# Ipari informatika - IMSc feladat - 2022 őszi félév

Vörös Asztrik

## 1. Rendszer - folytonos idő

A feladat által megadott egyenletrendszer:

$$\begin{bmatrix} m+M & mL_0 & 0 \\ m & mL_0 & 0 \\ 0 & 0 & m+J/\rho^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\vartheta} \\ \ddot{l} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ -mg\vartheta \\ -\tau/\rho \end{pmatrix} \tag{1}$$

Ezt két egymástól független rendszerre tudjuk bontani, ahol az első rendszer feladata $r$-t meghatározni, míg a másiké $\vartheta$-t. Első lépésnek $x' = Ax + Bu$ alakra fogom hozni az egyenleteket (a két bemenet $f$ és $\tau$). Ezután eltűntetem a kétszeres deriváltakat új változók bevezetésével.

### 1.1. $r$ rendszer

$$\begin{bmatrix} m+M & mL_0 \\ m & mL_0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ -mg\vartheta \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -mg \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \vartheta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} f \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{r} \\ \ddot{\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m+M & mL_0 \\ m & mL_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -mg \end{bmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \vartheta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} m+M & mL_0 \\ m & mL_0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} f \tag{4}$$

$$=: A' \begin{pmatrix} r \\ \vartheta \end{pmatrix} + B' f \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} = \dot{r} \\ \dot{x_2} = \dot{\vartheta} \\ \dot{x_3} = \ddot{r} \\ \dot{x_4} = \ddot{\vartheta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}}_{2\times2} & \underline{\underline{I}}_{2\times2} \\ A' & \underline{\underline{0}}_{2\times2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 = r \\ x_2 = \vartheta \\ x_3 = \dot{r} \\ x_4 = \dot{\vartheta} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}}_{2\times1} \\ B' \end{bmatrix} f \tag{6}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & \underline{0}_{1\times3} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 = r \\ x_2 = \vartheta \\ x_3 = \dot{r} \\ x_4 = \dot{\vartheta} \end{pmatrix} + 0f \tag{7}$$

$$\underline{\dot{x}} = A_1 \underline{x} + B_1 f \tag{8}$$

$$y = C_1 \underline{x} + D_1 f \tag{9}$$

### 1.2. $l$ rendszer

$$\begin{aligned}
\left[m + J/\rho^2\right]\left(\ddot{l}\right) &= \left(-\tau/\rho\right) && (10)\\
&= \left[0\right]\left(l\right) + \left[-1/\rho\right]\tau && (11)\\
\left(\ddot{l}\right) &= \left[m + J/\rho^2\right]^{-1}\left[0\right]\left(l\right) + \left[m + J/\rho^2\right]^{-1}\left[-1/\rho\right]\tau && (12)\\
&=: A'\left(l\right) + B'\tau && (13)
\end{aligned}$$

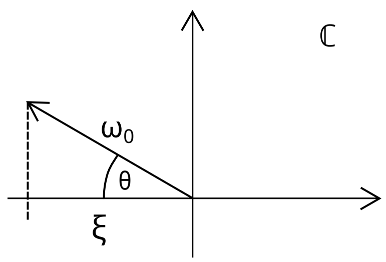
$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} = \dot{l} \\ \dot{x_2} = \ddot{l} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0}_{1\times1} & \underline{\underline{I}}_{1\times1} \\ A' & \underline{\underline{0}}_{1\times1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 = l \\ x_2 = \dot{l} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0}_{1\times1} \\ B' \end{bmatrix}\tau \tag{14}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & \underline{0}_{1\times1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 = l \\ x_2 = \dot{l} \end{pmatrix} + 0\tau \tag{15}$$

$$\underline{\dot{x}} = A_2\underline{x} + B_2\tau \tag{16}$$

$$y = C_2\underline{x} + D_2\tau \tag{17}$$

# 2. Domináns pólusok




A $\theta$ definíciója miatt a $\cos\theta$ pont $-1$-szeresét adja a komplex szám valós részének, tehát

$$\Re\{s_{\text{dominant}}\} = -\omega_0\xi \tag{18}$$

Mivel a feladat paraméterezése $\xi$-t adta meg, így bár $\Re\{s_{\text{dominant}}\}$ egyértelmű $\Im\{s_{\text{dominant}}\}$ viszont nem (feltétlen) az, hiszen egy megoldás konjugáltja is azonos $\cos\theta =: \xi$ értékkel fog rendelkezni.

$$\begin{aligned}
\Im\{s_{\text{dominant}_{1,2}}\} &= \omega_0\sin\theta && (19)\\
\sin^2\theta + \cos^2\theta &= 1 && (20)\\
\sin\theta &= \pm\sqrt{1-\cos^2\theta} && (21)\\
\sin\theta &= \pm\sqrt{1-\xi^2} && (22)\\
\Im\{s_{\text{dominant}_{1,2}}\} &= \pm\omega_0\sqrt{1-\xi^2} && (23)
\end{aligned}$$

Tehát

$$s_{\text{dominant}_{1,2}} = -\omega_0\xi \pm \omega_0\sqrt{1-\xi^2} \tag{24}$$

# 3. Shannon kritérium

$$f_{1,2} \coloneqq 5 \max_{\lambda_i \in \lambda(cA_{1,2})} \lambda_i \tag{25}$$
$$= 5|s_{o\infty}| \tag{26}$$
$$T \coloneqq 1/f \tag{27}$$

# 4. Diszkretizálás

Matlabban a folytonos rendszert a $c2d$ paranccsal lehet átalakítani diszkrét rendszerré, megadva a $T$ mintavételezési időt. Így az $r$ rendszert a $(\Phi_1, \Gamma_1, C_1, D_1)$ 4-es, míg az $l$ rendszert a $(\Phi_2, \Gamma_2, C_2, D_2)$ 4-es írja le.
Az előírt sajátértékeket a következő képlettel transzformáltam át:

$$z = e^{sT} \tag{28}$$

Így a következő új változók jönnek létre: $z_{\text{dominant}1,2}, z_{o\infty}, z_{c\infty}$

# 5. Stabilitás

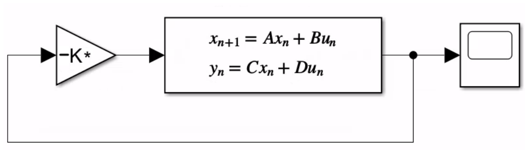
Diszkrét időben a stabilitását olyan komplex számok teljesítik melyeknek a hossza kisebb mint 1. A két rendszert megvizsgálva a következő sajátértékek adódtak, így a rendszerünk labilis:

$$\underline{\lambda}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.9938 + 0.1109i \\ 0.9938 - 0.1109i \end{pmatrix} \tag{29}$$
$$\underline{\lambda}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{30}$$

Az elkövetkező rendszerek során eltekintünk az alapjeltől, hogy az adott megoldás lényege látszódjon csak, illetve az utolsó rendszer esetén az alapjel bevezetésének módja egyértelműen alkalmazható az azelőtti rendszerekre. A képeken a $r$ rendszerek változatai fognak szerepelni, míg az egyenletek során rendszer független alakok kerülnek bemutatásra.

# 6. Stabilizálás - $\underline{x}$ ismeret

Tekintsük az alábbi konstrukciót, ahol a rendszer bemenete $-Kx$ lesz:




Ekkor a rendszerünk állapotegyenlete a következő lesz:

$$
\begin{aligned}
\underline{x}_{k+1} &= \Phi\underline{x_k} + \Gamma(-K\underline{x_k}) &(31)\\
&= (\Phi - \Gamma K)\underline{x_k} &(32)
\end{aligned}
$$

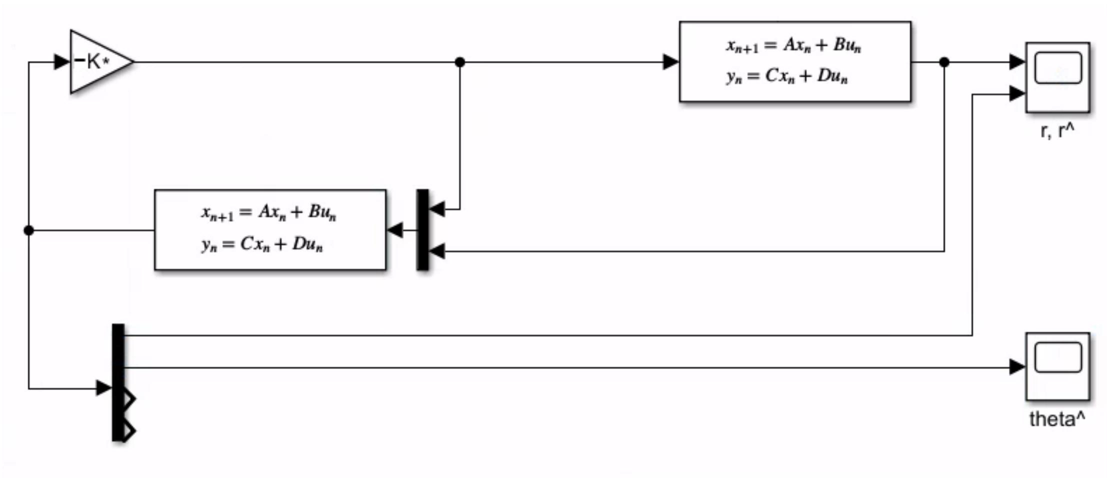
Látható, hogy az új rendszer $\Phi$ mátrixa $\Phi - \Gamma K$ lesz, ahol $K$-t mi választjuk meg. Az Ackermann képlet segítségével megfelelő sajátértékek megválasztásával megkaphatjuk a $K$ mátrixot. Ehhez azonban az kell, hogy a rendszer irányítható legyen, azaz létezzen az $M_{c1,2}^{-1}$, amit Matlabban a *ctrb* és a *rank* függvények segítségével tudunk megállapítani.
Mivel a két rendszer irányítható, így a feladat kiírása szerint a következő sajátértékek írjuk elő a rendszer számára:

$$
\underline{\lambda}_r = \begin{pmatrix} z_{\text{dominant}\,1} \\ z_{\text{dominant}\,2} \\ z_{o\infty} \\ z_{o\infty} \end{pmatrix} \tag{33}
$$

$$
\underline{\lambda}_l = \begin{pmatrix} z_{\text{dominant}\,1} \\ z_{\text{dominant}\,2} \end{pmatrix} \tag{34}
$$

# 7. Stabilizálás - $\underline{x}$ ismeretlen

Mivel az állapotváltozó ismeretének számos akadálya lehet, ezért egy becslőt alkalmazunk annak megállapítására, felhasználva a rendszer kimenetét és bemenetét.



Az állapotmegfigyelő állapotegyenelete a következő ($D = 0$-t feltételezve):

$$\begin{aligned}
x_{k+1}^{\text{becslő}} =: \hat{x}_{k+1} &= \Phi\hat{x}_k + \Gamma u_k + G y_{\text{eltérés} k+1} && (35)\\
&= \Phi\hat{x}_k + \Gamma u_k + G(y_{k+1} - \hat{y}_{k+1}^{rendszer}) && (36)\\
&= \Phi\hat{x}_k + \Gamma u_k + G(y_{k+1} - C\hat{x}_{k+1}^{renszer}) && (37)\\
&= \Phi\hat{x}_k + \Gamma u_k + G(y_{k+1} - C(\Phi\hat{x}_k + \Gamma u_k)) && (38)\\
&= (\Phi - GC\Phi)\hat{x}_k + (\Gamma - GC\Gamma)u_k + G y_{k+1} && (39)\\
&= F\hat{x}_k + H u_k + G y_{k+1} && (40)\\
&= F\hat{x}_k + \begin{bmatrix} H & G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ y_{k+1} \end{pmatrix} && (41)\\
&= F\hat{x}_k + H' u'_k && (42)
\end{aligned}$$

$$y_k^{\text{becslő}} = \underline{\underline{I}}\hat{x}_k + \underline{0}u'_k \quad (43)$$

A rendszer sajátértékeit $F = (\Phi - GC)$ tartalmazza, amiket $G$ erősítési mátrix segítségével tudunk megválasztani, célszerűen gyorsabb csillapítással, mint az állapotvisszacsatolás esetén. A feladat által megjelölt sajátértékek:

$$\underline{\lambda}_r = \{z_{o\infty}\}^4 \quad (44)$$

$$\underline{\lambda}_l = \{z_{o\infty}\}^2 \quad (45)$$

Az Ackermann képlethez azonban $Q - WG$ alakra van szükségünk:

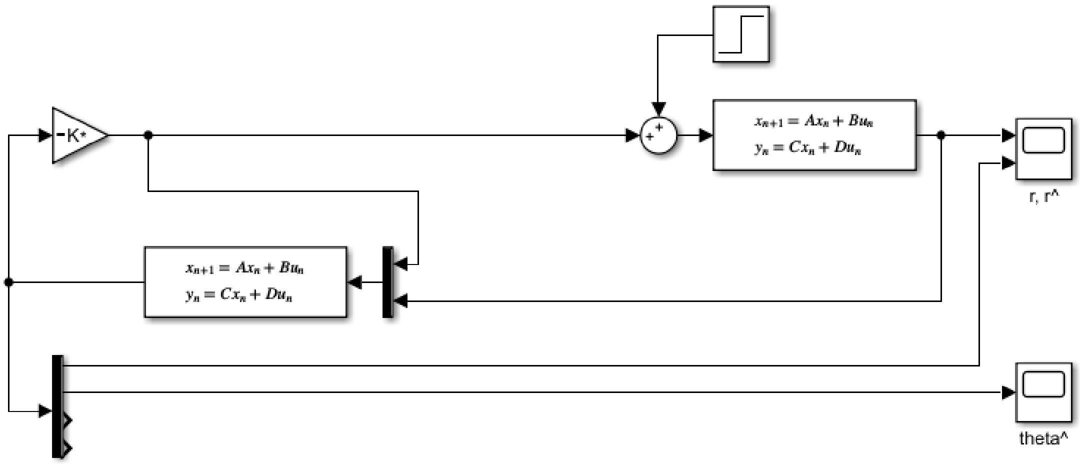
$$\begin{aligned}
(\Phi - GC\Phi)^T &= \Phi^T - \Phi^T C^T G^T && (46)\\
&= Q - W G^T && (47)
\end{aligned}$$

Ezzel az átrendezéssel tehát meg tudjuk határozni $G^T$-t, ha a becslő megfigyelhető, azaz létezik $M_{o\ 1,2}^{T\,-1}$, amit Matlabban a *obsv* és a *rank* függvények segíségével tudunk megállapítani. $G^T$-t transzponálvas ezek után megkapjuk $G$-t.

# 8. Terhelés és Terhelésbecslő

## 8.1. Terhelés

Előfordulhat, hogy az általunk meghatározott rendszer bementet zaj éri és azt megakadályozni, illetve megfigyelni nem tudjuk. Ha a zaj elég hosszú kiterjedésű intervallumokra bontható, amiken belül konstans értékeket vesz fel, akkor azt meg tudjuk becsülni.




A becslést úgy tehetjük meg, hogy a zajt a rendszer részeként tekintjük, hiszen befolyásolni és mérni nem tudjuk közvetlenül. Azaz a rendszer állapotvektorát kibővítjük a zaj jelenlegi értékével $d$-vel. Az állapotegyenlet felírásakor felhasználjuk azt a tényt, hogy adott intervallumon belül a zaj konstans, így $d_{k+1} = d_k$, illetve $D$-t most is 0-nak tekintjük.

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ d_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi & \Gamma \\ \underline{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ d_k \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma \\ 0 \end{bmatrix} u_k \tag{48}$$

$$y_k = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ d_k \end{pmatrix} \tag{49}$$

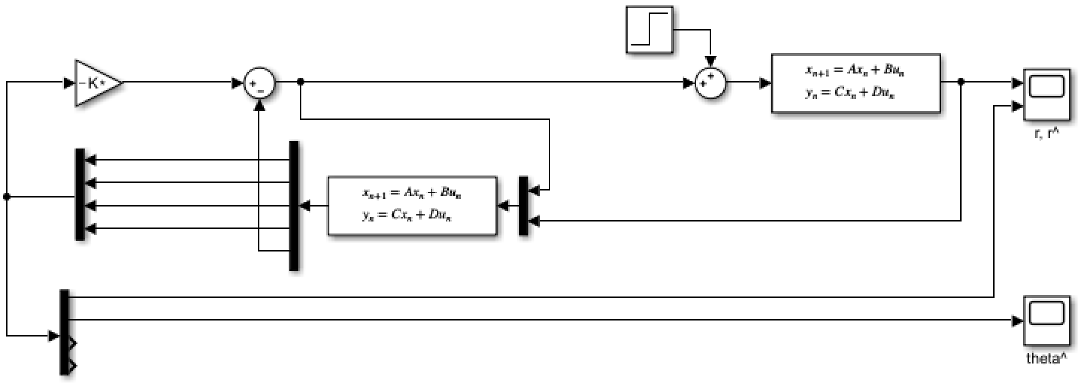
Bevezetve új változókat az így kapott rendszer állapotegyenelete:

$$\tilde{x}_{k+1} = \tilde{\Phi}\tilde{x}_k + \tilde{\Gamma}u_k \tag{50}$$

$$y_k = \tilde{C}\tilde{x}_k \tag{51}$$

## 8.2. Terhelésbecslő

Mivel a zaj nem a kívánt szabályzáshoz vezet, így szeretnék azt korrigálni azzal, hogy az általunk kiadott bementből levonjuk a zaj értékét, ami által az eredeti rendszerhez az eredetileg kiadni kívánt bemenet jut el. Azonban ehhez ismernünk kell a zaj értékét. Mivel az előző alszekcióban a zajt az új rendszer állapotegyenletének részévé tettük, így egy frissített állapotbecslővel megkaphatjuk az új állapotvektort, ami tartalmazza az eredeti állapotvektort és a zaj értékét.




Az állapotbecslőnél már megismert módot tudunk kiindulni és ugyanazt az eredményt kapjuk, kivéve az alábbi változtatásokat ($D = 0$ feltételezve):

$$(\Phi, \Gamma, C) \mapsto (\tilde{\Phi}, \tilde{\Gamma}, \tilde{C}) \tag{52}$$

$$x_k \mapsto \hat{\tilde{x}}_k = \begin{pmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{d}_k \end{pmatrix} \tag{53}$$

A változtatásokat végrehajtva a következő állapotegyenlet leírást kapjuk az új állapotbecslőre:

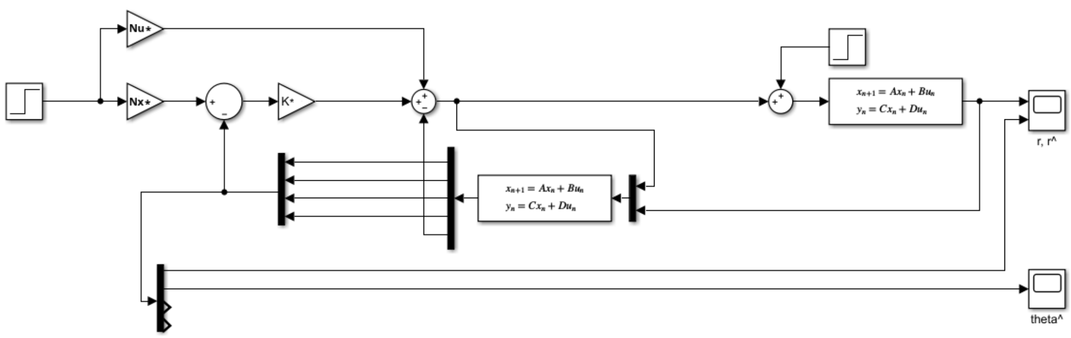
$$\hat{\tilde{x}}_{k+1} = F\hat{\tilde{x}}_k + \begin{bmatrix} H & G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ y_k \end{pmatrix} \tag{54}$$

$$= F\hat{\tilde{x}}_k + H'u' \tag{55}$$

$$y_k^{\text{becslő}} = \underline{\underline{I}}\hat{\tilde{x}}_k + \underline{0}u' \tag{56}$$

# 9. Alapjel figyelembevétele

Az eddig látott megoldások mind az első rendszer által megvalósított csillapításra épültek rá, így a rendszer állapota végül mindig 0-ba lett irányítva. Azonban cél lehet, hogy általunk kívánt értéket vegyen fel a rendszer, mégpedig annak kimenetén, hiszen szemantikailag ez az amit a rendszerből kívánunk látni, illetve ezt tudjuk hatékonyan mérni. Ezt a kívánt kimeneti értéket nevezzük alapjelnek és $r$-rel jelöljük.
Az alapjel előállításához a következő sémát használhatjuk:



Bár a sémát a legutolsó rendszerre lett illesztve az ábrán, illetve az elkövetkező számolásokban is a legutolsó rendszert feltételezzük, azonban az bármelyik előző rendszerre is ráilleszthető. Látható, hogy $Nx$ és a kivánt kimenet szorzata meghatározza a kívánt állapotvektort. Ha a kívánt állapotvektort eltoljuk a jelenlegi (becsült) állapotvektorral, akkor a rendszerünk számára egy új origót határozunk meg, így az új origó felé való konvergáláskor valójában a kívánt állapotvektort felé fog konvergálni. Így az új bemenet a következő képpen néz ki:

$$u = -K(\underline{N}_x r_k - \hat{\tilde{x}}_k) + N_u r_k - \hat{d}_k \tag{57}$$

$\underline{N}_x$ és $N_u$ meghatározásához felhasználjuk, hogy a cél az, hogy a kívánt állapotvektor és a jelenlegi (becsült) állapotvektor között ne legyen különbség bizonyos idő ($\infty$) elteltével, ezért:

$$r_\infty = y_\infty \tag{58}$$

$$\tilde{x}_\infty = \hat{\tilde{x}}_\infty \tag{59}$$

$$\underline{N}_x r_\infty - \hat{\tilde{x}}_\infty = 0 \tag{60}$$

$$\hat{\tilde{x}}_\infty = \underline{N}_x r_\infty \tag{61}$$

$$\tilde{x}_\infty = \underline{N}_x r_\infty \tag{62}$$

$$u_\infty = N_u r_\infty \tag{63}$$

Ezeket az egyenlőségeket felhasználva a rendszerünk állapotegyenleteit $\infty$ időben ($D = 0$-t feltételezve) felírva megkapjuk $\underline{N}_x$-et és $N_u$-t:

$$\underline{N}_x r_\infty = \tilde{\Phi}\underline{N}_x r_\infty + \tilde{\Gamma} N_u r_\infty \tag{64}$$

$$r_\infty = \tilde{C}\underline{N}_x r_\infty \tag{65}$$

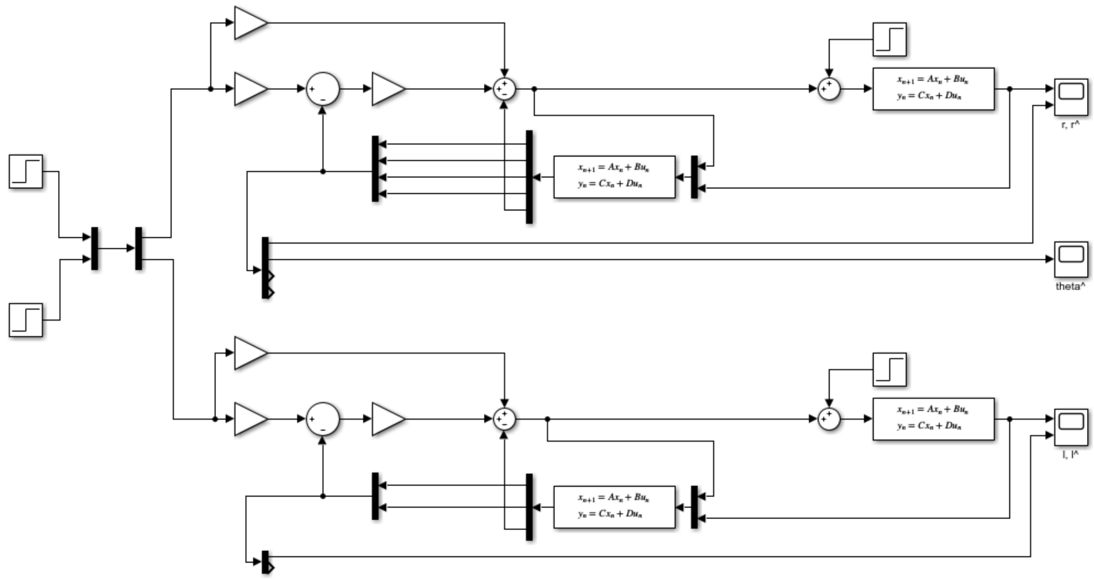
$$\underline{N}_x = \tilde{\Phi}\underline{N}_x + \tilde{\Gamma} N_u \tag{66}$$

$$1 = \tilde{C}\underline{N}_x \tag{67}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{N}_x \\ N_u \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\Phi} - \underline{\underline{I}} & \tilde{\Gamma} \\ \tilde{C} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{68}$$

# 10. Két rendszer összekapcsolása

Végül az eredeti rendszert összekapcsoljuk egybe, amit egy $\binom{r}{l}$ vektorral tudunk irányítani




**1. ábra.** control.slx

# 11. Szabályozási eredmények

Szabályzás során a következő alapjelek lettek felhasználva:

$$r_a = \begin{cases} 2 & \text{ha } t \geq 6 \\ 0 \end{cases} \tag{69}$$

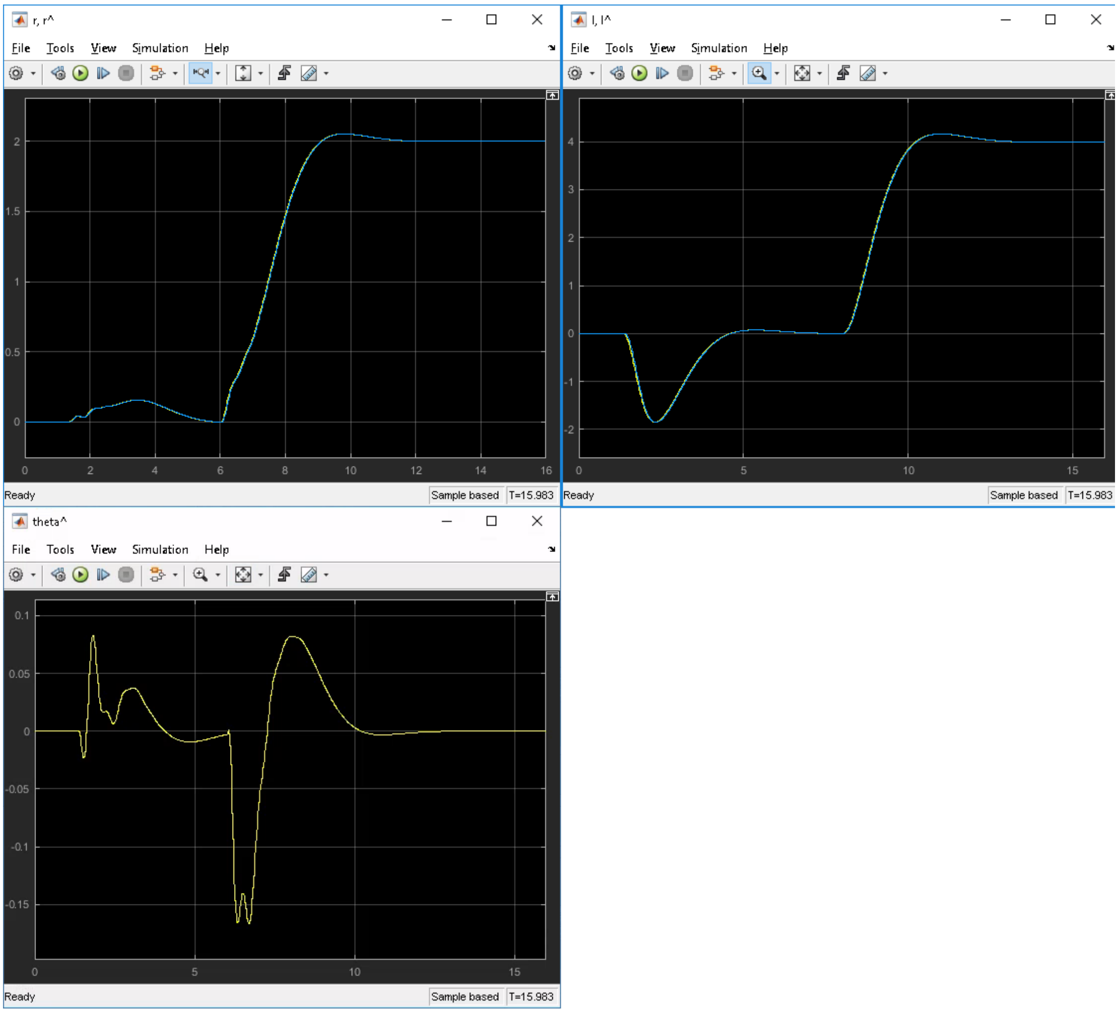
$$l_a = \begin{cases} 4 & \text{ha } t \geq 8 \\ 0 \end{cases} \tag{70}$$

A jelekre ható zavarás pedig:

$$d_r = \begin{cases} 5 & \text{ha } t \geq T_{d,\text{start}} \\ 0 \end{cases} \tag{71}$$

$$d_l = \begin{cases} 3 & \text{ha } t \geq T_{d,\text{start}} \\ 0 \end{cases} \tag{72}$$

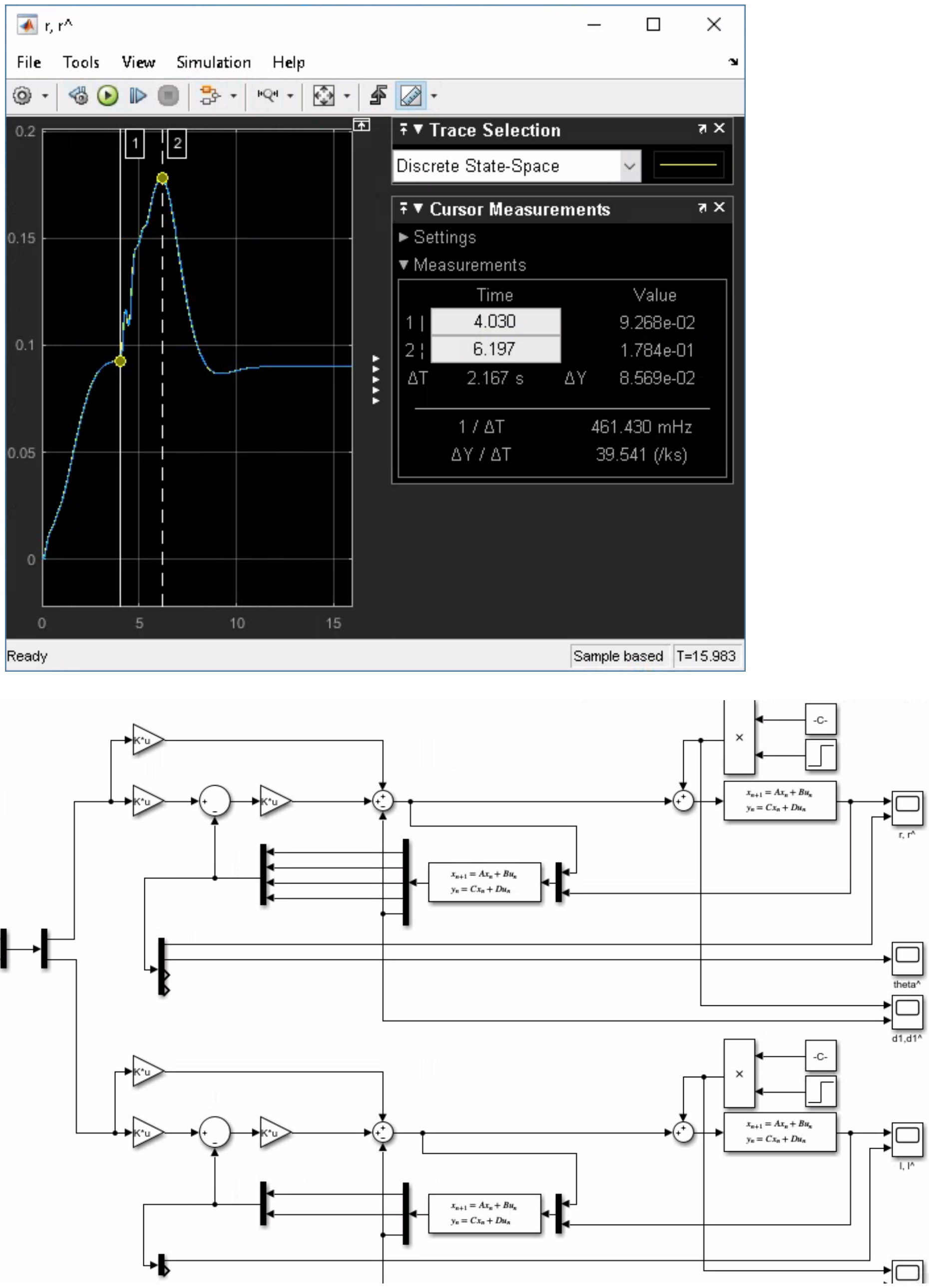
Ezek hatására a következő az $r, \vartheta, l$ értékei:



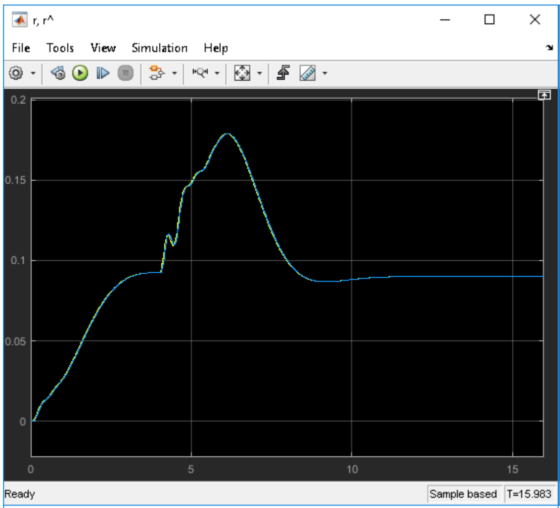

Látható, hogy a rendszer eleinte próbál 0-ba tartani, azonban $t = T_{d,\text{start}}$-ban a zaj kitéríti a rendszert. $t = 6$-ban, illetve $t = 8$-ban látható, hogy a rendszer közel van a 0 értékhez, azonban ekkor megváltozik az alapjel, és ezután a rendszert az új alapjeleket fogja követni rövidesen a kimenetén.

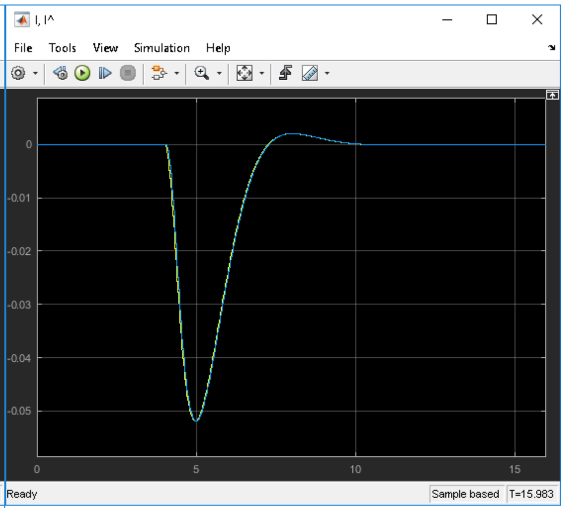
# 12. Feladat általi szabályzás eredményei

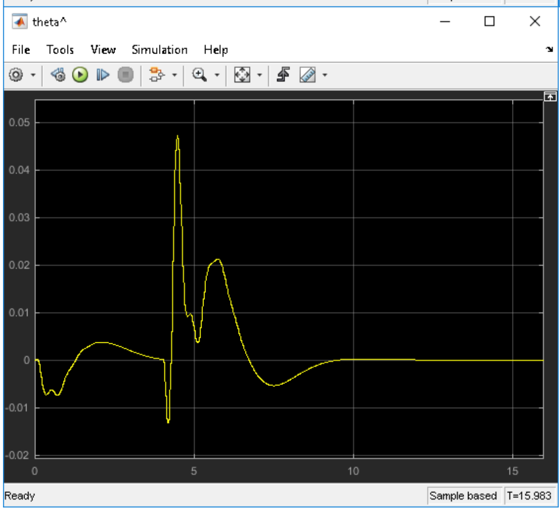
Ezután frissítettem a Simulink modellt, hogy a feladat által kért szabályozást valósítsa meg. A feladat kiírása szerint módosítottam $T_{d,\text{start}}$-ot, hogy ne lapolódjanak át a tranziensek, így végül $t = 4$-kor lép csak be a zaj. Szintén módosítottam $d_{norm}$-ot, az alapján, hogy $d_{norm} = 1$ esetén mekkor volt a kitérés mértéke ($\approx 0.3 - 0.09$). Így végül $d_{norm}$ értéke 0.4286 lett, ami által közel egyező lett az eltérések mértéke:




**2. ábra.** control2.slx


r, r^
File Tools View Simulation Help
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
5
10
15
Ready
Sample based
T=15.983


l, l^
File Tools View Simulation Help
0
-0.01
-0.02
-0.03
-0.04
-0.05
0
5
10
15
Ready
Sample based
T=15.983


theta^
File Tools View Simulation Help
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
-0.01
-0.02
0
5
10
15
Ready
Sample based
T=15.983