代数结构

Algebra Structures

内容提要

1. 运算及其性质
2. 代数系统
3. 群与子群
4. 阿贝尔群和循环群
5. 环与域
6. 格与布尔代数

内容提要

1. 运算及其性质
2. 代数系统
3. 群与子群
4. 阿贝尔群和循环群
5. 环与域
6. 格与布尔代数

3、群与子群

概念：

半群, 子半群, 元素的幂，独异点，群，群的阶数，子群，平凡子群，陪集，拉格朗日（**Lagrange**）定理

子群及其相关（判定）定理

子群（Subgroup）

设G 是群，H 是G 的非空子集， 如果H关于G中的运算构成群，则称H是G 的子群，记作$H\leqslant G$。

① 若H是G 的子群，且$H\subset G$，则称H是G的真子群，记作$H < G$。

② 对任何群G都存在子群. G和$\{e\}$都是G 的子群，称为G 的平凡子群。

例： nZ (n是自然数) 是整数加群<Z,+> 的子群. 当$n\neq1$时，nZ是Z的真子群。

子群判定定理1

设G为群，H是G的非空子集，则H是G的子群当且仅当

(1) $\forall a,b \in H$有$ab \in H$；

(2) $\forall a \in H$有$a^{-1} \in H$。

证明：

必要性是显然的。为证明充分性，只需证明$e \in H$。
因为H非空，存在$a \in H$。 由条件(2) 知 $a^{-1} \in H$，根据条件(1)
有 $aa^{-1} \in H$，即$e \in H$.

子群判定定理2

设G为群，H是G的非空子集。 H是G的子群 当且仅当 $\forall a,b\in H$ 有 $ab^{-1}\in H$.

证明：

必要性显然， 只证充分性。

因为H非空，必存在$a\in H$。根据给定条件得$aa^{-1}\in H$，即$e\in H$。

任取$a\in H$, 由$e,a\in H$ 得 $ea^{-1}\in H$，即$a^{-1}\in H$。

任取$a,b\in H$，知$b^{-1}\in H$. 再利用给定条件得 $a(b^{-1})^{-1}\in H$，即 $ab\in H$。

综合上述，可知H是G的子群。

子群判定定理3

设G为群，H是G的非空有穷子集，则H是G的子群当且仅当$\forall a,b\in H$ 有$ab\in H$.

证明：

必要性显然. 为证充分性，只需证明 $a\in H$有$a^{-1}\in H$。

任取$a\in H$, 若$a = e$, 则$a^{-1} = e\in H$。

若$a\neq e$，令$S=\{a,a^2,\ldots\}$，则$S\subseteq H$。

由于H是有穷集，必有$a^i = a^j$（$i<j$）。

根据G中的消去律得 $a^{j-i} = e$，由$a \neq e$可知 $j-i>1$，由此得

$$a^{j-i-1}a = e \text{ 和 } a\,a^{j-i-1} = e$$

从而得到 $a^{-1} = a^{j-i-1}\in H$。

生成子群

设G为群，$a \in G$，令$H=\{a^k \mid k \in Z\}$，则H是G的子群，称为由 a 生成的子群，记作$\langle a \rangle$。

例：

（1）整数加群，由2生成的子群是 $<2>=\{2^k \mid k \in Z\}=2Z$ 。

（2）$<Z_6, \oplus>$中，由2生成的子群$<2>=\{0,2,4\}$。

（3）Klein四元群 $G=\{e,a,b,c\}$的所有生成子群是：

$$<e>=\{e\},\ <a>=\{e,a\},\ <b>=\{e,b\},\ <c>=\{e,c\}$$

拉格朗日定理

$<G,*>$是一个群, $A,B\in P(G)$,且$A \neq\varnothing,B \neq \varnothing$, 定义:

$AB = \{a*b \mid a\in A$且 $b\in B\}$

$A^{-1} =\{a^{-1} \mid a\in A\}$

称AB为A,B的积，A^{-1}为A的逆 。

陪集

设$<H,*>$是群$<G,*>$的一个子群，$a\in G$则

左陪集: $aH ::= \{a\}H$，由a所确定的H在G中的左陪集。

右陪集: $Ha::=H\{a\}$

陪集是左陪集与右陪集的统称。

例： 设$G=\{e,a,b,c\}$是Klein四元群，$H=\langle a\rangle$是G的子群。

H所有的右陪集是：

$He=\{e,a\}=H$, $Ha=\{a,e\}=H$, $Hb=\{b,c\}$, $Hc=\{c,b\}$

不同的右陪集只有两个，即H和$\{b,c\}$.

陪集性质

设H是群G的子群，则

1. $He = H$；
2. $\forall a \in G$ 有$a \in Ha$；
3. $\forall a,b \in G$有：$a \in Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H \Leftrightarrow Ha=Hb$；
4. 在G上定义二元关系R：

$$\forall a,b \in G,\ \langle a,b \rangle \in R \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$$

   则 R是G上的等价关系，且$[a]_R = Ha$.

5. $|Ha|=|H|$。

Lagrange定理

设G是有限群，H是G的子群，则

$$|G| = |H|\cdot[G:H]$$

其中$[G:H]$ 是H在G中的不同右陪集(或左陪集) 数，称为H在G 中的指数.

推论：

（1） 设G是n阶群，则$\forall a\in G$，$|a|$是n的因子，且$a^n = e$。

（2） 对阶为素数的群G，必存在$a\in G$使得$G = \langle a\rangle$。