2-6 等价关系

概念：

等价关系，等价类，商集，划分

等价关系 (Equivalence relation)

设 R 为集合 A 上的一个二元关系。若 R 是自反的,
对称的, 传递的，则称 R 为 A 上的等价关系。

例: 令A={1,2,3,4}

R={< 1,1> ,< 1,4> ,< 4,1> ,< 4,4> , < 2,2> ,< 2,3> ,< 3,2> ,< 3,3>}

是否等价关系？

结论：R是A上的一个等价关系。

等价类 (Equivalence class)

设R为集合A上的等价关系, 对$\forall a \in A$, 定义:

$$[a]_R = \{x \mid x \in A \text{ 且 } \langle a,x\rangle \in R\}$$

称之为元素a关于R的等价类。

例(续上):

$R=\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 4,1\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$

则： $[1]_R=[4]_R=\{1,4\}$

$[2]_R=[3]_R=\{2,3\}$

定理1: 给定A上的等价关系R, 对于a,b∈A有：

$$aRb \quad \text{iff} \quad [a]_R=[b]_R$$

商集 (Quatient set)

设R是A上的等价关系，定义 $A/R=\{[a]_R|a\in A\}$

称之为**A关于R的商集**.

例: (见上例)中商集为: $\{[1]_R,[2]_R\}$

或更详细写成 $\{\{1,4\},\{2,3\}\}$

划分（Partition）

设A为非空集合, 若A的子集族π($\pi \subseteq P(A)$)满足:

(1) $\varnothing \notin \pi$

(2) $\forall x \forall y (x, y \in \pi \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing)$

(3) $\cup \pi = A$

则称π是A的一个划分, 称π中的元素为A的划分块。

定理2: 给定集合 A 上的等价关系 R, 则商集 A/R 是 A 的一个划分.

证明思路：

(1) $\varnothing \notin A/R$

(2) $\forall x \forall y (x, y \in A/R \wedge x \neq y \rightarrow x \cap y = \varnothing)$

(3) $\cup\ A/R = A$

例(见上例): A/R={{1,4},{2,3}}是一个划分.

定理3: 集合A的一个划分π诱导出A上的一个等价关系R.

R定义为R= {<x,y>| x,y ∈A 且x,y在π的同一分块中}

例: 设A={a,b,c,d,e}的一个划分为S={ {a,b},{c},{d,e} }.

求由划分S诱导的A上的一个等价关系R.

解：R={<a,a>, <a,b>, <b,a>, <b,b>,

<c,c>,

<d,d>, <d,e>, <e,d>, <e,e> }

例: 设$A \neq \varnothing$, 则 I_A, $A \times A$均为A上的等价关系。

求：A/ I_A, $A/ (A \times A)$

解：$A/ I_A = \{\{x\}|\ x \in A\}$

$A/ (A \times A) = \{A\}$

注：A/ I_A为最细粒度的划分，$A/ (A \times A)$为最粗粒度的划分

总结

- 等价关系
- 等价类
- 商集
- 划分