

POLYNOMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

Exercice 1 :

1) Soit $P(x) = x^4 - 20x^2 + 4$

a) Vérifier que $P(x) = (x^2 - 2)^2 - 16x^2$

b) En déduire que $P(x) = A(x).B(x)$ où $A(x)$ et $B(x)$ sont des polynômes du second degré.

2) Résoudre dans \mathbb{R} les équations $A(x) = 0$ et $B(x) = 0$. En déduire les solutions de l'équation $P(x) = 0$

Exercice 2 :

On donne un polynôme P et un nombre réel a . Dans chacun des cas suivants :

Vérifier que a est racine de P . Déterminer le quotient de $P(x)$ par $(x - a)$. Factoriser, si possible, ce quotient.

a) $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ et $a = 2$; b) $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 9$ et $a = -3$

c) $P(x) = -2x^3 + 7x^2 - 12x + 9$ et $a = \frac{3}{2}$ d) $P(x) = -3x^3 + 2x^2 + 9x - 6$ et $a = \sqrt{3}$

Exercice 3 :

Soit $P(x)$ un polynôme défini par : $P(x) = -x^3 + 2x^2 + x - 2$

1) Par la méthode d'identification des coefficients déterminer les réels a et b tels que

$$P(x) = (x^2 - 1)(ax + b)$$

2) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation et l'inéquation suivante :

a) $-x^3 + 2x^2 + x - 2 = 0$

b) $-x^3 + 2x^2 + x - 2 < 0$

Exercice 4 :

On considère le polynôme P défini : $P(x) = -3x^3 + 6x^2 + 3x - 6$

1. Vérifier que -1 est racine de P

2. Déterminer un polynôme Q tel que $P(x) = (x + 1) Q(x)$

3. Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations $Q(x) < 0$ et $P(x) > 0$

Exercice 5 :

On donne : $Q(x) = x^4 + x^3 - 4x - 16$. Résoudre les inéquations $Q(x) > 0$ et $Q(x) \leq 0$.

Exercice 6 :

On considère le polynôme $f(x) = ax^3 + bx^2 + bx + a$ avec $a \neq 0$

1. Montrer que 0 n'est pas une racine de $f(x)$.

2. Montrer que si α est une racine de $f(x)$ alors $\frac{1}{\alpha}$ l'est aussi.

3. Trouver une racine évidente de $f(x)$. En déduire une factorisation de $f(x)$.

4. Application : Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $7x^3 - 43x^2 - 43x + 7 \geq 0$.

Exercice 7: On donne : $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$ et $Q(x) = -x^3 + 3x + 2$

1. Résoudre dans \mathbb{R} les équations: $P(x) = 0$ et $Q(x) = 0$

2. Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$.

- 1) Déterminer les réels a et b pour que le polynôme $P(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + ax + b$ admette comme racines les réels -1 et 1 .
- 2) Pour $a = 2$ et $b = 1$, factoriser $P(x)$ puis résoudre $P(x) = 0$ et $P(x) \geq 0$.
- 3) Soit Q le polynôme défini par $Q(x) = 2x^4 - x^3 - 12x^2 + x + 10$.
 - a) Montrer que $Q(x)$ est « factorisable » par $x^2 - 1$
 - b) Trouver les réels a , b et c tels que $Q(x) = (x^2 - 1)(ax^2 + bx + c)$.

Exercice 9:

Soit P le polynôme défini par : $P(x) = x^3 - 4x^2 - 7x + k$.

- 1) Déterminer le réel k pour que 1 soit une racine de P .
En déduire une factorisation de $P(x)$.
- 2) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $\frac{x^3 - 14x^2 - 7x}{x^2 + 1} = -10$.
- 3) Soit F la fraction rationnelle définie par : $F(x) = \frac{P(x)}{-2x^2 - x + 6}$.
 - a) Déterminer le domaine de définition D_F de F , puis simplifier $F(x)$ dans D_F .
 - b) Résoudre dans D_F l'équation : $F(x) = 0$ et l'inéquation $F(x) \geq 0$.

Exercice 10:

A. Soit P le polynôme défini par : $P(x) = 2x^3 - 11x^2 + 12x + 9$.

- 1) Montrer qu'il existe un polynôme R , dont on précisera le degré, tel que :
 $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = (x - 3)R(x)$.

2) Déterminer $R(x)$ par la méthode d'Hörner.

3) Résoudre dans \mathbb{R} : a) $P(x) = 0$; b) $P(1 - 4x) = 0$; c) $P(x) \leq 0$

B. Soit Q la fraction rationnelle définie par : $Q(x) = \frac{P(x)}{x^2 - 9}$.

1) Déterminer le domaine de définition D_Q de Q .

2) Simplifier $Q(x)$ dans D_Q .

3) Résoudre dans \mathbb{R} : a) $Q(x) = 0$; b) $Q(x) \geq 0$.

4) Par la méthode d'identification des coefficients, déterminer les nombres réels a , b et c tels que :

$$\forall x \in D_Q, Q(x) = ax + b + \frac{c}{x + 3}.$$

Exercice 11:

On considère l'expression $P(x) = -3x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 5x - 2$.

1°) Montrer que -1 et 1 sont des racines de $P(x)$.

2°) Utiliser la méthode de Hörner pour mettre $P(x)$ sous la forme d'un produit de 4 facteurs du premier degré..

3°) Résoudre l'équation $P(x) = 0$ puis en déduire les solutions de l'équation

$$-3(x - 3)^4 + 5(x - 3)^3 + 5(x - 3)^2 - 5(x - 3) - 2 = 0.$$

4°) Résoudre l'inéquation $P(x) < 0$ puis en déduire la solution de l'inéquation $\frac{3x^4 + 2}{5x^2} \geq x - \frac{1}{x} + 1$