1-8 谓词公式

概念：

项，原子公式，合式公式，自由变元，约束变元，辖域，换名，代入

谓词语言：用符号串表示个体、谓词、量词和命题

一阶谓词逻辑的基本符号

- 个体变元符号：x，y，z，…
- 个体常元符号：a，b，c，…
- 函数符号：f，g，…
- 谓词符号：P，Q，R，…
- 命题常元符号：⊥，⊤
- 量词符号：∀，∃
- 连接词符号：¬，∧，∨，→，↔
- 辅助符号：），（

逻辑符号：在任何情况下都作用相同的符号，包括：

个体变元符号、命题常元符号、量词符号、

联结词符号、辅助符号

非逻辑符号：其他符号，即：

个体常元符号、函数符号、谓词符号

项（Term）

(1)个体常元和变元是项；

(2) 若f是n元函数符号，$t_1, \ldots, t_n$是项，则$f(t_1, \ldots, t_n)$是项；

(3) 仅仅有限次使用(1)，(2)产生的符号串是项。

注：项将解释成个体对象。

原子公式 (Atomic formulas)

若**P**是一个元谓词符号，$t_1,\ldots,t_n$是项，则$P(t_1,\ldots,t_n)$是原子公式。

例： $P(x)$是一个原子公式 。

合式公式 (Well-Formed Formulas)

递归定义如下：

(1) 原子公式是公式；

(2) 若A是合式公式，则$(\neg A)$是合式公式；

(3) 若A，B是公式，则$(A\vee B)$，$(A\wedge B)$，$A\rightarrow B)$，$(A\leftrightarrow B)$是公式；

(4) 若A是公式，x是变元，则$\forall xA$，$\exists xA$是公式；

(5)仅仅有限次使用 1 ～ 4 得到的符号串才是合式公式。

例： $F(x)\vee\neg G(x,y)$, $\forall x(F(x)\rightarrow G(x))$， $\exists x\forall y(F(x)\rightarrow G(y)\wedge L(x,y))$

都是合式公式。

变元的约束 设公式 α的一个子公式为∀ x A或∃ x A。则称：

指导变元（Index）：x是∀或∃的指导变元。

辖域(Scope)：A是相应量词的辖域。

约束出现(bounded)：辖域中x的一切出现，以及(∀ x)中的x称为x在α中的约束出现。

自由出现(free)：变元的非约束出现。

约束变元：约束出现的变元。

自由变元：自由出现的变元。

例： $\forall x \forall y (P(x,y) \wedge Q(y,z)) \wedge \exists x P(x,y)$

封闭的公式

若公式A中不含自由出现的个体变项，则称A为封闭的公式，简称闭式.

例如，$\forall x\forall y(F(x)\wedge G(y)\rightarrow H(x,y))$ 为闭式，

而 $\exists x(F(x)\wedge G(x,y))$ 不是闭式

变元换名 (Replacement)

可以对约束变元换名，目的是避免变元的约束与自由同时出现，引起混淆。

规则：（1） 换名的范围是量词的指导变元,及其相应辖域中的变元，其余部分不变。

（2） 换名时最好选用辖域中未出现的变元名。

例：$\forall x\,(P(x) \rightarrow R(x,y)) \wedge Q(x,y)$

可换为：$\forall z\,(P(z) \rightarrow R(z,y)) \wedge Q(x,y)$

不能：$\forall y\,(P(y) \rightarrow R(y,y)) \wedge Q(x,y)$

变元代入(Substitution)

代入对自由变元进行。要求：不能改变约束关系。

例：公式$\forall x\,(P(x) \rightarrow R(x,y)) \wedge Q(x,y)$

将自由变元y代入项 t, 得到公式：

$$\forall x\,(P(x) \rightarrow R(x,t)) \wedge Q(x,t)$$

要求t中不包含x.

总结

- 项
- 原子公式、合式公式
- 自由变元、约束变元、辖域
- 换名、代入