

CP HW02

2025-10-20

Aksel Shen

20234001053@m.scnu.edu.cn South China Normal University

(1) $\{\varepsilon, a, b\}$.

(2) 任何 b 不出现在任一 a 之前的串的集合, 即

$\{\varepsilon, a, b, aa, ab, bb, aaa, aab, abb, bbb, aaaa, aaab, aabb, abbb, bbbb, \dots\}$.

(3) 任何以 a 开头的串的集合, 即

$\{a, aa, ab, aaa, aab, aba, abb, aaaa, aaab, aaba, aabb, abaa, abab, abba, abbb, \dots\}$.

(4) 任何以 a 或 ab 结束的串的集合, 即

$\{a, aa, ab, aaa, aab, ba, baa, bab, aaaa, aaab, aba, abaa, abab, baa, baaa, baab, bba, bbaa, bbab, \dots\}$.

(5) $\{\varepsilon, a, b, aa, ba, bb, aaa, aab, abb, baa, bba, bbb, aaaa, aaba, aabb, baaa, babb, bbaa, bbba, bbbb, \dots\}$.

(1) $[0-9]^*[0]$.

(2) $[1-9][0-9]^*$.

(3) $[0-9]^*(0|2|4|6|8)$.

Proof.

• 证明 $L(r^{**}) \subseteq L(r^*)$

设 $w \in L(r^{**})$. 根据定义, w 是由 0 个或多个 r^* 串联而成的, 即 $w = w_1 w_2 \dots w_k$, 其中 $k \geq 0$ 且 $w_i \in L(r^*)$ 对所有 $1 \leq i \leq k$ 成立. 如果 $k = 0$, 则 $w = \varepsilon \in L(r^*)$. 如果 $k > 0$, 则由于 $w_i \in L(r^*)$ 对所有 i 成立, 根据 $L(r^*)$ 的闭包性质, 可知 $w = w_1 w_2 \dots w_k \in L(r^*)$. 因此, 对任意 $w \in L(r^{**})$, 都有 $w \in L(r^*)$, 即 $L(r^{**}) \subseteq L(r^*)$.

• 证明 $L(r^*) \subseteq L(r^{**})$

设 $w \in L(r^*)$. 根据定义, w 是由 0 个或多个 r 串联而成的, 即 $w = w_1 w_2 \dots w_k$, 其中 $k \geq 0$ 且 $w_i \in L(r)$ 对所有 $1 \leq i \leq k$ 成立. 注意到每个 $w_i \in L(r)$ 也隐含地属于 $L(r^*)$ (因为 $L(r) \subseteq L(r^*)$). 因此, 可以将每个 w_i 看作是一个单独的 r^* 串联的结果. 这样, 我们可以将 w 表示为 $w = w_1 w_2 \dots w_k$, 其中每个 $w_i \in L(r^*)$. 根据 $L(r^{**})$ 的定义, 可知 $w \in L(r^{**})$. 因此, 对任意 $w \in L(r^*)$, 都有 $w \in L(r^{**})$, 即 $L(r^*) \subseteq L(r^{**})$.

综上, 由于 $L(r^{**}) \subseteq L(r^*)$ 且 $L(r^*) \subseteq L(r^{**})$, 根据集合的双向包含性, 可得 $L(r^{**}) = L(r^*)$. ■