Introduction to Numeric Simulation of Magnetic Fluid Flows

Ataias Pereira Reis, Yuri Dumaresq Sobral, Francisco Ricardo da Cunha Universidade de Brasília Departamento de Matemática Brasília, Brasil ataiasreis@gmail.com

Abstract—This work aims at studying how magnetic fluids behave in a 2D lid-driven cavity. In order to achieve this goal, a computer program was developed to solve the Navier Stokes equation using finite differences. In addition to that, models of the magnetostatic force were introduced. Solving the Poisson equation is done by means of an implicit method with sparse matrices and Cholesky factorization. Once the hydrodynamic and magnetostatic parts are solved, vector fields and streamlines are plotted for analysis of the flow. A few distinct Reynolds numbers are tested, as well as some different magnetic parameters. The governing equations in continuous form and also in discrete form are presented, as well as the vectors fields resulted from computations.

Index Terms—Magnetic fluids, Navier Stokes, PDE, Poisson, Laplace, Finite differences

I. Introduction

The goal of this study

O objetivo deste estudo é estudar essa instabilidade por meio de métodos numéricos auxiliados por computador. A equação de Navier Stokes deve ser discretizada e então resolvida numericamente. Ela é uma equação diferencial parcial altamente não-linear e de difícil resolução. No caso da instabilidade de Saffman-Taylor, no qual a fronteira está em movimento, que é a interface entre os dois fluidos, faz-se necessário algoritmos numéricos capazes de lidar com este movimento sem causar complicações extremas que impossibilitem a obtenção de soluções práticas [2] [3].

Tais ferramentas numéricas e decisão de métodos/algoritmos a se utilizar são a primeira etapa neste projeto, para então, após se ter tais ferramentas, estudar a física do problema e propor soluções para o problema com a utilização de um ferrofluido. Este relatório mostrará até onde se alcançou na codificação dos algoritmos numéricos para resolução do problema proposto. Iniciou-se com o estudo de equações diferenciais parciais bastante conhecidas, como a equação do Calor, de Laplace, e métodos de solução numérica, especificamente o método de diferenças finitas. Após isso, estudou-se em específico a equação de Navier Stokes [4].

A metologia aqui proposta resume as tarefas realizadas ao longo da execução do projeto:

A. Técnicas de Computação Básica

- B. Solução da equação de Laplace
- C. Solução da equação de Poisson
- D. Solução da equação de Navier Stokes Considerações gerais sobre a equação
 - 1. Desconsiderando a pressão
 - 2. Obtendo a pressão
 - 3. Avançando no tempo

II. GOVERNING EQUATIONS

The equations that dictate the flow and the possibilities of parameters to solve it include continuous and discr

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}$$
 (1)

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{2}$$

1

III. SOLUTION METHOD

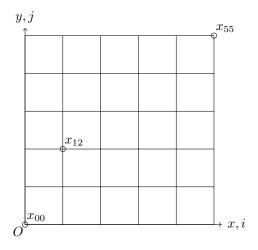


Fig. 1. Malha padrão para discretizar Laplace e Poisson

Pelo fato deste primeiro método abordado ser iterativo, com um *loop* sendo executado até a convergência ser obtida, é natural escolher um método de parada. Isto poderia ser: (1) escolher um tempo limite de execução, (2) ver a diferença entre duas matrizes após uma iteração completa em seus pontos internos, para analisar se a diferença entre elas é desprezível e se indica convergência,

ou ainda (3) pode-se calcular a Equação ?? em cada ponto interno, que seria o melhor a se fazer, e analisar se a equação está dentro de uma faixa de erro desejada. No Algoritmo 1, é apresentada a formulação inicial utilizada.

input : Matriz $n \times n$ com as condições de contorno de Dirichlet output: Matriz com a solução da equação de Laplace STOP = 0;

```
\begin{array}{l} SIOI - o, \\ err \leftarrow 10^{-6}; \\ \textbf{while} \ STOP \neq 1 \ \textbf{do} \\ & u^{\text{old}} \leftarrow u; \\ \textbf{for} \ i \leftarrow 1 \ \textbf{to} \ n-2 \ \textbf{do} \\ & | \ for \ j \leftarrow 1 \ \textbf{to} \ n-2 \ \textbf{do} \\ & | \ u_{ij} \leftarrow (u_{i+1j} + u_{i-1j} + u_{ij+1} + u_{ij-1})/4; \\ & | \ \textbf{end} \\ & \ \textbf{end} \\ & \ ERROR \leftarrow Norma(u^{\text{old}} - u); \\ & \ \textbf{if} \ ERROR < err \ \textbf{then} \\ & | \ STOP \leftarrow 1; \\ & \ \textbf{end} \\ \end{array}
```

Algorithm 1: Resolvendo a equação de Laplace Iterativamente

O conjunto das Equações ?? a ?? é um sistema linear, e é possível representá-lo na forma matricial Ax=b. O que torna este problema interessante é que a matriz A e o vetor b tem padrões muito bem definidos. A matriz A segue o padrão apresentado na Equação 3.

$$\begin{pmatrix}
-4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4
\end{pmatrix}$$
(3)

Observando o padrão de formação da matriz A pentadiagonal e também o padrão do vetor b, obtém-se um sistema linear cuja incógnita são os pontos internos x. A solução é $x = A^{-1}b$.

Como se nota, a resolução é direta, mas o algoritmo para se resolver este sistema linear pode ser muito mais complexo. Mas há um problema para este método, que um sistema pode ficar extremamente grande com um n relativamente pequeno, tão grande, ao ponto de necessitar de mais memória do que o computador tem. Isso se resolve utilizando matrizes esparsas, que só salvam na memória elementos diferentes de zero. A matriz A é uma matriz esparsa, na qual a maioria de seus elementos é igual a 0. Utilizaram-se métodos prontos para resolução de sistemas esparsos da biblioteca Eigen. A Figura \ref{figura} mostra

a relação entre tempo e número de pontos para o método direto. Note que o tempo é muito menor que nos métodos iterativos, nas Figuras ?? e ??.

IV. Results

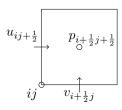


Fig. 2. Elemento de malha escalonada

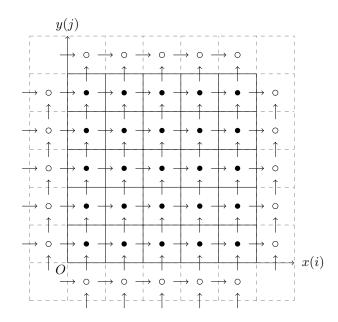


Fig. 3. Malha escalonada. Círculos são pontos internos e de fronteira enquanto circunferências indicam fronteira imaginária adicionada

V. Conclusion

O problema proposto inicialmente ainda não foi alcançado, que é trabalhar com a instabilidade de Saffman-Taylor com fluido magnético e, ou Anisotrópico. Antes de trabalhar com tal problema, teve-se uma etapa inicial que demandou um certo trabalho. Essa primeira etapa consistiu do estudo da resolução de equações diferenciais parciais, por meio de sua discretização e codificação em um programa de computador.

Foi bem sucedida a resolução das equações de Laplace e Poisson numa malha quadrada, pelos métodos direto e iterativo, com diferenças finitas. No caso da equação de Poisson, ainda teve-se a resolução bem sucedida com condições de fronteira de Neumann, que seria essencial para trabalhar com a pressão na equação de Navier Stokes.

O trabalho foi um aprendizado razoavelmente complexo, e que teve muitas consequências positivas. As habilidades de programação de programas numéricos pelo aluno aumentaram bastante, na realidade, de qualquer programa,

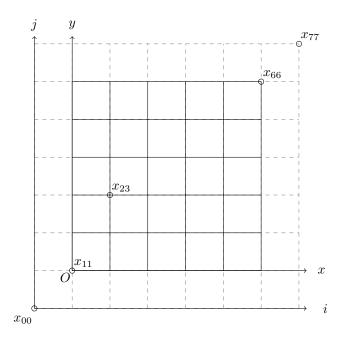


Fig. 4. Mostra dos índices dos pontos do domínio e pontos imaginários

pelo fato de se ter treinado bastante o uso do git e da ferramenta de compilação cmake. Apesar da programação ainda ser um problema, pela complexidade do programa, o código¹ está muito mais organizado do que se esperava, e pra isso ele foi refeito algumas vezes.

O programa para resolver a equação de Navier Stokes na malha escalonada está sendo implementado e espera-se obter resultados nas etapas posteriores deste projeto.

Acknowledgments

Primeiramente agradeço a Deus pela oportunidade de ter feito parte deste trabalho. Agradeço também ao professor Yuri Dumaresq pelas orientações e ânimo no ensino que eu vi nele e que também me animaram na resolução destes problemas numéricos. Agradeço também ao CNPq pela bolsa de incentivo à pesquisa.

References

- Rosensweig, R.E. 1987. Magnetic Fluids. Annu. Rev. Fluid Mech. 19:437-461.
- [2] Mittal R, Iaccarino G. 2005. Immersed Boundary Methods. Annu. Rev. Fluid Mech. 37:239-61.
- [3] Perkin, C. S. 2002. The immersed boundary method. Act. Numerica p. 479:517
- [4] Hinch, E.J. Lecture notes on Computational Fluid Dynamics: Part I - A first problem.
- [5] Babchin, A., Brailovsky, I. Gordon, P., Sivashinsky, G. Fingering instability in immiscible displacement. Phys. Rev. E , 77, 026301, (2008).
- [6] Chorin, A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. J. Computational Physics, v. 2, 1967, p. 12

¹Código está acessível online em https://github.com/ataias/ff