1-10 等值与逻辑蕴含

概念：

有效公式、可满足公式、不可满足公式

等值公式、逻辑蕴含式

有效公式

当一个解释I的所有赋值v都使公式A的真值为1，则称A在解释I下有效的(valid in the interpretation I);当公式A在所有的解释下都有效时，称A是(逻辑)有效的(Logically valid)。

可满足的 给定公式A，若在某一解释中至少有一种赋值使A取值为1，则称A为可满足的。否则称A是不可满足的。

等值式 $A \Leftrightarrow B$ ：若$A \leftrightarrow B$是有效的。

例：

$A=\exists x P(x，y)$可满足公式

$A=\forall x（P(x，y)\wedge\neg P(x，y)）$不可满足公式

$A=（P(x，y)\vee\neg P(x，y)）$有效公式

几类等值式

（1） 命题公式的推广

$$\text{e.g. } P(x) \to Q(x) \Leftrightarrow \neg P(x) \vee Q(x)$$

（2）否定深入

$$\neg \forall x\, P(x) \Leftrightarrow \exists x(\neg P(x))$$

$$\neg \exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x\, (\neg P(x))$$

（3）量词作用域的扩张与收缩

设B中不含x的自由出现，则

$$\forall x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B$$

$$\forall x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B$$

$$\exists x(A(x) \vee B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee B$$

$$\exists x(A(x) \wedge B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B$$

（4）$\forall x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$

$\exists x(A(x) \vee B(x)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$

（5）多个量词的使用

$\forall x \forall y A(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x,y)$

$\exists x \exists y A(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x,y)$

置换规则

设$\Phi(A)$是含A的公式, 那么, 若$A\Leftrightarrow B$, 则$\Phi(A)\Leftrightarrow\Phi(B)$.

换名规则

设A为一公式，将A中某量词辖域中个体变项的所有约束出现及相应的指导变元换成该量词辖域中未曾出现过的个体变项符号，其余部分不变，设所得公式为A'，则$A'\Leftrightarrow A$.

逻辑蕴含式 $A \Rightarrow C$：当且仅当$A \rightarrow C$是有效的。

有效结论

设A、C是两个谓词公式，若$A \Rightarrow C$，称C是A的有效结论。

推广: 若$H_1 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow C$, 称C是一组前题$H_1,\ldots,H_n$的有效结论。

几类逻辑蕴涵式

第一组 命题逻辑推理定理的代换实例

如, $\forall xF(x)\wedge\exists yG(y) \Rightarrow \forall xF(x)$

第二组 基本等值式生成的推理定理

如, $\forall xF(x) \Rightarrow \neg\neg\forall xF(x)$, $\neg\neg\forall xF(x) \Rightarrow \forall xF(x)$

$\neg\forall xF(x) \Rightarrow \exists x\neg F(x)$, $\exists x\neg F(x) \Rightarrow \neg\forall xF(x)$

第三组 其它常用推理定律

(1) $\forall xA(x)\vee\forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x)\vee B(x))$

(2) $\exists x(A(x)\wedge B(x))\Rightarrow\exists xA(x)\wedge\exists xB(x)$

(3) $\forall x(A(x)\rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall xA(x)\rightarrow\forall xB(x)$

(4) $\exists x(A(x)\rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall xA(x)\rightarrow\exists xB(x)$

总结

- 有效公式、满足公式、不可满足公式
- 等值公式、逻辑蕴含式