图论

Graph Theory

内容提要

1. 图的基本概念
2. 图的连通性
3. 图的矩阵表示
4. 欧拉图与哈密顿图
5. 无向树与根树
6. 平面图

内容提要

1. 图的基本概念
2. 图的连通性
3. 图的矩阵表示
4. 欧拉图与哈密顿图
5. 无向树与根树
6. 平面图

1、图的基本概念

概念：

无向图、有向图、关联与相邻、简单图、完全图、正则图、子图、补图，握手定理，图的同构

图同构

图的同构

设G_1=<V_1,E_1>, G_2=<V_2,E_2>为两个无向图(两个有向图)，若存在<u>双射函数</u>

$f:V_1\to V_2$，对于$v_i, v_j\in V_1$,

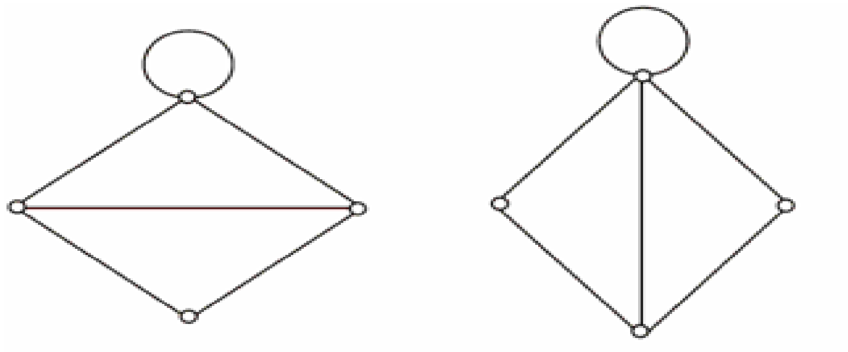
$(v_i,v_j)\in E_1$ 当且仅当 $(f(v_i), f(v_j))\in E_2$

（$<v_i,v_j>\in E_1$ 当且仅当 $<f(v_i), f(v_j)>\in E_2$）

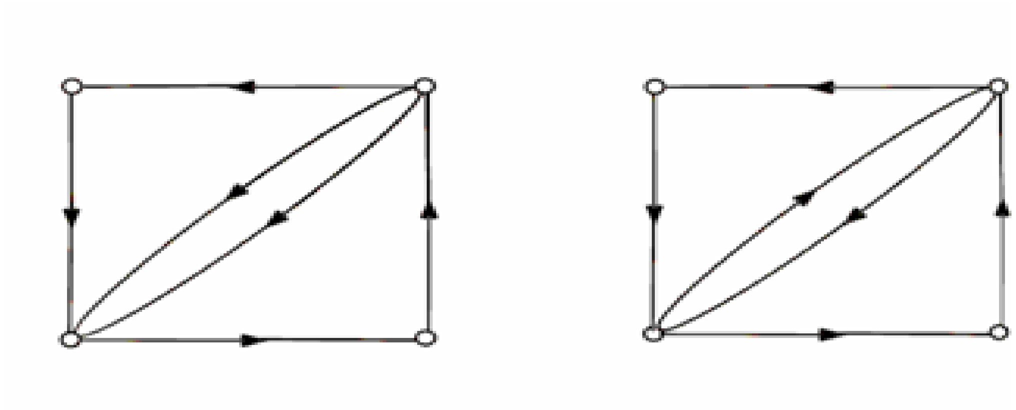
并且 (v_i,v_j)（$<v_i,v_j>$）与 $(f(v_i), f(v_j))$（$<f(v_i),f(v_j)>$）的重数相同,

则称G_1与G_2是同构的，记作$G_1\cong G_2$。

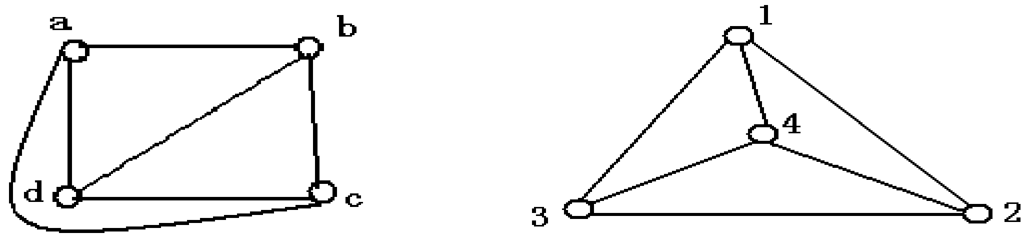
例：



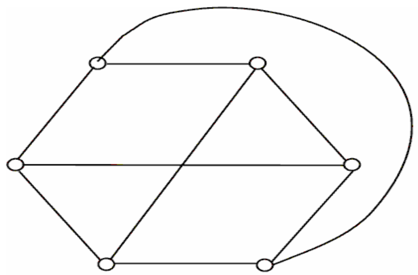
不同构（度数列不同）

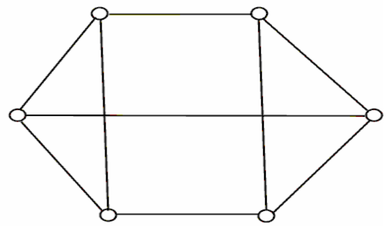


不同构



同构


(1)


(2)

图中(1)与(2)的度数列相同，它们同构吗？为什么？

答：不同构

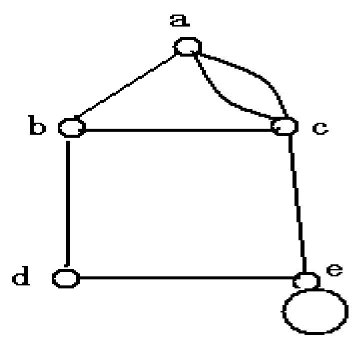
G_1与G_2同构的必要条件：

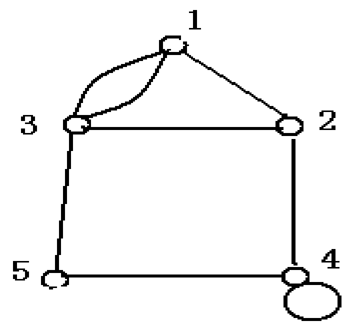
1、顶点数相同；

2、边数相同；

3、度数相同的顶点数目相等。

例：





特殊的图：完全图，正则图，子图，补图

n 阶完全图与竞赛图

(1) n ($n\geq1$) 阶无向完全图——每个顶点与其余顶点均相邻的无向简单图，记作 K_n。

性质：边数 $m=\frac{n(n-1)}{2}, \Delta=\delta=n-1$

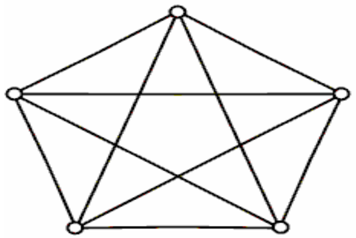
(2) n ($n\geq1$)阶有向完全图——每对顶点之间均有两条方向相反的有向边的有向简单图。

性质：边数 $m=n(n-1), \Delta=\delta=2(n-1), \Delta^{+}=\delta^{+}=n-1$

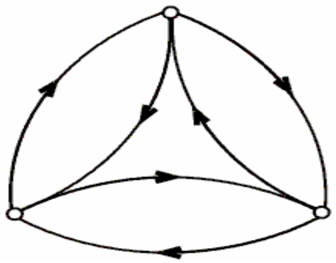
(3) n ($n\geq1$) 阶竞赛图——基图为K_n的有向简单图。

性质：边数 $m=\frac{n(n-1)}{2}, \Delta=\delta=n-1$

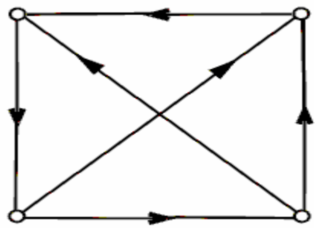
实例



(1)



(2)



(3)

(1) 为K_5

(2) 为3阶有向完全图

(3) 为4阶竞赛图.

n 阶 k 正则图

n 阶k正则图——$\Delta=\delta=k$ 的无向简单图。

性质：

（1）n 阶k正则图的边数（由握手定理得） $\boldsymbol{m = \frac{nk}{2}}$

（2）K_n 是 $n-1$正则图。

子 图

$G=\langle V,E\rangle$， $G'=\langle V',E'\rangle$

(1) $V'\subseteq V$ 且$E'\subseteq E$，则称G'为G的子图，记为 $G'\subseteq G$，称G为G'的母图；

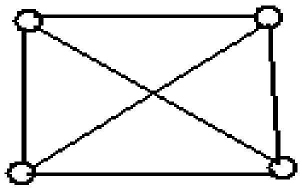
(2) 若$G'\subseteq G$且$V'=V$，则称G'为G的生成子图；

(3) 若$V'\subset V$或$E'\subset E$，称G'为G的真子图；

(4) V'（$V'\subset V$且$V'\neq\varnothing$）的导出子图，记作$G[V']$；

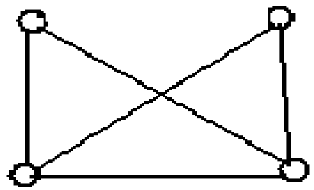
(5) E'（$E'\subset E$且$E'\neq\varnothing$）的导出子图，记作$G[E']$。

例：子图

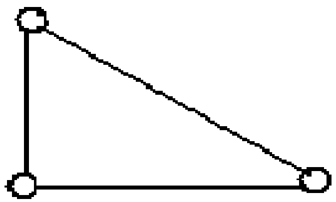


1

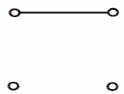
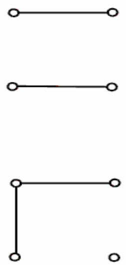
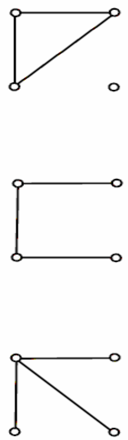
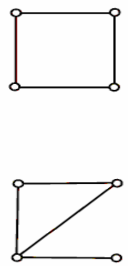
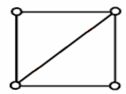
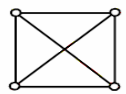
2



3



例： 画出K_4的所有非同构的生成子图

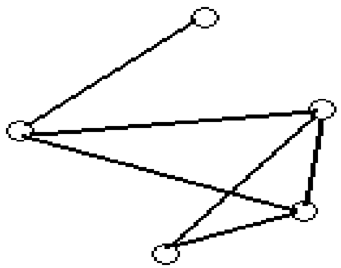
m	0	1	2	3	4	5	6	
								

补图

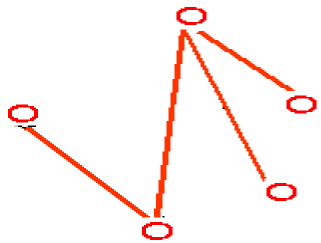
设G=<V,E>为n阶无向简单图，以V为顶点集，以所有使G成为完全图K_n的添加边组成的集合为边集的图，称为G的补图，记作 $\overline{G}$ 。

若$G \cong \overline{G}$, 则称G是自补图。

例：



G



$\overline{G}$