Eletromagnetismo

Orientador: *Yuri Dumaresq Sobral*

Ataias Pereira Reis

1 Introdução

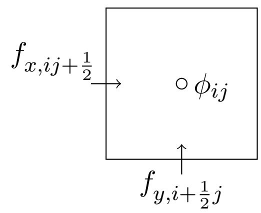
Este trabalho tem por objetivo o estudo dos fluidos magnéticos. Um algoritmo foi feito para resolver a equação de Navier Stokes em um quadrado unitário. Essa é a equação que governa a dinâmica dos fluidos.

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{f} \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \tag{2}$$

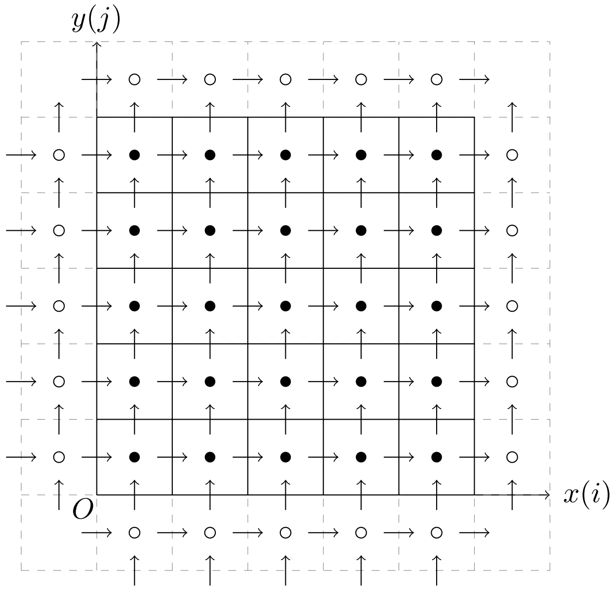
1.1 Malha escalonada

O algoritmo para resolver a hidrodinâmica foi feito considerando-se uma malha escalonada. Como o magnetismo será acoplado com esse algoritmo, é necessário também utilizar a malha escalonada. ϕ será localizada no centro da célula enquanto a força f e os campos H e B estarão normais à celula, como mostrado abaixo. A posição de H e B é a mesma que de f.



Uma representação de um domínio mais completo está na figura abaixo. Note que cada ponto preto no meio de um bloco é a pressão em ponto interno. Enquanto a pressão em pontos da fronteira imaginária são círculos com interior branco. Pontos na fronteira imaginária são utilizados nos cálculos, mas não precisam ser salvos no resultado final.

Se é definida, no computador, uma matriz $n \times n$, tem-se $\Delta x = \frac{1}{n-2}$. Os cálculos devem ser todos feitos com base neste Δx. Além disso, note que as velocidades da extrema esquerda e do extremo inferior não são utilizadas. Você pode declarar tais valores como Not a Number. Se seu programa utilizá-los, há algo errado.



1.2 Matriz de rotação

É útil ter um método de se rotacionar o campo magnético para se testar diferentes configurações do mesmo e analisar simetrias e assimetrias no nosso domínio. Como nosso problema é 2D, tem-se:

$$R(\theta) \quad = \quad \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{3}$$

Esta é uma matriz de rotação, logo:

- $\det R(\theta) = 1$;
- $R^{-1}(\theta) = R^T(\theta)$.

Considere o campo magnético $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, no qual $\mathbf{x} = (x, y)$, rotacionado de um ângulo θ. Neste caso, o ponto $\mathbf{x}$ será dado pelo seguinte:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) \quad = \quad R \cdot \mathbf{f}(R' \cdot \mathbf{x}) \tag{4}$$

Dúvida: se for deslocar o centro do campo magnético, devo fazer isso antes ou depois de rotacionar? Se $\mathbf{f}$ *não é linear, fará diferença.*

2 Eletromagnetismo

Esta é a hora na qual as equações do eletromagnetismo serão introduzidas neste projeto. Até a última seção, a força utilizada era nula. A partir deste momento, iniciar-se-á um estudo matemático do comportamento de um fluido magnético na presença de um campo magnético. Iniciaremos com algoritmos básicos e não tão precisos e após isso iremos melhorar nosso ferramental.

2.1 Equações Básicas

Primeiramente, temos a equação do campo magnético e de seu divergente. O fato do divergente ser 0 indica que o campo é solenoidal, isto é, todas as linhas de campo magnético que saem, tem de voltar à superfície.

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mu_0(\mathbf{M}+\mathbf{H}) && (5) \\ \nabla\cdot\mathbf{B} &= 0 && (6) \end{aligned}$$

A consequência das equações acima é que

$$\nabla\cdot\mathbf{M} = -\nabla\cdot\mathbf{H} \tag{7}$$

No caso de nosso estudo, temos um caso magnetostático, o que implica que:

$$\nabla\times\mathbf{H} = \mathbf{0} \tag{8}$$

Lembre-se que **H** é o fluxo elétrico. Como este campo é irrotacional, temos que **H** é um campo potencial:

$$\mathbf{H} = -\nabla\phi \tag{9}$$

A partir das Equações 7 e 9, tem-se:

$$\nabla^2\phi = \nabla\cdot\mathbf{M} \tag{10}$$

Equação do Campo Magnético

2.2 Relação entre Magnetismo e Força

A relação entre força e o campo magnético é dada pelas equações abaixo:

$$\mathbf{f} = \mu_0\mathbf{M}\cdot\nabla\mathbf{H} \tag{11}$$

Caso dimensional

$$\mathbf{f} = \mathrm{Cpm}\,\mathbf{M}\cdot\nabla\mathbf{H} \tag{12}$$

Caso adimensional

$$\mathrm{Cpm} = \frac{\mu_0 H_0^2}{\rho u^2} \tag{13}$$

Coeficiente de permeabilidade magnética

Desta forma, cada componente da força toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} f_x &= \mathrm{Cpm}\left[M_x\cdot\frac{\partial H_x}{\partial x} + M_y\cdot\frac{\partial H_x}{\partial y}\right] && (14) \\ f_y &= \mathrm{Cpm}\left[M_x\cdot\frac{\partial H_y}{\partial x} + M_y\cdot\frac{\partial H_y}{\partial y}\right] && (15) \end{aligned}$$

A pesquisa se centra no M, que depende do campo magnético, da velocidade do escoamento e do material. Na malha escalonada, **H** e **M** serão localizados da mesma forma que a velocidade **v**.

2.3 Campo Aplicado

Para definir o campo aplicado **H**, nos basearemos no trabalho de McCaig e Clegg [1]. O livro citado apresenta uma fórmula que condiz com a realidade muito bem. O campo magnético na horizontal, H_x, é apresentado na Equação

$$H_x = \frac{B_\mathrm{r}}{\pi\mu_\mathrm{m}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{ab}{x(a^2+b^2+x^2)^{1/2}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{ab}{(x+L_0)(a^2+b^2+(x+L_0)^2)^{1/2}}\right)\right] \quad (16)$$

O valor x é a distância perpendicular do centro de um pólo do ímã até um ponto. É desejado que se saiba o vetor campo aplicado - um campo não horizontal - quando o ímã estiver com inclinação θ em relação ao horizonte e seu centro estiver numa posição (x_0, y_0) em relação à origem. Considerando isto, chegamos na seguinte formulação:

$$d = (x-x_0)\cos\theta + (y-y_0)\sin\theta \quad (17)$$

$$\mathbf{H}\cdot\mathbf{i} = H_d\cos\theta \quad (18)$$

$$\mathbf{H}\cdot\mathbf{j} = H_d\sin\theta \quad (19)$$

$$(20)$$

2.4 Condições de Contorno

A componente normal de **B** deve ser contínua através da interface entre o meio de fora (ar) e o de dentro (fluido magnético). Isto é

$$(\mathbf{B}_\mathrm{f} - \mathbf{B}_\mathrm{d})\cdot\mathbf{n} = 0 \quad (21)$$

Assim

$$\mu_0(H_\mathrm{f}^\mathrm{n} + M_\mathrm{f}^\mathrm{n}) = \mu_0(H_\mathrm{d}^\mathrm{n} + M_\mathrm{d}^\mathrm{n}) \quad (22)$$

O meio de fora é o ar, logo, a magnetização M_f é zero. Sabe-se que $H = -\nabla\phi$, assim

$$\nabla\phi_\mathrm{d}^\mathrm{n} = -H_\mathrm{f}^\mathrm{n} + M_\mathrm{d}^\mathrm{n} \quad (23)$$

Desta forma

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{\text{left}} \approx -H^x_{2,j} + M^x_{2,j} \tag{24}$$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_{\text{right}} \approx -H^x_{n,j} + M^x_{n,j} \tag{25}$$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{\text{lower}} \approx -H^y_{i,2} + M^y_{i,2} \tag{26}$$

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial y}\right|_{\text{upper}} \approx -H^y_{i,n} + M^y_{i,n} \tag{27}$$

2.5 Procedimento

O procedimento para se resolver a Equação de Navier Stokes com o campo magnético, nas condições simples apresentadas, é:

1. Resolver equação do campo magnético, se for passo inicial: $\mathbf{M} = \mathbf{0}$
2. Calcular $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$ (lei simples)
3. Calcular força $\mathbf{f} = \mathrm{Cpm}\,\mathbf{M} \cdot \nabla\mathbf{H}$
4. Resolver hidrodinâmica
5. Avançar no tempo e voltar ao passo 1

Referências

[1] M. McCaig and A. G. Clegg. *Permanent Magnets in Theory and Practice.* Wiley, New York, 2nd edition, 1987.