图论

Graph Theory

内容提要

1. 图的基本概念
2. 图的连通性
3. 图的矩阵表示
4. 欧拉图与哈密顿图
5. 无向树与根树
6. 平面图

内容提要

1. 图的基本概念
2. 图的连通性
3. 图的矩阵表示
4. 欧拉图与哈密顿图
5. 无向树与根树
6. 平面图

6、平面图

概念：

平面图，面，欧拉公式，Kuratoski定理

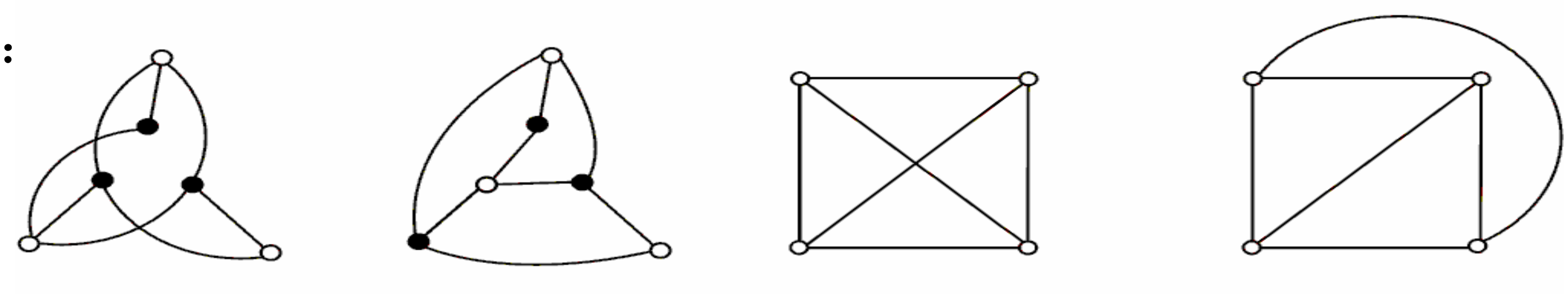
平面图的定义

平面图

设G =<V,E>是一个无向图，如果能够画在平面上，它的边恰在顶点相交，则称G是平面图。(或G能“嵌入平面”)

- 平面嵌入——画出的无边相交的平面图
- 非平面图——无平面嵌入的无向图

例：



(1)　　(2)　　(3)　　(4)

在图中，(2)是(1) 的平面嵌入，(4)是(3)的平面嵌入。

面与次数

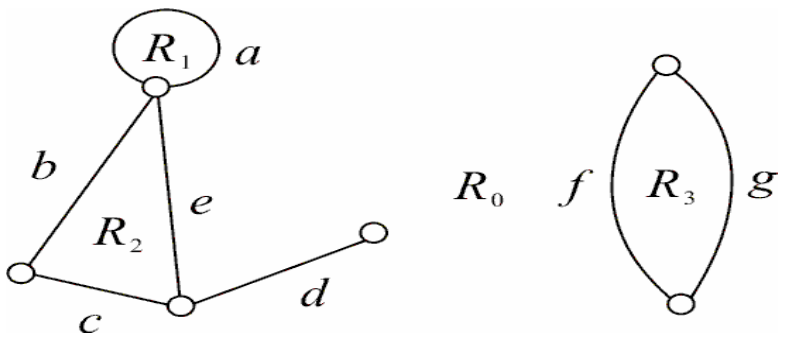
定义：

（1） G的面：由G的平面嵌入的边将平面化分成的区域。

（2） 面 R_i 的边界：包围R_i的回路的所有边。

（3） 面 R_i 的次数：R_i边界的长度，用$\deg(R_i)$表示。

例：



平面图有4个面，
$\deg(R_1)=1$，$\deg(R_2)=3$，
$\deg(R_3)=2$，$\deg(R_0)=8$。

请写各面的边界.

定理　　平面图中，面的次数之和等于其边数的两倍.

欧拉公式

欧拉公式

定理（欧拉公式）设G为n阶m条边r个面的连通平面图，则$n-m+r=2$。

推论（欧拉公式的推广）设G是具有 k（$k\geq2$）个连通分支的平面图，则$n-m+r=k+1$。

欧拉公式

定理（欧拉公式）设G为n阶m条边r个面的连通平面图，则$n-m+r=2$。

证明: （1）（非平凡）连通图不为零图;

（2）对边数 m 作归纳。

1) $m = 0$. 此时对应平凡图，即 $n = 1, r = 1$, 因而 $n-m+r = 1-0+1 = 2$.

2) 设 $m = k\ (k \geq 0)$ 成立，讨论 $m = k+1 \geq 1$。区分 G 是否是树。

(a) G为树。由 $m \geq 1, n \geq 2$可知，G至少含有2片树叶（由树的相关性质），设其中一片为 v，则$G' = G - v$ 仍连通，$m' = m - 1 = k$。由归纳假设 $n' - m' + r' = 2$，而$n' = n - 1$, $r' = r$, $m' = m - 1$。因而代入后 $n - 1 - (m - 1) + r = n - m + r = 2$。

(b) G不为树（因而含圈）。任取圈上一条边 e， 则 $G' = G - e$ 仍连通，且$m' = m - 1 = k$。由归纳假设 $n' - m' + r' = 2$，而$n' = n$, $r' = r - 1$, $m' = m - 1$。因而代入后 $n - (m - 1) + (r - 1) = 2$。

欧拉公式应用实例

（1）设G为连通的平面图，且$\deg(R_i)\geq l,\ l\geq 3$，则

$$\boldsymbol{m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)}$$

（2）设G为含k（k ≥1 ）个连通分支的平面图，$\deg(R_i)\geq l,\ l\geq 3$，则

$$m \leq \frac{l}{l-2}(n-k-1)$$

（3）设G为n（$n\geq 3$）阶m条边的简单平面图，则$m\leq 3n-6$.

（4）设G 为简单平面图，则 $\delta(G)\leq 5$。

欧拉公式应用实例

（1）设G为连通的平面图，且$\deg(Ri) \geq l$, $l \geq 3$，则 $m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$

证明：由前述定理，平面图中，面的次数之和等于其边数的两倍。因而

$$2m = \sum_{i=2}^{r} \deg(R_i) \geq lr$$

由欧拉公式 $r = 2 + m - n$

代入后得到 $2m \geq l(2 + m - n)$

整理之后得到 $m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)$

欧拉公式应用实例

（1）设G为连通的平面图，且$\deg(R_i) \geq l$, $l \geq 3$，则 $\boldsymbol{m \leq \frac{l}{l-2}(n-2)}$

由该性质可知 K_5, $K_{3,3}$ 都不是平面图。

- 对K_5，因为没有环和平行边，面的次数≥ 3，于是对边数 10 有下面的矛盾。

$$10 \leq \frac{3}{3-2}(5-2) = 9$$

- 对$K_{3,3}$，其最短的圈的长度是4，因而面的次数≥ 4，于是对边数 9 有下面的矛盾。

$$9 \leq \frac{4}{4-2}(6-2) = 8$$

欧拉公式应用实例

（2）设G为含k（k ≥1 ）个连通分支的平面图，$\deg(R_i)\ge l$, $l\ge3$，则 $m \le \frac{l}{l-2}(n-k-1)$

（3）设G为n（$n\ge3$）阶m条边的简单平面图，则$m\le 3n-6$.

证明：若G 含圈，则圈的长度至少是3（简单图），利用（2），注意k是连通分支数

$$m \le \frac{3}{3-2}(n-k-1) \le 3(n-2) = 3n-6$$

若G 不含圈，G是森林。则 $m = n - k \le 3n - 6$ ($n\ge3$)。

（4）设G 为简单平面图，则 $\delta(G)\le5$。

证明：如果$n \le 6$，则因为是简单图，结论显然成立。
如果$n \ge 7$，采用反证。假设 $\delta(G)\ge 6$。由握手定理得出下面的矛盾。

$$2m = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) \ge \sum_{i=1}^{n} \delta \ge \sum_{i=1}^{n} 6 = 6n$$

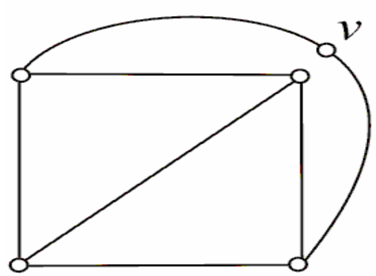
于是 $m \ge 3n$，与（3）矛盾。

KURATOSKI定理

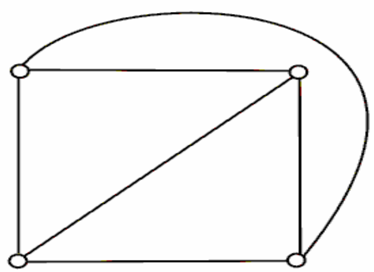
插入2度顶点 和 消去2度顶点

(1) 消去2度顶点v，见下图中，由(1) 到(2)

(2) 插入2度顶点v，见下图中，从(2) 到(1) .

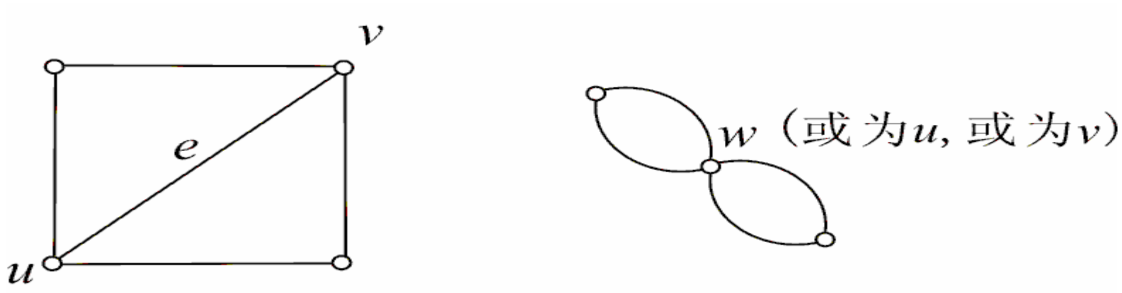


(1)



(2)

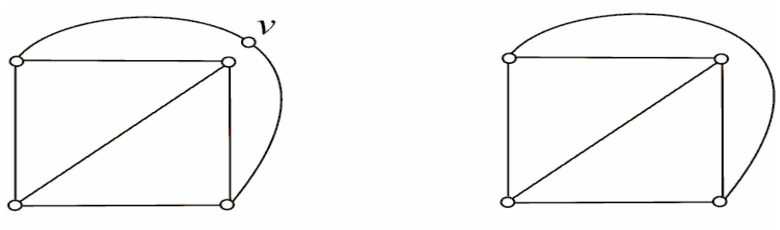
收缩边e，见下图所示。



图的同胚

若$G_1 \cong G_2$（即同构），或经过反复插入或消去2度顶点后所得$G'_1 \cong G'_2$，则称G_1与G_2同胚。

例：右边两个图同胚

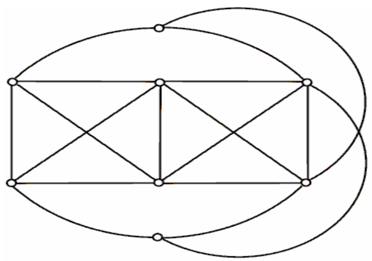


Kuratoski定理

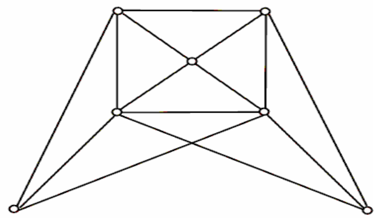
(1) G是平面图 ⇔ G中不含与K_5 或 $K_{3,3}$同胚的子图。

(2) G是平面图 ⇔ G中无可收缩为K_5 或 $K_{3,3}$的子图。

例：右侧所示图(1)与(2)均为非平面图。

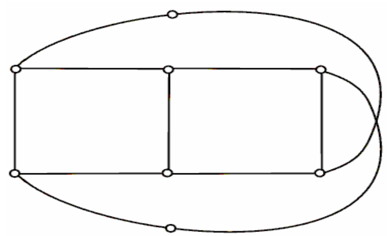


(1)

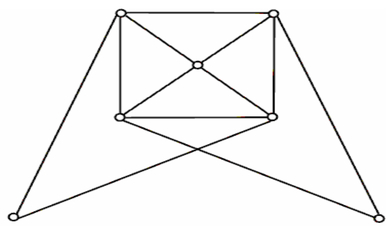


(2)

右图(3),(4)分别为原图(1), (2)的子图与$K_{3,3}$, K_5同胚。



(1)的子图 (3)



(2) 的子图(4)