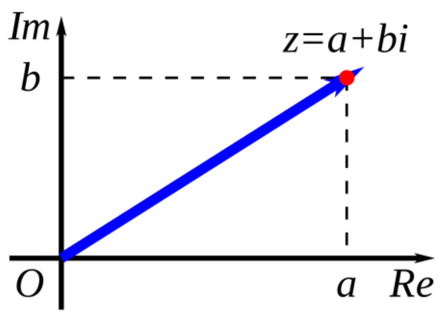
Komplexní čísla

Tvary komplexních čísel

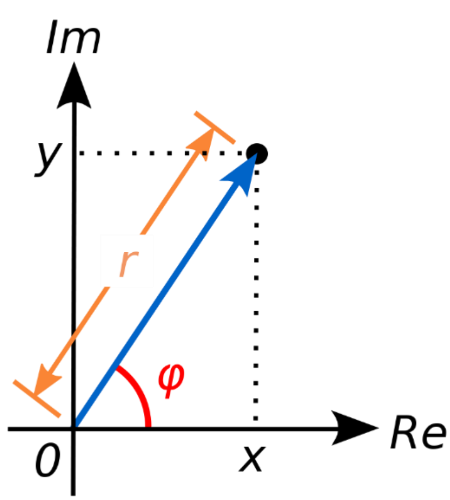
- Složkový (algebraický) tvar
  $z = a + bi$

  Dá se chápat jako kartézské souřadnice v komplexní rovině.



- Goniometrický tvar
  $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
- Exponenciální tvar
  $z = |z|e^{i\varphi}$

  Oba tvary jsou totožné, pracují s úhlem a absolutní hodnotou (tedy vzdáleností od počátku). Ve výpočtech na cvičení je preferován exponenciální tvar pro jeho jednodušší zápis. Oba tvary se dají chápat jako polární souřadnice v komplexní rovině. Absolutní hodnota $|z|$ je někdy též uváděna jako r pro radius.



Mezi všemi tvary platí rovnost. Tedy $z = a + bi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$.

Převody mezi tvary komplexních čísel

Mezi tvary lze libovolně převádět za využití goniometrických funkcí. Každý tvar má své výhody a nevýhody při počítání, jak bude ukázáno dále. Pozor, úhly jsou primárně počítány v radiánech!!!

- ## Složkový na exponenciální či goniometrický

  Absolutní hodnota $|z|$ je vypočtena Pythagorovou větou.

  $$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

  Úhel φ je dále vypočten za využití absolutní hodnoty a inverzních goniometrických funkcí.

  $$\varphi = \sin^{-1}\frac{b}{|z|} = \cos^{-1}\frac{a}{|z|}$$

  Je dobré si zapamatovat, že funkce *cos* se pojí s reálnou složkou *a* a funkce *sin* s imaginární složkou *b*.

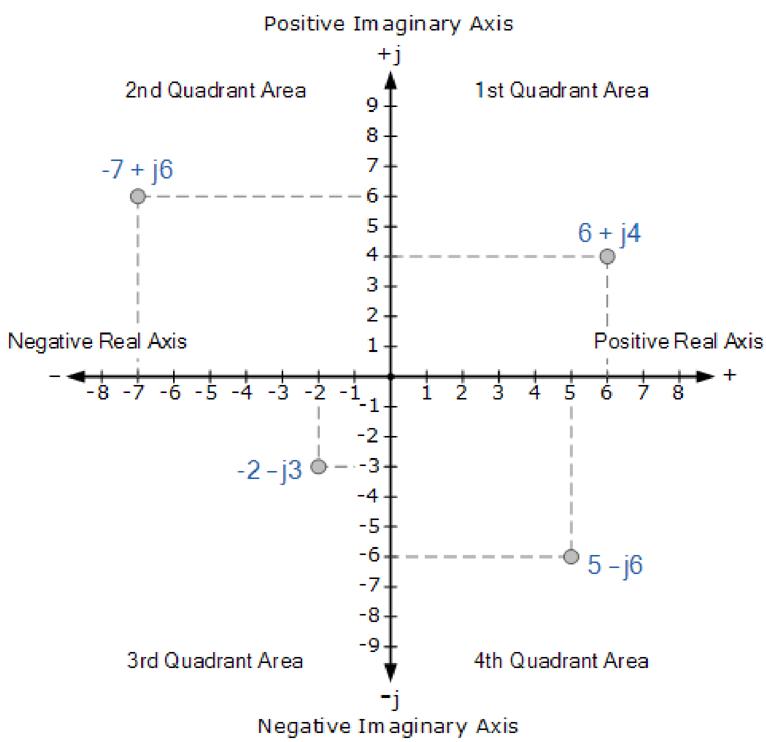
- ## Převod na složkový

  Převod zpět lze odvodit ze vztahů pro výpočet úhlu φ.

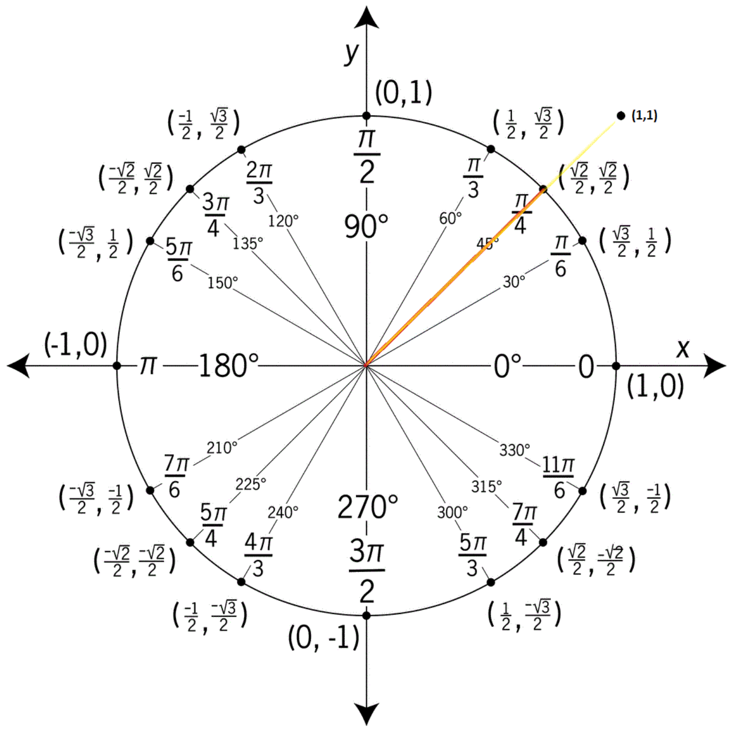
  $$a = |z|\cos\varphi$$

  $$b = |z|\sin\varphi$$

Při převodu je vždy potřeba zkontrolovat kvadrant a znaménka podle úhlu.



Je silně doporučeno naučit se pracovat s jednotkovou kružnicí (naleznete pod názvem *unit circle* či *complex circle*), jelikož kalkulačky a další výpočetní pomůcky jsou při písemných testech zakázány. Příklady jsou tomu uzpůsobeny.



Jednotková kružnice zobrazuje hodnoty pro několik základních úhlů a lze díky němu rychle a snadno převádět. Například lze vyčíst, že pro úhel $\frac{\pi}{4}$ a vzdálenost 1 je tvar komplexního čísla následující:

$$z = 1e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Uvedené hodnoty platí pro vzdálenost (absolutní hodnotu) 1 – body leží přímo na jednotkové kružnici. V případě, že leží mimo kružnici, je potřeba hodnoty přenásobit absolutní hodnotou. Například tedy pro číslo $z = 1 + 1i$, které má absolutní hodnotu $\sqrt{2}$, platí:

$$z = 1 + 1i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = 1 + 1i$$

Je dobré si pamatovat hodnoty pro několik základních úhlů.

Pro pravé úhly platí, že vždy jedna složka je nulová. Tedy:

$$e^{i0} = 1 + 0i$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = 0 + 1i$$

$$e^{i\pi} = -1 + 0i$$

$$e^{i\frac{3\pi}{2}} = 0 - 1i$$

V případě, že se obě složky rovnají, je úhel vždy násobkem úhlu $\frac{\pi}{4}$. Například:

$$1 + 1i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$-2 + 2i = \sqrt{8}e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$-3 + 3i = \sqrt{18}e^{i\frac{5\pi}{4}} = 3\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$5 - 5i = \sqrt{50}e^{i\frac{7\pi}{4}} = 5\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

Často se pracuje i se zápornými úhly, který pouze počítají úhel na opačnou stranu – tedy začínají počítat od 4. kvadrantu po směru hodinových ručiček. Ve většině případů se využívají spíše hodnoty v rozsahu $\langle -\pi, \pi \rangle$, než v $\langle 0, 2\pi \rangle$. Nicméně, obě varianty jsou si rovny a je možné je používat.

$e^{-i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{3\pi}{2}}$

$e^{-i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{7\pi}{4}}$

$e^{-i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$e^{-i\pi} = e^{i\pi}$

Z důvodu periodicity se vždy snažíme úhly vyšší než 2π dostat do rozsahu $\langle 0, 2\pi \rangle$.

$e^{i6\pi} = e^{i4\pi} = e^{i2\pi} = e^{i0} = 1$

$e^{i\frac{9\pi}{2}} = e^{i\frac{5\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}}$

Imaginární jednotka

Pro značení imaginární jednotky se využívá značení buďto znakem *i* nebo (častěji v elektrotechnických oborech) znakem j. Oba zápisy jsou totožné, takže pokud narazíte na jeden či druhý znak, jde jen o způsob zápisu.

Mocniny imaginární jednotky jsou potřeba první čtyři, dále už se cyklicky opakují.

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 i = -i$

$i^4 = i^2 i^2 = 1$

$i^5 = i$

Těchto vztahů se dá využít například pro řešení kvadratických rovnic se záporným diskriminantem:

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{-D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{-1}\sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm i\sqrt{D}}{2a}$

Komplexně sdružené číslo

Dvě komplexní čísla jsou komplexně sdružená, pokud se liší pouze ve znaménku imaginární části. A tedy pro číslo

$z = a + bi$

je komplexně sdružené číslo

$\bar{z} = a - bi$

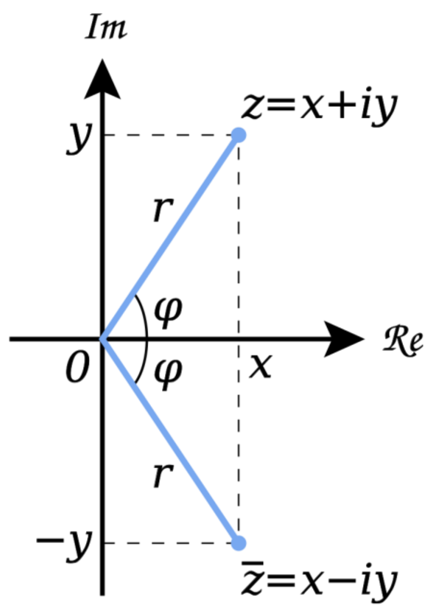
Základní vlastností komplexně sdružených čísel je, že pokud spolu vynásobí dvě komplexně sdružená čísla, výsledkem je vždy číslo reálné.

Komplexně sdružené číslo se značí buď pruhem, nebo někdy též hvězdičkou ($\bar{z} = z^*$).

V exponenciálním tvaru má komplexně sdružené číslo záporný úhel.

$z = |z|e^{i\varphi}$

$\bar{z} = |z|e^{-i\varphi}$



Opačné číslo

V případě opačných čísel se znaménko liší v obou částech komplexního čísla.

$z = a + bi$

$-z = -a - bi$

Součtem dvou opačných čísel získáváme nulu.

V exponenciálním tvaru je opačné číslo vyjádřeno posunutím úhlu o π (přičtením nebo odečtením, výsledek je stejný).

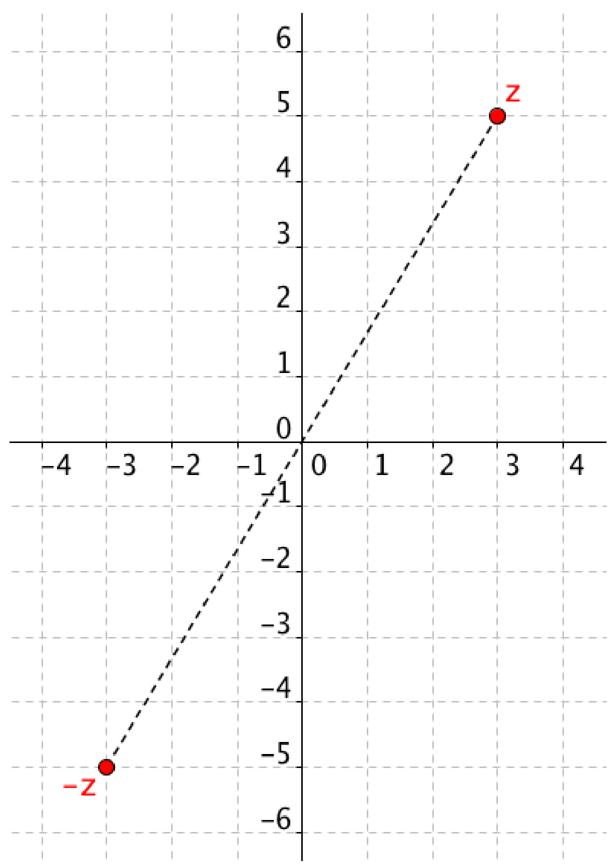
$z = |z|e^{i\varphi}$

$-z = |z|e^{i(\varphi \pm \pi)}$

Toho se dá využít pro určitá zjednodušení při výpočtech. Například vytýkání mínusů atd.

$-1 = e^{i\pi} = -e^{i(\pi-\pi)} = -e^{i0}$

$-2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}} = -2e^{i\frac{\pi}{2}}$



Operace s komplexními čísli

Operace ve složkovém tvaru

- Sčítání a odčítání

  Při sčítání sčítáme jednotlivé složky komplexního čísla. A tedy pro čísla

  $z_1 = a_1 + b_1 i$

  $z_2 = a_2 + b_2 i$

  platí, že

  $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i$

- Násobení

  Pro násobení je potřeba roznásobit všechny části.

  $z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i - b_1 b_2$

- Dělení

  Dělení už je komplikovanější. Postup je takový, že se snažíme získat ve jmenovateli reálné číslo, kterým už lze komplexní číslo v čitateli vydělit snadno. Toho docílíme tím, že čitatel i jmenovatel vynásobíme číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli. Tím nám ve jmenovateli vznikne reálné číslo a stále se jedná o validní operaci, jelikož jsme násobili jedničkou.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} \cdot \frac{a_2 - b_2 i}{a_2 - b_2 i} = \frac{a_1 a_2 - a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

- Mocnění

  Při mocnění se jedná pouze o opakované násobení čísla sebou samým, takže lze využít předchozí vztahy pro násobení.

  $z^n = (a + bi)^n = (a^2 + 2abi - b^2)^{n-1} = \cdots$

Jak je vidět, tak složkový tvar je vhodný především při sčítání a odčítání, zatímco násobení a dělení je poměrně komplikované. V exponenciálním tvaru je tomu naopak.

Operace v exponenciálním tvaru

- Násobení

  Násobení je v exponenciálním tvaru násobně jednodušší. Stačí pouze vynásobit absolutní hodnoty a sečíst úhly. Tedy pro čísla

  $z_1 = |z_1|e^{i\varphi_1}$

  $z_2 = |z_2|e^{i\varphi_2}$

  je násobení definováno jako

  $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

- Dělení

  Dělení je provedeno podobně, pouze násobení absolutních hodnot se mění na dělení a sčítání úhlů na odčítání. Je zjevné, že zde záleží na pořadí.

  $z_1/z_2 = |z_1|/|z_2|e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

- Mocnění

  Tím je zjednodušeno i mocnění a vztah je snadno odvoditelný.

  $z^n = |z|^n e^{i\varphi n}$

- Sčítání a odčítání

  Sčítání a odčítání v exponenciálním tvaru je naopak mnohem komplikovanější. Proto je striktně doporučeno používat složkový tvar. Pro zájemce je vztah následující:

  $$z_1 + z_2 = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \cdot e^{i\tan^{-1}\left(\frac{z_1 sin\varphi_1 + z_2 sin\varphi_2}{z_1 cos\varphi_1 + z_2 cos\varphi_2}\right)}$$

Moivreova věta

Tuto větu lze využít pro výpočet n-té odmocniny. Výsledkem bude *n* kořenů, které jsou vypočteny pomocí vztahu

$$z^{\frac{1}{n}} = \left(|z|e^{i\varphi}\right)^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)}$$

kde *k* je celé číslo a iteruje v rozsahu $0 \leq k \leq n-1$.