Ren rulling på krumt underlag – energibevarelse

Energibevarelse er slagkraftige saker. Med kjennskap til baneformen $y(x)$ og den 1. og 2. deriverte, hhv $y' = dy/dx$ og $y'' = d^2y/dx^2$, kan vi enkelt bestemme diverse størrelser for et objekt som ruller på den krumme banen. Vi antar at objektet har et treghetsmoment $I_0 = cMR^2$ mhp rotasjonsaksen gjennom massesenteret (CM). Her er M objektets masse, og R er objektets (ytre) radius, dvs avstanden fra CM og ut til banen. Vi antar at alle objektene har en uniform massefordeling (dvs konstant massetetthet). For den kompakte skiva er $c = 1/2$, for den kompakte kula er $c = 2/5$, og for den tynne ringen, med indre radius r, er $c = (1 + r^2/R^2)/2$.

La oss videre anta at banens krumningsradius overalt er mye større enn objektets radius R, slik at vi med god tilnærmelse kan anta at CM følger samme kurve som banen $y(x)$.

Objektet starter med null hastighet i høyde $y(0) = y_0$. Da er total mekanisk energi $E = U_0 = Mgy_0$ når vi velger $U = 0$ for $y = 0$. Total kinetisk energi K er summen av translasjonsenergien $Mv^2/2$ og rotasjonsenergien $cMv^2/2$, i det vi antar at objektet ruller rent, dvs uten å gli. Dvs, $K = (1 + c)Mv^2/2$ når farten er v. Energibevarelse gir da en hastighet

$$v(y) = \sqrt{\frac{2g(y_0 - y)}{1 + c}}$$

når objektet er et sted på banen der høyden er y. Siden vi kjenner baneformen $y(x)$, kan vi gjerne oppfatte farten som en funksjon av horisontal posisjon x:

$$v(x) = \sqrt{\frac{2g(y_0 - y(x))}{1 + c}}.$$

Det samme vil selvsagt gjelde for alle størrelser i fortsettelsen. Banens krumning κ, dvs den inverse krumningsradien, er

$$\kappa = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}.$$

Da er sentripetalakselerasjonen umiddelbart gitt som

$$a_\perp = v^2\kappa = \frac{2g(y_0 - y)}{1 + c} \cdot \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}}.$$

Her vil κ være positiv der banen krummer oppover og negativ der den krummer nedover. Tilsvarende fortegn vil gjelde for $a_\perp$. Dette er konsistent med positiv y-retning oppover: Når banen krummer oppover, har vektoren $\boldsymbol{a}_\perp$ også retning oppover, dvs den har en positiv y-komponent.

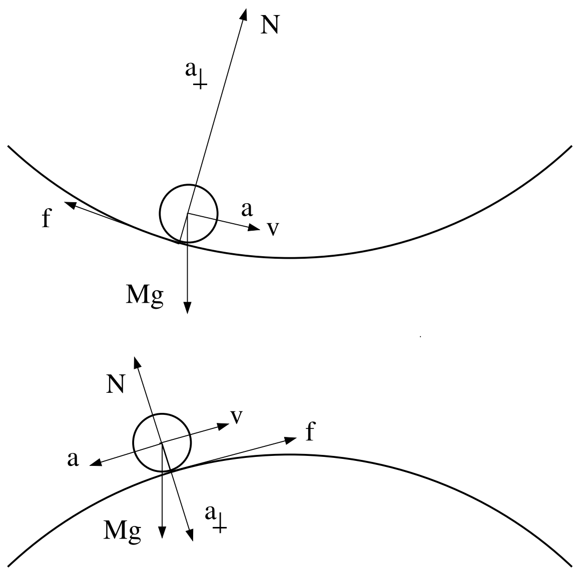
Vi ser i neste omgang på Newtons 2. lov normalt på banen. La oss velge fortegn slik at tyngdens komponent $Mg \cos\beta$ peker i negativ retning mens normalkraften N virker i positiv retning. Her er β banens helningsvinkel. Da har vi

$$N - Mg\cos\beta = Ma_\perp,$$

enten banen krummer opp eller ned, slik at

$$N = M(g\cos\beta + a_\perp).$$

Hvis banen krummer opp, er $a_\perp > 0$ i samme retning som N (dvs oppover), og N blir større enn $Mg\cos\beta$. Hvis banen krummer ned, er $a_\perp < 0$ i motsatt retning av N (dvs nedover), og N blir mindre enn $Mg\cos\beta$.



Figur 1. Krefter på objekt som ruller på krumt underlag.

Det gjenstår å finne (den statiske) friksjonskraften f fra banen på det rullende objektet. La oss velge $\beta < 0$ når objektet ruller nedover og $\beta > 0$ når det ruller oppover. Da er $y' = dy/dx = \tan\beta$, og med riktig fortegn. Kreftene som virker tangentielt til banen er f og tyngdens tangentialkomponent $-Mg\sin\beta$. Hvis banen heller nedover, er $\beta < 0$, $f < 0$ (dvs f har retning mot venstre) og $a = dv/dt > 0$ (objektet får større fart). N2 blir da

$$-Mg\sin\beta + f = Ma.$$

Og hvis det er oppoverbakke: $\beta > 0$, $f > 0$ (dvs f har retning mot høyre) og $a = dv/dt < 0$ (objektet får mindre fart). N2 blir da

$$f - Mg\sin\beta = Ma.$$

Med andre ord, samme ligning, enten det er nedover- eller oppoverbakke. Vi trenger dessuten N2 for rotasjon om CM:

$$fR = -I_0 d\omega/dt,$$

som med $\omega = v/R$ og uttrykket ovenfor for I_0 gir

$$f = -cMdv/dt = -cMa.$$

Her blir det riktig med minustegnet inkludert: Utforbakke betyr $a > 0$ og dermed $f < 0$, dvs mot venstre. Og omvendt med oppoverbakke. Vi setter $f = -cMa$ inn i N2 for translasjon:

$$-cMa - Mg\sin\beta = Ma,$$

som gir

$$a = -\frac{g\sin\beta}{1+c},$$

og endelig

$$f = \frac{cMg\sin\beta}{1+c}.$$

Vi ser at fortegnsvalget for helningsvinkelen β gir riktig fortegn for a og f i disse uttrykkene: Utforbakke betyr $\beta < 0$, $\sin\beta < 0$ og dermed $a > 0$ og $f < 0$.

Vi har her *forutsatt* at objektet ruller rent, dvs uten å gli (slure) mot underlaget. Den beregnede statiske friksjonskraften f kan imidlertid ikke overstige sin maksimale verdi, gitt ved $|f| = \mu_s |N|$. Her er μ_s den statiske friksjonskoeffisienten mellom objekt og bane. Den tynne ringen er aluminium, den kompakte skiva polyoksymetylen (såkalt POM; en polymer), og overflaten på de svarte datamus-kulene er en slags gummi. Banen er en type hard plast, trolig polyetylen eller polypropylen. Det er vel rimelig å anta at μ_s vil ligge i området $0.25 - 0.50$. For en gitt baneform kan en plotte størrelsen $|f/N|$ (evt skrive ut maksimumsverdien av $|f/N|$). Med kriterene i `cubicspline.py` (dvs for å akseptere baneformen $y(x)$) vil $|f/N|$ typisk ikke overstige verdien 0.2.

Tidsutviklingen – en variant av Eulers metode

Når prinsippet om bevaring av mekanisk energi utledes fra Newtons 2. lov, forsvinner tidsaspektet på magisk vis. Dvs, tiden t inngår ikke lenger i ligninger og uttrykk. Men energibevarelse gav oss hastigheten v som funksjon av høyden y, og dermed som funksjon av horisontal posisjon x, via baneformen $y(x)$. Da er det en smal sak å beregne tidsutviklingen av posisjon, hastighet og andre størrelser av interesse.

La oss like gjerne være helt konkrete: Programmet `cubicspline.py` beregner $y(x)$ i 1401 x-verdier, dvs for hver hele mm fra og med $x_0 = 0$ til og med $x_{1400} = 1400$ mm. Hastigheten v_n og helningsvinkelen β_n i posisjon (x_n, y_n) er da kjent. Da kan vi regne ut hvor lang tid Δt_n objektet har brukt på intervall nr n, definert som intervallet mellom x_{n-1} og x_n. Horisontal komponent av hastigheten i posisjon x_n er

$$v_{x,n} = v_n \cos \beta_n .$$

Gjennomsnittlig horisontalhastighet på dette intervallet er da (med god tilnærmelse)

$$\langle v_x \rangle_n = \frac{1}{2} \left(v_{x,n-1} + v_{x,n} \right) .$$

Da blir

$$\Delta t_n = \frac{\Delta x_n}{\langle v_x \rangle_n},$$

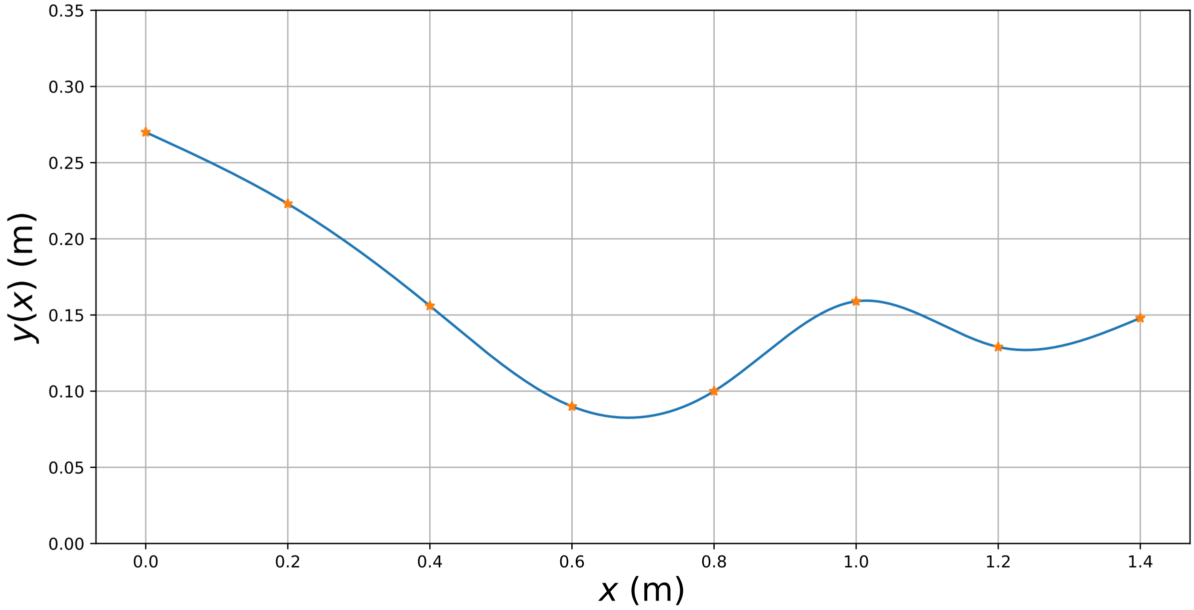
med konstant $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ lik 1 mm. Her kan vi sette $\Delta t_0 = 0$ og la n variere fra $n = 1$ til $n = 1400$.

Nå har vi tabeller, alle med 1401 elementer, med sammenhørende verdier av t, x og y, samt alle størrelsene som ble beregnet i forrige kapittel.

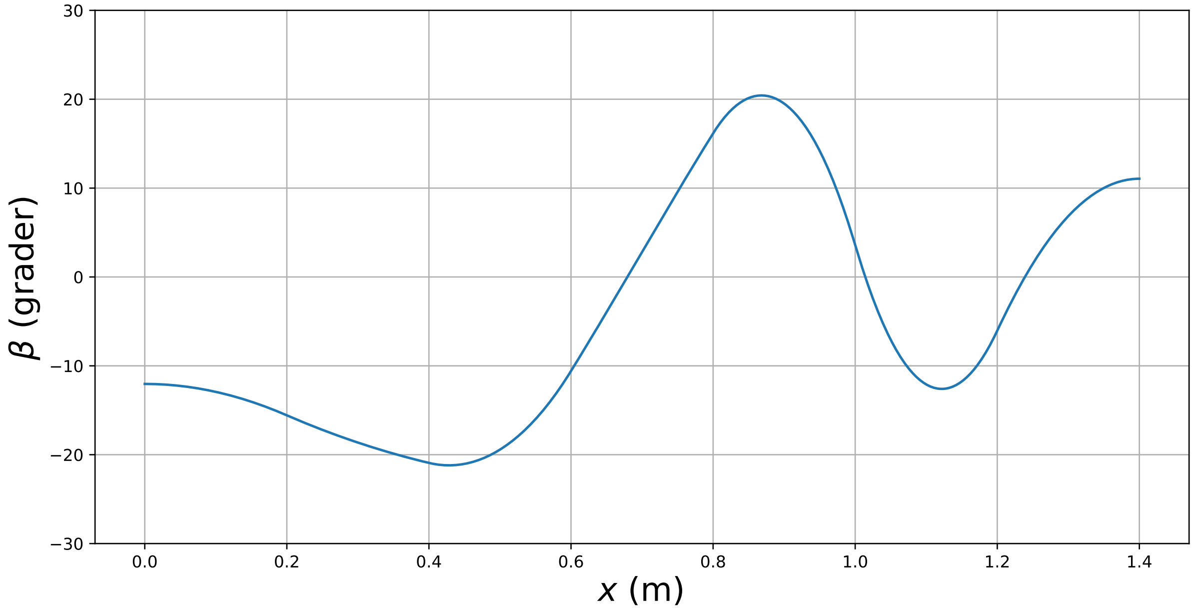
Vi ser i neste omgang på et helt konkret eksempel og plotter aktuelle størrelser, både som funksjon av horisontal posisjon x og som funksjon av tid t.

Eksempel

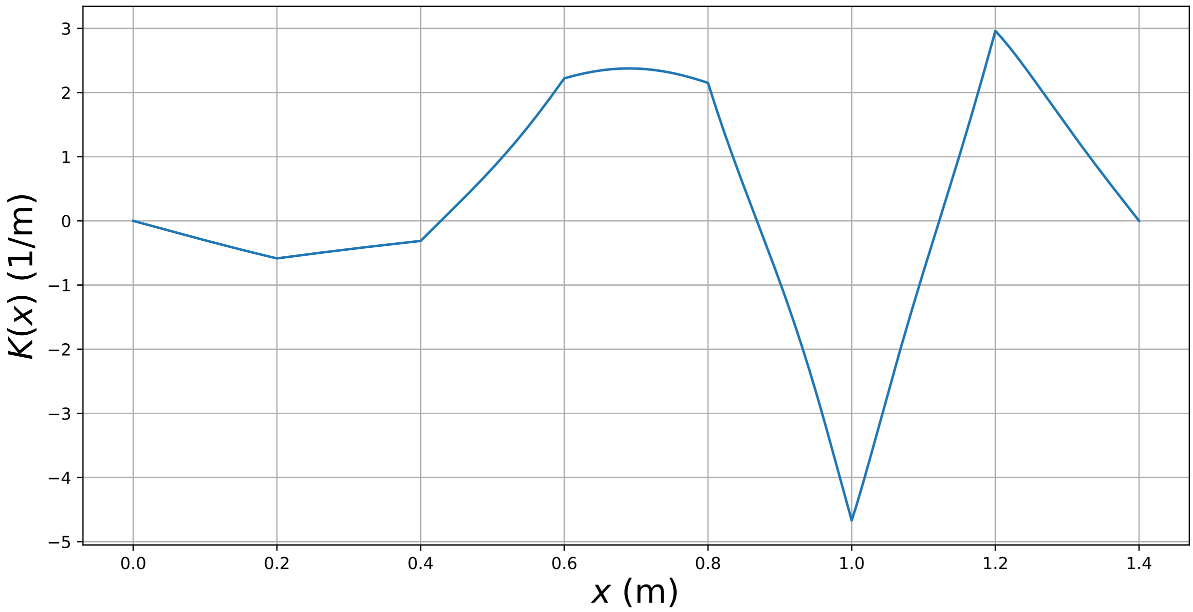
En akseptabel baneform $y(x)$ kan se slik ut:



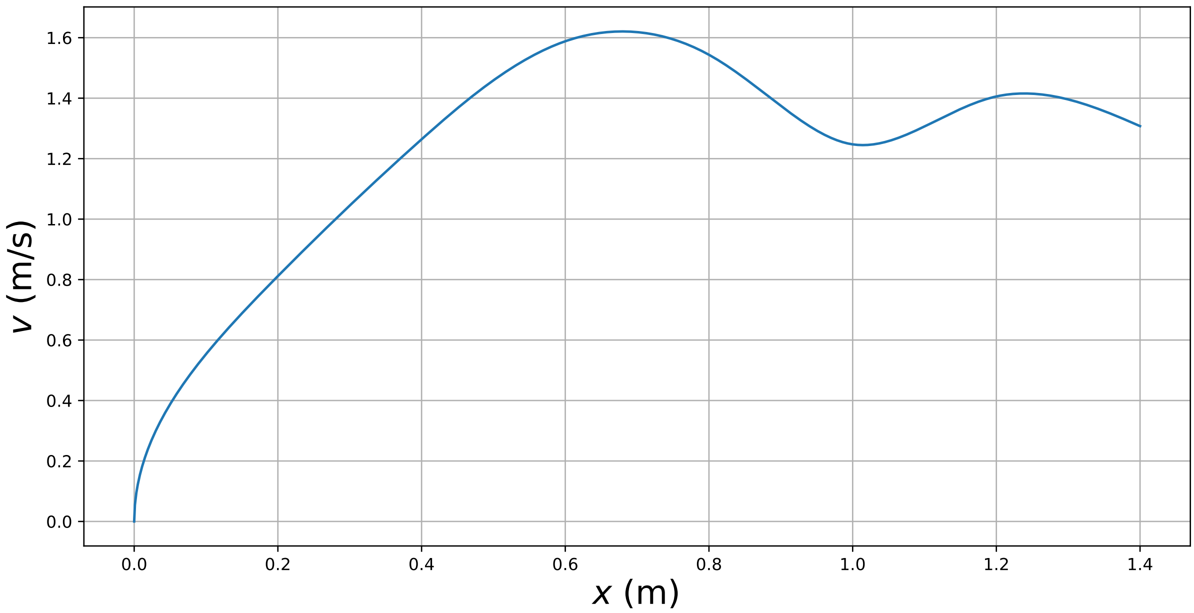
Her er starthøyden $y_0 = 270$ mm, mens laveste festepunkt er $y_3 = 90$ mm. Banens helningsvinkel β overstiger ikke $21.2°$ i absoluttverdi:



Banens krumning ligger mellom -5 og +3 pr m, slik at minste krumningsradius er 21.4 cm:

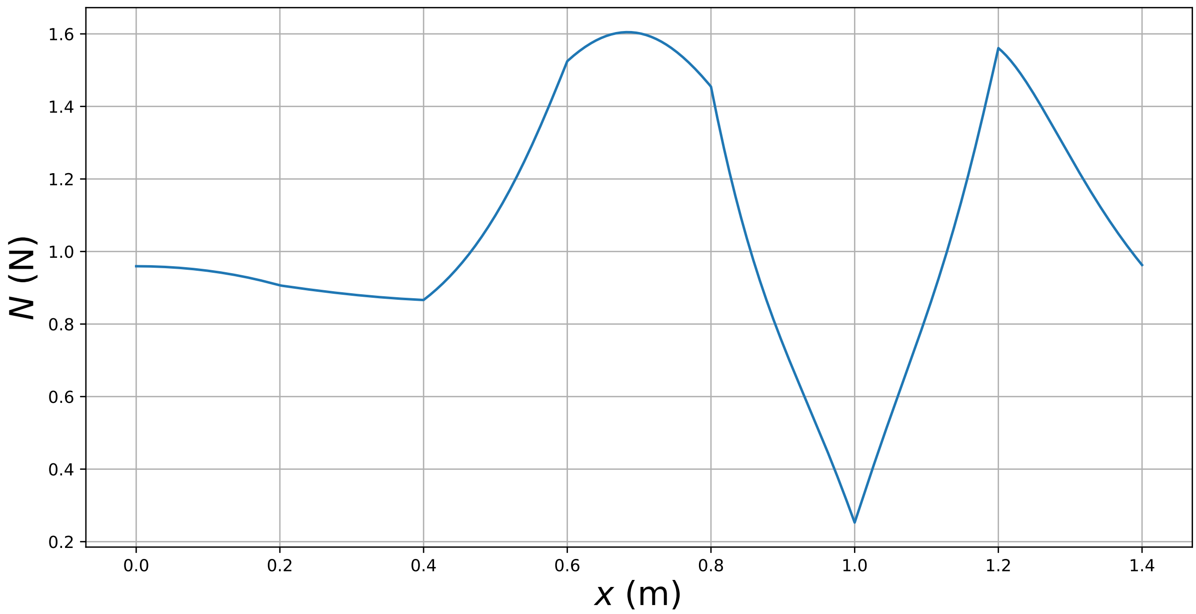


Med en kompakt kule som rullende objekt ($c = 2/5$) blir fartsgrafen $v(x)$ slik:

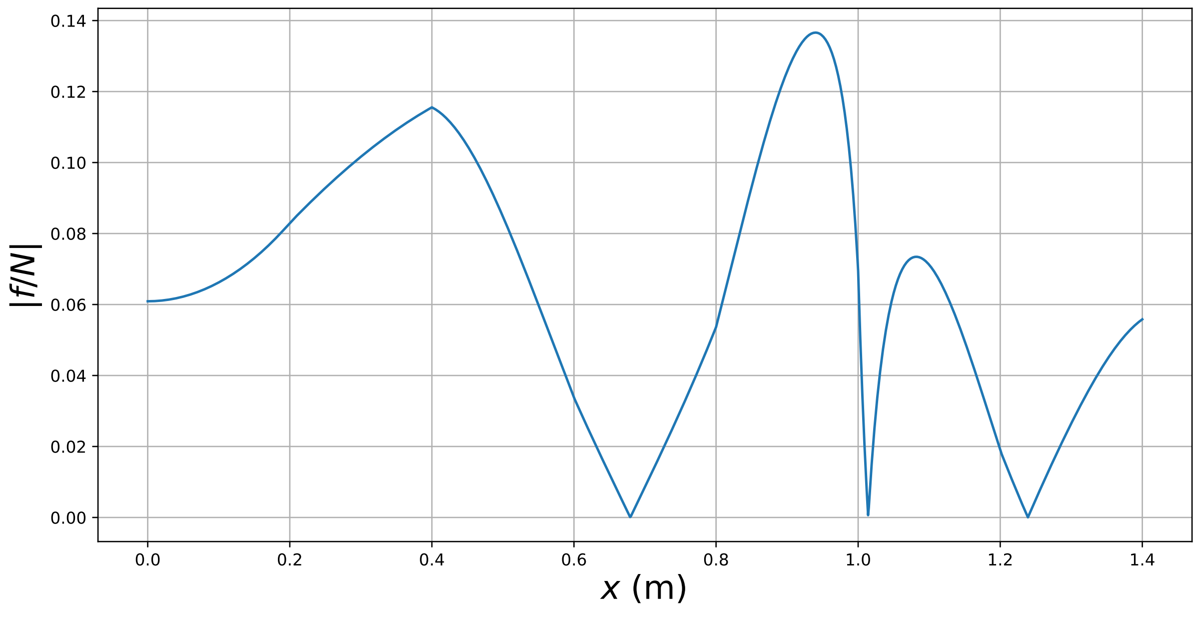


Maksimal hastighet oppnås som ventet i banens bunnpunkt, ved $x \simeq 0.7$ m.

Grafen for normalkraften $N(x)$ ligner ikke uventet på grafen for banens krumning:

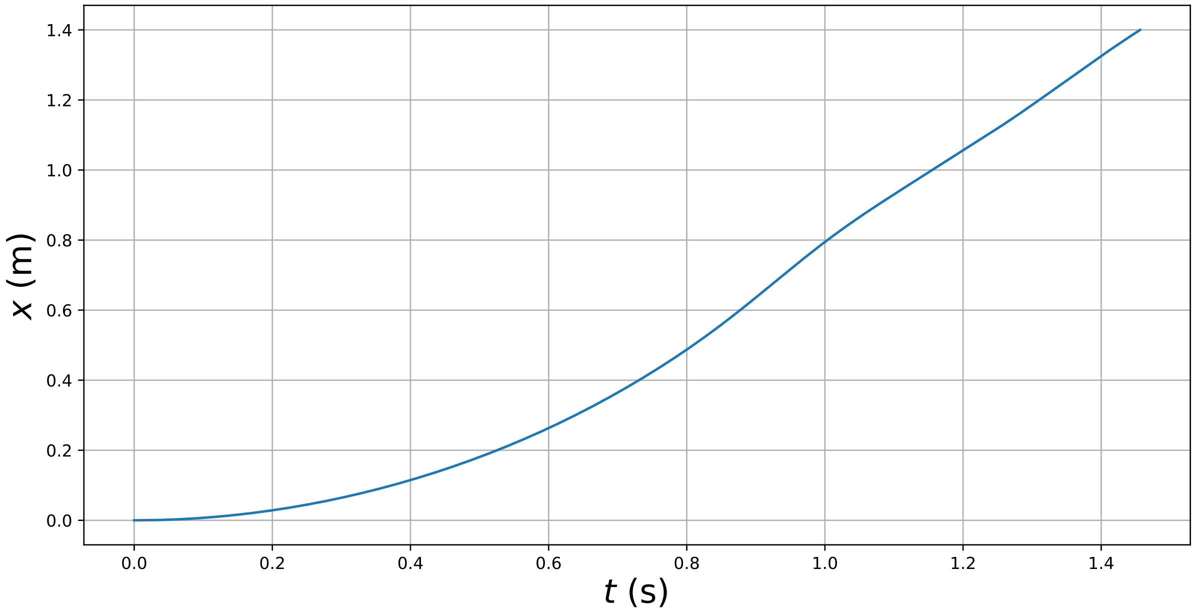


Forholdet mellom friksjonskraften f og normalkraften N overstiger ikke verdien 0.14:



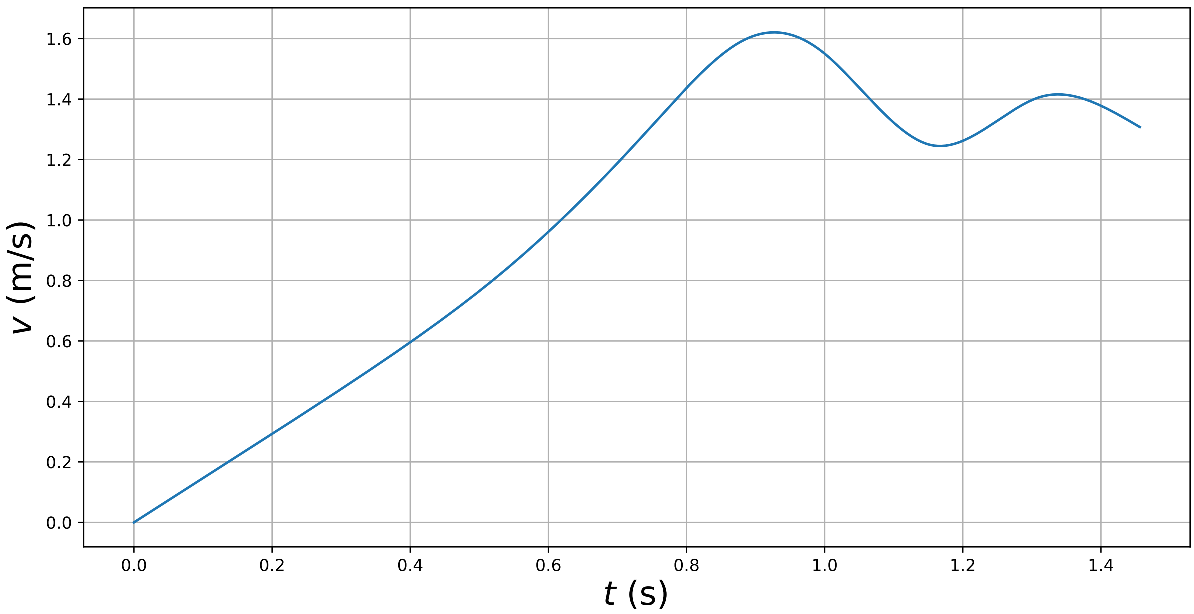
Dersom statisk friksjonskoeffisient er større enn 0.14, vil kula rulle rent uten å gli.

Neste figur viser horisontal posisjon x som funksjon av tiden t:



Vi ser at hele reisen tok ca 1.45 sekunder.

Siste figur viser hastigheten v som funksjon av tiden t:



Grafen er som ventet ganske lik grafen for $v(x)$. Vi ser for eksempel at banens bunnpunkt nås etter litt over 0.9 sekunder.