第五部分 图论

习题十四

14-4、

（1）写出图14.18（a）中顶点v_1的邻域N（v_1）与闭邻域$\bar{N}$（v_1）。

解：

$N(v_1)=\{v_2, v_3, v_4\}$

$\bar{N}(v_1)=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

14-6、

（1）设n阶图G中有m条边，证明：$\delta(G)\le 2m/n\le\Delta(G)$。

证明：

设$V(G)=\{v_1, v_2, ..., v_n\}$，由握手定理得

$$2m=\sum_{i=1}^{n}d(v_i)$$

又

$$n\delta(G)\le\sum_{i=1}^{n}d(v_i)\le n\Delta(G)$$

由以上两个公式整理可得：$\delta(G)\le 2m/n\le\Delta(G)$

所以可以证明结论成立。

14-8、设无向图中有6条边，3度与5度顶点各一个，

其余的都是2度顶点，问该图有几个顶点。

解：

设顶点数为n，由握手定理可知

2m=12=（3+5）*1+2*(n-2)

所以可得：n=4

14-12、设G是n阶无向简单图，$\bar{G}$为它的补图，

已知$\Delta(G)=k_1, \delta(G)=k_2$，求$\Delta(\bar{G}), \delta(\bar{G})$。

解：

$\Delta(\bar{G}) = n-1-\delta(G) = n-1-k_2$

$\delta(\bar{G}) = n-1-\Delta(G) = n-1-k_1$

14-19、设G是n阶自补图，证明$n=4k$或$n=4k+1$，其中k为整数。

证明：

由$\bar{G} \cong G$，它们的边数相等，设为m

又由于$G \cup \bar{G} = K_n$，K_n有$n(n-1)/2$条边

所以$m+m=2m=n(n-1)/2$

即:$4m=n(n-1)$

又因为n与n−1互素，

所以n或n−1必能被4整除，

即必有n=4k或n-1=4k

即：n=4k或者n=4k+1，其中$k \ge 1$

14-21、无向图G如图14.19所示

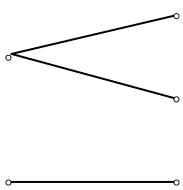
（2）求G的点连通度K(G)和边连通度λ(G)。

解：因为既有割点又有桥，

所以K(G)=λ(G)=1

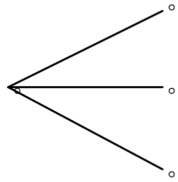
14-25、画出5阶3条边的所有非同构的无向简单图

解：

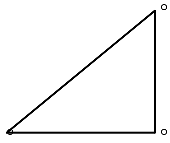


（1）

（2）



（3）



（4）

14-29、设G是n阶n+1条边的无向图，证明G中存在顶点v，使得$d(v) \geq 3$。
证明：
假设结论不成立，则：
$\forall v \in V(G)$，均有$d(v) \leq 2$，
则由握手定理可得
$2n+2=2m \leq 2n$，其中m为边数
显然假设是不成立的。
所以原结论正确。

14-32、试求彼得松图的点连通度K和边连通度λ。
解：
$K = \lambda = 3$

14-34、证明：n（$n \geq 2$）阶简单连通图G中至少有两个顶点不是割点。
证明：
首先证明一下两个命题：
(1)悬挂点（即度为1的顶点）不是割点
(2)设G为n阶无向连通图，则在G中任何两个不同顶点之间加一条新边，
所得n阶图G'中的割点数小于或者等于G中的割点数
因为G连通，故G有生成树，设T为G中一棵生成树，
由于$n \geq 2$，所以T至少有两片树叶，由命题（1）可知，
T至少有两个顶点不是割点，
当将T加边还原成G时，由命题（2）可知，G至少有两个点不是割点
故结论成立。

14-39、若无向图G恰有两个奇度顶点，证明这两个奇度顶点毕相连通。

证明：

假设G中有两个奇度顶点u和v，

若u和v不相连通，即他们之间无通路，

则，u和v处于G的不连通分支中。

设u在G_1中，v在G_2中，G_1，G_2是G的连通分支，

由于G中恰有两个奇度顶点，

因而当G_1，G_2作为独立的图时，均有一个奇度顶点，

这与握手定理的推论相矛盾，

所以假设不成立，原结论正确。

14-43、有向图 D 如图 14.22 所示：

（2）求 a 到 d 的短程线和距离 d<a, d>

（4）判断 D 是哪类连通图

解：

（2）a 到 d 的短程线为 aed

距离 d<a, d>=2

（4）D 中存在经过每个顶点的通路 aebdc，但是不存在经过每个顶点的回路，所以 D 是单向连通图。

14-45、有向图D如14.23所示，求：

（1）v_2到v_5长度为1，2，3，4的通路数

（3）D中长度为4的通路数（含回路）

（5）写出D的可达矩阵。

解：

D的邻接矩阵的前4次幂为：

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\end{bmatrix}\quad A^2=\begin{bmatrix}0&1&0&1&0\\0&0&0&0&2\\0&1&0&1&0\\0&0&0&0&2\\2&0&2&0&0\end{bmatrix}A^3=\begin{bmatrix}2&0&2&0&0\\0&2&0&2&0\\2&0&2&0&0\\0&2&0&2&0\\0&0&0&0&4\end{bmatrix}A^4=\begin{bmatrix}0&0&0&0&4\\4&0&4&0&0\\0&0&0&0&4\\4&0&4&0&0\\0&4&0&4&0\end{bmatrix}$$

（1）v_2到v_5长度为1，2，3，4的通路数分别为$a^{(1)}=0$条，$a^{(2)}=0$条，$a^{(3)}=0$条，$a^{(4)}=0$条；

(3)D中长度为4的通路数为12条。

（5）D是强连通的，所以可达矩阵为元素全为1的5阶方阵。

14-46、设有向图$D=<v,E>$其中$V=\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$
其邻接矩阵为

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ 试求D中各顶点的入度和出度。

解：

V_1的入度为3，出度为0

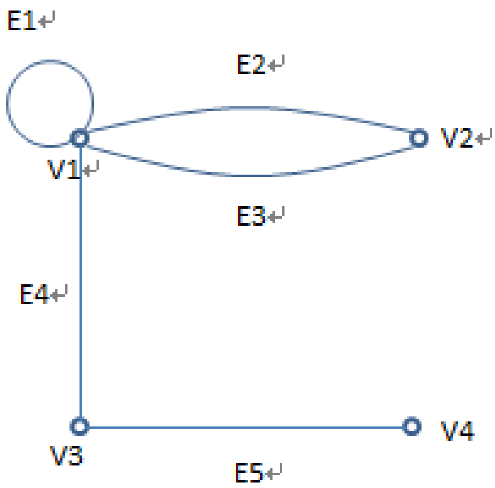
V_2的入度为1，出度为2

V_3的入度为1，出度为3

V_4的入度为2，出度为2

14-47、设无向图 G=<V,E>，其中 V={v1,v2,v3,v4},E={e1,e2,e3,e4,e5},其关联矩阵为 M（G）=$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ，试在同构意义下画出 G 的图形。

解：



习题十五

15-1、判断图中哪些是欧拉图？对不是欧拉图的至少要加多少条边才能成为欧拉图？

解：

a、c 是欧拉图，b、d 变为欧拉图均至少加两条边。

15-2、判断下列命题的真假

（3）当r，s为正偶数时，完全二部图$K_{r,s}$是欧拉图。

解：

是真命题；

当r，s都是正偶数时，$K_{r,s}$连通并且每个顶点的度数不是r就是s，都是偶数

由定理15.1可以知道该结论是成立的。

15-6、证明：若有向图 D 是欧拉图，则 D 是强连通的。

证明：

因为 D 为欧拉图，多以 D 中存在欧拉回路，

欧拉回路是经过每条边恰好一次行遍历所有顶点的简单回路，

由定理 14.8 可知欧拉图是强连通图。

15-9、设G是无向连通图，证明若G中有桥或割点，

则G不是哈密顿图。

证明：

（1）设V是连通图G中的一个割点，则$V' = \{v\}$为G中的点割集，

$p(G-V') \geq 2 > 1 = |V'|$,有定理15.6可知G不是哈密顿图。

（2）设e=（u，v）为G中的一个桥，若u，v都是悬挂点，则G为

K_2不是哈密顿图。

若u，v至少有一个不是悬挂点，比如u，$d(u) \geq 2$,由于e与u关联，e为桥，

所以G-u至少产生两个连通分支，故u为G中的割点。由（1）可知，

G不是哈密顿图。

15-14、今有n个人，已知他们中的任何二人合起来认识其余的n-2个人，

证明：当$n \geq 3$时，这n个人能排成一列，使得任何两个相邻的人都相互认识。

而当$n \geq 4$时，这n个人能排成一个圆圈，使得每个人都认识旁边的人。

证明：

做n阶无向简单图=$\langle V, E\rangle$, $V=\{v \mid v$为此群中的成员$\}$，

$E=\{(u, v) \mid u, v \in V, u \neq v$, 且u与v认识$\}$

由已知条件，$\forall u, v \in V$，均有：

$d(u)+d(v) \geq n-2$

对u和v认识进行讨论：

（1）若u与v认识，则根据定理可知

$d(u)+d(v) \geq n-2+2=n$

（2）若u与v不认识，则$\forall w \in V$，$w \neq u$，$w \neq v$，u与v必与w都认识。

否则，如果u与w不认识，则v，w都不认识u，于是v与w合起来至多

认识其余的n-3个人，这与已知条件矛盾，

因此，$d(u)+d(v) \geq 2(n-2)$

当$n \geq 3$时，有$2(n-2) \geq n-1$

当$n \geq 4$时，有$2(n-2) \geq n$

于是，当$n \geq 3$时，由定理可知G中存在哈密顿通路，

所有的人在按通路中的顺序排成一列，满足要求。

当$n \geq 4$时，由定理可知G中存在哈密顿回路，

所有人按在回路中的顺序围成的圆圈满足要求。

15-18、设G为n（$n\geq3$）阶无向简单图，边数m=(n-1)(n-2)/2+2,
证明：G是哈密顿图，再举例说明当(n-1)(n-2)/2+1时，G不一定是哈密顿图。
证明：
（1）假设$\exists$u，$v\in V(G)$,均有$d(u)+d(v)\leq n-1$成立，
则对于图$G'=G-\{u，v\}$，G'的边数

$$
\begin{aligned}
m' &\geq m-(n-1)\\
&=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2-(n-1)\\
&=\frac{1}{2}((n-1)(n-2)+4-2(n-1))\\
&=\frac{1}{2}(n^2-5n+6+2)\\
&=\frac{1}{2}(n-2)(n-3)+1
\end{aligned}
$$

但是G'是$n-2$阶简单图，应有
$m'\leq\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$成立，
所以可以知道假设不成立，
故对于$\forall$u，$v\in V(G)$,均有$d(u)+d(v)\geq n$成立
所以G为哈密顿图。
（2）举反例说明，当$m=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$时，G不一定为哈密顿图。
如：在n−1阶完全图K_{n-1}（$n\geq2$）的外面放置一个顶点v_n，让v_n与K_{n-1}
上任意一个顶点v_i（$1\leq i\leq n-1$）相邻，这样得到一个n阶无向简单图G_n。
G_n的边数为$m=K_{n-1}$的边数$+1=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+1$,
显然G_n不是哈密顿图。

习题十六

16-2、一棵无向树 T 有 5 片叶子，3 个 2 度分支点，其余的分支点都是 3 度顶点，问 T 有几个顶点？
解：

设 3 度顶点为 x 个，则阶数 n=5+3+8=8+x，边数 m=7+x，
由握手定理可得：
2m=14+2x=5*1+3*2+3x=11+3x
解得：x=3；
所以 T 的顶点个数为：8+3=11。

16-5、n（n 大于 3）阶无向树 T 的最大度△（T）至少为几？最多为几？
证明：
因为无向树T都是简单图，所以$\Delta(T) \le n-1$,
当$n \ge 3$时T的度数可以列为：
1,1，. . . , 1, 1, (n−1) ;
1,1，. . . , 1, 2, (n−2) ;
. . . . . .
1,2，. . . , 2, 2, 2.
由以上的度数列可以知道$2 \le \Delta(T) \le n-1$;
所以$\Delta(T)$的最大度为$n-1$，最小为2。

16-7、证明：n（n 大于等于 2）阶无向树不是欧拉图。
证明：
当 n 大于等于 2 时，无向树 T 至少有 2 片叶子，树的叶子是奇度顶点，
所以 T 不能构成欧拉图。

16-16、设 e 是无向连通图 G 中的一条边，e 既不是环、也不是桥。证明存在 G 的生成树含 e 作为树枝，又存在生成树以 e 作为弦。
证明：
由于 e 不是桥，所以 e 必在某些圈中出现，
又 e 不是环，所以 e 所在的圈的长度均大于或者等于 2，
1）在用破圈法（即有圈就在圈上删除一条边的方法）生成生成树时，无论 e 在哪个圈中出现，删除一条边时都不删除 e，从而，生成树 T 中必含 e 作为树枝。
2）在用破圈法生成生成树时，找到一个含 e 的圈 C，将 e 从 C 中删除，当生成树 T 生成时，T 中不含 e，从而 e 就形成了 T 的弦。

16-23、已知 n 阶 m 条边的无向图 G 是 k 棵树组成的森林，证明：m=n-k

设k棵小树分别为：$T_{1,}\ T_2 \ldots T_k, T_i$的阶数为$n_i$，边数为$m_i$，$i=1,2,\ldots k$

所以有：$\sum_{i=1}^{k} m_i = \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1) = \sum_{i=1}^{k} n_i - k$成立

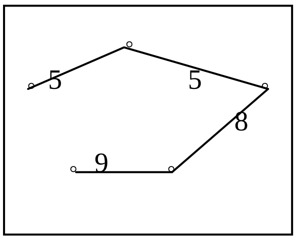
所以：$m = n - k$

所以结论成立。

16-25、求图 16.17 中两个带权图的最小生成树。

解：该图的最小生成树为：W（T）=27

最小生成树：



16-29、设 G 为 n（n 大于等于 5）阶简单图，证明 G 或者 $\bar{G}$ 中必含圈。

证明：

反证法：

由于n阶简单图G与它的补图$\bar{G}$的边数和$m + m' = \frac{n(n-1)}{2}$,

因此G和$\bar{G}$中至少有一个边数大于等于$\frac{n(n-1)}{4}$,

不妨设G的边数大于等于$\frac{n(n-1)}{4}$。

假设G中不含圈，

设G有s（$s \geq 1$）个连通分支，每个连通分支都是树，

因而$m_i = n_i - 1$，$i = 1,2$，⋯，s，m_i，n_i分别为G_i的边数和阶数

于是：$m = \sum_{i=1}^{s} m_i = \sum_{i=1}^{s} n_i - s \leq n\text{-}1$

得不等式：$\frac{n(n-1)}{4} \leq m \leq n\text{-}1$

整理得：$n^2 - 5n + 4 \leq 0$

解得：$1 \leq n \leq 4$，这与$n \geq 5$矛盾。

所以假设不成立，可证得G或者$\bar{G}$中必含圈。

16-36、设 T 是由 t 片树叶的 2 叉正则树，证明 T 有 2t-1 个顶点。
解：
设 T 有 n 个顶点和 m 条边，根据题设设书的性质可得：
m=2(n-t)　　　(1)
m=n-1　　　　(2)
解得：n=2t-1

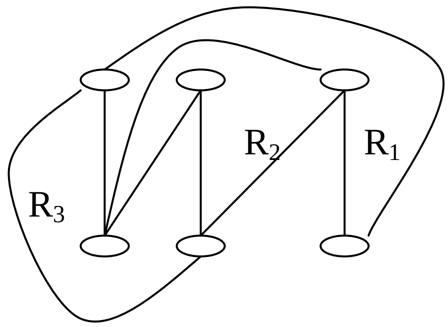
16-37、画一棵权为 3,4,5,6,7,8,9 的最优二叉树，并计算出它的权。
解：
W（T）=116

16-39、用图 16-20 的 2 叉树产生一个二元前缀码。
解：
产生的前缀码为：
{01,001,0001,0000,10,110,111}

16-41、设 7 个字母在通讯中出现的频率如下：a 35%，b:20%；c:15%；d:10%；e:10%；f:5%；g:5%用哈弗曼编码求传输它们的前缀码，要求画出最优树，指出每个字母对应的编码，并指出传输 10^n（n 大于等于 2）个按照上述频率出现的字母需要多少个二进制数字。
解：
a 的哈弗曼编码为：10
b 的哈弗曼编码为：01
c 的哈弗曼编码为：101
d 的哈弗曼编码为：100
e 的哈弗曼编码为：001
f 的哈弗曼编码为：0001
g 的哈弗曼编码为：0000
传输 10^n 个按照上述频率出现的字母需要的二进制数字为：
（2*35%+2*20%+3*15%+3*10%+3*10%+3*10%+4*%%+4*5%）*10^n =2.55*10^n

习题十七

17-2、求出 17.11（a）所示各平面图的一个平面嵌入，并验证各面次数之和等于边数的两倍。
解：
该平面图的平面嵌入为：



$$\deg(R_0)=\deg(R_1)=\deg(R_2)=\deg(R_3)=4$$

$$\sum_{i=0}^{3}\deg(R_i)=16=2m,(\text{其中m}=8)$$

17-7、证明图 17.14（a）所示的图是极大平面图。
证明：
由 17.14（a）的平面嵌入可知，每个面的次数均为 3，由定理 17.15 可知，他们都是极大平面图。

17-10、验证图 17.16（a）所示平面图满足欧拉定理。
解：
根据图中信息可得：图中有 n=8 个顶点，m=12 条边，r=6 个面，
所以 n-m+r=2，满足欧拉公式。

17－12、利用定理17.10证明K_5不是平面图。

证明：

K_5是阶数n=5、边数m=10的简单无向图，

若它是平面图，有定力17.10可知，

应该有$10=m\le 3n-6=9$矛盾。

所以原结论成立。

17－15、设G是n阶m条边的简单平面图，已知m<30,证明$\delta(G)\le 4$。

证明：

若$n\le 5$，结论显然为真。

假设当$n\ge 6$时，有$\delta(G)\ge 5$成立，

则由握手定理和定理17.10可得

$2m\ge 5n$

$m\le 3n-6$

解得：$m\ge 30$，这与题目中的已知矛盾，

所假设不成立。

故当$n\ge 6$时，$\delta(G)\le 4$成立。

综上所述，题目中的结论成立。

17-17、证明图 17.18（b）所示的图为非平面图。

证明：

因为图（b）中含与$K_{3,3}$同胚的子图，

所以该图为非平面图。

a 中含子图 K_5, c 中含子图 $K_{3,3}$