$$p(\mathbf{x}_{1:N}|\mathbf{y}_{1:N}) \propto \tilde{p}(\mathbf{y}_{1:N},\mathbf{x}_{1:N}) \equiv \prod_{n=1}^{N} g(y_n|\mathbf{x}_{1:n}) f(\mathbf{x}_n|\mathbf{x}_{1:n-1})$$