

2-8 偏序的极值与界

概念：

极大元/极小元，最大元/最小元，上界/下界，
上确界/下确界

极小元(Minimal Element)/极大元(Maximal Element)

设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A$

(1) 对 $b \in B$, 若 B 中不存在 x 满足:

$$b \neq x \text{ 且 } x \leq b$$

则称 b 为 B 的极小元.

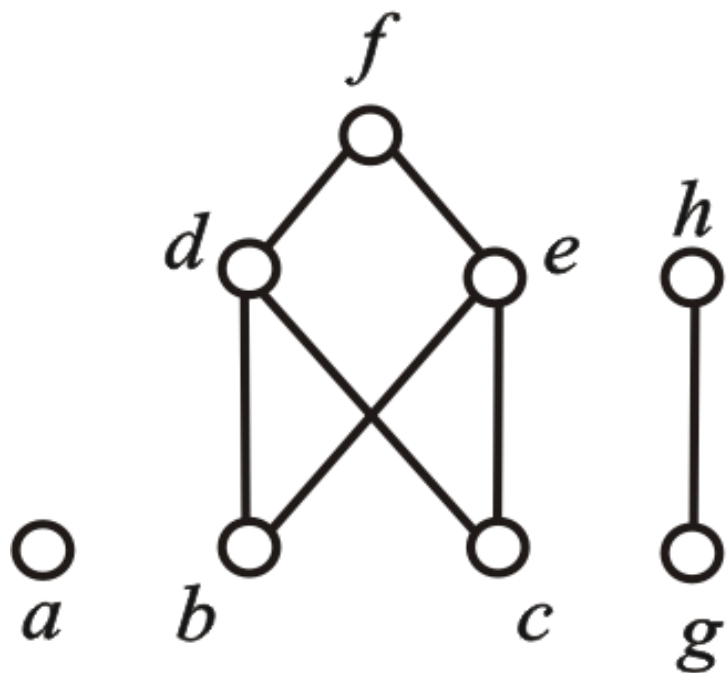
(2) 对 $b \in B$, 若 B 中不存在 x 满足:

$$b \neq x \text{ 且 } b \leq x$$

则称 b 为 B 的极大元.

实例

设偏序集 $\langle A, \leq \rangle$, 设 $B_1 = A$, $B_2 = \{b, c, d\}$, 求 B_1 和 B_2 的极小元、极大元.



解:

(1) 对于 B_1 ,

极小元: a, b, c, g

极大元: a, f, h

(2) 对于 B_2 ,

极小元: b, c

极大元: d

最小元(The Smallest Element) / 最大元 (The Greatest Element)

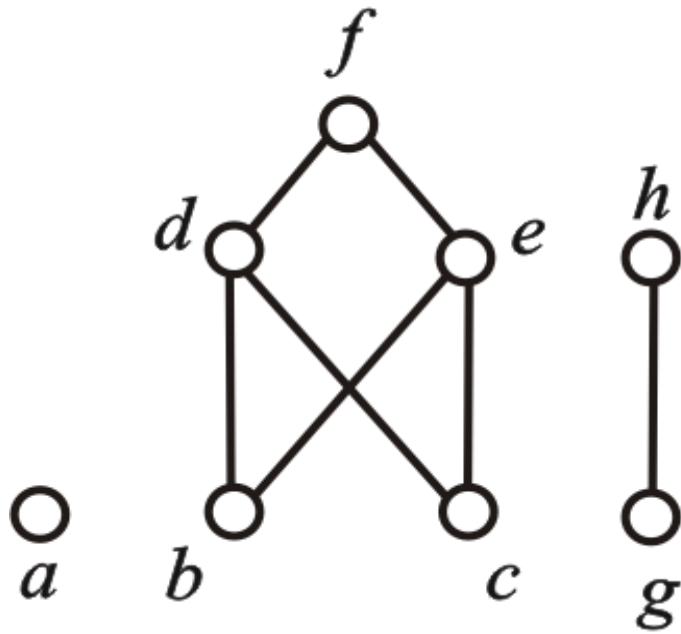
设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A$, 若有某个 $b \in B$

(1) 对于 B 中每一个元素 x 都有 $b \leq x$, 则称 b 为 B 的**最小元**.

(2) 对于 B 中每一个元素 x 都有 $x \leq b$, 则称 b 为 B 的**最大元**.

实例

设偏序集 $\langle A, \leq \rangle$, 设 $B_1 = A$, $B_2 = \{b, c, d\}$, 求 B_1 和 B_2 的最小元、最大元.



解:

(1) 对于 B_1 ,

最小元: 无

最大元: 无

(2) 对于 B_2 ,

最小元: 无

最大元: d

下界(Lower Bound) / 上界(Upper bound)

设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A$

(1) 若有 $a \in A$, 且对 $\forall x \in B$ 满足 $a \leq x$, 则称 a 为 B 的下界。

进一步: 设 a 为 B 的下界, 若 B 的所有下界 y 均有 $y \leq a$,

则称 a 为 B 的下确界, 记为 $\text{glb } B$ 。

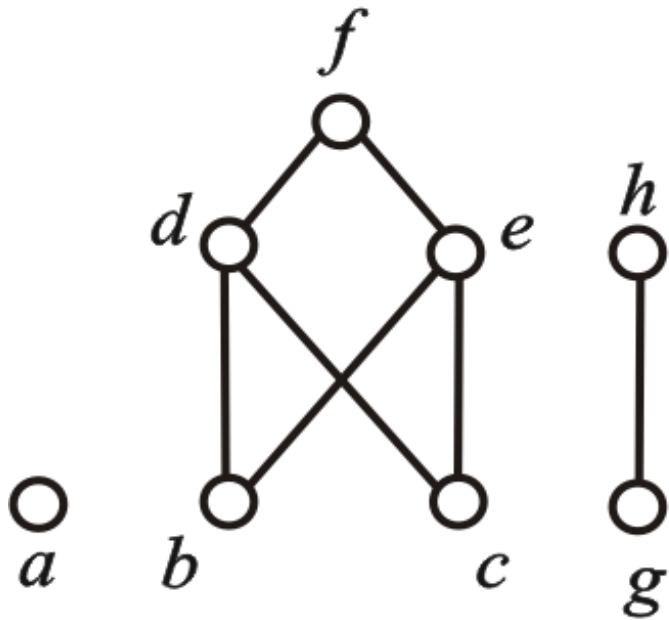
(2) 若有 $a \in A$, 且对 $\forall x \in B$ 满足 $x \leq a$, 则称 a 为 B 的上界。

进一步: 设 a 为 B 的上界, 若 B 的所有上界 y 均有 $a \leq y$,

则称 a 为 B 的上确界, 记为 $\text{lub } B$ 。

实例

设偏序集 $\langle A, \leq \rangle$, 设 $B_1 = A$, $B_2 = \{b, c, d\}$, 求 B_1 和 B_2 的下界、上界、下确界、上确界.



解

(1) 对于 B_1 ,

下界、上界、下确界、上确界都不存在

(2) 对于 B_2 ,

下界和最大下界都不存在;

上界有 d 和 f ,

最小上界为 d .

总结

- 极大元/极小元
- 最大元/最小元
- 上界/下界
- 上确界/下确界