Zadanie numeryczne NUM1

Joanna Szewczyk

22.10.2024r.

Treść Zadania

Napisz program wyliczający przybliżenie pochodnej ze wzorów:

(a) $D_h f\ (x)\ \equiv \frac{f\ (x+h)-f\ (x)}{h}$s

(b) $D_h f\ (x)\ \equiv \frac{f\ (x+h)-f\ (x-h)}{2h}$

Przeanalizuj, jak zachowuje się błąd $|D_h f\ (x)\ -\ f\ '(x)|$ dla funkcji $f\ (x) =\ \sin(x^3)$ oraz punktu x = 0.2 przy zmianie parametru h dla różnych typów zmiennoprzecinkowych (float, double). Wykreśl $|D_h f\ (x)\ -\ f\ '(x)|$ w funkcji h w skali logarytmicznej. Poeksperymentuj również używając innych funkcji i punktów.

Wstęp

Mierzymy błąd $E(h)$, który wyraża różnicę między przybliżoną przez nas wartością pochodnej $\overline{D_h f(x)}$ a dokładną pochodną $f\ '(x)$, gdzie dla funkcji $f\ (x) =\ \sin(x^3)$ pochodna wynosi $f\ '(x)\ =\ 3x^2 cos(x^3)$. Mamy więc następujący wzór:

$$E(h)\ =\ |\ \overline{D_h f(x)}\ -\ f\ '(x)\ |$$

Dokonując obliczeń otrzymujemy:

$$\overline{D_h f(x)}\ = \frac{f(x+h)\cdot(1+\varepsilon_1) - f(x)\cdot(1+\varepsilon_2)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{f(x+h)\cdot\varepsilon_1 - f(x)\cdot(1+\ \varepsilon_2)}{h}$$

Rozwijamy funkcję w szereg Taylora:

$$f(x+h) \approx f(x) + f^1(x)\cdot h + \frac{1}{2}f''x\cdot h^2$$

$$\overline{D_h f(x)} = f'(x) + \frac{1}{2}f''(x)\cdot h + \frac{f(x)\cdot(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{h}$$

$$\overline{|D_h f(x)}\ - f\ '(x)|\ \approx\ |\frac{1}{2}f''(x)\cdot h + \frac{f(x)\cdot(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{h}|$$

$$\lesssim\ \frac{1}{2}|f''(x)|\cdot h + \frac{f(x)\cdot(|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|)}{h}\ \approx\ \frac{1}{2}|f''(x)|\cdot h + \frac{2\ |f(x)|\cdot\ \varepsilon}{h}$$

Błąd ostatecznie możemy zdefiniować jako:

$$E(h)\ \lesssim\ \frac{1}{2}|f''(x)|\cdot h + \frac{2\ |f(x)|\cdot\ \varepsilon}{h}$$

Oczekiwane Wyniki:

W przypadku gdy h → 0:

Oczekujemy wzrostu wartości funkcji E(h), ponieważ dzielenie przez liczby bliskie zeru prowadzi do olbrzymich błędów numerycznych

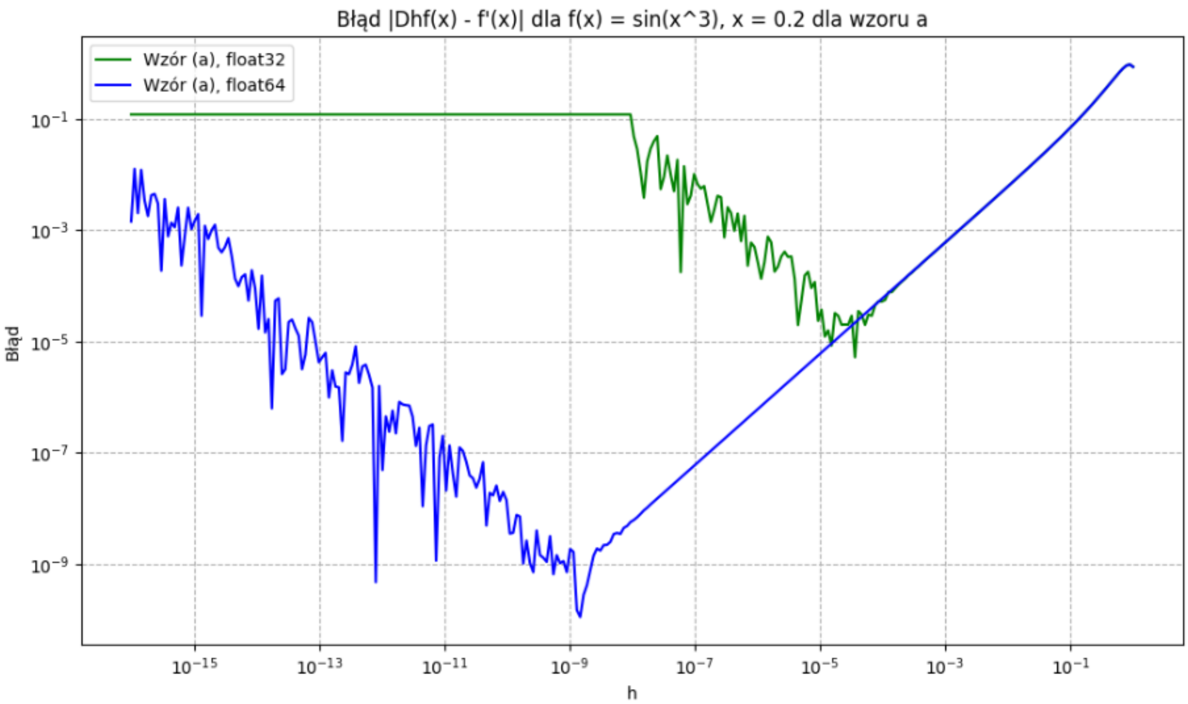
W przypadku gdy h → 1:

Oczekujemy wzrostu wartości funkcji E(h), gdyż im bliżej jesteśmy liczby 1, wówczas wzór bardziej przypomina iloraz różnicowy niżeli przybliżenie pochodnej.

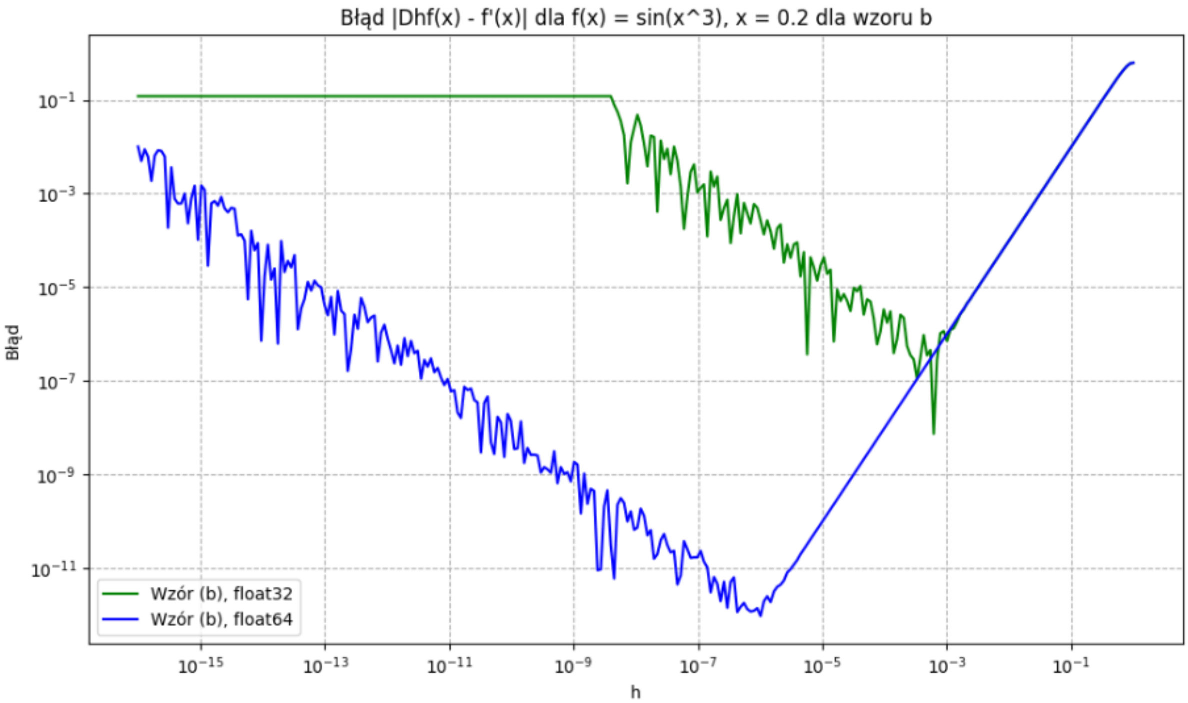
W rezultacie spodziewamy się, że dla bardzo dużych i bardzo małych wartości h, błąd E(h) będzie duży, natomiast najdokładniejsze przybliżenie pochodnej wystąpi dla wartości h znajdujących się gdzieś w środku przedziału (0, 1). Spodziewamy się, że kształt wykresu błędu będzie przypominał wykres funkcji wartości bezwzględnej, z minimum w zakresie (0, 1).

Wyniki

a) Wynik dla $D_h f(x) \equiv \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ dla typów float32 i float64

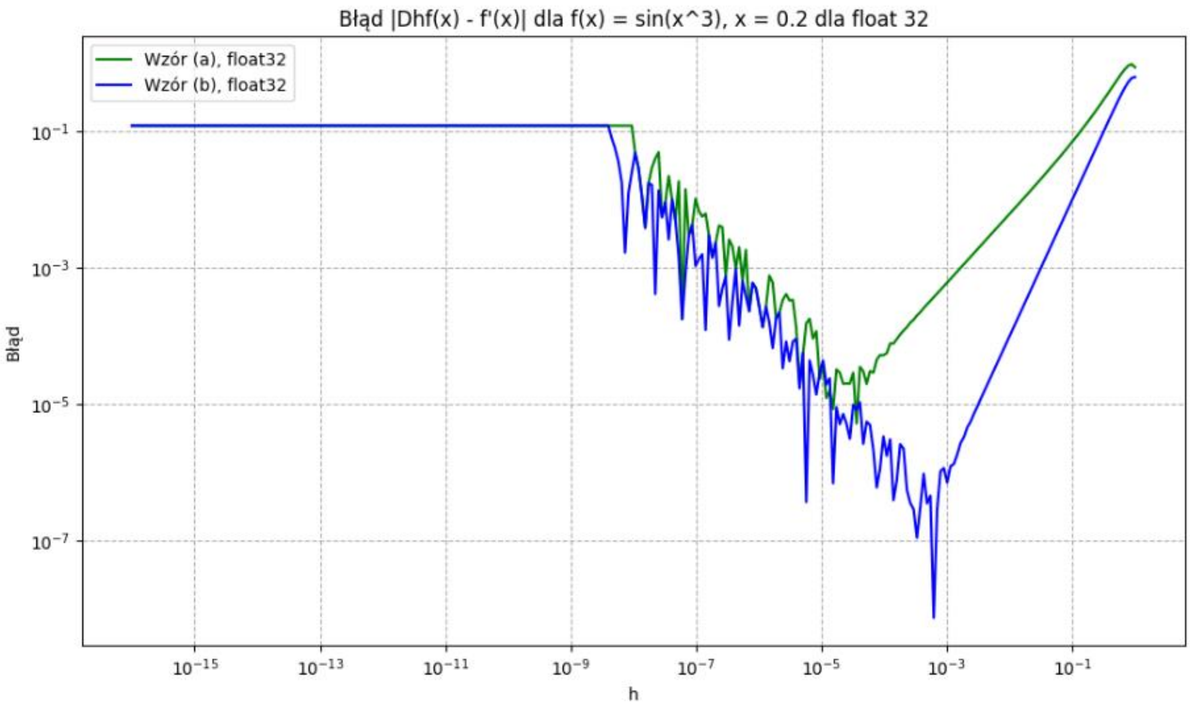


b) Wynik dla $D_h f\ (x)\ \equiv \frac{f\ (x+h)-f\ (x-h)}{2h}$ dla typów float32 i float64



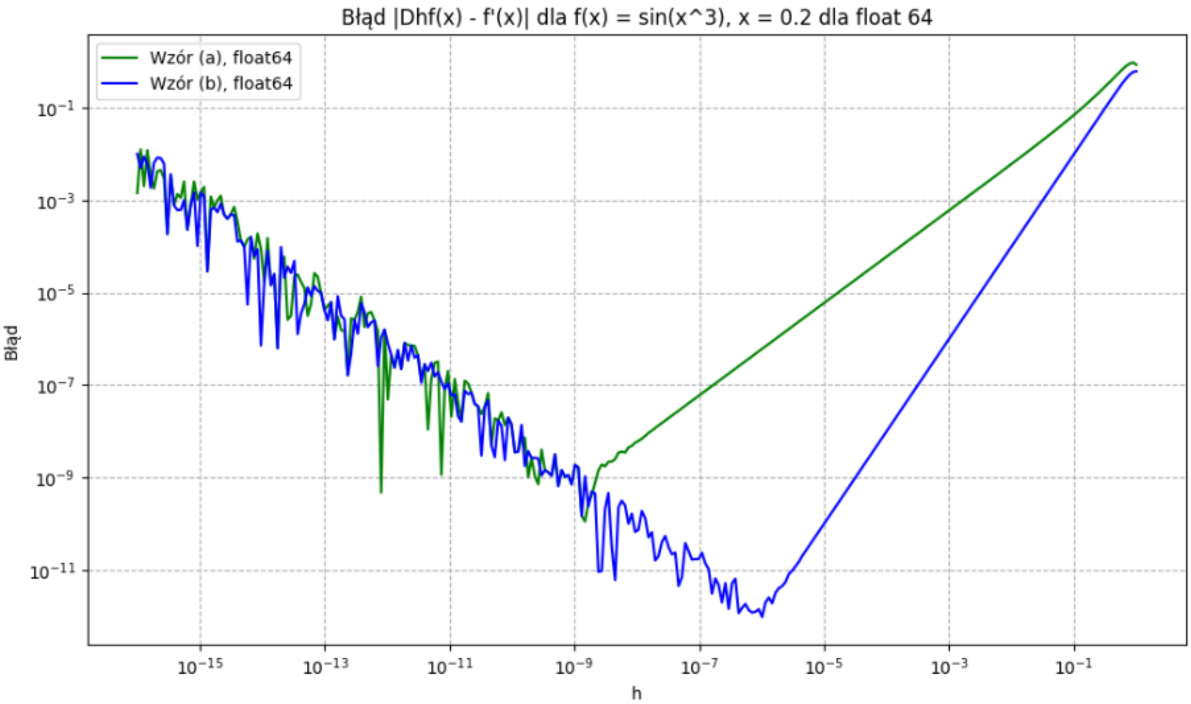
c) Wynik dla wzorów a) $D_h f\ (x) \equiv \frac{f\ (x+h)-f\ (x)}{h}$ oraz b) $D_h f\ (x) \equiv \frac{f\ (x+h)-f\ (x-h)}{2h}$

dla typu float32



d) Wynik dla wzorów a) $D_h f\ (x) \equiv \frac{f\ (x+h)-f\ (x)}{h}$ oraz b) $D_h f\ (x) \equiv \frac{f\ (x+h)-f\ (x-h)}{2h}$

dla typu float64



Wnioski

Na podstawie powyższych wykresów możemy zaobserwować:

a) Za pomocą wzoru b) $D_h f\ (x) \equiv \frac{f\ (x+h)-f\ (x-h)}{2h}$ jesteśmy w stanie otrzymać większą precyzję obliczeń względem wzoru a) $D_h f\ (x) \equiv \frac{f\ (x+h)-f\ (x)}{h}$.

b) Przy h → 0: Sprawdza się oczekiwany wzrost wartości funkcji E(h).

c) Przy h → 1: zgodnie z oczekiwaniami wartości funkcji E(h) rosną.

d) Przybliżenie jest znacznie dokładniejsze, gdy używamy typu float64. Wyższa precyzja typu float64 wynika z jego szerszego zakresu wartości (float64 jak wymaga 64 bitów, podczas gdy float32 tylko 32). Pozwala to na aproksymację wartości parametru „h” z większą dokładnością, co skutkuje mniejszymi błędami.

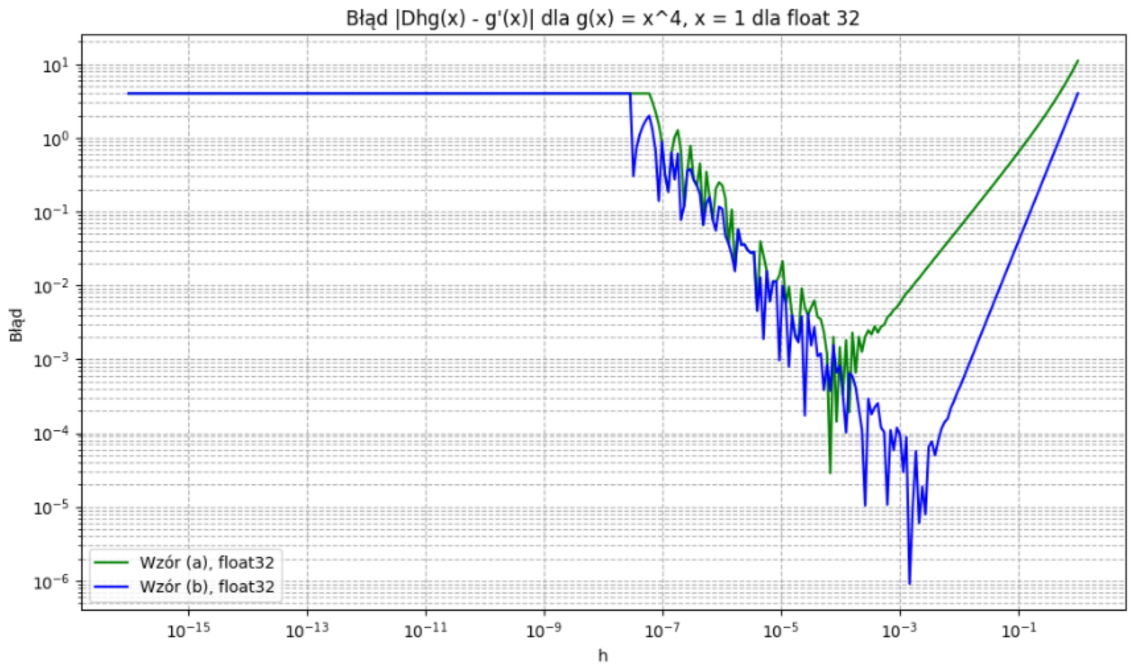
e) W rezultacie z analizy wykresów dostrzegamy, że dla bardzo dużych i bardzo małych wartości h, błąd E(h) jest duży, a najdokładniejsze przybliżenie pochodnej wystąpi dla wartości h znajdujących mniej więcej w środku przedziału (0, 1).

f) Wykres przyjmuje oczekiwany kształt tj. jak wykres wartości bezwzględnej.

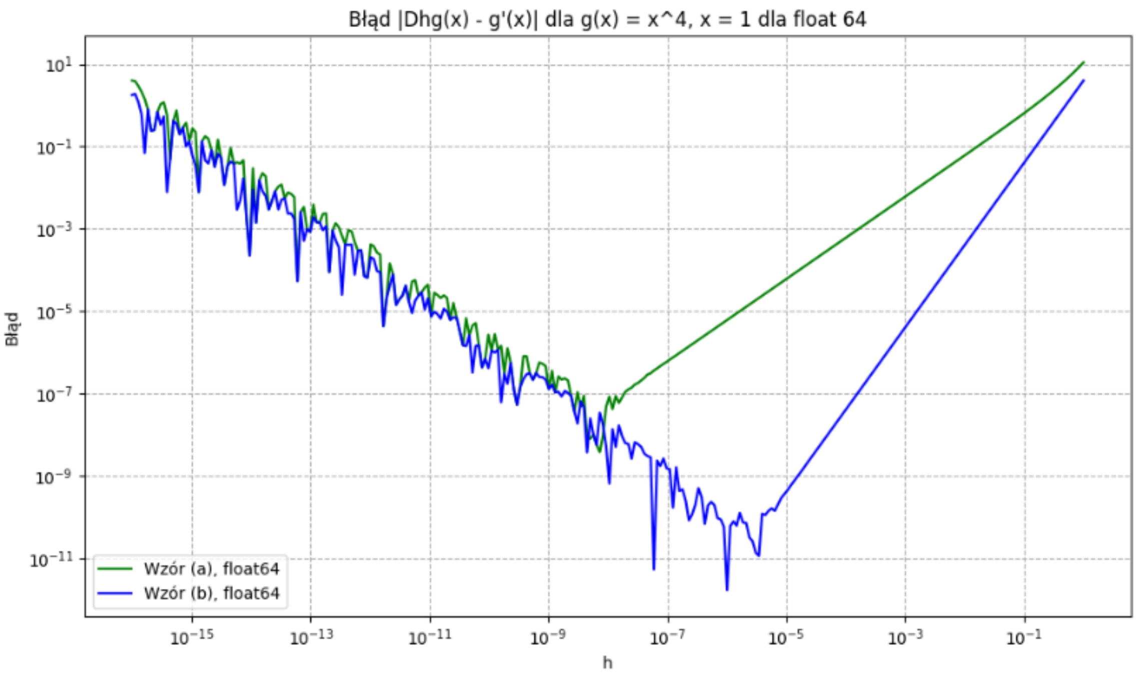
Dyskusja

a) Rozważmy dwa poniższe wykresy błędów względem wykresów błędów funkcji $\sin(x^3)$:

- Błąd dla przykładowej funkcji $g(x) = x^4$ w punkcie x = 1 dla typu float32



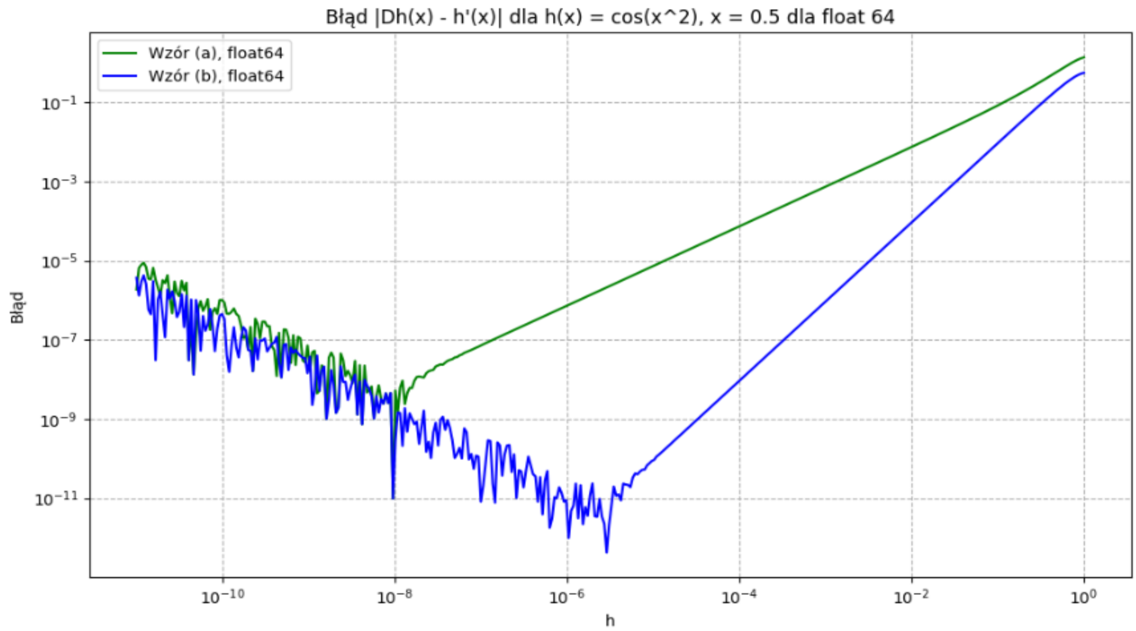
- Błąd dla przykładowej funkcji $g(x) = x^4$ w punkcie x = 1 dla typu float64



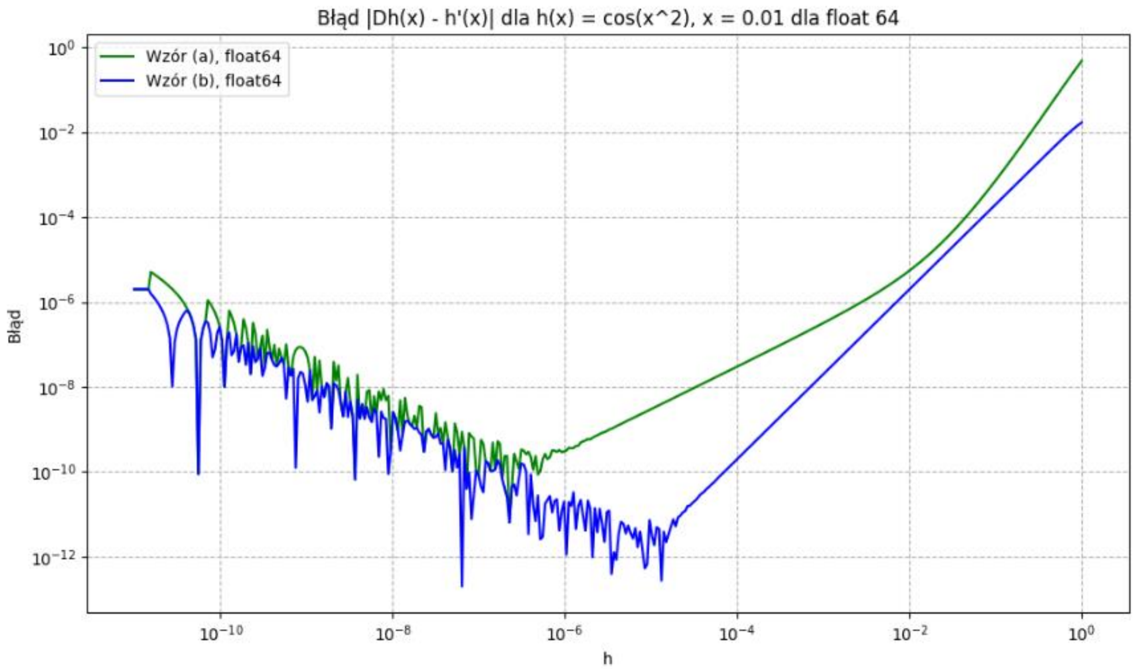
Możemy zaobserwować podobieństwo wykresów błędu powyższych funkcji do wykresów błędu dla funkcji $f(x) = sin(x^3)$ odpowiednio dla typu float32 (trzeci wykres) i float64 (czwarty wykres).
Zatem jesteśmy w stanie stwierdzić, iż wykres błędu E(h) jest niezależny od funkcji, którą wybierzemy.

b) Rozważmy błąd dla przykładowej funkcji $h(x) = cos(x^2)$ dla typu float64 w punktach odpowiednio: x = 0.5 i x = 0.01.

- Błąd dla przykładowej funkcji $h(x) = cos(x^2)$ w punkcie x = 0.5 dla typu float64



- Błąd dla przykładowej funkcji $h(x) = cos(x^2)$ w punkcie x = 0.01 dla typu float64



Analizując błędy dla typu float64 dla funkcji $h(x) = cos(x^2)$ w punktach x = 0.5 oraz x = 0.01 Możemy zauważyć, że błędy dla wykresu w punkcie x = 0.01 względem poprzedniego (liczonego dla x = 0.5) są mniejsze.

Zatem możemy stwierdzić iż wykres błędu E(h) jest zależny od punktu x, który wybierzemy.