图论

Graph Theory

内容提要

1. 图的基本概念
2. 图的连通性
3. 图的矩阵表示
4. 欧拉图与哈密顿图
5. 无向树与根树
6. 平面图

内容提要

1. 图的基本概念
2. 图的连通性
3. 图的矩阵表示
4. 欧拉图与哈密顿图
5. 无向树与根树
6. 平面图

2、图的连通性

概念：

通路，回路，简单通路，简单回路（迹）初级通路（路径），初级回路（圈）

点连通，连通图，点割集，割点，边割集，割边

点连通度，边连通度

弱连通图，单向连通图，强连通图

二部图（二分图）

通路与回路

通路与回路

给定图G=<V, E>（无向或有向的），G中顶点与边的交替序列

$\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_l v_l$ 称为从v_0到v_l的通路，其中v_{i-1}，v_i 是 e_i 的端点；

若 $v_0 = v_l$，则称 Γ 为回路。

Γ 中的边数称为通路的长度。

分类：

- 简单通路与简单回路：所有边各异；
- 初级通路(路径)与初级回路(圈)：Γ 中所有顶点各异（$v_0 = v_l$ 除外），所有边也各异；
- 复杂通路与复杂回路：有边重复出现。

几点说明

- 表示法
  - ① 定义表示法
  - ② 只用边表示法
  - ③ 只用顶点表示法（在简单图中）
  - ④ 混合表示法

- 环：长为1的圈，其长度为1
- 两条平行边构成的圈长度为2
- 无向简单图中，圈长≥3
- 有向简单图中圈的长度≥2

通路与回路的长度

定理 在n阶图G中，若从顶点v_i到v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则从v_i到v_j存在长度小于或等于$n-1$的通路。

推论 在n阶图G中，若从顶点v_i到v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则从v_i到v_j存在长度小于或等于$n-1$的初级通路（路径）。

定理 在一个n阶图G中，若存在v_i到自身的回路，则一定存在v_i到自身长度小于或等于n的回路。

推论 在一个n阶图G中，若存在v_i到自身的简单回路，则一定存在长度小于或等于n的初级回路。

二部图

二部图

设 $G=<V,E>$为一个无向图，若能将 V分成 V_1和V_2

$$(V_1 \neq \varnothing,\quad V_2 \neq \varnothing, V_1 \cup V_2 = V，\ V_1 \cap V_2 = \varnothing)，$$

使得 G 中的每条边的两个端点都是一个属于V_1，另一个属于V_2，

则称 G 为二部图 (或称二分图、偶图等)，称V_1和V_2为互补顶点子集。

常将二部图G记为$<V_1,V_2,E>$。

特别地，若G是简单二部图，V_1中每个顶点均与V_2中所有的顶点相邻，则称G为完全二部图，记为 $K_{r,s}$，其中$r=|V_1|$，$s=|V_2|$。

注意，n 阶（n≥2）零图为二部图。

二部图的判别法

定理 无向图$G=<V,E>$（$|V|\geq 2$）是二部图 当且仅当 G中无奇圈。

例：由定理可知下列各图都是二部图，哪些是完全二部图？