

Ipari informatika - IMSc feladat - 2022 őszi félév

Vörös Asztrik

1. Rendszer - folytonos idő

A feladat által megadott egyenletrendszer:

$$\begin{bmatrix} m+M & mL_0 & 0 \\ m & mL_0 & 0 \\ 0 & 0 & m+J/\rho^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\vartheta} \\ \dot{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ -mg\vartheta \\ -\tau/\rho \end{pmatrix} \quad (1)$$

Ezt két egymástól független rendszerre tudjuk bontani, ahol az első rendszer feladata r -t meghatározni, míg a másiké ϑ -t. Első lépésnek $x' = Ax + Bu$ alakra fogom hozni az egyenleteket (a két bemenet f és τ). Ezután eltüntetem a kétszeres deriváltakat új változók bevezetésével.

1.1. r rendszer

$$\begin{bmatrix} m+M & mL_0 \\ m & mL_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ -mg\vartheta \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -mg \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \vartheta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} f \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m+M & mL_0 \\ m & mL_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -mg \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \vartheta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} m+M & mL_0 \\ m & mL_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} f \quad (4)$$

$$=: A' \begin{pmatrix} r \\ \vartheta \end{pmatrix} + B' f \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 = \dot{r} \\ \dot{x}_2 = \dot{\vartheta} \\ \dot{x}_3 = \ddot{r} \\ \dot{x}_4 = \ddot{\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0}_{2 \times 2} & \underline{I}_{2 \times 2} \\ A' & \underline{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 = r \\ x_2 = \vartheta \\ x_3 = \dot{r} \\ x_4 = \dot{\vartheta} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0}_{2 \times 1} \\ B' \end{bmatrix} f \quad (6)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & \underline{0}_{1 \times 3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 = r \\ x_2 = \vartheta \\ x_3 = \dot{r} \\ x_4 = \dot{\vartheta} \end{pmatrix} + 0f \quad (7)$$

$$\dot{\underline{x}} = A_1 \underline{x} + B_1 f \quad (8)$$

$$y = C_1 \underline{x} + D_1 f \quad (9)$$

1.2. l rendszer

$$[m + J/\rho^2] (\ddot{i}) = (-\tau/\rho) \quad (10)$$

$$= [0] (l) + [-1/\rho] \tau \quad (11)$$

$$(\ddot{i}) = [m + J/\rho^2]^{-1} [0] (l) + [m + J/\rho^2]^{-1} [-1/\rho] \tau \quad (12)$$

$$=: A' (l) + B' \tau \quad (13)$$

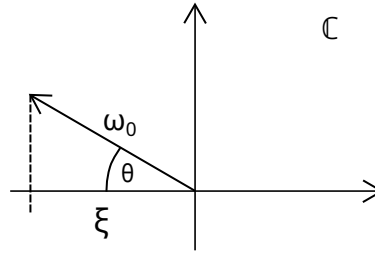
$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 = \dot{l} \\ \dot{x}_2 = \dot{i} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0}_{1 \times 1} & \underline{I}_{1 \times 1} \\ A' & \underline{0}_{1 \times 1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 = l \\ x_2 = i \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0}_{1 \times 1} \\ B' \end{bmatrix} \tau \quad (14)$$

$$y = [1 \quad \underline{0}_{1 \times 1}] \begin{pmatrix} x_1 = l \\ x_2 = i \end{pmatrix} + 0\tau \quad (15)$$

$$\dot{\underline{x}} = A_2 \underline{x} + B_2 \tau \quad (16)$$

$$y = C_2 \underline{x} + D_2 \tau \quad (17)$$

2. Domináns pólusok



A θ definíciója miatt a $\cos \theta$ pont -1 -szeresét adja a komplex szám valós részének, tehát

$$\Re\{s_{\text{dominant}}\} = -\omega_0 \xi \quad (18)$$

Mivel a feladat paraméterezése ξ -t adta meg, így bár $\Re\{s_{\text{dominant}}\}$ egyértelmű $\Im\{s_{\text{dominant}}\}$ viszont nem (feltétlen) az, hiszen egy megoldás konjugáltja is azonos $\cos \theta =: \xi$ értékkel fog rendelkezni.

$$\Im\{s_{\text{dominant}_{1,2}}\} = \omega_0 \sin \theta \quad (19)$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad (20)$$

$$\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \quad (21)$$

$$\sin \theta = \pm \sqrt{1 - \xi^2} \quad (22)$$

$$\Im\{s_{\text{dominant}_{1,2}}\} = \pm \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \quad (23)$$

Tehát

$$s_{\text{dominant}_{1,2}} = -\omega_0 \xi \pm \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \quad (24)$$

3. Shannon kritérium

$$f_{1,2} := 5 \max_{\lambda_i \in \lambda(cA_{1,2})} |\lambda_i| \quad (25)$$

$$= 5|s_{o\infty}| \quad (26)$$

$$T := 1/f \quad (27)$$

4. Diszkretizálás

Matlabban a folytonos rendszert a $c2d$ paranccsal lehet átalakítani diszkrét rendszerré, megadva a T mintavételezési időt. Így az r rendszert a $(\Phi_1, \Gamma_1, C_1, D_1)$ 4-es, míg az l rendszert a $(\Phi_2, \Gamma_2, C_2, D_2)$ 4-es írja le.

Az előírt sajátértékeket a következő képlettel transzformáltam át:

$$z = e^{sT} \quad (28)$$

Így a következő új változók jönnek létre: $z_{\text{dominant } 1,2}, z_{o\infty}, z_{c\infty}$

5. Stabilitás

Diszkrét időben a stabilitását olyan komplex számok teljesítik melyeknek a hossza kisebb mint 1. A két rendszert megvizsgálva a következő sajátértékek adódtak, így a rendszerünk labilis:

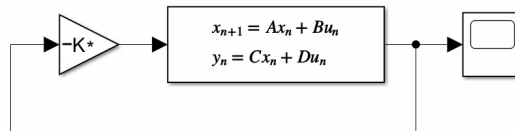
$$\lambda_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.9938 + 0.1109i \\ 0.9938 - 0.1109i \end{pmatrix} \quad (29)$$

$$\lambda_l = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (30)$$

Az elkövetkező rendszerek során eltekintünk az alapjeltől, hogy az adott megoldás lényege látszódjon csak, illetve az utolsó rendszer esetén az alapjel bevezetésének módja egyértelműen alkalmazható az azelőtti rendszerekre. A képeken a r rendszerek változatai fognak szerepelni, míg az egyenletek során rendszer független alakok kerülnek bemutatásra.

6. Stabilizálás - \underline{x} ismeret

Tekintsük az alábbi konstrukciót, ahol a rendszer bemenete $-Kx$ lesz:



Ekkor a rendszerünk állapotegyenlete a következő lesz:

(31)

(32)

azonban az kell, hogy a rendszer irányítható legyen, azaz létezzen az $M_{c1,2}^{-1}$, amit Matlabban a *ctrb* és a *rank* függvények segítségével tudunk megállapítani.

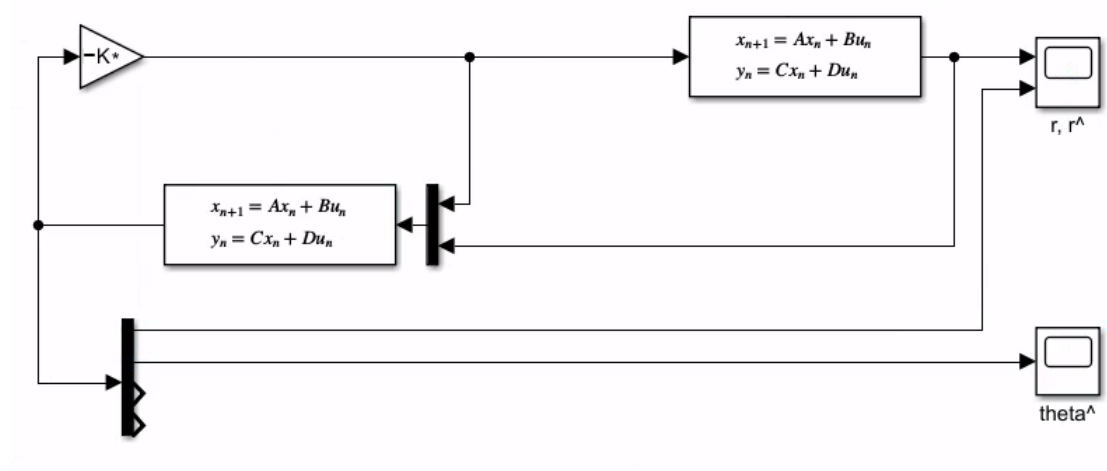
Mivel a két rendszer irányítható, így a feladat kiírása szerint a következő sajátértékek írjuk elő a rendszer számára:

(33)

(34)

7. Stabilizálás - x ismeretlen

Mivel az állapotváltozó ismeretének számos akadálya lehet, ezért egy becslőt alkalmazunk annak megállapítására, felhasználva a rendszer kimenetét és bemenetét.



Az állapotmegfigyelő állapotegyenlete a következő ($D = 0$ -t feltételezve):

$$x_{k+1}^{\text{becslő}} =: \hat{x}_{k+1} = \Phi \hat{x}_k + \Gamma u_k + G y_{\text{eltérés}_{k+1}} \quad (35)$$

$$= \Phi \hat{x}_k + \Gamma u_k + G(y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^{\text{rendszer}}) \quad (36)$$

$$= \Phi \hat{x}_k + \Gamma u_k + G(y_{k+1} - C \hat{x}_{k+1}^{\text{rendszer}}) \quad (37)$$

$$= \Phi \hat{x}_k + \Gamma u_k + G(y_{k+1} - C(\Phi \hat{x}_k + \Gamma u_k)) \quad (38)$$

$$= (\Phi - GC\Phi) \hat{x}_k + (\Gamma - GC\Gamma) u_k + G y_{k+1} \quad (39)$$

$$= F \hat{x}_k + H u_k + G y_{k+1} \quad (40)$$

$$= F \hat{x}_k + \begin{bmatrix} H & G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ y_{k+1} \end{pmatrix} \quad (41)$$

$$= F \hat{x}_k + H' u'_k \quad (42)$$

$$y_k^{\text{becslő}} = \underline{I} \hat{x}_k + \underline{O} u'_k \quad (43)$$

A rendszer sajátértékeit $F = (\Phi - GC)$ tartalmazza, amiket G erősítési mátrix segítségével tudunk megválasztani, célszerűen gyorsabb csillapítással, mint az állapotvisszacsatolás esetén. A feladat által megjelölt sajátértékek:

$$\underline{\lambda}_r = \{z_{o\infty}\}^4 \quad (44)$$

$$\underline{\lambda}_l = \{z_{o\infty}\}^2 \quad (45)$$

Az Ackermann képlethez azonban $Q - WG$ alakra van szükségünk:

$$(\Phi - GC\Phi)^T = \Phi^T - \Phi^T C^T G^T \quad (46)$$

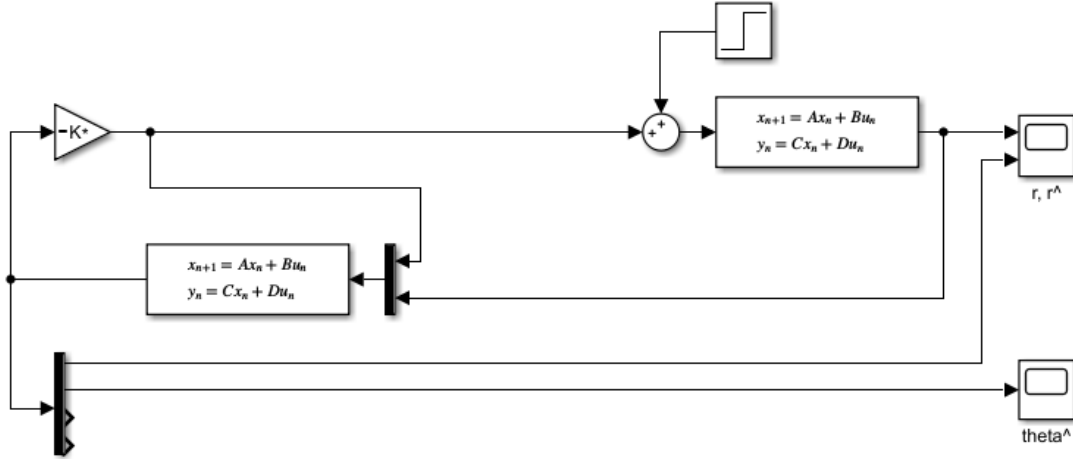
$$= Q - WG^T \quad (47)$$

Ezzel az átrendezéssel tehát meg tudjuk határozni G^T -t, ha a becslő megfigyelhető, azaz létezik $M_{o\ 1,2}^{T-1}$, amit Matlabban a *obsv* és a *rank* függvények segítségével tudunk megállapítani. G^T -t transzponálvas ezek után megkapjuk G -t.

8. Terhelés és Terhelésbecslő

8.1. Terhelés

Előfordulhat, hogy az általunk meghatározott rendszer bementet zaj éri és azt megakadályozni, illetve megfigyelni nem tudjuk. Ha a zaj elég hosszú kiterjedésű intervallumokra bontható, amiken belül konstans értékeket vesz fel, akkor azt meg tudjuk becsülni.



A becslést úgy tehetjük meg, hogy a zajt a rendszer részeként tekintjük, hiszen befolyásolni és mérni nem tudjuk közvetlenül. Azaz a rendszer állapotvektorát kibővítjük a zaj jelenlegi értékével d -vel. Az állapotegyenlet felírásakor felhasználjuk azt a tényt, hogy adott intervallumon belül a zaj konstans, így $d_{k+1} = d_k$, illetve D -t most is 0-nak tekintjük.

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ d_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ d_k \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} u_k \quad (48)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ d_k \end{pmatrix} \quad (49)$$

Bevezetve új változókat az így kapott rendszer állapotegyenlete:

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{\Phi} \tilde{x}_k + \tilde{\Gamma} u_k \quad (50)$$

$$y_k = \tilde{C} \tilde{x}_k \quad (51)$$

8.2. Terhelésbecslő

Mivel a zaj nem a kívánt szabályzáshoz vezet, így szeretnénk azt korrigálni azzal, hogy az általunk kiadott bementből levonjuk a zaj értékét, ami által az eredeti rendszerhez az eredetileg kiadni kívánt bemenet jut el. Azonban ehhez ismernünk kell a zaj értékét. Mivel az előző alszekcióban a zajt az új rendszer állapotegyenletének részévé tettük, így egy frissített állapotbecslővel megkaphatjuk az új állapotvektort, ami tartalmazza az eredeti állapotvektort és a zaj értékét.

Bár a sémát a legutolsó rendszerre lett illesztve az ábrán, illetve az elkövetkező számolásokban is a legutolsó rendszert feltételezzük, azonban az bármelyik előző rendszerre is ráilleszthető. Látható, hogy Nx és a kívánt kimenet szorzata meghatározza a kívánt állapotvektort. Ha a kívánt állapotvektort eltoljuk a jelenlegi (becsült) állapotvektorral, akkor a rendszerünk számára egy új origót határozunk meg, így az új origó felé való konvergáláskor valójában a kívánt állapotvektort felé fog konvergálni. Így az új bemenet a következő képpen néz ki:

$$u = -K(\underline{N}_x r_k - \hat{x}_k) + N_u r_k - \hat{d}_k \quad (57)$$

\underline{N}_x és N_u meghatározásához felhasználjuk, hogy a cél az, hogy a kívánt állapotvektor és a jelenlegi (becsült) állapotvektor között ne legyen különbség bizonyos idő (∞) elteltével, ezért:

$$r_\infty = y_\infty \quad (58)$$

$$\tilde{x}_\infty = \hat{x}_\infty \quad (59)$$

$$\underline{N}_x r_\infty - \hat{x}_\infty = 0 \quad (60)$$

$$\hat{x}_\infty = \underline{N}_x r_\infty \quad (61)$$

$$\tilde{x}_\infty = \underline{N}_x r_\infty \quad (62)$$

$$u_\infty = N_u r_\infty \quad (63)$$

Ezeket az egyenlőségeket felhasználva a rendszerünk állapotegyenleteit ∞ időben ($D = 0$ -t feltételezve) felírva megkapjuk \underline{N}_x -et és N_u -t:

$$\underline{N}_x r_\infty = \tilde{\Phi} \underline{N}_x r_\infty + \tilde{\Gamma} N_u r_\infty \quad (64)$$

$$r_\infty = \tilde{C} \underline{N}_x r_\infty \quad (65)$$

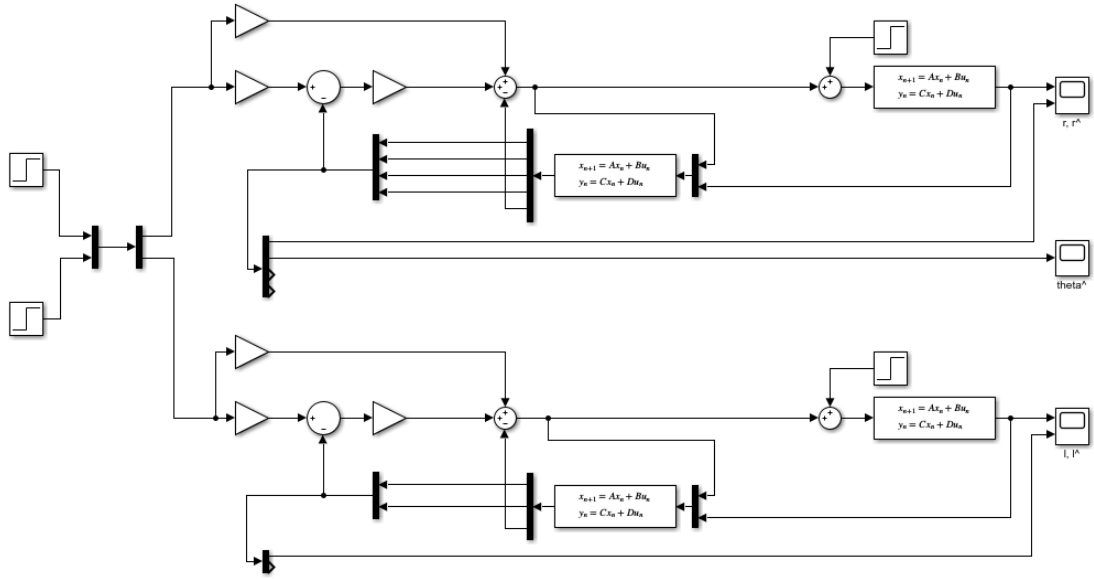
$$\underline{N}_x = \tilde{\Phi} \underline{N}_x + \tilde{\Gamma} N_u \quad (66)$$

$$1 = \tilde{C} \underline{N}_x \quad (67)$$

$$\begin{pmatrix} \underline{N}_x \\ N_u \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi} - \underline{I} & \tilde{\Gamma} \\ \tilde{C} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (68)$$

10. Két rendszer összekapcsolása

Végül az eredeti rendszert összekapcsoljuk egybe, amit egy $\begin{pmatrix} r \\ l \end{pmatrix}$ vektorral tudunk irányítani



1. ábra. control.slx

11. Szabályozási eredmények

Szabályzás során a következő alapjelek lettek felhasználva:

$$r_a = \begin{cases} 2 & \text{ha } t \geq 6 \\ 0 & \end{cases} \quad (69)$$

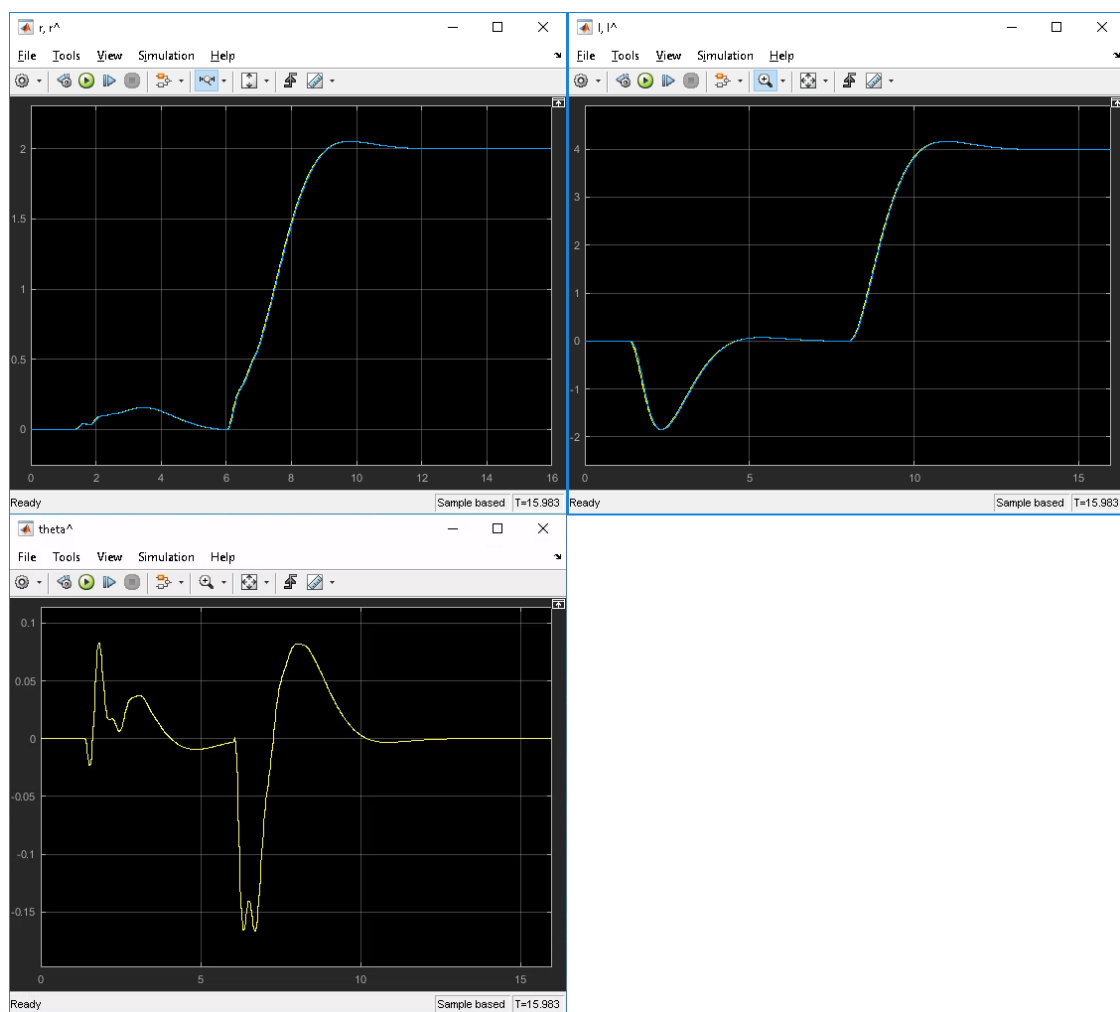
$$l_a = \begin{cases} 4 & \text{ha } t \geq 8 \\ 0 & \end{cases} \quad (70)$$

A jelekre ható zavarás pedig:

$$d_r = \begin{cases} 5 & \text{ha } t \geq T_{d,\text{start}} \\ 0 & \end{cases} \quad (71)$$

$$d_l = \begin{cases} 3 & \text{ha } t \geq T_{d,\text{start}} \\ 0 & \end{cases} \quad (72)$$

Ezek hatására a következő az r, ϑ, l értékei:



Látható, hogy a rendszer eleinte próbál 0-ba tartani, azonban $t = T_{d,start}$ -ban a zaj kitéríti a rendszert. $t = 6$ -ban, illetve $t = 8$ -ban látható, hogy a rendszer közel van a 0 értékhez, azonban ekkor megváltozik az alapjel, és ezután a rendszert az új alapjeleket fogja követni rövidesen a kimenetén.

12. Feladat általi szabályzás eredményei

Ezután frissítettem a Simulink modellt, hogy a feladat által kért szabályozást valósítsa meg. A feladat kiírása szerint módosítottam $T_{d,start}$ -ot, hogy ne lapolódjanak át a tranziensek, így végül $t = 4$ -kor lép csak be a zaj. Szintén módosítottam d_{norm} -ot, az alapján, hogy $d_{norm} = 1$ esetén mekkor volt a kitérés mértéke ($\approx 0.3 - 0.09$). Így végül d_{norm} értéke 0.4286 lett, ami által közel egyező lett az eltérések mértéke:

