图论

Graph Theory

内容提要

1. 图的基本概念
2. 图的连通性
3. 图的矩阵表示
4. 欧拉图与哈密顿图
5. 无向树与根树
6. 平面图

内容提要

1. 图的基本概念
2. 图的连通性
3. 图的矩阵表示
4. 欧拉图与哈密顿图
5. 无向树与根树
6. 平面图

4、欧拉图与哈密顿图

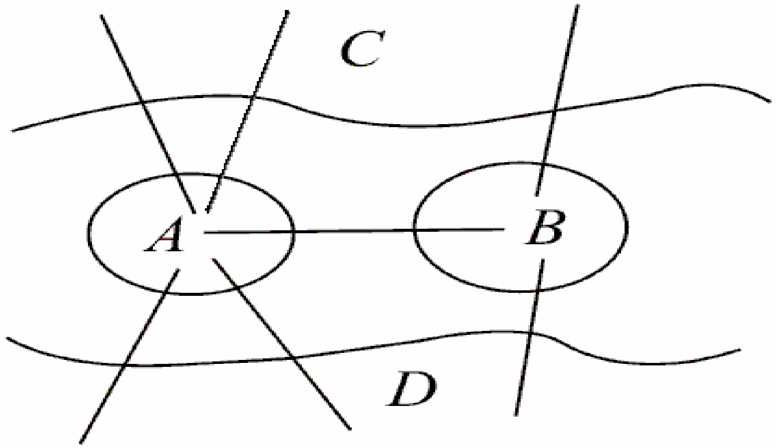
概念：

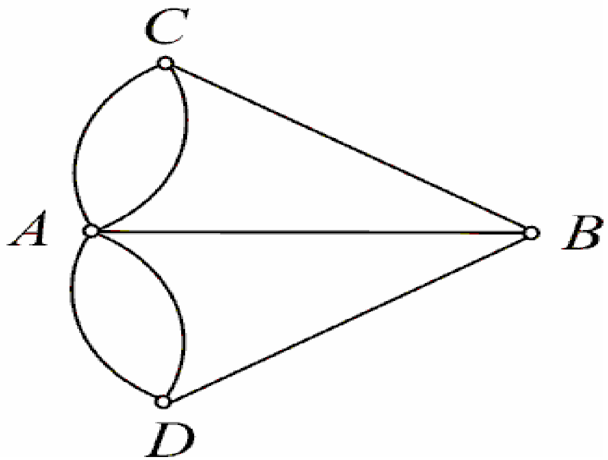
欧拉通路、欧拉回路、欧拉图、半欧拉图及其判别法

哈密顿通路、哈密顿回路、哈密顿图、半哈密顿图

欧拉图的定义

历史背景：哥尼斯堡七桥问题与欧拉图





定义

(1) 欧拉通路——经过图（无向图或有向图）中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的通路.

(2) 欧拉回路——经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的回路.

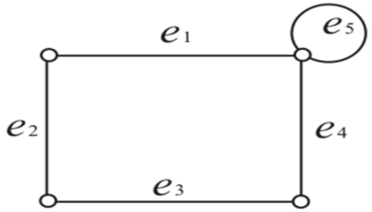
(3) 欧拉图——具有欧拉回路的图.

(4) 半欧拉图——具有欧拉通路而无欧拉回路的图.

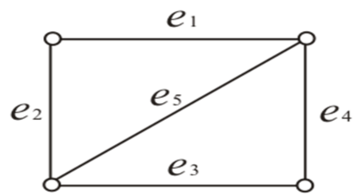
注：(1) 约定：平凡图是欧拉图.

(2) 欧拉通路是简单通路，欧拉回路是简单回路.

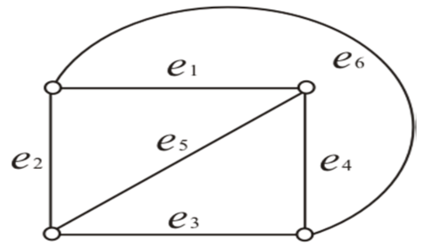
欧拉图判别实例



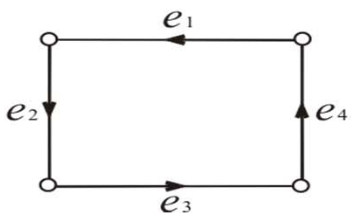
(1)



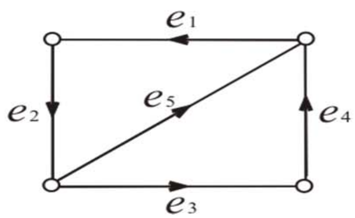
(2)



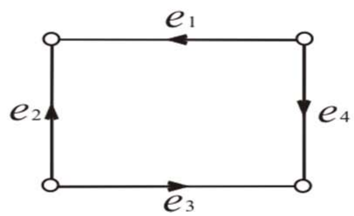
(3)



(4)



(5)



(6)

上图中，(1) ,(4) 为欧拉图，(2),(5)为半欧拉图，(3),(6)既不是欧拉图，也不是半欧拉图。

在(3),(6)中各至少加几条边才能成为欧拉图？

欧拉图的判定定理

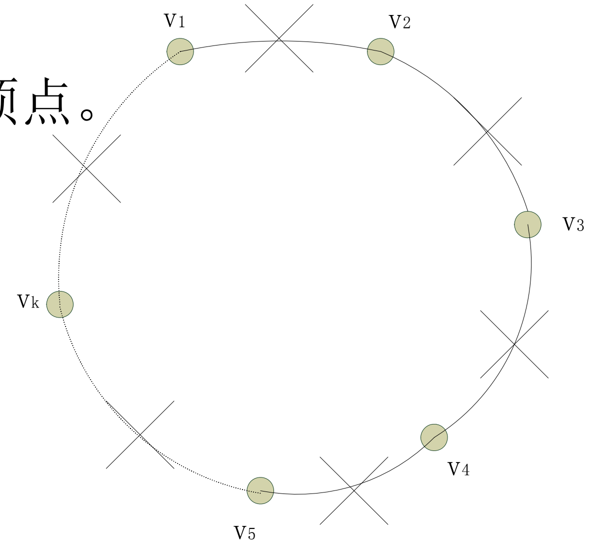
无向欧拉图的判别法

定理

（1） 无向图G是欧拉图 当且仅当 G连通且无奇度数顶点。

（2） 无向图G是半欧拉图 当且仅当 G 连通且恰有两个奇度顶点。

无向欧拉图的判别法



定理(1) 无向图G是欧拉图 当且仅当 G连通且无奇度数顶点。

证明：必要性易。下面说明充分性的证明思路。

- 对 G 的边数 m 作归纳。当 m = 0 时显然成立。
- 设 m ≤ k 时成立，考虑 m = k+1 的情形。
- 由 $\delta(G) \geqslant 2$，可知 G 中存在圈（留作练习），设为 C。
- 将 C 上的边删除，得到图 G’。见图示。
- 则 G’ 含有若干个连通分支，每个连通分支的边数不超过 k，且没有奇度顶点。由归纳假设，每个连通分支都有欧拉回路。
- 从 C 上任一顶点出发，每经过一个顶点就按其在 G’ 中的连通分支走欧拉回路，最终回到出发点。这个过程产生的就是 G 中的欧拉回路。

有向欧拉图的判别法

定理

(1) 有向图D是欧拉图当且仅当D是强连通的且每个顶点的入度都等于出度。

(2) 有向图D是半欧拉图当且仅当D是单向连通的，且D 中恰有两个奇度顶点，其中一个的入度比出度大1，另一个的出度比入度大1，而其余顶点的入度都等于出度。

Fleury算法

算法

(1) 任取 $v_0 \in V(G)$，令 $P_0 = v_0$。

(2) 设 $P_i = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_i v_i$ 已经行遍，按下面方法从

$E(G) - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中选取 e_{i+1}：

(a) e_{i+1} 与 v_i 相关联；

(b) 除非无别的边可供行遍，否则 e_{i+1} 不应该为

$G_i = G - \{e_1, e_2, \cdots, e_i\}$ 中的桥。

(3) 当 (2)不能再进行时，算法停止。

注：(1) Fleury算法的基本思路是能不走桥就不走桥；

(2) 假如G是欧拉图，则算法停止时所得简单通路

$P_m = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_m v_m (v_m = v_0)$ 为 G 中一条欧拉回路。