

# Introdução à Simulação Numérica de Escoamentos de Fluidos Magnéticos

{ Ataias Reis - ataiasreis@gmail.com } { Yuri Dumaresq Sobral - Y.D.Sobral@mat.unb.br } { Francisco Ricardo Cunha - frcunha@unb.br }  
Universidade de Brasília, Departamento de Matemática

## 1. INTRODUÇÃO

### Objetivo

- Desenvolver um código de computador que resolva a equação de Navier Stokes numa cavidade para simular o escoamento de um fluido magnético [?] sob ação de um campo magnético aplicado.

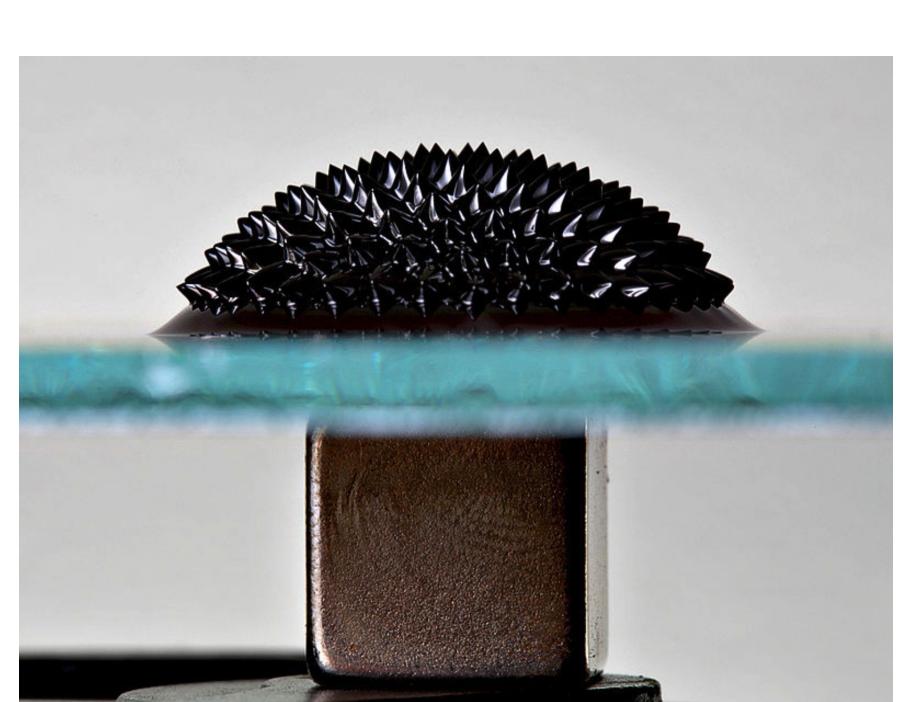


Figura 1: Ferrofluid e cavidade

$$\left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + C_{pm} \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad (4)$$

O número de Reynolds é  $Re = \frac{\rho LU}{\mu}$  e o coeficiente de pressão magnética é  $C_{pm} = \frac{\mu_0 H_0^2}{\rho U^2}$ .

- Hipótese constitutiva (regime superparamagnético):

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}. \quad (5)$$

### Por quê?

- O caso superparamagnético já é conhecido e serve como validação do código antes de simular outras equações constitutivas para o magnetismo.

## 2. METODOLOGIA

- Solução numérica das equações governantes:

- Diferenças finitas de segunda ordem

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \quad (6)$$

- Time-splitting [?] aplicado às equações de Navier Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \approx \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^*}{\Delta t} + \frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^n}{\Delta t} \quad (7)$$

$$\frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^n}{\Delta t} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v}^n + C_{pm} \mathbf{M}^n \cdot \nabla \mathbf{H}^n - \mathbf{v}^n \cdot \nabla \mathbf{v}^n \quad (8)$$

$$\nabla^2 p = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{v}^* \quad (9)$$

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^* - \Delta t \cdot \nabla p \quad (10)$$

- Problemas de Poisson para a pressão, Equação 9, e para o campo magnético local com condições de contorno de Neumann resolvidos por fatoração Choleski

$$\text{Campo magnético: } \nabla^2 \phi = \nabla \cdot \mathbf{M} \quad (11)$$

$$\text{Condições de Neumann: } \nabla \phi_d^n = -H_{out}^n + M_{in}^n \quad (12)$$

- Staggered-grid [?] - tipo de malha que é utilizada para diminuir erros no cálculo da pressão

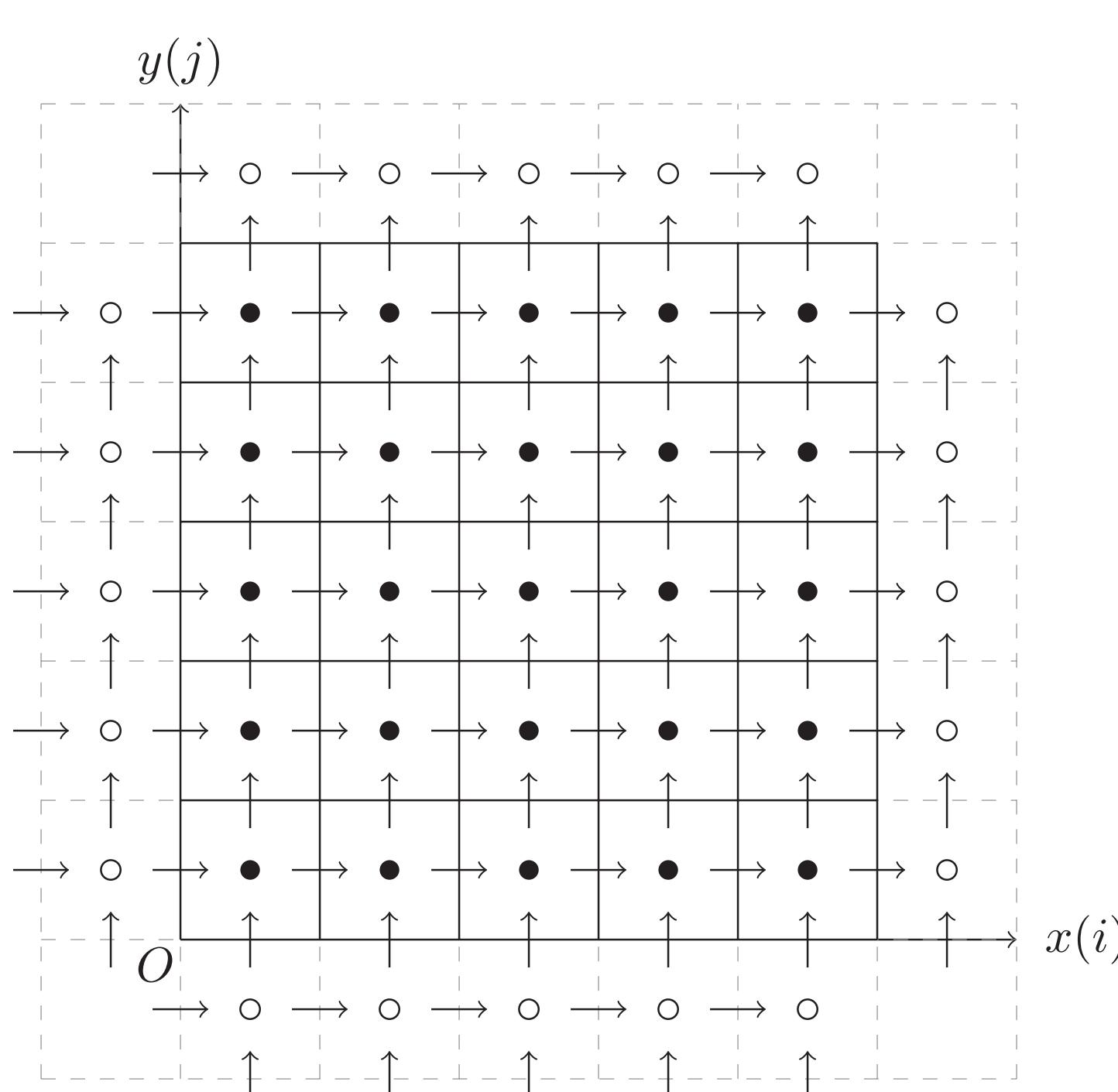


Figura 2: Malha escalonada

- Condições no passo de tempo e tamanho das células da malha

$$\text{Difusão estável: } \Delta t < \frac{1}{4} Re \Delta x^2 \quad (13)$$

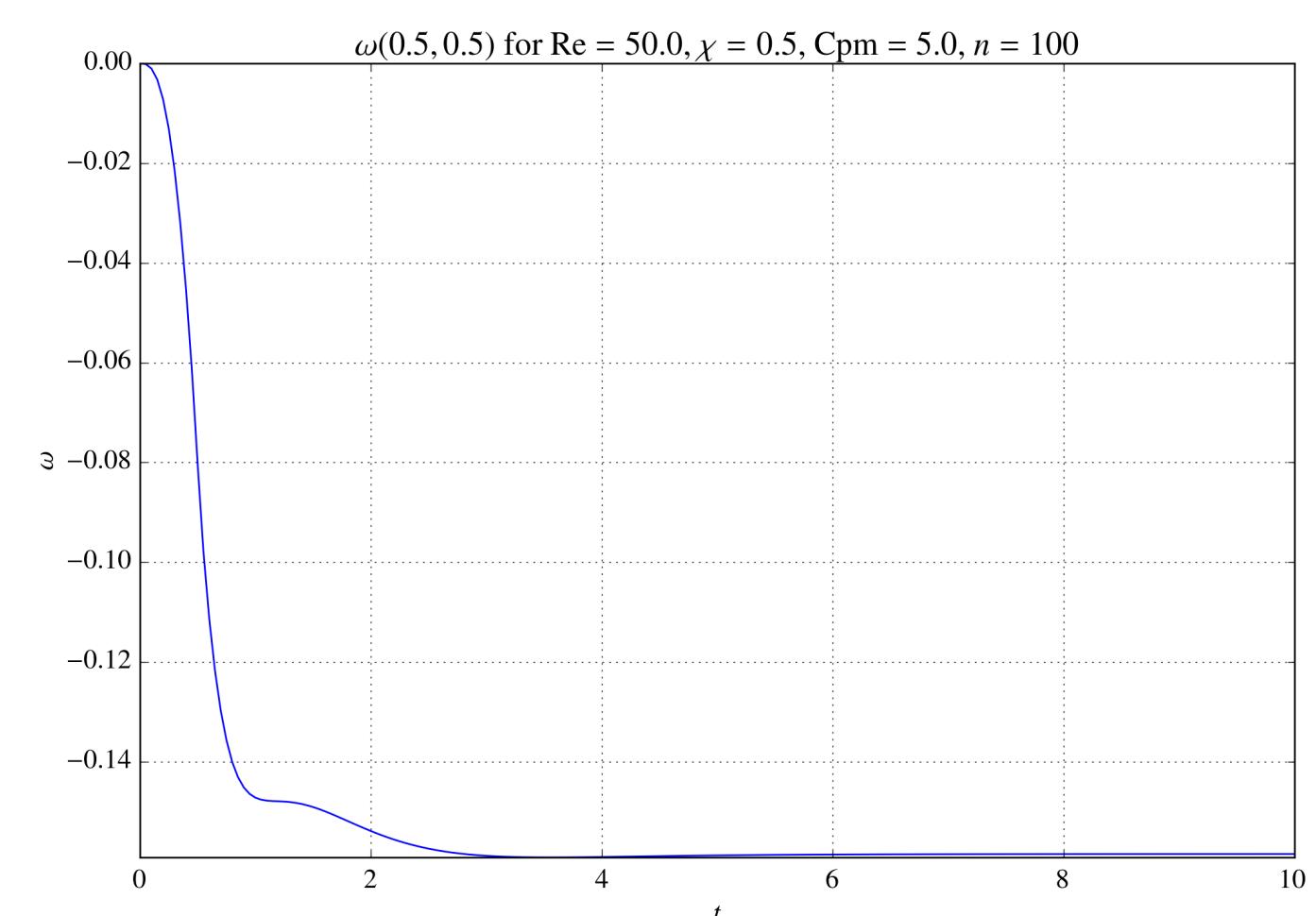
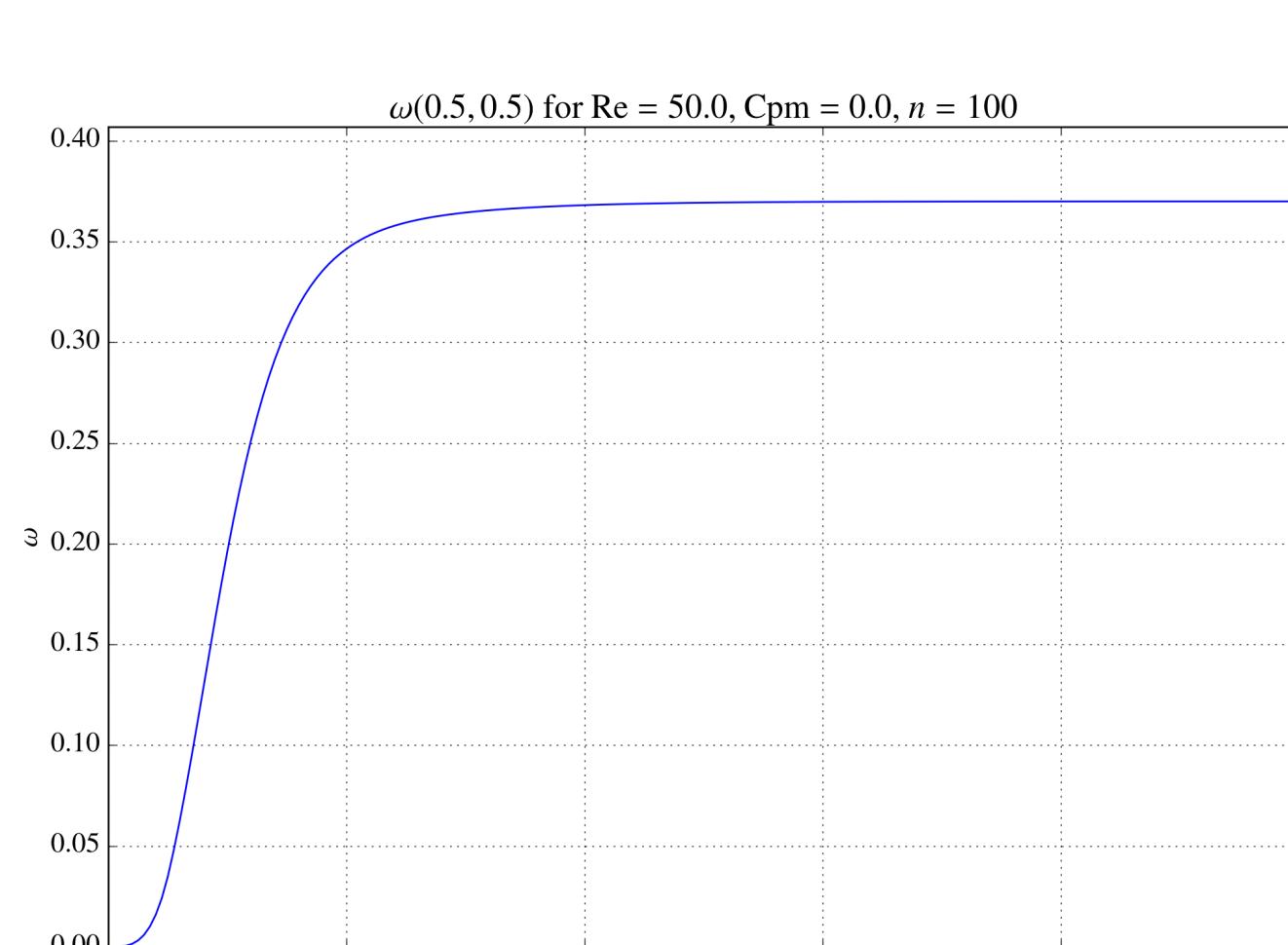
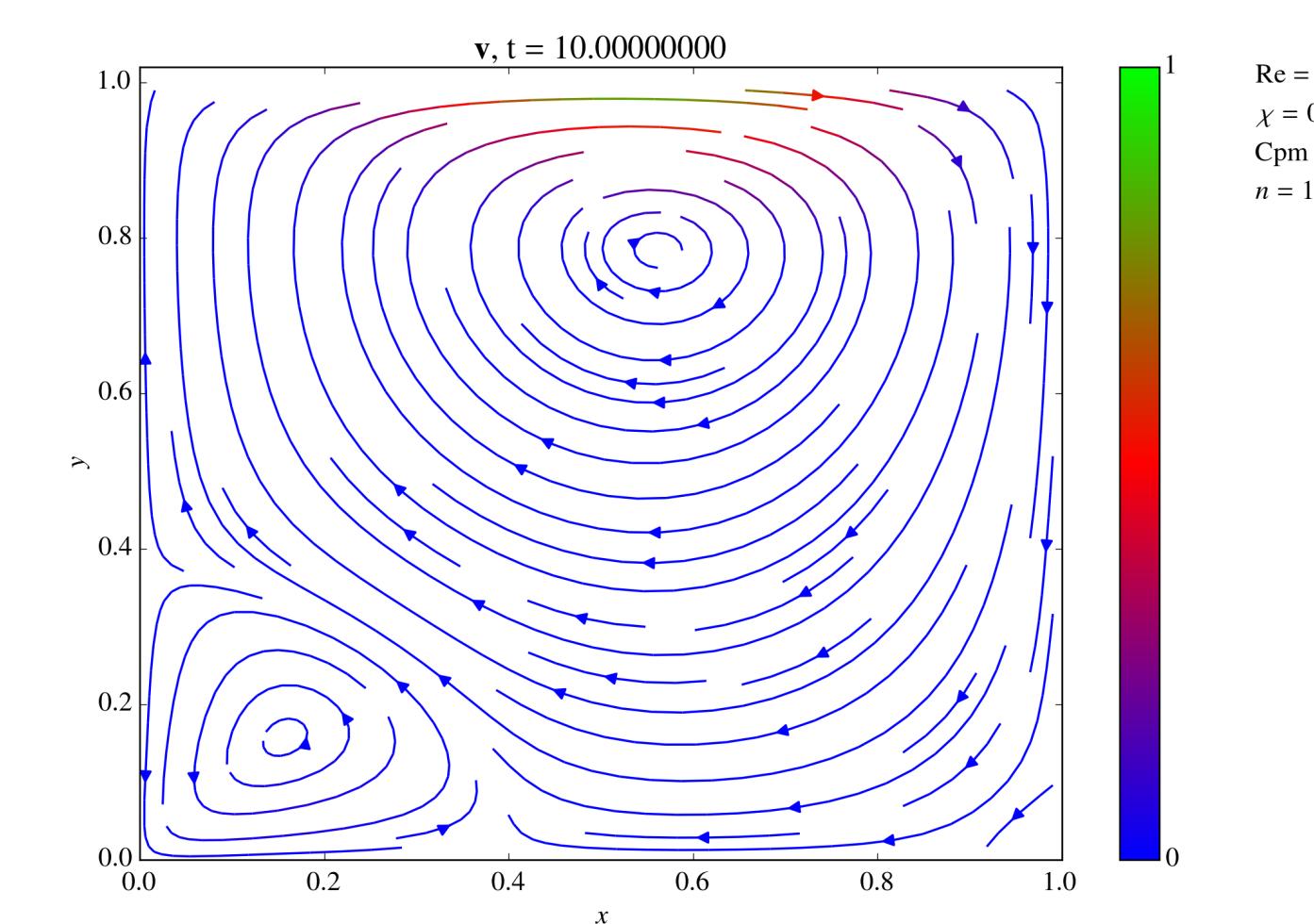
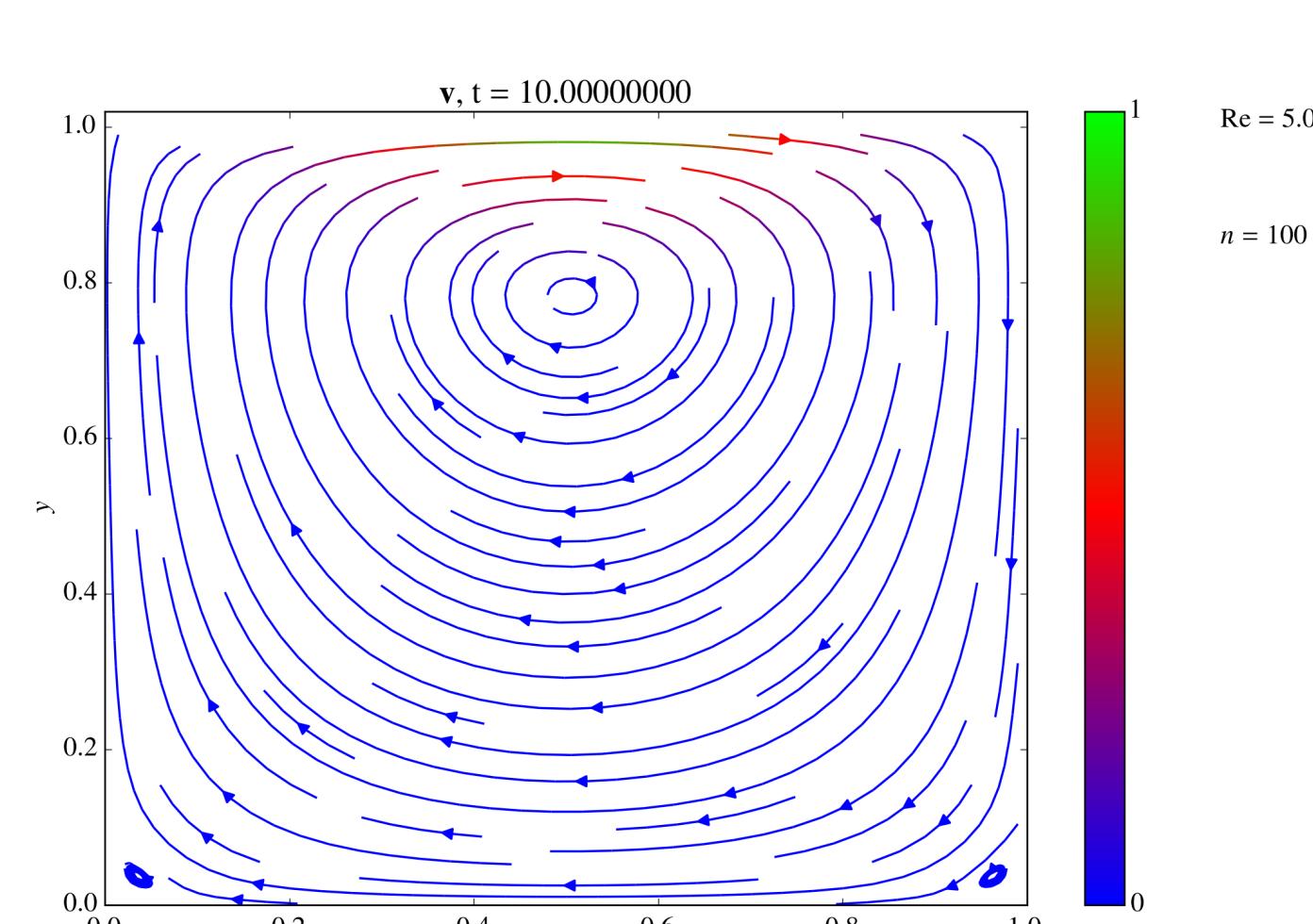
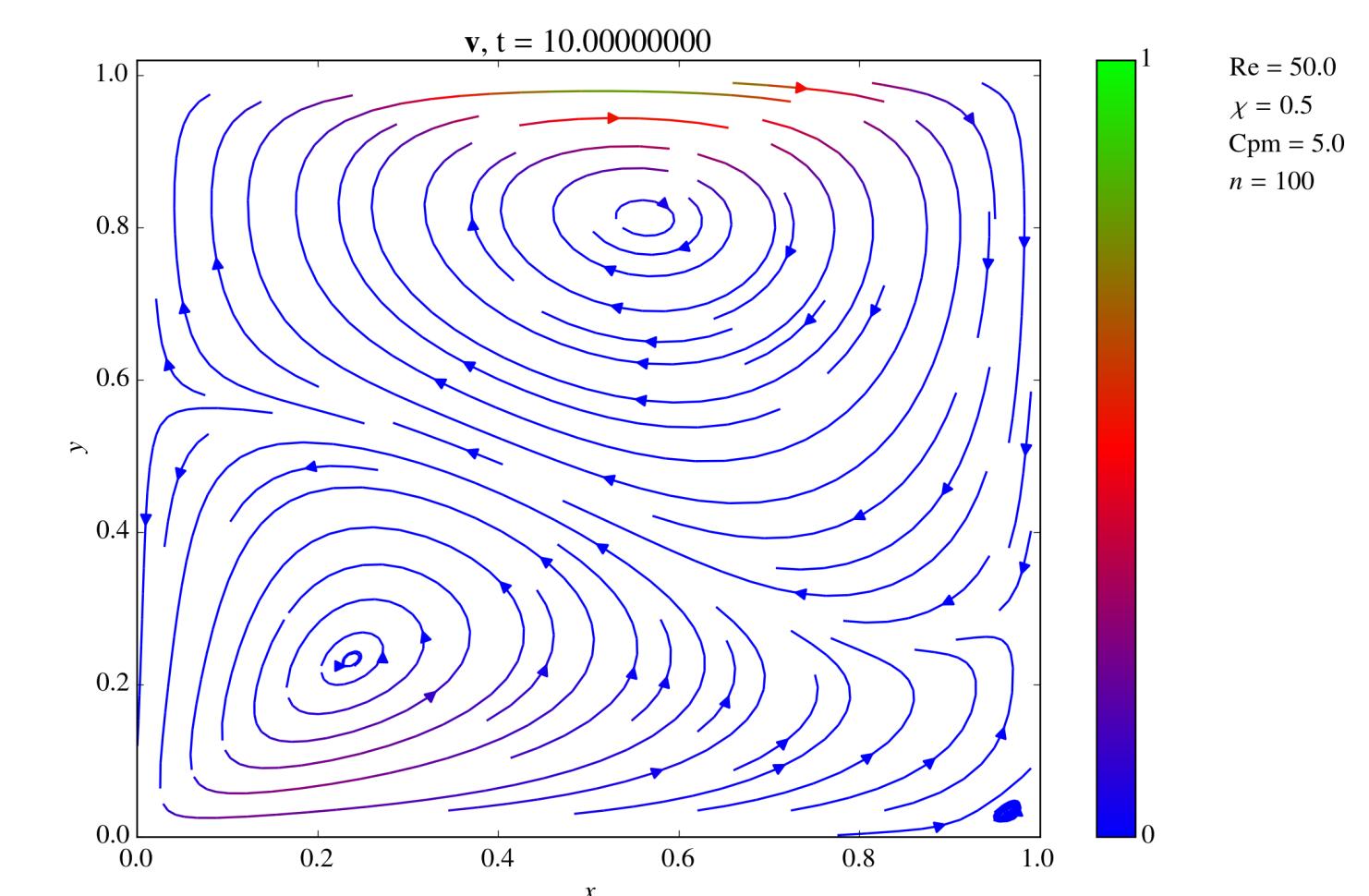
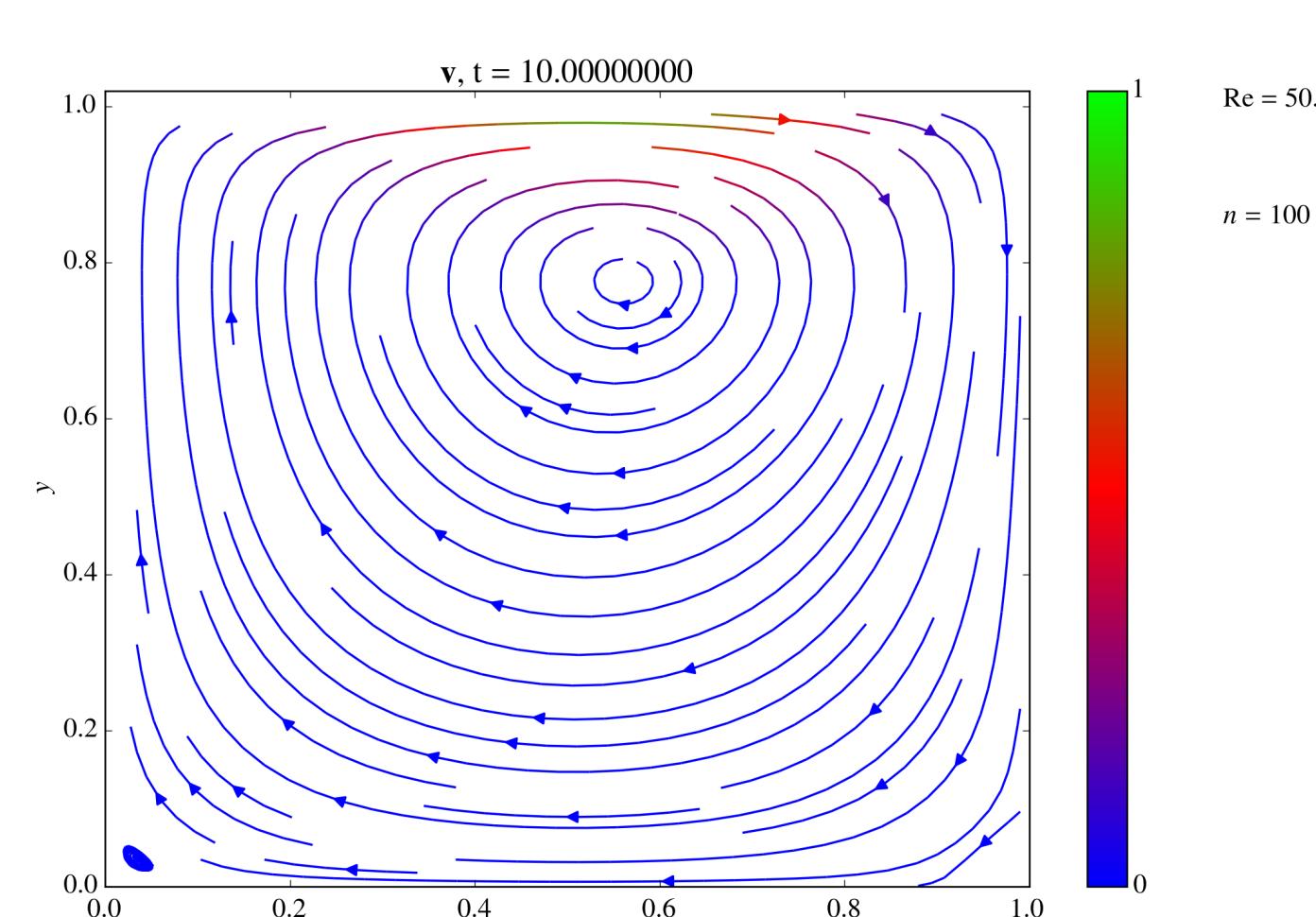
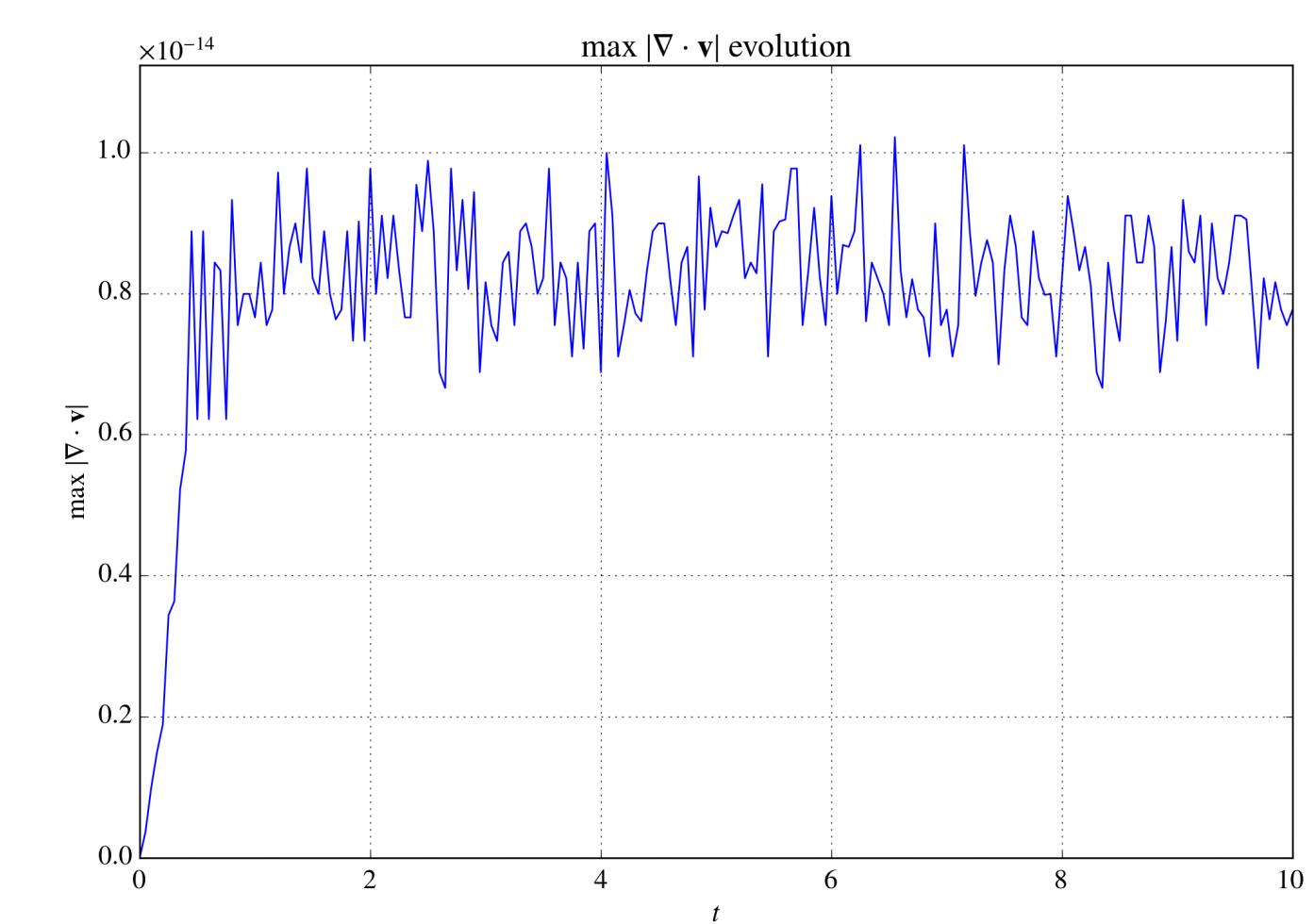
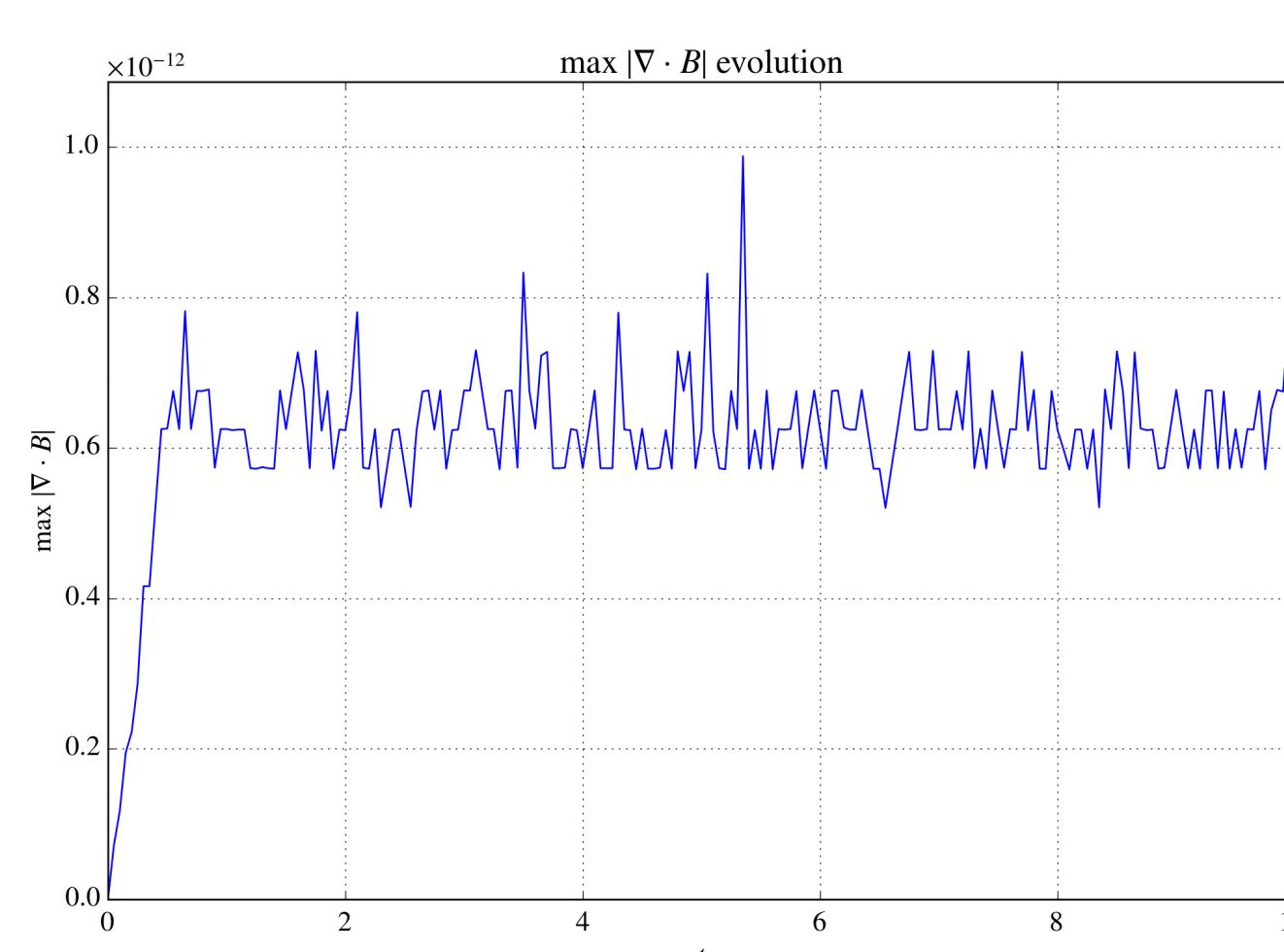
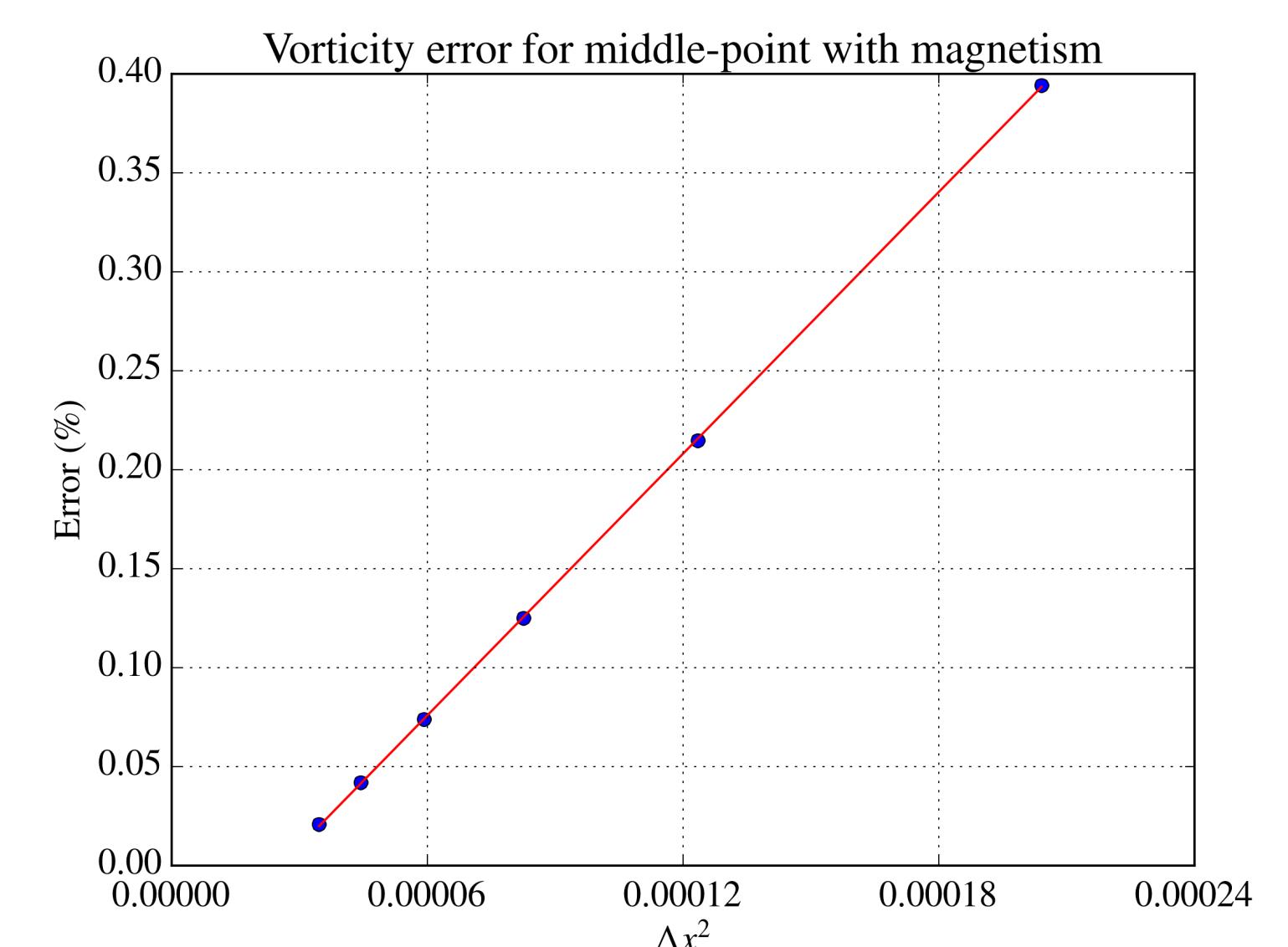
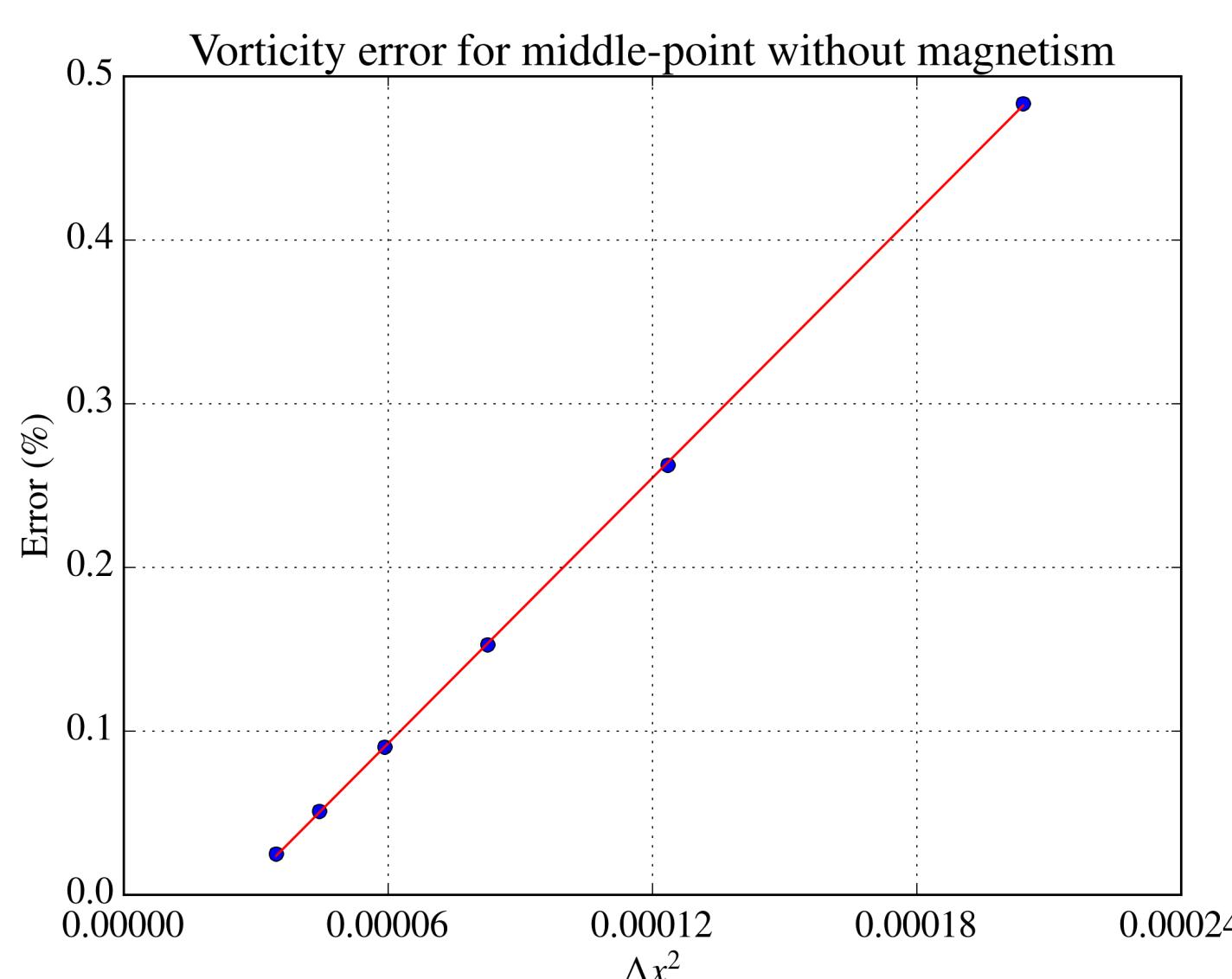
$$\text{Advecção estável: } \Delta t < \Delta x \quad (14)$$

$$\text{Camada limite hidrodinâmica: } \Delta x < \frac{1}{Re} \quad (15)$$

## AGRADECIMENTOS

Os autores são gratos pelo apoio financeiro a este trabalho que foi dado pelo CNPq, FAP-DF e Finatec.

## 3. RESULTADOS



## 4. CONCLUSÃO

- Método de solução numérica adequado para o problema proposto. Código foi construído e validado, e é eficiente computacionalmente.
- Campo aplicado influencia significativamente o escoamento de um ferrofluid.

## 5. TRABALHOS FUTUROS

- Explorar diversas configurações de campo magnético,  $Re$ ,  $C_{pm}$ ,  $\chi$  e calcular propriedades como tempo para regime permanente, força na parede superior, etc.
- Simulação de fluidos magnéticos assimétricos, para os quais  $\mathbf{M} \times \mathbf{H} \neq 0$ . Nestes casos, é preciso descrever bem a magnetização do ferrofluid. Testar Equação de Shliomis [?] e outras.

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = -c_1 [\mathbf{M} - \mathbf{M}_0] + c_2 [(\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{M}] + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{M}, \quad (16)$$

## REFERÊNCIAS

- Alexandre Joel Chorin. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal of Computational Physics*, 135(2):118 – 125, 1997.
- NumFocus Foundation. The Julia Language. Disponível em <http://julialang.org>, versão 0.3.11.
- E.J. Hinch. Lecture notes on computational methods in fluid dynamics: Part i - a first problem., 2006.
- Chorin A. J. Numerical solutions of the Navier-Stokes Equations. *AMS*, February 1968.
- Eric Firing Michael Droettboom John Hunter, Darren Dale and the matplotlib development team. matplotlib: python plotting. Available at <http://matplotlib.org>, version 1.4.3.
- Ataias Pereira Reis. Repositório Git: ferrofluidos. Disponível em <https://github.com/ataias/ferrofluidos>.
- R E Rosensweig. Magnetic fluids. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 19(1):437–461, 1987.
- J. P. Shen and Masao Doi. Effective viscosity of magnetic fluids. *Journal of the Physical Society of Japan*, 59(1):111–117, 1990.