

1-3、 等值演算

概念

等值式，基本等值式，等值演算

等值式：若等价式 $A \leftrightarrow B$ 是重言式，则称 A 与 B 等值，记作 $A \Leftrightarrow B$ 。

注意：

- \Leftrightarrow 与 \leftrightarrow 是两个完全不同的符号；
- 可用真值表可检查两个公式是否等值。

例：判断下列各组公式是否等值：

(1) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 与 $(p \wedge q) \rightarrow r$

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

结论： $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$

等值式例题

(2) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 与 $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow r$
0	0	0	1	1	1	0
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1

结论: $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ 与 $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ 不等值

基本等值式

1、双重否定律 $\neg\neg A \Leftrightarrow A$

2、幂等律 $A \vee A \Leftrightarrow A, A \wedge A \Leftrightarrow A$

3、交换律 $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A, A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

4、结合律 $(A \vee B) \vee C \Leftrightarrow A \vee (B \vee C),$
 $(A \wedge B) \wedge C \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$

5、分配律 $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C),$
 $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

6、德摩根律 $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
 $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

7、吸收律 $A \vee (A \wedge B) \Leftrightarrow A, A \wedge (A \vee B) \Leftrightarrow A$

基本等值式

8、零律

$$A \vee \top \Leftrightarrow \top, A \wedge \perp \Leftrightarrow \perp$$

9、同一律

$$A \vee \perp \Leftrightarrow A, A \wedge \top \Leftrightarrow A$$

10、排中律

$$A \vee \neg A \Leftrightarrow \top$$

11、矛盾律

$$A \wedge \neg A \Leftrightarrow \perp$$

12、蕴涵等值式

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

13、等价等值式

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$$

14、假言易位

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg B \rightarrow \neg A$$

15、等价否定等值式

$$A \leftrightarrow B \Leftrightarrow \neg A \leftrightarrow \neg B$$

16、归谬论

$$(A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \Leftrightarrow \neg A$$

特别提示：必须牢记这16组等值式，这是继续学习的基础

等值演算——由已知的等值式推演出新的等值式的过程。

置换规则（置换定理）

设 X 是公式 A 的子公式, $X \Leftrightarrow Y$ 。将 A 中的 X （可以是全部或部分 X ）用 Y 来置换, 所得到的公式 B , 则 $A \Leftrightarrow B$ 。

例：证明 $p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$

证 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r)$ （蕴涵等值式, 置换规则）

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r$ （结合律, 置换规则）

$\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee r$ （德摩根律, 置换规则）

$\Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$ （蕴涵等值式, 置换规则）

总结

- 等值式
- 基本等值式
- 置换定理
- 等值演算