代数结构

Algebra Structures

内容提要

1. 运算及其性质
2. 代数系统
3. 群与子群
4. 阿贝尔群和循环群
5. 环与域
6. 格与布尔代数

内容提要

1. 运算及其性质
2. 代数系统
3. 群与子群
4. 阿贝尔群和循环群
5. 环与域
6. 格与布尔代数

2、代数系统

概念：

代数系统，子代数，积代数，同态，同构。

代数系统的定义

代数系统 设A为非空集合，Ω为A上运算的集合,称<A,Ω >为一个代数系统.

– 当Ω ={f_1,…,f_n}是有限时,代数系统常记为 <A,f_1,…,f_n>；

– 当A有限时,称<A,Ω>是有限代数系统。

例：

(1) <N,＋>,<Z,＋,·>,<R,＋,·>是代数系统，+和·分别表示普通加法和乘法。

(2) <*P*(*S*),∪,∩,~>是代数系统，∪和∩为并和交，~为绝对补。

构成代数系统的成分：

- 集合（也叫载体，规定了参与运算的元素）
- 运算（这里只讨论有限个二元和一元运算）
- 代数常数（通常是与运算相关的特异元素：如单位元等）

例：

- 代数系统 $\langle Z,+,0\rangle$：集合Z, 运算+, 代数常数0
- 代数系统 $\langle P(S),\cup,\cap\rangle$：集合 $P(S)$, 运算 $\cup$ 和 $\cap$，无代数常数

如果两个代数系统中运算的个数相同，对应运算的元数相同，且代数常数的个数也相同，则称它们是同类型的代数系统。

例：

$V_1=\langle \mathrm{R}, +, \cdot, 0, 1\rangle$

$V_2=\langle M_n(\mathrm{R}), +, \cdot, \theta, E\rangle$, θ为 n 阶全0矩阵，E为 n 阶单位矩阵

$V_3=\langle P(B), \cup, \cap, \varnothing, B\rangle$

V_1, V_2, V_3是同类型的代数系统，它们都含有2个二元运算, 2个代数常数。

子代数与积代数

设$V=<S, f_1, f_2, \ldots, f_k>$是代数系统，$B$是$S$的非空子集，如果$B$对$f_1, f_2, \ldots, f_k$都是封闭的，且$B$和$S$含有相同的代数常数，则称$<B, f_1, f_2, \ldots, f_k>$是$V$的子代数系统，简称子代数。

例：

- N是<Z,＋>的子代数，N也是<Z,＋,0>的子代数。
- N−{0}是<Z,＋>的子代数，但不是<Z,＋,0>的子代数。

几个术语

(1) 最大的子代数：就是V本身；

(2) 最小的子代数：如果令V中所有代数常数构成的集合是 B，且B对V中所有的运算都是封闭的，则B就构成了V的最小的子代数；

(3) 最大和最小的子代数称为V 的平凡的子代数；

(4) 若B是S的真子集，则B构成的子代数称为V的真子代数。

例：

设V=<Z,+,0>，令 $nZ=\{nz \mid z\in Z\}$，n为自然数，则nZ是V的子代数。

当n=1和0时，nZ是V的平凡的子代数，其它的都是V的非平凡的真子代数。

积代数

设V_1=<A,∘>和V_2=<B,∗>是同类型的代数系统，∘和∗为二元运算，在集合$A\times B$上如下定义二元运算·，

$\forall$<a_1,b_1>,<a_2,b_2>$\in A\times B$，有　<a_1,b_1>·<a_2,b_2>=<$a_1\circ a_2$, $b_1 * b_2$>

称V=<$A\times B$,· >为V_1与V_2的，记作$V_1\times V_2$。这时也称V_1和V_2为V的因子代数。

定理

设V_1=<A,∘>和V_2=<B,∗>是同类型的代数系统，$V_1\times V_2$=<$A\times B$,·>是它们的积代数。

(1) 若∘ 和 ∗运算是可交换（可结合、幂等）的，则·运算也是可交换（可结合、幂等）的。

(2) 若 e_1 , e_2（θ_1 , θ_2）分别为∘和∗运算的单位元（零元），则<e_1,e_2>（<θ_1,θ_2>）是·的单位元（零元）

(3) 若 x 和 y 分别为∘和 ∗运算的可逆元素，则<x,y>是·运算的可逆元素，其逆元是<x^{-1},y^{-1}> 。

同态

同态

设$V_1=<A,\circ>$和$V_2=<B,*>$是同类型的代数系统，如果有映射 $f: A\rightarrow B$，对$\forall x, y\in A$ 有

$$f(x\circ y) = f(x)*f(y),$$

则称 f 是V_1到V_2的同态映射，简称 (Homomorphism) 。

特殊的同态

(1) f 如果是单射，则称为单同态（Monomorphism）。

(2) 如果是满射，则称为满同态 （Epimorphism），这时称V_2是V_1的同态像， 记作$V_1\sim V_2$。

(3) 如果是双射，则称为同构 （Isomorphism），也称代数系统V_1同构于V_2， 记作$V_1\cong V_2$ 。

(4) 如果$V_1=V_2$，则称作自同态（Endomorphism）。

实例

(1) 设V_1=<Z,+>， V_2=<Z_n,⊕>。其中Z为整数集，+为普通加法；$Z_n=\{0,1,\ldots,n-1\}$，⊕为模n加。令

$$f: \mathrm{Z}\to \mathrm{Z}_n,\ f(x)=(x)\bmod n$$

则 f 是V_1到V_2的满同态。

(2) 设V_1=<R,+>， V_2=<R*,·>。其中R和R*分别为实数集与非零实数集，+ 和 · 分别表示普通加法与乘法。令

$$f: \mathrm{R}\to \mathrm{R}^*,\ f(x)=\mathrm{e}^x$$

则 f 是V_1到V_2的单同态。

(3) 设V=<Z,+>，其中Z为整数集，+为普通加法。 $\forall a\in \mathrm{Z}$，令

$$f_a: \mathrm{Z}\to \mathrm{Z},\ f_a(x)=ax,$$

则f_a是V的自同态；当$a=\pm 1$时，称 f_a 为自同构；除此之外其他的 f_a 都是单自同态。