第三部分 代数结构

习题九

9-2、设$A=\{0,1\}$，$S=A^A$，

（1）试列出S中的所有函数。

（2）给出S上合成运算的运算表。

解：

（1）$f_1=\{\langle 0,0\rangle,\langle 1,0\rangle\}$

$f_2=\{\langle 0,0\rangle,\langle 1,1\rangle\}$

$f_3=\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,0\rangle\}$

$f_4=\{\langle 0,1\rangle,\langle 1,1\rangle\}$

（2）

∘	f1	f2	f3	f4
f1	f1	f1	f4	f4
f2	f1	f2	f3	f4
f3	f1	f3	f2	f4
f4	f1	f4	f1	f4

9-4、判断下列集合对所给的二元运算是否封闭。

（1）整数集合 Z 和普通的加减运算。

（5）正实数集合R^+和$\circ$运算，其中$\circ$运算定义为：$\forall a$，$b\in R^+$，$a\circ b=ab-a-b$。

（7）$A=\{a_1,a_2,....,a_n\}$, $n>=2$, $\circ$运算定义如下：$\forall a$，$b\in A$，$a\circ b=b$。

解：

（1）是封闭的。

（5）是不封闭的。

对于所给的二元运算在正实数集合上是不封闭的。

如：a=1，b=2； $a\circ b$=-1 不在所给的正实数集合中，所以对该运算不封闭。

（7）是封闭的。

9-7、设$*$为Z^+上的二元运算，$\forall x$，$y\in Z^+$，$x*y=\min(x,y)$，即x和y中较小的数

（1）求4*6,7*3；

（2）*在Z^+上是否满足交换律，结合律和幂等律；

（3）求*运算的单位元，零元，以及Z^+中所有的可逆元素的逆元。

解：

（1）4*6=4；　7*3=3；

（2）*在Z^+上满足交换律，结合律和幂等律；

（3）*运算没有单位元和可逆元素，它的零元为1。

9-10、令 S={a，b}，S 上有 4 个二元运算：*，。，.，□，分别由下表确定

*	a	b
a	a	a
b	a	a

(1)

。	a	b
a	a	b
b	b	a

(2)

.	a	b
a	b	a
b	a	a

(3)

□	a	b
a	a	b
b	a	b

(4)

（1）求 4 个运算中哪些运算满足交换律，结合律和幂等律。
（2）求出每隔云端的单位元，零元以及所有可逆元素的逆元。
解：
（1）满足交换律的运算有：*、 。、 .
满足结合律的运算有：*、 。、 □
满足幂等律的运算有：□
（2）*运算无单位元，零元为 a。
。运算单位元为 a，无零元，a 的逆元为 a，b 的逆元为 b。
.和□运算没有单位元和零元。

9-11、设 S={1,2，...,10}问下面定义的运算是否与 S 构成代数系统<S,*>？如果能构成代数系统则说明*运算是否满足交换律，结合律，并且求*运算的单位元和零元。
（1）x*y=gcd（x，y），gcd（x，y）是 x 与 y 的最大公约数。
解：
能够成代数系统；满足交换律，结合律；该运算没有单位元，零元为 1。

9-12、设 S={f|f 是【a，b】上的连续函数}其中 a<b，问 S 关于下面每个运算是否构成代数系统，如果能构成代数系统，说明该运算是否适合交换律，结合律，并求出单位元和零元。
（1）函数加法，即$(f,g)(x)=f(x)+g(x),\forall x\in[a,b]$。
解：
是代数系统；满足交换律和结合律；
单位元是常函数f_0，$\forall x\in[a,b]$，$f_0=0$
没有零元。

9-14、下面各集合都是 N 的子集，他们能够构成代数系统 V=<N,+>的子代数：

（2）$\{x|x \in N \wedge x与5互素\}$；
解：
不能构成代数系统V=<N,+>的子代数

9-15、设 V=<Z,+,.>，其中+和.代表普通加法和乘法，对下面给定的每个集合确定它是否够成 V 的子代数，为什么？
$S_2 = \{2n+1 | n \in Z\}$
解：
不能构成V的子代数，因为该运算对加法不封闭。
如：任意两个奇数的和是偶数，但是偶数并不属于集合S_2。

9-17、V=$\langle R^*, . \rangle$其中R^*为非零实数集合，. 为普通乘法，判断下面的哪些函数是V的自同态？是否为单自同态，满自同态，自同构？计算V的同态像。
（1）f（x）=$|x|$；
（3）f（x）=x^2。
解：
（1）$\forall x$，$y \in R^*$，使得$f(x,y)=|xy| = f(x)f(y)$,所以f是V的自同态；
又$ranf \neq R^*$，故f不是V的满自同态，
且对于$\forall y \in ranf$，存在不唯一的$x \in R^*$满足$f(x)=y$,
故f不是V的单自同态，也不是自同构。
$f(V)=\langle R^*, \bullet \rangle$
(3) $\forall x$，$y \in R^*$，使得f（x，y）=$x^2y^2 = f(x)f(y)$
所以f是V的自同态；
f：$R^* \to R^*$，f（x）=x^2，f不是单调函数，且$ranf \neq R^*$
所以f不是V的单自同态，也不是满自同态，也不是自同构。
$f(V)=\langle R^*, \bullet \rangle$。

9-19、设$V_1 = \langle A, \circ \rangle, V_2 = \langle B, * \rangle$为同类型代数系统，$V_1 \times V_2$是积代数
定义函数f：$A \times B \to A$，f（$\langle x, y \rangle$）=x，证明f是$V_1 \times V_2$到V_1的同态映射。
证明：
设$V_1 \times V_2 = \langle A \times B, \bullet \rangle, \forall \langle x_1, y_1 \rangle \langle x_2, y_2 \rangle \in A \times B$,
有$f(\langle x_1, y_1 \rangle \bullet \langle x_2, y_2 \rangle) = f(\langle x_1 \circ x_2, y_1 * y_2 \rangle) = x_1 \circ x_2 = f(\langle x_1, y_1 \rangle) \circ f(\langle x_2, y_2 \rangle)$
于是f是$V_1 \times V_2$到V_1的同态映射。

习题十

10-2、判断下列集合关于指定的运算是否构成半群、独异点和群

（1）a是正有理数，$G=\{a^n | n \in Z\}$，运算是普通乘法。

（5）一元实系数多项式的集合关于多项式的乘法。

解：

（1）构成半群：

$(a^m \times a^s) \times a^t = a^m \times a^s \times a^t$

构成独异点：

$a^m |_{m=0} = 1$

$a^0 \cdot a^n = a^n$所以a^0是单位元

构成群：

$a^m a^{-m} = e$，且$m \in Z, -m \in Z$

（5）构成半群：

多项式乘法满足结合律；

不够成独异点：

集合中必存在非常数项系数为0，常数项为1的元素，1是单位元；

不能构成群：

设多项式为：$3x+x^2+5x^3$，而其逆元为

$\dfrac{1}{3x+x^2+5x^3}$不是多项式，所以。

10-5、设$V=<\{a,b\},*>$是半群，且$a*a=b$，证明

（1）$a*b=b*a$。

（2）$b*b=b$。

证明：

（1）假设$a*b\neq b*a$，那么或者$a*b=a$，$b*a=b$；或者$a*b=b$，$b*a=a$；

若为前者，则（$a*b$）$*a=a*a=b$，$a*$（$b*a$）$=a$ 与结合律矛盾；

若为后者，则（$a*b$）$*a=b*a=a$，$a*$（$b*a$）$=a*a=b$ 也与结合律矛盾。

所以假设不成立，原结论正确。

（2）假设$b*b=a$，那么，或者$a*b=b*a=a$，或者$a*b=b*a=b$

若前者成立，则有（$b*a$）$*a=a*a=b$，$b*$（$a*a$）$=b*b=a$与结合律矛盾；

若后者成立，则有（$b*a$）$*a=b*a=b$, $b*$（$a*a$）$=b*b=a$与结合律矛盾。

所以，假设不成立，原结论正确。

10-7、设$G=\{a+bi\,|\,a，b\in Z\}$，i为虚数单位，验证G关于复数加法构成群。

证明：

任取$a+bi$，$c+di\in G$

可得:$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i\in G$

任取$a+bi$，$c+di,e+fi\in G$

可得:$((a+bi)+(c+di))+(e+fi)=(a+c)+(b+d)i+(e+fi)=(a+b+e)+(c+d+f)i\in G$

同理可证:$(a+bi)+((c+di)+(e+fi))=(a+b+e)+(c+d+f)i\in G$

结合律成立。

单位元是0，$a+bi$的逆元为$-a-bi$。

10-9、设Z为整数集合，在Z上定义二元运算$\circ$如下：

$\forall x$，$y\in Z$，$x\circ y=x+y-2$问Z关于$\circ$运算能否构成群，为什么？

证明：

能构成群，因为运算是封闭的。

$\forall x,y,z\in Z$,

$(x\circ y)\circ z=(x+y-2)+z-2=x+y+z-4$

$x\circ(y\circ z)=x+(y+z-2)-2=x+y+z-4$

结合律成立，单位元是2，x的逆元为$4-x$

10-15、设G为群，若$\forall x \in G$有$x^2 = e$，证明G为交换群。

证明：

若$\forall x \in G$有$x^2 = e$，因此$\forall x \in G$有$x^{-1} = x$。

$\forall x$，$y \in G$ xy=（xy）$^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$

10-18、证明偶数阶群必含2阶元。

证明：

由$x^2 = e \Leftrightarrow |x| = 1$或2。

即：对于G中的元素x，如果$|x| > 2$，必有$x^{-1} \neq x$。

由于$|x| = |x^{-1}|$，阶大于2的元素成对出现，共有偶数个。

那么剩下的1阶和2阶元总共应该有偶数个。

又1阶元只有1个，即单位元；

所以可以证明G中必有2阶元。

10-21、设G为群，a是G中给定的元素，a的正规化子N（a）表示G中与a可交换的元素构成的集合，即：

$N(a)=\{x | x \in G \wedge xa=ax\}$证明N(a)是G的子群。

证明：

$a \in N(a)$，$N(a) \neq \varnothing$。任取x，$y \in N(a)$，

$ay=ya \Rightarrow a^{-1}(ay)a^{-1} = a^{-1}(ya)a^{-1} \Rightarrow ya^{-1} = a^{-1}y$

$(xy^{-1})a = x(y^{-1}a) = x(a^{-1}y)^{-1} = x(ya^{-1})^{-1}$

$= x(ay^{-1}) = (xa)y^{-1} = a(xy^{-1})$

根据判定定理，N(a)为G的子群。

10-25、对一下给定的群G_1和G_2，以及f：$G_1 \to G_2$

说明f是否是群G_1到G_2的同态，如果是，说明是否为单同态，

满同态，同构，求同态像f（G_1）

（1）$G_1 =< Z,+>, G_2 =< R^*, \bullet >$,其中$R^*$为非零实数集,+和$\bullet$分别表示数的加法和乘法

f：$Z \to R^*$，f（x）$\begin{cases} 1 & x是偶数 \\ -1 & x是奇数 \end{cases}$

证明：

如果x, y同为偶数，则f(x+y)=f(x)f(y)=1；

如果x, y同为奇数，则f(x+y)=1=f(x)f(y)；

如果x, y不同时为偶数或奇数，

则f(x+y)=-1，f(x)f(y)=-1

因此，f是G_1到G_2的同态，但不是单同态，也不是满同态。

f（G_1）=$\{-1,1\}$。

10-28、设$G =< a >$是15阶循环群。

（1）求出G的所有生成元；

（2）求出G的所有子群。

解：

（1）G的所有生成群为：a^1，a^2，a^4，a^7，a^8，a^{11}, a^{13}, a^{14}。

（2）G的所有子群为：

$\langle e \rangle=\{e\}$

$\langle a \rangle=G$

$\langle a^3 \rangle=\{e, a^3, a^6, a^9, a^{12}\}$

$\langle a \rangle=\{e, a^5, a^{10}\}$

10-32、设$A=\{a+bi \mid a,b\in Z, i^2=-1\}$,证明A关于负数加法和乘法构成环，称为高斯整数环。

证明：

A=$\{a+bi \mid a,b\in Z, i^2=-1\}$，$\forall$a+bi,c+di$\in$A，有以下式子成立

(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$\in$A

(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$\in$A

于是运算时封闭的。

复数加法适合交换律，结合律，单位元为0，a+bi的负元为−a-bi，

因此A关于加法构成Abel群；

乘法适合结合律。乘法对加法适合分配律。

因此，A关于复数加法乘法构成环。

10-35、在域Z_s中解下列方程和方程组

（1）3x=2

解：

x=4

10-36、设a和b是含幺环R中的两个可逆元，证明：

（1）−a也是可逆元，且（−a）$^{-1}$=−a^{-1}

证明：

$(-a^{-1})(-a)=--(a^{-1}a)=1$

$(-a)(-a^{-1})=--(a^{-1}a)=1$

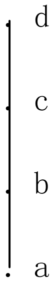
因此−a^{-1}是（−a）的逆元，根据逆元的唯一性可得（−a）$^{-1}$=−a^{-1}。

习题十一

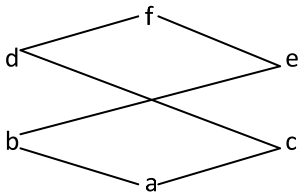
11-1、图 11.11 给出了 6 个偏序集的哈斯图，判断其中哪些是格，如果不是格，

说明理由。

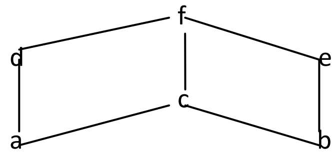
（a）



（c）



（e）



解：

偏序集（a），（c）都是格

偏序集（e）不是格，因为在（e）中{a，b}没有最大下界。

11-2、下列各集合对于整除关系都构成偏序集，判断哪些偏序集是格。

（2）L={1, 2, 3, 6, 12}

解：

该偏序集是格。

11-4、设 L 是格，求以下公式的对偶式。

（2）$a\vee(b\wedge c)\preceq(a\vee b)\wedge(c\vee d)$

解：

该公式的对偶公式为：

$a\wedge(b\vee c)\succeq(a\wedge b)\vee(c\wedge d)$

11-5、设L为格，$\forall a_1,a_2,\ldots a_n\in L$,如果$a_1\wedge a_2\wedge\ldots\wedge a_n=a_1\vee a_2\vee\ldots\vee a_n$

证明:$a_1=a_2=\ldots=a_n$。

证明：

$\forall a_1,a_2,\ldots a_n\in L$，有

$a_1\wedge a_2\wedge\ldots\wedge a_n\le a_i\le a_1\vee a_2\vee\ldots\vee a_n$

其中$\mathrm{i}=1,2\ldots,\mathrm{n}$。

由于$a_1\wedge a_2\wedge\ldots\wedge a_n=a_1\vee a_2\vee\ldots\vee a_n$，所以有$a_i=a_1\wedge a_2\wedge\ldots\wedge a_n$

故结论$a_1=a_2=\ldots=a_n$成立。

11-10、说明图 11.11 中的每个格是否为分配格、有部格和布尔格，并说明理由。
解：
a 是分配格，因为任何链都是分配格。不是有补格和布尔格，因为 b、c 没有补元。
c 不是分配格，因为含有 5 元子格和五角格同构。是有补格，每个元素都有补元，不是布尔格，因为不是分配格。
f 是分配格，因为不含有与钻石格和五角格同构的的子格。不是有补格和布尔格，因为 c 与 d 没有补元。

11-11、设 $<L,\wedge,\vee,0,1>$ 是有界格，证明 $\forall \mathrm{a} \in \mathrm{L}$，
有 $\mathrm{a} \wedge 0=0$，$\mathrm{a} \vee 0=\mathrm{a}, a \wedge 1=a, a \vee 1=1$。
证明：
$\mathrm{a} \wedge 0 \prec 0, 0 \prec 0$ 且 $0 \prec \mathrm{a} \Rightarrow 0 \prec \mathrm{a} \wedge 0$，根据反对称性 $\mathrm{a} \wedge 0=0$。
$\mathrm{a} \prec \mathrm{a} \vee 0$，$0 \prec \mathrm{a}$ 且 $\mathrm{a} \prec \mathrm{a}$ 根据反对称性 $\mathrm{a} \vee 0=\mathrm{a}$
$a \wedge 1 \prec a, \mathrm{a} \prec \mathrm{a}$ 且 $\mathrm{a} \prec 1 \Rightarrow \mathrm{a} \prec a \wedge 1$ 根据反对称性 $a \wedge 1=a$
$1 \prec a \vee 1, 1 \prec 1$ 且 $\mathrm{a} \prec 1 \Rightarrow a \vee 1 \prec 1$ 根据反对称性 $a \vee 1=1$

11-13、设 B 是布尔代数，B 的表达式 f 是
$(\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \vee(\mathrm{a} \wedge \mathrm{b} \wedge \mathrm{c}) \vee(\mathrm{b} \wedge \mathrm{c})$
(1) 化简 f。
(2) 求 f 的对偶式 f'。
解：
(1) $(\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \vee(\mathrm{a} \wedge \mathrm{b} \wedge \mathrm{c}) \vee(\mathrm{b} \wedge \mathrm{c})$
$=((\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \vee(\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \wedge \mathrm{c}) \vee(\mathrm{b} \wedge \mathrm{c})$
$=(\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) \vee(\mathrm{b} \wedge \mathrm{c})$
$=\mathrm{b} \wedge(\mathrm{a} \vee \mathrm{c})$
(2) $\mathrm{f}'=b \vee(a \wedge c)$

11-14、设B是布尔代数，$\forall a,b \in B,$证明：

$a \prec b \Leftrightarrow a \wedge b' = 0 \Leftrightarrow a' \vee b=1$。

证明：

（1）先证明$a \prec b \Leftrightarrow a \wedge b' = 0$成立：

$a \prec b \Leftrightarrow a \wedge b' = a \Rightarrow a \wedge b' = (a \wedge b) \wedge b' = a \wedge (b \wedge b') = a \wedge 0 = 0$

(2)证明$a \wedge b' = 0 \Leftrightarrow a' \vee b=1$成立：

$a \wedge b' = 0 \Leftrightarrow (a \wedge b')' = 1 \Leftrightarrow a' \vee b=1$

(3)证明$a' \vee b=1 \Leftrightarrow a \prec b$成立：

$a=a \wedge 1=a \wedge (a' \vee b)=(a' \wedge a) \vee (a \wedge b)=0 \vee (a \wedge b)=a \wedge b \Leftrightarrow a \prec b$

11-17、设B是布尔代数，$\forall a,b,c \in B,$若$a \prec c$，则有：

$a \vee (b \wedge c)=(a \vee b) \wedge c$称这个等式为模律，证明布尔代数适合模律。

证明：

$a \vee (b \wedge c)=(a \vee b) \wedge (a \vee c)=(a \vee b) \wedge c$

11-18、设B为布尔代数，a_1，$a_2,...,a_n \in B,$证明：

(1)$(a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_n)' = a_1' \wedge a_2' \wedge ... \wedge a_n'$。

证明：

对n进行归纳。

当$n = 2$时是德摩根律

假设对于n=k命题为真，

则当n=k+1时有：

$(a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_{k+1})'$

$= ((a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_k) \vee a_{k+1})'$

$= (a_1 \vee a_2 \vee ... \vee a_k)' \vee a_{k+1}'$

$= (a_1' \wedge a_2' \wedge ... \wedge a_k') \wedge a_{k+1}'$

$= a_1' \wedge a_2' \wedge ... \wedge a_k' \wedge a_{k+1}'$

所以结论成立。