

## 2-2 集合恒等式

概念：

集合恒等式，集合等式证明

# 集合恒等式

## 集合恒等式（算律）

1. 只涉及一个运算的算律：

交换律、结合律、幂等律

	$\cup$	$\cap$	$\oplus$
交换	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$	$A \oplus B = B \oplus A$
结合	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
幂等	$A \cup A = A$	$A \cap A = A$	

# 集合算律

## 2. 涉及两个不同运算的算律:

### 分配律、吸收律

	$\cup$ 与 $\cap$	$\cap$ 与 $\oplus$
分配	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$
吸收	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	

# 集合算律

## 3. 涉及补运算的算律:

德摩根律, 双重否定律

	$-$	$\sim$
德摩根律	$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$	$\sim(B \cup C) = \sim B \cap \sim C$ $\sim(B \cap C) = \sim B \cup \sim C$
双重否定		$\sim\sim A = A$

# 集合算律

## 4. 涉及全集和空集的算律:

补元律、零律、同一律、否定律

	$\emptyset$	$E$
补元律	$A \cap \sim A = \emptyset$	$A \cup \sim A = E$
零律	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \cup E = E$
同一律	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap E = A$
否定	$\sim \emptyset = E$	$\sim E = \emptyset$

# 集合证明题

证明方法：外延性原理、等式置换法

外延性原理证明的书写规范 (以下的 $X$ 和 $Y$ 代表集合公式)

(1) 证 $X \subseteq Y$

任取 $x$ ,  $x \in X \Rightarrow \dots \Rightarrow x \in Y$

(2) 证 $X = Y$

方法一 分别证明  $X \subseteq Y$  和  $Y \subseteq X$

方法二

任取 $x$ ,  $x \in X \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \in Y$

注意：在使用方法二时，必须保证每步推理都是充分必要的。

# 集合等式的证明

方法一：外延性原理

**例1：** 证明  $A \cup (A \cap B) = A$  （吸收律）

证 任取  $x$ ,

$$\begin{aligned} & x \in A \cup (A \cap B) \\ \Leftrightarrow & x \in A \vee x \in A \cap B \\ \Leftrightarrow & x \in A \vee (x \in A \wedge x \in B) \\ \Leftrightarrow & x \in A \end{aligned}$$

因此得  $A \cup (A \cap B) = A$ .

## 集合等式的证明

例2: 证明  $A-B = A \cap \sim B$

证 任取 $x$ ,

$$x \in A-B$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$$

$$\Leftrightarrow x \in A \wedge x \in \sim B$$

$$\Leftrightarrow x \in A \cap \sim B$$

因此得  $A-B = A \cap \sim B$



# 等式置换法

方法二：等式置换法（利用集合恒等式）

**例3**：证明  $(A-B) \cup B = A \cup B$

$$\begin{aligned}\text{证： } & (A-B) \cup B \\ &= (A \cap \sim B) \cup B \\ &= (A \cup B) \cap (\sim B \cup B) \\ &= (A \cup B) \cap E \\ &= A \cup B\end{aligned}$$

# 等式置换法

**例4：** 已知 $A \oplus B = A \oplus C$ ，证明  $B = C$ .

证： 已知 $A \oplus B = A \oplus C$ ，所以有

$$A \oplus (A \oplus B) = A \oplus (A \oplus C)$$

$$\Rightarrow (A \oplus A) \oplus B = (A \oplus A) \oplus C$$

$$\Rightarrow \emptyset \oplus B = \emptyset \oplus C$$

$$\Rightarrow B = C$$

# 等式置换法

**例4 : 证明  $(A-B) \cup B = A \cup B$**

$$\begin{aligned}\text{证: } & (A-B) \cup B \\ &= (A \cap \sim B) \cup B \\ &= (A \cup B) \cap (\sim B \cup B) \\ &= (A \cup B) \cap E \\ &= A \cup B\end{aligned}$$

# 总结

- 集合恒等式
- 集合等式证明