

图论

Graph Theory



内容提要

1. 图的基本概念
2. 图的连通性
3. 图的矩阵表示
4. 欧拉图与哈密顿图
5. 无向树与根树
6. 平面图

内容提要

1. 图的基本概念
2. 图的连通性
3. 图的矩阵表示
4. 欧拉图与哈密顿图
5. 无向树与根树
6. 平面图

4、欧拉图与哈密顿图

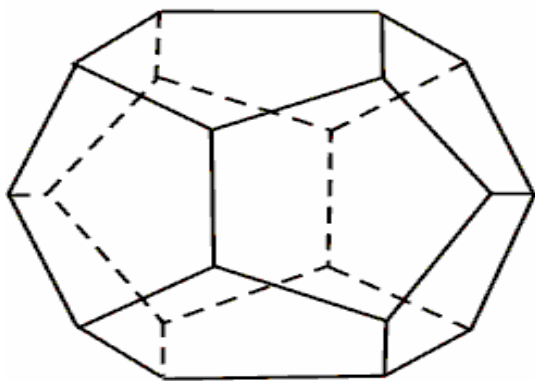
概念：

欧拉通路、欧拉回路、欧拉图、半欧拉图及其判别法

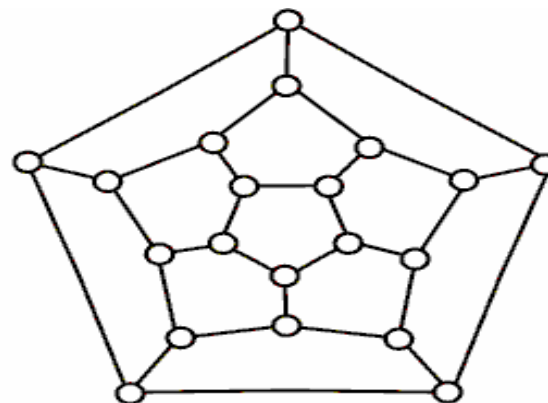
哈密顿通路、哈密顿回路、哈密顿图、半哈密顿图

哈密顿图的定义

历史背景：哈密顿周游世界问题与哈密顿图



(1)



(2)

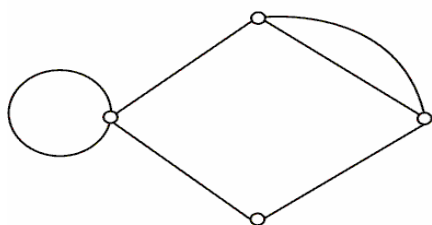
定义

- (1) **哈密顿通路**——经过图（无向图或有向图）中所有顶点一次仅一次的通路。
- (2) **哈密顿回路**——经过图中所有顶点一次仅一次的回路。
- (3) **哈密顿图**——具有哈密顿回路的图。
- (4) **半哈密顿图**——具有哈密顿通路且无哈密顿回路的图。

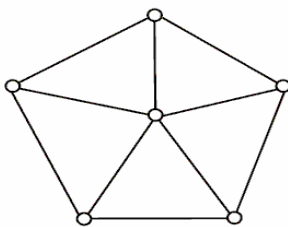
注：(1) 约定：平凡图是哈密顿图。

(2) 哈密顿通路是初级通路，哈密顿回路是初级回路。

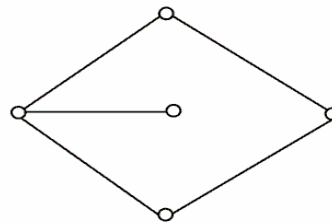
例



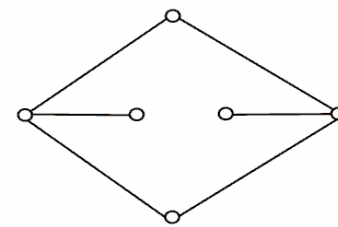
(1)



(2)



(3)



(4)

在上图中，

(1), (2) 是哈密顿图；

(3) 是半哈密顿图；

(4) 既不是哈密顿图，也不是半哈密顿图，为什么？

哈密顿图的必要条件

定理 设无向图 $G=\langle V, E \rangle$ 是哈密顿图，对于任意 $V_1 \subset V$ 且 $V_1 \neq \emptyset$ ，均有

$$p(G-V_1) \leq |V_1|$$

推论 设无向图 $G=\langle V, E \rangle$ 是半哈密顿图，对于任意的 $V_1 \subset V$ 且 $V_1 \neq \emptyset$ 均有

$$p(G-V_1) \leq |V_1| + 1$$

哈密顿图的必要条件

定理 设无向图 $G=\langle V, E \rangle$ 是哈密顿图, 对于任意 $V_1 \subset V$ 且 $V_1 \neq \emptyset$, 均有

$$p(G-V_1) \leq |V_1|$$

证明:

假设 C 是 G 的哈密顿回路。

考虑 $p(C-V_1)$,

当 V_1 中的顶点在 C 上均不相邻时, 达到最大值 $|V_1|$ 。因而有

$$p(C-V_1) \leq |V_1|$$

又因为 C 是 G 的生成子图, 有

$$p(G-V_1) \leq p(C-V_1) \leq |V_1|$$

哈密顿图的充分条件

哈密顿图的充分条件

定理 设 G 是 n 阶无向简单图, 若对于任意不相邻的顶点 v_i, v_j , 均有

$$d(v_i) + d(v_j) \geq n-1 \quad (*)$$

则 G 中存在哈密顿通路.

推论 设 G 为 n ($n \geq 3$) 阶无向简单图, 若对于 G 中任意两个不相邻的顶点 v_i, v_j , 均有

$$d(v_i) + d(v_j) \geq n \quad (**)$$

则 G 中存在哈密顿回路, 从而 G 为哈密顿图。

哈密顿图的充分条件

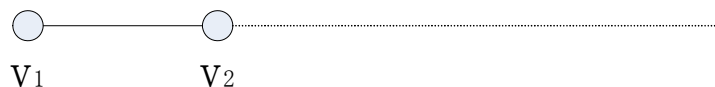
定理 设 G 是 n 阶无向简单图，若对于任意不相邻的顶点 v_i, v_j ，有

$$d(v_i) + d(v_j) \geq n-1$$

则 G 中存在哈密顿通路。

证明： 1) 可证 G 为连通图（留作练习）；2)

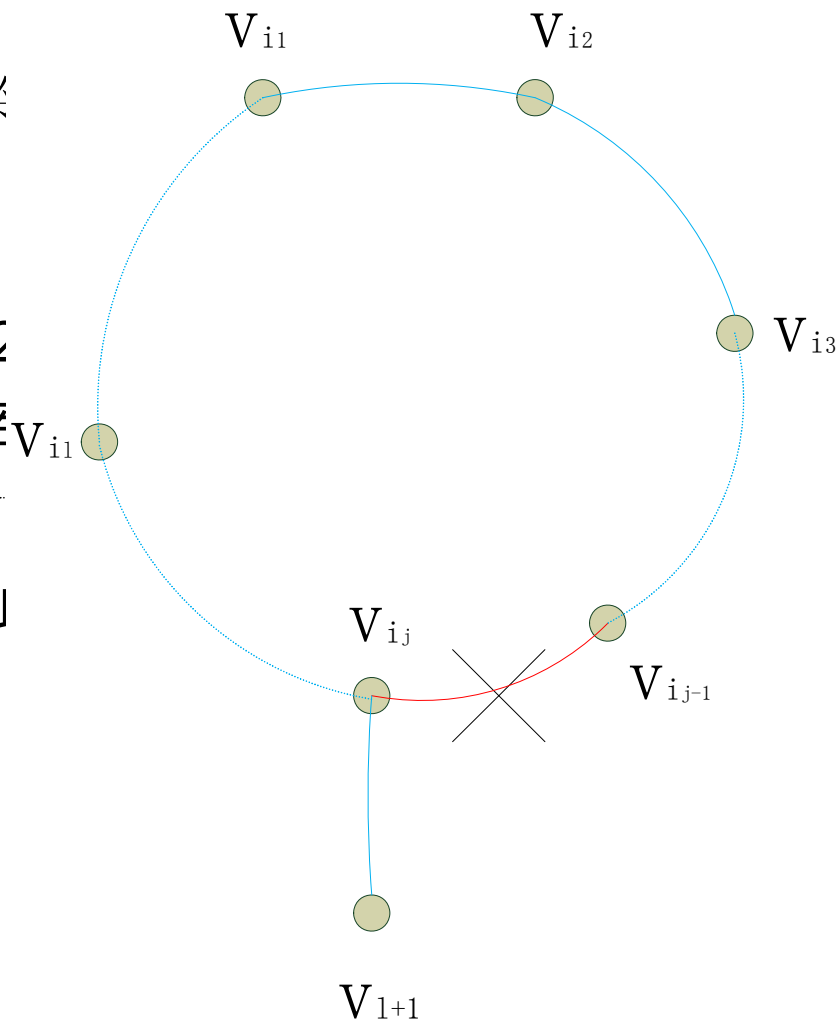
- 任取顶点，构造一条极大路径，如下图。若



- 构造含有 v_1 至 v_l 的圈。因为 G 连通，可由

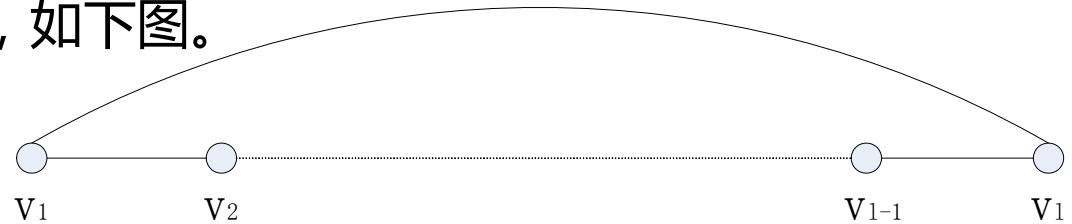
- 通过不断重复这一过程，
最终得到哈密顿通路。

- 下面说明如何构造含有 v_1 至 v_l 的圈。



哈密顿图的充分条件 证明 (2)

- 若 v_1 与 v_l 相邻，则容易得到圈，如下图。



- 若 v_1 与 v_l 不相邻，则有两点性质：

- > v_1 与 $\{v_2, \dots, v_{l-1}\}$ 中至少 2 个顶点相邻。

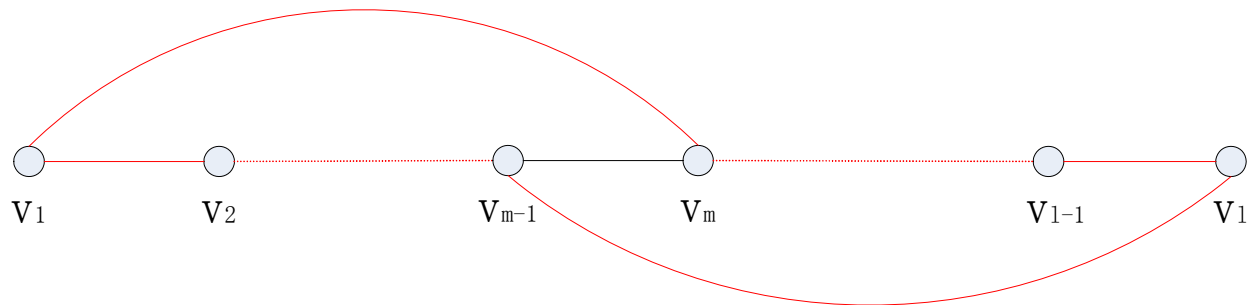
否则 $d(v_1) + d(v_l) \leq (1) + (l-2) = l-1 < n-1$ 与前提矛盾。

- > v_l 与 v_1 之某一相邻顶点的左侧邻接顶点 相邻，分别设为 v_m 与 v_{m-1} 。

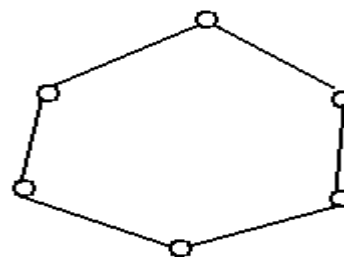
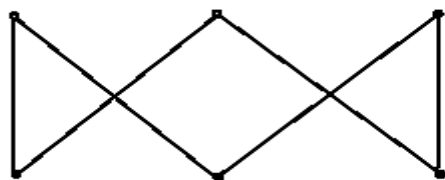
否则 $d(v_l) \leq l-2-(d(v_1)-1)$ ，从而 $d(v_1) + d(v_l) \leq d(v_1) + l-2-(d(v_1)-1) = l-1 < n-1$ ，与前提矛盾。

- 因而有如下示意图。

从而得到所需圈。



例：



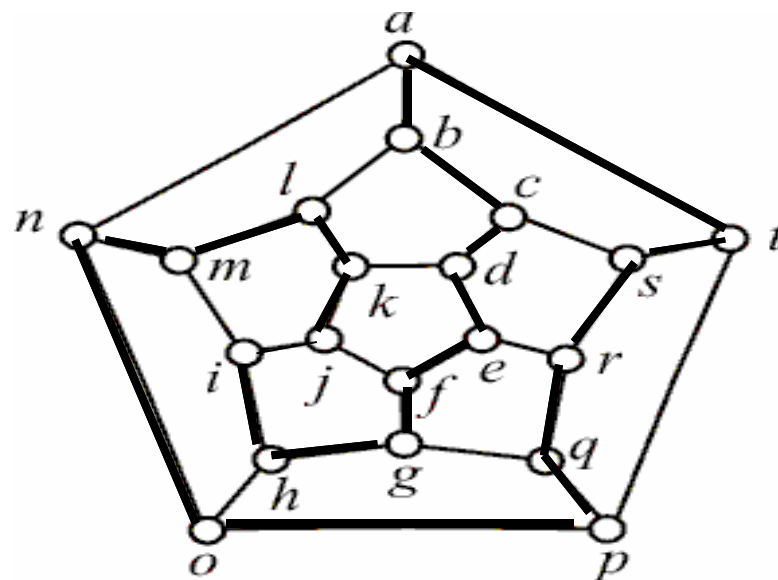
注意：上述条件为充分条件**非必要条件**。

哈密顿图的鉴别方法

判断某图是否为哈密顿图方法

- (1) 判断某图是否为哈密顿图至今还是一个难题（未知高效算法/刻画定理）
- (2) 判断某图是否哈密顿图的方法：
 - 观察法
 - 充分条件
 - 必要条件

1. 观察出哈密顿回路(周游世界问题)



a b c d e f g h i j k l m n p q r s t a

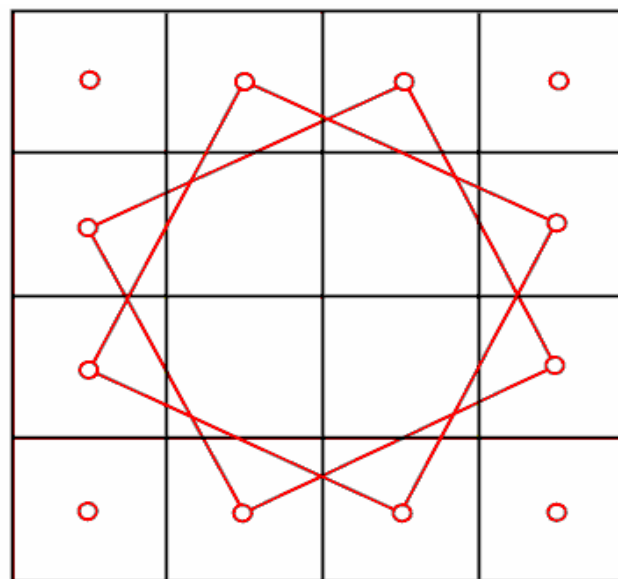
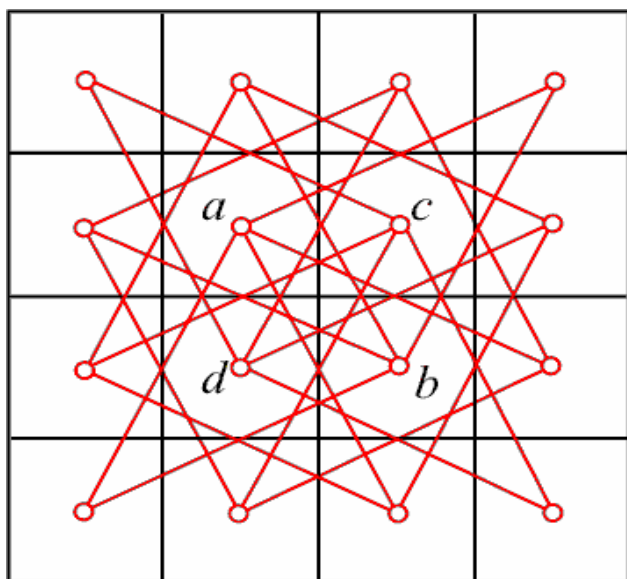
2. 充分条件

例 (? ?) :

完全图 K_n ($n \geq 3$) 为哈密顿图。因为任何两个顶点 u, v , 均有

$$d(u) + d(v) = 2(n-1) \geq n \quad (n \geq 3)$$

3. 利用必要条件 判断不是哈密顿图



令 $V_1 = \{a, b, c, d\}$, 则 $p(G - V_1) = 6 > 4$, 无哈密顿回路。