

宇宙学的一致性模型

- 宇宙学的一致性模型
 - 1.1 宇宙简史
 - 1.2 哈勃图
 - 1.3 原初核合成
 - 1.4 宇宙微波背景辐射
 - 1.5 大尺度结构
 - 1.6 Λ CDM模型
- 膨胀宇宙
 - 2.1 膨胀宇宙
 - 2.1.1 度规

大爆炸范式的成功取决于许多观测支柱：测量膨胀的哈勃图；符合大爆炸核合成的轻元素丰度；与理论非常吻合的宇宙微波背景中的温度和偏振各向异性；以及与本章中将描述的一致性模型一致的多个大规模结构探针。

但仍有一些超出粒子标准模型的现象：

- 暗物质和暗能量的存在，他们主导着宇宙能量密度的演化；
- 宇宙结构形成伊始，产生微小扰动的物理机制。

1.1 宇宙简史

宇宙正在膨胀，在宇宙早期，宇宙温度更高且能量密度更大。我们引入尺度因子 $a(t)$ ，它是一个随时间变化的量，描述了宇宙的膨胀程度。尺度因子通常定义为当前宇宙时刻的尺度因子为1，即 $a(t_0) = 1$ 。

由于尺度因子的存在，我们对宇宙中物质距离的描述有了新的方式：

- 共动距离 D_c ，不随尺度因子变化的距离；
- 物理距离 $D_{phy} = D_c \cdot a(t)$ ，同一时刻两个不同位置物体的距离。
- 光度距离 $D_L = D_c \cdot a(t)^{-1}$ ，描述了光源的亮度与距离的关系。
- 角直径距离 $D_A = d/\theta$ ，其中 d 为物体固有物理尺度， θ 为观测到的视角大小，描述了角度与实际距离的关系。

同时，我们可以利用尺度因子定义红移：

$$1 + z \equiv \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{emit}} = \frac{a(t_{obs})}{a(t_{emit})} = \frac{1}{a(t_{emit})}$$

除了尺度因子，宇宙还有一个重要特征：几何形状。

- Euclidean(平坦宇宙)，曲率为0；
- open(开放宇宙)，曲率为负；
- closed(封闭宇宙)，曲率为正。

广义相对论将宇宙的几何和能量密度联系在一起：

- $\rho = \rho_{cr} \approx 10^{-29} gcm^{-3}$ ，开放宇宙；
- $\rho > \rho_{cr}$ ，封闭宇宙；

- $\rho < \rho_{cr}$ ，平坦宇宙。

宇宙的演化可以用尺度因子来描述，不同时期宇宙演化由不同的物质主导：

- **辐射主导**：早期宇宙，能量密度主要由辐射组成，尺度因子随时间变化为 $a(t) \propto t^{1/2}$ 。
- **物质主导**：随着宇宙膨胀，非相对论性物质主导，尺度因子随时间变化为 $a(t) \propto t^{2/3}$ 。
- **暗能量主导**：在宇宙膨胀加速阶段，暗能量主导，尺度因子随时间变化为 $a(t) \propto e^{Ht}$ ，其中 H 是哈勃参数。

哈勃参数定义为宇宙膨胀速率与当前尺度因子的比值：

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{1}{a} \frac{da}{dt},$$

其中 $\dot{a}(t)$ 是尺度因子的时间导数。

更普遍的情况下，狭义相对论告诉我们尺度因子可以由弗里德曼方程描述：

$$H^2(t) = \frac{8\pi G}{3} [\rho(t) + \frac{\rho_{cr} - \rho(t_0)}{a^2(t)}],$$

其中 G 是牛顿常数（引力常数）， ρ_{cr} 是临界密度， $\rho(t_0)$ 是当前的宇宙密度。

临界密度定义为宇宙几何为平坦时的密度，与当今宇宙密度相等（绝大部分观测和理论都支持当今宇宙是平坦的）：

$$\rho(t_0) \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

当宇宙为物质主导时， $M(t)$ 为常数， $V \propto a^3(t)$ ，故 $\rho(t) \propto a^{-3}(t)$ ；

当宇宙为辐射主导时， $\lambda = c/v \propto a(t)$ ，故单个粒子的能量为 $E_\gamma \propto a^{-1}(t)$ ，粒子密度 $\propto a^{-3}(t)$ ，因此 $\rho(t) \propto a^{-4}(t)$ 。

历史上，为了隔离哈勃常数的不确定性（减弱哈勃常数测量的不精确对其他物理量的影响），我们引入了一个无量纲参数：

$$H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} = 2.13 \times 10^{-33} \frac{eV}{\hbar} h$$

因此， $\rho_{cr} = 1.88h^2 \times 10^{-29} \text{ gcm}^{-3}$ 。

宇宙早期的高密度和高温导致粒子相互作用速率远高于现在，当粒子散射速率远大于宇宙膨胀速率时，粒子可以达到热平衡。随着宇宙膨胀，温度降低，粒子之间的相互作用速率减小，最终导致热平衡被打破。

1.2 哈勃图

如果宇宙正在膨胀，那么星系之间应该互相远离，即我们应发现星系正在退行。哈勃首先发现了这一现象，并且他发现退行速率随距离增加。当退行速率远小于光速或红移较小时， $D_{phy} = aD_c$ 。

当没有共动运动时， $\dot{D}_c = dD_c/dt = 0$ ；相对速度为：

$$v = \frac{dD_{phy}}{dt} = \dot{a}D_c = H_0 D_{phy} (v \ll c)$$

在更高的红移情况下，红移-距离关系依赖于宇宙的物质组分。

1.3 原初核合成

在宇宙早期，温度较高、密度较大时，即 $T > 1\text{MeV}/k_B$ 时，宇宙中没有中性粒子也没有结合的原子核，原子核一旦出现就会被高能光子打碎。随着温度降低，粒子之间的相互作用速率减小，原子核可以形成，由此进入了原初核合成阶段（BBN）。

在BBN阶段，质子密度+中子密度=重子密度，因为它们都含有重子数1。中子和质子之间的相互作用速率较高，导致它们可以相互转换。随着温度降低，质子和中子的密度逐渐接近，最终形成了轻元素。在BBN结束时，宇宙温度约为1 MeV，密度约为 10^{-9}gcm^{-3} ，此时宇宙中主要的元素是氢、氦和少量锂。BBN的结果与观测数据非常吻合，支持了大爆炸模型。

1.4 宇宙微波背景辐射

宇宙微波背景辐射（CMB）是大爆炸后留下的辐射，温度约为2.7 K。CMB的存在是大爆炸模型的重要证据之一。当辐射温度为 10^4K 时，自由电子和质子结合形成中性氢，在这之前，所有的氢原子都会被高能光子打散。在这之后，当 $z \approx 1100$ 时，构成CMB的光子停止与物质相互作用，开始自由传播，形成我们今天看到的CMB。这个过程称为再组合。我们可以通过测量CMB的温度和偏振各向异性来研究宇宙的早期状态；也可以利用CMB独立限制重子密度和哈勃常数。

由于在CMB之前，光子和电子的相互作用非常频繁，使得光子处于热平衡状态，此时可认为是一个黑体辐射源。光子的黑体辐射谱为：

$$I(\nu, T) = \frac{4\pi\hbar\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{2\pi\hbar\nu}{k_B T}} - 1}$$

在观测到CMB的前25年，我们认为CMB是非常光滑的，没有各向异性。但在1992年，COBE卫星发现了CMB的微小各向异性。这是宇宙等离子体的微扰导致的，温度波动为 10^{-5}K ，对应的红移为 $z \approx 1100$ 。随着宇宙膨胀，这些微扰被放大，形成了今天我们观测到的大尺度结构。

1.5 大尺度结构

宇宙的大尺度结构在探测到CMB的各项异性前就发现了：许多因素表明星系在宇宙中的分布是不均匀的。为了研究这一结构，我们需要引入一个新的理论：微扰理论。微扰理论是研究宇宙大尺度结构形成的主要工具。它假设宇宙的密度分布可以看作是一个均匀背景下的小扰动。通过对这些小扰动的研究，我们可以了解宇宙大尺度结构的形成过程。为了将理论与观测相比较，我们必须尽量避免不能用微扰理论处理的非线性效应，如地球的形成等小于10pc的小尺度结构。而大尺度结构微扰仍是线性的，因此可以用微扰理论处理。

CMB 中的各向异性很小，因为它们起源于早期，并且我们从 CMB 观察到的光子在到达我们的途中不会聚集。因此，学习结构的演化并将其与观测事实相对比的重要途径就是CMB的各项异性和大尺度结构（LLS）的功率谱。当然，如果我们选取合适的观测对象也可以从非线性的小尺度结构中获得一些宇宙信息。

为了将大尺度结构和小尺度结构区分开来，我们将使用相关分布的傅里叶变换来处理数据。这里最重要的就是两点相关函数，在傅里叶空间中，它的傅里叶变换是功率谱。功率谱是描述宇宙大尺度结构的主要工具。如果星系密度与位置的函数关系为 $n_g(\mathbf{x})$ ，其在整个巡天的平均值为 \bar{n}_g ，那么我们可以用

$\delta_g(\mathbf{x}) = (n_g(\mathbf{x}) - \bar{n}_g)/\bar{n}_g$ 或它的傅里叶变换 $\delta_g(\mathbf{k})$ 来描述其不均匀性。通过构造函数，我们可以令 $\delta_g(\mathbf{k})$ 的平均值为0。由此我们可以定义星系功率谱 $P_g(k)$ 为：

$$\langle \delta_g(\mathbf{k}) \delta_g^*(\mathbf{k}') \rangle = (2\pi)^3 \mathbf{P}_g(\mathbf{k}) \delta_D^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')$$

其中 $\delta(\mathbf{x})$ 是密度扰动， $\langle \dots \rangle$ 是平均值。功率谱描述了不同尺度上的密度扰动强度。通过测量功率谱，我们可以了解宇宙大尺度结构的形成和演化过程。如果存在许多非常低密度和过密的区域，则功率谱会很大，而如果分布平滑，则功率谱会很小。

CMB的功率谱，是一个二维场（两个角度），人们通常将其扩展为球面谐波，这是适合球体表面二维场的基础。因此，CMB 的功率谱是多极矩 l 的函数，而不是波数 k 。

CMB 地图与当前宇宙中结构图之间的一个关键区别是“对比度”或结构的幅度。早期宇宙非常光滑，各向异性极小；而现在的宇宙结构非常复杂，包含了许多高对比度的结构，如星系团、星系等。这种结构演化我们认为由引力作用导致的，这也是现代宇宙学最有力的基础之一。在此过程中，小尺度扰动首先非线性增长，然后分层组装形成更大的结构。

在试图理解宇宙结构的演化时，我们将被迫面对一个问题，即是什么产生了初始条件，即作为该结构种子的原始扰动。这将引导我们进入宇宙学的第三个重要方面（仅次于暗物质和暗能量），它超越了粒子物理学的标准模型：膨胀理论。

1.6 Λ CDM模型

当今主流的宇宙学模型是 Λ CDM模型（Lambda Cold Dark Matter Model），它是一个包含暗能量和冷暗物质的宇宙学模型。 Λ 代表暗能量，CDM代表冷暗物质。它代表了一个平坦的宇宙，在当下由非重子冷暗物质和宇宙常数（暗能量）主导，并在早期有暴涨导致的微小扰动，该模型主要包含三个部分：

1.CDM（冷暗物质模型）：

- 这个绰号的“冷”部分来自于要求暗物质粒子能够在早期宇宙中有效地聚集成结构，而不是像热暗物质那样在早期就被热运动打散。CDM的粒子质量较大，速度较慢，因此可以在宇宙早期形成小尺度结构。
- 我们认为BBN和CMB揭示了非重子物质的存在，对宇宙结构的观察也导向了暗物质的存在。没有暗物质，得到的不均匀性太小，无法形成我们今天看到的宇宙结构。星系旋转曲线的观测也表明，星系中存在大量看不见的物质，这些物质被称为暗物质。目前最流行的想法是暗物质由大爆炸早期产生的基本粒子组成。

2. Λ （宇宙常数）：多种观测现象表明（最有力的证据是对远处超新星的观测），除了普通物质和辐射之外，还必须有能量、暗能量。与暗物质不同，该成分不会强烈聚集。这也导致了一个问题：随着宇宙膨胀，粒子密度应该是下降的，为什么构成暗能量的粒子密度不会随时间改变呢？我们指导虚空也是带有能量的，有人希望通过量子场论来解决这个问题，但是得到的能量远高于观测到的“暗能量”。因此，暗能量至今仍是一个悬而未决的问题。

3.暴涨：这是宇宙早期微扰最有可能的解释。它假设宇宙中存在一个很早的短暂纪元，在此期间，尺度因子随着时间的推移呈指数级快速增长。因此，暴涨时代与我们今天的宇宙有一些共同的特征：随着宇宙的膨胀，能量的主要形式大致保持不变，而在这两种情况下，驱动这种快速膨胀的物质的身份都是未知的。然而，尺度却大不相同：驱动暴涨的物质提供的能量密度可能比今天的暗能量密度至少高出 60 个数量级。由于与暴涨相关的能量可能如此之大，因此很难通过实验探测它们。然而，我们将看到至少有一个膨胀的迹象是实验可以触及的，如果被检测到，将以前所未有的能量尺度阐明物理学。

膨胀宇宙

为了研究膨胀宇宙，我们将学习度规和分布函数的相关知识。并且，在本章中，我们假设宇宙是光滑且均匀的，即所有组分的密度分布都是均匀的。

2.1 膨胀宇宙

为了研究宇宙，我们需要学习广义相对论的一些相关内容。这里大致可以分为两部分：

- 任何物理规律在所需参考系下描述得到的结果都是相同的，这就是广义相对论的等效原理。这一点导致了时空必须是弯曲的，为了描述这种弯曲，我们需要引入度规。
- 通过度规将时空和时空中的物质（物质与辐射）联系起来。

2.1.1 度规

我们在以往的学习中也使用过度规，比如笛卡尔坐标系就是一种度规，代表着光滑二维平面。也可以使用极坐标来描述相关内容。但不管使用何种度规，计算的得到的两点之间距离总是相同的。因此，陈述度量作用的另一种方式是：它将与观察者相关的坐标转换为不变量，即距离不变量。例如，在二维平面，距离不变量为 $dl^2 = \sum_{i,j=1,2} g_{ij} dx^i dx^j$ 。这里的 g_{ij} 是度规张量的分量，在二维平面上是一个二阶矩阵， dx^i 和 dx^j 是坐标的微小变化。例如笛卡尔坐标系下 $x_1 = x, x_2 = y$ ，度规张量为：

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

而在极坐标系下 $x_1 = r, x_2 = \theta$ ，度规张量为：

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

这里引入一个相关概念：弯曲时空永远不可能被展平为平直时空，即高斯绝妙定理。详情可见[毕导视频](#)。

与其将引力视为一种外力并谈论在引力场中运动的粒子，不如将重力纳入度量并谈论粒子在扭曲或弯曲的时空中自由运动。这就是爱因斯坦所认识到的：均匀引力场中的观察者与加速参考系中的观察者进行的测量结果完全相同（引力与加速度等价）。四维时空中不变量（固有时间间隔）为：

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

其中 $g_{\mu\nu}$ 是度规张量， $\mu, \nu = 0$ 时为时间， $\mu, \nu = 1, 2, 3$ 时为空间， dx^μ 是四维坐标的微小变化。度规张量的分量 $g_{\mu\nu}$ 可以是函数，也可以是常数，取决于时空的几何性质。对于 ds^2 ，负号表示这对事件被一个类似时间的间隔隔开，而具有正固有时间间隔的事件被一个类似空间的间隔隔开；0代表两个事件通过光线连接。

FLRW度规是描述均匀各向同性宇宙的度规，形式为：

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a^2(t)}{1-Kr^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & a^2(t)r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

其中 $a(t)$ 是尺度因子，描述宇宙的膨胀程度， K 是空间曲率常数，决定宇宙的几何形状。 $K > 0$ 表示封闭宇宙， $K = 0$ 表示平坦宇宙， $K < 0$ 表示开放宇宙。 $r \cdot \theta \cdot \phi$ 是空间坐标，类似于球坐标系。