

# Zadanie Numeryczne 5

Joanna Szewczyk

27.11.2024r.

## Treść zadania

Rozwiąż układ równań

$$\begin{pmatrix} d & 0.5 & 0.1 & & & & \\ 0.5 & d & 0.5 & 0.1 & & & \\ 0.1 & 0.5 & d & 0.5 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & 0.1 & 0.5 & d & 0.5 \\ & & & & 0.1 & 0.5 & d \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \dots \\ N-1 \\ N \end{pmatrix}$$

Dla  $N = 200$  za pomocą metod Jacobiego i Gaussa-Seidela, gdzie  $d$  jest elementem diagonalnym. Dla różnych wartości  $d$  i punktów startowych przedstaw graficznie różnicę pomiędzy dokładnym rozwiązaniem a jego przybliżeniami w kolejnych iteracjach. Odpowiednio dobierając zakres parametrów, porównaj dwie metody. Czy procedura iteracyjna zawsze jest zbieżna?

## Wstęp

Algorytmy numeryczne Jacobiego i Gaussa-Seidela to klasyczne metody iteracyjne wykorzystywane do rozwiązywania układów równań liniowych postaci  $Ax=b$ . Proces iteracyjny polega na stopniowym zbliżaniu się do dokładnego rozwiązania poprzez kolejne przybliżenia. Warto zauważyć, że przy odpowiednio dużej liczbie iteracji można osiągnąć wynik zbliżony do dokładnego rozwiązania, pod warunkiem uwzględnienia błędu zaokrągleń. Algorytmy te są szczególnie efektywne w przypadku macierzy rzadkich, gdzie większość elementów wynosi zero, takich jak te opisane w treści zadania. PozwólmY sobie przybliżyć obie metody:

Dla metody Jacobiego macierze  $A_1$  oraz  $A_2$  przyjmują postać

$$A_1 = D \quad A_2 = L + U$$

Gdy przejdziemy na zapis indeksowany mamy:

$$Dx^{(k+1)} = b - (L + U)x^k$$

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j^k$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij}x_j^k)$$

Metoda Jacobiego oblicza każde przybliżenie  $x_i^{(k+1)}$  wyłącznie na podstawie wartości z poprzedniej iteracji  $x_i^{(k)}$ , co zapewnia prostotę implementacji, ale może skutkować wolniejszą zbieżnością.

Natomiast dla metody Gaussa-Seidela macierze  $A_1$  oraz  $A_2$  przyjmują postać

$$A_1 = D + L \quad A_2 = U$$

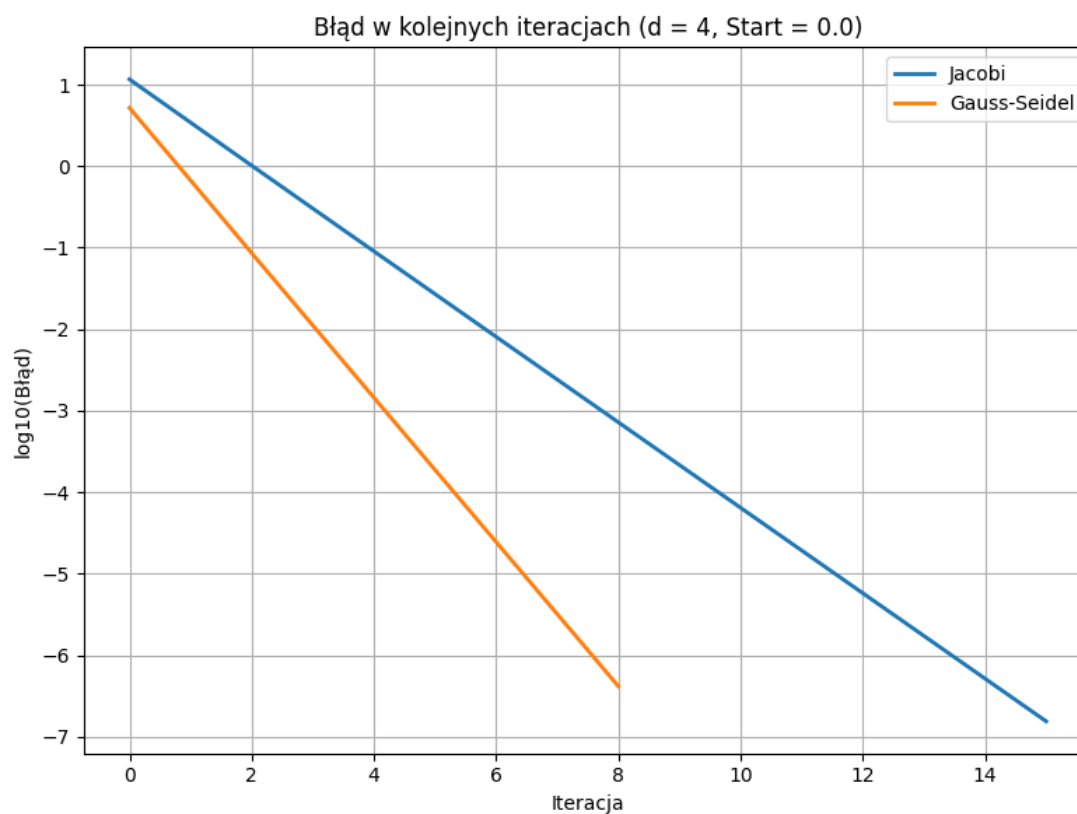
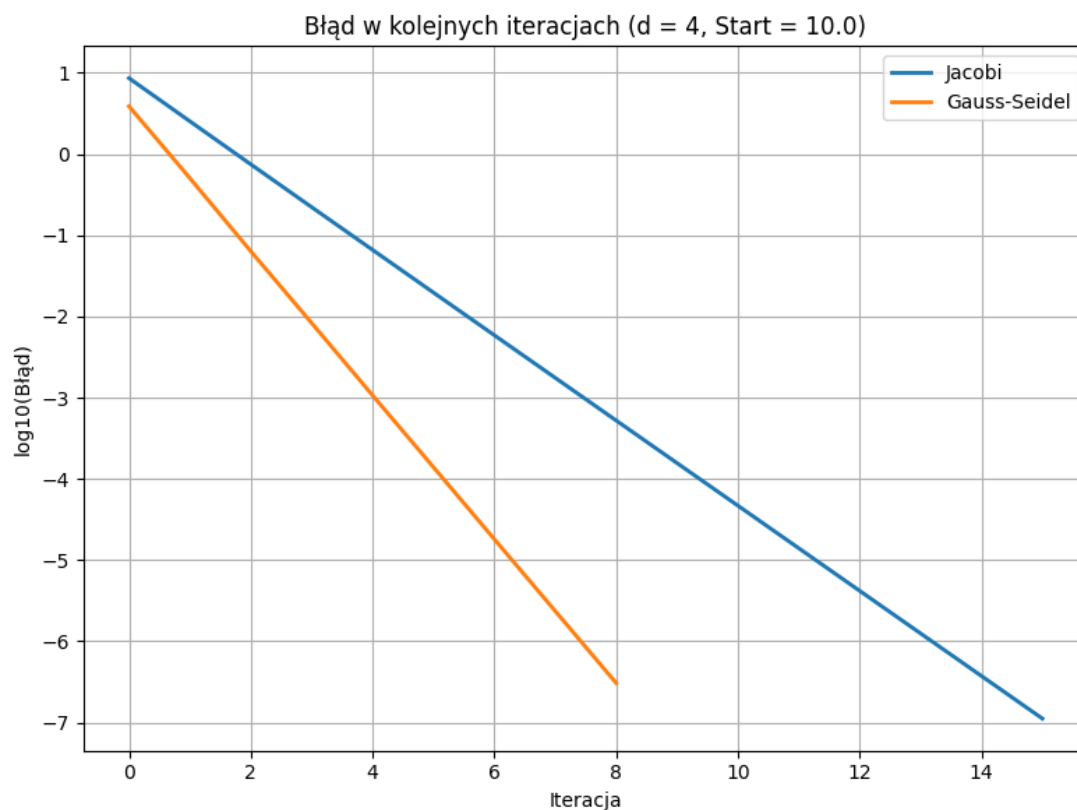
Gdy przejdziemy na zapis indeksowany mamy:

$$\begin{aligned} (D + L)x^{(k+1)} &= b - Ux^k \\ \sum_{j \leq i} a_{ij}x_j^{(k+1)} &= b_i - \sum_{j > i} a_{ij}x_j^k \\ \sum_{j < i} a_{ij}x_j^{k+1} + a_{ii}x_i^{k+1} &= b_i - \sum_{j > i} a_{ij}x_j^k \\ x_i^{(k+1)} &= \frac{b_i - \sum_{j < i} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j > i} a_{ij}x_j^k}{a_{ii}} \end{aligned}$$

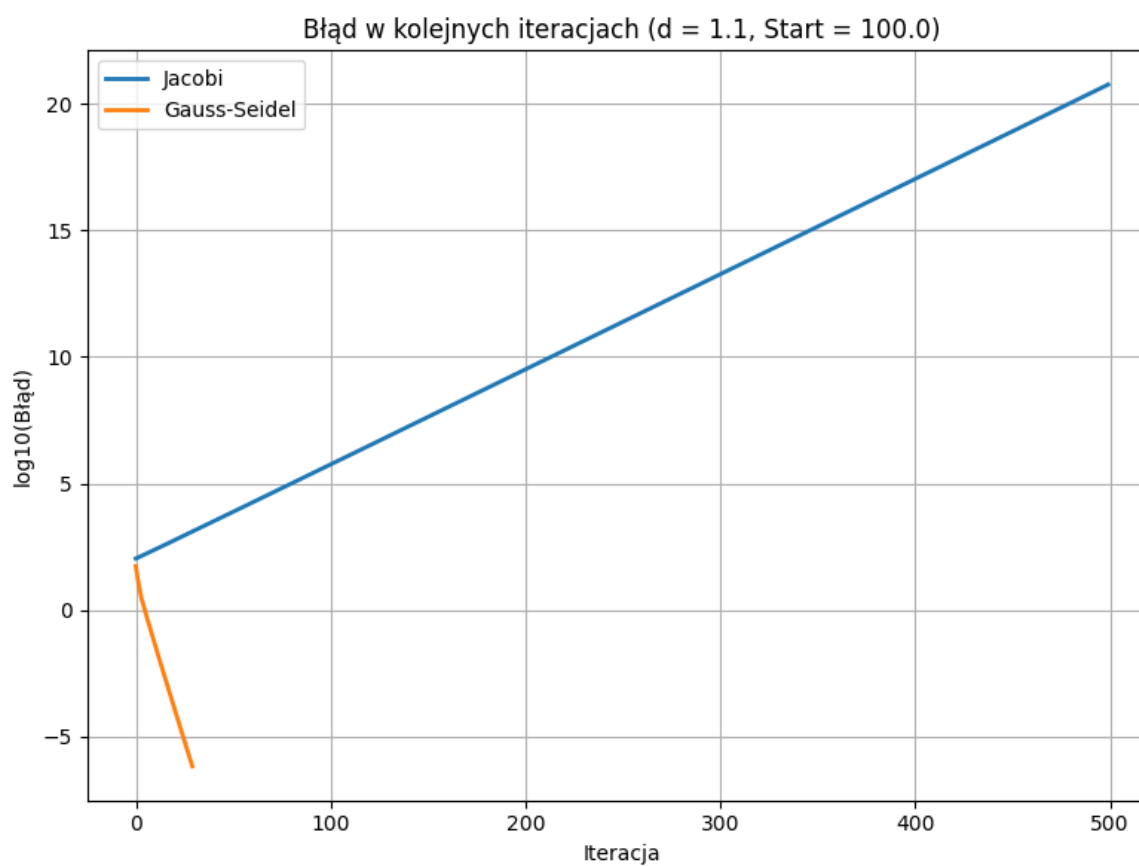
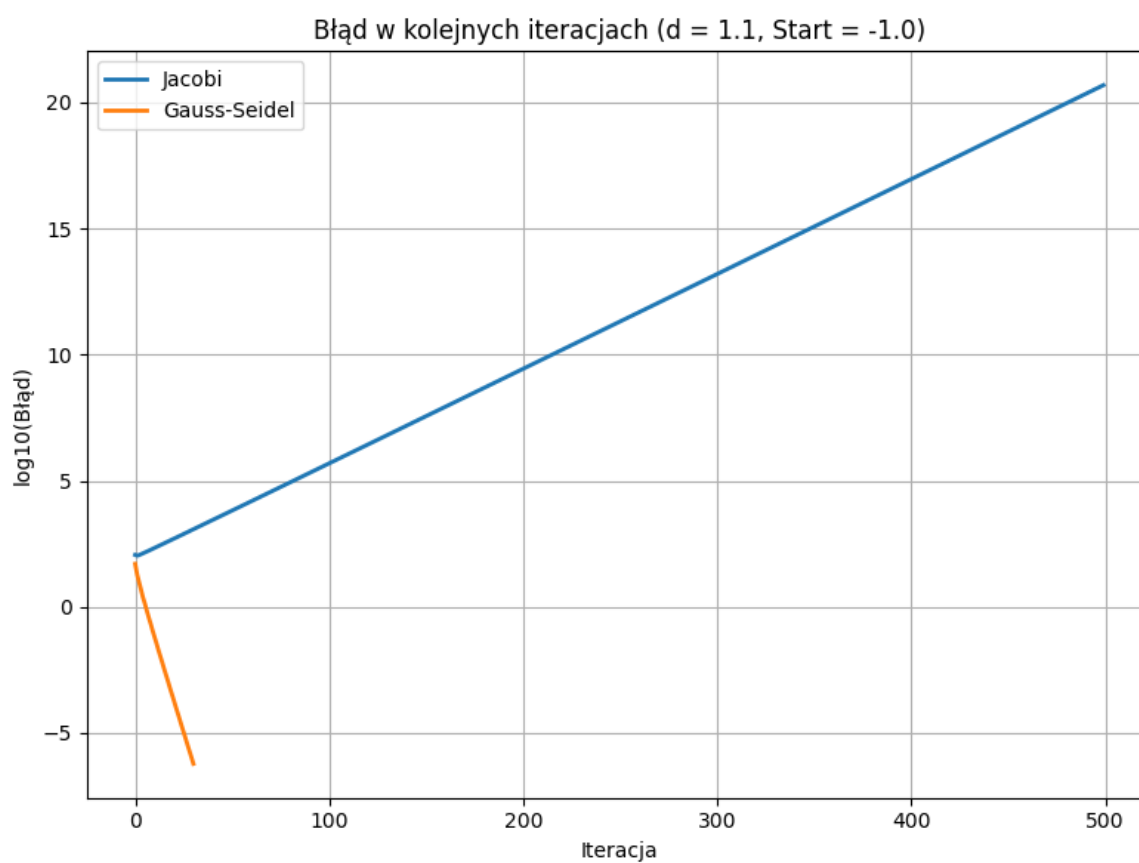
W przeciwieństwie do metody Jacobiego, metoda Gaussa-Seidela wykorzystuje natychmiast zaktualizowane wartości  $x_j^{(k+1)}$  dla  $j < i$ , co zazwyczaj przyspiesza zbieżność i tego właśnie oczekujemy od naszego programu.

## Wyniki dla poszczególnych wartości $d$ i punktów startowych

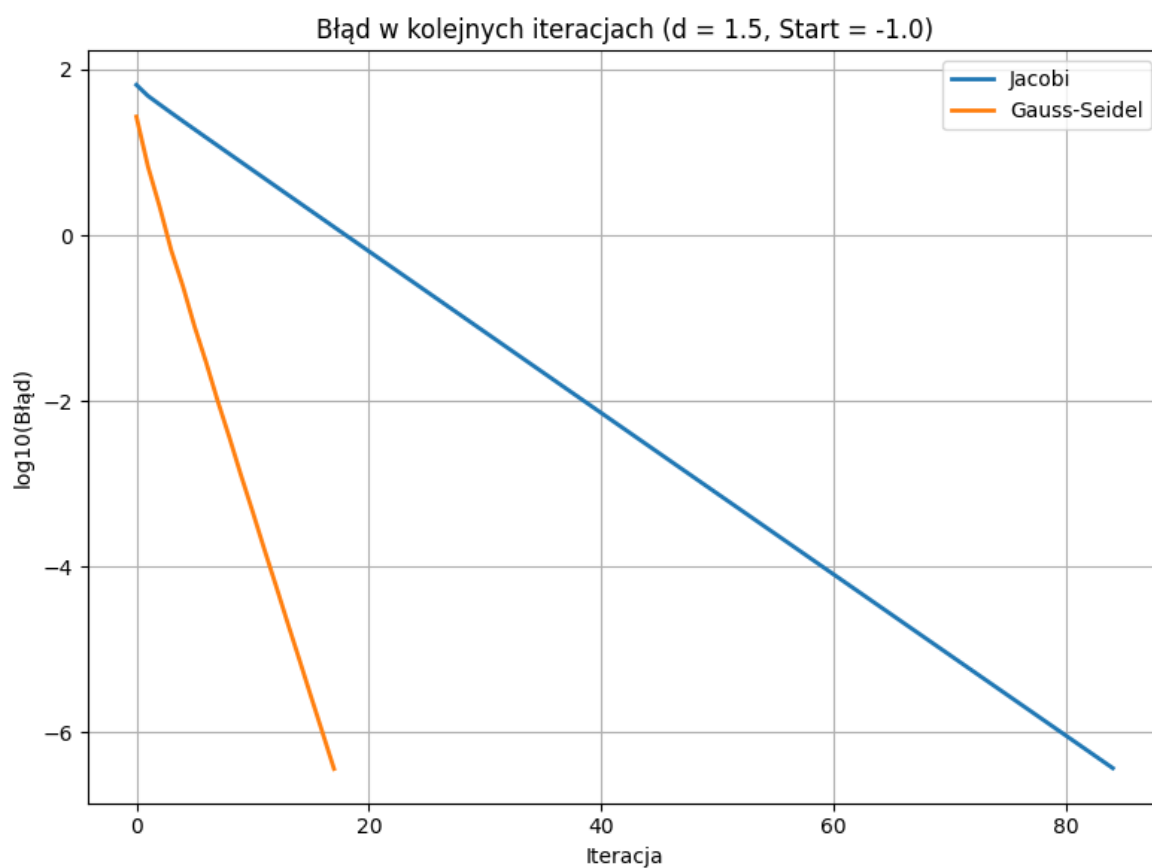
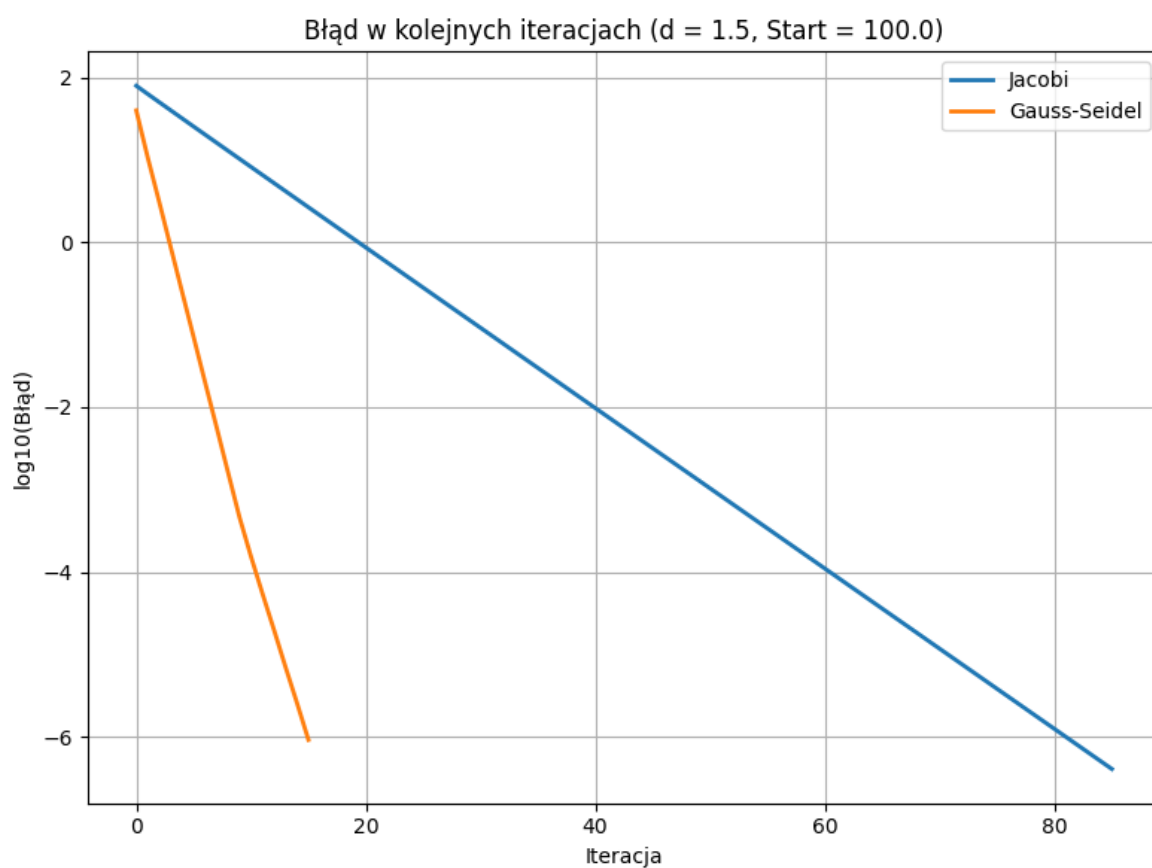
Wykresy dla  $d = 4$  w miejscach startu 10 i 0



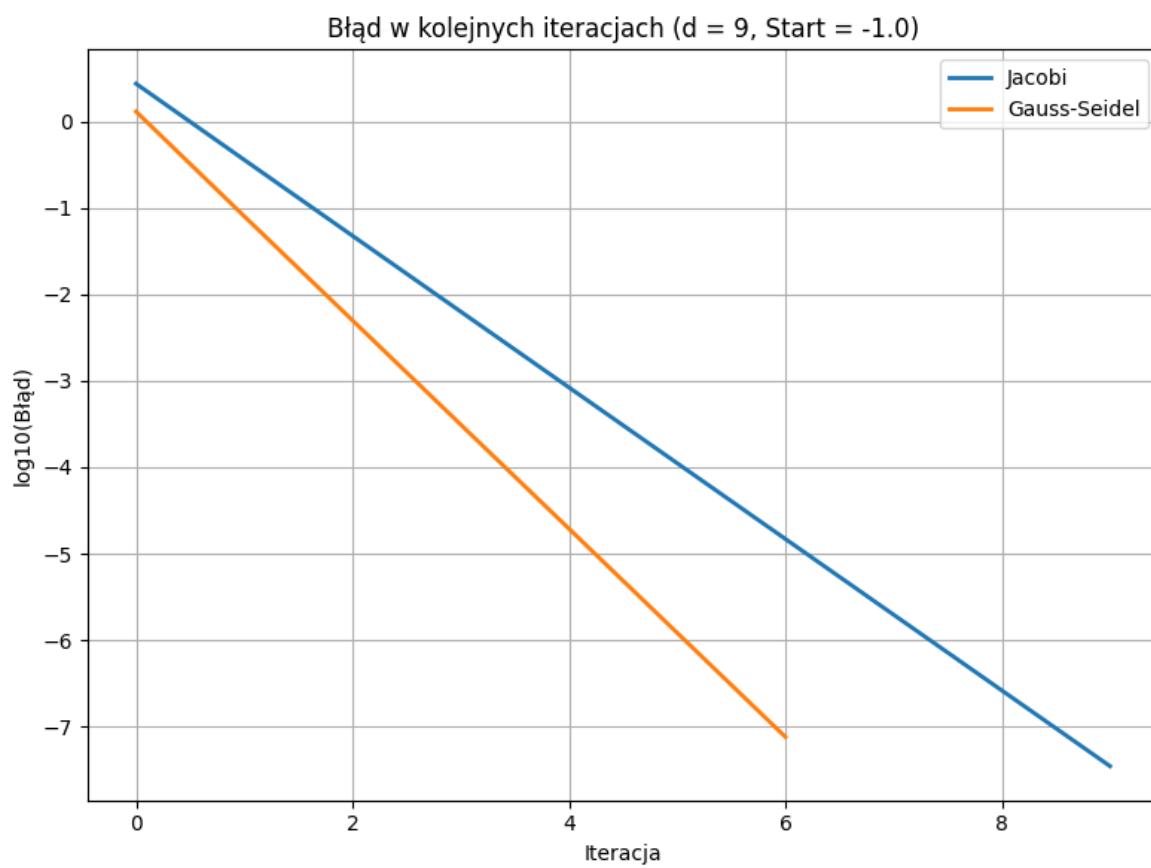
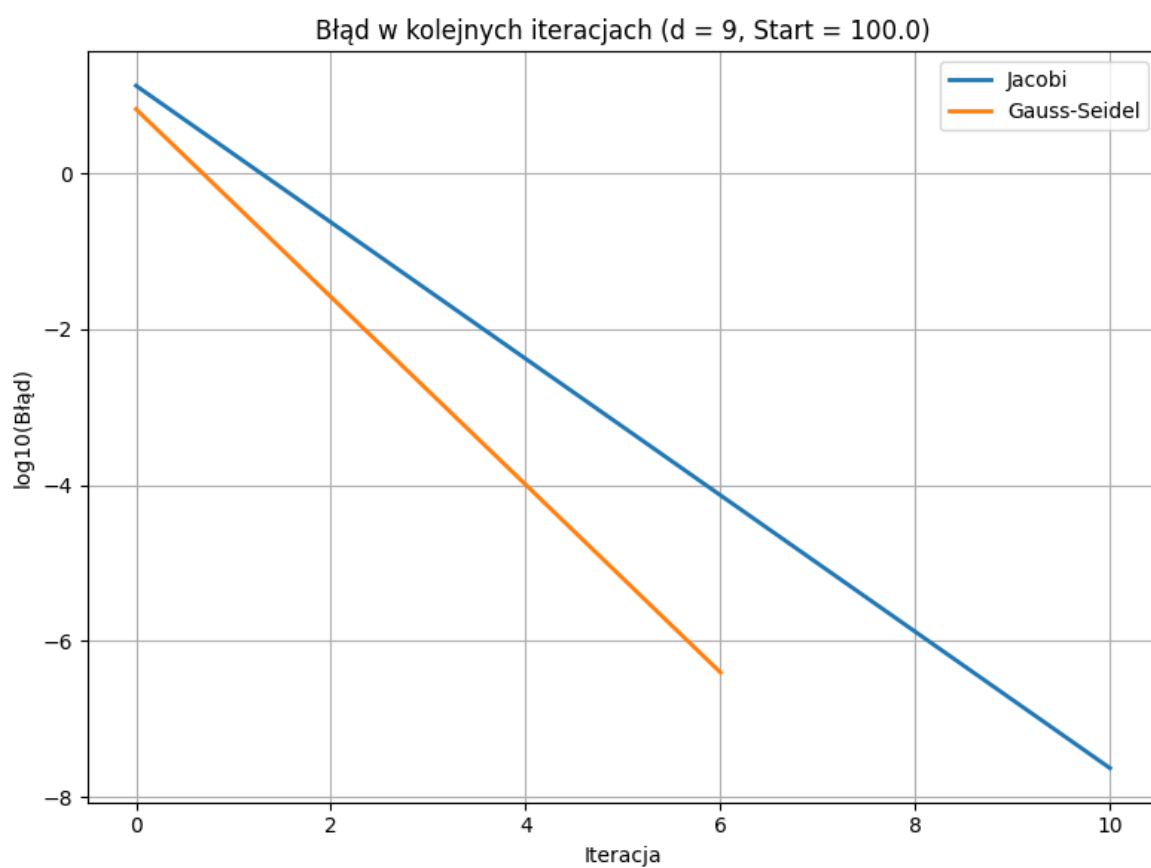
## Wykresy dla $d = 1.1$ w miejscach startu -1 i 100



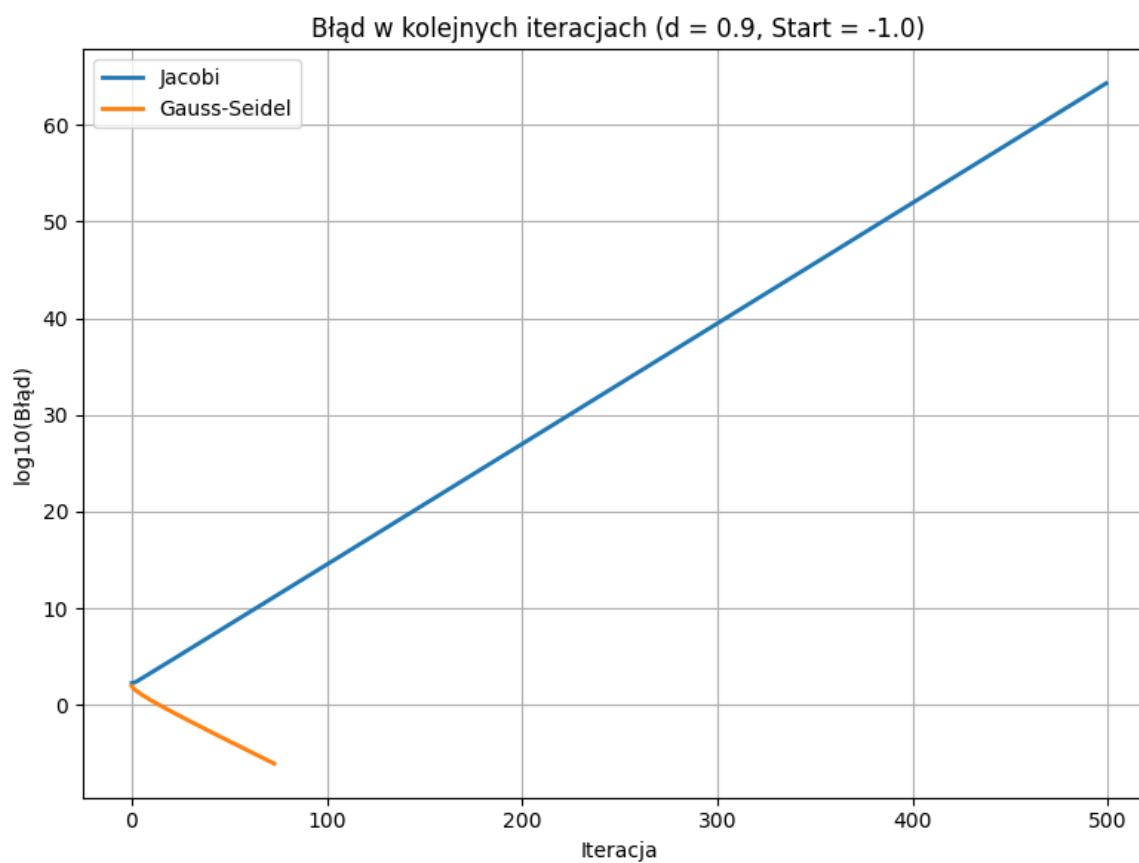
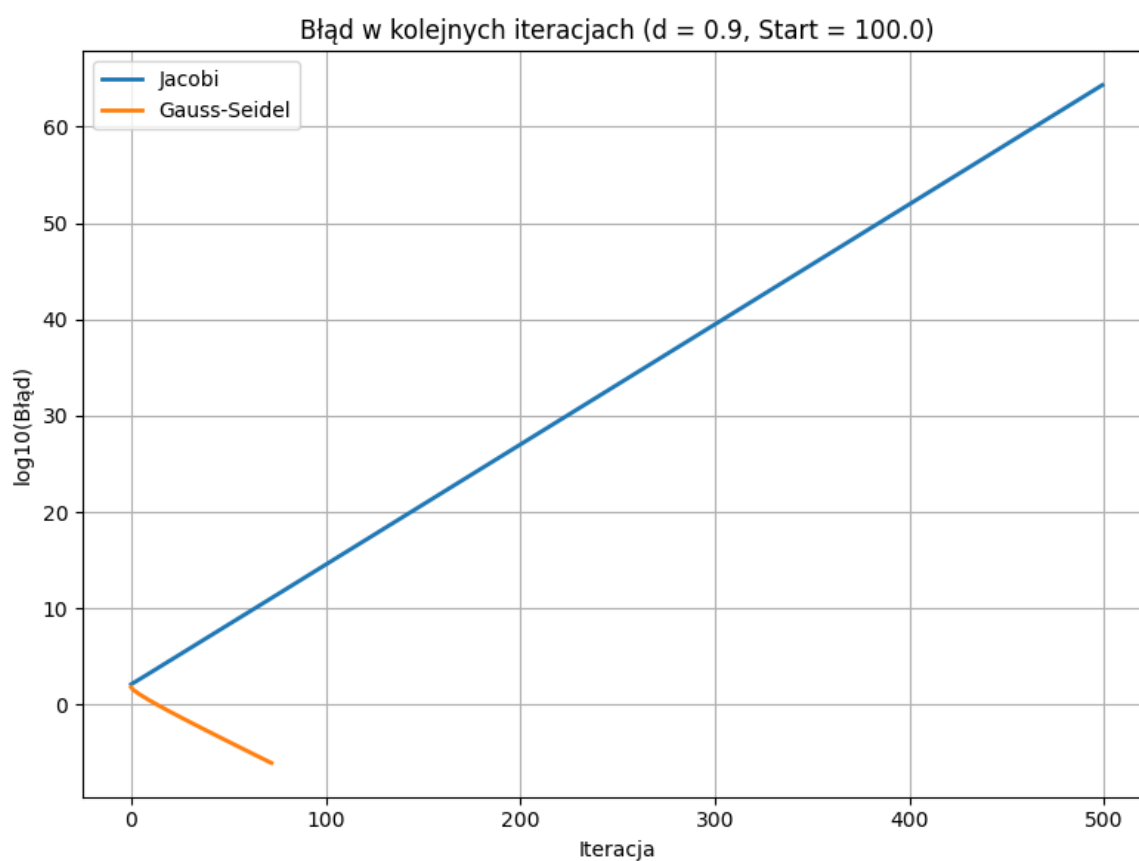
Wykresy dla  $d = 1.5$  w miejscach startu 100 i -1



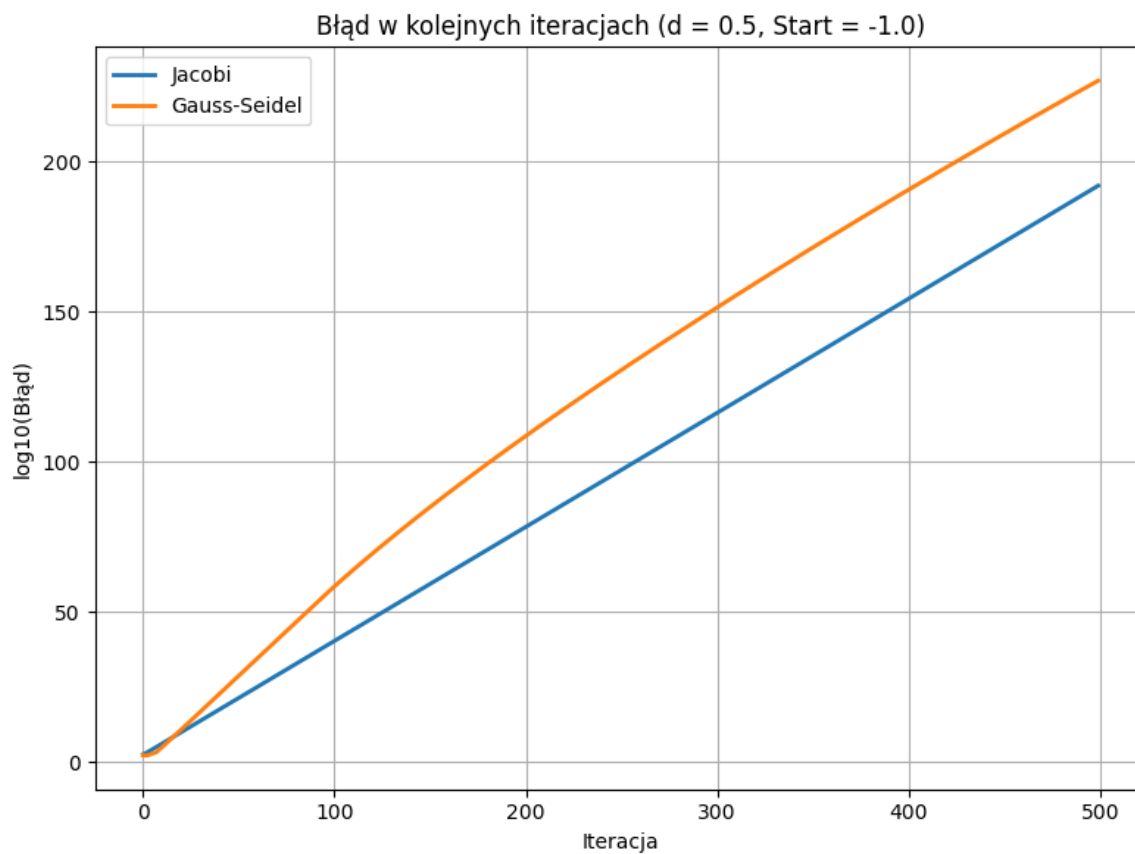
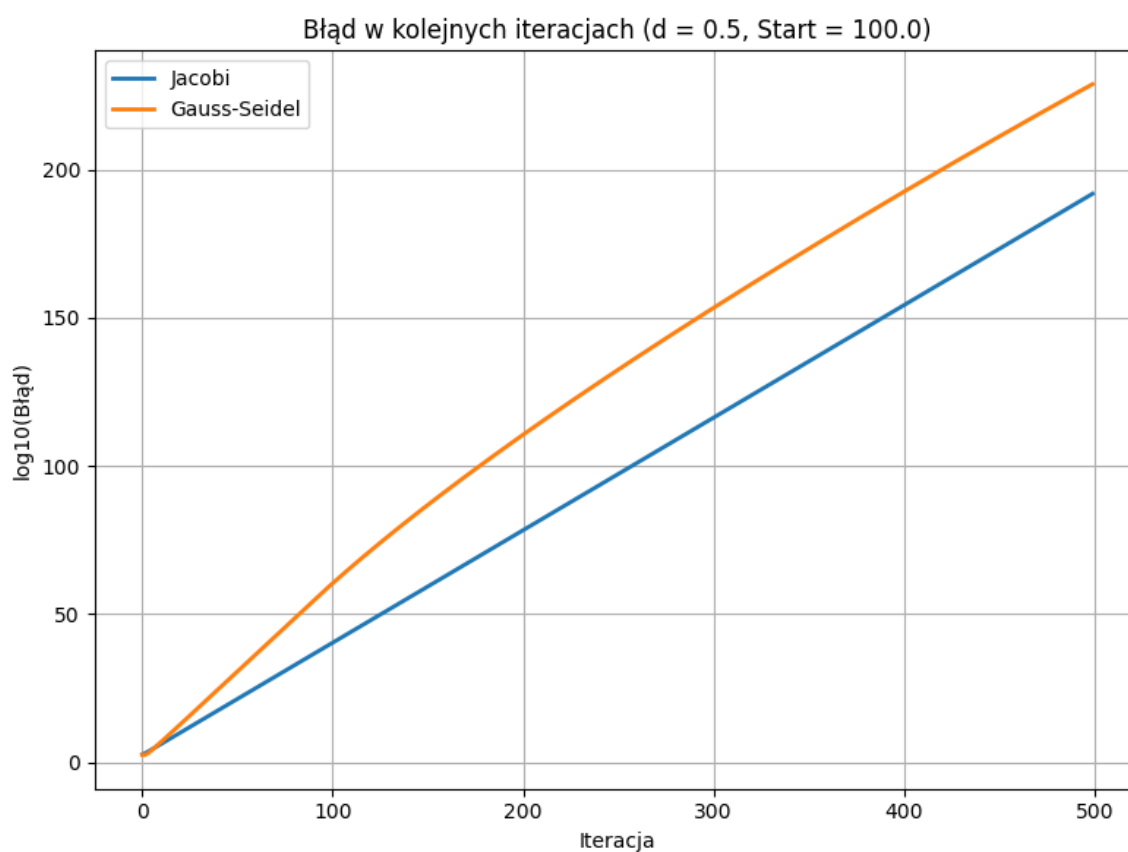
## Wykresy dla $d = 9$ w miejscach startu 100 i -1



## Wykresy dla $d = 0.9$ w miejscach startu 100 i -1

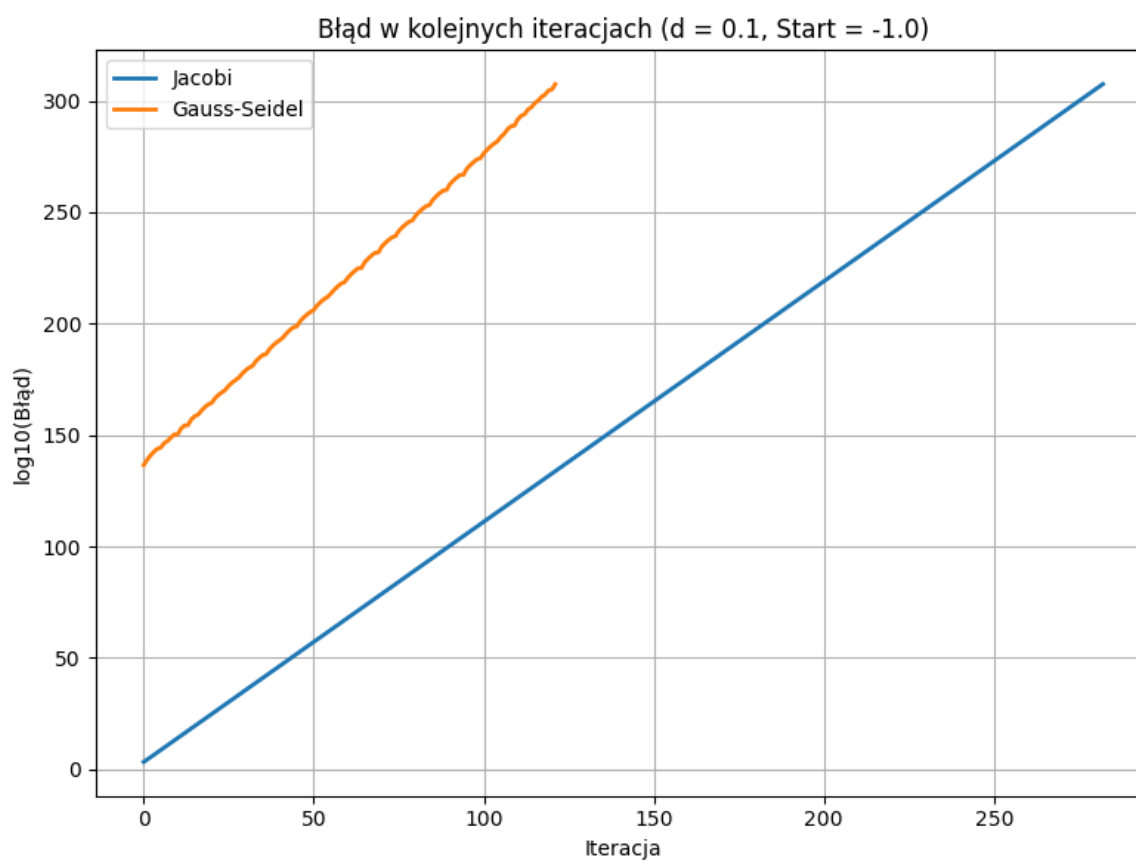
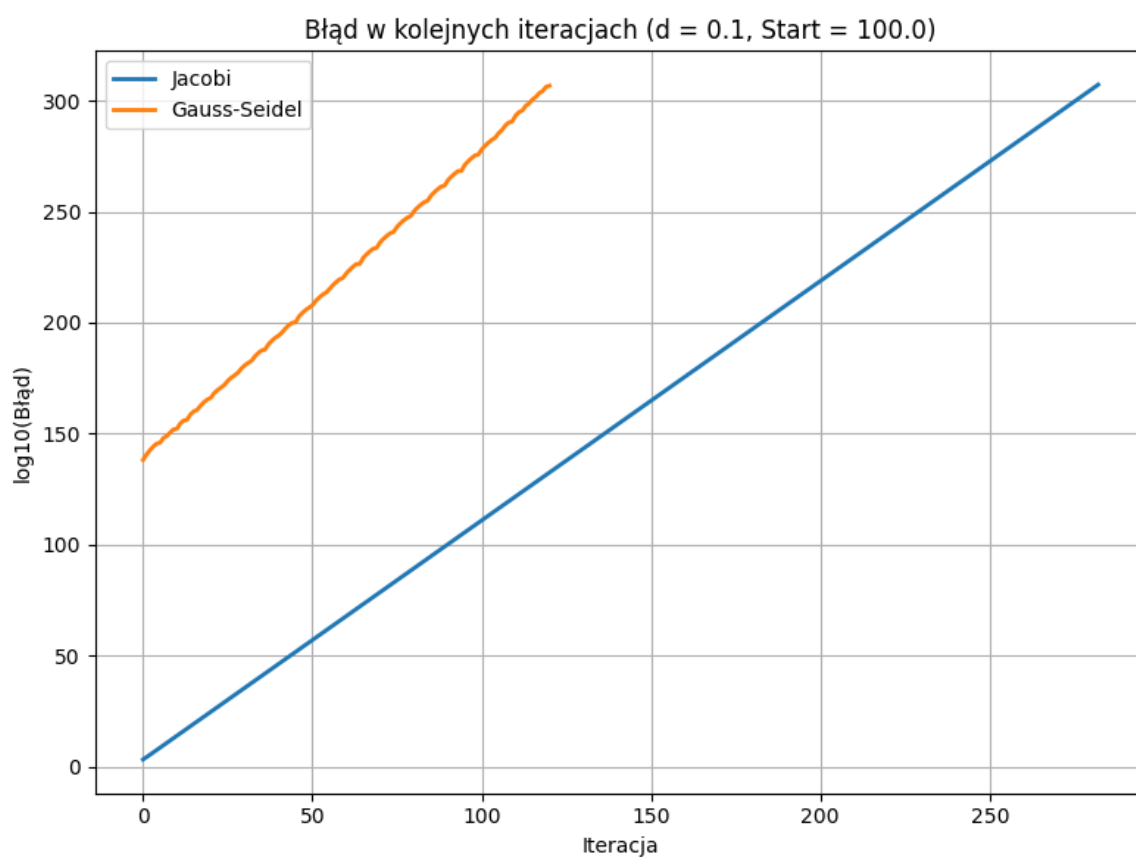


## Wykresy dla $d = 0.5$ w miejscach startu 100 i -1

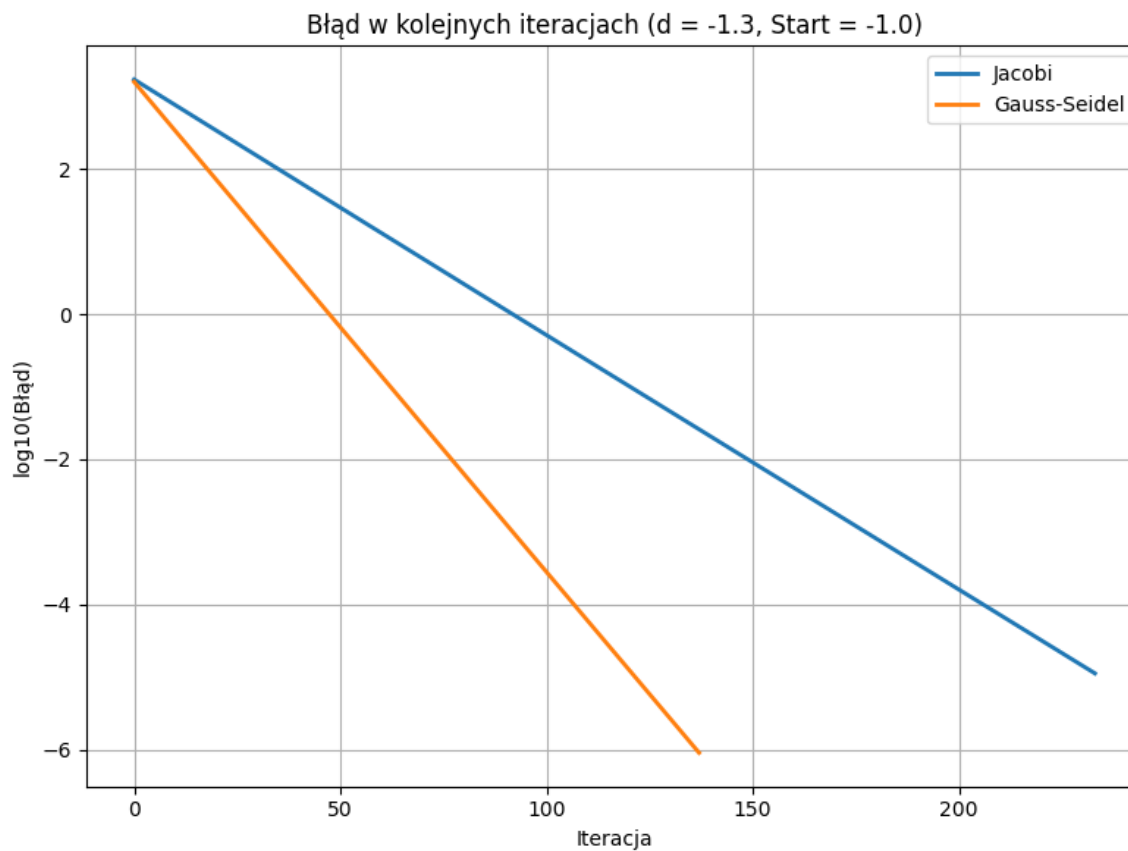




Wykresy dla  $d = 0.1$  w miejscach startu 100 i -1



## Wykresy dla $d = -1.3$ w miejscach startu 100 i -1



## Podsumowanie

Jak widzimy na załączonych wykresach, procedura iteracyjna nie zawsze jest zbieżna. Dla pewnych wartości  $d$  (np.  $d=0.5$ ) oraz wybranych punktów startowych obserwujemy brak zbieżności. Aby procedura była zbieżna konieczne jest spełnienie odpowiednich warunków, takich jak diagonalna dominacja macierzy czy symetryczność i dodatnia określoność.

Dla odpowiednio dobranych  $d > 1$  oraz punktów startowych bliskich dokładnemu rozwiązaniu obie metody wykazywały zbieżność.

Metoda Gaussa-Seidela zazwyczaj zbiega szybciej niż metoda Jacobiego, co widoczne jest w szybszym zmniejszaniu różnicy pomiędzy dokładnym rozwiązaniem a przybliżeniami  $x^k$ . Wynika to z faktu, że metoda ta korzysta z natychmiast zaktualizowanych wartości w trakcie obliczeń.

Wartości punktu początkowego minimalnie zmieniają wykresy natomiast wpływają na liczbę iteracji potrzebnych do osiągnięcia rozwiązania.