代数结构

Algebra Structures

内容提要

1. 运算及其性质
2. 代数系统
3. 群与子群
4. 阿贝尔群和循环群
5. 环与域
6. 格与布尔代数

内容提要

1. 运算及其性质
2. 代数系统
3. 群与子群
4. 阿贝尔群和循环群
5. 环与域
6. 格与布尔代数

1、运算及其性质

概念：

运算， 封闭的，可交换的，可结合的，可分配的，吸收律，幂等的， 幺元，零元，逆元，消去律

运算的定义

运算 对于集合 A，若 f 是从 A^n 到 A 的函数，

称 f 为集合 A 上的一个 n元 运算。

注：函数$f: A^n \to B$，若$B \subseteq A$，称函数f在集合A上是封闭的。

运算实例：

（1）加法和乘法是N上的二元运算，但减法和除法不是。

（2）加法、减法和乘法都是Z上的二元运算，而除法不是。

（3）乘法和除法都是R*（非零实数）上的二元运算，而加法和减法不是。

（4）设M_n(R)表示所有n 阶(n≥2)实矩阵的集合，即

$$\boldsymbol{M}_n(\boldsymbol{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \middle| \; a_{ij} \in \boldsymbol{R},\ i, j = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

则矩阵加法和乘法都是M_n(R)上的二元运算。

（5） S为任意集合，则∪、∩、−、⊕ 为$P(S)$上二元运算。

运算的表示

1．算符

可以用$\circ$, $*$, $\cdot$, $\oplus$, $\otimes$,Δ 等符号表示二元或一元运算，称为算符。

2. 运算表：表示有穷集上的一元和二元运算

$\circ$	a_1	a_2	…	a_n
a_1	$a_1 \circ a_1$	$a_1 \circ a_2$	…	$a_1 \circ a_n$
a_2	$a_2 \circ a_1$	$a_2 \circ a_2$	…	$a_2 \circ a_n$
.		…		
.		…		
.		…		
a_n	$a_n \circ a_1$	$a_n \circ a_2$	…	$a_n \circ a_n$

二元运算的运算表

	$\circ a_i$
a_1	$\circ a_1$
a_2	$\circ a_2$
.	.
.	.
.	.
a_n	$\circ a_n$

一元运算的运算表

运算表的实例

例：设 $S=P(\{a,b\})$，S上的$\oplus$和 $\sim$运算的运算表如下。

$\oplus$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\varnothing$	$\{a.b\}$	$\{b\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\varnothing$	$\{a\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\varnothing$

x	$\sim x$
$\varnothing$	$\{a,b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$
$\{b\}$	$\{b\}$
$\{a,b\}$	$\varnothing$

运算的性质

运算的性质

交换律

已知<A，*>，若∀x，y∈A，有 x*y=y*x，称*在A上是可交换的。

例：判断相应的运算是否满足交换律。

(1) （Z，+）、（Z，-）、（Z，×）

(2) 设<R，*>,*定义如下：a*b=a+b-ab

结合律

已知<A，*>，若∀x，y，z∈A，有 x*（y*z）=（x*y）*z，称*在A上是可结合的。

例：判断相应的运算是否满足结合律。

(1)（Z，+）、（Z，-）、（Z，×）

(2) <A，*>，若∀a，b∈A，有a*b=b

幂等律

已知 $\langle A, * \rangle$，若 $\forall x \in A$，$x*x=x$，则称满足幂等律。

例：S为集合，$\langle \wp(S), \cup, \cap \rangle$，则 $\cup, \cap$ 满足幂等律。

分配律

设<A，*，△>，若∀x，y，z∈A 有

$$x*(y\triangle z) = (x*y) \triangle (x*z)$$

$$(y\triangle z)*x = (y*x) \triangle (z*x)$$

称运算*对运算△是可分配的。

*	α	β
α	α	β
β	β	α

△	α	β
α	α	α
β	α	β

例：设A={α，β}，二元运算*，△定义如左。

问分配律成立否？

证明：

① 运算△ 对*是可分配的。即：$x\triangle(y*z)=(x\triangle y)*(x\triangle z)$

*	α	β
α	α	β
β	β	α

△	α	β
α	α	α
β	α	β

当$x=\alpha$：

$$x\triangle(y*z) = \alpha$$

$$(x\triangle y)*(x\triangle z) = \alpha$$

当$x=\beta$：

$$x\triangle(y*z) = y*z$$

$$(x\triangle y)*(x\triangle z) = y*z$$

② 运算*对运算△不可分配。

反例：

$$\beta * (\alpha\triangle\beta) = \beta*\alpha = \beta$$

$$(\beta*\alpha) \triangle (\beta* \beta) = \beta\triangle\alpha = \alpha$$

吸收律

设$*$, Δ是定义在集合A上的两个可交换二元运算，若对$\forall x, y \in A$, 都有:

$$x*(x\Delta y) = x$$

$$x\Delta(x* y) = x$$

则称运算$*$和Δ满足吸收律。

例：幂集P(S)上的运算$\cup$和$\cap$满足吸收律。