代数结构

Algebra Structures

内容提要

1. 运算及其性质
2. 代数系统
3. 群与子群
4. 阿贝尔群和循环群
5. 环与域
6. 格与布尔代数

内容提要

1. 运算及其性质
2. 代数系统
3. 群与子群
4. 阿贝尔群和循环群
5. 环与域
6. 格与布尔代数

6、格与布尔代数

概念：

格，对偶原理，子格，分配格，有界格，有补格

布尔代数，有限布尔代数的表示定理

格的定义

格（Lattice）

设 $<S, \preccurlyeq>$ 是偏序集，如果 $\forall x,y\in S$，$\{x,y\}$ 都有最小上界和最大下界，则称 S 关于偏序 $\preccurlyeq$ 作成一个格。

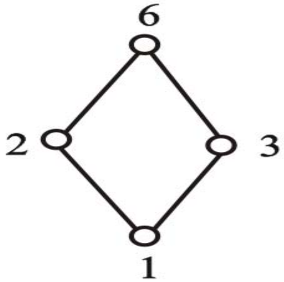
注：求 $\{x,y\}$ 最小上界和最大下界看成 x 与 y 的二元运算 $\vee$ 和 $\wedge$.

例：设 n 是正整数，S_n 是 n 的正因子的集合. D 为整除关系，则偏序集 $<S_n,D>$ 构成格。

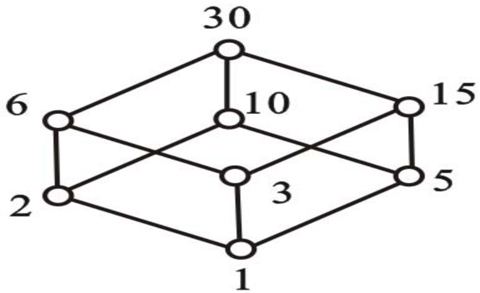
$\forall x,y\in S_n$，$x\vee y$ 是 $\mathrm{lcm}(x,y)$，即 x 与 y 的最小公倍数.

$x\wedge y$ 是 $\gcd(x,y)$，即 x 与 y 的最大公约数.

(S_8,D)



(S_6,D)



(S_{30},D)

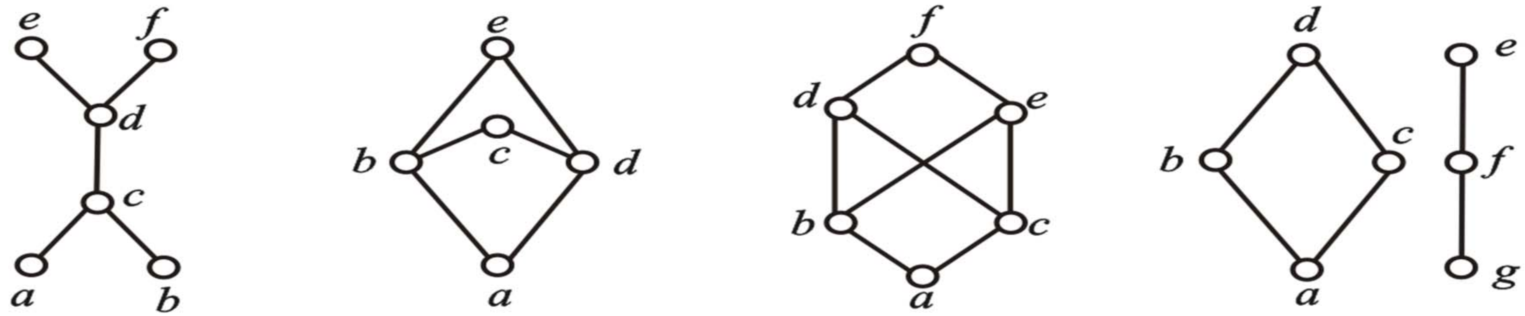
实例

判断下列偏序集是否构成格，并说明理由。

(1) $<P(B),\subseteq>$，其中$P(B)$是集合B的幂集。

(2) $<Z,\leq>$，其中Z是整数集，$\leq$为小于或等于关系。

(3) 偏序集的哈斯图分别在下图给出。



(a) (b) (c) (d)

(1) 幂集格. $\forall x,y\in P(B)$，$x\vee y$就是$x\cup y$，$x\wedge y$就是$x\cap y$。

(2) 是格. $\forall x,y\in Z$，$x\vee y=\max(x,y)$，$x\wedge y=\min(x,y)$。

(3) 都不是格. 可以找到两个结点缺少最大下界或最小上界。

设 f 是含有格中元素以及符号 $=, \preccurlyeq, \succcurlyeq, \vee$ 和 $\wedge$ 的命题。

令 f^* 是将 f 中的 $\preccurlyeq$ 替换成 $\succcurlyeq$, $\succcurlyeq$ 替换成 $\preccurlyeq$, $\vee$ 替换成 $\wedge$, $\wedge$ 替换成 $\vee$ 所得到的命题，称 f^* 为 f 的对偶命题。

例：在格中令 f 是 $(a\vee b)\wedge c\preccurlyeq c$, f^* 是 $(a\wedge b)\vee c\succcurlyeq c$ 。

格的对偶原理

设 f 是含有格中元素以及符号 $=, \preccurlyeq, \succcurlyeq, \vee$ 和 $\wedge$ 等的命题。

若 f 对一切格为真， 则 f 的对偶命题 f^* 也对一切格为真。

格的性质

格的性质

设 $<L, \preccurlyeq>$ 是格， 则运算 $\vee$ 和 $\wedge$ 适合交换律、结合律、幂等律和吸收律，即

(1) $\forall a,b \in L$ 有

$$a \vee b = b \vee a, \ \ a \wedge b = b \wedge a$$

(2) $\forall a,b,c \in L$ 有

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), \ \ (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$$

(3) $\forall a \in L$ 有

$$a \vee a = a, \ \ a \wedge a = a$$

(4) $\forall a,b \in L$ 有

$$a \vee (a \wedge b) = a, \ \ a \wedge (a \vee b) = a$$

格的性质：序与运算

引理：设L是格, 则$\forall a,b\in L$有:　　$a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a\wedge b = a \Leftrightarrow a\vee b = b$。

证明：

(1) 先证 $a \preccurlyeq b \Rightarrow a\wedge b = a$。

由 $a \preccurlyeq a$ 和 $a \preccurlyeq b$ 可知 a 是$\{a,b\}$的下界, 故 $a \preccurlyeq a\wedge b$。

显然有$a\wedge b \preccurlyeq a$。由反对称性得 $a\wedge b = a$。

(2) 再证 $a\wedge b = a \Rightarrow a\vee b = b$。

根据吸收律有 $b = b\vee(b\wedge a)$ 。

由 $a\wedge b = a$ 和上面的等式得 $b = b\vee a$， 即 $a\vee b = b$。

(3) 最后证 $a\vee b = b \Rightarrow a \preccurlyeq b$。

由 $a \preccurlyeq a\vee b$ 得 $a \preccurlyeq a\vee b = b$ 。

格的性质：保序

设L是格, $\forall a,b,c,d \in L$，若$a \preccurlyeq b$ 且 $c \preccurlyeq d$，则

$$a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d, \quad a \vee c \preccurlyeq b \vee d$$

证明：

由已知 $a \wedge c \preccurlyeq a \preccurlyeq b,\ a \wedge c \preccurlyeq c \preccurlyeq d$

因此 $a \wedge c \preccurlyeq b \wedge d$。

同理可证 $a \vee c \preccurlyeq b \vee d$

格的代数系统定义

设$<S, *, \circ>$是代数系统， $*$和$\circ$是二元运算， 如果$*$和$\circ$满足交换律、结合律和吸收律，则$<S, *, \circ>$构成格。

注：S中的偏序关系$\preccurlyeq$定义为： 对$\forall a,b \in S$ 有 $a \preccurlyeq b \Leftrightarrow a \circ b = b$.