

# **Eletromagnetismo**

Orientador: *Yuri Dumaresq Sobral*

**Ataias Pereira Reis**

## 1 Introdução

Quando se simula a dinâmica de um fluido magnético numa cavidade, é importante definir a sequência de passos nos quais valores intermediários devem ser calculados para então se resolver a hidrodinâmica. Note que para  $t_0$ , há condições iniciais que determinam o estado do sistema. Para  $t_n > t_0$ , tem-se:

1. Obter  $\phi_n$  a partir de  $\mathbf{M}_{n-1}$  com condições de contorno apropriadas
2. Calcular campo dentro da cavidade por meio de  $\mathbf{H} = -\nabla\phi$
3. Obter  $\mathbf{M}_n$  a partir de uma relação adequada
4. Calcular força  $\mathbf{f} = \text{Cpm } \mathbf{M} \cdot \nabla\mathbf{H}$
5. Resolver hidrodinâmica
6. Avançar para  $t_{n+1}$  e repetir passos anteriores

Estas etapas serão analisadas neste documento.

### 1.1 Matriz de rotação

É útil ter um método de se rotacionar o campo magnético para se testar diferentes configurações do mesmo e analisar simetrias e assimetrias no nosso domínio. Como nosso problema é 2D, tem-se:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Esta é uma matriz de rotação, logo:

- $\det R(\theta) = 1$ ;
- $R^{-1}(\theta) = R^T(\theta)$ .

Considere o campo magnético  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ , no qual  $\mathbf{x} = (x, y)$ , rotacionado de um ângulo  $\theta$ . Neste caso, o ponto  $\mathbf{x}$  será dado pelo seguinte:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = R \cdot \mathbf{f}(R' \cdot \mathbf{x}) \quad (2)$$

*Dúvida: se for deslocar o centro do campo magnético, devo fazer isso antes ou depois de rotacionar? Se  $\mathbf{f}$  não é linear, fará diferença.*

## 2 Eletromagnetismo

Esta é a hora na qual as equações do eletromagnetismo serão introduzidas neste projeto. Até a última seção, a força utilizada era nula. A partir deste momento, iniciar-se-á um estudo matemático do comportamento de um fluido magnético na presença de um campo magnético. Iniciaremos com algoritmos básicos e não tão precisos e após isso iremos melhorar nosso ferramental.

## 2.1 Equações Básicas

Primeiramente, temos a equação do campo magnético e de seu divergente. O fato do divergente ser 0 indica que o campo é solenoidal, isto é, todas as linhas de campo magnético que saem, tem de voltar à superfície.

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{M} + \mathbf{H}) \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4)$$

A consequência das equações acima é que

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M} \quad (5)$$

No caso de nosso estudo, temos um caso magnetostático, o que implica que:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (6)$$

Lembre-se que  $\mathbf{H}$  é o fluxo elétrico. Como este campo é irrotacional, temos que  $\mathbf{H}$  é um campo potencial:

$$\mathbf{H} = -\nabla\phi \quad (7)$$

A partir das Equações 5 e 7, tem-se:

$$\nabla^2\phi = \nabla \cdot \mathbf{M} \quad (8)$$

Equação do Campo Magnético

## 2.2 Escolha do Campo Aplicado

### 2.2.1 Atualmente

Campo aplicado de um fio infinito conforme [2]:

$$\overline{H}_x = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{\overline{y} - \overline{b}}{(\overline{x} - \overline{a})^2 + (\overline{y} - \overline{b})^2}, \quad (9)$$

$$\overline{H}_y = -\frac{\gamma}{2\pi} \frac{\overline{x} - \overline{a}}{(\overline{x} - \overline{a})^2 + (\overline{y} - \overline{b})^2}. \quad (10)$$

As equações que acabaram de ser apresentadas são dimensionais. Elas são tornadas adimensionais utilizando os termos: comprimento característico,  $L$ ; e escala de campo magnético  $H_0$ . Para  $\overline{H}_x$ , tem-se

$$H_x \cdot H_0 = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{y \cdot L - b \cdot L}{(x \cdot L - a \cdot L)^2 + (y \cdot L - b \cdot L)^2} \quad (11)$$

que resulta em

$$H_x = \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma}{LH_0} \frac{y - b}{(x - a)^2 + (y - b)^2} \quad (12)$$

### 2.2.2 Posteriormente

Para definir o campo aplicado  $\mathbf{H}$ , nos basearemos no trabalho de McCaig e Clegg [?]. O livro citado apresenta uma fórmula que condiz com a realidade muito bem. O campo magnético na horizontal,  $H_x$ , é apresentado na Equação

$$H_x = \frac{B_r}{\pi\mu_m} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{ab}{x(a^2 + b^2 + x^2)^{1/2}} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{ab}{(x + L_0)(a^2 + b^2 + (x + L_0)^2)^{1/2}} \right) \right] \quad (13)$$

O valor  $x$  é a distância perpendicular do centro de um pólo do ímã até um ponto. É desejado que se saiba o vetor campo aplicado - um campo não horizontal - quando o ímã estiver com inclinação  $\theta$  em relação ao horizonte e seu centro estiver numa posição  $(x_0, y_0)$  em relação à origem. Considerando isto, chegamos na seguinte formulação:

$$d = (x - x_0) \cos \theta + (y - y_0) \sin \theta \quad (14)$$

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{i} = H_d \cos \theta \quad (15)$$

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{j} = H_d \sin \theta \quad (16)$$

$$(17)$$

### 2.3 Evolução do campo magnético

Masao [1] cita Shliomis (cheguei a achar o artigo, mas era muito esquisito...) e mostra uma equação constitutiva para a evolução do campo magnético

$$\frac{\partial \mathbf{M}^*}{\partial t^*} = -\frac{1}{\tau} [\mathbf{M}^* - \mathbf{M}_0^*] + \frac{1}{\zeta} [(\mathbf{M}^* \times \mathbf{H}^*) \times \mathbf{M}^*] + \boldsymbol{\Omega}^* \times \mathbf{M}^*, \quad (18)$$

na qual  $\boldsymbol{\Omega}^* = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}^*$  (qual a referência para isso? acho que Yuri não me mostrou). Nesta equação:  $\boldsymbol{\Omega}^*$  é a velocidade angular macroscópica do fluido;  $\tau$  é o tempo de relaxação rotacional de movimento Browniano; Todos os termos tem asteriscos indicando que são unidades dimensionais.

#### 2.3.1 Adimensionalizar

$$\frac{\partial \mathbf{M} H_0}{\partial t (L/U)} = -\frac{H_0}{\tau} [\mathbf{M} - \mathbf{M}_0] + \frac{H_0^3}{\zeta} [(\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{M}] + \frac{H_0 U}{2L} (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{M} \quad (19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \frac{L}{U H_0} \left( -\frac{H_0}{\tau} [\mathbf{M} - \mathbf{M}_0] + \frac{H_0^3}{\zeta} [(\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{M}] + \frac{H_0 U}{2L} (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{M} \right) \quad (20)$$

$$= -\frac{L}{\tau U} [\mathbf{M} - \mathbf{M}_0] + \frac{L H_0^2}{U \zeta} [(\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{M}] + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{M} \quad (21)$$

#### 2.3.2 Expansão

Primeiro, note que

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}. \quad (22)$$

No caso  $\mathbf{M} = (M_x, M_y, 0)$  e  $\mathbf{H} = (H_x, H_y, 0)$ , daí:

$$\mathbf{M} \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ M_x & M_y & 0 \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix} = (M_x H_y - M_y H_x) \mathbf{k} \quad (23)$$

assim

$$(\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & (M_x H_y - M_y H_x) \\ M_x & M_y & 0 \end{vmatrix} \quad (24)$$

$$= -M_y(M_x H_y - M_y H_x) \mathbf{i} + M_x(M_x H_y - M_y H_x) \mathbf{j} \quad (25)$$

O rotacional de  $\mathbf{v} = (u, v, 0)$  é dado por

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{k} \quad (26)$$

e daí

$$(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ M_x & M_y & 0 \end{vmatrix} \quad (27)$$

$$= -M_y \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{i} + M_x \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathbf{j} \quad (28)$$

Pode-se definir as constantes

$$c_1 = \frac{L}{\tau U} \quad (29)$$

$$c_2 = \frac{L H_0^2}{U \zeta} \quad (30)$$

Desta maneira:

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} = -c_1 [M_x - M_{x0}] - c_2 M_y (M_x H_y - M_y H_x) - \frac{1}{2} M_y \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (31)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} = -c_1 [M_y - M_{y0}] + c_2 M_x (M_x H_y - M_y H_x) + \frac{1}{2} M_x \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (32)$$

### 2.3.3 Discretização em $x$

A discretização temporal é simples:

$$\frac{\partial M_{x,ij}}{\partial t} = \frac{M_{x,ij}^{n+1} - M_{x,ij}^n}{\Delta t} \quad (33)$$

$\mathbf{M}$  e  $\mathbf{H}$  estão dispostos na malha escalonada de maneira similar à velocidade. Assim, é importante tomar cuidado para que o resultado esteja no ponto correto. No ponto  $ij$  para direção  $x$ , tem-se

$$M_x H_y - M_y H_x = M_{x,ij} \frac{H_{y,ij} + H_{y,ij+1} + H_{y,i-1j} + H_{y,i-1j+1}}{4} \quad (34)$$

$$- \frac{M_{y,ij} + M_{y,ij+1} + M_{y,i-1j} + M_{y,i-1j+1}}{4} H_x \quad (35)$$

$$= M_{x,ij} H_{y,ij}^t - M_{y,ij}^t H_{x,ij} \quad (36)$$

O sobrescrito  $t$  indica a média realizada para que os cálculos se refiram ao mesmo ponto físico. Por simplificação e concisão, será utilizado isso daqui em diante. Também na direção  $x$  e no ponto  $ij$ , tem-se:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\frac{v_{ij} + v_{ij+1}}{2} - \frac{v_{i-1j} + v_{i-1j+1}}{2}}{\Delta x} \quad (37)$$

$$= \frac{v_{ij} + v_{ij+1}}{2\Delta x} - \frac{v_{i-1j} + v_{i-1j+1}}{2\Delta x} \quad (38)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_{ij+1} - u_{ij-1}}{2\Delta x} \quad (39)$$

Assim

$$\begin{aligned} M_{x,ij}^{n+1} &= M_{x,ij}^n - c_1 \Delta t [M_{x,ij} - M_{x_0,ij}] - c_2 \Delta t M_{y,ij}^t (M_{x,ij} H_{y,ij}^t - M_{y,ij}^t H_{x,ij}) \\ &- \frac{1}{2} \Delta t M_{y,ij}^t \left( \frac{v_{ij} + v_{ij+1}}{2\Delta x} - \frac{v_{i-1j} + v_{i-1j+1}}{2\Delta x} - \frac{u_{ij+1} - u_{ij-1}}{2\Delta x} \right) \end{aligned} \quad (40)$$

ou

$$\begin{aligned} M_{x,ij}^{n+1} &= M_{x,ij}^n - c_1 \Delta t [M_{x,ij} - M_{x_0,ij}] - c_2 \Delta t M_{y,ij}^t (M_{x,ij} H_{y,ij}^t - M_{y,ij}^t H_{x,ij}) \\ &- \frac{\Delta t M_{y,ij}^t}{4\Delta x} \left( \frac{v_{ij} + v_{ij+1}}{1} - \frac{v_{i-1j} + v_{i-1j+1}}{1} - \frac{u_{ij+1} - u_{ij-1}}{1} \right) \end{aligned} \quad (41)$$

### 2.3.4 Discretização em $y$

A discretização temporal é simples:

$$\frac{\partial M_{y,ij}}{\partial t} = \frac{M_{y,ij}^{n+1} - M_{y,ij}^n}{\Delta t} \quad (42)$$

$\mathbf{M}$  e  $\mathbf{H}$  estão dispostos na malha escalonada de maneira similar à velocidade. Assim, é importante tomar cuidado para que o resultado esteja no ponto correto. No ponto  $ij$  para direção  $y$ , tem-se

$$M_x H_y - M_y H_x = M_{x,ij}^t H_{y,ij} - M_{y,ij} H_{x,ij}^t \quad (43)$$

Também na direção  $y$  e no ponto  $ij$ , tem-se:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v_{i+1j} - v_{i-1j}}{2\Delta x} \quad (44)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\frac{u_{ij}+u_{i+1j}}{2} - \frac{u_{ij-1}+u_{i+1j-1}}{2}}{\Delta x} \quad (45)$$

$$= \frac{u_{ij} + u_{i+1j}}{2\Delta x} - \frac{u_{ij-1} + u_{i+1j-1}}{2\Delta x} \quad (46)$$

Assim

$$\begin{aligned} M_{y,ij}^{n+1} &= M_{y,ij}^n - c_1 \Delta t [M_{y,ij} - M_{y0,ij}] + c_2 \Delta t M_{x,ij}^t (M_{x,ij}^t H_{y,ij} - M_{y,ij} H_{x,ij}^t) \\ &+ \frac{1}{2} \Delta t M_{x,ij}^t \left( \frac{v_{i+1j} - v_{i-1j}}{2\Delta x} - \frac{u_{ij} + u_{i+1j}}{2\Delta x} + \frac{u_{ij-1} + u_{i+1j-1}}{2\Delta x} \right) \end{aligned} \quad (47)$$

## 2.4 Relação entre Magnetismo e Força

A relação entre força e o campo magnético é dada pelas equações abaixo: (força de Kelvin)

$$\mathbf{f} = \mu_0 \left( \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} + \frac{1}{2} \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \right) \quad (48)$$

Caso dimensional

$$\mathbf{f} = C_{\text{pm}} \left( \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} + \frac{1}{2} \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \right) \quad (49)$$

Caso adimensional

$$C_{\text{pm}} = \frac{\mu_0 H_0^2}{\rho U^2} \quad (50)$$

Coefficiente de pressão magnética

Na Equação 49,  $\mathbf{M} = (M_x, M_y, 0)$ ,  $\mathbf{H} = (H_x, H_y, 0)$  e

$$\mathbf{M} \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ M_x & M_y & 0 \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix} = (M_x H_y - M_y H_x) \mathbf{k}. \quad (51)$$

Observe que  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{H}$  considerados aqui são vetores que estão em um plano e não dependem da componente  $z$ , logo, a derivada parcial nessa dimensão é nula. Assim, tem-se que

$$\begin{aligned} \nabla \times (\mathbf{M} \times \mathbf{H}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & (M_x H_y - M_y H_x) \end{vmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (M_x H_y - M_y H_x) \mathbf{i} - \frac{\partial}{\partial x} (M_x H_y - M_y H_x) \mathbf{j} \end{aligned} \quad (52)$$

Desta forma, cada componente da força toma a seguinte forma:

$$f_x = C_{\text{pm}} \left[ M_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial H_x}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (M_x H_y - M_y H_x) \right] \quad (53)$$

$$f_y = C_{\text{pm}} \left[ M_x \frac{\partial H_y}{\partial x} + M_y \frac{\partial H_y}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (M_x H_y - M_y H_x) \right] \quad (54)$$

A pesquisa se centra no  $\mathbf{M}$ , que depende do campo magnético, da velocidade do escoamento e do material. Na malha escalonada,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{f}$  serão localizados da mesma forma que a velocidade  $\mathbf{v}$ . Desta forma, a discretização para  $f_x$  se torna:

$$f_{x,ij} = C_{\text{pm}} \left[ M_{x,ij} \frac{H_{x,i+1j} - H_{x,i-1j}}{2\Delta x} + M_{y,ij}^t \frac{H_{x,ij+1} - H_{x,ij-1}}{2\Delta x} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{M_{x,ij+1} H_{y,ij+1}^t - M_{y,ij+1}^t H_{x,ij+1} - M_{x,ij-1} H_{y,ij-1}^t + M_{y,ij-1}^t H_{x,ij-1}}{2\Delta x} \right] \quad (55)$$

ou seja,

$$f_{x,ij} = \frac{C_{\text{pm}}}{2\Delta x} \left[ M_{x,ij} (H_{x,i+1j} - H_{x,i-1j}) + M_{y,ij}^t (H_{x,ij+1} - H_{x,ij-1}) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (M_{x,ij+1} H_{y,ij+1}^t - M_{y,ij+1}^t H_{x,ij+1} - M_{x,ij-1} H_{y,ij-1}^t + M_{y,ij-1}^t H_{x,ij-1}) \right] \quad (56)$$

enquanto para  $f_y$  tem-se

$$f_{y,ij} = C_{\text{pm}} \left[ M_{x,ij}^t \frac{H_{y,i+1j} - H_{y,i-1j}}{2\Delta x} + M_{y,ij} \frac{H_{y,ij+1} - H_{y,ij-1}}{2\Delta x} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{M_{x,ij+1}^t H_{y,ij+1} - M_{y,ij+1} H_{x,ij+1}^t - M_{x,ij-1}^t H_{y,ij-1} + M_{y,ij-1} H_{x,ij-1}^t}{2\Delta x} \right] \quad (57)$$

ou seja,

$$f_{y,ij} = \frac{C_{\text{pm}}}{2\Delta x} \left[ M_{x,ij}^t (H_{y,i+1j} - H_{y,i-1j}) + M_{y,ij} (H_{y,ij+1} - H_{y,ij-1}) \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (M_{x,ij+1}^t H_{y,ij+1} - M_{y,ij+1} H_{x,ij+1}^t - M_{x,ij-1}^t H_{y,ij-1} + M_{y,ij-1} H_{x,ij-1}^t) \right] \quad (58)$$

## 2.5 Condições de Contorno

A componente normal de  $\mathbf{B}$  deve ser contínua através da interface entre o meio de fora (ar) e o de dentro (fluido magnético). Isto é

$$(\mathbf{B}_f - \mathbf{B}_d) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (59)$$

Assim

$$\mu_0(H_f^n + M_f^n) = \mu_0(H_d^n + M_d^n) \quad (60)$$

O meio de fora é o ar, logo, a magnetização  $M_f$  é zero. Sabe-se que  $H = -\nabla\phi$ , assim

$$\nabla\phi_d^n = -H_f^n + M_d^n \quad (61)$$



Desta forma

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{\text{left}} \approx -H_{2,j}^x + M_{2,j}^x \quad (62)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{\text{right}} \approx -H_{n,j}^x + M_{n,j}^x \quad (63)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{\text{lower}} \approx -H_{i,2}^y + M_{i,2}^y \quad (64)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{\text{upper}} \approx -H_{i,n}^y + M_{i,n}^y \quad (65)$$

## Referências

- [1] J. P. Shen and Masao Doi. Effective viscosity of magnetic fluids. *Journal of the Physical Society of Japan*, 59(1):111–117, 1990.
- [2] E.E. Tzirtzilakis and M.A. Xenos. Biomagnetic fluid flow in a driven cavity. *Meccanica*, 48(1):187–200, 2013.