1.2. Случайный вектор и числовые характеристики

№1

$$f_\xi(x,y) = \frac{e^{-2|y|}}{\pi(1+x^2)}$$

Свойства плотности распределение:

1) $f_\xi(x,y) \geq 0$ для всех $x, y \in R^2$
2) $\iint\limits_{R^2} f_\xi(x,y) = 1$

(1) $e^{-2|y|} > 0$ (показательное с $|y| \geq 0$)
$\pi(1+x^2) > 0$ $\Big\} =>$

$= \dfrac{e^{-2|y|}}{\pi(1+x^2)} > 0$ $\underline{V}$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2|y|}}{\pi(1+x^2)} dy dx = \frac{1}{\pi}\Big(\overset{a}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|y|} dy}\Big)\Big(\overset{b}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx}\Big) =$

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|y|} dy = 2\int_0^{\infty} e^{-2y} dy = 2\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-2y} dy =$

$\displaystyle= 2\lim_{b\to\infty} \frac{e^{-2y}}{-2}\Big|_0^b = -\lim_{b\to\infty} e^{-2b} - e^0 = -\lim_{b\to\infty} \overset{=0}{e^{-2b}} - 1 =$

$= -(-1) = 1$

b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{c} \frac{dx}{1+x^2} + \int_c^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c \frac{dx}{1+x^2} +$

$\displaystyle+ \lim_{b\to\infty}\int_c^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_a^c + \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_c^b =$

$$= \lim_{a\to-\infty}(\operatorname{arctg} c - \operatorname{arctg} a) + \lim_{b\to\infty}(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} c) =$$

$$= -\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg} a + \lim_{b\to\infty}\operatorname{arctg} b = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot 1 \cdot \pi = 1$$ ч.т.д. V

№2

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{24}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0

(a) Маргинальные распределения ξ, η

ξ	-1	1
p_ξ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

η	-1	0	1
p_η	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{24}$

(b) Мат. ожидание: $E\xi = \sum p_i x_i$

$$E\xi = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \qquad E\eta = -\frac{11}{24} + \frac{7}{24} = -\frac{4}{24} = -\frac{1}{6}$$

коварационная матрица: $\begin{pmatrix} D\xi & \operatorname{cov}(\xi,\eta) \\ \operatorname{cov}(\xi,\eta) & D\eta \end{pmatrix}$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 0 = 1$$

$$D\eta = \frac{11}{24} + \frac{7}{24} - \frac{1}{36} = \frac{18}{24} - \frac{1}{36} = \frac{13}{18}$$

$$E\xi\eta = 1\cdot\frac{1}{8} - \frac{1}{3} - \frac{7}{24} = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta = -\frac{1}{2} - 0\cdot\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$cov(\xi, y) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{13}{18} \end{pmatrix}$$

Корреляционная матрица:

$$r(\xi, y) = \frac{cov(\xi, y)}{\sqrt{D\xi D y}} = \frac{-0,5}{\sqrt{\frac{13}{18}}} = -\frac{\sqrt{18}}{2\sqrt{13}} = -\frac{3\sqrt{26}}{26}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3\sqrt{26}}{26} \\ -\frac{3\sqrt{26}}{26} & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Независимость:

если $p_{ij} = P(\xi = \xi_i) \cdot P(y = y_i) \to$ н/з

$p_{11} = \frac{1}{8}$ $\quad P(\xi = -1) \cdot P(y = -1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{24} = \frac{11}{48} \neq \frac{1}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow \xi$ и y - зависимые

~~Коррелируемость~~:

некоррелированность: $cov(\xi, y) \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \xi$ и y - коррелированы

№3

2 тетраэдра - 1,2,3,4 на гранях

ξ_1 - число на 1 $\quad \xi_2$ - число на 2

СВ:

$$\varphi_1 = \xi_1 + \xi_2 \qquad \varphi_2 = \begin{cases} 1, & (\xi_1 \vdots \xi_2) \cup (\xi_2 \vdots \xi_1) \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

(a) Таблица совместного распределения φ_1 и φ_2

Всего может выпасть 16 комбинаций

$\varphi_1 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ $\quad min = 1+1$

$max = 4+4$

2 $\quad (1,1)$

3 $\quad (1,2)\,(2,1)$

4 $\quad (1,3)\,(2,2)\,(3,1)$

5 $\quad (1,4)\,(2,3)\,(3,2)\,(4,1)$

6 $\quad (2,4)\,(3,3)\,(4,2)$

7 $\quad (3,4)\,(4,3)$

8 $\quad (4,4)$

$\varphi_2 = \{0, 1\}$ $\qquad$ 0 $\quad (2,3)\,(3,2)\,(3,4)\,(4,3)$

1 $\quad$ else

$\varphi_2 \backslash \varphi_1$	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	0
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	0	$\frac{1}{16}$

(b) маргинальные распределения

φ_1	2	3	4	5	6	7	8
P_{φ_1}	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

φ_2	0	1
P_{φ_2}	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

(c) мат. ожидание, ков. матрица, кор. матрица

$$E\varphi_1 = 2\cdot\frac{1}{16} + 3\cdot\frac{1}{8} + 4\cdot\frac{3}{16} + 5\cdot\frac{1}{4} + 6\cdot\frac{3}{16} + 7\cdot\frac{1}{8} + 8\cdot\frac{1}{16} =$$

$$= 5$$

$$E\varphi_2 = 0\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

$$E\varphi_1\varphi_2 = 2\cdot\frac{1}{16} + 3\cdot\frac{1}{8} + 4\cdot\frac{3}{16} + 5\cdot\frac{1}{8} + 6\cdot\frac{3}{16} + 8\cdot\frac{1}{16} =$$

$$= 3,5$$

$$D\varphi_1 = \cancel{4}\, 4\cdot\frac{1}{16} + 9\cdot\frac{1}{8} + 16\cdot\frac{3}{16} + 25\cdot\frac{1}{4} + 36\cdot\frac{3}{16} + 49\cdot\frac{1}{8} + 64\cdot\frac{1}{16} -$$

$$- 25 = 2,5$$

$$D\varphi_2 = \frac{3}{4} - \frac{9}{16} = \frac{3}{16}$$

$$\operatorname{cov}(\varphi_1, \varphi_2) = 3,5 - 5\cdot\frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\operatorname{cov} = \begin{pmatrix} 2,5 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{16} \end{pmatrix}$$

$$r(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{25}{10}\cdot\frac{3}{16}}} = -\frac{\sqrt{10}}{5\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{30}}{15}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{30}}{15} \\ -\frac{\sqrt{30}}{15} & 1 \end{pmatrix}$$

(d) $p_{11} = 0$ $\quad P(\varphi_1 = 2)\cdot P(\varphi_2 = 0) = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{64} \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_1$ и φ_2 – зависимые

$\operatorname{cov}(\varphi_1, \varphi_2) \neq 0 \Rightarrow$ коррелируемы

№4

$\xi \sim U_{-\pi,\pi}$ $\quad y_1 = \cos\xi \quad y_2 = \sin\xi$

$$f_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & x \in [-\pi, \pi] \\ 0, & else \end{cases}$$

$y_1 = g_1(\xi) = \cos\xi \qquad y_2 = g_2(\xi) = \sin\xi$

(a) Мат. ожидание, ков. и кор. матрицы

$$Ey_1 = \int_R g_1(x) \cdot f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot \cos x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sin x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}(0-0) = 0$$

$$Ey_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \cdot \sin x\, dx = -\frac{1}{2\pi} \cos x \Big|_{-\pi}^{\pi} = -\frac{1}{2\pi}(1-1) = 0$$

$$Ey_1 y_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos x \cdot \frac{1}{2\pi}\, dx = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x\, dx = 0$$

$$Ey_1^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \frac{1}{2\pi}\, dx = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 + \cos 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx + \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\cos 2x\, dx}_{=0}\right) = \frac{1}{4\pi}(\pi + \pi) = \frac{1}{2}$$

$$Ey_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \frac{1}{2\pi}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1 - \cos^2 x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} 1\, dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\, dx\right) = \frac{1}{2\pi}(2\pi - \pi) = \frac{1}{2}$$

$$Dy_1 = \frac{1}{2} - 0^2 = \frac{1}{2} \qquad Dy_2 = \frac{1}{2} - 0^2 = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{cov}(y_1, y_2) = 0 - 0\cdot 0 = 0$$

$$\operatorname{Cov} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$r = \frac{\operatorname{cov}(y_1 y_2)}{\sqrt{D_{y_1} D_{y_2}}} = 0$$

$$k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) $y_1^2 + y_2^2 = 1$ (трг. св-во) $\Rightarrow$

они функционально зависят, мы можем выразить ~~y~~ одну через другую.

$\operatorname{cov}(y_1, y_2) = 0 \Rightarrow$ некоррелируемые.

№5

$\xi \sim Exp_2$ $\quad y \sim U_{0,1}$ $\quad \varphi = \xi + y$

$p(\varphi) - ?$

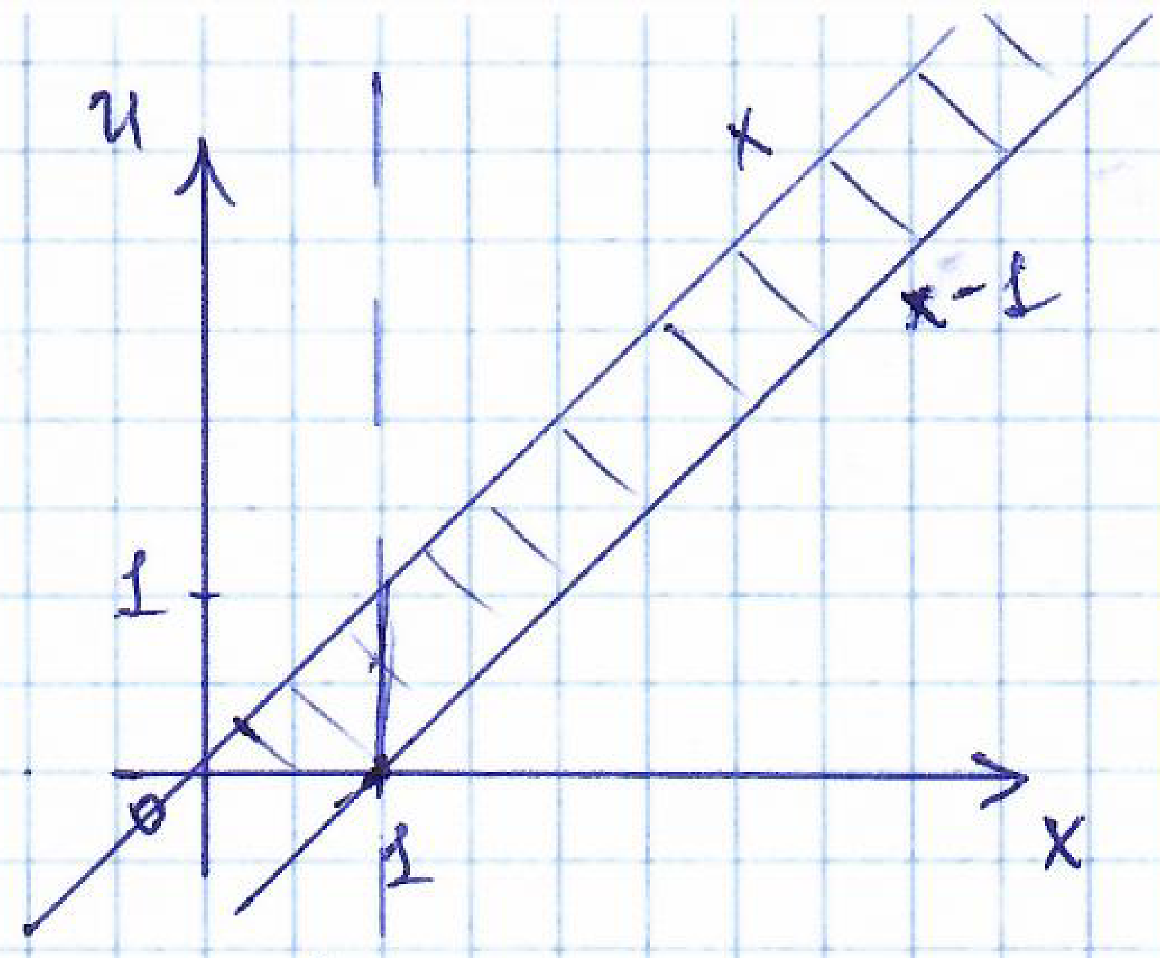
$$f_\xi = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$f_y = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

$$f_\varphi = \int_R f_\xi(u)\, f_y(x-u)\, du$$

$f_\varphi \neq 0$ при ~~...~~ $\begin{cases} u \geq 0 \\ x - u \in [0, 1] \end{cases}$

$$\begin{cases} u \in [0, +\infty) \\ u \in [x-1, x] \end{cases}$$



$$\cancel{f_\varphi(x) = \int_0^x 2e^{-2x}\,dx + \int_{x-1}^x 2e^{-2x}\,dx}$$

$$f_\varphi(x) = \int_0^x 2e^{-2u}\,du = -e^{-2u}\Big|_0^x = -e^{-2x} + 1 \quad \text{при } x \in [0, 1]$$

$$f_\varphi(x) = \int_{x-1}^x 2e^{-2u}\,du = -e^{-2(x-1)} + e^{-2x} \quad \text{при } x \in (1, \infty)$$

$$f_\varphi(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x}, & x \in [0, 1] \\ e^{-2x} - e^{-2x+2}, & x \in (1, \infty) \\ 0, \text{ else} \end{cases}$$