Міністерство освіти і науки України

Національний університет «Львівська Політехніка»

Інститут прикладної математики та фундаментальних наук

Кафедра прикладної математики

Звіт

про виконання розрахункової роботи №2

з дисципліни: «Чисельні методи ч.1»

на тему: «Дослідження похибки інтерполяції функції многочленом Ньютона»

Виконав:

студент групи ПМ-31

Богуш Н. А.

Перевірив:

канд. фіз-мат. наук, доц.

Ярополк ПІЗЮР

Львів 2025

Варіант 3

Постановка задачі:

Для функції $f(x) = 12\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ заданої на рівномірній сітці в точках a = 0, $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$, π = b на інтервалі [0, π] :

1. Знайти аналітичний вираз залишкового члена інтерполяційного многочлена;
2. Обчислити його максимальне значення і значення в точках x', x'', x''' (не співпадають з вузлами інтерполяції) і в т. x^k – вузлі інтерполяції;
3. Побудувати інтерполяційний многочлен Ньютона через розділені різниці (використати програму з лабораторної роботи №5);
4. Обчислити фактичні похибки інтерполяції в точках x', x'', x''', x^k і порівняти їх із значеннями залишкового члена.

Програма в середовищі Maple з дослідженням залишкового члена інтерполяційного многочлена та обчисленням його у точках x', x'', x''' та x^k - вузлі інтерполяції.

- Ініціалізовуємо вхідні дані f(x), n, a, b

restart;

$f(x) := 12\cos\left(\frac{1}{2}x\right);$

$$f := x \mapsto 12 \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$n := 6;$

$$n := 6$$

$a := 0;$

$$a := 0$$

$b := \pi;$

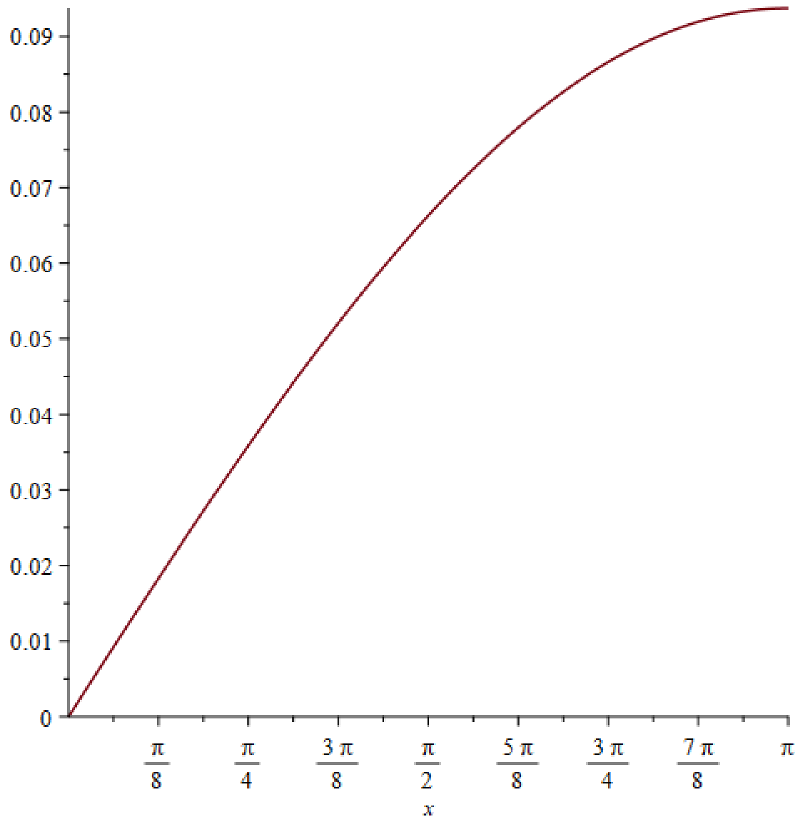
$$b := \pi$$

- Обчислюємо похідну n+1-го порядку та будуємо її графік

$$df := diff\left(12\cos\left(\frac{1}{2}x\right), x\$n+1\right);$$

$$df := \frac{3\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{32}$$

$plot(df(x), x = a..b)$



- Максимум модуля похідної на відрізку [a; b]

$$M := evalf(maximize(\text{abs}(diff(f(x), x\$n+1)), x = a..b))$$

$$M := 0.09375000000$$

Отримали значення M = 0.09375

- Обчислюємо крок h

$$h := \frac{(b-a)}{n};$$

$$h := \frac{\pi}{6}$$

- Знаходимо аналітичний вираз многочлена w(x) та будуємо його графік

$w := x - a;$

for i **from** 1 **to** n **do** $w := w \cdot (x - a - i \cdot h)$ **end do**;

$$w := x$$

$$x\left(-\frac{1}{6}\pi + x\right)$$

$$x\left(-\frac{1}{6}\pi + x\right)\left(-\frac{1}{3}\pi + x\right)$$

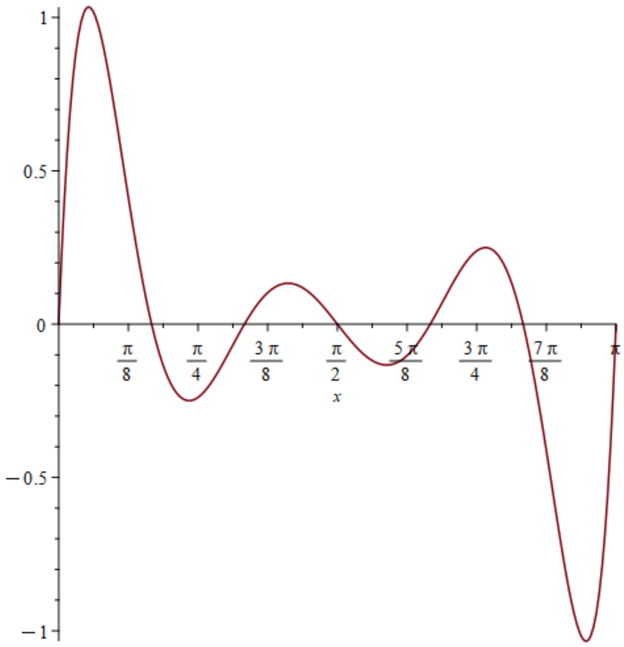
$$x\left(-\frac{1}{6}\pi + x\right)\left(-\frac{1}{3}\pi + x\right)\left(-\frac{1}{2}\pi + x\right)$$

$$x\left(-\frac{1}{6}\pi + x\right)\left(-\frac{1}{3}\pi + x\right)\left(-\frac{1}{2}\pi + x\right)\left(-\frac{2}{3}\pi + x\right)$$

$$x\left(-\frac{1}{6}\pi + x\right)\left(-\frac{1}{3}\pi + x\right)\left(-\frac{1}{2}\pi + x\right)\left(-\frac{2}{3}\pi + x\right)\left(-\frac{5}{6}\pi + x\right)$$

$$x\left(-\frac{1}{6}\pi + x\right)\left(-\frac{1}{3}\pi + x\right)\left(-\frac{1}{2}\pi + x\right)\left(-\frac{2}{3}\pi + x\right)\left(-\frac{5}{6}\pi + x\right)(-\pi + x)$$

$plot(w, x = a..b);$



- Максимум модуля w(x) на відрізку [a; b]

$Wmax := evalf(maximize(\text{abs}(w), x = a..b));$

$$Wmax := 1.034060113 + 1.385639124 \times 10^{-10}\, \mathrm{I}$$

Значення Wmax = 1.034060113

- Максимум залишкового члену

$R := \frac{(M \cdot Wmax)}{(n+1)!};$

$$R := 0.00001923474913 + 2.577453728 \times 10^{-15}\, \mathrm{I}$$

Значення R = 0.0000192347

- Обчислюємо значення залишкового члена в т. x1

$x1 := 0.13281;$

$$x1 := 0.13281$$

$w := evalf(x1 - a);$

$$w := 0.13281$$

for i **from** 1 **to** n **do** $w := w \cdot (x1 - a - i \cdot h)$ **end do**; $R1 := \dfrac{M \cdot w}{(n+1)!};$

$$w := -0.1053569660$$
$$w := 0.09633709812$$
$$w := -0.1385314299$$
$$w := 0.2717411892$$
$$w := -0.6753268224$$
$$w := 2.031911629$$
$$R1 := 0.00003779597524$$

- Обчислюємо значення залишкового члена в т. x2

$x2 := 0.432987;$

$$x2 := 0.432987$$
$$R1 := 5.014895806 \times 10^{-6}$$

$w := evalf(x2 - a);$

$$w := 0.432987$$

for i **from** 1 **to** n **do** $w := w \cdot (x2 - a - i \cdot h)$ **end do**;

$$w := -0.03923372093$$
$$w := 0.02409776535$$
$$w := -0.02741866218$$
$$w := 0.04555358752$$
$$w := -0.09953490205$$
$$w := 0.2696007985$$

$R2 := \dfrac{M \cdot w}{(n+1)!};$

$$R2 := 0.00003779597524$$

- Обчислюємо значення залишкового члена в т. x3

$x3 := 1.23892;$

$$x3 := 1.23892$$

$w := evalf(x3 - a);$

$$w := 1.23892$$

for i **from** 1 **to** n **do** $w := w \cdot (x3 - a - i \cdot h)$ **end do**;

$$w := 0.8862257712$$
$$w := 0.1699093752$$
$$w := -0.05638889936$$
$$w := 0.04823929949$$
$$w := -0.06652555782$$
$$w := 0.1265763597$$

$R3 := \frac{M \cdot w}{(n+1)!};$

$$R3 := 2.354470976 \times 10^{-6}$$

- Обчислюємо значення залишкового члена у вузлі інтерполяції x4

$x4 := \mathrm{a} + \mathrm{h};$

$$x4 := \frac{\pi}{6}$$

$w := evalf(x4 - a);$

$$w := 0.5235987758$$

for i **from** 1 **to** n **do** $w := w \cdot (x4 - a - i \cdot h)$ **end do**;

$$w := 0.$$
$$w := -0.$$
$$w := 0.$$
$$w := -0.$$
$$w := 0.$$
$$w := -0.$$

$R4 := \frac{M \cdot w}{(n+1)!};$

$$R4 := -0.$$

Лістинг програми в середовищі Visual Studio з побудовою інтерполяційного многочлена Ньютона через розділені різниці на мові програмування Python:

```
import math

def build_divided_differences_table(x, y):

    n = len(x)

    table = [[0.0 for _ in range(n)] for _ in range(n)]
```

```
    for i in range(n):
        table[i][0] = y[i]

    for j in range(1, n):
        for i in range(n - j):
            table[i][j] = (table[i + 1][j - 1] - table[i][j - 1]) / (x[i + j] - x[i])
    return table
def print_divided_differences_table(x, table):
    n = len(x)
    spacing = 1
    col_width = 12
    height = n + (n - 1) * spacing + (n - 1)
    visual_table = [["".ljust(col_width) for _ in range(n + 1)] for _ in range(height)]
    header = ["x".center(col_width)] + [f"Δ^{i}f".center(col_width) for i in range(n)]
    print(" | ".join(header))
    print("-" * ((col_width + 3) * (n + 1)))
    for i in range(n):
        row_idx = i * (spacing + 1)
        visual_table[row_idx][0] = f"{x[i]:.2f}".rjust(col_width)
        visual_table[row_idx][1] = f"{table[i][0]:.6f}".rjust(col_width)
    for j in range(1, n):
        for i in range(n - j):
            row_idx = i * (spacing + 1) + j
            visual_table[row_idx][j + 1] = f"{table[i][j]:.6f}".rjust(col_width)

    for row in visual_table:
        if any(cell.strip() for cell in row):
            print(" | ".join(row))
def print_newton_polynomial(x_data, table):
    n = len(x_data)
    terms = [f"{table[0][0]:.6f}"]
    for i in range(1, n):
        coef = table[0][i]
        if abs(coef) < 1e-12:
            continue
        term = f"{coef:+.6f}"
```

```
        for j in range(i):
            term += f"*(x - {x_data[j]:.2f})"
        terms.append(term)

    print("P(x) =")
    for t in terms:
        print("     " + t)
def newton_interpolation(x_data, table, x):
    n = len(x_data)
    result = table[0][0]
    product = 1.0
    for i in range(1, n):
        product *= (x - x_data[i - 1])
        result += table[0][i] * product
    return result

# --- Основна частина ---
# Налаштування задачі
a = 0.0
b = math.pi
n = 56
x_nodes = [0.0, math.pi/6, math.pi/3, math.pi/2, 2*math.pi/3, 5*math.pi/6,
math.pi]
y_nodes = [12 * math.cos(1/2 * x) for x in x_nodes]
# Точки для обчислення
points = [0.13281, 0.432987, 1.23892, math.pi/6]
# Побудова таблиці розділених різниць
table = build_divided_differences_table(x_nodes, y_nodes)
print("\n=== Таблиця розділених різниць ===")
print_divided_differences_table(x_nodes, table)
print("\n=== Інтерполяційний многочлен Ньютона ===")
print_newton_polynomial(x_nodes, table)
print("\n=== Обчислення у точках ===")
for x in points:
    true_value = 12 * math.cos(1/2 * x)
    interpolated_value = newton_interpolation(x_nodes, table, x)
    error = abs(true_value - interpolated_value)
    print(f"\nx = {x}")
```

```
print(f"f(x)   = {true_value:.6f}")

print(f"P(x)   = {interpolated_value:.6f}")

print(f"Фактична похибка = {error:.6f}")
```

Результат виконання програми:

```
=== Таблиця розділених різниць ===
     x      |    Δ^0f     |    Δ^1f     |    Δ^2f     |    Δ^3f     |    Δ^4f     |    Δ^5f     |    Δ^6f
------------------------------------------------------------------------------------------------------------
      0.00 |   12.000000 |             |             |             |             |             |
           |             |   -0.780923 |             |             |             |             |
      0.52 |   11.591110 |             |   -1.440632 |             |             |             |
           |             |   -2.289549 |             |    0.094854 |             |             |
      1.05 |   10.392305 |             |   -1.291635 |             |    0.026756 |             |
           |             |   -3.642147 |             |    0.150891 |             |   -0.001875 |
      1.57 |    8.485281 |             |   -1.054616 |             |    0.021846 |             |   -0.000181
           |             |   -4.746538 |             |    0.196645 |             |   -0.002444 |
      2.09 |    6.000000 |             |   -0.745726 |             |    0.015447 |             |
           |             |   -5.527460 |             |    0.228998 |             |             |
      2.62 |    3.105829 |             |   -0.386016 |             |             |             |
           |             |   -5.931696 |             |             |             |             |
      3.14 |    0.000000 |             |             |             |             |             |

=== Інтерполяційний многочлен Ньютона ===
P(x) =
     12.000000
     -0.780923*(x - 0.00)
     -1.440632*(x - 0.00)*(x - 0.52)
     +0.094854*(x - 0.00)*(x - 0.52)*(x - 1.05)
     +0.026756*(x - 0.00)*(x - 0.52)*(x - 1.05)*(x - 1.57)
     -0.001875*(x - 0.00)*(x - 0.52)*(x - 1.05)*(x - 1.57)*(x - 2.09)
     -0.000181*(x - 0.00)*(x - 0.52)*(x - 1.05)*(x - 1.57)*(x - 2.09)*(x - 2.62)
```

```
x = 0.13281
f(x)   = 11.973552
P(x)   = 11.973540
Фактична похибка = 0.000012

x = 0.432987
f(x)   = 11.719880
P(x)   = 11.719877
Фактична похибка = 0.000003
```

```
x = 1.23892
f(x)   = 9.770305
P(x)   = 9.770304
Фактична похибка = 0.000002

x = 0.5235987755982988
f(x)   = 11.591110
P(x)   = 11.591110
Фактична похибка = 0.000000
```

Таблиця 1 - результуючі значення:

x	$f(x)$	$L_n(x)$	**Значення фактичної помилки**	**Значення залишкового члена**
0,13281	11.973552	11.973540	0.000012	0.00001861894883

0,432987	11.719880	11.719877	0.000003	0.00000501489
1.23892	9.770305	9.770304	0.000002	0.000002354470
0.523598775	11.591110	11.591110	0	0

Максимум залишкового члена R(n): 0.00001923474913

Висновок: У цій розрахунковій роботі було досліджено точність інтерполяції функції f(x) = 12 cos(1/2 * x) за допомогою інтерполяційного многочлена Ньютона. Побудовано таблицю розділених різниць, виведено аналітичний вираз залишкового члена та виконано обчислення у точках, що не збігаються з вузлами інтерполяції. Значення фактичних похибок не перевищували значення залишкового члена, що дозволило оцінити точність методу. Аналіз також показав, що похибка у вузлі інтерполяції дорівнює нулю, що підтверджує правильність побудови інтерполяційного многочлена Ньютона. Отримані результати свідчать про коректність обчислень і ефективність застосованого методу для заданої функції.