# 代数结构

# Algebra Structures

# 内容提要

1. 运算及其性质
2. 代数系统
3. 群与子群
4. 阿贝尔群和循环群
5. 环与域
6. 格与布尔代数

# 内容提要

1. 运算及其性质
2. 代数系统
3. 群与子群
4. 阿贝尔群和循环群
5. 环与域
6. 格与布尔代数

# 6、格与布尔代数

概念：

格，对偶原理，子格，分配格，有界格，有补格

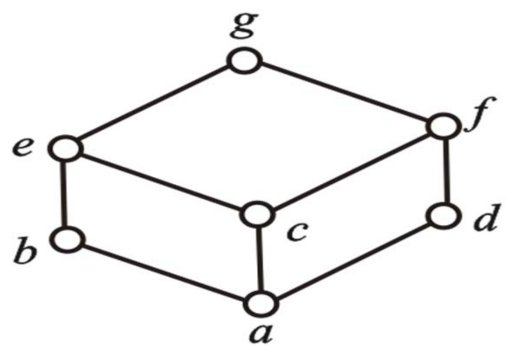
布尔代数，有限布尔代数的表示定理

特殊的格：子格，分配格，有界格，有补格

## 子格（Sub-lattice）

设<$L$,$\wedge$,$\vee$>是格, $S$是$L$的非空子集, 若$S$关于$L$中的运算$\wedge$和$\vee$仍构成格, 则称$S$是$L$的子格.

例：设格$L$如图所示. 令




$S_1=\{a, e, f, g\}$,

$S_2=\{a, b, e, g\}$

$S_1$不是$L$的子格, 因为$e, f \in S_1$ 但

$$e\wedge f = c \notin S_1.$$

$S_2$是$L$的子格.

分配格（Distributive lattice）

设<$L$,∧,∨>是格, 若∀$a,b,c$∈$L$,有

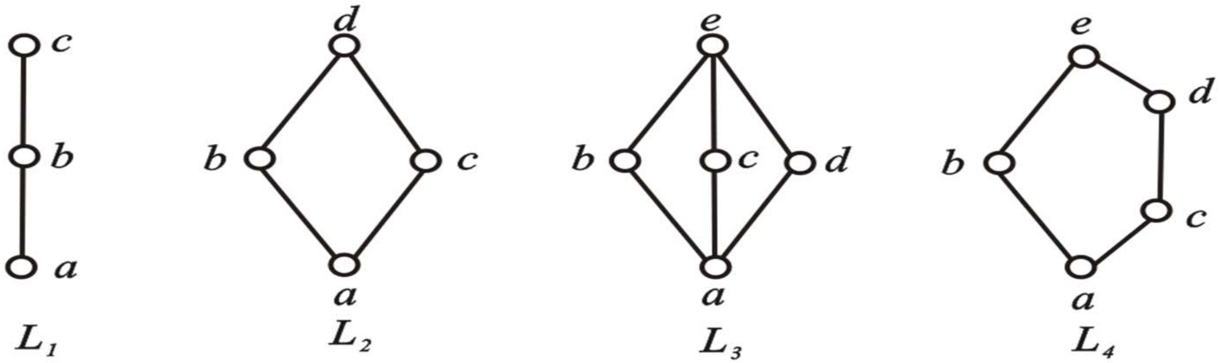
$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

则称$L$为分配格.

*注：可以证明以上两个条件是等价的。*

例：




$L_1$ 和 $L_2$ 是分配格， $L_3$ 和 $L_4$不是分配格。 称 $L_3$为钻石格， $L_4$为五角格。

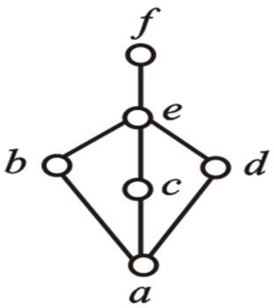
# 分配格的判别

定理　设$L$是格, 则$L$是分配格当且仅当$L$不含有与钻石格或五角格同构的子格.

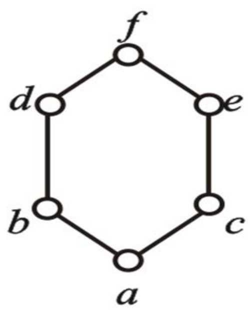
推论　(1) 小于五元的格都是分配格。

(2) 任何一条链都是分配格。

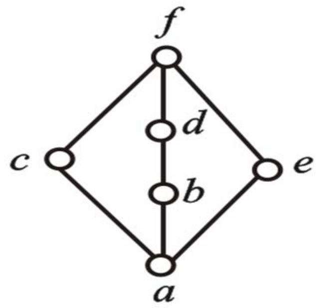
例：　说明图中的格是否为分配格, 为什么?




$L_1$




$L_2$




$L_3$

答：都不是分配格。

$\{a,b,c,d,e\}$是$L_1$的子格，
同构于钻石格，

$\{a,b,c,e,f\}$是$L_2$的子格，
同构于五角格；

$\{a,c,b,e,f\}$ 是$L_3$的子格
同构于钻石格。

设$L$是格。

(1) 若存在$a \in L$使得$\forall x \in L$有 $a \preccurlyeq x$, 则称$a$为$L$的全下界；

(2) 若存在$b \in L$使得$\forall x \in L$有 $x \preccurlyeq b$, 则称$b$为$L$的全上界 。

说明：

（1）格$L$若存在全下界或全上界，一定是惟一的；

（2）一般将格$L$的全下界记为0，全上界记为1。

## 有界格 （Bounded lattice）

设$L$是格，若$L$存在全下界和全上界， 则称$L$ 为有界格。

一般将有界格$L$记为$\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$。

# 有界格的性质

定理　设<$L$,$\wedge$,$\vee$,0,1>是有界格，则$\forall a \in L$有

$$a \wedge 0 = 0,\ a \vee 0 = a,\ a \wedge 1 = a,\ a \vee 1 = 1$$

注意：

（1）有限格$L=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$是有界格，$a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_n$是$L$的全下界，$a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_n$是$L$的全上界。

（2）0是关于$\wedge$运算的零元，$\vee$运算的单位元；1是关于$\vee$运算的零元，$\wedge$运算的单位元。

（3）对于涉及到有界格的命题， 如果其中含有全下界0或全上界1， 在求该命题的对偶命题时， 必须将0替换成1， 而将1替换成0。

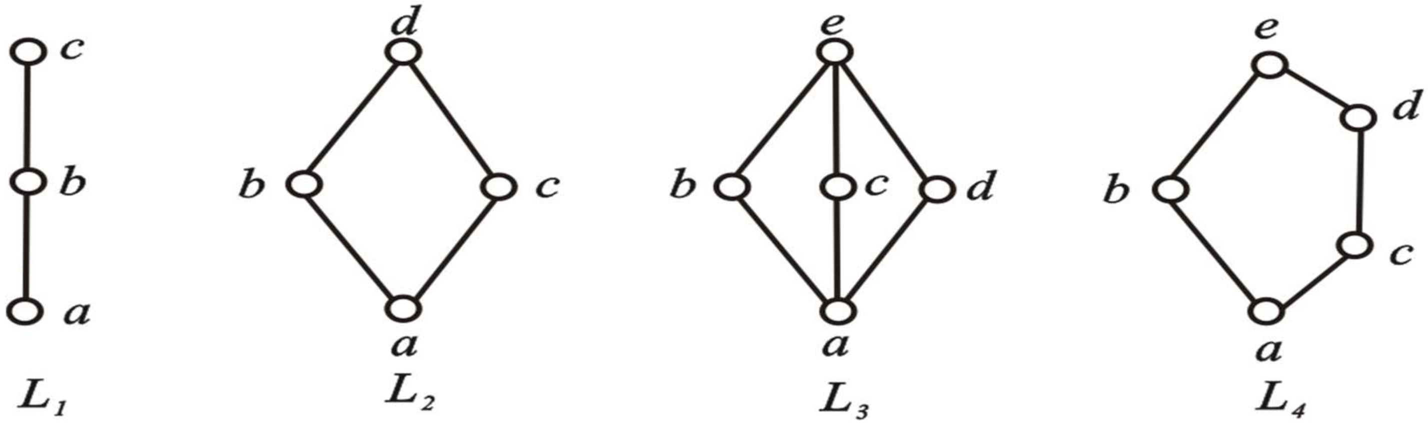
设$<L,\wedge,\vee,0,1>$是有界格， $a\in L$， 若存在$b\in L$ 使得

$$a\wedge b=0 \text{ 和 } a\vee b=1$$

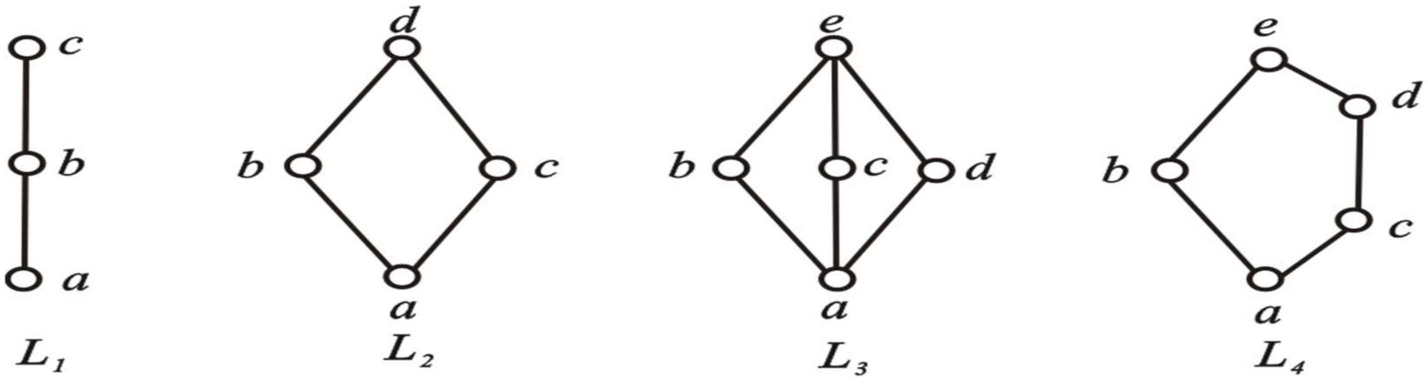
成立，则称$b$是$a$的补元。

*注意：若b是a的补元，那么a也是b的补元， a和b互为补元。*

例： 考虑下图中的格。 针对不同的元素，求出所有的补元。



# 解答




(1) $L_1$中 $a$ 与 $c$ 互为补元， 其中 $a$ 为全下界， $c$为全上界， $b$ 没有补元。

(2) $L_2$中 $a$ 与 $d$ 互为补元， 其中 $a$ 为全下界， $d$ 为全上界， $b$与 $c$ 也互为补元。

(3) $L_3$中$a$ 与 $e$ 互为补元， 其中 $a$ 为全下界， $e$ 为全上界， $b$ 的补元是 $c$ 和 $d$； $c$ 的补元是 $b$ 和 $d$； $d$ 的补元是 $b$ 和 $c$ ； $b, c, d$ 每个元素都有两个补元。

(4) $L_4$中 $a$ 与 $e$ 互为补元， 其中 $a$ 为全下界，$e$ 为全上界， $b$ 的补元是 $c$ 和 $d$； $c$ 的补元是 $b$ ； $d$ 的补元是 $b$ 。

# 有界分配格的补元惟一性

注意：

（1）在任何有界格中，全下界0与全上界1互补。

（2）对于一般元素，可能存在补元，也可能不存在补元。 如果存在补元，可能是惟一的， 也可能是多个补元。

（3）对于有界分配格， 如果元素存在补元， 一定是惟一的。

定理　设$<L,\wedge,\vee,0,1>$是有界分配格。 若$L$中元素 $a$ 存在补元， 则惟一。

# 有界分配格的补元惟一性

定理　设 $<L,\wedge,\vee,0,1>$ 是有界分配格。若 $L$ 中元素 $a$ 存在补元，则惟一。

证明：

假设b,c都是a的补元，我们证明b=c。

由补元的定义，我们知道 $a\vee b = a\vee c = 1$，$a\wedge b = a\wedge c = 0$。于是：

$b$

$= b\wedge(a\vee b)$　（吸收律）

$= b\wedge(a\vee c)$　（前提假设）

$= (b\wedge a) \vee (b\wedge c)$　（分配律）

$= (a\wedge c) \vee (b\wedge c)$　（前提假设）

$= c \wedge (a\vee b)$　（分配律）

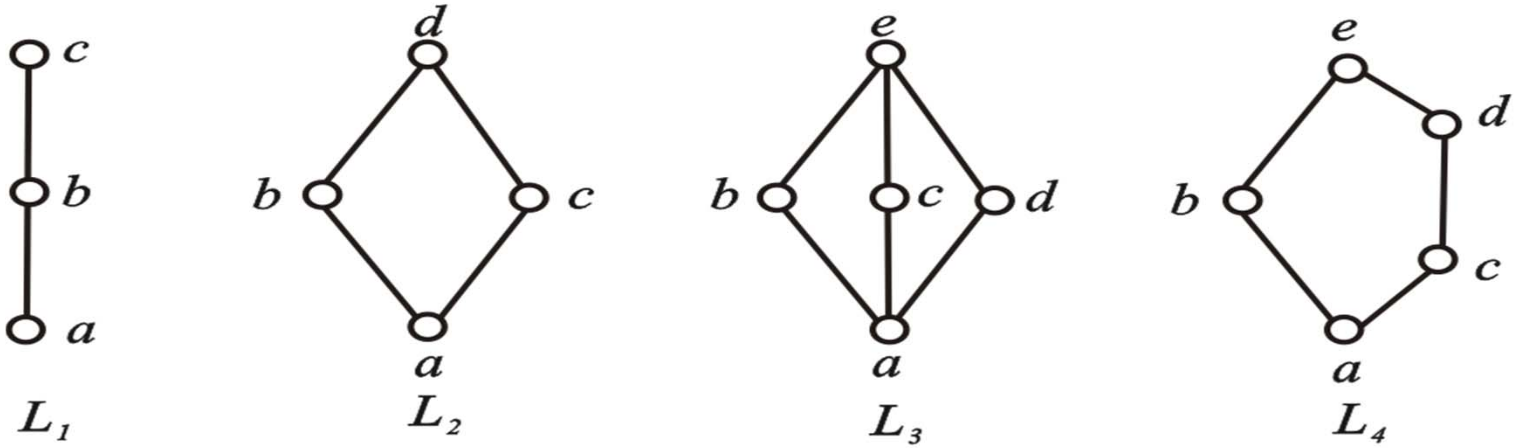
$= c \wedge (a\vee c)$　（前提假设）

$= c$　（吸收律）

有补格 (Complemented lattice)

设$<L,\wedge,\vee,0,1>$是有界格，若$L$中所有元素都有补元存在， 则称$L$为有补格。

图中的$L_2$, $L_3$和$L_4$是有补格， $L_1$不是有补格。



# 布尔代数的定义及其性质

布尔格 (Boolean lattice)

如果一个格是有补分配格，则称它为布尔格或布尔代数。布尔代数标记为$<B, \wedge, \vee, ', 0, 1>$，$'$为求补运算。

例：

（1）设 $S_{110} = \{1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110\}$是110的正因子集合，gcd表示求最大公约数的运算，lcm表示求最小公倍数的运算，则 $<S_{110}, \text{gcd}, \text{lcm}>$构成布尔代数。

（2）设$B$为任意集合，$B$的幂集格$<P(B), \cap, \cup, \sim, \varnothing, B>$构成布尔代数。

# 布尔代数的性质

定理　设<$B,\wedge,\vee,',0,1$>是布尔代数，　则

(1) $\forall a\in B$，　$(a')' = a$ 。

(2) $\forall a,b\in B$，　$(a\wedge b)' = a'\vee b'$，$(a\vee b)' = a'\wedge b'$（德摩根律）。

# 布尔代数的代数系统定义

设$<B, *, \circ>$是代数系统， $*$和$\circ$是二元运算。若$*$和$\circ$运算满足：

(1) 交换律， 即$\forall a,b \in B$有 $a*b = b*a,\ a\circ b = b\circ a$

(2) 分配律，即$\forall a,b,c \in B$有

$$a*(b\circ c) = (a*b)\circ(a*c),\ a\circ(b*c) = (a\circ b) * (a\circ c)$$

(3) 同一律， 即存在$0,1 \in B$，使得$\forall a \in B$有$a * 1 = a,\ a\circ 0 = a$

(4) 补元律，即$\forall a \in B$，存在 $a' \in B$ 使得 $a * a' = 0,\ a\circ a' = 1$

则称 $<B,*,\circ>$是一个布尔代数。

# 有限布尔代数的结构

设 $L$ 是格, $0\in L$, $a\in L$若$\forall b\in L$有 $0 \prec b \preccurlyeq a \Leftrightarrow b = a$, 则称 $a$ 是 $L$ 中的原子。

*注：原子是盖住全下界0的元素。*

有限布尔代数的表示定理

设$B$是有限布尔代数, $A$是$B$的全体原子构成的集合，则$B$同构于$A$的幂集代数$P(A)$.

推论1　任何有限布尔代数的基数为$2^n$，　$n\in \mathrm{N}$。

推论2　任何等势的有限布尔代数都是同构的。

# 实例

下图给出了 1 元, 2 元, 4 元和 8 元的布尔代数。