离散数学
Discrete Mathematics

虞慧群
yhq@ecust.edu.cn

数理逻辑系统体系

数理逻辑是采用数学的方法，研究思维形式及其规律的一门学科。

语法（**Syntax**）：语言符号及表达规则 。

语义（**Semantics**）：语言符号及表达规则的含义。

形式系统（**Formal System**）：利用逻辑语言的形式结构（即从语法的角度）来表达逻辑语句之间的关系。

两个基础的数理逻辑系统：命题逻辑，谓词逻辑。

1-1、命题逻辑公式

概念：

命题，　联结词(¬，∧，∨，→，↔)，合式公式，子公式

命题：具有确定真值的陈述句。

命题的定义中包含二层含义：

(1)在语法上．命题必须是陈述句。而疑问句、祈使句和感叹句等无所谓真假，所以不是命题。

(2)命题具有惟一的真值，这与我们是否知道它的真假是两回事。

- **真值**：1(或T)表示“真”；0(或 F)表示“假”

命题判断举例

下列句子中那些是命题？

(1) $\sqrt{2}$是有理数.	假命题
(2) $2 + 5 = 7$.	真命题
(3) $x + 5 > 3$.	不是命题
(4) 你去教室吗？	不是命题
(5) 这个苹果真大呀！	不是命题
(6) 请不要讲话！	不是命题
(7) 2050年元旦下大雪.	命题，但真值现在不知道
(8) 理发师Richard专门为那些不给自己理发的人理发。	不是命题，悖论

命题符号： 用来表示命题符号。

- 通常用小写英文字母 $p, q, r, \ldots, p_i, q_i, r_i$ ($i\geq 1$)表示命题。

例如，令

p：$\sqrt{2}$ 是有理数，则 p 的真值为0，

q：$2 + 5 = 7$，则 q 的真值为1

- 命题符号分类：
  - 命题常元（命题常项）：$\perp$（bottom)， $\top$（top）
  - 命题变元（命题变项）：$p, q, r, \ldots$

命题分类

- 简单命题（也称原子命题）：不能再分解为更简单的命题。
- 复合命题：若干简单命题通过联结词(connectives)而构成的新命题。

常见的5个联结词

¬ 否定 (negation)

∧ 合取(conjunction)

∨ 析取(disjunction)

→ 蕴含(implication)

↔ 等价(equailvalence)

♥这些联结词有明确的含义，注意与自然语言对应词的联系与区别！

否定词符号 ¬

设p是一个命题，¬p称为p的否定式。¬p是真的当且仅当p是假的。

p	¬p
1	0
0	1

例、 p：上海是一个大城市。

¬p：上海不是一个大城市。

合取词符号 ∧

设p，q是两个命题，命题“p并且q”称为p，q的合取，
记以p∧q，读作p且q。

p∧q是真的当且仅当p和q都是真的。

p	q	p ∧ q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

例、 p：2×2=5，

q：雪是黑的

p∧q：2×2=5并且雪是黑的

析取词符号 ∨

设p，q是两个命题，命题“p或者q”称为p，q的析取，记以p∨q，读作p或q。

p∨q是真的当且仅当p，q中至少有一个是真的。

例如，p：今天下雨，q：今天刮风

p∨q：今天下雨或者刮风。

p	q	p∨q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

“∨”所表示的“或”是“可兼或”

自然语言中的“或者”一词有不可兼的意思。

例、他是跳远冠军或是百米冠军。

我今天到北京出差或者到广州去度假

表示的是二者只能居其一，不会同时成立。

➢按照联结词“∨”的定义，当p，q都为真时，p∨q也为真。因此，对于“不可兼或”，我们不可以用∨来表示。

p： 我今天到北京出差，
q： 我到广州去度假

p	q	命题
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

翻译： $(p \vee q) \wedge \neg (p \wedge q)$

蕴含词符号 $\rightarrow$

设p，q是两个命题，命题“如果p，则q”称为p蕴含q，记以$p\rightarrow q$。

$p\rightarrow q$是假的当且仅当p是真的而q是假的。

例、 p：f(x)是可微的，
q：f(x)是连续的

$p\rightarrow q$： 若f(x)是可微的，则f(x)是连续的。

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

“善意的推定”：

如果p是假命题，则不管q是什么命题，命题“如果p，则q”($p \to q$)在命题逻辑中都被认为是真命题。

例、p： 2×2=5，q： 雪是黑的，

命题“如果2×2=5，则雪是黑的”是真命题。

等价词符号 $\leftrightarrow$

设p，q是两个命题，命题“p当且仅当q”称为p等价q，记以$p\leftrightarrow q$。

$p\leftrightarrow q$是真的当且仅当p，q或者都是真的，或者都是假的。

例、 p： $a^2+b^2=a^2$， q： $b=0$

$p\leftrightarrow q$： $a^2+b^2=a^2$当且仅当$b=0$

p	q	$p\leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

命题语言的语法

命题语言的基本符号

- 命题变元符号： **p, q, r**
- 命题常元符号： $\perp$，$\top$
- 连接词符号： $\neg$ $\wedge$ $\vee$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow$
- 辅助符号： ）， （

合式公式(Well-Formed Formulas): 递归定义如下：

(1) 命题常元和变元符号是合式公式；

(2) 若A是合式公式，则(¬A)是合式公式，称为A的否定式；

(3) 若A，B是合式公式，则 (A∨B)， (A∧B)， (A→B)，(A↔B)是合式公式；

(4) 所有合式公式都是有限次使用(1)，(2)，(3)得到的符号串。

子公式 (subformulas): 如果X是合式公式**A**的一部分，且X本身也是一个合式公式，则称X为公式**A**的子公式。

公式举例：

$$(1)\quad (((\neg p) \vee q) \rightarrow p);$$

$$(2)\quad ((p \vee q) \wedge ((\neg p) \vee q));$$

$$(3)\quad ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p));$$

$$(4)\quad (((\neg p) \rightarrow p) \leftrightarrow p);$$

$$(5)\quad (p \rightarrow (\perp \rightarrow r)).$$

例、如下符号串不是公式：

(1) $((p \vee \top;$

(2) $\neg r;$

(3) $((r \vee X) \to q);$

约定： （1）最外层的括号可以省略；

（2）联结词运算的优先次序（由高到底）为：

$\neg$

$\wedge$

$\vee$

$\rightarrow$, $\leftrightarrow$

目的为减少括号的数量。

例、 $\neg p \wedge \neg q$ 表示$((\neg p) \wedge (\neg q))$;

$\neg p \vee q$ 表示$((\neg p) \vee q)$;

- **(A→B)**不是合式公式，是一个公式模式，代表一类具体的公式

$$(p \rightarrow q)$$

$$((p \rightarrow q) \rightarrow (s \rightarrow r))$$

$$((p \vee r) \rightarrow (\neg q))$$

总结

- 命题逻辑
- 命题，命题符合
- 联结词($\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrow$)
- 命题公式，子公式