1-6 命题推理理论

概念：

重言蕴含式，有效结论，P规则，T规则，CP规则，推理

重言蕴含式 当且仅当$P \rightarrow Q$是一个重言式时，称P重言蕴含Q，记为$P \Rightarrow Q$。

注意: (1) $\Rightarrow$ 和 $\rightarrow$ 含义的本质区别。

(2) 重言蕴含式也称为逻辑蕴含式。

证明$P \Rightarrow Q$的方法：任给赋值v

(1) 假设$v(P)=1$, 推出$v(Q)=1$，或者

(2) 假设$v(Q)=0$, 推出$v(P)=0$.

例：求证：$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg P$

证：假设v（$\neg Q \wedge (P \rightarrow Q)$）$=1$,

$\therefore v(\neg Q) =1$ 且 $v (P \rightarrow Q) =1$

$\therefore v(\neg P) =1.$

推理定律——重言蕴涵式

1. $A \Rightarrow (A \vee B)$ 附加律
2. $(A \wedge B) \Rightarrow A$ 化简律
3. $(A \to B) \wedge A \Rightarrow B$ 假言推理
4. $(A \to B) \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$ 拒取式
5. $(A \vee B) \wedge \neg B \Rightarrow A$ 析取三段论
6. $(A \to B) \wedge (B \to C) \Rightarrow (A \to C)$ 假言三段论
7. $(A \leftrightarrow B) \wedge (B \leftrightarrow C) \Rightarrow (A \leftrightarrow C)$ 等价三段论
8. $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow (B \vee D)$ 构造性二难

   $(A \to B) \wedge (\neg A \to B) \Rightarrow B$ 构造性二难(特殊形式)
9. $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (\neg B \vee \neg D) \Rightarrow (\neg A \vee \neg C)$ 破坏性二难

每个等值式可产生两个推理定律

如, 由$A \Leftrightarrow \neg\neg A$可产生 $A \Rightarrow \neg\neg A$ 和 $\neg\neg A \Rightarrow A$

有效结论

设A、C是两个命题公式，若$A \Rightarrow C$，称C是A的有效结论。

推广:若$H_1 \wedge \ldots \wedge H_n \Rightarrow C$, 称C是一组前题$H_1,\ldots,H_n$的有效结论。

注：(1) 从理论上说，可利用真值表来判断某公式是否为一组公式的有效结论，但有“组合爆炸”问题。

(2) 利用少量公理、若干推理规则推理出有效结论。

形式系统：一个形式系统 I 由下面四个部分组成：

(1) 非空的字母表，记作 $A(I)$.

(2) $A(I)$ 中符号构造的合式公式集，记作 $E(I)$.

(3) $E(I)$ 中一些特殊的公式组成的公理集，记作 $A_X(I)$.

(4) 推理规则集，记作 $R(I)$.

记 $I=\langle A(I),E(I),A_X(I),R(I)\rangle$, 其中 $\langle A(I),E(I)\rangle$ 是 I 的形式语言系统, $\langle A_X(I),R(I)\rangle$ 是 I 的形式演算系统.

自然推理系统: 无公理, 即 $A_X(I)=\varnothing$

公理推理系统 (Hilbert): 推出的结论是系统中的重言式, 称作定理.

自然推理系统P

自然推理系统 P 定义如下:

1. 字母表

(1) 命题变项符号：$p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i, \ldots$

(2) 联结词符号：$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(3) 括号与逗号：(,), ,

2. 合式公式（同定义1.6）

3. 推理规则

(1) 前提引入规则

(2) 结论引入规则

(3) 置换规则

推理规则

(4) 假言推理规则

$$\frac{A \to B \qquad A}{\therefore B}$$

(5) 附加规则

$$\frac{A}{\therefore A \lor B}$$

(6) 化简规则

$$\frac{A \land B}{\therefore A}$$

(7) 拒取式规则

$$\frac{A \to B \qquad \neg B}{\therefore \neg A}$$

(8) 假言三段论规则

$$\frac{A \to B \qquad B \to C}{\therefore A \to C}$$

(9) 析取三段论规则

$$\frac{A \lor B \qquad \neg B}{\therefore A}$$

推理规则

(10) 构造性二难推理规则

$$\begin{array}{l} A \to B \\ C \to D \\ A \vee C \\ \hline \therefore B \vee D \end{array}$$

(11) 破坏性二难推理规则

$$\begin{array}{l} A \to B \\ C \to D \\ \neg B \vee \neg D \\ \hline \therefore \neg A \vee \neg C \end{array}$$

(12) 合取引入规则

$$\begin{array}{l} A \\ B \\ \hline \therefore A \wedge C \end{array}$$

P规则 在推导过程中,可以随时添加前提。

T规则 在推导过程中,可以引入公式S，它是由其前题的一个或多个公式借助重言、蕴含而得到的。

推理（证明）

从前提$A_1, A_2,\ldots, A_k$到结论B的推理是一个公式序列$C_1, C_2,\ldots, C_l$. 其中$C_i(1\le i\le l)$是某个A_j, 或者可由序列中前面的公式应用推理规则得到, 并且$C_l = B$。

直接证明法

例：证明：$\{(p\vee q)\rightarrow r,\ r\rightarrow s,\ \neg s\} \vdash \neg p\wedge\neg q$

证：

①	$r\rightarrow s$	前提引入
②	$\neg s$	前提引入
③	$\neg r$	①②拒取式
④	$(p\vee q)\rightarrow r$	前提引入
⑤	$\neg(p\vee q)$	③④拒取式
⑥	$\neg p\wedge\neg q$	⑤置换

附加前提证明法

CP规则(演绎定理)

若Γ ∪{R}|- S，则 Γ |- R→S, 其中Γ为命题公式的集合。

例：$\{p \vee q,\ p \to r,\ r \to \neg s\} \vdash s \to q$

证:

①　s　　附加前提引入

②　$p \to r$　　前提引入

③　$r \to \neg s$　　前提引入

④　$p \to \neg s$　　②③假言三段论

⑤　$\neg p$　　①④拒取式

⑥　$p \vee q$　　前提引入

⑦　q　　⑤⑥析取三段论

⑧　$s \to q$　　由⑦消去①

归谬法（反证法）

若$\Gamma \cup \{\neg S\} \vdash \bot$，则 $\Gamma \vdash S$, 其中Γ为命题公式的集合。

例: $\{\neg(p\wedge q)\vee r,\ r\to s,\ \neg s,\ p\} \vdash \neg q$

证:

①	q	结论否定引入
②	$r\to s$	前提引入
③	$\neg s$	前提引入
④	$\neg r$	②③拒取式
⑤	$\neg(p\wedge q)\vee r$	前提引入
⑥	$\neg(p\wedge q)$	④⑤析取三段论
⑦	$\neg p\vee\neg q$	⑥置换
⑧	$\neg p$	①⑦析取三段论
⑨	p	前提引入
⑩	$\neg p\wedge p$	⑧⑨合取
⑪	$\neg q$	由 ⑩消去①

总结

- 重言蕴含式
- 有效结论
- 推理规则：P规则，T规则，   CP规则
- 推理