1-9 谓词公式语义

概念：

解释，赋值，项和公式的语义

解释 (Interpretation) 谓词语言的一个解释 $I=(D, \varphi)$包括：

(1) 非空集合D，称之为论域；

(2) 对应于每一个个体常元a， $\varphi(a)\in D$；

(3) 对应于每一个n元函数符号f都有一个函数 $\varphi(f):D^n \to D$；

(4) 对应于每一个n元谓词符号A都有一个n元关系$\varphi(A) \subseteq D^n$。

注：解释也称为结构，通常简单地用φ 表示。

赋值 (Assignment) 解释I中的赋值v为每一个个体变元x指定一个值v(x) $\in$ D，即设 V为所个体变元的集合，则赋值v是函数 v:V $\rightarrow$ D.

若v是赋值，则**v的a-equivalent** 赋值记为**v[x←a]**（其中a $\in$D表示一个由

$$v[x \leftarrow a](u) = \begin{cases} a & \text{若} u = x \\ v(u) & else \end{cases}$$

定义的赋值。

注：给定解释I和I中的赋值v后，任何项和公式的含义就明确了。

v_I:TERM $\rightarrow$ D

v_I:WFF $\rightarrow$ {1,0}

项的语义

项t在解释I=(D，φ)和赋值v下的值，记为$v_I(t)$

(1) 若t 是常元a，则$v_I(t) = \varphi(a)$

(2) 若t 是变元x，则$v_I(t) = \varphi(x)$

(3) 若t 是$f(t_1,t_2,\ldots,t_n)$，则$v_I(t) = \varphi(f)(v_I(t_1), v_I(t_2), \ldots, v_I(t_n))$

例、 $\sum=\{a, f\}$，$f(x,a)$是一个项

解释φ_1、φ_2 、 φ_3：

$\varphi_1(a)=1$， $\varphi_1(f)=+$； $I_1=(Z,\varphi_1)$

$\varphi_2(a)=0$， $\varphi_2(f)=-$； $I_2=(Z,\varphi_2)$

$\varphi_3(a)=-2$， $\varphi_3(f)=\times$；$I_3=(Z,\varphi_3)$

x的赋值v_1、v_2、v_3

$v_1(x)=7$、$v_2(x)=0$、$v_3(x)=-5$

公式的语义

公式A在解释I=(D，φ)和赋值v下的值，记为$v_I(A)$

1、若A为命题常元符号p，则

$$v_I(A)=\begin{cases}1 & 若A=\top\\ 0 & 若A=\bot\end{cases}$$

2、若A为原子公式$P(t_1,\ldots,t_n)$，则

$$v_I(A)=\begin{cases}1 & 若\langle v_I(t_1),v_I(t_2),\cdots,v_I(t_n)\rangle\in\varphi(P);\\ 0 & else\end{cases}$$

3、若A为否定式(¬B)，则

$$v_I(A)=\begin{cases}1 & 若\, v_I(B)=0\\ 0 & 若\, v_I(B)=1\end{cases}$$

4、若A为析取式(B∨C)，则

$$\mathrm{v}_I(A)=\begin{cases}1 & 若\mathrm{v}_I(B)=1或\mathrm{v}_I(C)=1\\ 0 & e\mathrm{lse}\end{cases}$$

5、若A为合取式(B∧C)，则

$$\mathrm{v}_I(A)=\begin{cases}1 & 若\mathrm{v}_I(B)=1且\mathrm{v}_I(C)=1\\ 0 & e\mathrm{lse}\end{cases}$$

6、若A为蕴含式(B→C)，则

$$v_I(A) = \begin{cases} 0 & 若v_I(B) = 1或v_I(C) = 0 \\ 1 & else \end{cases}$$

7、若A为等价式(B ↔C)，则

$$v_I(A) = \begin{cases} 1 & 若v_I(B) = v_I(C) \\ 0 & else \end{cases}$$

8、若A为(∀xB)，则

$$v_I(A)=\begin{cases}1 & \text{若对任何}d\in D, v[x\leftarrow d]_I(B)=1\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

9、若A为(∃xB)，则

$$v_I(A)=\begin{cases}1 & \text{若对某个}d\in D, v[x\leftarrow d]_I(B)=1\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

例: 给出如下两个公式:

1) $G=\exists x(P(f(x))\wedge Q(x, f(a)))$ 1

2) $H=\forall x(P(x)\wedge Q(x, a))$ 0

给出如下的解释I:

$D=\{2, 3\}$

$a=2$

f(2)	f(3)
3	2

P(2)	P(3)	Q(2, 2)	Q(2, 3)	Q(3, 2)	Q(3, 3)
0	1	1	1	0	1

谓词逻辑总结

- 解释
- 赋值
- 项值
- 公式的真值