1-11 前束范式

概念：

前束范式

前束范式：如果谓词公式A有如下形状：

$$Q_1x_1 \ldots Q_nx_nM$$

其中 Q_ix_i或者是$\forall x_i$，或者是$\exists x_i$，i=1，…，n，M是不含量词的公式，$Q_1x_1 \ldots Q_nx_n$称为首标，M称为母式。

例： $\forall x \forall y \exists z(P(x, y) \to Q(x, z))$；

$\exists x \exists y \exists z P(x, y, z)$

均为前束范式。

而 $\neg \exists x(F(x) \land G(x))$

$\forall x(F(x) \to \exists y(G(y) \land H(x,y)))$ 不是前束范式。

前束范式存在定理：

一阶逻辑中的任何公式都存在与之等值的前束范式。

前束范式的算法：

步1. 对约束出现的变元进行必要的换名，使得约束出现的变元互不相同且不与任何自由变元同名。

步2. 将所有的否定号¬深入到量词后面。

$\neg\forall x\, A \Leftrightarrow \exists x\, \neg A \qquad \neg\exists x\, A \Leftrightarrow \forall x\, \neg A$

步3. 将量词符号移至公式最外层。x不在B中自由出现

$\forall x\, A \wedge B \Leftrightarrow \forall x(A \wedge B) \qquad \exists x\, A \wedge B \Leftrightarrow \exists x(A \wedge B)$

$\forall x\, A \vee B \Leftrightarrow \forall x(A \vee B) \qquad \exists x\, A \vee B \Leftrightarrow \exists x(A \vee B)$

$\forall x\, A \to B \Leftrightarrow \exists x(A \to B) \qquad \exists x\, A \to B \Leftrightarrow \forall x(A \to B)$

$B \to \forall x A \Leftrightarrow \forall x(B \to A) \qquad B \to \exists x\, A \Leftrightarrow \exists x(B \to A)$

例: $(\neg\forall xP(x)\wedge \forall x\, \exists y\, Q(x,y))\rightarrow\exists x\, \exists yR(x,y)$

换名 $\Leftrightarrow(\neg\forall xP(x)\wedge \forall w\exists y\, Q(w,y))\rightarrow\exists u\, \exists vR(u,v)$

¬深入 $\Leftrightarrow(\exists x\, \neg P(x)\wedge \forall w\exists y\, Q(w,y))\rightarrow\exists u\, \exists vR(u,v)$

量词符号前移 $\Leftrightarrow \exists x\, (\neg P(x)\wedge \forall w\exists y\, Q(w,y))\rightarrow\exists u\, \exists vR(u,v)$

$\Leftrightarrow(\exists x\, \forall w\exists y\, (\neg P(x)\wedge Q(w,y)))\rightarrow\exists u\, \exists vR(u,v)$

$\Leftrightarrow \exists u\, \exists v\, (\exists x\, \forall w\exists y\, (\neg P(x)\wedge Q(w,y))\rightarrow R(u,v))$

$\Leftrightarrow \exists u\, \exists v\, \forall x\, \exists w\, \forall y\, ((\neg P(x)\wedge Q(w,y))\rightarrow R(u,v))$

例:

$$\forall x\forall y(\exists z(P(x,z)\land P(y,z))\to\exists uQ(x,y,u))$$

$$\Leftrightarrow \forall x\forall y(\neg(\exists z(P(x,z)\land P(y,z)))\lor\exists uQ(x,y,u))$$

$$\Leftrightarrow \forall x\forall y(\forall z(\neg P(x,z)\lor\neg P(y,z))\lor\exists uQ(x,y,u))$$

$$\Leftrightarrow \forall x\forall y\forall z(\neg P(x,z)\lor\neg P(y,z)\lor\exists uQ(x,y,u))$$

$$\Leftrightarrow \forall x\forall y\forall z\exists u(\neg P(x,z)\lor\neg P(y,z)\lor Q(x,y,u))$$

总结

- 前束范式