2-5、关系的闭包

概念：

自反闭包 r(R)，对称闭包 s(R)， 传递闭包 t(R)

自反闭包 (Reflexive closure)

设R是A上的二元关系,如果有另一个关系R'满足:

①R'是自反的;

② $R' \supseteq R$;

③对于任何自反的关系R”,若 $R'' \supseteq R$, 则有 $R'' \supseteq R'$.

则称关系R'为R的自反闭包. 记为 r(R).

注: 类似地可定义对称闭包 s(R) 和传递闭包 t(R)。

定理：设R为A上的关系, 则有

(1) $r(R)=R\cup I_A$

(2) $s(R)=R\cup R^{-1}$

(3) $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$

特殊地，若$|A|=n$，则 $t(R)=R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n$

证明

证(1)　$r(R)=R\cup I_A$

将 $R\cup I_A$ 视为 R'

① $R\cup I_A$ 是自反的；

② $R\cup I_A \supseteq R$；

③ 若 R'' 是自反的且 $R''\supseteq R$，则 $R''\supseteq R\cup I_A$

由自反闭包的定义知：$r(R)=R\cup I_A$.

证明

证(2) $s(R)=R\cup R^{-1}$

将$R\cup R^{-1}$视为 R’

① $R\cup R^{-1}$是对称的；

② $R\cup R^{-1}\supseteq R$ ；

③ 若R” 是对称的且R” $\supseteq$R，则R” $\supseteq R\cup R^{-1}$

由对称闭包的定义知：$s(R)=R\cup R^{-1}$.

证(3) $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$

将$R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$视为 R'

① $R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$是传递的;

任取$<x,y>,<y,z>$, 则

$$<x,y>\in R\cup R^2\cup\ldots\wedge<y,z>\in R\cup R^2\cup\ldots$$

$$\Rightarrow \exists t\,(<x,y>\in R^t)\wedge\exists s(<y,z>\in R^s)$$

$$\Rightarrow \exists t\,\exists s\,(<x,z>\in R^t\circ R^s)$$

$$\Rightarrow \exists t\,\exists s\,(<x,z>\in R^{t+s})$$

$$\Rightarrow <x,z>\in R\cup R^2\cup\ldots$$

从而证明了$R\cup R^2\cup\ldots$是传递的.

② $R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots \supseteq R$；

③ 若R” 是传递的且R” $\supseteq$R，则R” $\supseteq R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$

用数学归纳法证明对任意正整数n 有$R^n \subseteq$ R” .

n=1时有$R^1=R \subseteq$ R” . 假设$R^n \subseteq$ R” 成立, 那么对任意的$<x,y>$

$$<x,y> \in R^{n+1}=R^n \circ R \Rightarrow \exists t\ (<x,t> \in R^n \wedge <t,y> \in R)$$

$$\Rightarrow \exists t\ (<x,t> \in R'' \wedge <t,y> \in R'') \Rightarrow <x,y> \in R''$$

这就证明了$R^{n+1} \subseteq$ R” . 由归纳法命题得证.

由传递闭包的定义知：$t(R)=R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$.

特殊地， 若$|A|=n$， 则 $t(R)=R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n$

证明思路 已知 $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots\cup R^n\cup R^{n+1}\cup\cdots$

只要证：对于m>n, 任取$<x,y>\in R^m$，则存在$p<m$, $<x,y>\in R^p$

任取$<x,y>\in R^m$,则存在 $a_1, a_2, \ldots a_i, \ldots a_j, \ldots a_{m-1}$,

$<x, a_1>, <a_1, a_2>, \ldots, <a_i, a_{i+1}>, \ldots, <a_j, a_{j+1}>, \ldots <a_{m-1}, y>\in R$,

将x视为a_0 , y视为a_m , 则存在$0\le i<j<m$, 使得 $a_i = a_j$, 令 $p = m-(j-i)$,

则$<x,y>\in R^p$， 得证。

例: 设A={1,2,3}, 在A上定义表示 R ={< 1,2> ,< 2,3>}.
求 r(R), s(R), t(R).

解: (1) $r(R)=R\cup I_A=\{<1,2>,<2,3>,<1,1>,<2,2>,<3,3>\}$.

(2) $s(R)=R\cup R^{-1}=\{<1,2>,<2,3>,<2,1>,<3,2>\}$.

(3) $t(R)=R\cup R^2\cup R^3=\{<1,2>,<2,3>,<1,3>\}$.

总结

- 自反闭包 r(R)
- 对称闭包 s(R)
- 传递闭包 t(R)