图论

Graph Theory

内容提要

1. 图的基本概念
2. 图的连通性
3. 图的矩阵表示
4. 欧拉图与哈密顿图
5. 无向树与根树
6. 平面图

内容提要

1. 图的基本概念
2. 图的连通性
3. 图的矩阵表示
4. 欧拉图与哈密顿图
5. 无向树与根树
6. 平面图

3、图的矩阵表示

概念：

关联矩阵，邻接矩阵，可达矩阵

关联矩阵

无向图的关联矩阵（对图无限制）

无向图$G=\langle V, E\rangle$，$|V|=n$，$|E|=m$，令 m_{ij}为 v_i 与 e_j 的关联次数，称$(m_{ij})_{n\times m}$为G 的关联矩阵，记为$M(G)$。

性质

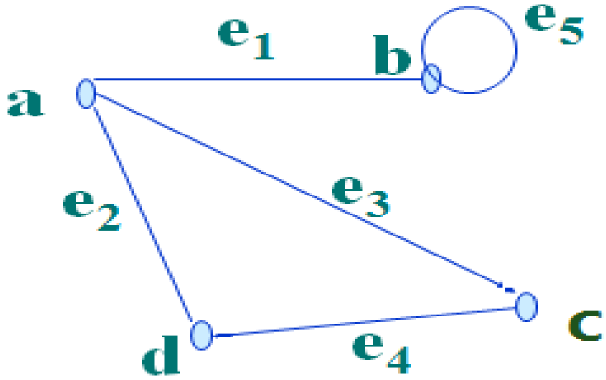
(1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 2 \quad (j = 1,2,\ldots, m)$

(2) $\sum_{j=1}^{m} m_{ij} = d(v_i) \quad (i = 1,2,\ldots, n)$

(3) $\sum_{i,j} m_{ij} = 2m$

(4) 平行边的列相同

例：



G

$$M(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

有向图的关联矩阵（无环有向图）

有向图$D=\langle V, E\rangle$，令则称 $(m_{ij})_{n\times m}$ 为D 的关联矩阵，记为$M(D)$。

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & v_i\text{为 } e_j\text{的始点}\\ 0, & v_i\text{与 } e_j\text{不关联}\\ -1, & v_i\text{为 } e_j\text{的终点}\end{cases}$$

性质

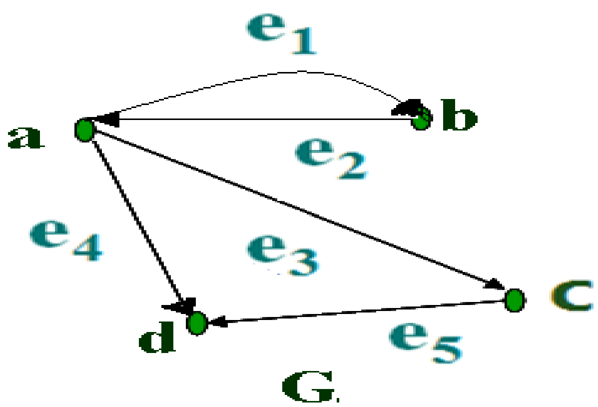
(1) $\sum_{i=1}^{n} m_{ij}=0 \qquad (j=1,2,\ldots,m)$

(2) $\sum_{j=1}^{m}(m_{ij}=1)=d^{+}(v_i), \quad \sum_{j=1}^{m}(m_{ij}=-1)=d^{-}(v_i), \quad i=1,2,\ldots,n$

(3) $\sum_{i,j} m_{ij}=0$

(4) 平行边对应的列相同

例：



$$M(G) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

邻接矩阵

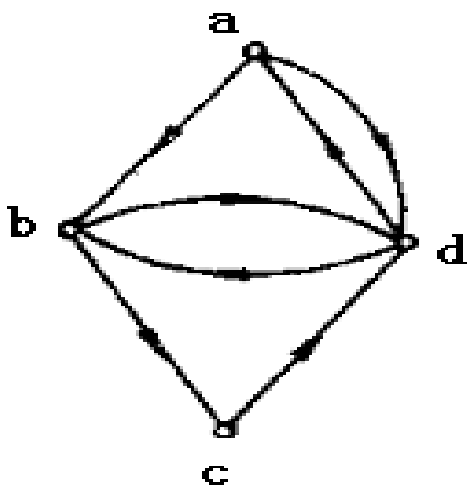
有向图的邻接矩阵

设D＝(V,E)是有向图， $V=\{v_1,\cdots.,v_n\}$，构造矩阵$A=[a_{ij}]$如下：
$\forall i,j(1\le i,j\le n)$

$$a_{ij}=\begin{cases} k & \text{若从 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 有 } k \text{ 条边} \\ 0 & \text{若从 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 没有边} \end{cases}$$

称A为图D的邻接矩阵。

例：



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

有向图的邻接矩阵性质

(1) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{+}(v_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n$

(2) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij}^{(1)} = d^{-}(v_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n$

(3) $\sum_{i,j} a_{ij}^{(1)} = m$ --- D 中长度为 1 的通路数

(4) $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(1)}$ --- D 中长度为 1 的回路数

邻接矩阵的含义

定理　设 A为有向图 D 的邻接矩阵，$V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$为顶点集，
则 A 的 l 次幂 A^l（$l\geq1$）中元素

$a_{ij}^{(l)}$ 为D中v_i 到v_j长度为 l 的通路数，其中

$a_{ii}^{(l)}$ 为v_i到自身长度为 l 的回路数，而

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{(l)}$ 为D中长度为 l 的通路总数，

$\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{(l)}$ 为D 中长度为 l 的回路总数。

推论　设$B_l=A+A^2+\cdots+A^l$（$l\geq1$），
则B_l中元素 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(l)}$ 为D中长度小于或等于 l 的通路数，

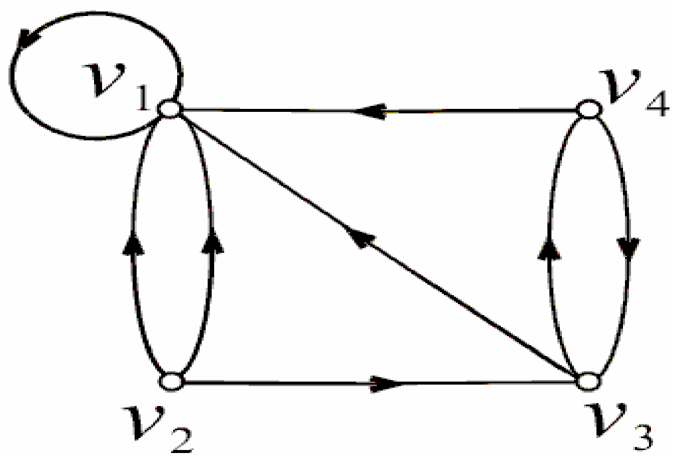
$\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^{(l)}$ 为D中长度小于或等于 l 的回路数。

实例

有向图D如图所示，求 A, A_2, A_3, A_4，并回答诸问题：

(1) D 中长度为1, 2, 3, 4的通路各有多少条？其中回路分别为多少条？

(2) D 中长度小于或等于4的通路为多少条？其中有多少条回路？



实例求解

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&0&1&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^2=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\3&0&0&1\\2&0&1&0\\2&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\4&0&1&0\\3&0&0&1\\3&0&1&0\end{bmatrix}\qquad A^4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\5&0&0&1\\4&0&1&0\\4&0&0&1\end{bmatrix}$$

(1) D中长度为1的通路为8条，其中有1条是回路。

D中长度为2的通路为11条，其中有3条是回路。

D中长度为3和4的通路分别为14和17条，回路分别为1与3条。

(2) D中长度小于等于4的通路为50条，其中有8条是回路。

可达矩阵

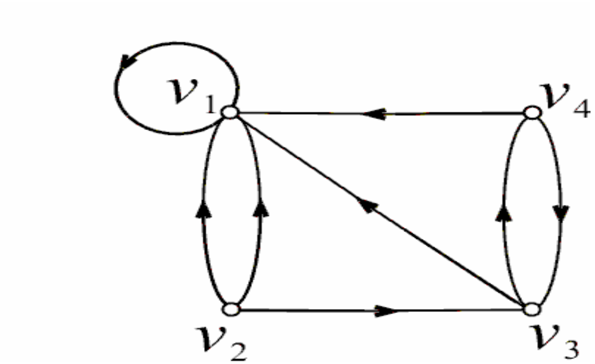
有向图的可达矩阵

设$D=\langle V, E\rangle$为有向图。 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，令

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \text{可达} v_j \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

称 $(p_{ij})_{n\times n}$ 为D的可达矩阵，记作$P(D)$，简记为P 。

例：求下图所示有向图 D 的可达矩阵。



$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$