

# CP HW02

2025-10-20

Aksel Shen

20234001053@m.scnu.edu.cn South China Normal University

(1)  $\{\varepsilon, a, b\}$ .

(2) 任何  $b$  不出现在任一  $a$  之前的串的集合, 即

$\{\varepsilon, a, b, aa, ab, bb, aaa, aab, abb, bbb, aaaa, aaab, aabb, abbb, bbbb, \dots\}$ .

(3) 任何以  $a$  开头的串的集合, 即

$\{a, aa, ab, aaa, aab, aba, abb, aaaa, aaab, aaba, aabb, abaa, abab, abba, abbb, \dots\}$ .

(4) 任何以  $a$  或  $ab$  结束的串的集合, 即

$\{a, aa, ab, aaa, aab, ba, baa, bab, aaaa, aaab, aba, abaa, abab, baa, baaa, baab, bba, bbba, bbab, \dots\}$ .

(5)  $\{\varepsilon, a, b, aa, ba, bb, aaa, aab, abb, baa, bba, bbb, aaaa, aaba, aabb, baaa, babb, bbba, bbbb, \dots\}$ .

(1)  $[0 - 9]^*[0]$ .

(2)  $[1 - 9][0 - 9]^*$ .

(3)  $[0 - 9]^*(0|2|4|6|8)$ .

*Proof.*

• 证明  $L(r^{**}) \subseteq L(r^*)$

设  $w \in L(r^{**})$ . 根据定义,  $w$  是由 0 个或多个  $r^*$  串联而成的, 即  $w = w_1 w_2 \dots w_k$ , 其中  $k \geq 0$  且  $w_i \in L(r^*)$  对所有  $1 \leq i \leq k$  成立. 如果  $k = 0$ , 则  $w = \varepsilon \in L(r^*)$ . 如果  $k > 0$ , 则由于  $w_i \in L(r^*)$  对所有  $i$  成立, 根据  $L(r^*)$  的闭包性质, 可知  $w = w_1 w_2 \dots w_k \in L(r^*)$ . 因此, 对任意  $w \in L(r^{**})$ , 都有  $w \in L(r^*)$ , 即  $L(r^{**}) \subseteq L(r^*)$ .

• 证明  $L(r^*) \subseteq L(r^{**})$

设  $w \in L(r^*)$ . 根据定义,  $w$  是由 0 个或多个  $r$  串联而成的, 即  $w = w_1 w_2 \dots w_k$ , 其中  $k \geq 0$  且  $w_i \in L(r)$  对所有  $1 \leq i \leq k$  成立. 注意到每个  $w_i \in L(r)$  也隐含地属于  $L(r^*)$  (因为  $L(r) \subseteq L(r^*)$ ). 因此, 可以将每个  $w_i$  看作是一个单独的  $r^*$  串联的结果. 这样, 我们可以将  $w$  表示为  $w = w_1 w_2 \dots w_k$ , 其中每个  $w_i \in L(r^*)$ . 根据  $L(r^{**})$  的定义, 可知  $w \in L(r^{**})$ . 因此, 对任意  $w \in L(r^*)$ , 都有  $w \in L(r^{**})$ , 即  $L(r^*) \subseteq L(r^{**})$ .

综上, 由于  $L(r^{**}) \subseteq L(r^*)$  且  $L(r^*) \subseteq L(r^{**})$ , 根据集合的双向包含性, 可得  $L(r^{**}) = L(r^*)$ . ■