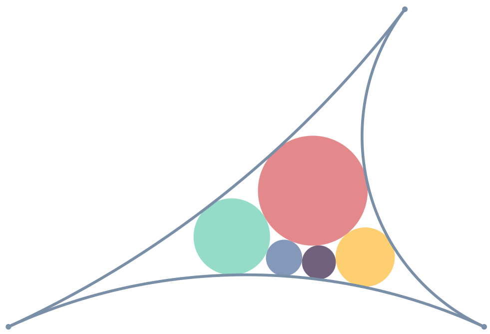
Apollonius Problem

Trần Quân ++ ...



Trước công nguyên, **Apollonius** đã đưa ra bài toán xây dựng các đường tròn tiếp xúc với ba đường tròn đã cho. Bài viết này sẽ mô tả cách dựng các đường tròn tiếp xúc theo cách thông thường dùng thước và *compass*, theo cách sử dụng các đường *conic* và một số tình huống sử dụng nghịch đảo.

Mục lục

Trước công nguyên, *Apollonius* đã đưa ra bài toán xây dựng các đường tròn tiếp xúc với ba đường tròn đã cho.

Thế kỷ 16, *Adriaan van Roomen* giải quyết bài toán bằng việc sử dụng các hyperbola giao nhau nhưng giải pháp này không thể sử dụng cách dựng thông thường bằng thước thẳng và *compass*.

François Viète đưa ra giải pháp bằng cách giải quyết các trường hợp đơn giản: chuyển đường tròn thành đường tròn điểm hoặc mở rộng đường tròn thành đường thẳng (bán kính vô hạn). Từ các trường hợp đơn giản sẽ giải quyết trường hợp ba đường tròn. Bài toán trở thành dựng các đường tròn "tiếp xúc" với 3 "đối tượng" hình học là điểm, đường thẳng, đường tròn. Khi tổ hợp 3 đối tượng này, ta được 10 trường hợp như sau:

1. PPP: đường tròn đi qua 3 điểm, đây là đường tròn ngoại tiếp tam giác.
2. PPL: đường tròn đi qua 2 điểm và tiếp xúc với 1 đường thẳng.
3. PLL: đường tròn đi qua 1 điểm và tiếp xúc với 2 đường thẳng.
4. PPC: đường tròn đi qua 2 điểm và tiếp xúc với 1 đường tròn.
5. LLL: đường tròn tiếp xúc với 3 đường thẳng, đây là đường tròn nội tiếp, bàng tiếp của tam giác.
6. PLC: đường tròn đi qua 1 điểm, tiếp xúc với 1 đường thẳng và 1 đường tròn.
7. PCC: đường tròn đi qua 1 điểm, tiếp xúc với 2 đường tròn.
8. LLC: đường tròn tiếp xúc với 2 đường thẳng và 1 đường tròn.
9. LCC: đường tròn tiếp xúc với 1 đường thẳng và 2 đường tròn.
10. CCC: đường tròn tiếp xúc với 3 đường tròn.

Số đường tròn tiếp xúc tối đa của các trường hợp trong tình huống tổng quát như sau:

1. PPP: 1
2. PPL, PLL, PPC: 2
3. LLL, PLC, PCC: 4
4. LLC, LCC, CCC: 8

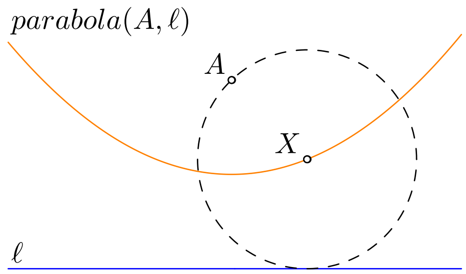
Cần lưu ý số đường tròn tối đa trên ở trường hợp tổng quát. Một số trường hợp đặc biệt sẽ có thể có vô số đường tròn thoả mãn.

Trường hợp 1, 5 đã quen thuộc nên bài viết sẽ giới thiệu về 8 trường hợp còn lại. Trước khi đi vào chi tiết, ta tìm hiểu 4 tập hợp của tâm đường tròn tiếp xúc.

1 Tập hợp các tâm đường tròn tiếp xúc

1.1 Tập hợp PL

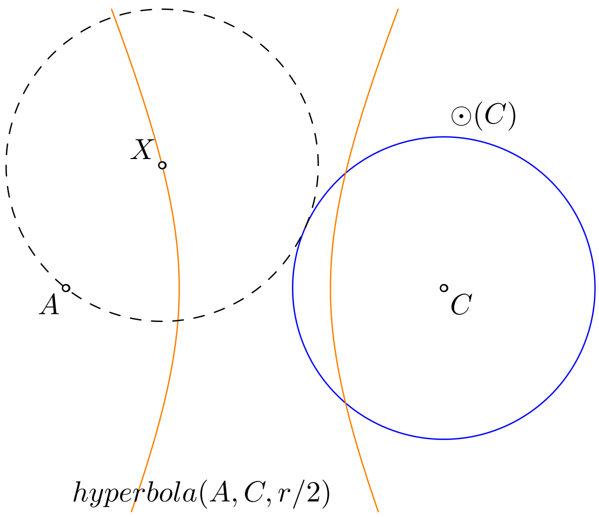
Cho điểm A và đường thẳng ℓ. Tìm tập hợp tâm các đường tròn đi qua A và tiếp xúc với ℓ.



Nhận thấy tâm X của các đường tròn này cách đều A và ℓ nên chúng nằm trên *parabola* tiêu điểm A và đường chuẩn ℓ. Khi A nằm trên ℓ thì *parabola* sẽ suy biến thành đường thẳng qua A vuông góc với ℓ.

1.2 Tập hợp PC

Cho điểm A và đường tròn $\odot(C)$. Tìm tập hợp những tâm đường tròn đi qua A và tiếp xúc với $\odot(C)$.

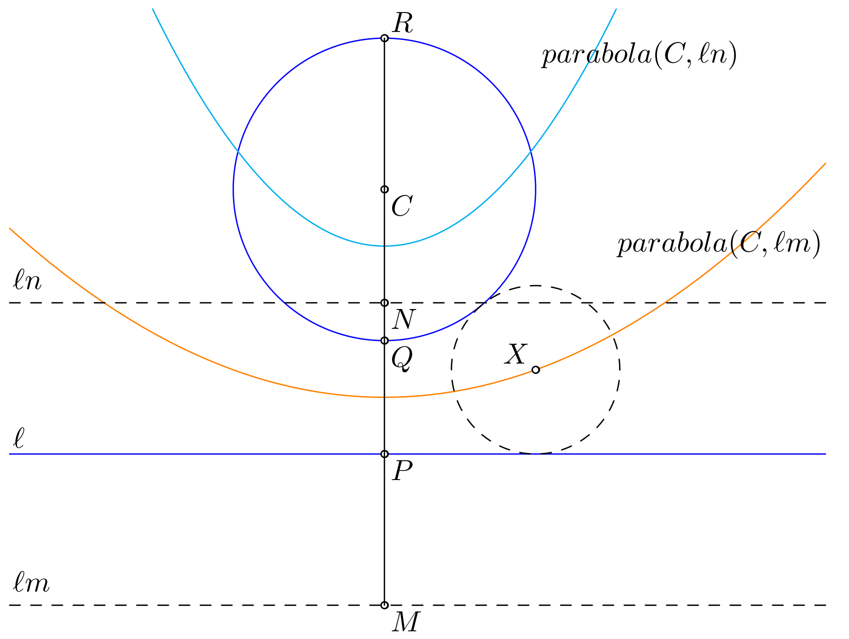


Gọi X là tâm các đường tròn này. Theo hình vẽ, nhận thấy $XC - XA = r$ (r là bán kính đường tròn $\odot(C)$) nên X nằm trên *hyperbola* có hai tiêu điểm là A, C là bán trục lớn là $\frac{r}{2}$.

Khi A nằm trên đường tròn $\odot(C)$ thì *hyperbola* suy biến thành đường thẳng AC. Khi A nằm trong đường tròn $\odot(C)$ thì *hyperbola* suy biến thành *ellipse* có hai tiêu điểm A, C và bán trục lớn $\frac{r}{2}$.

1.3 Tập hợp LC

Cho đường thẳng ℓ và đường tròn $\odot(C)$. Tìm tập hợp đường tròn tiếp xúc với ℓ và $\odot(C)$.



Đường thẳng qua C vuông góc với ℓ lần lượt cắt ℓ và $\odot(C)$ tại P và Q, R.

Trên CP lấy các điểm M, N sao cho $\overline{PM} = \overline{CQ}$ và $\overline{PN} = \overline{CR}$. Gọi ℓm và ℓn là các đường thẳng qua M, N song song với ℓ.

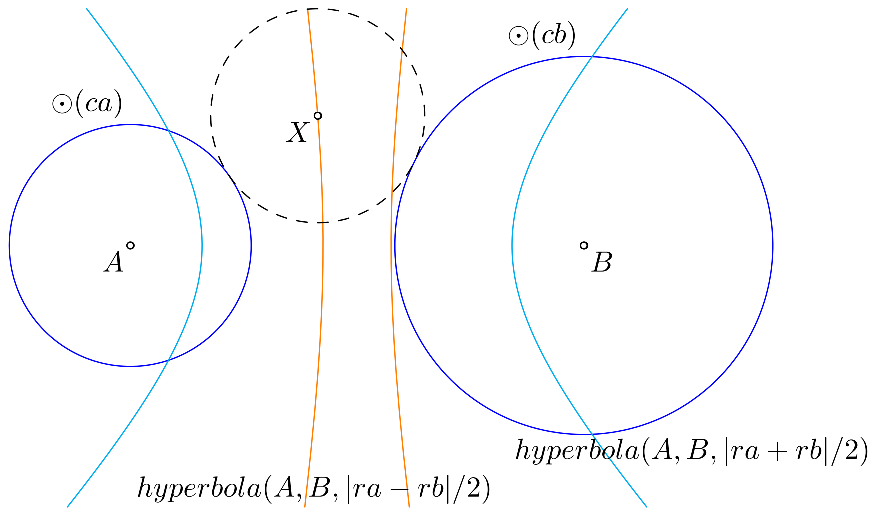
Như vậy nếu gọi X là tâm các đường tròn tiếp xúc với ℓ và $\odot(C)$ thì XC bằng khoảng cách từ X đến ℓm hoặc ℓn. Quay trở lại **1.1** - tập hợp các tâm đường tròn đi qua C là tiếp xúc với ℓm hoặc tiếp xúc với ℓn.

Do đó tập hợp các tâm là *parabola* tiêu điểm C và đường chuẩn ℓm và *parabola* tiêu điểm C và đường chuẩn ℓn.

Như vậy bài toán **1.1** là trường hợp đặc biệt của trường hợp này khi đường tròn $\odot(C)$ suy biến thành đường tròn điểm C.

1.4 Tập hợp CC

Cho hai đường tròn $\odot(ca), \odot(cb)$. Tìm tập hợp những tâm đường tròn tiếp xúc với $\odot(ca), \odot(cb)$.



Gọi X là tâm đường tròn tiếp xúc với hai đường tròn $\odot(ca), \odot(cb)$. Nhận thấy có hai trường hợp:

1. $m = |XA - XB| = |ra - rb|$ là hằng số nên X nằm trên *hyperbola* có hai tiêu điểm là A, B và bán trục lớn $\dfrac{m}{2}$.

2. $n = |XA - XB| = |ra + rb|$ là hằng số nên X nằm trên *hyperbola* có hai tiêu điểm là A, B và bán trục lớn $\frac{n}{2}$.

Tương tự như trường hợp **1. 2**, *hyperbola* có thể suy biến thành đường thẳng hoặc *ellipse*. Nếu gọi d là khoảng cách giữa tâm của hai đường tròn ($d = AB$) ta có:

1. Nếu $m = d$, *hyperbola* suy biến thành đường thẳng AB.
2. Nếu $m > d$, *hyperbola* suy biến thành đường thẳng *ellipse*.

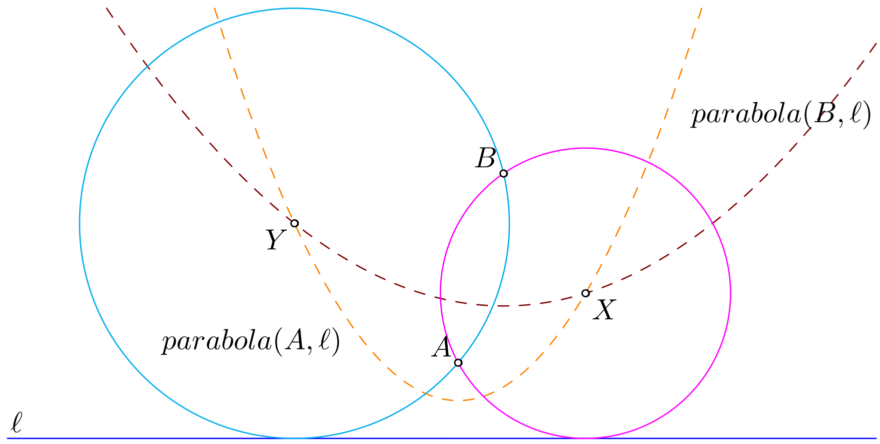
2 Các trường hợp Apollonius

Phần này sẽ chi tiết cách dựng các trường hợp theo cách thông thường (dùng thước thẳng và compass) và cách dựng sử dụng các đường *conic*.

Cách dựng sử dụng các đường *conic* có dùng ngôn ngữ lập trình đồ họa dạng *vector* **Asymptote** để thực hiện. Chúng tôi đưa ra gói **appolonius.asy** (mục Tài liệu tham khảo) để bạn đọc có thể sử dụng.

2.1 PPL (2)

Cho 2 điểm A, B và đường thẳng ℓ, dựng đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với ℓ.



Theo **1.1**, tập hợp tâm các đường tròn đi qua A và tiếp xúc với ℓ là $parabola(A, \ell)$ (*parabola* tiêu điểm A, đường chuẩn ℓ). Tập hợp tâm các đường tròn đi qua A và tiếp xúc với ℓ là $parabola(B, \ell)$. Như vậy tâm đường tròn phải dựng là giao hai *parabola* trên. Tuy nhiên cần xét vị trí tương đối của A, B với ℓ để xác định khi nào *parabola* suy biến thành *line*.

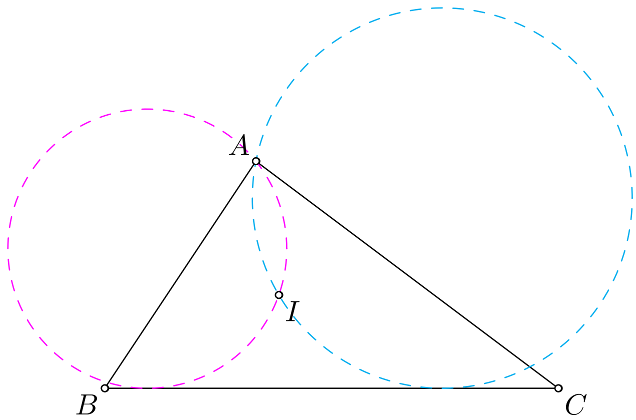
Do hai *parabola* cắt nhau nhiều nhất tại 2 điểm nên trường hợp này sẽ có nhiều nhất 2 đường tròn. Trong hình vẽ là 2 đường tròn $\odot(X, XA)$ và $\odot(Y, YA)$.

Trong gói **apollonius.asy** cần lưu ý hai hàm sau:

- point [] centers(point a, point b, line l): trả về tâm các đường tròn đi qua a, b và tiếp xúc với đường thẳng ℓ.
- circle [] tangents(point a, point b, line l): trả về các đường tròn đi qua a, b và tiếp xúc với đường thẳng ℓ.

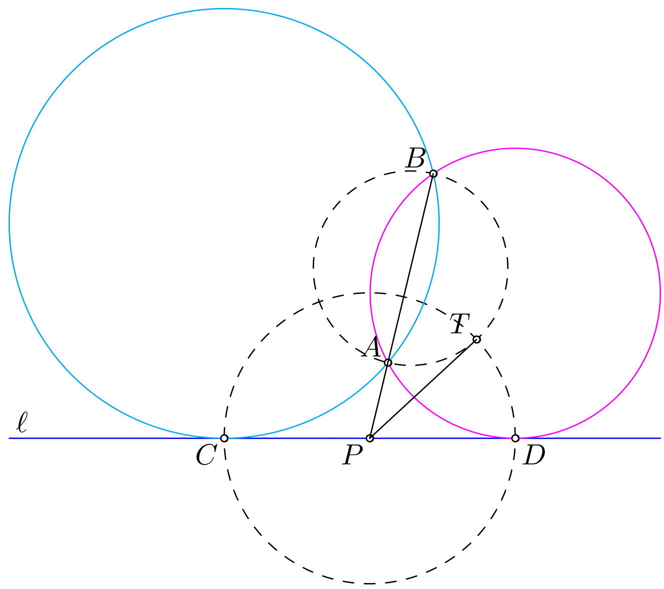
Để thuận tiện cho người sử dụng, các hàm centers và tangents sẽ được dùng cho các trường hợp tiếp theo với tham số thay đổi. Ví dụ sử dụng như sau:

```
import geometry;
import apollonius;
unitsize(1cm);
defaultpen(fontsize(11pt));

point A = (1.7, 4); dot(Label("$A$",align=NW),A);
point B = (0, 0); dot(Label("$B$",align=SW),B);
point C = (6, 0); dot(Label("$C$",align=SE),C);
triangle t = triangle(A, B, C); draw(t);
point I = incenter(t); dot(Label("$I$",align=SE), I);
circle [] ct = tangents(A, I, t.BC);
draw(ct[0]^^ct[1], dashed);

dot(A^^B^^C^^I, Fill(white));
shipout(bbox(1mm, invisible));
```



Trong ví dụ trên, hàm tangents được sử dụng tangents(A, I, t.BC) để vẽ đường tròn đi qua A, I và tiếp xúc với đường thẳng BC của tam giác $\triangle ABC$. Trường hợp này có 2 kết quả là hai đường tròn ct[0], ct[1]. Nếu sử dụng tangents(A, C, t.BC) thì hàm chỉ trả về 1 đường tròn.

Cách dựng thông thường.



Gọi C là tiếp điểm của đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với ℓ. Gọi P là giao của AB và đường thẳng ℓ. Ta có $PC^2 = PA.PB$ nên từ đó ta có cách dựng như sau:

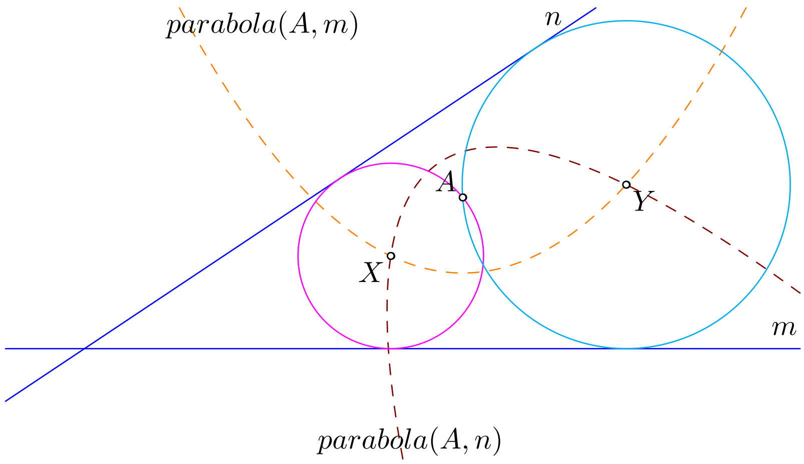
1. AB cắt ℓ tại P.

2. Vẽ đường tròn bất kỳ đi qua A, B, ví dụ đường tròn đường kính AB: $\odot(AB)$.
3. Từ P vẽ tiếp tuyến PT với $\odot(AB)$ (T là tiếp điểm).
4. Vẽ đường tròn $\odot(P, PT)$. Đường tròn này cắt ℓ tại hai điểm C, D. Hai đường tròn $\odot(ABC), \odot(ABD)$ là hai đường tròn phải dựng.

Nhận xét. Trường hợp đặc biệt, khi $A \equiv B$, sẽ có vô số đường tròn đi qua A mà tiếp xúc với ℓ. Tập hợp tâm các đường tròn này **tập hợp PL** ở mục **1.1**.

2.2 PLL (2)

Cho điểm A, hai đường thẳng m, n. Dựng đường tròn đi qua A và tiếp xúc với m, n.



Theo **1.1**, tập hợp tâm các đường tròn đi qua A và tiếp xúc với m là $parabola(A, m)$ (*parabola* tiêu điểm A, đường chuẩn m). Tập hợp tâm các đường tròn đi qua A và tiếp xúc với n là $parabola(A, n)$. Như vậy tâm đường tròn phải dựng là giao hai *parabola* trên. Tuy nhiên cần xét vị trí tương đối của A, B với ℓ để xác định khi nào *parabola* suy biến thành *line*.

Do hai *parabola* cắt nhau nhiều nhất tại 2 điểm nên trường hợp này sẽ có nhiều nhất 2 đường tròn. Trong hình vẽ là 2 đường tròn $\odot(X, XA)$ và $\odot(Y, YA)$.

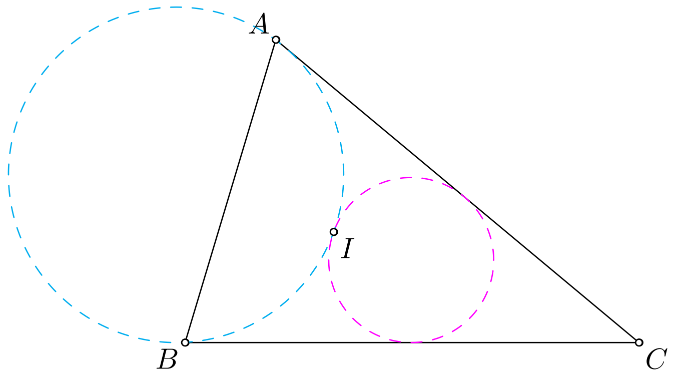
Trong gói **apollonius.asy** cần lưu ý hai hàm sau:

- point [] centers(point a, line lm, line ln): trả về tâm các đường tròn đi qua a và tiếp xúc với 2 đường thẳng lm, ln.
- circle [] tangents(point a, line lm, line ln): trả về các đường tròn đi qua a và tiếp xúc với 2 đường thẳng lm, ln.

Nhận thấy ở đây cũng dùng các hàm centers và tangents nhưng với tham số khác. Ví dụ sử dụng như sau:

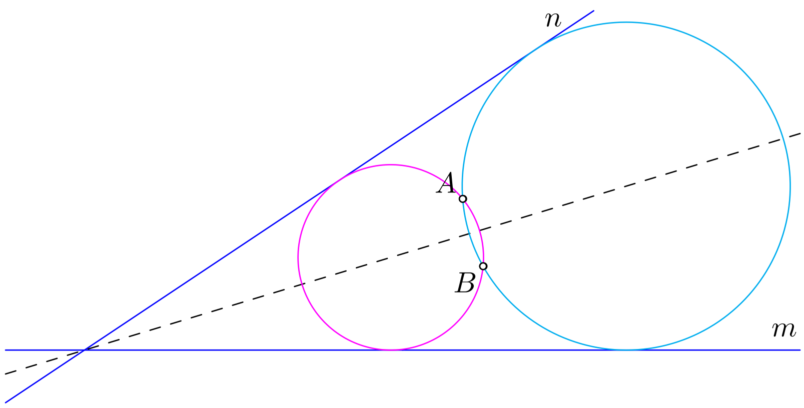
```
import geometry;
import apollonius;
unitsize(1cm);
defaultpen(fontsize(11pt));

point A = (1.2, 4); dot(Label("$A$",align=NW),A);
point B = (0, 0); dot(Label("$B$",align=SW),B);
point C = (6, 0); dot(Label("$C$",align=SE),C);
triangle t = triangle(A, B, C); draw(t);
point I = incenter(t); dot(Label("$I$",align=SE), I);
circle [] ct = tangents(I, t.BC, t.CA);
draw(ct[0]^^ct[1], dashed);
```

```
dot(A^^B^^C^^I, Fill(white));
shipout(bbox(1mm, invisible));
```



Trong ví dụ trên, hàm tangents(I, t.BC, t.CA) trả về đường tròn đi qua tâm nội tiếp I và tiếp xúc với hai cạnh BC, CA của tam giác $\triangle ABC$.

Cách dựng thông thường.

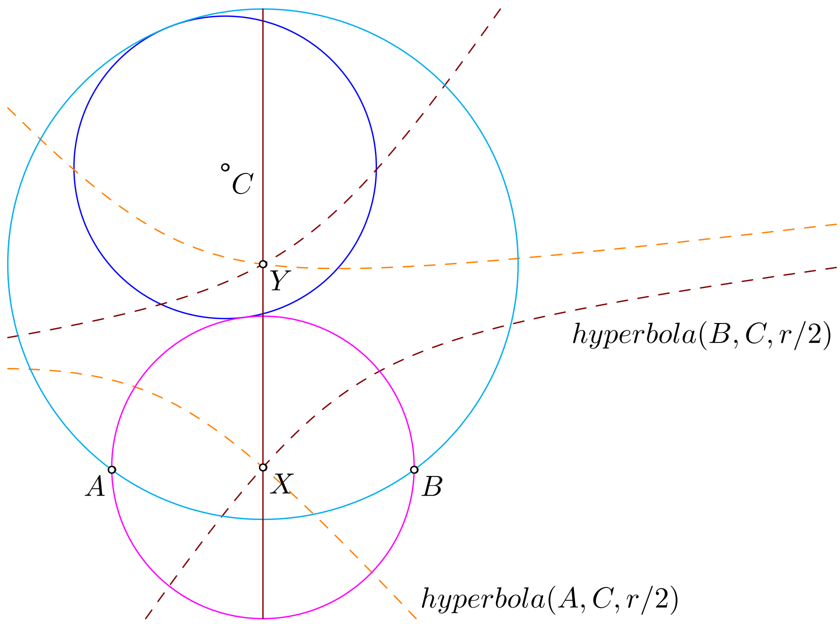


Vẽ ld phân giác góc $\angle(m, n)$, lưu ý phân giác này của góc chứa điểm A. Gọi B là điểm đối xứng với A qua ld. Khi đó trở về trường hợp **PPL**: dựng đường tròn đi qua hai điểm A, B và tiếp xúc với đường thẳng m hoặc n.

Nhận xét. Trường hợp đặc biệt, khi $m \equiv n$, sẽ có vô số đường tròn đi qua A mà tiếp xúc với m. Tập hợp tâm các đường tròn này là **tập hợp PL** ở mục **1.1**.

2.3 PPC (2)

Cho 2 điểm A, B, đường tròn $\odot(C)$. Dựng đường tròn đi qua A và tiếp xúc với $\odot(C)$.



Theo **1.2**, tập hợp tâm các đường tròn đi qua A và tiếp xúc với $\odot(C)$ là $hyperbola(A, C, r/2)$ (*hyperbola* tiêu điểm A, C, bán trục lớn $r/2$ với r là bán kính đường tròn $\odot(C)$). Tập hợp tâm các đường tròn đi qua B và tiếp xúc với $\odot(C)$ là $hyperbola(B, C, r/2)$. Như vậy tâm đường tròn phải dựng là giao hai *hyperbola* trên.

Nhận thấy hai *hyperbola* trên có thể cắt nhau tại 4 điểm và có 2 điểm không thoả mãn, nên ta xét giao của $hyperbola(A, C, r/2)$ với đường trung trực đoạn AB và kết quả có nhiều nhất 2 điểm. Trong hình vẽ là 2 đường tròn $\odot(X, XA)$ và $\odot(Y, YA)$.

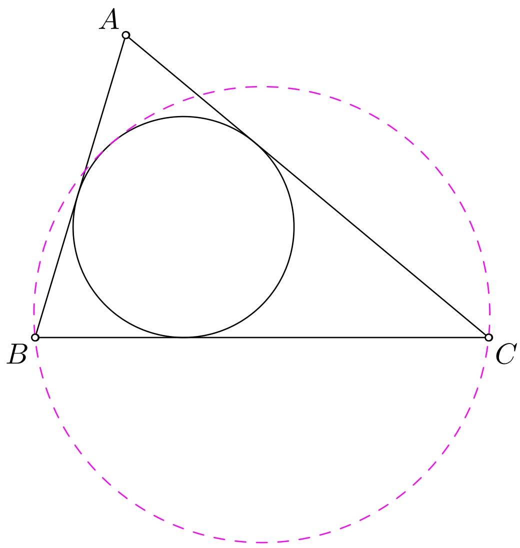
Ở đây cũng cần xét vị trí tương đối của A với $\odot(C)$ để xác định khi nào *hyperbola* suy biến thành *ellipse* hay thành *line*.

Trong gói **apollonius.asy** cần lưu ý hai hàm sau:

- point [] centers(point A, point B, circle cc): trả về tâm các đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với đường tròn $\odot(cc)$.
- circle [] tangents(point A, point B, circle cc): trả về các đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với đường tròn $\odot(cc)$.

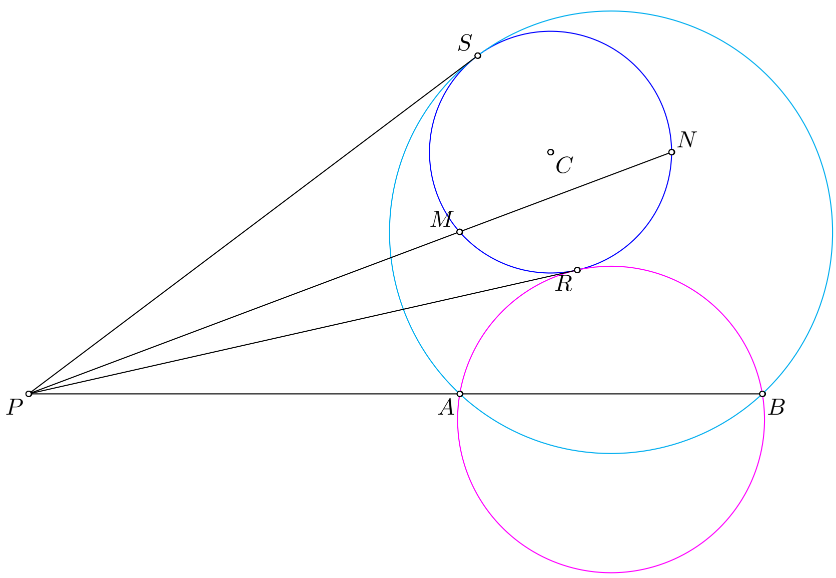
Ví dụ sử dụng như sau:

```
import geometry;
import apollonius;
unitsize(1cm);
defaultpen(fontsize(11pt));

point A = (1.2, 4); dot(Label("$A$",align=NW),A);
point B = (0, 0); dot(Label("$B$",align=SW),B);
point C = (6, 0); dot(Label("$C$",align=SE),C);
triangle t = triangle(A, B, C); draw(t);
circle ci = incircle(t); draw(ci);
circle [] ct = tangents(B, C, ci);

draw(ct[0], dashed);
dot(A^^B^^C, Fill(white));
shipout(bbox(1mm, invisible));
```



Trong ví dụ trên, hàm tangents(B, C, ci) trả về đường tròn đi qua B, C và tiếp xúc với đường tròn nội tiếp $\odot(ci)$ của tam giác $\triangle ABC$. Do đường tròn ct[1] suy biến thành đường thẳng BC nên hàm không trả về đường tròn.

Cách dựng thông thường.:

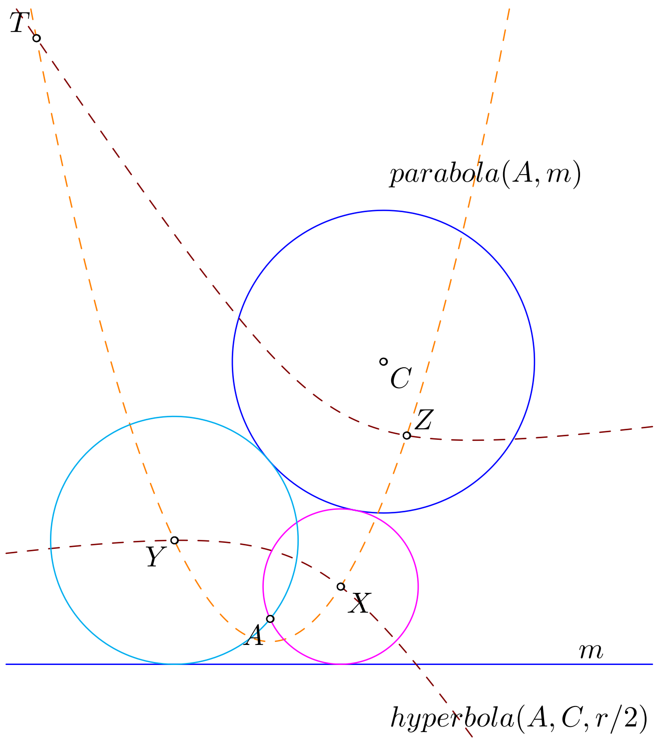


1. Dựng đường tròn bất kỳ đi qua A, B cắt $\odot(C)$ tại 2 điểm M, N, ví dụ dựng đường tròn $\odot(C, A, B)$.
2. MN cắt AB tại P. Từ P dựng hai tiếp tuyến PR, PS với đường tròn $\odot(C)$ (R, S là các tiếp điểm). Các đường tròn $\odot(R, A, B), \odot(S, A, B)$ là các đường tròn phải dựng.

Nhận xét. Trường hợp đặc biệt, khi $A \equiv B$, sẽ có vô số đường tròn đi qua A mà tiếp xúc với $\odot(C)$. Tập hợp tâm các đường tròn này là **tập hợp PC** ở mục **1.2**.

2.4 PLC (4)

Cho điểm A, đường thẳng m và đường tròn $\odot(C)$. Dựng đường tròn đi qua A, tiếp xúc với m và $\odot(C)$.



Theo **1.1**, tập hợp tâm các đường tròn đi qua A tiếp xúc với đường thẳng m là $parabola(A, m)$.

Theo **1.2**, tập hợp tâm các đường tròn đi qua A và tiếp xúc với $\odot(C)$ là $hyperbola(A, C, r/2)$ ($hyperbola$ tiêu điểm A, C, bán trục lớn $r/2$ với r là bán kính đường tròn $\odot(C)$). Như vậy tâm đường tròn phải dựng là giao $parabola$ và $hyperbola$ trên.

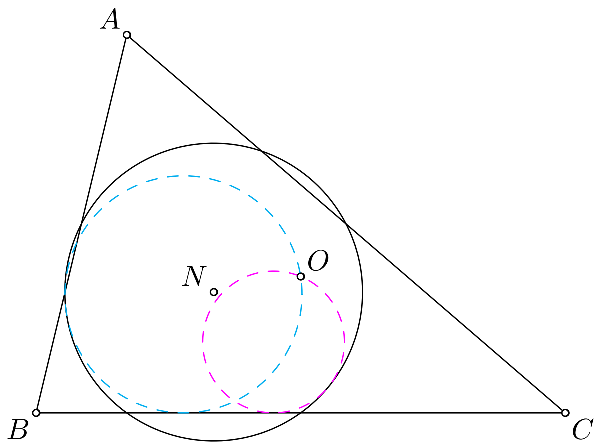
Nhận thấy 2 tập hợp trên có thể cắt nhau tại 4 điểm, trong hình vẽ là các điểm X, Y, Z, T tương ứng với tâm các đường tròn cần dựng. Khi đó chỉ cần dựng đường tròn tâm X, Y, Z, T và đi qua điểm A.

Trong gói **apollonius.asy** cần lưu ý hai hàm sau:

- point [] centers (point A, line lm, circle cc): trả về tâm các đường tròn đi qua A, tiếp xúc với m và $\odot(C)$.
- circle [] tangents(point A, line lm, circle cc): trả về các đường tròn đi qua A, tiếp xúc với m và $\odot(C)$.

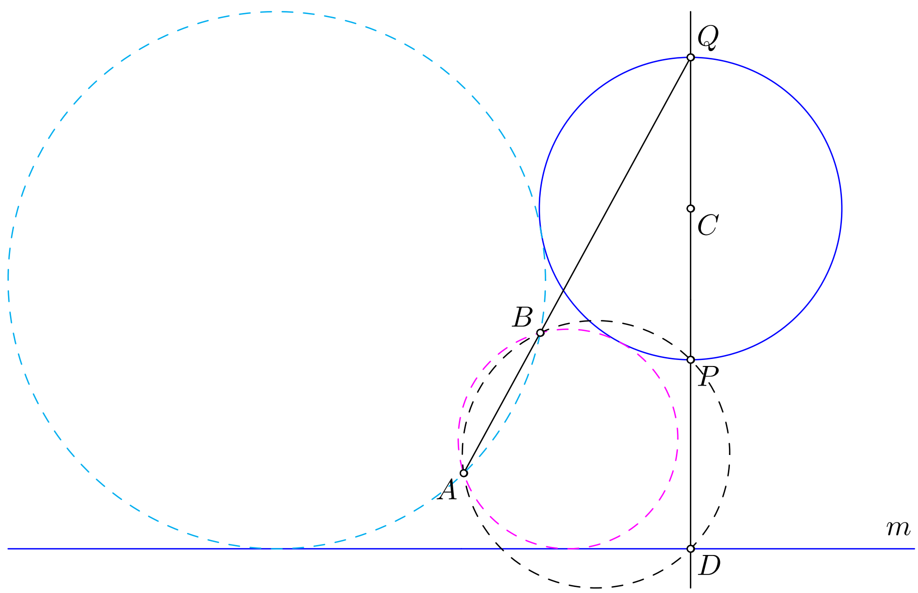
Ví dụ sử dụng như sau:

```
import geometry;
import apollonius;
unitsize(1cm);
defaultpen(fontsize(11pt));

point A = (1.2, 5); dot(Label("$A$",align=NW),A);
point B = (0, 0); dot(Label("$B$",align=SW),B);
point C = (7, 0); dot(Label("$C$",align=SE),C);
triangle t = triangle(A, B, C); draw(t);
point O = circle(t).C; dot(Label("$O$",align=NE), O);
point H = orthocentercenter(t);
point N = (O+H)/2; dot(Label("$N$",align=NW), N);
circle cn = circle(N, abs(N-(B+C)/2)); draw(cn);

circle [] ct = tangents(O, t.BC, cn);
draw(ct[0], magenta+dashed);
draw(ct[1], Cyan+dashed);

dot(A^^B^^C^^O^^N, Fill(white));
shipout(bbox(1mm, invisible));
```



Trong ví dụ trên, đường tròn $\odot(cn)$ là đường tròn *Euler* và O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác $\triangle ABC$. Hàm tangents(O, t.BC, cn) vẽ hai đường tròn ct[0], ct[1] đi qua O, tiếp xúc với $t.BC$ và tiếp xúc với đường tròn $\odot(cn)$. Trong trường hợp này có 2 đường tròn thoả mãn.

Cách dựng thông thường.

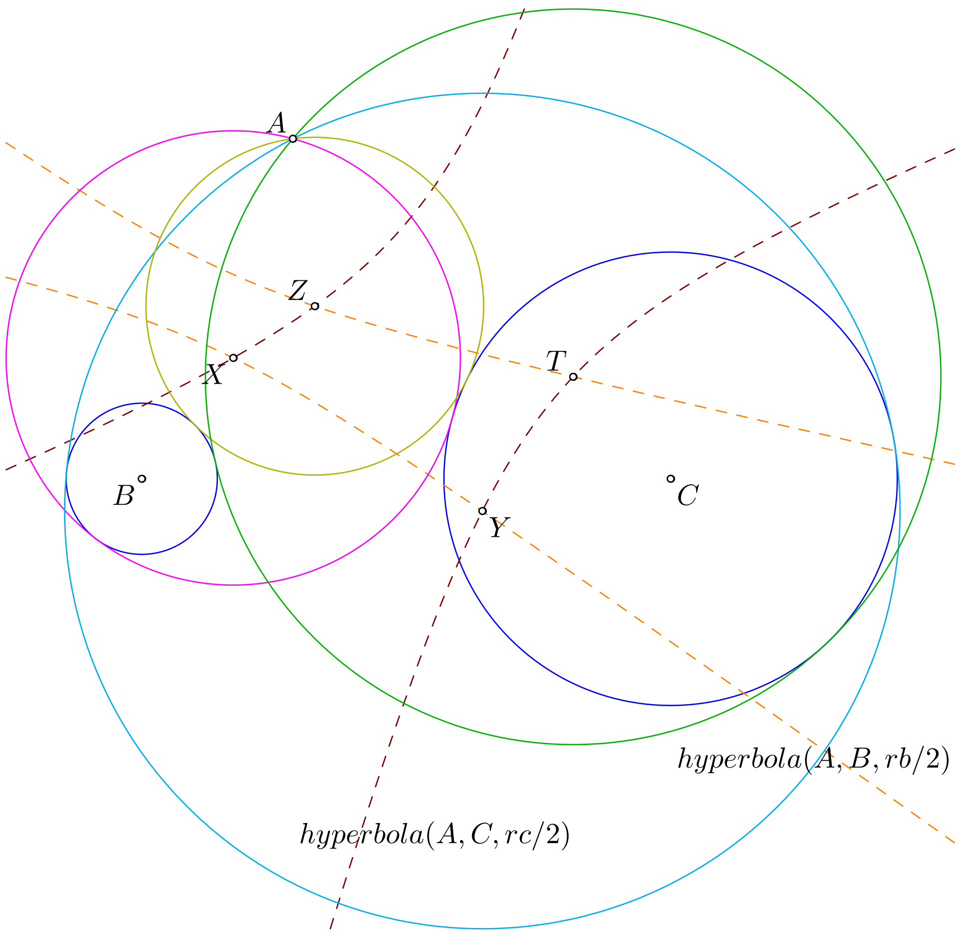


1. Đường thẳng qua C vuông góc với m cắt m tại D và cắt $\odot(C)$ tại hai điểm P, Q (hình vẽ).
2. Dựng đường tròn $\odot(A, D, P)$. AQ cắt lại $\odot(A, D, P)$ tại B. Trở lại bài toán **PPL**: dựng đường tròn đi qua A, B và tiếp xúc với đường thẳng m.
3. Đổi vai trò P, Q: AP cắt lại đường tròn $\odot(A, D, Q)$ để xác định đỉnh B thứ hai.

Nhận xét. Trường hợp đặc biệt, khi đường thẳng m tiếp xúc với đường tròn $\odot(C)$ tại điểm A, sẽ có vô số đường tròn đi qua A mà tiếp xúc với m và $\odot(C)$. Tâm các đường tròn này nằm trên đường thẳng AC.

2.5 PCC (4)

Cho điểm A, đường tròn $\odot(B)$ và $\odot(C)$. Dựng đường tròn đi qua A, tiếp xúc với $\odot(B)$ và $\odot(C)$.



Theo **1.2**, tập hợp tâm các đường tròn đi qua A tiếp xúc với đường tròn $\odot(B)$ là $hyperbola(A, B, rb/2)$. Tập hợp tâm các đường tròn đi qua A và tiếp xúc với $\odot(C)$ là $hyperbola(A, C, rc/2)$. Như vậy tâm đường tròn phải dựng là giao hai *hyperbola* trên.

Nhận thấy 2 tập hợp trên có thể cắt nhau tại 4 điểm, trong hình vẽ là các điểm X, Y, Z, T tương ứng với tâm các đường tròn cần dựng. Khi đó chỉ cần dựng đường tròn tâm X, Y, Z, T và đi qua điểm A.

Trong gói **apollonius.asy** cần lưu ý hai hàm sau:

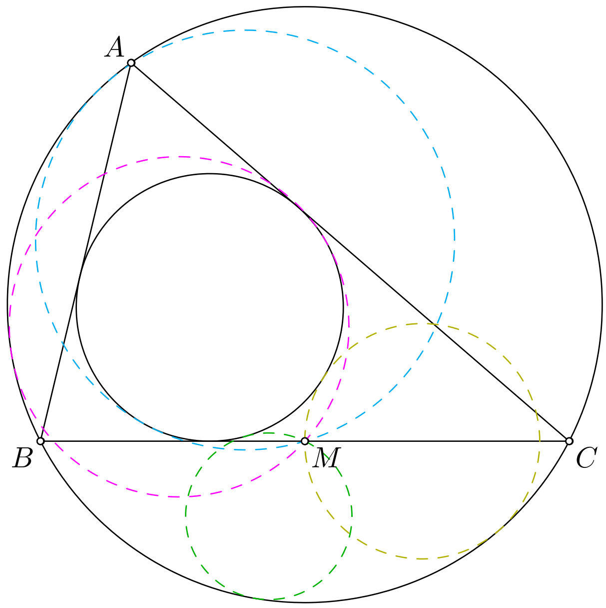
- point [] centers(point A, circle cb, circle cc): trả về tâm các đường tròn đi qua A, tiếp xúc với $\odot(cb)$ và $\odot(cc)$.
- circle [] tangents(point A, circle cb, circle cc): trả về các đường tròn đi qua A, tiếp xúc với $\odot(cb)$ và $\odot(cc)$.

Ví dụ sử dụng như sau:

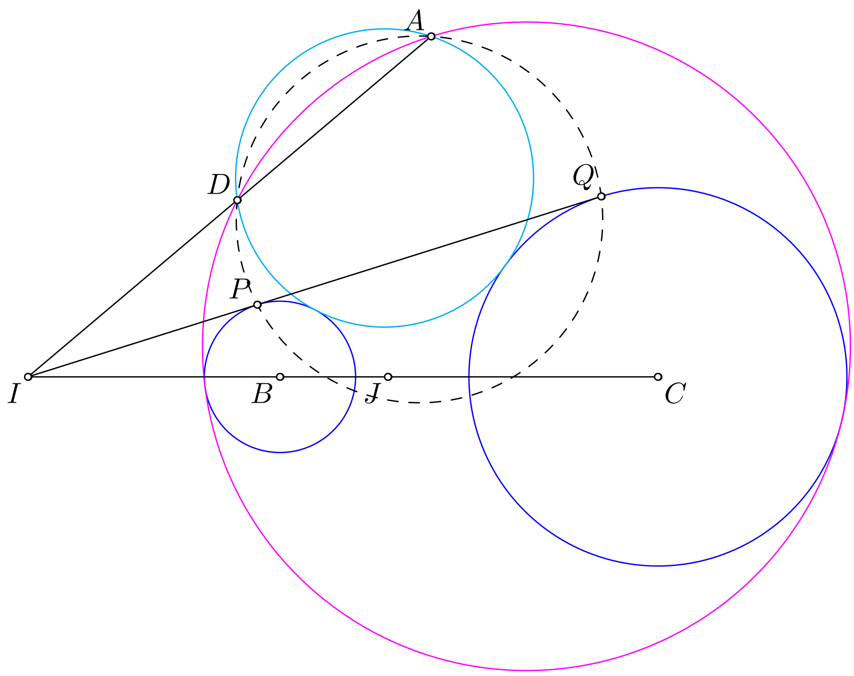
```
import geometry;
import apollonius;
unitsize(1cm);
defaultpen(fontsize(11pt));

point A = (1.2, 5); dot(Label("$A$",align=NW),A);
point B = (0, 0); dot(Label("$B$",align=SW),B);
point C = (7, 0); dot(Label("$C$",align=SE),C);
triangle t = triangle(A, B, C); draw(t);
circle co = circle(t); draw(co);
circle ci = incircle(t); draw(ci);
point M = (B+C)/2; dot(Label("$M$",align=SE), M);

circle [] ct = tangents(M, co, ci);

draw(ct[0], magenta+dashed);
```

```
draw(ct[1], Cyan+dashed);
draw(ct[2], 0.7yellow+dashed);
draw(ct[3], 0.7green+dashed);

dot(A^^B^^C^^M, Fill(white));
shipout(bbox(1mm, invisible));
```

Trong ví dụ này, M là trung điểm BC. Hàm tangents(M, co, ci) vẽ các đường tròn đi qua M và tiếp xúc với đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp của tam giác $\triangle ABC$.



Cách dựng thông thường.

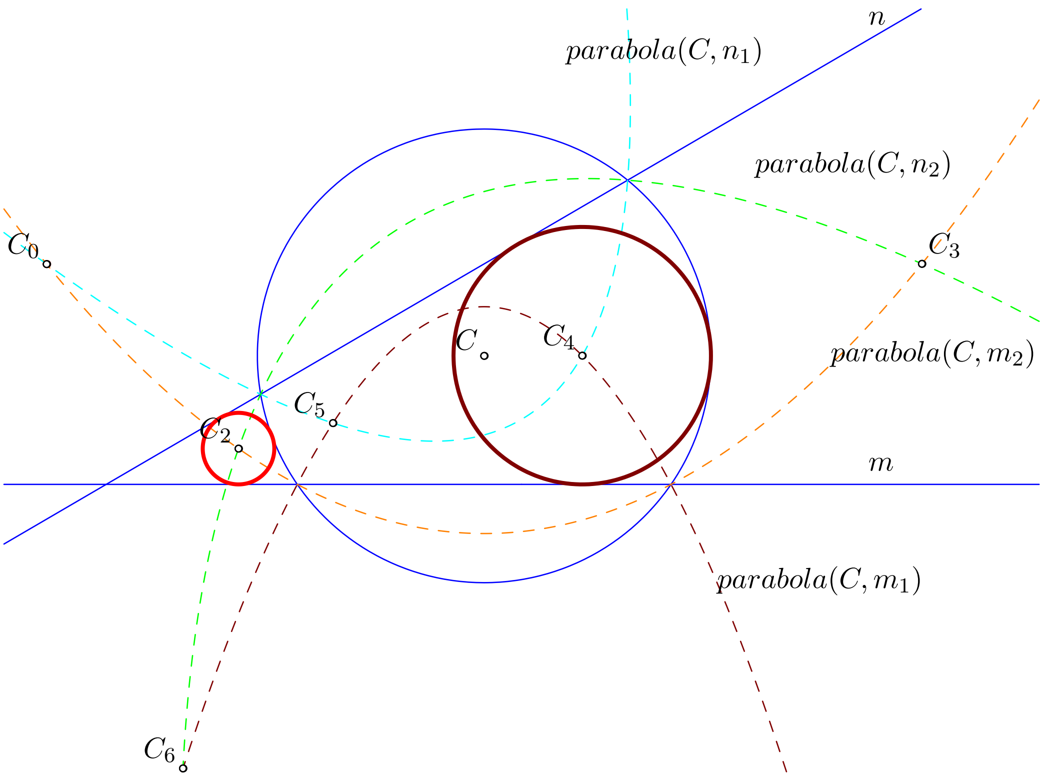


1. Dựng I là tâm vị tự ngoài (hoặc trong) của hai đường tròn $\odot(B)$ và $\odot(C)$.
2. Dựng tiếp tuyến chung $\overline{IPQ}$ của hai đường tròn $\odot(B)$ và $\odot(C)$ (P, Q là các tiếp điểm).
3. Đường thẳng AI cắt lại đường tròn $\odot(A, P, Q)$ tại D. Trở lại bài toán **PPC**: dựng đường tròn đi qua A, D và tiếp xúc với đường tròn $\odot(B)$ (hoặc $\odot(C)$).

Nhận xét. Trường hợp đặc biệt, Khi $\odot(B) \equiv \odot(C)$, sẽ có vô số đường tròn đi qua A mà tiếp xúc với $\odot(B)$. Tập hợp tâm các đường tròn này là **tập hợp PC**.

2.6 LLC (8)

Cho hai đường thẳng m, n và đường tròn $\odot(C)$. Dựng đường tròn tiếp xúc với m, n và $\odot(C)$.



Theo **1.3**, tập hợp tâm các đường tròn tiếp xúc với m và $\odot(C)$ là hai *parabola* ký hiệu $parabola(C, m_1)$ và $parabola(C, m_2)$. Tập hợp tâm các đường tròn tiếp xúc với n và $\odot(C)$ là hai *parabola* ký hiệu $parabola(C, n_1)$ và $parabola(C, n_2)$.

Như vậy tâm các đường tròn là giao của cặp $parabola(C, m_x)$ và $parabola(C, n_x)$ (với $x = 1..2$). Trên hình vẽ là các điểm $C_0, C_2, C_3, C_4, \ldots$. Khi đó chỉ cần vẽ đường tròn tâm C_x và tiếp xúc với m hoặc n.

Giao điểm của mỗi cặp *parabola* là 2 nên số đường tròn tối đa trong trường hợp này là 8.

Trong gói **apollonius.asy** cần lưu ý hai hàm sau:

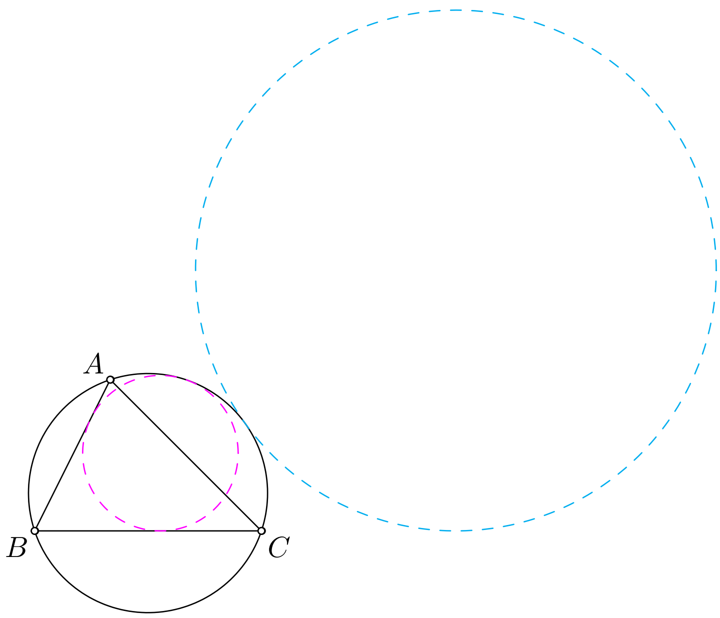
- point [] centers(line lm, line ln, circle cc): trả về tâm các đường tròn đi tiếp xúc với lm, ln và tiếp xúc với $\odot(cc)$.
- circle [] tangents(line lm, line ln, circle cc): trả về các đường tròn đi tiếp xúc với lm, ln và tiếp xúc với $\odot(cc)$.

Ví dụ sử dụng như sau:

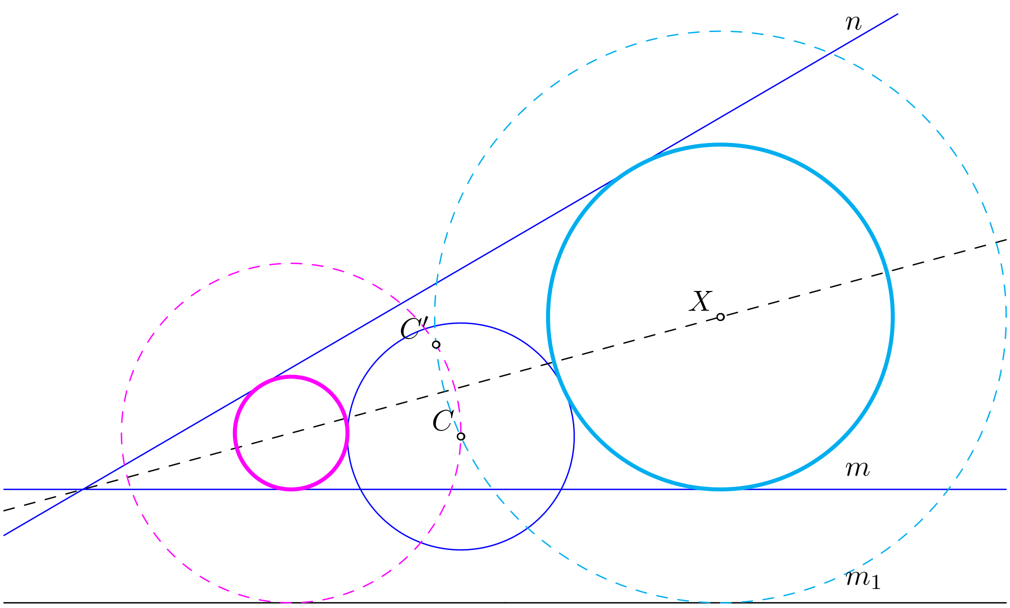
```
import geometry;
import apollonius;
unitsize(1cm);
defaultpen(fontsize(11pt));

point A = (1.2, 2); dot(Label("$A$",align=NW),A);
point B = (0, 0); dot(Label("$B$",align=SW),B);
point C = (4, 0); dot(Label("$C$",align=SE),C);
```

```
triangle t = triangle(A, B, C); draw(t);
circle co = circle(t); draw(co);

circle [] ct = tangents(t.AB, t.BC, co);
draw(ct[1], magenta+dashed);
draw(ct[2], Cyan+dashed);

dot(A^^B^^C, Fill(white));
shipout(bbox(1mm, invisible));
```

Trong ví dụ này, hàm tangents(t.AB, t.BC, co) vẽ các đường tròn tiếp xúc với hai cạnh AB, BC và đường tròn ngoại tiếp của tam giác $\triangle ABC$. $ct[1], ct[2]$ chính là các đường tròn *Mixtilinear* nội, *Mixtilinear* ngoại đối với đỉnh B của tam giác $\triangle ABC$.



Cách dựng thông thường.



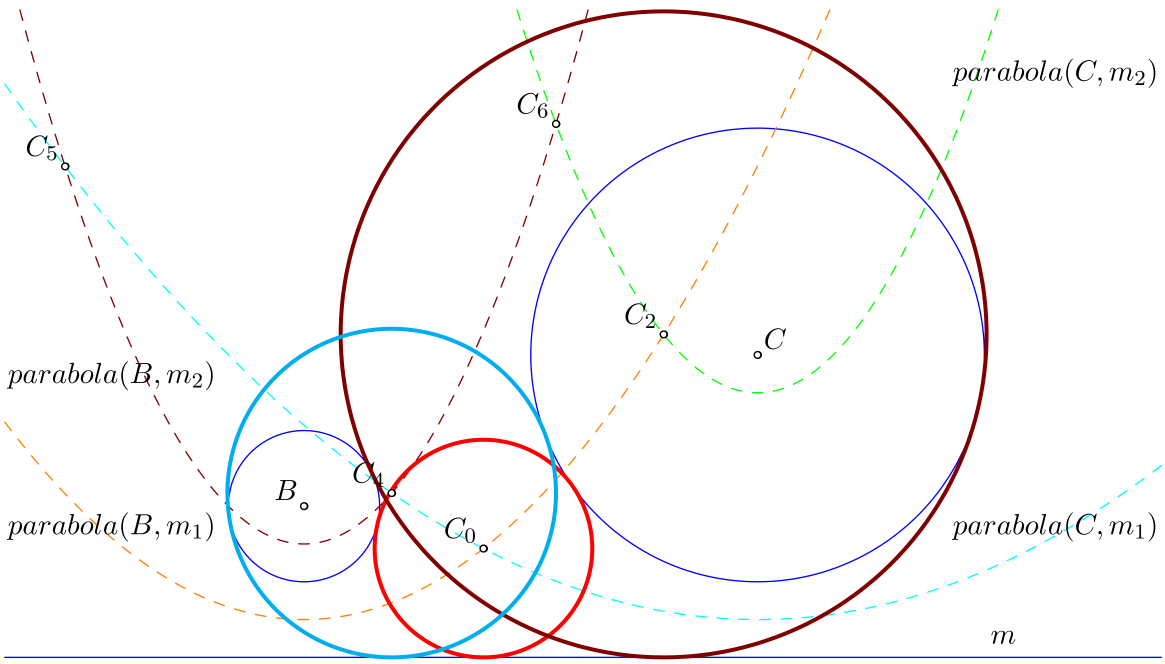
1. Dựng C' đối xứng với C qua phân giác góc $\angle(m, n)$.
2. Dựng đường thẳng $m_1 \parallel m$ và cách m một khoảng bằng r là bán kính của đường tròn $\odot(C)$. Trở lại bài toán **PPL**: dựng đường tròn $\odot(X)$ đi qua C, C' và tiếp xúc với đường thẳng m_1.

3. Đường tròn $\odot(X, rx - r)$ là đường tròn phải dựng.
4. Thay đổi phân giác trong thành phân giác ngoài, thay đổi m thành n ta sẽ có các kết quả khác.

Nhận xét. Trường hợp đặc biệt, khi $m \equiv n$, sẽ có vô số đường tròn tiếp xúc với m mà tiếp xúc với $\odot(C)$. Tập hợp tâm các đường tròn này là **tập hợp LC**.

2.7 LCC (8)

Cho đường thẳng m và hai đường tròn $\odot(B)$, $\odot(C)$. Dựng đường tròn tiếp xúc với m, $\odot(B)$ và $\odot(C)$.



Theo **1.3**, tập hợp tâm các đường tròn tiếp xúc với m và $\odot(B)$ là hai *parabola* ký hiệu $parabola(B, m_1)$ và $parabola(B, m_2)$. Tập hợp tâm các đường tròn tiếp xúc với m và $\odot(C)$ là hai *parabola* ký hiệu $parabola(C, m_1)$ và $parabola(C, m_2)$.

Như vậy tâm các đường tròn là giao của các cặp $parabola(B, m_x)$ và $parabola(C, m_x)$ (với $x = 1..2$). Trên hình vẽ là các điểm $C_0, C_2, C_4, ...$ Khi đó chỉ cần vẽ đường tròn tâm C_x và tiếp xúc với m.

Giao điểm của mỗi cặp *parabola* là 2 nên số đường tròn tối đa trong trường hợp này là 8.

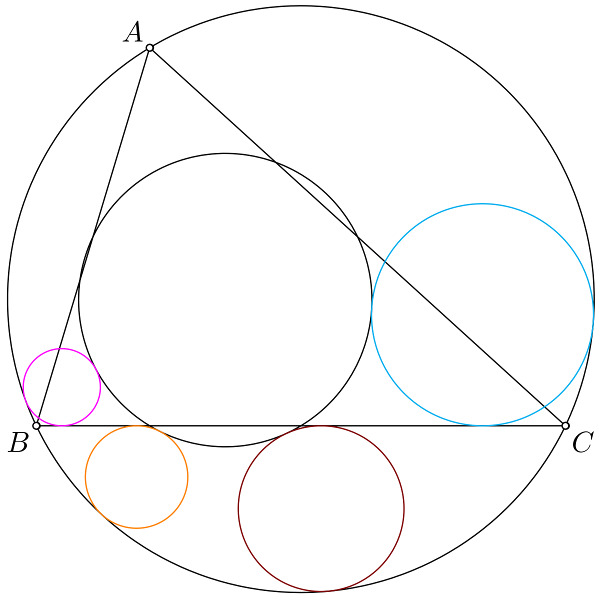
Trong gói **apollonius.asy** cần lưu ý hai hàm sau:

- point [] centers(line lm, circle cb, circle cc): trả về tâm các đường tròn tiếp xúc với lm và tiếp xúc với $\odot(cb), \odot(cc)$.
- circle [] tangents(line lm, circle cb, circle cc): trả về các đường tròn tiếp xúc với lm và tiếp xúc với $\odot(cb), \odot(cc)$.

Ví dụ sử dụng như sau:

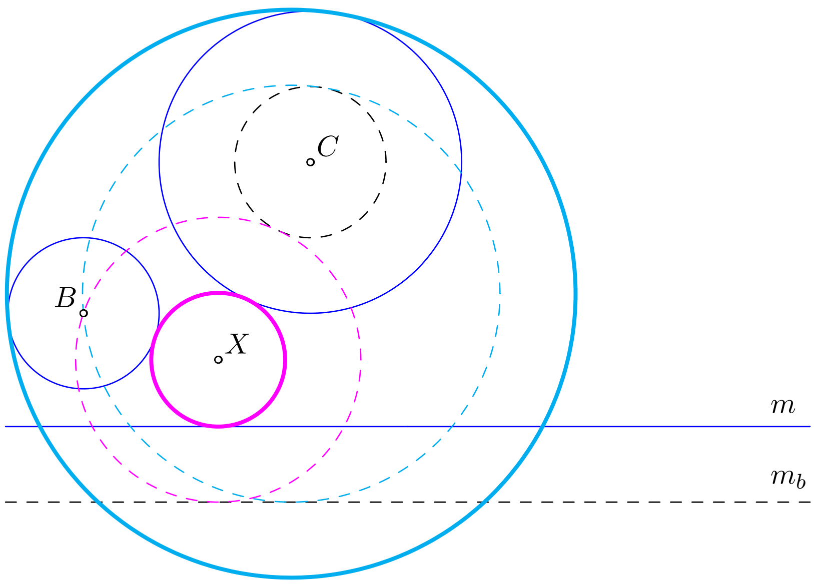
```
import geometry;
import apollonius;
unitsize(1cm);
defaultpen(fontsize(11pt));

point A = (1.5, 5); dot(Label("$A$",align=NW),A);
point B = (0, 0); dot(Label("$B$",align=SW),B);
point C = (7, 0); dot(Label("$C$",align=SE),C);
```

```
triangle t = triangle(A, B, C); draw(t);
circle co = circle(t); draw(co);

point H = orthocentercenter(t);
point N = (circle(t).C+H)/2;
point M = (B+C)/2;
circle cn = circle(N, abs(N—M)); draw(cn);

circle [] ct = tangents(t.BC, cn, co);
draw(ct[0], magenta+dashed);
draw(ct[1], Cyan+dashed);
draw(ct[2], orange+dashed);
draw(ct[3], brown+dashed);

dot(A^^B^^C, Fill(white));
shipout(bbox(1mm, invisible));
```



Trong ví dụ này, hàm tangents(t.BC, co, cn) vẽ các đường tròn tiếp xúc với cạnh BC, tiếp xúc đường tròn ngoại tiếp và đường tròn *Euler* của tam giác $\triangle ABC$.

Cách dựng thông thường.



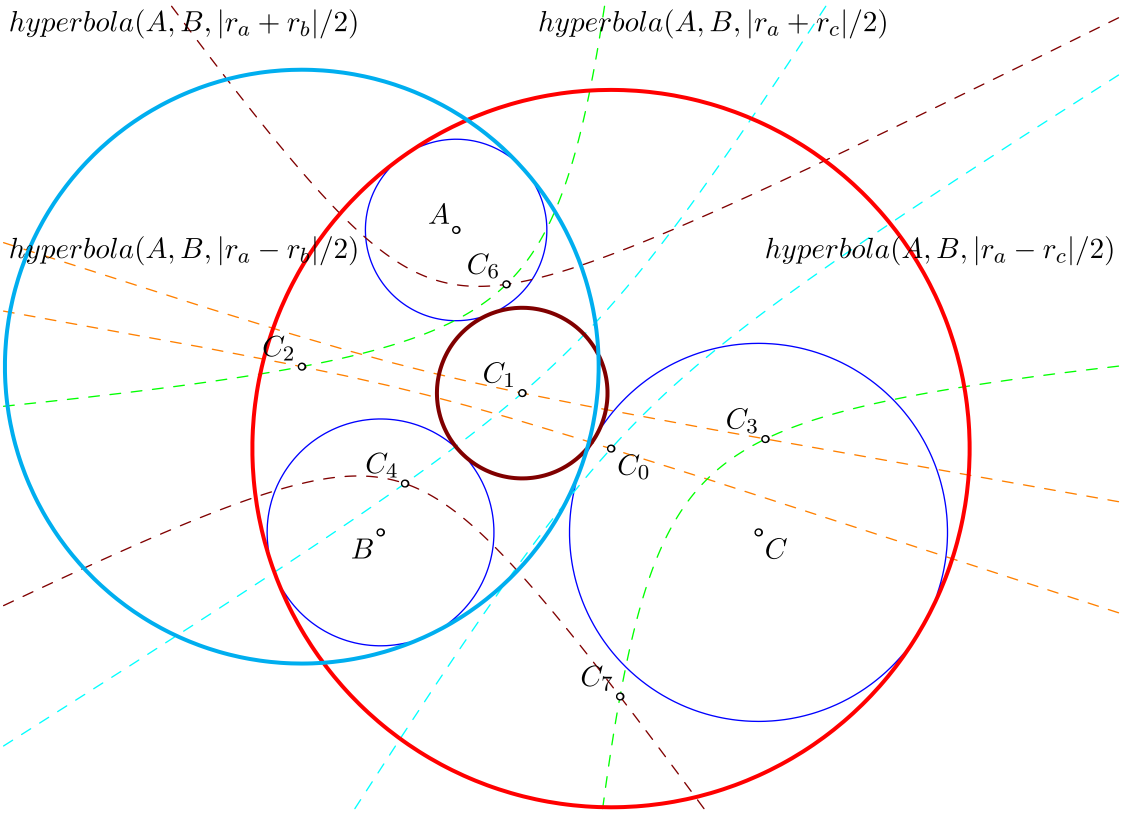
3. Dựng đường tròn $\odot(C')$ cùng tâm với $\odot(C)$ và có bán kính là $r_c - r_b$. Trở lại bài toán **PLC**: dựng đường tròn $\odot(X)$ đi qua B và tiếp xúc với đường thẳng m_b và đường tròn $\odot(C')$. Đường tròn $\odot(X, r_x - r_b)$ hoặc $\odot(X, r_x + r_b)$ là đường tròn phải dựng.

1. Trong hai đường tròn $\odot(B), \odot(C)$ chọn đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Trong ví dụ là r_b.
2. Dựng đường thẳng $m_b \parallel m$ và cách m một khoảng bằng r_b.
3. Dựng đường tròn $\odot(C')$ cùng tâm với $\odot(C)$ và có bán kính là $r_c - r_b$. Trở lại bài toán **PLC**: dựng đường tròn $\odot(X)$ đi qua B và tiếp xúc với đường thẳng m_b và đường tròn $\odot(C')$. Đường tròn $\odot(X, r_x - r_b)$ hoặc $\odot(X, r_x + r_b)$ là đường tròn phải dựng.

Nhận xét. Trường hợp đặc biệt, khi $\odot(B) \equiv \odot(C)$, sẽ có vô số đường tròn tiếp xúc với m mà tiếp xúc với $\odot(B)$. Tập hợp tâm các đường tròn này là **tập hợp LC**.

2.8 CCC (8)

Cho 3 đường tròn $\odot(A), \odot(B)$ và $\odot(C)$. Dựng đường tròn tiếp xúc với $\odot(A), \odot(B)$ và $\odot(C)$.



Theo **1.4**, tập hợp tâm các đường tròn tiếp xúc với $\odot(A)$ và $\odot(B)$ là hai *hyperbola* ký hiệu $hyperbola(A, B, |r_a + r_b|/2)$ và $hyperbola(A, B, |r_a - r_b|/2)$. Tập hợp tâm các đường tròn tiếp xúc với $\odot(A)$ và $\odot(C)$ là hai *hyperbola* ký hiệu $hyperbola(A, C, |r_a + r_c|/2)$ và $hyperbola(A, C, |r_a - r_c|/2)$.

Như vậy tâm các đường tròn là giao của các cặp $hyperbola(A, B)$ và $hyperbola(A, C)$. Trên hình vẽ là các điểm $C_0, C_2, C_4, \ldots$. Khi đó chỉ cần vẽ đường tròn tâm C_x và tiếp xúc với $\odot(A)$ và kiểm tra đường tròn này có tiếp xúc với $\odot(B)$ và $\odot(C)$.

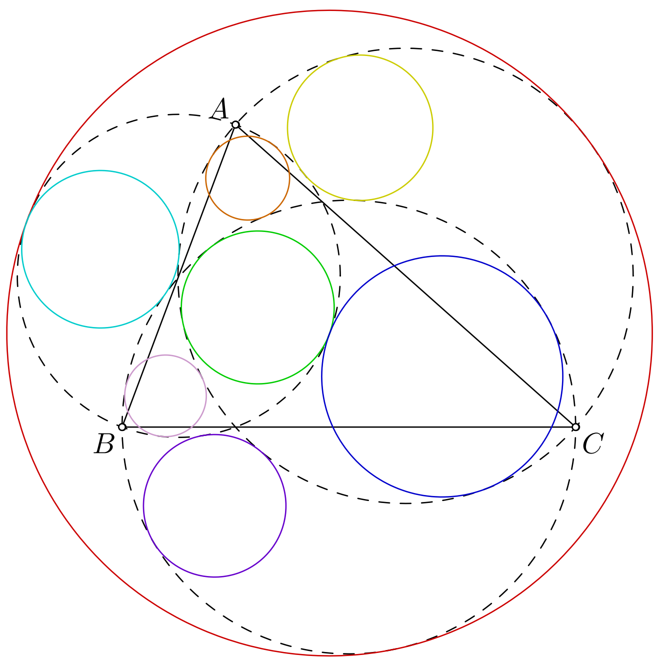
Giao điểm của mỗi cặp *hyperbola* là 4 nên số giao tối đa là 16 nhưng số đường tròn tối đa trong trường hợp này là 8.

Ở đây cần lưu ý hai hàm sau:

- point [] centers(circle ca, circle cb, circle cc): trả về tâm các đường tròn tiếp xúc với $\odot(ca), \odot(cb)$ và $\odot(cc)$.
- circle [] tangents(circle ca, circle cb, circle cc): trả về các đường tròn tiếp xúc với $\odot(ca), \odot(cb)$ và $\odot(cc)$.

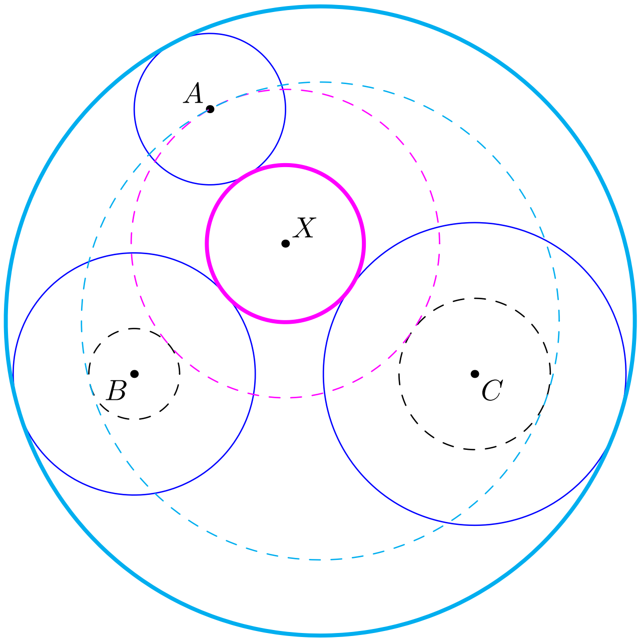
Trong gói **apollonius.asy** cần lưu ý hai hàm sau:

```
import geometry;
import apollonius;
unitsize(1cm);
defaultpen(fontsize(11pt));

point A = (1.5, 5); dot(Label("$A$",align=NW),A);
point B = (0, 0); dot(Label("$B$",align=SW),B);
point C = (7, 0); dot(Label("$C$",align=SE),C);
triangle t = triangle(A, B, C); draw(t);

circle ca = circle(B, C), cb = circle(C, A), cc = circle(A, B);
draw(ca^^cb^^cc, dashed);

circle [] ct = tangents(ca, cb, cc);
pen [] color = {Cyan, green, blue, cyan, pink, yellow, orange, purple};
for(int i = 0; i<ct.length; ++i) draw(ct[i], 0.8*color[i]);

dot(A^^B^^C, Fill(white));
shipout(bbox(1mm, invisible));
```



Trong ví dụ này, hàm tangents(ca, cb, cc) vẽ các đường tròn tiếp xúc với 3 đường tròn $\odot(BC), \odot(CA)$ và $\odot(AB)$.

Cách dựng thông thường.



1. Trong ba đường tròn $\odot(A), \odot(B), \odot(C)$ chọn đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Trong ví dụ là r_a.
2. Dựng đường tròn $\odot(B')$ cùng tâm với $\odot(B)$ và có bán kính là $r_b - r_a$. Dựng đường tròn $\odot(C')$ cùng tâm với $\odot(C)$ và có bán kính là $r_c - r_a$. Trở về bài toán **PCC**: dựng đường tròn $\odot(X)$ đi qua A và tiếp xúc với hai đường tròn $\odot(B), \odot(C)$.
3. Đường tròn $\odot(X, r_x - r_a)$ hoặc $\odot(X, r_x + r_a)$ là đường tròn phải dựng.

Để dựng các đường tròn khác, có thể thay đổi $\odot(B')$ thành $\odot(B, r_b + r_a)$ hoặc $\odot(C)$ thành $\odot(C, r_c + r_a)$.

Nhận xét.

- Trường hợp đặc biệt, khi $\odot(A)$, $\odot(B)$ và $\odot(C)$ cùng tiếp xúc với nhau tại một điểm, sẽ có vô số đường tròn tiếp xúc với cả ba đường tròn trên. Tập hợp tâm các đường tròn này là đường nối tâm các đường tròn.

- Ngoài cách dựng trên của *François Viète* còn có cách dựng của Gergonne sử dụng tâm vị tự và tâm đẳng phương.

3 Nghịch đảo

Nhận thấy trong 8 trường hợp ở mục 2, khi đối tượng là đường tròn thì độ khó và phức tạp tăng lên. Do công cụ nghịch đảo có thể biến đường tròn thành đường thẳng, biến hai đường tròn thành hai đường tròn đồng tâm, ... nên có thể làm đơn giản vấn đề cần giải quyết. Tuy nhiên, việc sử dụng nghịch đảo thường có hiệu quả trong các tình huống cụ thể.

Vấn đề quan trọng khi sử dụng nghịch đảo là chọn tâm nghịch đảo và bán kính nghịch đảo.

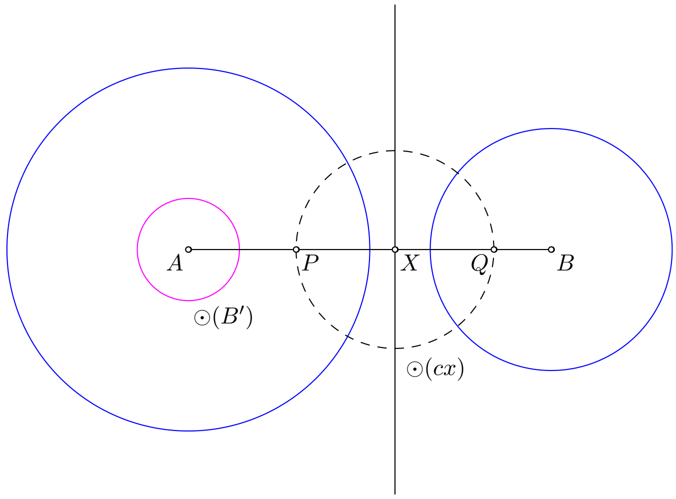
Tâm nghịch đảo có thể chọn:

1. Giao điểm của hai đường tròn. Khi đó qua phép nghịch đảo, hai đường tròn trở thành hai đường thẳng và việc dựng hình trở nên dễ dàng hơn.
2. Điểm "giới hạn"của hai đường tròn. Khi đó qua phép nghịch đảo, hai đường tròn trở thành hai đường tròn đồng tâm. Khi một trong hai đường tròn suy biến thành đường thẳng, ta cũng có thể sử dụng điểm "giới hạn"của đường thẳng và đường tròn.

Bán kính nghịch đảo chọn phù hợp sẽ giúp chúng ta đỡ vẽ thêm hình.

Ngoài ra, chúng ta cũng có thể sử dụng phép nghịch đảo biến hai đường tròn bất kỳ thành hai đường tròn có bán kính bằng nhau (trường hợp PCC, LCC, CCC).

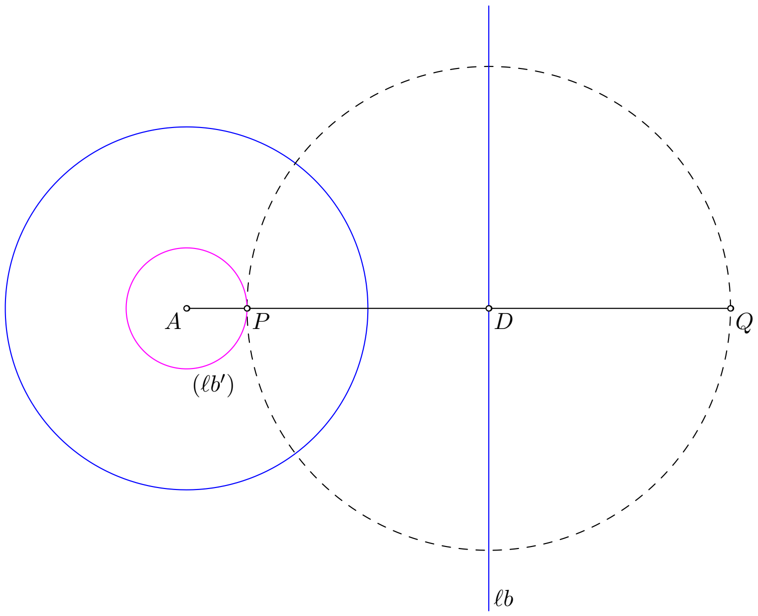
3.1 Điểm "giới hạn"của hai đường tròn



Cho hai đường tròn $\odot(A)$ và $\odot(B)$. P được gọi là điểm "giới hạn"(limiting point) của hai đường tròn nếu phép nghịch đảo cực P, phương tích bất kỳ, hai đường tròn trở thành hai đường tròn đồng tâm.

Với 2 đường tròn sẽ có 2 điểm "giới hạn". Để xác định điểm "giới hạn", xác định X là giao của trục đẳng phương giữa 2 đường tròn $\odot(A)$ và $\odot(B)$. Đường tròn $\odot(cx)$ là đường tròn tâm X và trực giao với $\odot(A)$ và $\odot(B)$. Đường tròn này cắt AB tại 2 điểm P, Q là 2 điểm "giới hạn".

Trên hình vẽ, xét phép nghịch đảo $inv(P)$ với cực nghịch đảo P, biến $\odot(A)$ thành chính nó, khi đó biến $\odot(B)$ thành $\odot(B')$ đồng tâm với $\odot(A)$.



Khi $\odot(B)$ suy biến thành đường thẳng ℓb thì điểm "giới hạn"được xác định như sau: Gọi D là hình chiếu vuông góc của A lên ℓb. Gọi $\odot(D)$ là đường tròn tâm D và trực giao với $\odot(A)$. Khi đó $\odot(D)$ cắt AD tại P, Q là 2 điểm "giới hạn"của $\odot(A)$ và đường thẳng ℓb.

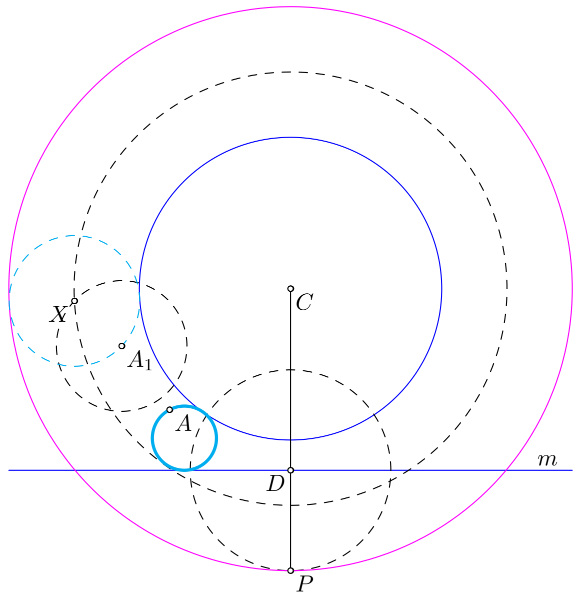
Trên hình vẽ, xét phép nghịch đảo $inv(P)$ với cực nghịch đảo P, biến $\odot(A)$ thành chính nó, khi đó biến ℓb thành $\odot(\ell b')$ đồng tâm với $\odot(A)$.

Chúng ta xét một số tình huống sau:

3.2 Trường hợp PLC

Cho điểm A, đường thẳng m và đường tròn $\odot(C)$. Dựng đường tròn đi qua A, tiếp xúc với m và $\odot(C)$.

Trường hợp này, sử dụng điểm "giới hạn"P của đường thẳng m và đường tròn $\odot(C)$.



1. Gọi D là hình chiếu vuông góc của C lên đường thẳng m.
2. Đường tròn tâm D trực giao với $\odot(C)$ cắt CD tại P. Xác định phép nghịch đảo $inv(P)$ cực P biến $\odot(C)$ thành chính nó,
3. Vẽ đường tròn $\odot(C, CP)$.
4. Xác định $r_a = (CP - r_c)/2$. Vẽ đường tròn $(C, r_c + r_a)$.
5. Xác định A_1 là ảnh của A qua phép nghịch đảo $inv(P)$ và đường tròn $(A1, r_a)$. Đường tròn này cắt đường tròn $(C, r_c + r_a)$ tại X. Ảnh của $\odot(X, XA1)$ qua phép nghịch đảo $inv(P)$ là đường tròn phải dựng.

3.3 Trường hợp PCC

Cho điểm A, đường tròn $\odot(B)$ và $\odot(C)$. Dựng đường tròn đi qua A, tiếp xúc với $\odot(B)$ và $\odot(C)$.

a. Hai đường tròn $\odot(B)$ và $\odot(C)$ cắt nhau.

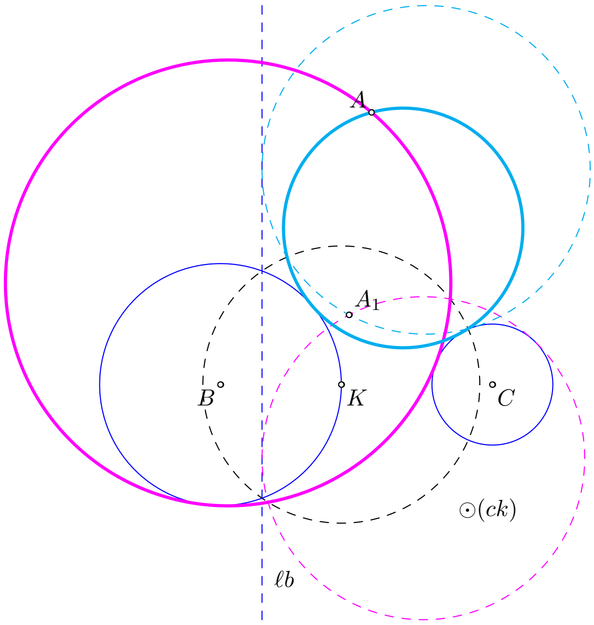
Gọi giao điểm 2 đường tròn là K, khi đó xét phép nghịch đảo đối với đường tròn tâm K bán kính bất kỳ, 2 đường tròn $\odot(B)$ và $\odot(C)$ biến thành 2 đường thẳng đi qua K, trở thành trường hợp **PLL**.

b. Hai đường tròn $\odot(B)$ và $\odot(C)$ không cắt nhau.

Xét phép nghịch đảo đối với đường tròn $\odot(K)$ có K nằm trên đường tròn $\odot(B)$ (ký hiệu $inv(K)$). Qua phép nghịch đảo $inv(K) : \odot(B) \mapsto$ đường thẳng ℓb, $\odot(C)$ vẫn thành đường tròn, như vậy trở thành trường hợp **PLC**.

Để thuận tiện, có thể xác định đường tròn $\odot(K)$ trực giao với $\odot(C)$, khi đó qua phép nghịch đảo $inv(K)$, đường tròn $\odot(C)$ biến thành chính nó.

Như vậy qua phép nghịch đảo $inv(K) : A \mapsto A_1, \odot(B) \mapsto$ và $\odot(C) \mapsto \odot(C)$. Trường hợp **PLC** sẽ là: dựng các đường tròn đi qua A_1 tiếp xúc với đường thẳng ℓb và đường tròn $\odot(C)$. Ảnh của các đường tròn này qua phép nghịch đảo $inv(K)$ sẽ là các đường tròn phải dựng.



c. Sử dụng điểm "giới hạn"P.

Khi sử dụng điểm giới hạn P, hai đường tròn $\odot(B)$ và $\odot(C)$ trở thành 2 đường tròn đồng tâm và tình huống tương tự mục **3.2**.

3.4 Trường hợp CCC và đường tròn Soddy

Cho 3 đường tròn $\odot(A), \odot(B)$ và $\odot(C)$. Dựng đường tròn tiếp xúc với $\odot(A), \odot(B)$ và $\odot(C)$.

a. Nếu 2 trong 3 đường tròn $\odot(A), \odot(B), \odot(C)$ cắt nhau.

Gọi giao điểm là P, khi đó xét phép nghịch đảo đối với đường tròn tâm P bán kính bất kỳ, 2 đường tròn biến thành 2 đường thẳng, trở thành trường hợp **LLC**.

b. Nếu 3 đường tròn $\odot(A), \odot(B), \odot(C)$ không cắt nhau.

Trường hợp này cũng có thể sử dụng phép nghịch đảo đối với đường tròn có tâm K nằm trên một trong ba đường tròn $\odot(A), \odot(B), \odot(C)$. Khi đó sẽ trở thành trường hợp **LCC**.

c. Sử dụng điểm "giới hạn".

Gọi P là điểm giới hạn của $\odot(B), \odot(C)$. Khi đó xét phép nghịch đảo cực P thì $\odot(B), \odot(C)$ thành 2 đường tròn đồng tâm và bài toán có thể dễ hơn.

Ta xét bài toán cụ thể sau:

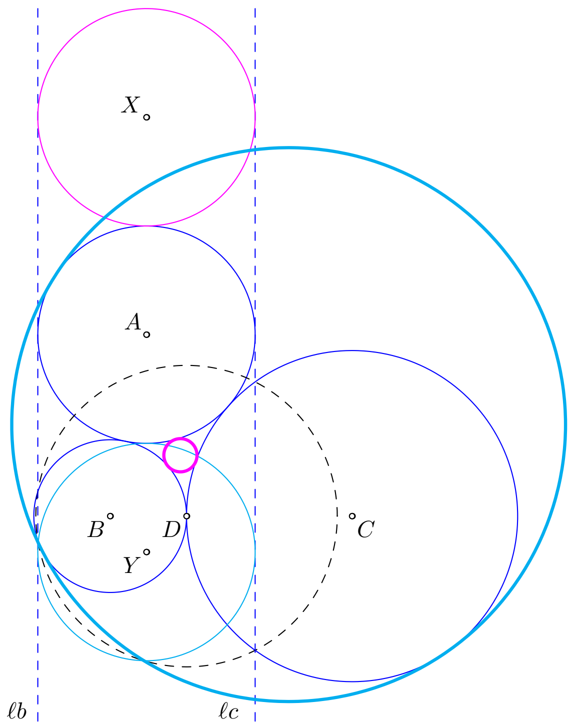
Đường tròn Soddy: Cho 3 đường tròn $\odot(A), \odot(B)$ và $\odot(C)$ đôi một tiếp xúc với nhau. Dựng đường tròn tiếp xúc với $\odot(A), \odot(B)$ và $\odot(C)$.

Có 2 đường tròn tiếp xúc với 3 đường tròn $\odot(A), \odot(B)$ và $\odot(C)$, 2 đường tròn này 2 đường tròn **Soddy**. Có nhiều cách vẽ 2 đường tròn này, ở đây chúng tôi giới thiệu các sử dụng nghịch đảo.

Gọi D là tiếp điểm của $\odot(B)$ và $\odot(C)$. Xét phép nghịch đảo $inv(D)$ với $\odot(D)$ là đường tròn trực giao với $\odot(A)$: $\odot(B) \mapsto \ell b; \odot(C) \mapsto \ell c$ còn $\odot(A)$ thành chính nó. Lưu ý $\ell b \parallel \ell c$ và cùng tiếp xúc với $\odot(A)$.

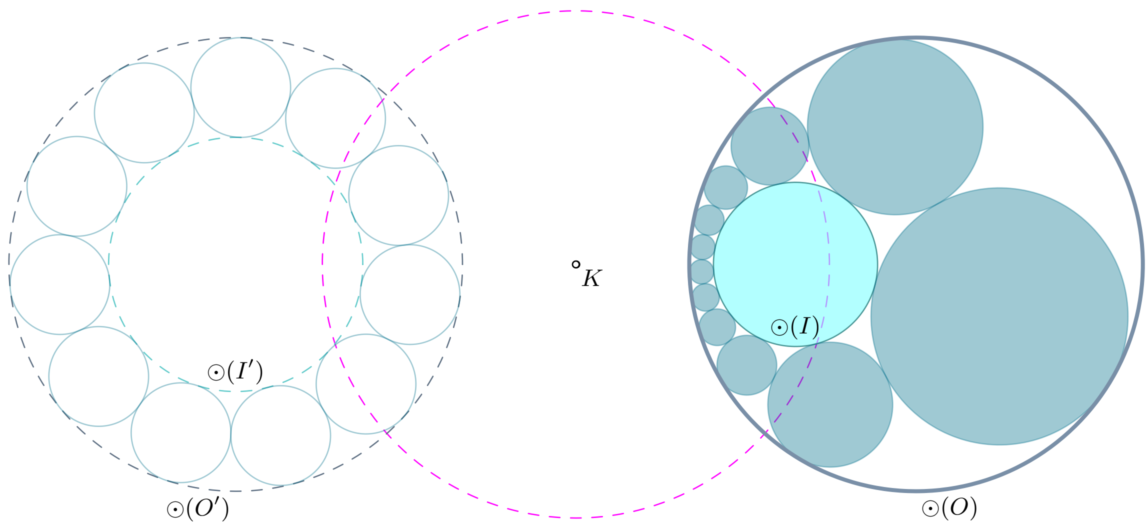
Dựng 2 đường tròn $\odot(X), \odot(Y)$ có bán kính bằng bán đường tròn $\odot(A)$ và tiếp xúc với $\odot(A)$ và $\ell b, \ell c$. Ảnh nghịch đảo của 2 đường tròn này là 2 đường tròn **Soddy** cần dựng.

Như vậy với việc sử dụng nghịch đảo, 2 đường tròn biến thành 2 đường thẳng song song nên vấn đề trở nên đơn giản hơn.



3.5 Chuỗi Steiner

Cho hai đường tròn $\odot(O)$ và $\odot(I)$ không cắt nhau. Chuỗi **Steiner** là chuỗi gồm n đường tròn, tất cả các đường tròn của chuỗi đều tiếp xúc với hai đường tròn $\odot(O)$ và $\odot(I)$ và mỗi đường tròn trong chuỗi tiếp xúc với đường tròn trước và sau của chuỗi.



Nhận thấy với đường tròn $\odot(O, R)$ và số n cho trước, ta cần xác định bán kính và tâm của đường tròn $\odot(I)$.

Trên hình vẽ, lấy điểm K bất kỳ ngoài đường tròn. Gọi $\odot(K)$ là đường tròn trực giao với $\odot(O)$, xét phép nghịch đảo đối với $\odot(K)$: $inv(K) : \odot(O) \mapsto \odot(O')$.

Ta cần vẽ đường tròn $\odot(I', r')$ sao cho $\odot(I')$ đồng tâm với $\odot(O')$ và có thể vẽ được n đường tròn bằng nhau và tiếp xúc với cả hai đường tròn này.

Bán kính đường tròn $\odot(I', r')$: $r' = R.\dfrac{1 - \sin(\dfrac{\pi}{n})}{1 + \sin(\dfrac{\pi}{n})}$.

Như vậy từ đó ta dựng được $\odot(I', r')$ và dễ dàng dựng được n đường tròn *Steiner*$'$. Qua phép nghịch đảo $inv(K)$ ta sẽ dựng được $\odot(I)$ và chuỗi **Steiner**.

4 Tài liệu tham khảo

[1]. Problem of Apollonius, Wikipedia.

[2]. Problem of Apollonius, Cut-the-knot.

[3]. Chuỗi **Steiner**, Wikipedia.

[4]. Điểm giới hạn, Mathworld.

[5]. College Geometry, N. Altshiller-Court, Dover, 1980.

[6]. Asymptote tutorial for beginners, Trần Quân.

[7]. File **apollonius.asy**, Trần Quân.