代数结构

Algebra Structures

内容提要

1. 运算及其性质
2. 代数系统
3. 群与子群
4. 阿贝尔群和循环群
5. 环与域
6. 格与布尔代数

内容提要

1. 运算及其性质
2. 代数系统
3. 群与子群
4. 阿贝尔群和循环群
5. 环与域
6. 格与布尔代数

1、运算及其性质

概念：

运算，封闭的，可交换的，可结合的，可分配的，吸收律，幂等的，幺元，零元，逆元，消去律

运算中的特殊元素

单位元（幺元）(Identity)

设*是A上二元运算， e_l， e_r, $e\in A$

若$\forall x\in A$，有$e_l*x=x$，称e_l为运算*的左幺元；

若$\forall x\in A$，有$x*e_r=x$，称e_r为运算*的右幺元

若e既是左幺元又是右幺元，称e为运算*的幺元

- $\forall x\in A$，有$e*x=x$，$x*e=x$

定理：设*是A上的二元运算，具有左幺元e_l，右幺元e_r，则$e_l=e_r=e$。

证明：$e_r = e_l * e_r = e_l$

推论：二元运算的幺元若存在则唯一。

证明：反证法。设有二个幺元e，e’。则e = e*e’ = e’。

零元（Zero）

设*是A上二元运算， θ_l， θ_r， $\theta \in A$，

若$\forall x \in A$，有$\theta_l * x = \theta_l$ ，称θ_l为运算*的左零元；

若$\forall x \in A$，有$x * \theta_r = \theta_r$，称θ_r为运算*的右零元；

若θ既是左零元又是右零元，称θ为运算*的零元。

- $\forall x \in A$，有 $\theta * x = x * \theta = \theta$

例:

a）〈Z，x〉， Z为整数集。

则幺元为1，零元为0。

b）〈℘（A），∪，∩〉

对运算∪， ∅是幺元， A是零元;

对运算∩， A是幺元 ，∅是零元。

c）〈N，+〉

有幺元0，无零元。

例：代数A=〈{a，b，c，d}， ＊〉用下表定义：

*	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	b	b	b	b
c	c	d	a	b
d	d	d	b	c

左幺元　　无

右幺元　　a

左零元　　a，b

右零元　　无

定理：设*是A上的二元运算，具有左零元θ_l，右零元θ_r，则$\theta_l = \theta_r = \theta$。

推论：二元运算的零元若存在则唯一。

逆元 (Inverse)

设*是A上的二元运算，e是运算*的幺元。

若x*y=e那对于运算*，x是y的左逆元，y是x的右逆元。

若x*y=e，y*x=e，则称x是y的逆元。若x唯一，则将它记为y^{-1}。

- 存在逆元(左逆无，右逆元）的元素称为可逆的（左可逆的，右可逆的）

例：

a）代数 〈N，+〉。 仅有幺元0，有逆元0。

b）A=〈{a，b，c}，*〉由下表定义：

*	a	b	c
a	a	a	b
b	a	b	c
c	a	c	c

b是幺元，

a的右逆元为c，无左逆元，

b的逆元为b，

C无右逆元，左逆元为a

c）$\forall x,y \in Z^{+}, x * y = lcm(x,y)$ （最小公倍数）

结合、交换、幂等 单位元：1 零元：无 逆元：1

定理：对于可结合运算 $\circ$，如果元素x有左逆元 l，右逆元r，则 $l=r=x^{-1}$。

证明： $l = l \circ e = l \circ (x \circ r) = (l \circ x) \circ r = e \circ r = r$

∴逆元存在，为r 。

引理：对于可结合运算 $\circ$，逆元若存在，则唯一。

证明： 若存在X的另一个逆元 r^1，则

$$r^1 = r^1 \circ e = r^1 \circ (x \circ r) = (r^1 \circ x) \circ r = e \circ r = r$$

消去律 (Cancellation Law)

已知<A，*>，若∀x，y，z∈A，有

(1) 若 $x*y = x*z$ 且 $x \neq \theta$，则 $y=z$；

(2) 若 $y*x = z*x$ 且 $x \neq \theta$，则 $y=z$；

则称*满足消去律。

例：(1) 整数集上的加法和乘法都满足消去律；

(2) $S=\{1,2,3\}$，$P(S)$ 的交、并运算不满足消去律。