Física Estadística

Tarea 1

Ricardo Atahualpa Solórzano Kraemer

(ata.kraemer@gmail.com)

Ayudantes: Ivonne Domínguez Román & Daniel Martínez Urrieta

(ivonne_fis@ciencias.unam.mx & danmar.urr@ciencias.unam.mx)

Parte 1: Probabilidad

1. Supón que tienes una baraja común de póker de 52 cartas. Se destapa una por una, las 52 cartas de la baraja. Encuentra la probabilidad de que la carta que encuentres después del primer As, sea:

   a) Un As de espadas

   b) Un J de corazones

   c) Otro As

   d) Un J

2. Supón que en una fiesta asisten N personas, que en ella es igualmente probable que los asistentes hayan nacido en los últimos 4 años (considera año bisiesto) y que es igualmente probable que hayan nacido cualquier dia del año.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que dos personas cumplan el mismo día?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 2 personas cumplan el mismo día?

3. *Caminata aleatoria*: Una caminata aleatoria significa la pérdida de memoria en cada caso, por lo que entre las posibilidades de un paso, se pude elegir cualquiera con la misma probabilidad que el paso anterior. El caso más sencillo es el de una caminata aleatoria en 1D. Consideremos que damos pasos de tamaño 1 y que comenzamos en el origen:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que un caminante llegue a la posición -8 en 8 pasos?

   b) ¿Qué probabilidad tiene de que llegue a la posición m en n pasos? $n, m \in \mathbb{Z}$

4. Hay dos máquinas que producen monedas "desvalanceadas", es decir, con una mayor probabilidad de que caiga una cara que la otra. La máquina 1 produce monedas con probabilidad $p = 0.4$ de salir sol. La máquina 2 produce monedas con una probabilidad $p = 0.55$ de salir sol. Tú tienes una moneda de una de las máquinas, pero no sabes de cuál. Ahora supón que inicialmente consideras que es igualmente probable que tu moneda sea de la máquina 1 o de la 2, esto es: $P(p = 0.4) = P(p = 0.55) = 0.5$.

   a) Lanzas 10 veces la moneda y te salen 6 soles. ¿Cómo cambia esta información tu distribución de probabilidad?

   b) Ahora supón que lanzas otras 10 veces la moneda, ¿Cómo cambia entonces la probabilidad? (Pista, puedes usar la regla de Bayes)

Parte 2: Más probabilidad

5. Utiliza el teorema del binomio para probar que:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1 \ \forall n \in \mathbb{N},\ p \in (0,1).$$

6. Se tiran 100 veces una moneda bien balanceada.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos una cadena de 8 tiros seguidos de una sola cara de la moneda?

   b) Si contamos el número de veces que sale una cadena de n repeticiones de una sola cara y llamamos a ese valor $N(n)$ ¿Qué valor de $N(n)$ maximizan la probabilidad de que salgan esas cadenas?

7. Considera un juego de suerte en un casino, donde el jugador tira una moneda bien balanceada al aire. El juego se acaba cuando sale la primera águila, se cuentan el número de veces que salió sol y se le paga al jugador 2^n pesos, donde n es el número de veces que salió sol.

   a) ¿Cuál es el valor esperado de este juego?

   b) ¿Cuánto tendría que cobrar el casino por tiro para que le resultara conveniente?

8. Supóngase que se tienen n partículas de espín $1/2$ o $-1/2$ colocadas a lo largo de un segmento. Su magnetización será entonces el valor esperado del espín total. Se aplica entonces un campo magnético, que hace que la probabilidad de que se tenga una orientación u otra, sea asimétrica.

   a) Si la probabilidad de que apunte hacia arriba es p, ¿cuál es la magnetización del material?

   b) ¿Cuál es la desviación estándar?

   c) Para $p = 0.5$ ¿Cuál es la magnetización y la desviación estandar?

   d) Para $p = 0.3$ ¿Cuál es la magnetización y la desviación estandar?

Parte 3: Probabilidad *everywhere*

9. *Lanzamiento de monedas, segunda parte*: Supon que tienes una moneda trucada que da una mayor probabilidad p de caer sol que águila.

   a) En promedio ¿Cuántos tiros tienes que hacer para que caiga el primer sol?

   b) En promedio ¿Cuántos tiros tienes que hacer hasta que te salgan 2 soles seguidos?

   c) En promedio ¿Cuántos tiros tienes que hacer para que te salgan N soles seguidos?

10. Supón que estás en la cola para comprar un boleto de cine. Hay N personas en la cola antes que tú (tú tienes un billete de 100). No hay nadie aún en la ventanilla y cuando llega el encargado advierte que no tiene cambio. El boleto cuesta 50 pesos. Cuando alguien llega a la ventanilla y el empleado no tiene cambio, le pide que espere a un lado, para atender al siguiente cliente con la esperanza de conseguir cambio. Supón que la mitad (si es N es impar, entonces $(N-1)/2$) de los que están en la fila tienen el cambio exacto, mientras que la otra mitad tiene billetes de 100 pesos.

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona en la ventanilla haga esperar a n personas para darles su cambio?

   b) Ahora supón que cada persona tiene la misma probabilidad de tener un billete de 50 o de 100 pesos. ¿Cuál es la probabilidad de que cuando llegues a la ventanilla la persona encargada no tenga cambio?

   c) Supón que el empleado tarda un minuto en atender a una persona con cambio, y que, por otra parte, con cada persona que no tiene cambio tarda minuto y medio más el tiempo que tarde en conseguir el cambio ¿Cuál es el tiempo promedio que esperarás en la cola antes de ser atendido? ¿Cuánto tiempo pasará en promedio hasta que te entregue el cambio? (supón que detrás de ti, la cola es infinita).

11. *Caminante Aleatorio en una red cuadrada 2D*: Demuestra que un caminante aleatorio sobre una red cuadrada tiene un desplazamiento cuadrático medio de la forma

$$\langle (x(n) - x_0)^2 \rangle \sim n$$

donde n es el número de pasos, $x(n)$ es su posición en el paso n y x_0 es su posición inicial.

12. *Caminante aleatorio con pasos variables*: Supón ahora que el caminante tiene pasos de tamaño variable. Cada paso puede, con igual probabilidad, moverse una distancia x contenida en un intervalo dado $[a, b]$.

    a) Calcula su desplazamiento cuadrático medio.

    b) ¿Qué sucede si en vez de una distribución uniforme sobre el intervalo se tiene otro tipo de distribución?

    c) Usa el resultado anterior para calcular el desplazamiento cuadrático medio de un caminante aleatorio de paso variable en el intervalo $[0, \infty)$ con una distribución exponencial.

13. Supón que tienes una distribución de la cual conoces su desviación estandar, pero no conoces su valor esperado (e.g. un experimento). Para calcular el valor esperado, puedes producir N variables aleatorias con esa distribución y obtener su promedio. ¿Con qué probabilidad tu medición distará menos que un ϵ dado del valor real del valor esperado? (utiliza el teorema del límite central).

14. Una forma de definir entropía (no la más adecuada para nosotros), es medir "de alguna forma" cuán rápido se pierde la información. La definición más famosa de esto es la entropía de Shannon, donde se usa la función de masa de probabilidad $\mathrm{P}(x_i)$ de una variable aleatoria discreta X, con n posibles valores

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(x_i) \log_b \mathrm{P}(x_i).$$

    Calcula la entropía de Shannon como función de la probabilidad p de sacar sol, para un tiro.

    a) ¿Para qué valores de p la entropía de Shannon es máxima?

    b) ¿Cuál es la entropía de Shannon de n tiros?

15. Considera una caja con dos subdivisiones. Supon que metes n moléculas dentro.

    a) ¿Cuál es la entropía de Shannon si las subdivisiones son de volúmenes iguales?

    b) ¿Como cambia la entropía si las subidivisiones tienen volúmenes diferentes?

16. *Bonus*[1]: Pensemos que la energía de un determinado cristal está dada por alguna propiedad de sus N átomos. Estos pueden tener la propiedad 1 o la 2. Si el átomo tiene la propiedad 2, entonces aporta un poco más de energía que si tiene la propiedad 1. Llamemos ϵ la diferencia entre las energías.

    a) ¿Cuál será la energía total del sistema, con respecto a la energía del estado base (propiedad 1) si hay n átomos del tipo 2 y $N - n$ del tipo 1?

    b) Si hay n átomos del tipo 2, ¿Cuántos estados posibles tiene el cristal?

    c) Si la entropía del sistema es $S = k_B \log(\Omega)$ donde Ω es el número de estados y k_B la constante de Boltzmann: ¿Cuál es la entropía del sistema como función del número de átomos del tipo 1 y el número total de átomos?

    d) Utiliza la fórmula de Stirling para hacer una aproximación de S cuando N es un número grande.

    e) Recordemos que $\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E}$. Utiliza esto para escribir el número de átomos del tipo 1, como función de la temperatura y de N.

Nota: No te preocupes, ya no habrá más ejercicios para esta tarea.

[1] Advertencia: Ésto no significa que no puede venir en el examen