

1-5、联结词的完备集

概念：

真值函数，异或，条件否定，与非，或非，联结词完备集

真值函数： 称 $F:\{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ 为 n 元真值函数.

$\{0,1\}^n = \{00\dots 0, 00\dots 1, \dots, 11\dots 1\}$, 包含 2^n 个长为 n 的0,1符号串.

共有 2^{2^n} 个 n 元真值函数.

1元真值函数

p	$F_0^{(1)}$	$F_1^{(1)}$	$F_2^{(1)}$	$F_3^{(1)}$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

2元真值函数

p q	$F_0^{(2)}$	$F_1^{(2)}$	$F_2^{(2)}$	$F_3^{(2)}$	$F_4^{(2)}$	$F_5^{(2)}$	$F_6^{(2)}$	$F_7^{(2)}$
0 0	0	0	0	0	0	0	0	0
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1
p q	$F_8^{(2)}$	$F_9^{(2)}$	$F_{10}^{(2)}$	$F_{11}^{(2)}$	$F_{12}^{(2)}$	$F_{13}^{(2)}$	$F_{14}^{(2)}$	$F_{15}^{(2)}$
0 0	1	1	1	1	1	1	1	1
0 1	0	0	0	0	1	1	1	1
1 0	0	0	1	1	0	0	1	1
1 1	0	1	0	1	0	1	0	1

公式与真值函数

任何一个含 n 个命题变项的命题公式 A 都对应惟一的一个 n 元真值函数 F , F 恰好为 A 的真值表.

等值的公式对应的真值函数相同.

例如: $p \rightarrow q, \neg p \vee q$ 都对应 $F_{13}^{(2)}$

异或 $P \oplus Q \Leftrightarrow \neg (P \leftrightarrow Q)$

条件否定 $P \overset{c}{\rightarrow} Q \Leftrightarrow \neg (P \rightarrow Q)$

与非 $P \uparrow Q \Leftrightarrow \neg (P \wedge Q)$

或非 $P \downarrow Q \Leftrightarrow \neg (P \vee Q)$

注：能构造多少联结词呢？

11个（二元以内）

联结词的完备集(Adequate Set of Connectives)

设**C**是联结词的集合，若对于任意一个合式公式均存在一个与之等价的公式，而后者只含有**C**中的联结词，则称**C**是联结词的完备集。

例如：（1） $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 是联结词的完备集。

证：由公式的定义可得。

（2） $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 是联结词的完备集。

证：由范式存在定理可证。

联结词完备集

例： 以下都是联结词完备集

(1) $S_1 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$

(2) $S_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

(3) $S_3 = \{\neg, \wedge\}$

(4) $S_4 = \{\neg, \vee\}$

(5) $S_5 = \{\neg, \rightarrow\}$

证明： (1),(2) 在联结词完备集中加入新的联结词后仍为完备集。

(3) $A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$

(4) $A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$

(5) $A \vee B \Leftrightarrow \neg A \rightarrow B$

联结词完备集

例： $\{\downarrow\}$ 为联结词完备集.

证明： $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 为完备集

$$\neg p \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg p \Leftrightarrow \neg(p \vee p) \Leftrightarrow p \downarrow p$$

$$p \wedge q \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg p \downarrow \neg q \Leftrightarrow (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$$

$$p \vee q \Leftrightarrow \neg \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg(p \downarrow q) \Leftrightarrow (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$$

联结词完备集

$\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ 不是联结词完备集, \perp 不能用它表示;
它的子集 $\{\wedge\}, \{\vee\}, \{\rightarrow\}, \{\leftrightarrow\}, \{\wedge, \vee\}, \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ 等都不是。

总结

- 真值函数
- 异或
- 条件否定
- 与非
- 或非
- 联结词完备集