1

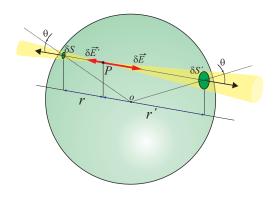
Interacciones electrostáticas

1.1 Ejemplos de cálculo de campo por integración directa

Veamos algunas aplicaciones de (??). Consideremos en primer lugar una esfera cargada superficialmente con densidad *constante*. Calculemos el campo eléctrico en su interior. This is a capacitor || and this is ground =

Sea un punto P. Consideremos dos elementos δS y $\delta S'$ interceptados por el mismo ángulo sólido. Las cargas sobre cada uno de estos elementos δS y $\delta S'$ producirán campos $\delta \vec{E}$ y $\delta \vec{E}'$ mutuamente opuestos. Sus módulos serán:

$$\delta E = rac{\sigma \delta S}{arepsilon_0 r^2} \qquad \delta E = rac{\sigma \delta S'}{arepsilon_0 r'^2}$$



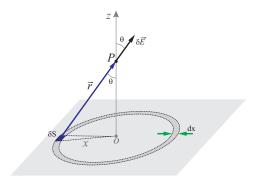
Pero $\frac{\delta S\cos\theta}{r}=\delta\Omega$ es el ángulo sólido subtendido por δS , y $\frac{\delta S'\cos\theta}{r'}=\delta\Omega'$ el correspondiente a $\delta S'$. Dado que por hipótesis $\delta\omega=\delta\omega'$, y siendo que θ es el mismo para los dos elementos, resulta $\delta E=\delta E'$. Es fácil ver entonces que, agrupando en $(\ref{eq:theta})$ los elementos de área por pares opuestos, interceptados por los mismos elementros de ángulo sólido, el campo total en el interior de la esfera cargada superficialmente en forma homogénea, es idénticamente nulo.

Esto lleva a un método experimental más preciso para verificar la ley de Coulomb (y con ello, la validez de nuestras experiencias ideales). Efectivamente, bastará comprobar si el campo en el interior de una esfera con carga superficial

constante es realmente nulo. Es fácil verificar que si la ley (??) o (??) no fuese válida (e.g. si tuviese la forma $f = qq'/\epsilon_0 r^n$, con $n \neq 2$), el campo en el interior de esa esfera no sería idénticamente nulo. En la práctica se logra una distribución homogénea de cargas sobre una superficie esférica, cargando eléctricamente un conductor metálico esférico (veremos más adelante que la carga de un conductor siempre se reparte sobre su superficie).

El otro ejemplo que estudiaremos será el de un plano infinito, cargado con densidad superficial constante. Sea un punto P que dista Z del plano, y tracemos anillos concéntricos de radio x y espesor dx en la forma de la figura. El campo $\delta \vec{E}'$ producido por el elemento δS rayado tendrá la dirección de la figura, y módulo

$$|\delta \vec{E}'| = \frac{\delta S \sigma}{\varepsilon_0 r^2}$$



Al considerar toda la contribución del anillo en cuestión, sólo habrá que sumar la componente *normal* al plano del campo (ya que las componentes paralelas se anulan para elementos de área mutuamente opuestos del anillo). Por lo tanto, la contribución al campo de todo el anillo será

$$\delta E = \sum \delta E' \cos \theta = \frac{\overbrace{2\pi x dx}^{\text{área del anillo}} \sigma \cos \theta}{\varepsilon_0 r^2} = \frac{2\pi \sigma}{\varepsilon_0} \frac{xz}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx$$

Sumando sobre todos los anillos, obtenemos para el campo total en P:

$$E_P = \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{xz}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx$$

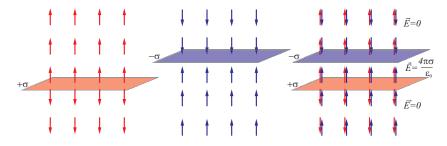
tomando $\xi = \frac{x}{z}$, queda

$$E = \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon_0} \int_0^\infty \frac{\xi d\xi}{(1+\xi^2)^{3/2}} = \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon_0}$$
 (1.1)

ya que la integral vale 1. La dirección es normal al plano, y el sentido se aleja del mismo, si está cargado positivamente.

Sorprende el hecho de que el campo no dependa de Z, o sea, del punto en el espacio. Uno está tentado a pensar: a medida que me alejo del plano, me alejo de todos sus puntos a la vez. Entonces, cada carga elemental del plano me debería mandar una contribución menor. Con ello, jel campo total debería ser una función decreciente de Z! El "chiste" está en lo siguiente: es absolutamente cierto que la contribución de una carga situada en cualquier punto Q es menor en P' que en P. Pero lo que sobrevive de esa contribución, al sumar sobre las demás cargas, es sólo la componente normal al plano. Y el coseno del ángulo de proyección θ' (en P') es, por lo que se ve en el dibujo, mayor que el de θ (en P), compensando así el efecto de distancia. Nuevamente, esto sólo vale para una ley Coulombiana (??) o (??). En resumen, el campo de un plano infinito cargado positivamente, es homogéneo (constante), de dirección normal al plano y sentido indicado en la figura, y el módulo está dado por (1.1).

Si tenemos dos planos paralelos, que llevan densidades de cargas *opuestas*, obtenemos la configuración de la figura.



El campo es nulo fuera del espacio comprendido por los planos, por cuanto allí

las contribuciones $+\frac{2\pi\sigma}{\epsilon_0}$ y $-\frac{2\pi\sigma}{\epsilon_0}$ que envía cada plano se anulan mutuamente. En la región entre los planos cargados, esas contribuciones se suman en módulo (ver dibujo), valiendo allí el campo

$$E = \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \sigma \tag{1.2}$$

Un sistema así se obtiene en la práctica colocando a dos conductores planos que llevan cargas opuestas muy cerca uno frente al otro (condensador plano). El campo entre los dos conductores es homogéneo y su valor está dado por (1.2). Esta es la forma más práctica para obtener campos homogéneos.

Por supuesto que en la realidad no es posible disponer de conductores planos infinitos; por lo tanto, el campo no será homogéneo en la zona de los bordes. Pero cuanto menor sea la distancia entre los planos, tanto menor será la influencia perturbante de los bordes.

Obsérvese que la tensión (??) sobre los planos paralelos cargados opuestamente vale

 $\tau = \frac{4\pi\sigma^2}{\varepsilon_0}$

La fuerza resultante que actúa sobre una porción de superficie S' de uno de los planos cargados será entonces

 $F = \frac{4\pi\sigma^2 S}{\varepsilon_0}$

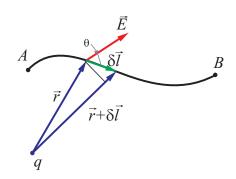
Esto permite llevar a cabo en forma práctica la medición absoluta de fuerzas electrostáticas, y con ello, la de cargas eléctricas y de la constante ε_0 .

Las expresiones (??) y (??) son muy poco prácticas para la resolución de problemas electrostáticos. En la sección ?? encontraremos relaciones integrales de validez completamente general para el campo eléctrico que son más útiles, especialmente cuando se trata de problemas con simetrías geométricas.

1.2 El potencial electrostático

Consideremos nuevamente el campo de una carga puntual q (??). Calculemos el trabajo W_{AB} que realiza la fuerza electrostática que actúa sobre una carga q' que se desplaza sobre una curva entre A y B:

$$W_{AB} = \int_{AB} \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = q' \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$



El producto escalar $\vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ vale, de acuerdo a (??):

$$\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E \cdot dl \cdot \cos \theta = \frac{q \cdot dl}{\varepsilon_0 r^2} \cos \theta$$

Pero, observando el dibujo, $dl \cdot \cos \theta = dr$ (variación del módulo de \vec{r}). Entonces

$$W_{AB} = q' \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{q'q}{\varepsilon_0} \int_A^B \frac{dr}{r^2} = -\frac{q'q}{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$
(1.3)

Este resultado nos muestra que el trabajo de la fuerza eléctrica es *independiente del camino seguido*, dependiendo solamente de las posiciones inicial y final. Esto quiere decir que las interacciones electrostáticas *son conservativas* (Mecánica Elemental, pag. 147).

Según (1.3), y de acuerdo a lo visto en Mecánica, la cantidad $q'q/\varepsilon_0r$ es la energía potencial de la carga q' en el punto \vec{r} del campo de la carga q (a menos de una constante aditiva). Esta energía potencial depende de la carga q'. En electrostática se prefiere trabajar con una magnitud independiente de la carga q' en cuestión, que solo dependa del campo en el que ésta se halla. Esta magnitud se obtiene a partir de la integral $\int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$, en la forma

$$\int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{q}{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

Esto se puede expresar en la forma general

$$\int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -(V_B - V_A) \tag{1.4}$$

en la cual, para un punto genérico

$$-V(\vec{r}) = -\frac{q}{\varepsilon_0 r} + C \tag{1.5}$$

La función escalar V, cuya diferencia da el valor de la integral curvilínea del campo electrostático entre dos puntos cualesquiera, se denomina potencial electrostático. No debe confundirse con la energía potencial $E_{\rm pot}$ de una carga puntual q', la cual está relacionada con V en la forma

$$E_{\rm pot} = q'V \tag{1.6}$$

Observemos en (1.5) que la constante arbitraria C es el potencial en el infinito $(r = \infty)$: $C = V(\infty)$. Muchas veces es conveniente poner $C = V(\infty) = 0$. Recuérdese que lo que está definido unívocamente según (1.4), es siempre la diferencia de potencial. Si la carga cuya función potencial es $V(\vec{r})$ no está en el origen, sino en el punto \vec{r}_0 , el potencial en el punto \vec{r} será evidentemente (ver dibujo):

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_0|} + C$$

Esto significa, en forma explícita:

$$V(x,y,z) = \frac{q}{\varepsilon_0 \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} + C$$
 (1.7)

Si en lugar de tener una sola carga, tenemos muchas cargas puntuales q_k , situadas en puntos \vec{r}_k , el potencial del campo resultante será, de acuerdo al principio de superposición (??), y teniendo en cuenta (1.7):

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{k} \frac{q_k}{|\vec{r} - \vec{r}_k|} + C \tag{1.8}$$

Si, en cambio, tenemos una distribución de cargas de densidad ρ , obtenemos

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + C$$
 (1.9)

lo que significa la integral de volumen

$$V(x,y,z) = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(x',y',z')dx'dy'dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} + C$$

En todas estas relaciones, es posible hacer $C = V(\infty) = 0$, siempre y cuando no haya cargas en el infinito. Es fácil comprobar que la ecuación (1.4) tiene validez completamente general, para todos estos casos, así como la expresión (1.6). Esta última siempre representa la energía potencial de una carga puntual q', en el punto \vec{r} de un campo electrostático en el que el potencial es V. Por ello (1.6) representa el trabajo que realizan las fuerzas electrostáticas sobre una carga cuando ésta se aleja desde el punto en cuestión hasta el infinito, o también, el trabajo que tiene que realiza una fuerza exterior cuando se trae la carga desde el infinito, a la posición dada (por supuesto que en ésto se supone que no interviene energía cinética alguna, lo que significa que los desplazamientos se realizan a velocidad

constante, o mejor, a velocidad nula, para no salir del dominio electrostático). La (1.6) significa que el potencial electrostático en un punto dado es numéricamente igual a la energía potencial de la carga unitaria, colocada en ese punto. Las dimensiones del potencial, en el sistema MKS, son, de acuerdo a (1.6):

$$[V] = \frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}} = \text{Volt}$$
 (1.10)

En base al Volt se define la unidad práctica de campo, de acuerdo a (1.4):

$$[E] = \frac{\text{Volt}}{m} \tag{1.11}$$

En el sistema u.e.s., el potencial también será una magnitud derivada y, de acuerdo a (1.6) y (??) debe tener las dimensiones

$$[V] = \frac{\text{erg}}{\text{u.e.s. carga}} = g^{\frac{1}{2}} \text{cm}^{\frac{1}{2}} \text{seg}^{-1}$$
 (1.12)

Respecto de los valores numéricos relativos, comprobamos que

$$1 \text{ Volt} = \frac{1 \text{ Joule}}{1 \text{ Coulomb}} = \frac{10^7 \text{ erg}}{3.10^9 \text{ ues}} = \frac{1}{3.10^2} \text{ ues de potencial}$$
 (1.13)

La ecuación (1.6) permite definir una unidad de energía muy usada en física atómica, el electrón-volt (Mecánica Elemental, pag. 152). Si un electrón recorre una diferencia de potencial de 1 Volt, su energía varía, de acuerdo a (1.4) y (1.6), en

$$\Delta E = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Coulomb} \cdot 1 \text{ Volt} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ Joule}$$

Esta energía es la que se define como 1 electrón—volt. Es muy cómoda de usar cuando se trabaja con partículas aceleradas en campos eléctricos.

El gran valor de la función potencial reside en el hecho de que esta (única) función determina unívocamente el campo electrostático (1.2) (a las tres funciones E_x , E_y y E_z). O sea, podemos describir el ente vectorial $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ con una única función escalar $V = V(\vec{r})$.

Efectivamente, vamos a mostrar que los componentes de \vec{E} se obtienen a partir de la función V = V(x, y, z) mediante la receta:

$$E_x = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x}$$
 $E_y = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y}$ $E_z = -\frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z}$ (1.14)

Para ello, expresemos la integral curvilíne
a $\int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ en la forma

$$\int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{AB} (E_x dx + E_y dy + E_z dz)$$

Aquí dx, dy, dz, son las componentes del vector $d\vec{\ell}$, elemento de arco de la curva sobre la que se integra¹.

Entonces, según la receta propuesta (1.14):

$$\int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{AB} \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz \right)$$

Pero el integrando de la derecha es, por el desarrollo de Taylor de una función de tres variables:

 $\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz = dV$

donde dV es la variación del potencial al pasar del punto \vec{r} al punto $\vec{r}+d\vec{\ell}$. O sea,

$$\int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\int_{AB} dV = -(V_B - V_A)$$

con lo que se verifica (1.4), que es nuestra definición original de la función potencial.

Cuando a partir de una función escalar $\Phi(x,y,z)$ se fabrica un vector \vec{A} en la forma

$$A_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$
 $A_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ $A_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$

se lo denomina vector gradiente de la función escalar (Por supuesto que hay que demostrar que estas derivadas parciales realmente tienen las propiedades de componentes de un vector). Esta operación diferencial en el análisis vectorial se indica simbólicamente en la forma $\vec{A} = \vec{\nabla} \Phi$. Aquí se ha introducido el operador diferencial $\vec{\nabla}$ (nabla), de componentes

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{1.15}$$

De esta manera podemos expresar el campo eléctrico en función del potencial en la forma

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \tag{1.16}$$

que es una expresión simbólica de las relaciones (1.14).

Dada una distribución de cargas ρ , bastará ahora hacer una sola integral (la correspondiente al potencial (1.9)), y hallar las tres componentes del campo, derivando como lo receta la fórmula (1.14). Nos ahorramos por lo tanto las tres integrales de (??). Por ello, el "problema electrostático" se limita a determinar la función potencial para una dada distribución de cargas: el potencial electrostático pasa a ser la función clave de la resolución práctica de problemas electrostáticos.

 $^{^1}Nota:$ Por ello, dx, dy, dz no son independientes entre sí, sino que guardan la relación dada por las ecuaciones de la curva $\frac{dx}{tx}=\frac{dy}{ty}=\frac{dz}{tz}$, en la que tx, ty, tz, son funciones quedan la dirección y el sentido de la tangente a la curva en todo punto.

1.3 Ejemplo: descripción geométrica del campo con superficies equipotenciales

Consideremos nuevamente una carga puntual en el origen. El potencial estará dado por (1.5), en donde podemos hacer C = 0. Verifiquemos en primer lugar la relación (1.16):

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{q}{\varepsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{qx}{[x^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \frac{q}{\varepsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{qy}{[x^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{q}{\varepsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{qz}{[x^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Pero las expresiones de la derecha no son otra cosa que las componentes de (??): $\vec{E} = q\vec{r}/\varepsilon_0 r^3$.

Observemos en (1.5) que todos los puntos r= cte (esferas concéntricas) están al mismo potencial. Para desplazar una carga sobre una esfera concéntrica con la carga, no es necesario realizar trabajo. En general, una superficie V(x,y,z)= constante es una superficie equipotencial. Su trazado tiene utilidad práctica para muchos casos. Por lo pronto, el campo eléctrico es siempre perpendicular a la superficie equipotencial, dado que para cualquier curva sobre ésta se cumple que $\int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$, lo cual sólo se consigue si \vec{E} es perpendicular a cualquier elemento de arco $d\vec{\ell}$ perteneciente a la superficie (es decir, no cuesta trabajo desplazar una carga sobre una superficie equipotencial). Adicionalmente, dadas dos superficies equipotenciales vecinas (correspondientes a valores constantes de potencial muy próximos entre sí), el campo será más intenso en aquella zona en que las superficies se acercan más entre sí. Eligiendo la normal \hat{n} como eje x, se ve fácilmente que

$$|\vec{E}| = |E_x| = \frac{\partial V}{\partial x}$$

Es decir, $|\vec{E}|$ es inversamente proporcional a la distancia δx entre las dos superficies. Obsérvese que el *sentido* de \vec{E} es siempre de la superficie de mayor potencial a la de menor potencial. Dibujando una familia de equipotenciales, es posible obtener una imagen gráfica simple que da información sobre dirección, sentido y módulo del campo eléctrico.

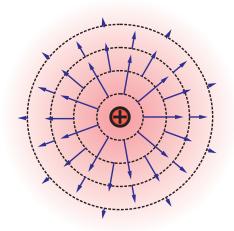
La familia de equipotenciales para nuestro ejemplo de una carga puntual, es una familia de esferas. No existe ninguna superficie para valores negativos de V.

El siguiente ejemplo será el correspondiente a las dos cargas iguales, de la

sección ??. El potencial será, de acuerdo a (1.8), y tomando C=0:

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{OA}|} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{OB}|} \right)$$
$$= \frac{q}{\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + a/2)^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a/2)^2}} \right]$$

Las superficies V= cte son, en general, superficies complicadas de la forma esquematizada en la figura adjunta. No existen superficies para valores negativos de V.



Examinemos el potencial en un punto lejano $(r \gg a)$. En ese caso, es fácil verificar que $V \cong \frac{2q}{\epsilon_0 r}$.

Es decir, las equipotenciales se transforman en esferas. En un punto lejano, el potencial "no ve bien" el detalle que hay en el origen: se comporta como el potencial de una única carga puntual de valor igual a la carga total.

El último ejemplo es nuevamente el del dipolo. El potencial será ahora:

$$\begin{split} V(\vec{r}) &= \frac{q}{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{OB}|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{OA}|} \right) \\ &= \frac{q}{\varepsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - a/2)^2}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + a/2}} \right] \end{split}$$

Obsérvese que hay una superficie V=0 además del plano infinito: es el plano z=0. Las equipotenciales tienen

el aspecto de la figura adjunta. Aquí existen superficies que corresponden a valores negativos de V (son las que envuelven a la carga negativa).

Examinemos qué pasa con un dipolo puntual $(a \ll r)$. En la expresión de arriba podremos introducir aproximaciones similares a las usadas en $(\ref{eq:continuous})$:

$$\begin{split} V &= \frac{q}{\varepsilon_0} \left[\frac{1}{r - \frac{a}{2} \cos \theta} - \frac{1}{r + \frac{a}{2} \cos \theta} \right] \\ &= \frac{q}{\varepsilon_0 r} \left[(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta) - (1 - \frac{a}{2r} \cos \theta) \right] \end{split}$$

teniendo en cuenta la ecuación (??). Observemos que $p\cos\theta/r^2$ se puede expresar vectorialmente en la forma:

 $\frac{p\cos\theta}{r^2} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3}$

donde θ es el ángulo que forma \vec{p} con \vec{r} . Por lo tanto, el potencial electrostático de un dipolo puntual decrece como $1/r^2$ (es decir, más rápidamente que el potencial de una carga puntual), y vale

 $V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\varepsilon_0 r^3} \tag{1.17}$

Las superficies equipotenciales están dadas por $\cos\theta/r^2=$ cte, es decir $r=k\sqrt{\cos\theta}$, y tienen el aspecto de la figura.

Es fácil comprobar que aplicando la operación (1.16) a (1.17), volvemos a obtener la expresión (??). Todo sistema de carga total nula, cuyo potencial obedece la ley (1.17) se puede definir como un dipolo puntual. Esta ley sirve para definir fenomenológicamente al momento dipolar \vec{p} en forma particularmente simple. Esto es especialmente importante al estudiar el comportamiento de la materia en un campo eléctrico (ver Cap. cual?). Allí se presentará evidencia experimental para afirmar cada molécula (de un dieléctrico) contribuye con un potencial del tipo (1.17). La constante (vectorial) de proporcionalidad \vec{p} es el momento dipolar de la molécula. Pero ello no quiere decir que una molécula sea realmente un sistema de dos cargas +q y -q, situadas a una distancia a, tal que $q\vec{a}=\vec{p}$! Debido al principio de superposición, es fácil ver que el momento dipolar es una magnitud aditiva: muchos dipolos puntuales (muchas moléculas) de momentos dipolares \vec{p}_k se comportan, vistos desde lejos, como un único dipolo de momento $\vec{p} = \sum \vec{p}_k$. Más adelante veremos la importancia de este comportamiento.