

2-12、有限集与无限集

概念：

康托定理，有限集，无限集，可数集，不可数集

康托定理

(1) $\mathbf{N} \not\approx \mathbf{R}$;

(2) 对任意集合 A 都有 $A \not\approx P(A)$.

证明思路（对角线方法 **Diagonal method**）：

(1) 只需证明任何函数 $f:\mathbf{N}\rightarrow[0,1]$ 都不是满射的.

任取函数 $f:\mathbf{N}\rightarrow[0,1]$, 列出 f 的所有函数值,
然后构造一个 $[0,1]$ 区间的小数 b , 使得 b 与所有的函数值都不相等.

(2) 任取函数 $f:A\rightarrow P(A)$, 构造 $B\in P(A)$, 使得 B 与 f 的任何函数值都不等.

康托定理的证明

证 (1) 规定 $[0,1]$ 中数的表示. 对任意的 $x \in [0,1]$, 令

$$x = 0.x_1x_2\dots, \quad 0 \leq x_i \leq 9$$

设 $f: \mathbf{N} \rightarrow [0,1]$ 是任何函数, 列出 f 的所有函数值:

$$f(0) = 0.a_1^{(1)}a_2^{(1)}\dots$$

$$f(1) = 0.a_1^{(2)}a_2^{(2)}\dots$$

...

$$f(n-1) = 0.a_1^{(n)}a_2^{(n)}\dots$$

...

令 y 的表示式为 $0.b_1b_2\dots$, 并且满足 $b_i \neq a_i^{(i)}, i=1,2,\dots$, 那么 $y \in [0,1]$, 且 y 与上面列出的任何函数值都不相等.

这就推出 $y \notin \text{ran} f$, 即 f 不是满射的.

康托定理的证明

(2) 证：任何函数 $g:A \rightarrow P(A)$ 都不是满射的。

设 $g:A \rightarrow P(A)$ 是从 A 到 $P(A)$ 的函数, 如下构造集合 B :

$$B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin g(x)\}$$

则 $B \in P(A)$, 但对任意 $x \in A$ 都有

$$x \in B \Leftrightarrow x \notin g(x)$$

从而证明了对任意的 $x \in A$ 都有 $B \neq g(x)$. 即 $B \notin \text{rang}$.

注意：根据康托定理可以知道 $N \neq P(N)$, $N \neq \{0,1\}^N$.

集合的优势

定义 (1) 设 A, B 是集合, 如果存在从 A 到 B 的单射函数, 就称 B 优势于 A , 记作 $A \preceq B$. 如果 B 不是优势于 A , 则记作 $A \not\preceq B$.

(2) 设 A, B 是集合, 若 $A \preceq B$ 且 $A \not\approx B$, 则称 B 真优势于 A , 记作 $A \prec B$. 如果 B 不是真优势于 A , 则记作 $A \not\prec B$.

实例 $\mathbb{N} \preceq \mathbb{N}, \mathbb{N} \preceq \mathbb{R}, \mathbb{A} \preceq P(\mathbb{A}),$

$\mathbb{R} \not\preceq \mathbb{N}$

$\mathbb{N} \prec \mathbb{R}, \mathbb{A} \prec P(\mathbb{A}),$ 但 $\mathbb{N} \not\prec \mathbb{N}$

集合的优势

定理 设 A, B, C 是任意的集合, 则

(1) $A \preceq A$

(2) 若 $A \preceq B$ 且 $B \preceq A$, 则 $A \approx B$

(3) 若 $A \preceq B$ 且 $B \preceq C$, 则 $A \preceq C$

有限集(Finite set)/无限集 (Infinite set)

设 A 为一个集合. 若存在某个自然数 n , 使得 A 与集合 $\{0, 1, \dots, n-1\}$ 等势, 则称 A 是有限的. 若集合 A 不是有限的, 则称 A 是无限的.

注: 有限集也称为有穷集; 无限集也称为无穷集。

结论

(1) 自然数集合 \mathbf{N} 是无限的.

(2) 无限集必与它的一个真子集为等势.

推论: 凡不能与自身的任一真子集等势的集合为有限集.

可数集(可列集) (Countable Set, Enumerable Set)

与自然数集 \mathbf{N} 等势的任意集合称为可数的. 其基数为 \aleph_0 .

例: \mathbf{N} , \mathbf{Q} 是可数集;

\mathbf{R} 不是可数集 (也称不可数集)。

基数的常识

- ① 对于有穷集合 A , 基数是其元素个数 n , $|A| = n$;
- ② 自然数集合 \mathbf{N} 的基数记作 \aleph_0 ;
- ③ 实数集 \mathbf{R} 的基数记作 \aleph , 即 $\text{card}\mathbf{R} = \aleph$;
- ④ 没有最大的基数。将已知的基数按从小到大的顺序排列就得到:

$$0, 1, 2, \dots, n, \dots, \aleph_0, \aleph, \dots$$

连续统猜想 (Continuum Hypothesis)

不存在这样的无限集,基数严格介于 \aleph_0 与 \aleph 之间.

(1900年Hilbert在巴黎第二届世界数学家大会上提出的23个数学问题中的第一个问题.)

总结

- 康托定理
- 有限集
- 无限集
- 可数集
- 不可数集