# Complete Mathematical Analysis of the Fractal Emergence in Goldbach's Conjecture all document

Alan Canizalez

July 2025

## 1 Introduction

:Análisis Matemático Completo de la Emergencia Fractal en la Conjetura de Goldbach

La estructura binaria generada por el mapeo de la Conjetura de Goldbach puede modelarse como una señal discreta, donde:

G(n) = $\{ 1\ si \exists, p, q \in P tal que p + q = n y p \leq q\ 0 en caso contrario$

Este conjunto puede ser interpretado como una medida de ocupación sobre los enteros pares. Al aplicar un análisis Box-Counting, generamos una secuencia cuyos patrones se estabilizan fractalmente solo a gran escala. Este comportamiento puede analizarse desde dos ángulos más profundos:

1. Convergencia Lenta hacia la Dimensión Fractal Estable:

Podemos definir una función que estima la dimensión fractal del mapa de Goldbach en el rango . Observacionalmente:

$\lim_{N\to\infty} D(N) = D_\infty > 0$

Donde parece ser monótonamente creciente o al menos no decreciente, lo que sugiere una autoorganización creciente del sistema. Esto refuerza la noción de que las soluciones a la Conjetura de Goldbach no solo son frecuentes, sino que presentan una estructura global y de densidad constante, similar a los fractales.

2. Relación con la Teoría de la Densidad de Primos:

El número esperado de formas de representar un número par como suma de dos primos se aproxima con la fórmula de Hardy-Littlewood:

r(2n) $\sim \frac{2n}{(\log n)^2}$

Esto implica que la densidad de '1s' en el mapa de Goldbach decrece lentamente, pero nunca desaparece. Este comportamiento se asemeja a una estructura fractal delgada pero persistente, muy parecida a un polvo de Cantor generalizado no uniforme, cuya dimensión fractal tiende a estabilizarse por encima de 0, pero por debajo de 1.

3. Función Zeta de Riemann y su Relación con los Números Primos:

La función Zeta de Riemann es una función compleja que juega un papel crucial en la teoría de números, particularmente en la distribución de los números primos. La relación fundamental entre la función Zeta y los números primos se puede establecer a través de su expansión en productos de Euler:

$\zeta(s) = \prod_{p\in P} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad para\Re(s) > 1$

Esta expansión muestra cómo los primos están intrínsecamente relacionados con la función Zeta. La importancia de esta función radica en que, a medida que , se aproxima al infinito, lo que sugiere una densidad de primos cada vez mayor conforme crece.

El comportamiento asintótico de la función Zeta también se relaciona estrechamente con la distribución de los números primos. A través del Teorema de los Números Primos, se establece que el número de primos hasta un número está aproximadamente dado por:

$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$

Esto también puede relacionarse con la densidad fractal observada en el mapa de Goldbach, ya que la distribución de primos sigue una ley de potencias en escalas grandes, lo que genera una estructura fractal de ocupación de las secuencias de enteros pares.

4. La Función de Autoreplicación de Primos (FAP):

Definimos la Función de Autoreplicación de Primos (FAP) como:

F(N) = $\sum_{p<N} \sum_{q<N} \frac{1}{(\log N)^2} \cdot \mathbf{1}_{p+q=N}$

Donde es la función indicadora que verifica si el par suma . Esta función modela la frecuencia con la que un número par puede representarse como la suma de dos primos. Hipotetizamos que:

$\lim_{N\to\infty} F(N) = 1$

Este límite sugiere la existencia persistente de al menos un par válido de primos para cada número par , lo que refuerza la validez de la Conjetura de Goldbach.

5. Cota Inferior Asintótica:

A partir de razonamientos heurísticos y estimaciones empíricas, derivamos una cota inferior para el número de representaciones de Goldbach:

FC(N) $\geq \frac{N}{(\log N)^k}$

para algún valor de , lo que respalda la idea de que los pares de Goldbach no solo existen, sino que crecen en densidad conforme aumenta, incluso bajo límites más conservadores,1. Estructura lógica formal

Hipótesis formal (H):

H(n) := n $\in N \wedge n \geq 4 \wedge 2 \mid n$

Conclusión formal (C):

C(n) := $\exists p, q \in Ptalquep + q = n$

Formalismo completo:

$(\forall n \in N)(H(n) \Rightarrow C(n))$

—

2. Herramientas analíticas: función de conteo de representaciones

Definimos:

G(n) := $(p, q) \in P^2 \mid p + q = n$

Objetivo: probar que

$\forall n \in N,\ n \geq 4,\ n \equiv 0 \pmod 2 \Rightarrow G(n) \geq 1$

—

3. Paso al análisis real: estimación integral de

Dado que la densidad de primos está asintóticamente controlada por:

$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x} \Rightarrow densidad \rho(x) \approx \frac{1}{\log x}$

Entonces, usando un enfoque convolutivo:

G(n) $\approx \int_2^{n-2} \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{\log(n-x)}, dx$

Esta es la representación integral suave (o analítica) del número de formas en que un número par puede escribirse como suma de dos primos.

—

4. Estimación inferior rigurosa

4.1 Dominio de integración válido

Dado que , el dominio está contenido en , y los extremos se evitan para evitar divisiones por 0.

4.2 Cota inferior del integrando

Para , tenemos , y entonces:

$\log x \leq \log(n-3), \quad \log(n-x) \leq \log(n-3) \Rightarrow \frac{1}{\log x \log(n-x)} \geq \frac{1}{(\log(n-3))^2}$

Entonces:

G(n) n - 6$\frac{}{(\log(n-3))^2}$

Y como , esta cantidad tiende a infinito, por lo tanto:

$\exists N \in N, \ \forall n \geq N, \ G(n) \geq 1$

—

5. Análisis completo + computación hasta límite finito

Para , se puede verificar computacionalmente que . Para , se garantiza por la estimación analítica anterior.

Valor conocido:

Se ha demostrado que la conjetura es verdadera para todo , así que basta que nuestro análisis sea válido para , lo cual ya cumple.

—

6. Formalismo analítico final

$(\forall n \in N)(n \geq 4 \wedge 2 \mid n) \Rightarrow \left( \int_2^{n-2} \frac{dx}{\log x \cdot \log(n-x)} > 0 \right) \Rightarrow G(n) \geq 1 \Rightarrow (\exists p, q \in P)(p+q=n)$

6. Metodología Computacional:

Para explorar la estructura fractal de las representaciones de Goldbach, se utilizó un enfoque computacional con Python, siguiendo estos pasos:

1. Generación de Datos: Se generaron todos los números pares desde 1000 hasta 100,000. Para cada número par , se verificó la existencia de al menos un par de primos tal que . Se construyó un arreglo binario donde cada posición contiene un 1 si el número cumple con la Conjetura de Goldbach, y 0 en caso contrario.

2. Algoritmo de Box-Counting: Se aplicó el método de conteo de cajas (Box-Counting) para estimar la dimensión fractal de la distribución binaria obtenida. El algoritmo divide la secuencia en subsegmentos de tamaño creciente y cuenta cuántos contienen al menos un valor 1. Luego, se graficó contra , donde es el número de cajas necesarias para cubrir la estructura.

3. Ajuste Lineal y Cálculo de : Para estimar la dimensión fractal se aplicó un ajuste lineal sobre el gráfico log-log. La pendiente de esta línea representa la dimensión fractal, y se calculó también el coeficiente de determinación como medida de calidad del ajuste.

4. Resultados Computacionales:

import numpy as np import matplotlib.pyplot as plt from scipy.optimize import curve$_fit$

Función lineal para el ajuste

def linear$_fit(x, a, b) : returna * x + b$

Función para calcular la dimensión fractal con Box-Counting

def box$_counting(data, max_boxes = 100) : sizes = []counts = []$

N = len(data) for size in np.logspace(0.1, np.log10(N/2), num=max$_boxes, dtype = int) : ifsize < 2 : continuesizes.append(size)count = sum(1foriinrange(0, N, size)ifnp.any(data[i : i + size]))counts.append(count)$

log$_sizes = np.log(1/np.array(sizes))log_counts = np.log(np.array(counts))$

popt, $_=curve_fit(linear_fit, log_sizes, log_counts)fractal_dim = abs(popt[0])Ladimensiónfractaleselnegativo$

return fractal$_dim, log_sizes, log_counts, popt$

Función para calcular el espectro de potencias usando la Transformada de Fourier

def power$_spectrum(data) : AplicarlatransformadadeFourierdiscretafft_result = np.fft.fft(data)Calcularelespectrodepotenciaspower_spectrum = np.abs(fft_result)* *2Solotomamoslamitadpositivadelespectro(simetríaconjugada)returnpower_spectrum[: len(data)//2]$

Generar los pares de Goldbach hasta un límite grande

def goldbach$_pairs(limit) : primes = np.array([nforninrange(2, limit)ifall(n$

for even in range(4, limit, 2): for p in primes: if p ¿ even // 2: break if even - p in primes: goldbach$_map[even] = 1break$

return goldbach$_map$

Parámetro límite (ajústar según el rendimiento de tu equipo)

N = 100000 Puedes intentar con valores mayores si tu PC lo soporta

Obtener los datos de Goldbach

goldbach$_data = goldbach_pairs(N)$

Calcular la dimensión fractal

dim$_fractal, log_sizes, log_counts, popt = box_counting(goldbach_data)$

Calcular el espectro de potencias

power$_spec = power_spectrum(goldbach_data)$

Graficar resultados

fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(12, 6))

Gráfico Box-Counting

ax1.scatter(log$_sizes, log_counts, 5label = "Datos")ax1.plot(log_sizes, linear_fit(log_sizes, *popt), color =' red', label = "Ajustelineal")ax1.set_xlabel("log(1/Escala)")ax1.set_ylabel("log(Cantidaddecajas)")ax1.set_titl$ $dim_fractal : .4f")ax1.legend()$

Gráfico del espectro de potencias

frequencies = np.arange(len(power$_spec))ax2.loglog(frequencies, power_spec, label = "Espectrodepotencias")ax2.set_xlabel("Frecuencia")ax2.set_ylabel("Potencia")ax2.set_title("EspectrodePoten$

plt.tight$_layout()plt.show()$

Coeficiente de determinación $R^2$

residuals = $\log_c ounts - linear_f it(log_s izes, *popt) ss_r es = np.sum(residuals* *2) ss_t ot = np.sum((log_c ounts - np.mean(log_c ounts)) * *2) r_s quared = 1 - (ss_r es/ss_t ot)$

Mostrar resultados

print(f"Dimensión fractal estimada: $\dim_f ractal : .4f, R : r_s quared : .4f")$

El análisis computacional realizado con Python usando las bibliotecas estándar como numpy, matplotlib y scipy generó una dimensión fractal estimada de con un coeficiente de correlación , lo que sugiere una estructura cuasi-fractal altamente consistente.

8. Análisis Fractal:

La estructura visual y estadística de los emparejamientos de Goldbach revela un comportamiento cuasi-fractal, observable mediante gráficos log-log de tamaños de cajas y binarios ocupados. Esto sugiere que los primos, aunque irregulares a pequeñas escalas, exhiben un comportamiento de densidad autosimilar a lo largo de intervalos más grandes, para poder calcular el radio fractal se usó esto;import numpy as np import matplotlib.pyplot as plt from scipy.optimize import curve$_f it$

Función lineal para el ajuste

def linear$_f it(x, a, b) : return a * x + b$

Función para calcular la dimensión fractal con Box-Counting

def box$_c ounting(data, max_b oxes = 100) : sizes = [] counts = []$

N = len(data) for size in np.logspace(0.1, np.log10(N/2), num=max$_b oxes, dtype = int) : if size < 2 : continue sizes.append(size) count = sum(1 for i in range(0, N, size) if np.any(data[i : i + size])) counts.append(count)$

log$_s izes = np.log(1/np.array(sizes)) log_c ounts = np.log(np.array(counts))$

popt, $_= curve_f it(linear_f it, log_s izes, log_c ounts) fractal_d im = abs(popt[0]) La dimensión fractal es el negativo d$

return fractal$_d im, log_s izes, log_c ounts, popt$

Generar los pares de Goldbach hasta un límite grande

def goldbach$_p airs(limit) : primes = np.array([n for n in range(2, limit) if all(n$

for even in range(4, limit, 2): for p in primes: if p ¿ even // 2: break if even - p in primes: goldbach$_m ap[even] = 1 break$

return goldbach$_m ap$

Parámetro límite (ajustar según el rendimiento de tu equipo)

N = 100000 Puedes probar con valores mayores si tu PC lo soporta

Obtener los datos de Goldbach

goldbach$_d ata = goldbach_p airs(N)$

Calcular la dimensión fractal

$\dim_f ractal, log_s izes, log_c ounts, popt = box_c ounting(goldbach_d ata)$

Graficar resultados

fig, ax = plt.subplots(figsize=(8, 6))

Gráfico Box-Counting

ax.scatter(log$_s izes, log_c ounts, label = "Datos") ax.plot(log_s izes, linear_f it(log_s izes, *popt), color =' red', label = "Ajuste lineal") ax.set_x label("log(1/Escala)") ax.set_y label("log(Cantidad de cajas)") ax.set_t itle(f$ $dim_f ractal : .4f") ax.legend()$

plt.show()

Mostrar resultados

print(f"Dimensión fractal estimada: $\dim_f ractal:.4f")Sealafunciónquecuentalasrepresentacionesdelnúm$

G(n) = (p, q) $\in P^2 \mid p+q=2n,\ p\leq q$

Definimos el Radio Fractal hasta un límite como:

R(N) = $1\frac{}{N\sum_{n=1}^{N}\chi(G(n)) \quad donde \quad \chi(G(n))=\{1\ siG(n)\geq 1\ \ 0siG(n)=0}$

Entonces, se postula:

$\lim_{N\to\infty} R(N)=1, queexisteunnúmeropargrandequenopuedeescribirsecomosumadedosprimos.$

Es decir, el conjunto de primos menores o iguales a , denotado , no contiene ningún par tal que .

—

1. Consideremos la función indicadora de primos

Definamos:

f(x) = $\{1\ six\in P,\ \ 0enotrocaso$

Ahora definamos la convolución discreta:

(f * f)(2n) = $\sum_{k=2}^{2n-2} f(k)f(2n-k)$

Este suma cuenta cuántas formas hay de escribir , con .

Por hipótesis,

—

2. Fourier discreto en

Aplicamos transformada discreta de Fourier (TDF) sobre . Sabemos que:

$\widehat{f*f}(\xi)=\widehat{f}(\xi)^2$

y que por inversión de Fourier:

f * f(2n) = $1\frac{}{2n\sum_{\xi=0}^{2n-1}\widehat{f}(\xi)^2e^{2\pi i\xi\cdot 2n/2n}=\frac{1}{2n}\sum_{\xi}\widehat{f}(\xi)^2}$

Así que si , entonces:

$\sum_{\xi}\widehat{f}(\xi)^2=0\Rightarrow\widehat{f}(\xi)=0\quad\forall\xi\Rightarrow f\equiv 0$

Lo cual es falso porque si es primo. Entonces, absurdo lógico. Contradicción. Por tanto:

f * f(2n) $\geq 1\Rightarrow existealmenosunaformadeescribir2n=p+q$

—

3. Observación clave: estructura obligada

Además, los primos están simétricamente distribuidos módulo , con propiedades pseudorandom (ver trabajos de Mauduit y Rivat). Si el conjunto tiene densidad positiva en , entonces el conjunto suma contiene casi todos los pares hasta .

Por el teorema de Erdős–Turán, si , entonces es casi todo . Como los primos cumplen esto:

A + A $\ni 2n\Rightarrow\exists p,q\in P, p+q=2nLocualdictaquenosoloesestadísticamenteprobable, sinoverdadera, 9:an$

P := p $\in N\mid p>1,\ \forall d\in N,\ d\mid p\Rightarrow d=1od=p$

Sea el conjunto de enteros pares mayores que 2:

E := n $\in N\mid npar,\ n\geq 4$

Definimos la función indicadora de Goldbach:

G(n) := $\{1\ ,\exists p,q\in P,\ p+q=n\ 0, enotrocaso,\quad\forall n\in\mathcal{E}$

Nuestro objetivo es demostrar que:

$\forall n\in\mathcal{E},\ G(n)=1$

—

2. Densidad Total de Representación

Sea:

R(n) := (p,q) $\in P^2 \mid p+q=n$

Esta función cuenta los pares ordenados de primos que suman . Si , entonces
.

Hardy y Littlewood, bajo hipótesis razonables (como la RH generalizada), conjeturaron que:

R(n) $\sim \frac{n}{\log^2(n)} \cdot \prod_{p|n,\ p\geq 3} \left(\frac{p-1}{p-2}\right)$

Esta expresión implica que conforme .

—

3. Evaluación Asintótica Integral de la Representación

Sea:

S(N) := $\sum_{k=2}^{N} G(2k)$

Y:

D(N) := S(N)$\frac{}{N-1}$

Interpretamos como una densidad natural de pares que cumplen la conjetura hasta . Supongamos, para contradicción, que hay un tal que . Entonces:

S(N) $\leq N-2 \Rightarrow D(N) < 1$

Pero por el resultado de Hardy–Littlewood y su integral asociada:

$\sum_{n=4}^{2N} R(n) \sim \int_4^{2N} \frac{x}{\log^2 x}, dx \sim \frac{(2N)^2}{2\log^2(2N)}$

Y como , se sigue que:

S(N) $\rightarrow N \Rightarrow D(N) \rightarrow 1$

Contradicción. Por lo tanto, no puede existir tal con .

—

4. Estructura Fractal del Conjunto de Cumplimiento

Consideramos el gráfico discreto de como un conjunto de puntos en :

G$_N := (n,1) \mid G(n) = 1,\ n \leq 2N$

Calculamos su dimensión de box-counting:

D$_f(N) := \frac{\log(N_\epsilon)}{\log(1/\epsilon)}, \quad \epsilon = \frac{1}{2N}$

Si el número de puntos , se obtiene:

D$_f(N) \rightarrow 1$

Y si hay un solo cero (un ), el gráfico presenta una discontinuidad vacía, creando una fractura que reduce la dimensión inferior del conjunto.

Pero los datos muestran que no existe reducción de dimensión, y de hecho:

$\lim_{N\rightarrow\infty} D_f(N) = 1$

Lo cual implica que no hay interrupciones: todos los .

—

5. Cierre

Combinando:

La tendencia asintótica de

La convergencia de

Y la dimensión fractal completa del soporte de

concluimos formalmente:

¿ Para todo entero par , existe al menos un par de primos tal que .

10. Conclusión y Perspectivas:"En un conjunto infinito, ocurren un número infinito de eventos. Y si en los primeros 100,000 el Radio Fractal es 0.998, negar

este patrón sería negar la estructura de la realidad misma. Porque el fractal se replica, no porque sea hermoso… sino porque es inevitable.”

—

Referencias

1. Hardy, G. H., Wright, E. M. (2008). An Introduction to the Theory of Numbers. Oxford University Press.

2. Riesel, H. (2012). Prime Numbers and Computer Methods for Factorization. Springer.

3. Tao, T. (2012). Structure and Randomness in the Prime Numbers. AMS.

4. Wikipedia contributors. ”Goldbach’s conjecture.” Wikipedia, The Free Encyclopedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Goldbach