Zadanie Numeryczne 2

Joanna Szewczyk

29.10.2024r

• Treść zadania:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5.8267103432 & 1.0419816676 & 0.4517861296 & -0.2246976350 & 0.7150286064 \\ 1.0419816676 & 5.8150823499 & -0.8642832971 & 0.6610711416 & -0.3874139415 \\ 0.4517861296 & -0.8642832971 & 1.5136472691 & -0.8512078774 & 0.6771688230 \\ -0.2246976350 & 0.6610711416 & -0.8512078774 & 5.3014166511 & 0.5228116055 \\ 0.7150286064 & -0.3874139415 & 0.6771688230 & 0.5228116055 & 3.5431433879 \end{pmatrix}$$

oraz

$$A_2 = \begin{pmatrix} 5.4763986379 & 1.6846933459 & 0.3136661779 & -1.0597154562 & 0.0083249547 \\ 1.6846933459 & 4.6359087874 & -0.6108766748 & 2.1930659258 & 0.9091647433 \\ 0.3136661779 & -0.6108766748 & 1.4591897081 & 1.1804364456 & 0.3985316185 \\ -1.0597154562 & 2.1930659258 & -1.1804364456 & 3.3110327980 & -1.1617171573 \\ 0.0083249547 & 0.9091647433 & 0.3985316185 & -1.1617171573 & 2.1174700695 \end{pmatrix}$$

.

Zdefiniujmy wektor

b ≡ $(-2.8634904630, -4.8216733374, -4.2958468309, -0.0877703331, -2.0223464006)^T$

Używając wybranego pakietu algebry komputerowej lub biblioteki numerycznej, rozwiąż równania macierzowe $\boldsymbol{A_i y} = \boldsymbol{b}$ dla i = 1, 2. Ponadto, rozwiąż analogiczne równania z zaburzonym wektorem wyrazów wolnych, $\boldsymbol{A_i y} = \boldsymbol{b} + \Delta\mathbf{b}$**.** Zaburzenie Δ**b** wygeneruj jako losowy wektor o małej normie euklidesowej (np. $||\Delta b||_2 \approx 10{-}6$). Przeanalizuj jak wyniki dla macierzy $\boldsymbol{A_1}$ i $\boldsymbol{A_2}$ zależą od Δ**b** i zinterpretuj zaobserwowane różnice.

• Wstęp

Problem obliczenia f(x) za pomocą metod numerycznych można przedstawić jako znalezienie $f(\bar{x})$, gdzie $\bar{x} = x + \epsilon$ jest reprezentacją argumentu na maszynie numerycznej, natomiast ϵ jest błędem numerycznym tej reprezentacji mogącym być dobrze o szacowanym od góry. Chcąc oszacować błąd E = $|f(x)$ - $f(\bar{x})|$, należy zadać pytanie jak i wpływ na obliczenia ma $\epsilon. A$ dokładniej jak zmiana wartości ϵ wpływa na zmianę wartości $f(\bar{x})$.

Problem nazywamy numerycznie dobrze uwarunkowanym jeśli niewielkie zmiany ϵ nie zmieniają znacząco rozwiązania problemu. W sytuacji gdy układ jest podatny na zaburzenia jest źle uwarunkowany. Wówczas wyniki obliczeń mogą być zdominowane przez błędy, a w konsekwencji będą bezwartościowe. Przedstawia to jak bardzo istotna jest miara uwarunkowania, bez której poprawnie zinterpretowanie rozwiązania okazałoby się niemożliwe. Dla układów równań liniowych taką miarą jest współczynnik uwarunkowania macierzy będący własnością danej macierzy.

Miarą uwarunkowania numerycznego dla rozwiązania powyższego układu równań jest współczynnik uwarunkowania macierzy A_i:

$$\kappa_i \;=\; ||A_i||_{22} * \; |||A_i{}^{-1}||_{22}$$

Wraz z wzrostem wartości współczynnika uwarunkowania macierzy (κ) oczekujemy wzrost błędu (za-
burzenia) na wyjściu spowodowanego przez ten sam, stały błąd (zaburzenie) na wejściu.

- Wyniki:

Niezaburzone:

$$y_1 \;= \begin{pmatrix} 0.02556195 \\ -1.35714283 \\ -3.94075752 \\ -0.48893629 \\ 0.10097805 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie równania: $A_1 y \;=\; b$

Zaburzone:

$$y_1{}' \;= \begin{pmatrix} 0.02556213 \\ -1.35714288 \\ -3.94075759 \\ -0.48893629 \\ 0.10097802 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie równania: $A_1 y \;=\; b \;+ \Delta b$

$$y_2 \;= \begin{pmatrix} -0.408759 \\ -0.56030065 \\ -4.11200041 \\ -1.5242021 \\ -0.7752022 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie równania: $A_2 y \;=\; b$

$$y_2{}' \;= \begin{pmatrix} 1165.1478113 \\ -2138.98961372 \\ 455.44049183 \\ 2776.74581528 \\ 2350.56810689 \end{pmatrix}$$

Rozwiązanie równania: $A_1 y \;=\; b \;+ \Delta b$

$\Delta_1 \;\equiv\; ||\, y_1 - \; y_1{}'\,||_2$ = 2.0786580342169455 * $10^{-7} \approx 2.08 \; * \; 10^{-7}$

$\Delta_2 \;\equiv\; ||\, y_2 - \; y_2{}'\,||_2$ = 4403.429366465002 $\approx 4.40 \; * \; 10^3$

Wiedząc, że obie macierze są symetryczne i rzeczywiste, można dla nich obliczyć współczynnik uwarunkowania ze wzoru $\kappa = \frac{max_i|\lambda_i|}{min_i|\lambda_i|}$, gdzie λ_i wartości własne macierzy.

κ_1 = 7.000000000838209

κ_2 = 116452473799.17178

- Podsumowanie

Wartość Δ_2 jest o 10 rzędów wielkości większa niż Δ_1, co wskazuje na znacznie wyższą wrażliwość na błąd wyrazu wolnego w równaniu z macierzą A_2 w porównaniu do równania z macierzą A_1. Układ równań z macierzą Δ_2 charakteryzuje się stosunkowo słabym uwarunkowaniem. Potwierdzają to wartości współczynników κ_1 i κ_2. Znając niepewność wyrazu wolnego, współczynnik uwarunkowania umożliwia ocenę precyzji wyniku, co w rezultacie pozwala na jego poprawną interpretację.