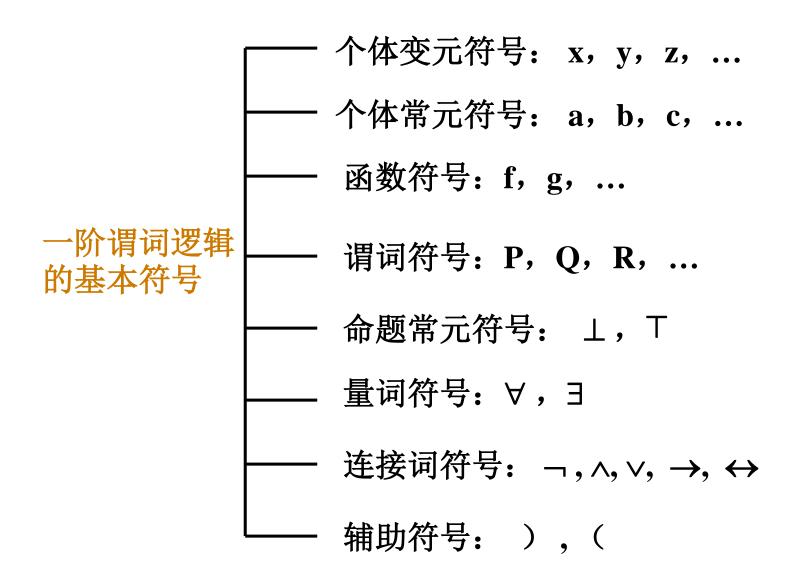
1-8 谓词公式

概念:

项,原子公式,合式公式,自由变元,约束变元, 辖域,换名,代入

谓词语言: 用符号串表示个体、谓词、量词和命题



逻辑符号: 在任何情况下都作用相同的符号,包括:

个体变元符号、命题常元符号、量词符号、

联结词符号、辅助符号

非逻辑符号: 其他符号, 即:

个体常元符号、函数符号、谓词符号

项 (Term)

- (1)个体常元和变元是项;
- (2) 若f是n元函数符号, $t_1, ..., t_n$ 是项,则 $f(t_1, ..., t_n)$ 是项;
- (3) 仅仅有限次使用(1),(2)产生的符号串是项。

注: 项将解释成个体对象。

原子公式 (Atomic formulas)

若P是一个元谓词符号, $t_1,...,t_n$ 是项,则P($t_1,...,t_n$)是原子公式。

例: P(x)是一个原子公式。

合式公式 (Well-Formed Formulas)

递归定义如下:

- (1) 原子公式是公式;
- (2) 若A是合式公式,则(¬A)是合式公式;
- (3) 若A,B是公式,则 $(A\lorB)$, $(A\land B)$,A $\rightarrow B)$,
- (**A↔B**)是公式;
- (4) 若A是公式,x是变元,则∀xA,∃xA是公式;
- (5)仅仅有限次使用1~4得到的符号串才是合式公式。

例: $F(x) \lor \neg G(x,y)$, $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$, $\exists x \forall y(F(x) \rightarrow G(y) \land L(x,y))$

都是合式公式。

变元的约束 设公式 α 的一个子公式为 \forall x A或 \exists x A。则称:

指导变元(Index): x是∀或∃的指导变元。

辖域(Scope): A是相应量词的辖域。

约束出现(bounded): 辖域中x的一切出现,以及($\forall x$)中的x称为x在 α 中的约束出现。

自由出现(free):变元的非约束出现。

约束变元:约束出现的变元。

自由变元:自由出现的变元。

例: $\forall x \forall y (P(x,y) \land Q(y,z)) \land \exists x P(x,y)$

封闭的公式

若公式A中不含自由出现的个体变项,则称A为封闭的公式,简称闭式。

例如, $\forall x \forall y (F(x) \land G(y) \rightarrow H(x,y))$ 为闭式,

而 $\exists x(F(x) \land G(x,y))$ 不是闭式

变元换名 (Replacement)

可以对约束变元换名,目的是避免变元的约束与自由同时出现,引起混淆。

- 规则: (1) 换名的范围是量词的指导变元,及其相应辖域中的变元,其余部分不变。
 - (2) 换名时最好选用辖域中未出现的变元名。

例: $\forall x (P(x) \rightarrow R(x,y)) \land Q(x,y)$

可换为: ∀ z (P(z) → R(z,y)) ∧ Q(x,y)

不能: ∀ y (P(y) → R(y,y)) ∧ Q(x,y)

变元代入(Substitution)

代入对自由变元进行。要求:不能改变约束关系。

例: 公式 \forall x (P(x) \rightarrow R(x,y)) \land Q(x,y) 将自由变元y代入项 t, 得到公式: \forall x (P(x) \rightarrow R(x,t)) \land Q(x,t) 要求t中不包含x.

总结

- 项
- 原子公式、合式公式
- 自由变元、约束变元、辖域
- 换名、代入