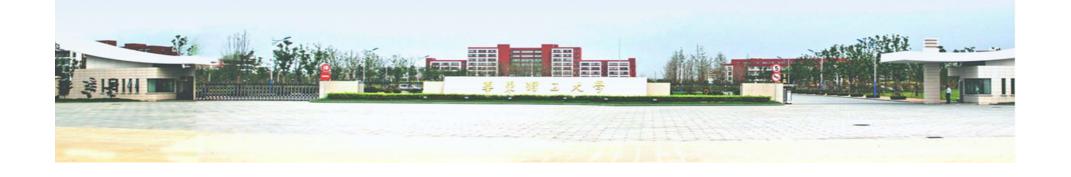


代数结构

Algebra Structures



内容提要

- 1. 运算及其性质
- 2. 代数系统
- 3. 群与子群
- 4. 阿贝尔群和循环群
- 5. 环与域
- 6. 格与布尔代数

内容提要

- 1. 运算及其性质
- 2. 代数系统
- 3. 群与子群
- 4. 阿贝尔群和循环群
- 5. 环与域
- 6. 格与布尔代数

5、环与域

概念:

环,交换环,含幺环,整环,域

环 (Ring)

设<R,+,·>是代数系统,+和·是二元运算。如果满足以下条件:

- (1) < R, +>构成交换群;
- (2) <R,·>构成半群;
- (3)·运算关于+运算适合<mark>分配律</mark>, 则称<*R*,+,·>是一个环.

通常称+运算为环中的加法,·运算为环中的乘法。 环中加法单位元记作 0,乘法单位元(如果存在)记作1。 对任何元素 x,称 x 的加法逆元为负元,记作-x。 若 x 存在乘法逆元的话,则称之为逆元,记作 x^{-1} 。

例:

- (1) 整数集、有理数集、实数集和复数集关于普通的加法和乘法构成环, 分别称为整数环Z,有理数环Q,实数环R和复数环C。
- (2) $n(n \ge 2)$ 阶实矩阵的集合 $M_n(R)$ 关于矩阵的加法和乘法构成环,称为n 阶实矩阵环。
- (3) 集合的幂集P(B)关于集合的对称差运算和交运算构成环,称为子集环。
- (4) 设 $Z_n = \{0,1,...,n-1\}$, Θ 和 \otimes 分别表示模n的加法和乘法,则 $< Z_n, \Theta, \otimes >$ 构成环,称为模 n的整数环。

环的运算性质

设<R,+,·>是环,则

(1)
$$\forall a \in R, \ a0 = 0a = 0$$

(2)
$$\forall a,b \in R$$
, $(-a)b = a(-b) = -ab$

(3)
$$\forall a,b,c \in R$$
, $a(b-c) = ab-ac$, $(b-c)a = ba-ca$

(4)
$$\forall a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_m \in R (n, m \ge 2)$$

$$(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{a}_{i}) (\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{b}_{j}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{a}_{i} \boldsymbol{b}_{j}$$

例: 在环中计算 $(a+b)^3$, $(a-b)^2$ 。

解:
$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b)$$

 $= (a^2+ba+ab+b^2)(a+b)$
 $= a^3+ba^2+aba+b^2a+a^2b+bab+ab^2+b^3$
 $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2-ba-ab+b^2$

特殊的环

设<*R*,+,·>是环

- (1) 若环中乘法·适合交换律,则称R是交换环;
- (2) 若环中乘法·存在单位元,则称R是含幺环;
- (3) 若 $\forall a,b \in R$, $ab=0 \Rightarrow a=0 \lor b=0$,则称R是无零因子环。

例:

- (1)整数环Z交换环,含幺环,无零因子环。
- (2) $◆2Z={2z | z∈Z}$,则<2Z,+,·>构成交换环和无零因子环,但不是含幺环。

整环(Integrel Domain)

设<R,+,●>是一个代数系统,若满足:

- (1) <R,+>是阿贝尔群;
- (2) <R,●>是可交换独异点,且无零因子,即对∀a,b∈R, a≠0,b≠0 则a● b≠0;
- (3)运算●对+是可分配的,

则称<R,+,●>是整环。

- 注:(1)既是交换环、含幺环、无零因子环的代数系统是整环。
 - (2) 整环中的无零因子条件等价于乘法消去律,即对于 $c\neq 0$ 和 $c \bullet a = c \bullet b$,有a = b.

域 (Field)

设<R,+,●>是一个代数系统,若满足:

- (1) <R,+>是阿贝尔群;
- (2) <R-{0},●>是阿贝尔群;
- (3)运算●对+是可分配的,

则称<R,+,●>是域。

例:整数环Z整环,但不是域;实数环R既是整环又是域。

性质:

- (1) 域一定是整环。
- (2) 有限整环必是域。