1-2、 公式的真值

概念

赋值，公式求值函数，真值表，等值式，重言式，矛盾式，蕴含式

赋值（指派，解释）： 设∑是命题变元集合，则称函数v：∑→{1，0}是一个真值赋值。

A是一个公式，v是一个赋值，则A在赋值v下的值，记为v(A)。

1、若A为命题变元符号p，则v(A)= v(p);

2、若A为命题常元，则

$$v(A) = \begin{cases} 1 & 若A = \top \\ 0 & 若A = \bot \end{cases}$$

3、若A为否定式(¬B)，则

$$v(A)=\begin{cases}1 & 若v(B)=0\\0 & 若v(B)=1\end{cases}$$

4、若A为析取式(B∨C)，则

$$v(A)=\begin{cases}1 & 若v(B)=1或v(C)=1\\0 & else\end{cases}$$

5、若A为析取式(B∧C)，则

$$v(A)=\begin{cases}1 & 若v(B)=1且v(C)=1\\0 & else\end{cases}$$

6、若A为蕴含式(B→C)，则

$$v(A)=\begin{cases}0 & \text{若}\, v(B)=1\text{且}\, v(C)=0\\ 1 & else\end{cases}$$

7、若A为等价式(B↔C)，则

$$v(A)=\begin{cases}1 & \text{若}\, v(B)=v(C)\\ 0 & else\end{cases}$$

成真赋值：当$v(A)=1$时，称v满足A，记为$v \models A$

成假赋值：当$v(A)=0$时，称v不满足A，记为$v \not\models A$

例、$A=p\vee q$

$v(p)=1, v(q)=0$，　$v(A)=1$

$v(p)=0, v(q)=0$，　$v(A)=0$

真值表：公式A在其所有可能的赋值下所取真值的表，称为A的真值表。

- 若公式A中有n个不同变元$p_1, p_2, \ldots, p_n$，那么A共有2^n种不同的赋值。

例、

公式 $(p\wedge q)\rightarrow r$

p	q	r	$(p\wedge q)\rightarrow r$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	0	0	1

可满足的：公式A，若∃赋值v，使得v $\models$ A，则称A是可满足的。

不可满足的：若∀赋值v，使得v $\not\models$ A，则称A是不可满足的。

例、 $(p\wedge q)\rightarrow r$ 可满足的

$(p\wedge \neg p)$ 不可满足的

可满足性可扩充到公式集U

可满足的：公式集U，若存在一个赋值v，使得对所有公式A∈U，有 v ⊨ A，则称公式集U是可满足的。否则，U是不可满足的。

例、 $\{q \wedge \neg r, q \vee r\}$: 可满足的

$\{p \rightarrow q, \neg q, p\}$: 不可满足的

重言式、矛盾式

重言式（永真式） 任意赋值v， 有$v \models A$

矛盾式（永假式）任意赋值v， 有$v \not\models A$

例、$(p \wedge \neg p)$ 是矛盾式

$(p \vee \neg p)$ 是重言式

- A是永真的当且仅当$\neg$A是永假的。
- 若A是永真的，则A是可满足的；反之不对。
- 设A是公式，则A是矛盾式当且仅当A是不可满足的。

证明：　A是矛盾式$\Leftrightarrow$ $\forall$赋值v，有v $\not\models$ A

$\Leftrightarrow\forall$赋值v，有v(A)=0

$\Leftrightarrow$不存在赋值v，使得v(A)=1

$\Leftrightarrow$ A是不可满足的

总结

- 赋值
- 求值函数
- 真值表
- 重言式
- 矛盾式