

Исследование работы катка как системы массового обслуживания

Постановка задачи

В конце ноября — начале декабря начинают открываться катки под открытым небом. Мне показалось интересным изучить зависимость выручки катка от различных параметров системы; среднее время, которое посетитель проводит на катке; попробовать найти оптимальные параметры для количества касс, количества коньков для проката и другие.

Посетители катка могут приходить со своими коньками или брать в прокат. Процент посетителей со своими коньками β . Из этого можно выделить два сценария поведения:

1. Посетитель без коньков
 - купить билет на каток
 - взять коньки в прокате
 - переобуться
 - покататься
 - переобуться обратно
 - сдать коньки
2. Посетитель с коньками
 - купить билет на каток
 - заточить коньки (не обязательное действие)
 - переобуться
 - покататься
 - переобуться обратно

Из этих сценариев можно выделить этапы системы массового обслуживания и, сделав несколько предположений о параметрах распределений, смоделировать эту систему.

Касса с билетами

Пусть посетители приходят простейшим (пуассоновским) потоком с интенсивностью λ_1 , время обслуживания одного посетителя не менее 1 минуты и распределено нормально со средним μ_1 и стандартным

отклонением σ_1 . Очередь в кассы может быть бесконечно большой, а количество касс N_1 .

Распределение времени обслуживания было выбрано нормальным, так как экспоненциальное с тем же средним давало больший разброс значений, например, при среднем 3 минуты было значительное количество посетителей с временем обслуживания в несколько секунд и даже с нулевым.

Прокат коньков

Посетители без своих коньков после покупки билетов сразу становятся в очередь в прокат, количество касс проката N_2 , максимальное количество посетителей в очереди равно количеству коньков, доступных для проката в данный момент, начальное количество пар коньков K_{skates} , посетители, которым не хватает коньков в момент прихода в очередь, уходят. Время обслуживания не менее 1 минуты и распределено нормально со средним μ_2 и стандартным отклонением σ_2 .

Заточка коньков

Посетители со своими коньками могут с вероятностью α после покупки билетов пойти заточить свои коньки, работает 1 мастер. Время обслуживания не менее 5 минут и распределено нормально со средним μ_3 и стандартным отклонением σ_3 .

Переобувание (и до, и после льда)

Количество мест в раздевалке неограниченно, время переобувания не менее 2 минут и распределено нормально со средним μ_4 и стандартным отклонением σ_4 .

Лед

Максимальная загруженность катка K_{ice} , время катания распределено нормально со средним μ_5 и стандартным отклонением σ_5 , но не более 1 часа. Если на катке в момент времени выхода очередного посетителя уже максимальное количество человек, посетитель расстраивается и уходит с катка, стоимость билета и проката коньков ему возвращается.

Возврат коньков

1 касса для сдачи коньков и возвращения залога, время обслуживания распределено нормально со средним μ_6 и стандартным отклонением σ_6 , но не менее 0.5 минут.

Другие предположения

У всех посетителей один размер ноги.

Время перехода в очередь другого или сразу в другой процесс системы после завершения предыдущего незначительно мало.

Время работы катка — 12 часов. Посетители на льду в момент завершения работы катка уходят с него и завершают обслуживание полностью. Если в момент завершения работы катка посетитель находится не на льду или не в процессах после льда, он уходит не обслуженным.

Поток посетителей бесконечен, его интенсивность не меняется в течение дня.

Цена билета на каток — 200 рублей, проката — 300 рублей, скидок нет.

Константы

Константы были выбраны исходя из здравого смысла. Например, купить билет в среднем можно за 2 минуты, но не меньше, чем за 1 минуту, кассир не успеет за меньшее напечатать билет и провести оплату.

Константа	Обозначение	Значение	Ограничения
Касса с билетами, время обслуживания	$\mu_1 \pm \sigma_1$	2 ± 1 минут	$min = 1$ минута
Прокат, время обслуживания	$\mu_2 \pm \sigma_2$	6 ± 1 минут	$min = 1$ минута
Заточка, время обслуживания	$\mu_3 \pm \sigma_3$	10 ± 3 минут	$min = 5$ минут
Переобувание, время обслуживания	$\mu_4 \pm \sigma_4$	10 ± 3 минут	$min = 2$ минуты
Время на льду	$\mu_5 \pm \sigma_5$	45 ± 10 минут	$min = 10, max = 60$ минут
Возврат, время обслуживания	$\mu_6 \pm \sigma_6$	1 ± 0.3 минут	$min = 0.5$ минут
Доля людей со своими коньками	β	0.2	—
Вероятность заточки	α	0.1	—

Что можно варьировать?

- интенсивность входящего потока
- вместимость катка
- количество билетных касс
- количество касс проката
- количество пар коньков для проката

Задачи

1. Изучить зависимость выручки, потерянных клиентов, полностью обслуженных клиентов, среднее время посетителя на катке при изменении **интенсивности входящего потока** и фиксированных остальных параметров.
2. Изучить зависимость выручки, потерянных клиентов, полностью обслуженных клиентов, среднее время посетителя на катке при изменении **вместимости катка** и фиксированных остальных параметров.
3. Изучить зависимость выручки, потерянных клиентов, полностью обслуженных клиентов, среднее время посетителя на катке при изменении **количества билетных касс** и фиксированных остальных параметров.
4. Изучить зависимость выручки, потерянных клиентов, полностью обслуженных клиентов, среднее время посетителя на катке при изменении **количества касс проката** и фиксированных остальных параметров.
5. Изучить зависимость выручки, потерянных клиентов, полностью обслуженных клиентов, среднее время посетителя на катке при изменении **количества пар коньков для проката** и фиксированных остальных параметров.
6. Найти оптимальный с точки зрения выручки параметр **вместимости катка при различных значениях интенсивности входящего потока** при фиксированных остальных параметров.
7. Изучить динамику посетителей на катке (именно на катке, не считая остальные процессы) при некоторых фиксированных параметрах.

Описание симуляций

Посетитель представлен в виде структуры данных, которая хранит времена прихода на процессы и времена обслуживания, есть ли у посетителя коньки.

Все времена округлены до секунд. Поэтому алгоритм симуляции процесса по секундам проверяет очереди, отправляет в другие очереди и назначает очередное время обслуживания.

Псевдокод алгоритма

```
for sec in [0, time_of_work - 1]:
    if new customer arrived:
        add new customer in ticket queue
    if any ticket office is not busy:
        move next customer in ticket queue to ticket office
    if any ticket office is now not busy (current customer's time
of ticket servicing is over):
```

```

    move customer(s) with ticket to rental or sharpening or
to change room

    if customer(s) with ticket has skates:
        with probability  $\alpha$  move to sharpening queue
    else:
        move customer to rental queue

    if rental queue is not empty and any rental office is not
busy:
        if there are at least one pair of skates:
            move next customer to rental office
        else:
            customer goes away from ice rink
    if any rental office is now not busy (current customer's time
of rental servicing is over)
        move customer to change room

    if sharpening is not busy now:
        move next customer to sharpening

    for each customer with ticket and with skates who use rental:
        assign change time in changing room

    for each customer changed in ice skates:
        if ice rink does not have maximum capacity:
            assign skating time
            move to ice rink
        else:
            customer goes away

    for each customer with expired time on ice:
        assign change back time
    for each customer changed back:
        if customer has rental skates:
            move to return rent office
        else:
            customer goes away happy

    if return rent office is not busy now:
        move next customer to return rent office

    if return rent office is now not busy (current customer's
time of return rent servicing is over):
        customer goes away happy

```

Для тестирования системы массового обслуживания для задач 1-6 симуляция запускается **5 раз** и вычисляться среднее значение для интересующих параметров: выручки, доли ушедших и доли полностью обслуженных клиентов, среднего времени на катке.

Фиксированные параметры в задачах 1-6 имеют следующие значения:

- интенсивность входящего потока: 1 клиент в минуту
- количество билетных касс: 3
- количество касс проката: 2
- максимальная загруженность катка: 35
- количество пар коньков в прокате: 50

Результаты симуляций

Задача 1

Изучить зависимость выручки, потерянных клиентов, полностью обслуженных клиентов, среднее время посетителя на катке при изменении **интенсивности входящего потока** и фиксированных остальных параметров.

Исследование на $1/\lambda_1$ от 30 секунд до 15 минут с шагом в 30 секунд (то есть для λ_1 от 2 человек в минуту до ≈ 0.067 человек в минуту).

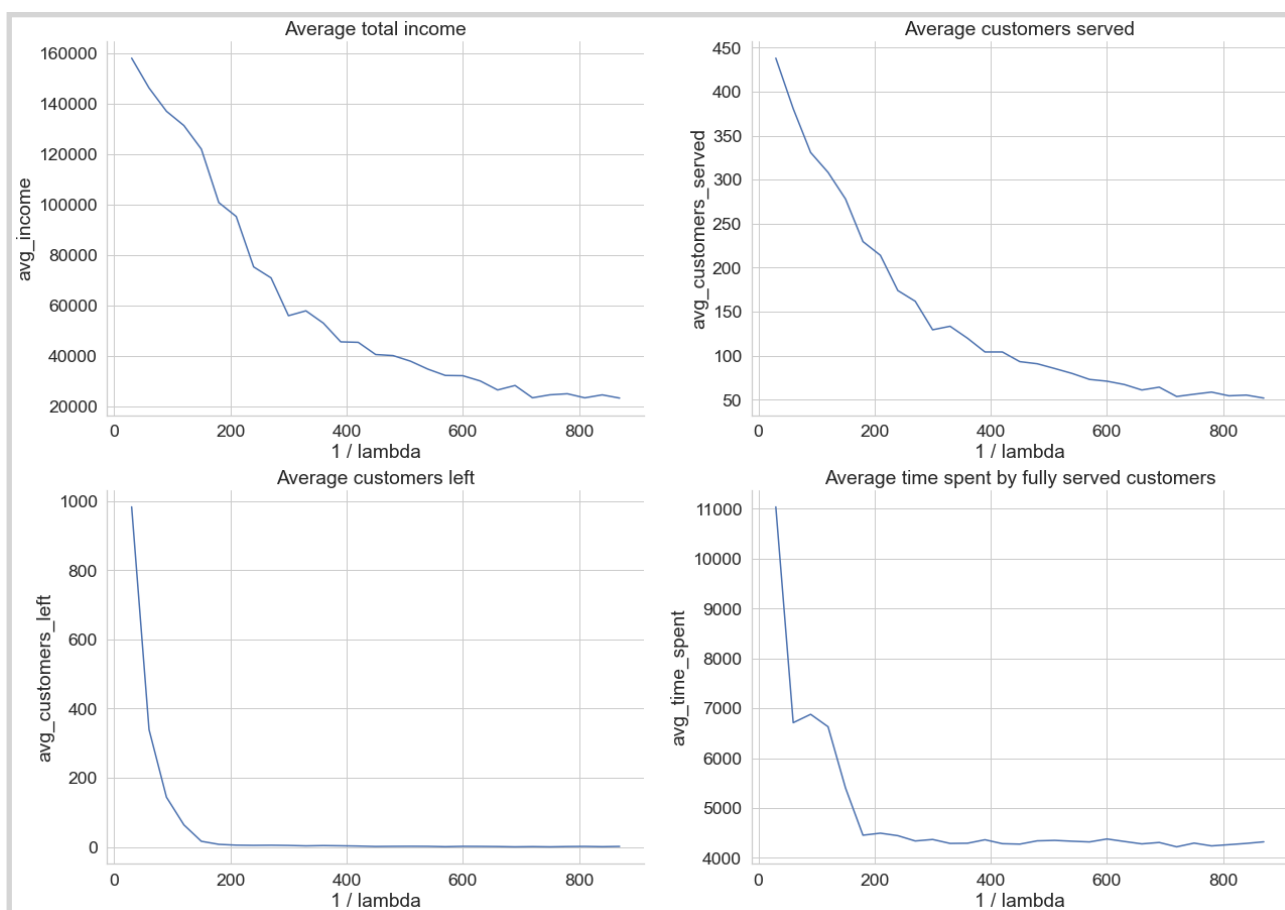


Рисунок 1. Зависимость параметров от изменения интенсивности входящего потока

На рисунке 1 четыре графика: зависимость выручки в день, количества полностью обслуженных клиентов, количества ушедших клиентов, среднее время в системе для полностью обслуженных клиентов от интенсивности входящего потока.

Средняя выручка и количество полностью обслуженных клиентов падает при уменьшении интенсивности входящего потока, причем скорость убывания похожа. Это объясняется тем, что процент посетителей с коньками постоянен, значит, эти величины почти линейно зависимы. Интересно, что количество ушедших и среднее время убывают быстрее, чем первые два параметра. Из графиков можно сделать вывод, что при остальных фиксированных параметрах системы клиенты почти перестают уходить не обслуженными начиная с интенсивности 0.4 человека в минуту или $1/\lambda_1 \approx 150$.

Задача 2

Изучить зависимость выручки, потерянных клиентов, полностью обслуженных клиентов, среднее время посетителя на катке при изменении **вместимости катка** и фиксированных остальных параметров.

Исследование для вместимости от 10 до 120 с шагом в 5 человек.

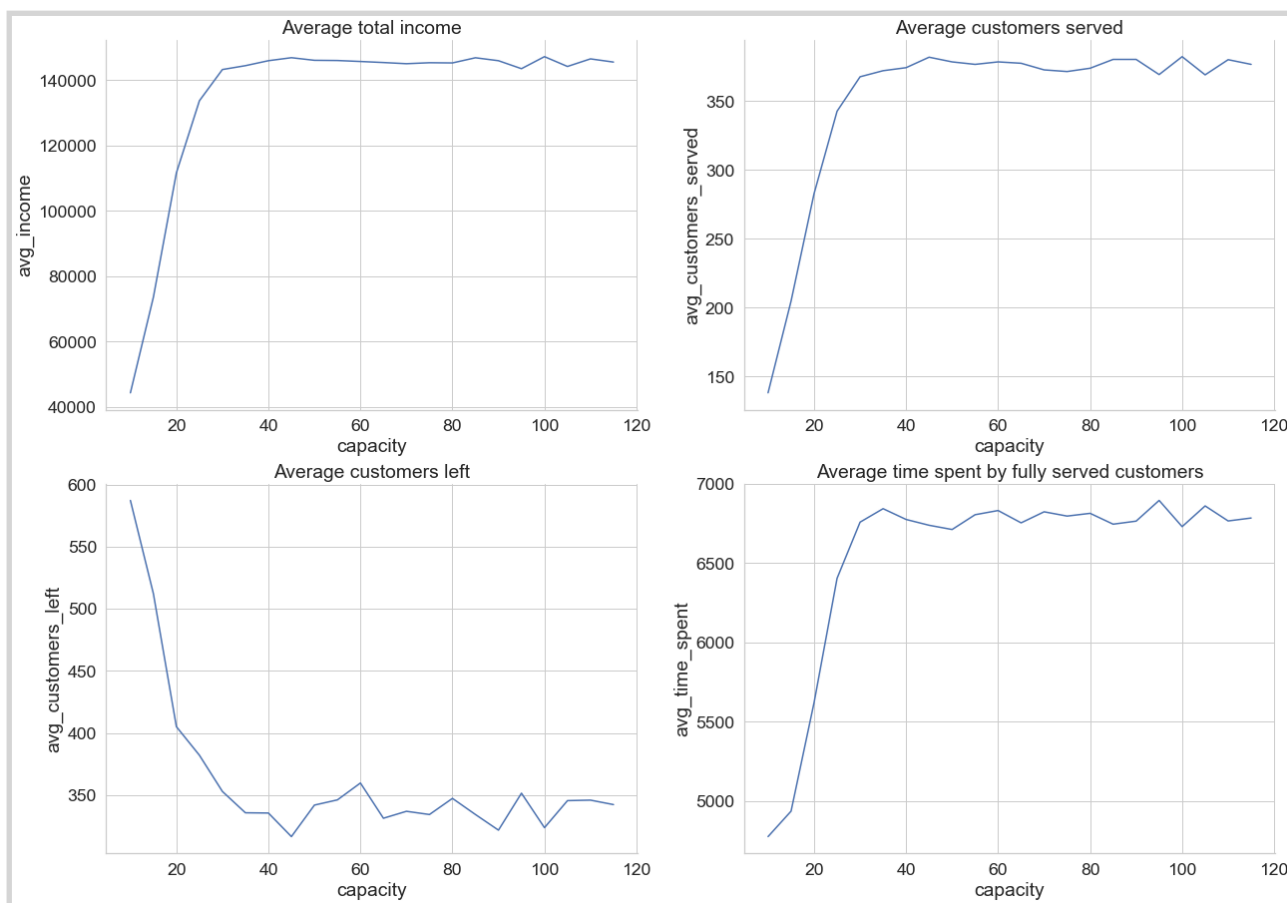


Рисунок 2. Зависимость параметров от изменения вместимости катка

На рисунке 2 те же графики, зависимость от вместимости катка.

По ним видно, что после вместимости 35-40 человек почти нет изменений в изучаемых параметрах. Можно сделать вывод, что для интенсивности потока 1 человек в минуту достаточно катка на 35 человек.

Задача 3

Изучить зависимость выручки, потерянных клиентов, полностью обслуженных клиентов, среднее время посетителя на катке при изменении **количества билетных касс** и фиксированных остальных параметров.

Исследование для количества билетных касс от 1 до 10 с шагом 1.

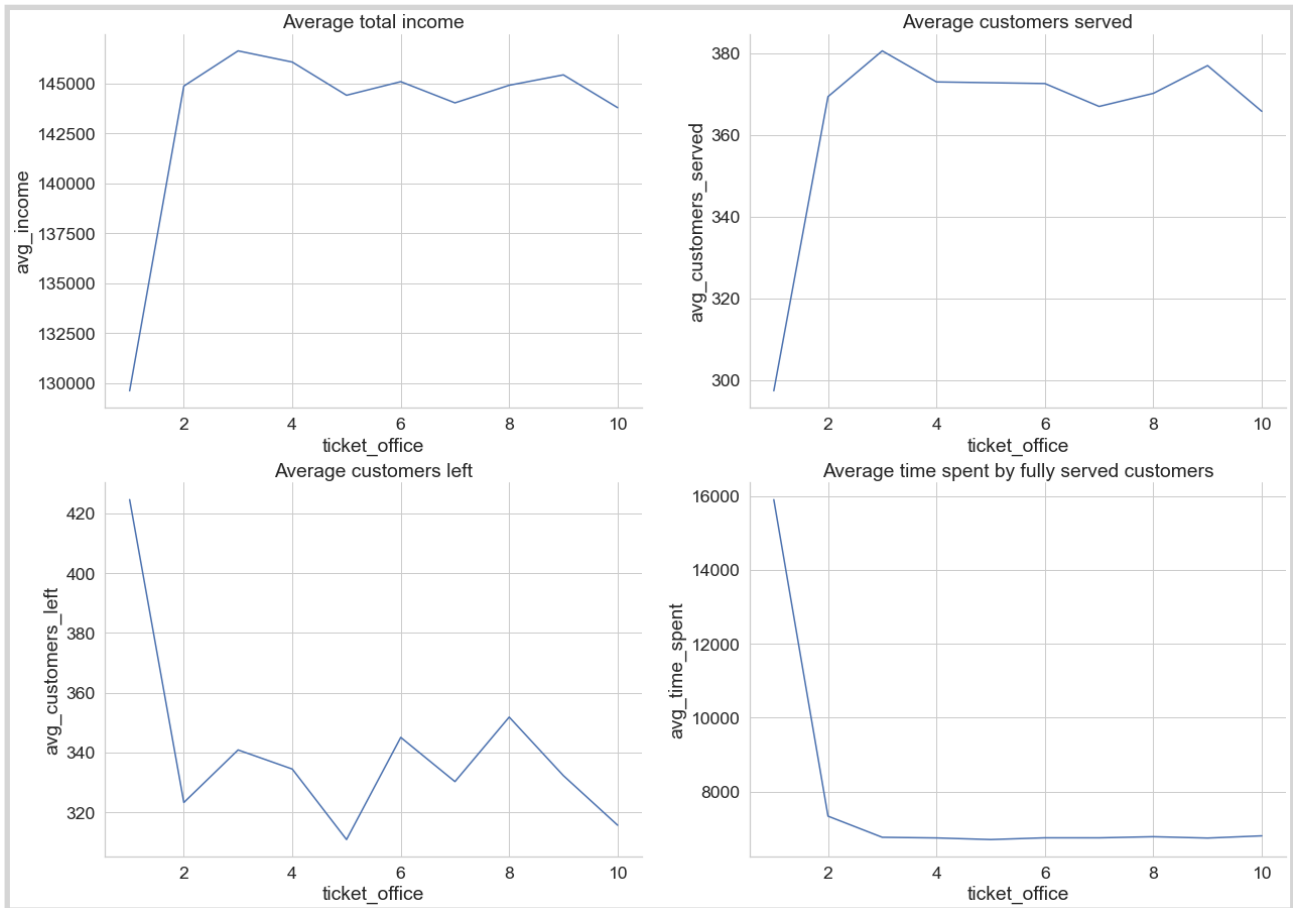


Рисунок 3. Зависимость параметров от изменения количества билетных касс

Разница между 2 и 3 кассами значительная, но при дальнейшем увеличении их количества параметры почти не меняются.

Различия графиков количества полностью обслуженных клиентов и ушедших клиентов объясняется разными общими количествами посетителей для отдельных симуляций.

Задача 4

Изучить зависимость выручки, потерянных клиентов, полностью обслуженных клиентов, среднее время посетителя на катке при изменении **количества касс проката** и фиксированных остальных параметров.

Исследование для количества касс проката от 1 до 10 с шагом 1.

Аналогично предыдущей задаче 2 и 3 кассы отличаются значительно, далее параметры примерно одинаковые.

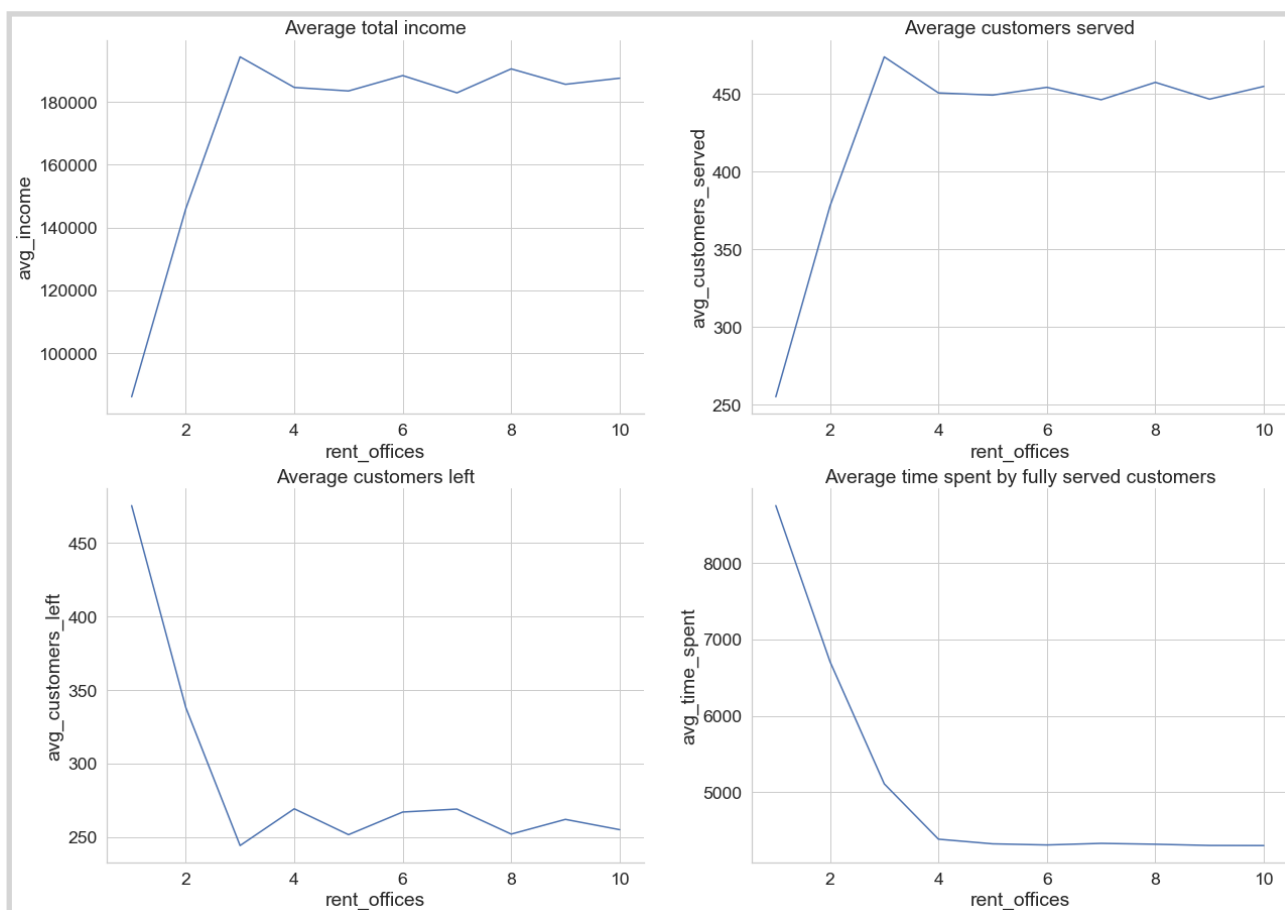


Рисунок 4. Зависимость параметров от изменения количества касс проката

Оптимальные параметры для количества касс с билетами и проката — по 3.

Среднее время на катке уменьшается сильнее, чем при увеличении количества билетных касс.

Задача 5

Изучить зависимость выручки, потерянных клиентов, полностью обслуженных клиентов, среднее время посетителя на катке при изменении **количества пар коньков в прокате** и фиксированных остальных параметрах.

Исследование для количества пар коньков в прокате от 10 до 190 с шагом 10.

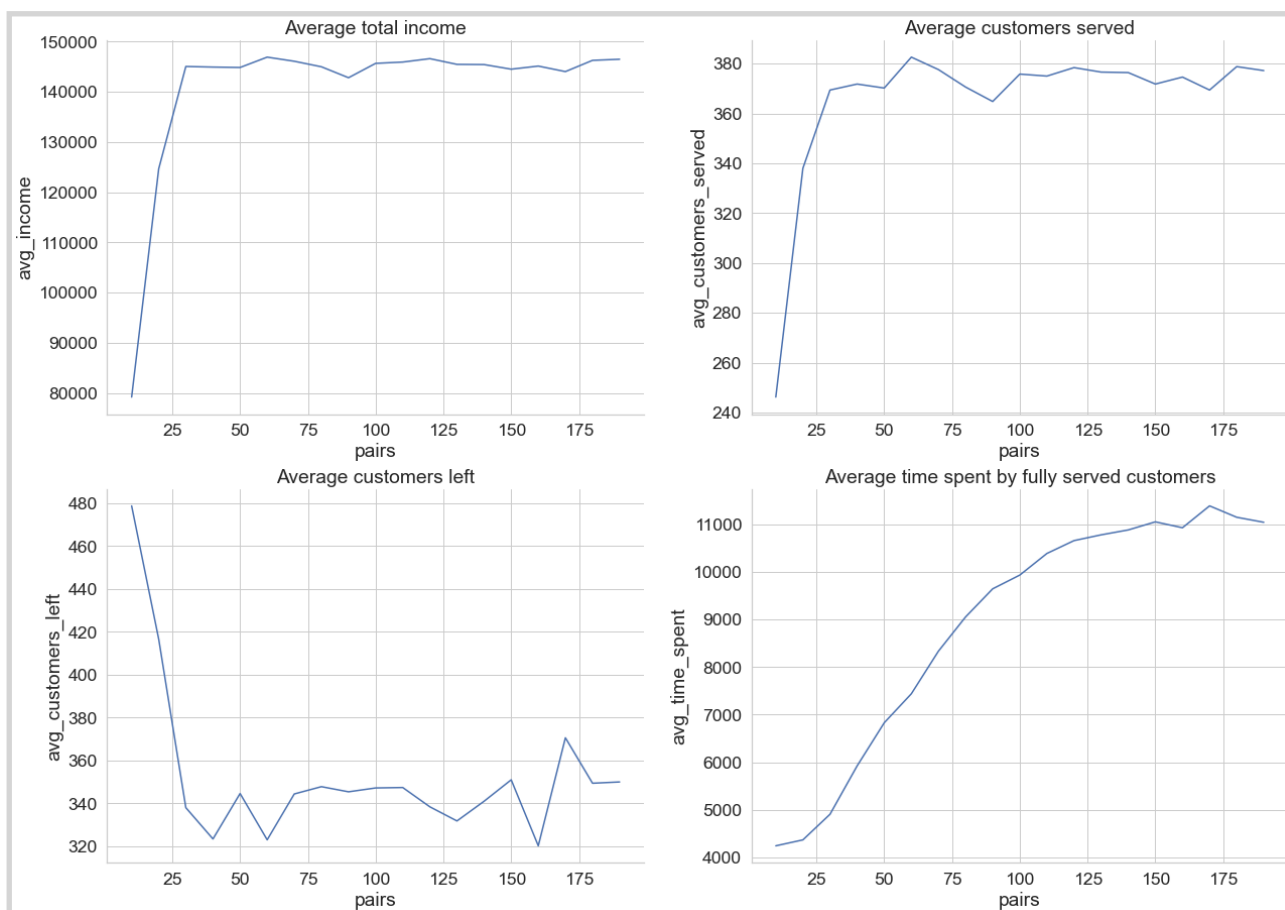


Рисунок 5. Зависимость параметров от изменения количества пар коньков в прокате

Есть гипотеза, что количество пар коньков в прокате должно сильно влиять на количество ушедших посетителей, так как при их малом количестве их всем желающим не хватит.

Выручка быстро растёт от 10 до 30 пар, потом остаётся примерно на одном уровне, то же с количеством обслуженных посетителей. Это согласуется с гипотезой выше.

Среднее время растёт не так быстро, как остальные параметры, вероятно, потому что при увеличении числа пар коньков в прокат увеличивается длина очереди в прокат, посетители без своих коньков проводят больше и больше времени в этой очереди.

Задача 6

Найти оптимальный с точки зрения выручки параметр **вместимости катка при различных значениях интенсивности входящего потока** при фиксированных остальных параметрах.

Исследование для всех пар интенсивности входящего потока от 2 человек в минуту до ≈ 0.067 человек в минуту (как в первой задаче) и для вместимости от 10 до 120 с шагом в 5 человек (как во второй).

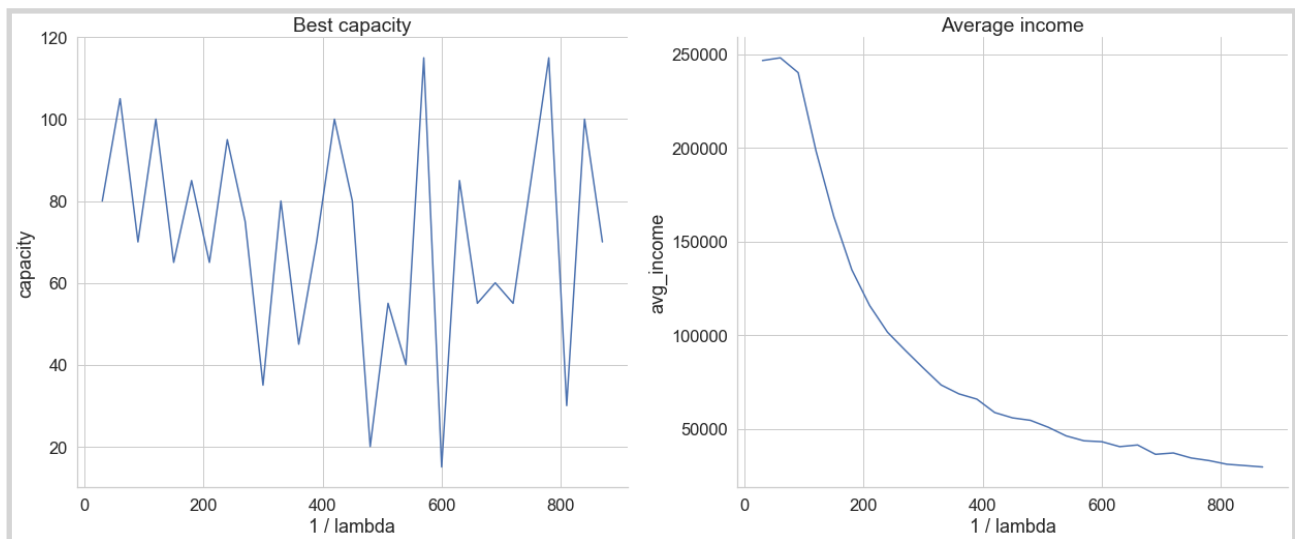


Рисунок 6. Оптимальная вместимость катка и средняя выручка при изменении интенсивности входящего потока.

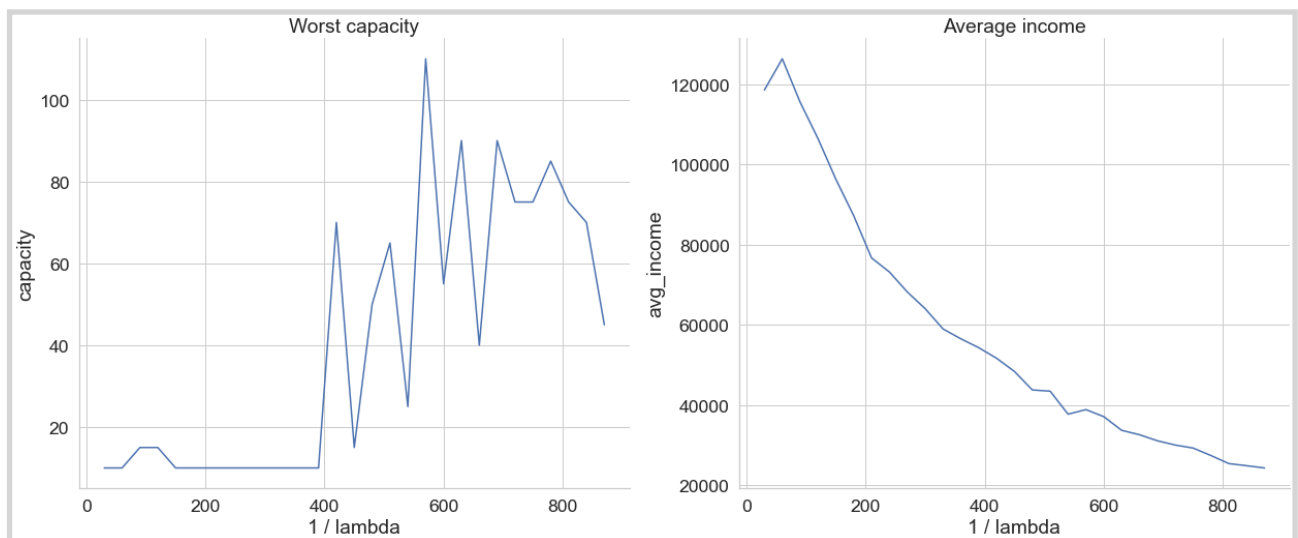


Рисунок 7. Худшая вместимость катка и средняя выручка при изменении интенсивности входящего потока.

Оптимальная и худшая вместимости рассчитаны по выручке при данных параметрах.

Оптимальная вместимость не имеет явной зависимости от интенсивности входящего потока. Возможно, это связано с тем, что после некоторой вместимости при ее дальнейшем возрастании выручка не сильно изменяется (как было в задаче 2), и лучшая по прибыли зависит от конкретных симуляций, а не от гиперпараметров системы.

Худшая вместимость при высоком входящем потоке ожидаемо мала: 10-15 человек. Далее при уменьшении интенсивности скорее всего та же проблема, что и для оптимальной вместимости.

При интенсивности 2-0.5 человек в минуту оптимальна вместимость 80-100 человек.

Задача 7

Изучить динамику посетителей на катке (именно на катке, не считая остальные процессы) при некоторых фиксированных параметрах.

Возьмем оптимальные параметры для интенсивности входящего потока 1 человек в минуту: по 3 кассы с билетами и проката, 30 пар коньков, 40 человек вместимость.

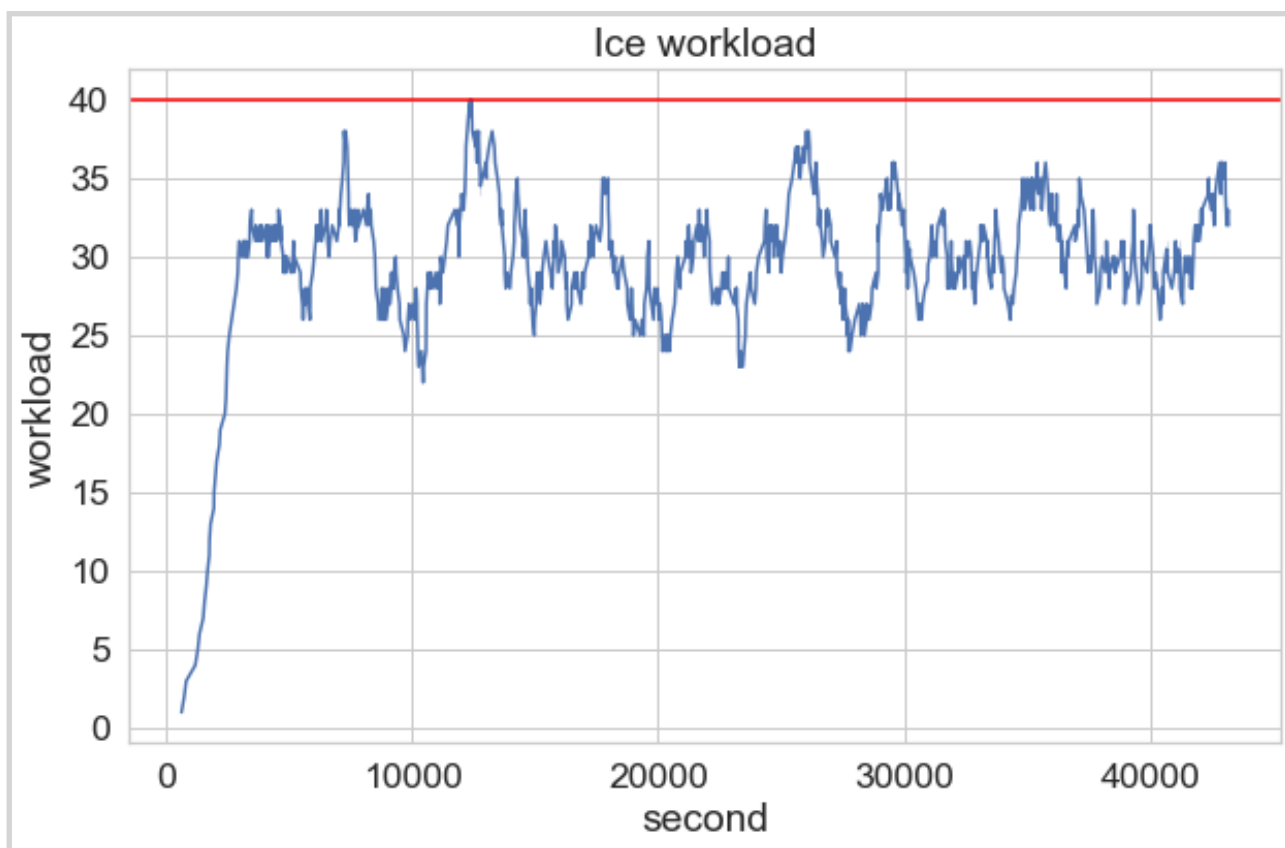


Рисунок 8. Загрузка льда в течение его времени работы

После стабилизации системы загруженность держится выше 22 человек на льду, максимальная достигается только 1 раз и всего 1 посетитель ушел из-за этого.

Выводы

Система, предложенная в работе, сложная, состоящая из нескольких этапов с разделением потоков посетителей и уходом из системы до завершения обслуживания. Аналитическое решение найти очень сложно, слишком много гиперпараметров. Однако с помощью имитационного моделирования можно подтвердить некоторые интуитивно понятные гипотезы.

Средняя выручка падает при уменьшении интенсивности входящего потока, но не линейно. Количество касс с билетами и проката не имеет смысла делать больше 3, так как улучшение системы минимально.

Количество пар коньков в прокате и вместимость катка в зависимости от интенсивности потока так же после некоторого значения его увеличение перестает улучшать параметры выручки и т.д.

В зависимости от интенсивности входящего потока можно рассчитать оптимальную вместимость катка. Также можно исследовать загруженность катка в зависимости от момента времени, при неизменной интенсивности входящего потока после стабилизации системы загруженность колеблется между 20 и 40 для параметров задачи 7.

В данной системе можно исследовать другие парные зависимости гиперпараметров, например, какое оптимальное количество касс для вместимости катка. Также можно менять константы времени обслуживания на этапах системы, ввести утреннюю и вечернюю интенсивность входящего потока, учитывать день недели и считать месячную прибыль, учитывать стоимость поддержания катка и персонала.