2-4、关系的性质

概念：

自反的, 反自反的, 对称的, 反对称的, 传递的

注意：讨论关系性质时，均假定R为某个集合A上的二元关系，即$R \subseteq A \times A$.

自反的 Reflexive

若 $\forall x \in A$，都有$<x,x> \in R$, 则称 R 是自反的.

反自反的 Anti-Reflexive

若 $\forall x \in A$，都有$<x,x> \notin R$, 则称 R 是反自反的.

实例：$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$$

$$R_2=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>\}$$

$$R_3=\{<1,3>\}$$

R_2 自反，R_3 反自反，R_1既不是自反的也不是反自反的.

对称的 Symmetric

对任意x,y∈A,满足，若 <x,y>∈R,则<y,x>∈R

反对称的 Anti-symmetric

对任意x,y∈A,满足，若 <x,y>∈R 且 <y,x>∈R,则x=y

例：设$A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3和R_4都是A上的关系, 其中

$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$，$R_2=\{<1,1>,<1,2>,<2,1>\}$

$R_3=\{<1,2>,<1,3>\}$，$R_4=\{<1,2>,<2,1>,<1,3>\}$

R_1：对称和反对称； R_2：只有对称；R_3：只有反对称；

R_4：不对称、不反对称

传递的　Transitive

对任意的$x,y,z \in A$, 满足:

若$<x,y> \in R$ 且 $<y,z> \in R$, 则$<x,z> \in R$,

则称R是传递的.

例：　设 $A=\{1,2,3\}$, R_1, R_2, R_3是A上的关系, 其中

$$R_1=\{<1,1>,<2,2>\}$$

$$R_2=\{<1,2>,<2,3>\}$$

$$R_3=\{<1,3>\}$$

R_1和R_3是A上的传递关系, R_2不是A上的传递关系.

关系性质成立的充要条件

定理 设R为A上的关系, 则

(1) R 在A上自反当且仅当 $I_A \subseteq R$

(2) R 在A上反自反当且仅当 $R \cap I_A = \varnothing$

(3) R 在A上对称当且仅当 $R = R^{-1}$

(4) R 在A上反对称当且仅当 $R \cap R^{-1} \subseteq I_A$

(5) R 在A上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

(5) R 在A上传递当且仅当 $R \circ R \subseteq R$

必要性. 任取$<x,y>$有

$$<x,y> \in R \circ R$$

$$\Rightarrow \exists t\,(<x,t> \in R \wedge <t,y> \in R)$$

$$\Rightarrow <x,y> \in R$$

所以 $R \circ R \subseteq R$

充分性.

任取$<x,y>,<y,z> \in R$, 则

$$<x,y> \in R \wedge <y,z> \in R$$

$$\Rightarrow <x,z> \in R \circ R \ \Rightarrow <x,z> \in R$$

所以 R 在 A上是传递的

总结

- 自反的, 反自反的
- 对称的, 反对称的
- 传递的