ DELLE CONFIGURAZIONI DI EQUILIBRIO:**

- HP INIZIALI:

$$\begin{cases} \text{OLONOMO} \\ \text{VINCOLI FISSI} \\ \text{FORZE NON DIPENDENTI ESPLICITAMENTE DA } t \\ n = 1 \end{cases}$$

SISTEMI CON # $gdl = 1$

- LE SOLUZIONI SONO DESCRITTE DA:

$$a(q) + \frac{1}{2}\frac{da}{dq}\dot{q}^2 = \mathcal{Q}(q, \dot{q})$$

$q(t_0) = q_0$ | CONDIZIONI INIZIALI
$\dot{q}(t_0) = \dot{q}_0$

• CAMBIO DI VARIABILI: $z_1 = q \qquad z_2 = \dot{q}$

$\hookrightarrow$ EQ. DINAMICA DIVIENE:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ a(z_1)\dot{z}_2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{da}{dz_1} z_2^2 = \varphi(z_1, z_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = \dot{z}_2 \\ \dot{z}_2 = \dfrac{1}{a(z_1)}\left[\varphi(z_1, z_2) - \dfrac{1}{2}\dfrac{da}{dz_1} z_2^2\right] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{z}_1 = F_1(z_1, z_2) = 0 \\ \dot{z}_2 = F_2(z_1, z_2) = 0 \end{cases}$$

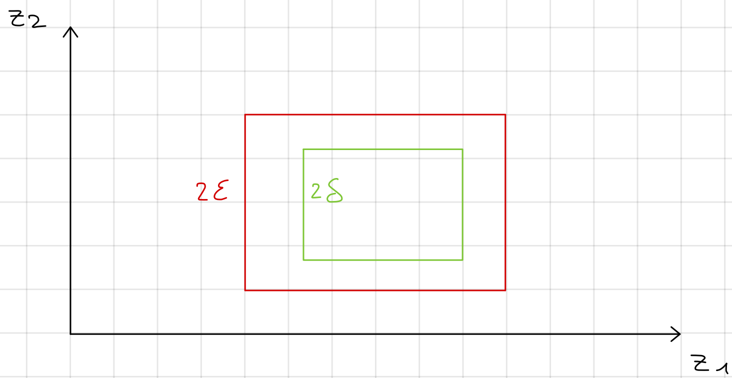
• STUDIO LA DINAMICA NEL PIANO DELLE FASI (z_1, z_2):

• OSS: LE SOLUZIONI D'EQUILIBRIO SARANNO LE: $z_1(t) = z_1^\circ \qquad z_2(t) = z_2^\circ$

$\hookrightarrow$ CHE SODDISFANO: $\begin{cases} z_1 = F_1(z_1, z_2) = 0 \\ \dot{z}_2 = F_2(z_1, z_2) = 0 \end{cases}$

• DEFINIZIONE DI STABILITÁ DI SOLUZIONI D'EQUILIBRIO: UNA SOLUZIONE DI EQUILIBRIO (z_1°, z_2°) É STABILE SE:

DATO $\forall\, \varepsilon > 0$ (CHE DEFINISCE UN BOX LIMITE DI AMPIEZZA 2ε) RIESCO A TROVARE $\delta(\varepsilon) > 0$ (CHE DEFINISCE UN BOX DI AMPIEZZA 2δ) TALE CHE QUALSIASI CONDIZIONE INIZIALE EVOLVE SENZA MAI USCIRE DAL BOX 2ε

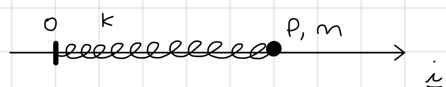


Quindi: (z_1°, z_2°) è soluzione di equilibrio stabile se:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall$ C.I. $(z_1(t_0), z_2(t_0))$ con $|z_i(t_0) - z_i^\circ| < \delta$, $i = 1, 2$

evolve in $(z_1(t), z_2(t))$ tali che $|z_1(t) - z_i| < \varepsilon \quad \forall t > t_0$

- Esempio: oscillatore armonico:



~ Eq del moto: $m\ddot{x} + kx = 0 \qquad \ddot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0$

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad$ con $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

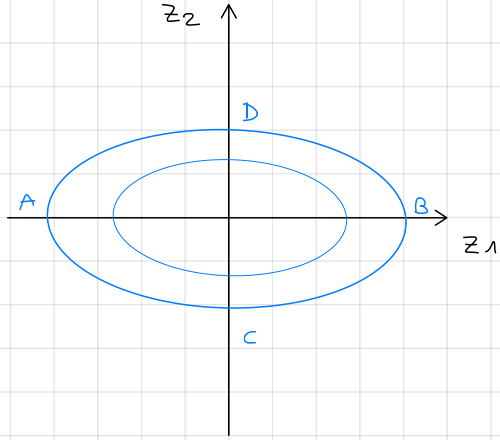
~ Mi riconduco al sistema del 1° ordine:

$z_1 = x \qquad z_2 = \dot{x}$

~ Troviamo equilibrio:

$$\begin{cases} F_1(z_1, z_2) = 0 \longrightarrow z_2 = 0 \\ F_2(z_1, z_2) = 0 \longrightarrow z_1 = 0 \end{cases} \longrightarrow (z_1^\circ, z_2^\circ) = 0$$

~ NEL PIANO DELLE FASI:



$\longrightarrow$ CAPIAMO COME SI MUOVE IL SISTEMA NEL PIANO DELLE FASI PER $\forall$ C.I. $\neq (z_1, z_2)$

- SISTEMA CONSERVATIVO $\longrightarrow$ $E = T + V = \text{cost}$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \qquad V = \frac{1}{2} k x^2$$

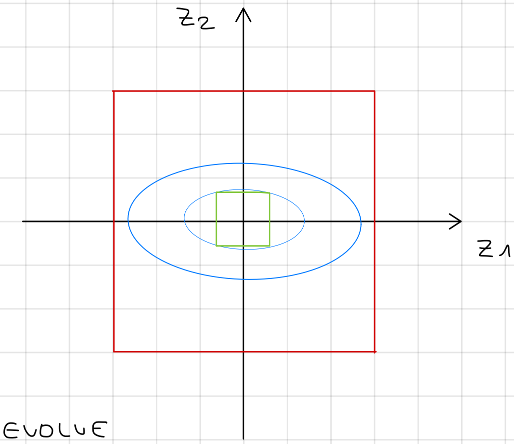
- NEL PIANO DELLE FASI: $\boxed{\frac{1}{2} m z_1^2 + \frac{1}{2} k z_1^2 = \text{cost}}$ ELLISSE

$\boxed{A, B}$ $z_2 = 0 \longrightarrow \frac{1}{2} k z_1^2 = 0$ $\begin{cases} z_1 = -\sqrt{\frac{2t}{k}} \\ z_2 = +\sqrt{\frac{2t}{k}} \end{cases}$

AMPIEZZA ELLISSE AUMENTA AL CRESCERE DI E

$\boxed{C, D}$ $z_1 = 0 \longrightarrow \frac{1}{2} k z_2^2 = 0$ $\begin{cases} z_1 = -\sqrt{\frac{2t}{m}} \\ z_2 = +\sqrt{\frac{2t}{m}} \end{cases}$

~ SFRUTTO PER DIMOSTRARE STABILITÀ:



- PRENDIAMO $\mathcal{E} = \bar{\mathcal{E}}$ T.C. ELLISSE È TG. A BOX $2\mathcal{E}$

- POSSIAMO PRENDERE $\forall$ BOX 2δ INTERNO A ELLISSE $\mathcal{E}$: $\forall$ C.I. INTERNA A TALE BOX EVOLVE SENZA USCIRE MAI DAL BOX $2\mathcal{E}$

$\hookrightarrow$ $(z_1^\circ, z_2^\circ) = (0,0)$ È EQ. STABILE PER L'OSCILLATORE ARMONICO

$\boxed{\text{CRITERI SUFFICIENTI PER CARATTERIZZAZIONE EQUILIBRI}}$

- METODO DELLA LINEARIZZAZIONE: (# gdl $= 1 \longrightarrow n = 1$)

- IPOTESI:

  SISTEMA OLONOMO

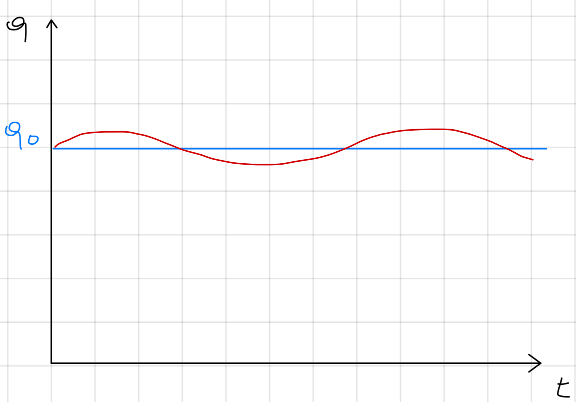
  VINCOLI FISSI

  FORZE NON DIPENDONO ESPLICITAMENTE DA t

  FORZE POSIZIONALI

- IN TALI HP $\forall$ MOTO DESCRITTO DA: $a(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{da}{dq}\dot{q}^2 = \mathcal{Q}(q)$

- SUPPONIAMO DI AVERE UNA SOLUZIONE q_0 DI EQUILIBRIO:



$$\forall t \begin{cases} q(t) = q_0 = \text{cost} \\ \dot{q}(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathcal{Q}(q_0) = 0$$

• STUDIAMO $q(t)$ PER C.I. PROSSIME A q_0

↳ DEFINIAMO FUNZIONE SCOSTAMENTO:
$$\begin{cases} \eta(t) = q(t) - q_0 \\ \dot{\eta}(t) = \dot{q}(t) \\ \ddot{\eta}(t) = \ddot{q}(t) \end{cases}$$

• SOSTITUIAMO $a(q)$ E $\varphi(q)$ CON ESP. IN SERIE DI TAYLOR INTORNO A q_0:

$$\sim \; a(q) = a(q_0) + \left.\frac{da}{dq}\right|_{q=q_0} \underline{(q-q_0)} + \sigma(q-q_0)$$

$$= a(q_0) + a'(q_0)\underline{\eta} + \sigma(\eta)$$

$$\sim \; \varphi(q) = \varphi(q_0) + \left.\frac{d\varphi}{dq}\right|_{q=q_0} \underline{(q-q_0)} + \sigma(q-q_0) =$$

$$= \varphi(q_0) + \varphi'(q_0)\underline{\eta} + \sigma(q-q_0)$$

• SOSTITUIAMO IN $a(q)\ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{da}{dq}\dot{q}^2 = \varphi(q)$:

$$[a(q_0) + a'(q_0)\eta + \sigma(\eta)]\ddot{\eta} + \frac{1}{2}\frac{d}{dq}\left[a(q_0) + a'(q_0)\eta + \sigma(\eta)\right]\dot{\eta}^2 =$$

$$= \varphi'(q_0)\eta + \sigma(\eta)$$

• LINEARIZZIAMO IN $\eta, \dot{\eta}, \ddot{\eta}$:

$$a(q_0)\ddot{\eta} - \varphi'(q_0)\eta = 0 \qquad \boxed{\ddot{\eta} - \frac{\varphi'(q_0)}{a(q_0)}\eta = 0}$$

LA SOLUZIONE DIPENDE DAL SEGNO DI $\varphi'(q_0)$

$a(q_0) > 0$ SEMPRE

• 3 CASI:

1) $Q'(q_0) > 0$

2) $Q'(q_0) < 0$

3) $Q'(q_0) = 0$

• OSS: SE FORZE CONSERVATIVE: $Q(q) = \dfrac{-dV(q)}{dq} = -V'(q)$

~ L'EQ. LINEARIZZATA DIVENTA: $\ddot{\eta} + \dfrac{V''(q_0)}{a(q_0)}\eta = 0$

~ QUINDI:

1) $Q'(q_0) > 0 \longrightarrow V''(q_0) > 0$

2) $Q'(q_0) < 0 \longrightarrow V''(q_0) < 0$

3) $Q'(q_0) = 0 \longrightarrow V''(q_0) = 0$

• <u>CASO 1)</u>

$$Q'(q_0) > 0 \longrightarrow \frac{-Q'(q_0)}{a(q_0)} < 0 \longrightarrow \frac{-Q'(q_0)}{a(q_0)} = -\omega^2$$

$$\longrightarrow \ddot{\eta} - \omega^2 \eta = 0$$

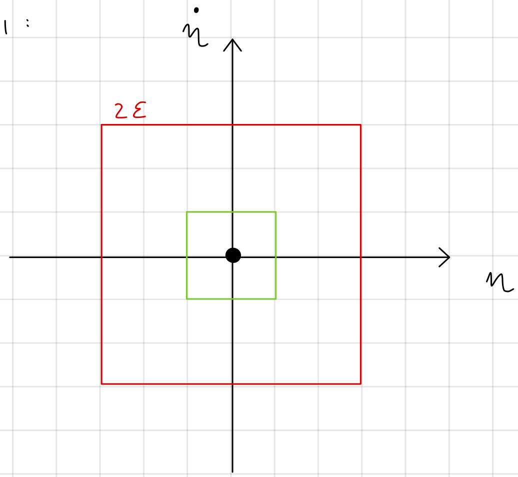
~ SOLUZIONE: $\begin{cases} \eta(t) = A e^{-\omega t} + B e^{-\omega t} \\ \dot{\eta}(t) = A\omega e^{\omega t} - B\omega e^{-\omega t} \end{cases}$

CON A, B DATI DA CONDIZIONI INIZIALI

$$\begin{cases} \eta(0) = \eta_0 = A + B \\ \dot{\eta}(0) = \dot{\eta}_0 = -\omega B \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} \eta_0 = A + B \\ \dot{\eta}_0 = -\omega B \end{cases}$$

~ NEL PIANO DELLE FASI:



$\forall$ BOX ε $\nexists$ BOX δ T.C. TUTTE LE C.I. NON ESCONO DA ε

~ QUINDI: SE $Q(q_0) = 0$, $Q'(q_0) > 0$ $\longrightarrow$ EQUILIBRIO INSTABILE

• OSS: SE FORZE CONSERVATIVE $\longrightarrow$ $Q'(q_0) = -V''(q_0)$

~ QUINDI SE $\underbrace{V'(q_0) = 0, \quad V''(q_0) < 0}_{q_0 \text{ MAX DI } V}$ $\longrightarrow$ EQUILIBRIO LINEARMENTE INSTABILE

• CASO 2)

~ $Q'(q_0) < 0 \longrightarrow \dfrac{-Q(q_0)}{a(q_0)} > 0 \longrightarrow \dfrac{-Q(q_0)}{a(q_0)} = \omega^2$

$$\longrightarrow \ddot{\eta} + \omega^2 \eta = 0$$

~ SOLUZIONI:

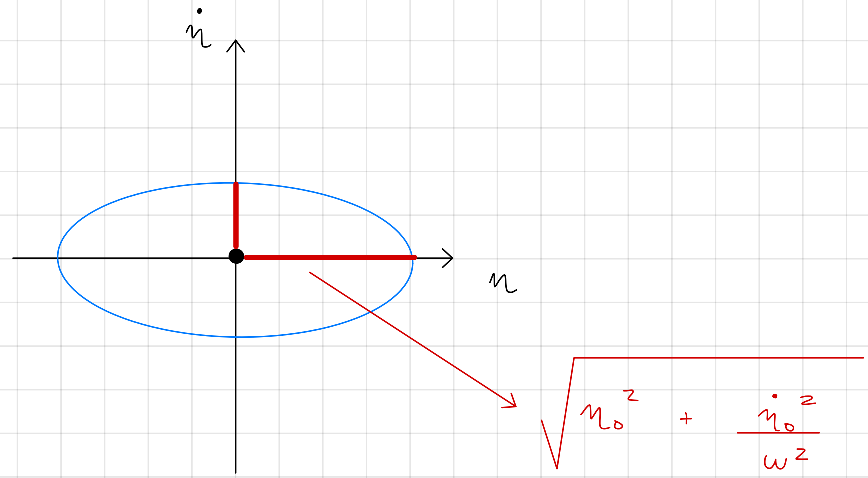
$$\begin{cases} \eta(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \\ \dot{\eta}(t) = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t \end{cases} \longrightarrow \frac{\dot{\eta}(t)}{\omega} = -A\sin\omega t + B\cos\omega t$$

~ ELEVO AL QUADRATO:

$$\begin{cases} \eta^2(t) = A^2\cos^2\omega t + B^2\sin^2\omega t \\ \dfrac{\dot{\eta}^2(t)}{\omega^2} = A^2\sin^2\omega t + B^2\cos^2\omega t \end{cases}$$

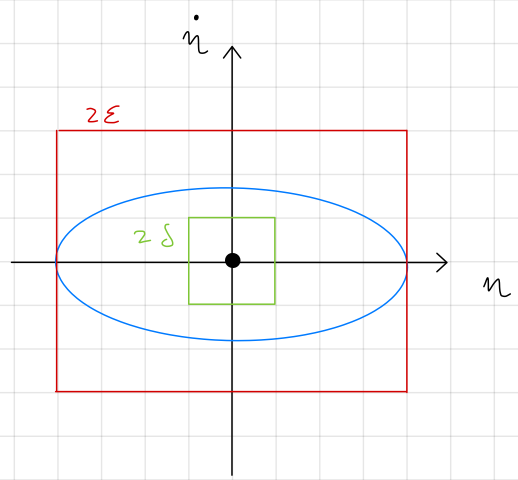
$$\longrightarrow \eta^2 + \frac{\dot{\eta}^2}{\omega^2} = A^2 + B^2 \longrightarrow \boxed{\frac{\eta^2}{A^2+B^2} + \frac{\dot{\eta}^2}{\omega^2(A^2+B^2)} = 1}$$ ELLISSE

- CONDIZIONI INIZIALI $\begin{cases} \eta(0) = \eta_0 = A \\ \dot{\eta}(0) = \dot{\eta}_0 = \omega B \end{cases} \longrightarrow \begin{aligned} A &= \eta_0 \\ B &= \frac{\dot{\eta}_0}{\omega} \end{aligned}$



L' AMPIEZZA DELL' ELLISSE È DIRETTAMENTE LEGATA ALLA CONDIZIONE INIZIALE DEL CENTRO

~



$\forall \varepsilon$, TROVO $\bar{\eta}_0$, $\bar{\dot{\eta}}_0$ CHE FORNISCONO ELLISSE TANGENTE A BOX 2ε

$\Rightarrow \forall$ BOX 2δ INTERNO A TALE ELLISSE CI GARANTISCONO CONDIZIONI INIZIALI CHE NON ESCONO DA 2ε

~ QUINDI: SE $Q(q_0) = 0$, $Q'(q_0) = 0 \Rightarrow q_0$ É EQUILIBRIO LINEARMENTE STABILE

- OSS 1: FORZE CONSERVATIVE: $Q(q_0) = -V'(q_0)$

QUINDI: SE $V'(q_0) = 0$, $V''(q_0) > 0 \longrightarrow q_0$ É EQUILIBRIO LINEARMENTE STABILE

- OSS 2: IL MOTO È OSCILLATORE CON FREQUENZA:

$$\omega^2 = \frac{-Q'(q_0)}{a(q_0)} \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{-Q'(q_0)}{a(q_0)}} = \boxed{\sqrt{\frac{V''(q_0)}{a(q_0)}}}$$ FORZE CONSERVATIVE

→ PERIODO: $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{-a(q_0)}{\varphi'(q_0)}} = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{a(q_0)}{V''(q_0)}}}$ FORZE CONSERVATIVE

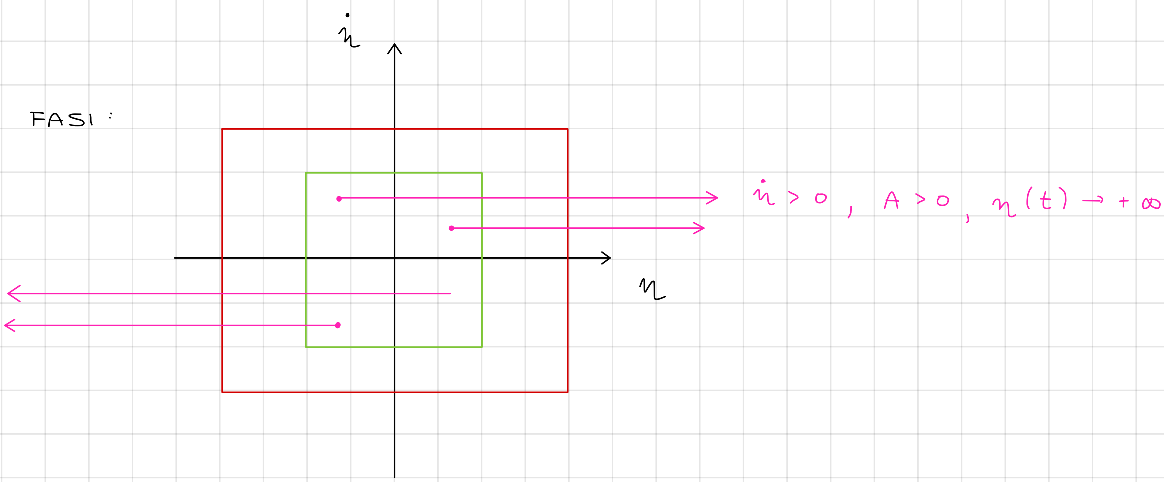
- CASO 2) $\varphi'(q_0) = 0 \longrightarrow \ddot{\eta} = 0$

~ SOLUZIONE: $\begin{cases} \eta(t) = At + B \\ \dot{\eta}(t) = A \end{cases}$

~ NOTA: $A = 0$ SOLO PER PARTICOLARI CONDIZIONI INIZIALI:

$$\begin{cases} \eta(0) = \eta_0 = B \\ \dot{\eta}(0) = \dot{\eta}_0 = A \end{cases} \xrightarrow{A=0} \dot{\eta}_0 = 0$$

~ NEL PIANO DELLE FASI:



~ QUINDI: SE $\varphi(q_0) = 0$, $\varphi'(q_0) = 0 \longrightarrow q_0$ È EQUILIBRIO LINEARMENTE INSTABILE

- OSS: SE $V'(q_0) = 0$, $V''(q_0) \longrightarrow q_0$ É EQUILIBRIO LIN. INSTABILE

→ NON SO SE MIN/MAX/FLEX

Riassunto caso lineare:

1) $Q(q_0) = 0$, $Q'(q_0) > 0$ o $V'(q_0) = 0$, $V''(q_0) < 0$ → LINEARMENTE INSTABILE

MASSIMO

2) $Q(q_0) = 0$, $Q'(q_0) < 0$ o $V'(q_0) = 0$, $V''(q_0) > 0$ → LINEARMENTE STABILE

MINIMO

3) $Q(q_0) = 0$, $Q'(q_0) = 0$ o $V'(q_0) = 0$, $V''(q_0) = 0$ → LINEARMENTE INSTABILE

- CASO NON LINEARE:

1) $Q(q_0) = 0$, $Q'(q_0) > 0$ o $V'(q_0) = 0$, $V''(q_0) < 0$ → LINEARMENTE INSTABILE → LYAPOUNOV ← MAX V

MASSIMO

2) $Q(q_0) = 0$, $Q'(q_0) < 0$ o $V'(q_0) = 0$, $V''(q_0) > 0$ → LINEARMENTE STABILE → DIRICHLET LAPLACE ← MIN V

MINIMO

3) $Q(q_0) = 0$, $Q'(q_0) = 0$ o $V'(q_0) = 0$, $V''(q_0) = 0$ → LINEARMENTE INSTABILE

?

- TEOREMA DI LYAPOUNOV:

SE $Q(q_0) = 0$, $Q'(q_0) > 0$ [OPPURE $V'(q_0) = 0$, $V''(q_0) < 0$]

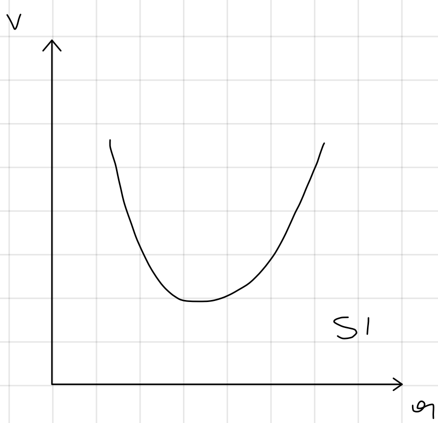
$\Rightarrow$ q_0 É EQUILIBRIO INSTABILE

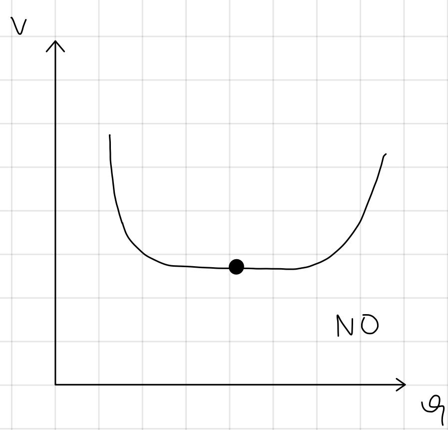
• TEOREMA DI DIRICHLET - LAPLACE: (FORZE CONSERVATIVE)

SE $\begin{cases} V'(q_0) = 0 \\ q_0 \text{ MINIMO PROPRIO DI } V(q) \end{cases} \longrightarrow q_0$ È LINEARMENTE STABILE PER SISTEMA NON LINEARE

• OSS: SE $\begin{cases} V'(q_0) = 0 \\ V''(q_0) > 0 \end{cases} \longrightarrow q_0$ È MINIMO PROPRIO DI V

• DEFINIZIONE DI MINIMO PROPRIO: q_0 È MINIMO PROPRIO DI $V(q)$ SE, IN UN INTORNO DI q_0: $\begin{cases} V(q) - V(q_0) \geq 0 \\ V(q) - V(q_0) = 0 \iff q = q_0 \end{cases}$





• DIM:

~ COSTRUISCO EN. POTENZIALE $W(q) = V(q) - V(q_0)$

$\rightarrow$ W = V A MENO DI UNA COSTANTE

~ SE q_0 È MIN. PROPRIO $\Rightarrow q_0$ MIN. PROPRIO DI W, CIOÈ IN UN INTORNO DI q_0:

$$\begin{cases} W(q) \geq 0 \\ W(q) = 0 \iff q = q_0 \end{cases}$$

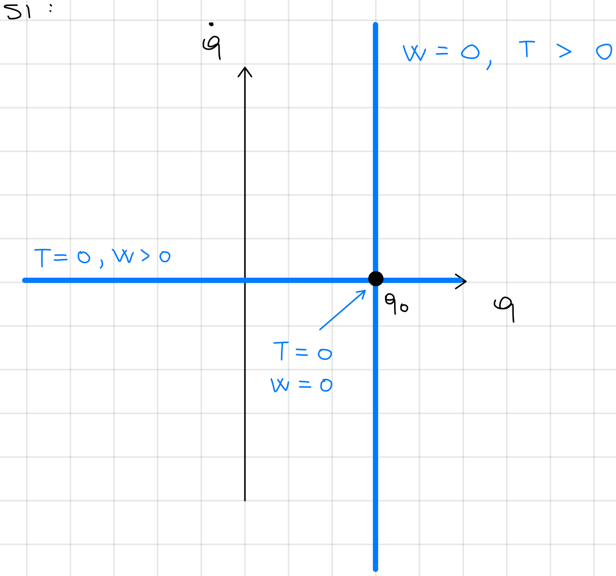
~ CONSIDERO ENERGIA CINETICA: $\frac{1}{2} a_q \dot{q}^2$ CON $a_q > 0$

~ ALLORA: $\begin{cases} T \geq 0 \\ T = 0 \iff \text{SSE } \dot{q} = 0 \end{cases}$ SONO FERMO

~ CONSIDERO ENERGIA MECCANICA:

$$E = T + W = \frac{1}{2} a_q \dot{q}^2 + W(q)$$

~ NEL PIANO DELLE FASI:



~ PROPRIETÀ DI E

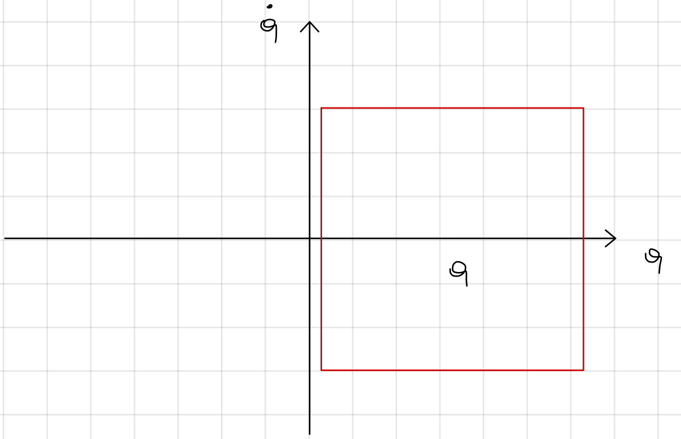
1) $E = (q, \dot{q}) \geq 0$ IN INTORNO DI $(q, \dot{q}) = (q_0, 0)$

$E = (q, \dot{q}) = 0 \iff (q, \dot{q}) = (q_0, 0)$

2) SISTEMA CONSERVATIVO $\Rightarrow \forall$ C.I. EVOLVERÀ IN MODO TALE CHE:

$E(q, \dot{q}) = \bar{E} = \text{cost}$

$\longrightarrow$ CI MUOVIAMO LUNGO CURVA DI ISOLIVELLO DI E:



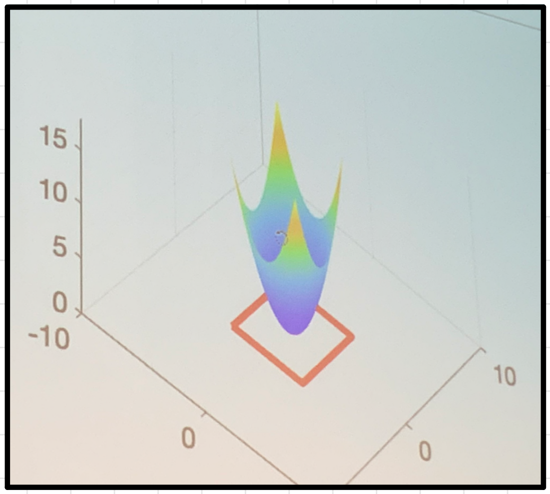
DATO ε:

$Q_\varepsilon = \left\{ (q, \dot{q}) : |q - q_0| < \varepsilon, |\dot{q}| < \varepsilon \right\}$

$\longrightarrow$ QUADRATO

~ LUNGO C_ε, $E(q,\dot q) > 0$

~ INDICHIAMO CON $M \in C_\varepsilon$ PUNTO IN CUI $E_M = \min E$



~ ABBIAMO $E_M > 0$ E $E(q_0, 0) = 0$

↳ MA E È CONTINUA → È SEMPRE POSSIBILE TROVARE:

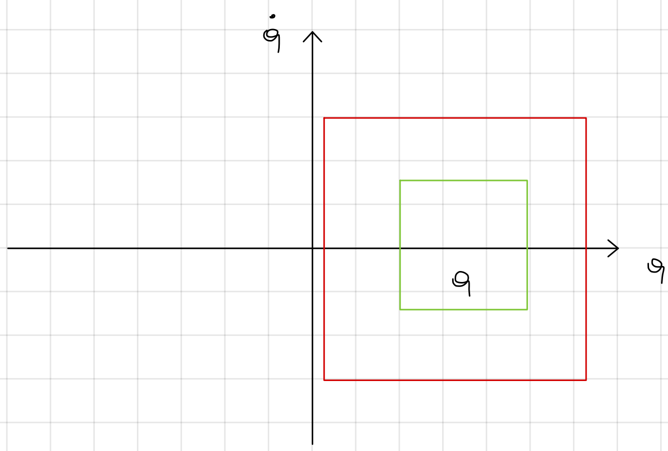
$$\mathcal{U}_\delta = \left\{ (q,\dot q) : |q - q_0| \le \delta, \ |\dot q| < \delta \right\}$$

TALE CHE:

1) $\mathcal{U}_\delta$ È INTERNO A $\mathcal{U}_\varepsilon$

2) DENTRO $\mathcal{U}_\delta$, $E(q,\dot q) < E_M$

$\forall$ C.I. IN $\mathcal{U}_\delta$ AVRÀ $E < E_M$

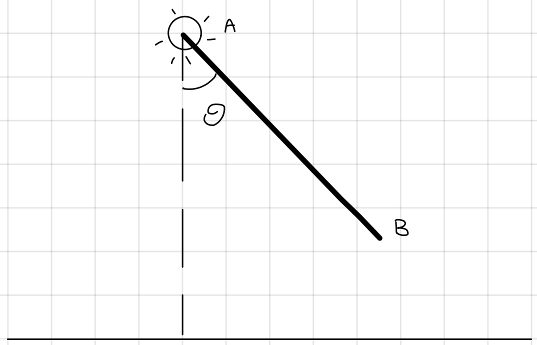


~ DATA $\forall$ C.I. IN CUI $\mathcal{U}_\delta$ EVOLVERÀ IN MODO TALE CHE: $E(q,\dot q) = E < E_M$

→ NON POTRÒ USCIRE DA C_ε PERCHÉ AVREI BISOGNO DI ENERGIA $> E_M$

↳ q_0 È EQUILIBRIO STABILE

• ESEMPIO:



i) TROVARE LE CONFIGURAZIONI D'EQUILIBRIO

ii) CARATTERIZZARE LA STABILITÀ DEGLI EQUILIBRI

iii) $T_{P.O.}$ (PERIODO PICCOLE OSCILLAZIONI)

• $\#\, gdl = 1$ (C.L. θ)

1) SISTEMA OLONOMO
VINCOLI FISSI
FORZE NON DIPENDONO ESPLICITAMENTE DA T
FORZE CONSERVATIVE
$\longrightarrow$ USO STAZIONARIETÀ DI V

• $V = mg\, y_G = mg\left(h - \frac{\ell}{2}\cos\theta\right)$

• $\frac{dV}{dq}(q_0) = 0 \qquad \frac{dV}{d\theta}(q_0) = 0 \qquad \frac{1}{2} mg\ell \sin\theta = 0 \qquad \begin{cases} \theta_{e,1} = 0 \\ \theta_{e,2} = \pi \end{cases}$

2) STUDIAMO DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE PER CAPIRE SE θ_e È MAX/MIN PROPRIO:

$$V''(\theta) = mg\frac{\ell}{2}\cos\theta$$

$\sim V''(\theta_{e1}) = mg\frac{\ell}{2} > 0 \longrightarrow \theta_{e1}$ MINIMO PROPRIO

LINEARMENTE STABILE, MA ANCHE STABILE IN GENERALE PER IL TEO. DI DIRICHLET-LAPLACE

$$V''(\theta) = mg\frac{\ell}{2}\cos\theta$$

$$V''(\theta_{e2}) = V''(\pi) = -mg\frac{\ell}{2} < 0 \longrightarrow \text{LINEARMENTE INSTABILE}$$

$\hookrightarrow$ INSTABILE (LYAPOUNOV)

3) $\tau_{P.O.}$ SI CALCOLA INTORNO A CONFIGURAZIONE DI EQUILIBRIO STABILE:

$\hookrightarrow$ INTORNO A $\theta_{e,1} = 0$

$$\tau_{P,O} = 2\pi\sqrt{\frac{a(\theta_{e,1})}{V''(\theta_{e,1})}} = 2\pi\sqrt{\frac{a(0)}{V''(0)}}$$

$mg\frac{\ell}{2}$

- $T = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 \longrightarrow$ DOBBIAMO SCRIVERE L'ENERGIA CINETICA

$$T = \frac{1}{2}\frac{1}{3}m\ell^2\dot{\theta}^2 \longrightarrow a(q) = \frac{1}{3}m\ell^2 \longrightarrow a(0) = \frac{1}{3}m\ell^2$$

$$\longrightarrow \tau_{P,O} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}\cancel{m}\ell^{\cancel{2}}}{\cancel{m}g\frac{\cancel{\ell}}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g}}$$

- PROCEDURA GENERALE: IMMAGINO CHE $V'(q_0) = 0$, $V''(q_0) = 0$

~ DEVO CAPIRE SE q_0 È MAX/MIN PROPRIO $\longrightarrow$ ANALIZZO DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE

~ IN GENERALE: $V^k(q_0) = \left.\frac{d^kV}{dq^k}\right|_{q=q_0}$

- SUPPONIAMO CHE: $\begin{cases} V^{k}(q_0) = 0 & \text{PER } k = 1, \dots, \bar{k}-1 \quad \text{CON } \bar{k} \geq 3 \\ V^{\bar{k}}(q_0) \neq 0 \end{cases}$

- ALLORA:

~ SE $\bar{k}$ DISPARI $\longrightarrow$ q_0 È UN FLESSO $\longrightarrow$ NON POSSO DIRE NULLA

~ SE $\bar{k}$ PARI $\longrightarrow$ $V^{\bar{k}}(q_0) > 0 \longrightarrow$ MINIMO PROPRIO $\longrightarrow$ STABILE (DIRICLET LAPLACE)

$\qquad\qquad\longrightarrow$ $V^{k}(q_0) < 0 \longrightarrow$ MASSIMO PROPRIO $\longrightarrow$ INSTABILE (LYOPOUNOV)

- ESEMPIO: SUPPONGO SISTEMA MECCANICO CON $V = \frac{1}{4} \alpha q^4$ CON $\alpha > 0$

~ DETERMINIAMO LE CONDIZIONI DI EQUILIBRIO:

$V'(q) = \frac{dV}{dq}(q) = \alpha q^3 \longrightarrow V'(q_0) = 0 \qquad q_0 = 0$

$V''(q) = 3\alpha q^2 \longrightarrow V''(q_0) = 0 \longrightarrow$ LINEARMENTE INSTABILE

$V'''(q) = 6\alpha q \longrightarrow V''(q_0) = 0$

$V''''(q) = 6\alpha \longrightarrow V''(q_0) = 6\alpha > 0 \longrightarrow$ MINIMO PROPRIO (STABILE)