图论

Graph Theory

内容提要

1. 图的基本概念
2. 图的连通性
3. 图的矩阵表示
4. 欧拉图与哈密顿图
5. 无向树与根树
6. 平面图

内容提要

1. 图的基本概念
2. 图的连通性
3. 图的矩阵表示
4. 欧拉图与哈密顿图
5. 无向树与根树
6. 平面图

5、无向树与根树

概念：

无向树，生成树，最小生成树，Kruskal

根树，m叉树，最优二叉树，Huffman算法

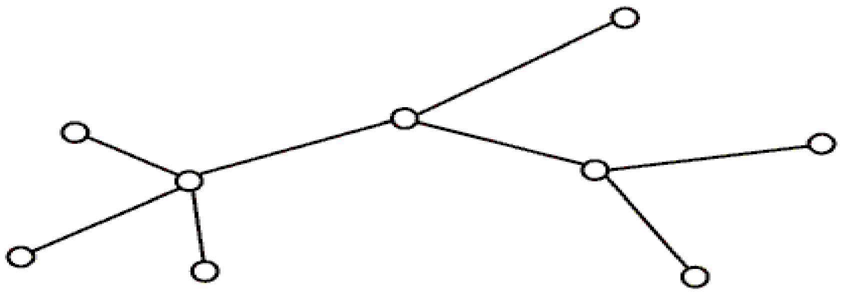
无向树的定义

无向树

连通且无初级回路的无向图。

- 树叶——1度顶点
- 分支点——度数≥2的顶点

例：



森林

每个连通分支都是树的无向图。

无向树的等价定义

设$G=\langle V, E\rangle$是n阶m条边的无向图，则下面各命题是等价的：

(1) G 是树；
(2) G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径；
(3) G 中无圈且 $m=n-1$；
(4) G 是连通的且 $m=n-1$；
(5) G 是连通的且 G 中任何边均为桥；
(6) G 中没有圈，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到惟一的一个含新边的圈。

证明思路

(1)⇒(2). 关键一步是, 若路径不惟一必有回路.

(2)⇒(3). 若G中有回路，则回路上任意两点之间的路径不惟一。 对m用归纳法证明$m=n-1$。

$m=0$或1正确。 设m≤k时对，证$n=k+1$时也对：取G中边e，$G-e$有且仅有两个连通分支G_1, G_2(为什么?）。 $m_i \le k$，由归纳假设得$m_i=n_i-1$， $i=1, 2$。 于是，$m=m_1+m_2+1=n_1+n_2-2+1=n-1$。

(3)⇒(4). 只需证明G连通. 用反证法. 否则G有s（$s\ge 2$）个连通分支都是小树. 于是有$m_i=n_i-1$, ， 并且

$$m = \sum_{i=1}^{s} m_i = \sum_{i=1}^{s} n_i - s = n - s \ (s \ge 2)$$

这与$m=n-1$矛盾。

证明思路（续）

(4)$\Rightarrow$(5). 只需证明G 中每条边都是桥。 为此只需证明命题

“G 是 n 阶 m 条边的无向连通图，则 $m\geq n-1$”。

命题的证明：对n归纳。

$\forall e\in E$, $G-e$只有$n-2$条边，由命题可知$G-e$不连通，故e为桥。

(5)$\Rightarrow$(6). 由(5)易知G为树，由(1)$\Rightarrow$(2)知，$\forall u,v\in V$（$u\neq v$），

u到v有惟一路径，加新边(u,v)得惟一的一个圈。

(6)$\Rightarrow$(1). 只需证明G连通，这是显然的。

无向树的性质

无向树的性质

定理 设T是n阶非平凡的无向树，则T中至少有两片树叶。

证明： 设 T 有 x 片树叶，则

$$2(n-1)=\sum d(v_i)\geq x+2(n-x)$$

由上式解出$x\geq 2$。

例题

已知无向树T中有1个3度顶点，2个2度顶点，其余顶点全是树叶，试求树叶数，并画出满足要求的非同构的无向树。

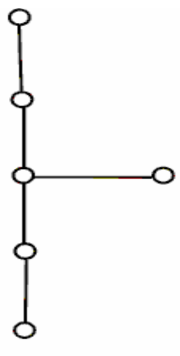
解： 解本题用树的性质$m=n-1$，以及握手定理。

设有x片树叶，于是 $n = 1+2+x = 3+x$，

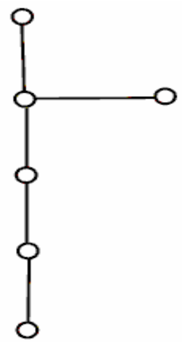
$$2m = 2(n-1) = 2\times(2+x) = 1\times3+2\times2+x$$

解出$x = 3$，故T有3片树叶。

T 的度数列应为 1, 1, 1, 2, 2, 3，
易知3度顶点与1个2度顶点相邻与和2个2度顶点均相邻是非同构的，因而有2棵非同构的无向树T_1, T_2，如图所示.。



T_1



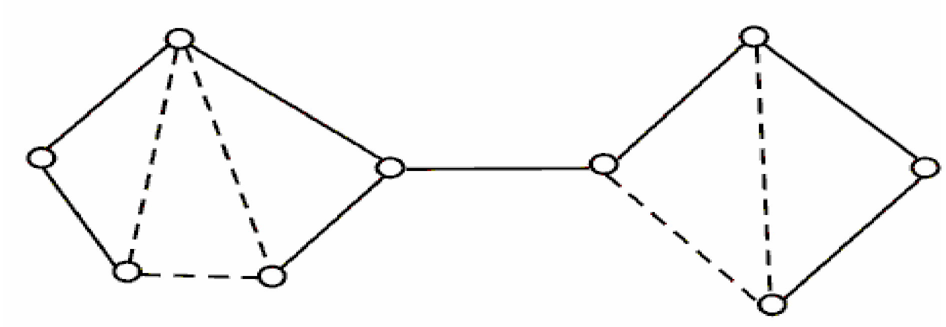
T_2

生成树与最小生成树

如果无向图G的生成子图T是树，则称T 是G 的生成树。

- 生成树T的树枝——T 中的边
- 生成树T的弦——不在T 中的边
- 生成树T的余树 $\overline{T}$——全体弦组成的集合的导出子图

注: $\overline{T}$ 不一定连通，也不一定不含回路，如图所示:



生成树存在条件

定理　无向图G具有生成树当且仅当G连通。

推论　G为n阶m条边的无向连通图，则$m \geq n-1$。

最小生成树

定义

设T是带权图$G=\langle V, E, W\rangle$ （W 指定了边的权值）的生成树。

(1) $W(T)$——T各边权之和

(2) 最小生成树——G的所有生成树中权最小的。

避圈法（Kruskal算法）

设$G=<V,E,W>$，将G中非环边按权从小到大排序：$e_1, e_2, \ldots, e_m$。

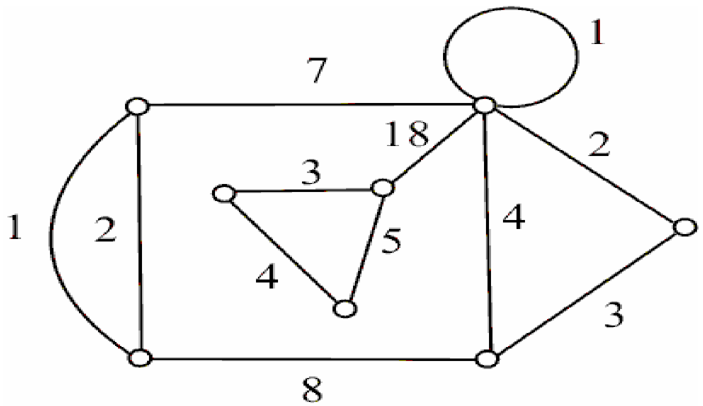
(1) 取e_1在T中；

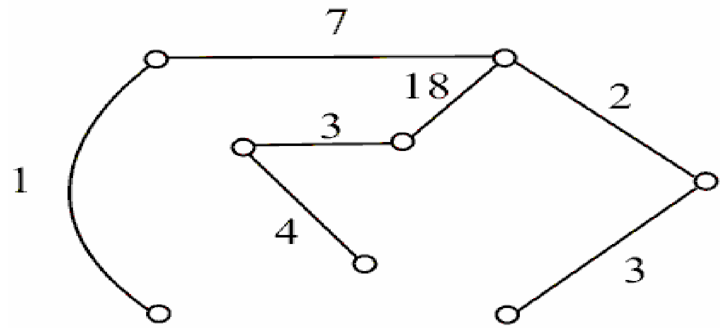
(2) 查e_2，若e_2与e_1不构成回路，取e_2也在T 中，否则弃e_2；

(3) 再查$e_3, \ldots$, 直到得到生成树为止。

实例

求下图的一棵最小生成树。





所求最小生成树如图所示，$W(T)$=38。