1-4、析取范式与合取范式

概念：

文字，析取范式，极小项，主析取范式，

合取范式，极大项，主合取范式

文字 设A∈∑（命题变元集），则A和 ¬ A都称为命题符号A的文字，其中前者称为正文字，后者称为负文字。

析取范式

形如

$$A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n \quad (n \geq 1)$$

的公式称为析取范式，其中$A_i(i=1,\ldots,n)$是由文字组成的合取式。

例：求$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)$的析取范式。

解：$\neg(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)$

$\Leftrightarrow (\neg(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)) \wedge ((p \wedge q) \rightarrow \neg(p \vee q))$

$\Leftrightarrow ((p \vee q) \vee (p \wedge q)) \wedge (\neg(p \wedge q) \vee \neg(p \vee q))$

$\Leftrightarrow (p \vee (q \vee (p \wedge q))) \wedge ((\neg p \vee \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q))$

$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$

$\Leftrightarrow (p \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee (q \wedge (\neg p \vee \neg q))$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

极小项 文字的合取式称为极小项，其中公式中每个命题符号的文字都在该合取式中出现一次。

注：(1) n个命题符号共有2^n个极小项。

(2)极小项的编码。

例：由两个命题变项 p, q 形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p\wedge\neg q$	0 0	m_0	$p\vee q$	0 0	M_0
$\neg p\wedge q$	0 1	m_1	$p\vee\neg q$	0 1	M_1
$p\wedge\neg q$	1 0	m_2	$\neg p\vee q$	1 0	M_2
$p\wedge q$	1 1	m_3	$\neg p\vee\neg q$	1 1	M_3

由三个命题变项 p, q, r 形成的极小项与极大项.

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p\wedge\neg q\wedge\neg r$	0 0 0	m_0	$p\vee q\vee r$	0 0 0	M_0
$\neg p\wedge\neg q\wedge r$	0 0 1	m_1	$p\vee q\vee\neg r$	0 0 1	M_1
$\neg p\wedge q\wedge\neg r$	0 1 0	m_2	$p\vee\neg q\vee r$	0 1 0	M_2
$\neg p\wedge q\wedge r$	0 1 1	m_3	$p\vee\neg q\vee\neg r$	0 1 1	M_3
$p\wedge\neg q\wedge\neg r$	1 0 0	m_4	$\neg p\vee q\vee r$	1 0 0	M_4
$p\wedge\neg q\wedge r$	1 0 1	m_5	$\neg p\vee q\vee\neg r$	1 0 1	M_5
$p\wedge q\wedge\neg r$	1 1 0	m_6	$\neg p\vee\neg q\vee r$	1 1 0	M_6
$p\wedge q\wedge r$	1 1 1	m_7	$\neg p\vee\neg q\vee\neg r$	1 1 1	M_7

m_i与M_i的关系：$\neg m_i\Leftrightarrow M_i$，$\neg M_i\Leftrightarrow m_i$

主析取范式

给定的命题公式的主析取范式是一个与之等价的公式，后者由极小项的析取组成。

例：求公式$(p\rightarrow q)\rightarrow r$的主析取范式

解： $(p\rightarrow q)\rightarrow r$

$\Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q) \vee r$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee r$

$\Leftrightarrow ((p \wedge \neg q) \wedge (r \vee \neg r)) \vee (r \wedge (p \vee \neg p) \wedge (q \vee \neg q))$

$\Leftrightarrow (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

$\vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r)$

定理：公式的真值表中真值为1的赋值所对应的极小项的析取，即为此公式的主析取范式。

例：求$p\to q$的主析取范式

p	q	$p\to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

解：$p\to q$

$\Leftrightarrow (p\wedge q)$

$\vee(\neg p\wedge q)$

$\vee(\neg p\wedge\neg q)$

合取范式

形为

$A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ $(n \geq 1)$的公式称为合取范式，其中每个合取项$A_1, \ldots, A_n$都是由文字组成的析取式。

例：求$(p \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow s$的合取范式

解：$(p \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow s$

$\Leftrightarrow \neg(p \wedge (\neg q \vee r)) \vee s$

$\Leftrightarrow \neg p \vee (q \wedge \neg r) \vee s$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee s \vee q) \wedge (\neg p \vee s \neg r)$

极大项 文字的析取式称为极大项，其中公式中每个命题符号的文字都在该析取式中出现一次。

注：（1）n个命题符号共有2^n个极大项。

（2）极大项的编码。

实例

由两个命题变项 p, q 形成的极小项与极大项

极小项			极大项		
公式	成真赋值	名称	公式	成假赋值	名称
$\neg p \wedge \neg q$	0 0	m_0	$p \vee q$	0 0	M_0
$\neg p \wedge q$	0 1	m_1	$p \vee \neg q$	0 1	M_1
$p \wedge \neg q$	1 0	m_2	$\neg p \vee q$	1 0	M_2
$p \wedge q$	1 1	m_3	$\neg p \vee \neg q$	1 1	M_3

主合取范式 给定的命题公式的主合取范式是一个与之等价的公式，后者由极大项的合取组成。

例：求$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$的主合取范式。

解： $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge r)$

$\Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee \neg p) \wedge ((p \wedge q) \vee r)$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee r)$

$\Leftrightarrow ((\neg p \vee q) \vee (r \wedge \neg r)) \wedge ((p \vee r) \vee (q \wedge \neg q)) \wedge ((q \vee r) \vee (p \wedge \neg p))$

$\Leftrightarrow (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$

定理：公式的真值表中真值为0的赋值所对应的极大项的合取，即为此公式的主合取范式。

例：求$p\rightarrow q$的主合取范式

p	q	$p\rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

解：$p\rightarrow q$

$\Leftrightarrow \neg p \vee q$

定理：公式的真值表中真值为0的赋值所对应的极大项的合取，即为此公式的主合取范式。

思考：(1) 为什么 $A \Leftrightarrow M_{i1} \wedge M_{i2} \wedge \ldots \wedge M_{in}$?

极大项		
公式	成假赋值	名称
$p\vee q$	0 0	M_0
$p\vee\neg q$	0 1	M_1
$\neg p\vee q$	1 0	M_2
$\neg p\vee\neg q$	1 1	M_3

(2)真值表中没有真值为0怎么办？

$A \Leftrightarrow \top$

总结

- 析取范式
- 极小项
- 主析取范式
- 合取范式
- 极大项
- 主合取范式