2-7 偏序关系

概念：

偏序关系，全序(线序)关系，哈斯图

偏序 (Partial Ordering)

设A是一个集合. 如果 A 上的二元关系 R 是自反的,反对称的和传递的, 则称R是A上的一个偏序关系. 记R为“$\leq$”, 且称序偶<A,$\leq$> 为偏序集。

例: 设A={a,b},在 P(A)上的二元关系R为包含关系, 即

$$R=\{ <x,y> \mid x,y\in P(A) \text{ 且 } x\subseteq y \}$$

证明: < P(A), R>是偏序集.

全序/线序(Total Ordering/ Linear Ordering)

设 $<A,\leq>$为偏序集, 若对任 意的$x,y\in A$满足:

$$x\leq y \text{或} y\leq x$$

则称 ≤ 为全序关系. $<A,\leq>$为全序集.

例: (1) Z为整数集，$<Z, \leq>$为全序集。

(2) 设$A=\{a,b\}$，则$< P(A), \subseteq >$是偏序集，但不是全序集。

覆盖（Covering）

设$<A,\leq>$为偏序集,若$x,y\in A$,

$x\leq y, x\neq y$且没有其它元素z满足$x\leq z, z\leq y$,

则称**y覆盖x**. 记**cov$A$**$=\{ <x,y> \mid x,y\in A$且y覆盖$x\}$

例:设$A=\{a,b\}$, $< P(A), \subseteq >$是偏序集。

则：$cov(P(A))=\{ <\varnothing,\{a\}>,<\varnothing,\{b\}>,< \{a\},\{a,b\}>,<\{b\},\{a,b\}>\}$

哈斯图(Hasse Diagram)

作图规则

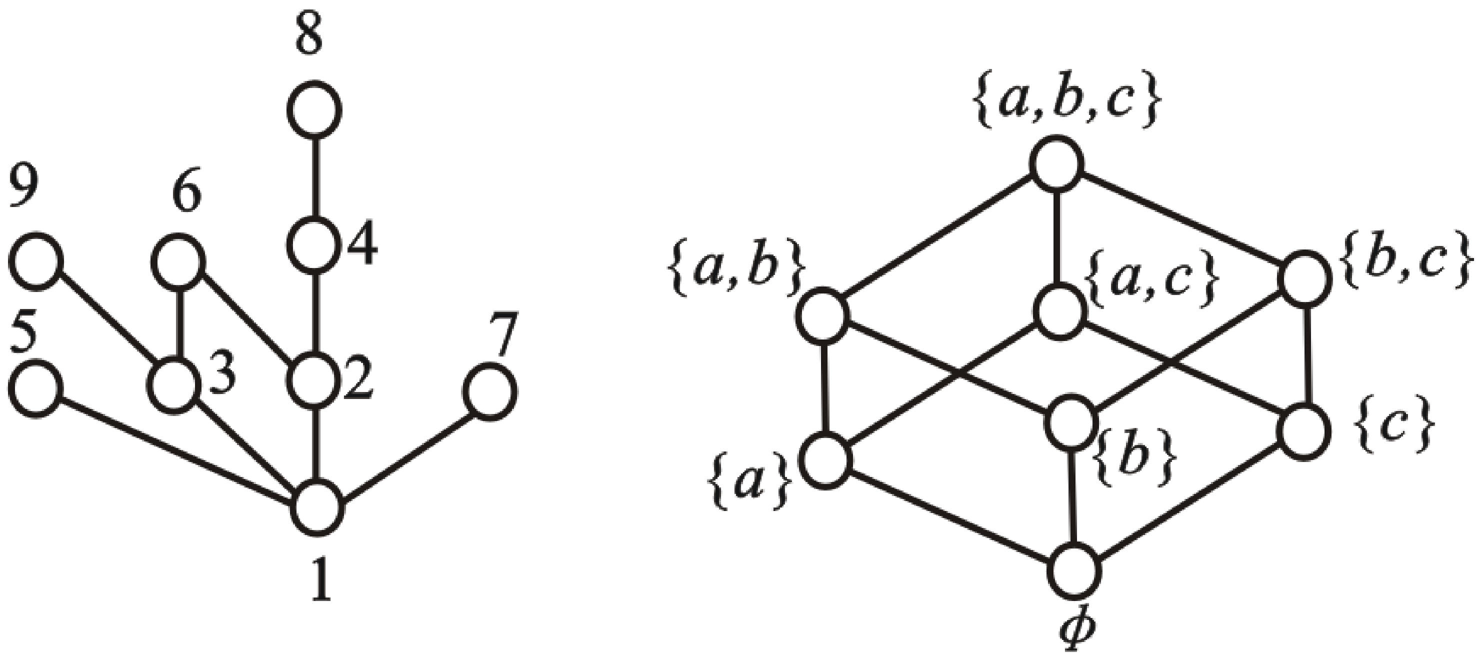
①用小元圈∘代表元素;

②若$x \le y$且$x \ne y$,则将代表y的小元圈画在代表x的小元圈之上;

③若$<x,y> \in covA$, 则在x,y之间用直线连接。

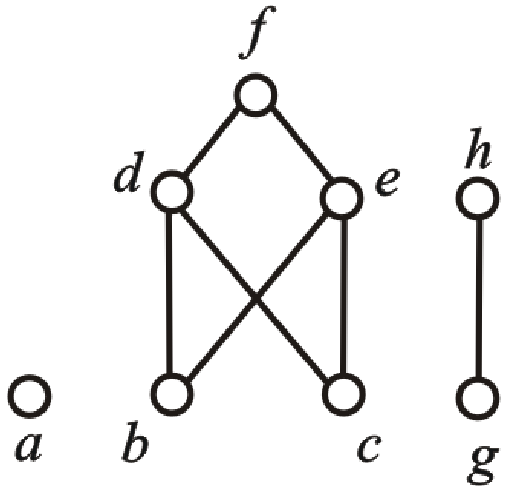
例子

偏序集$<\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, R_{整除}>$和$<P(\{a,b,c\}),R_{\subseteq}>$的哈斯图.



实例

已知偏序集$<A,R>$的哈斯图如下图所示, 试求出集合A和关系R的表达式.



解 $A=\{ a, b, c, d, e, f, g, h \}$

$R=\{<b,d>,<b,e>,<b,f>,<c,d>,<c,e>,<c,f>,<d,f>,<e,f>,<g,h>\}\cup I_A$

总结

- 偏序关系
- 全序(线序)关系
- 哈斯图