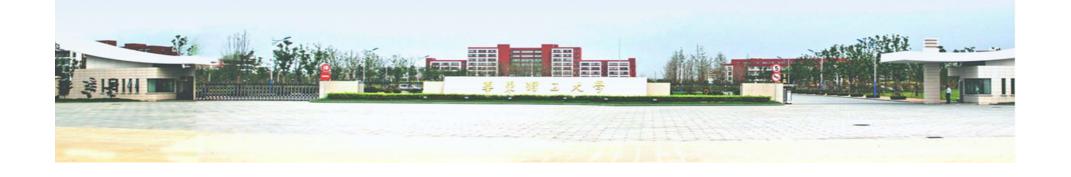


代数结构

Algebra Structures



内容提要

- 1. 运算及其性质
- 2. 代数系统
- 3. 群与子群
- 4. 阿贝尔群和循环群
- 5. 环与域
- 6. 格与布尔代数

内容提要

- 1. 运算及其性质
- 2. 代数系统
- 3. 群与子群
- 4. 阿贝尔群和循环群
- 5. 环与域
- 6. 格与布尔代数

4、阿贝尔群和循环群

概念:

阿贝尔群(交换群),循环群,生成元

阿贝尔 (Abel) 群

若群G中的运算是可交换的,则称G为交换群或阿贝尔群。

例: (1) $\langle Z, + \rangle$ 和 $\langle R, + \rangle$, $\langle Z_n, \oplus \rangle$ 、Klein四元群均是阿贝尔群。

(2) n阶(n≥2)实可逆矩阵集合关于矩阵乘法构成的群 不是 阿贝尔群。

循环群(Cyclic group)

设G是群,若存在a∈G使得

$$G=\{a^k|k\in\mathbb{Z}\}$$

则称G是循环群,记作 $G=\langle a \rangle$,称 a 为G 的生成元.

循环群的分类

(1) n 阶循环群: 设G=<a>是循环群, a是n 阶元, 则

$$G = \{ a^0 = e, a^1, a^2, \dots, a^{n-1} \}$$
 (注意/ G / = $/a$ / = n)

(2) 无限循环群: a 是无限阶元,则

$$G = \{ a^0 = e, a^{\pm 1}, a^{\pm 2}, \dots \}$$

循环群的生成元

设G=<a>是循环群。

- (1) 若G是无限循环群,则G只有两个生成元,即a和 a^{-1} 。
- (2) 若G是n 阶循环群,则对于任何小于n且与n 互质的数 $r \in \{0,1,...,n-1\}$, a^r 是G的生成元。这样的r共有 $\phi(n)$ 个,因而G共有 $\phi(n)$ 个生成元。

证明(思路):

- (1) 容易说明 a^{-1} 也是生成元。设b也是生成元。 则有 $a=b^t,b=a^m$,因而 $a=b^t=(a^m)^t=a^{mt}$,从而 $a^{mt-1}=e$ 因为G是无限循环群,必有mt-1=0,从而m=t=1或m=t=-1。

实例

- (1) 设G={e, a, ..., a¹¹}是12阶循环群,小于12且与12互素的数是1, 5, 7, 11 (ϕ (12)=4)。可知 a, a⁵, a⁷ 和 a¹¹是G的生成元。
- (2) 设 $G=\langle Z_9, \oplus \rangle$ 是模9的整数加群,小于9且与9互素的数是 1, 2, 4, 5, 7, 8 ($\phi(9)=6$)。可知G的生成元是1, 2, 4, 5, 7和8。
- (3) 设 $G=3Z=\{3z \mid z \in Z\}$,G上的运算是普通加法。那幺G只有两个生成元: 3和-3.

循环群的子群

设G=<a>是循环群。

- (1) 设 $G=\langle a\rangle$ 是循环群,则G的子群仍是循环群;
- (2) 若 $G=\langle a\rangle$ 是无限循环群,则G的子群除 $\{e\}$ 以外都是无限循环群;
- (3) 若 $G=\langle a\rangle$ 是n阶循环群,则对n的每个正因子d,G恰好含有一个d 阶子群。

实例

(1) $G=\langle Z, + \rangle$ 是无限循环群,其生成元为1和-1. 对于自然数 $m \in N$,1的m次幂是m,m生成的子群是mZ,m \in N。即

$$<0> = {0} = 0Z$$

 $= {mz | z \in Z} = mZ, m>0$

(2) *G*=Z₁₂是12阶循环群。12正因子是1,2,3,4,6和12, *G* 的子群: