代数结构

Algebra Structures

内容提要

1. 运算及其性质
2. 代数系统
3. 群与子群
4. 阿贝尔群和循环群
5. 环与域
6. 格与布尔代数

内容提要

1. 运算及其性质
2. 代数系统
3. 群与子群
4. 阿贝尔群和循环群
5. 环与域
6. 格与布尔代数

4、阿贝尔群和循环群

概念：

阿贝尔群(交换群)，循环群, 生成元

阿贝尔 (Abel) 群

若群G中的运算是可交换的，则称G为交换群或阿贝尔 群。

例：（1）$<Z,+>$和$<R,+>$，$<Z_n,\oplus>$、Klein四元群均是阿贝尔群。

（2）n阶($n\geq 2$)实可逆矩阵集合关于矩阵乘法构成的群 不是 阿贝尔群。

循环群（Cyclic group）

设G是群，若存在$a \in G$使得

$$G=\{a^k \mid k \in Z\}$$

则称G是循环群，记作$G=\langle a \rangle$，称 a 为G 的生成元.

循环群的分类

(1) n 阶循环群: 设$G=\langle a \rangle$是循环群，a是n 阶元，则

$$G = \{ a^0=e, a^1, a^2, \ldots , a^{n-1} \}$$ （注意$|G| = |a| = n$）

(2) 无限循环群: a 是无限阶元，则

$$G = \{ a^0=e, a^{\pm 1}, a^{\pm 2}, \ldots \}$$

循环群的生成元

设G=<a>是循环群。

(1) 若G是无限循环群，则G只有两个生成元，即a和a^{-1} 。

(2) 若G是 n 阶循环群，则对于任何小于n且与 n 互质的数$r\in\{0,1,\ldots,n\text{-}1\}$，

a^r是G的生成元。这样的r共有$\phi(n)$个，因而G共有$\phi(n)$个生成元。

证明（思路）：

（1） 容易说明a^{-1}也是生成元。设b也是生成元。

则有$a=b^t, b=a^m$,因而

$a=b^t=(a^m)^t=a^{mt}$,从而$a^{mt-1}=e$

因为G是无限循环群，必有$mt-1=0$，从而$m=t=1$或$m=t=-1$。

（2）利用以下性质： 若r与n互素，则存在整数u,v,满足$ur+vn=1$。

实例

(1) 设$G=\{e, a, \ldots , a^{11}\}$是12阶循环群，小于12且与12互素的数是1, 5, 7, 11（$\phi(12)=4$）。可知 a, a^5, a^7 和 a^{11}是G的生成元。

(2) 设$G=\langle Z_9,\oplus\rangle$是模9的整数加群，小于9且与9互素的数是 1, 2, 4, 5, 7, 8（ $\phi(9)=6$ ）。可知G的生成元是1, 2, 4, 5, 7和8。

(3) 设$G=3Z=\{3z \mid z\in Z\}$，G上的运算是普通加法。那么G只有两个生成元：3和-3.

循环群的子群

设$G=\langle a\rangle$是循环群。

(1) 设$G=\langle a\rangle$是循环群，则G的子群仍是循环群；

(2) 若$G=\langle a\rangle$是无限循环群，则G的子群除$\{e\}$以外都是无限循环群；

(3) 若$G=\langle a\rangle$是n阶循环群，则对n的每个正因子d，G恰好含有一个d 阶子群。

实例

(1) G=$\langle Z,+\rangle$是无限循环群，其生成元为1和-1. 对于自然数 $m \in N$，1的m次幂是m，m生成的子群是mZ，$m \in$N。即

$\langle 0\rangle = \{0\} = 0Z$

$\langle m\rangle = \{mz \mid z \in Z\} = mZ$，　$m>0$

(2) $G=Z_{12}$是12阶循环群。12正因子是1,2,3,4,6和12，G 的子群:

1阶子群　$\langle 12\rangle=\langle 0\rangle=\{0\}$

2阶子群　$\langle 6\rangle=\{0,6\}$

3阶子群　$\langle 4\rangle=\{0,4,8\}$

4阶子群　$\langle 3\rangle=\{0,3,6,9\}$

6阶子群　$\langle 2\rangle=\{0,2,4,6,8,10\}$

12阶子群　$\langle 1\rangle=Z_{12}$