Eletromagnetismo

Orientador: *Yuri Dumaresq Sobral*

Ataias Pereira Reis

1 Introdução

Quando se simula a dinâmica de um fluido magnético numa cavidade, é importante definir a sequência de passos nos quais valores intermediários devem ser calculados para então se resolver a hidrodinâmica. Note que para t_0, há condições iniciais que determinam o estado do sistema. Para $t_n > t_0$, tem-se:

1. Obter ϕ_n a partir de $\mathbf{M}_{n-1}$ com condições de contorno apropriadas
2. Calcular campo dentro da cavidade por meio de $\mathbf{H} = -\nabla\phi$
3. Obter $\mathbf{M}_n$ a partir de uma relação adequada
4. Calcular força $\mathbf{f} = \mathrm{Cpm}\,\mathbf{M}\cdot\nabla\mathbf{H}$
5. Resolver hidrodinâmica
6. Avançar para t_{n+1} e repetir passos anteriores

Estas etapas serão analisadas neste documento.

1.1 Matriz de rotação

É útil ter um método de se rotacionar o campo magnético para se testar diferentes configurações do mesmo e analisar simetrias e assimetrias no nosso domínio. Como nosso problema é 2D, tem-se:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \tag{1}$$

Esta é uma matriz de rotação, logo:

- $\det R(\theta) = 1$;
- $R^{-1}(\theta) = R^T(\theta)$.

Considere o campo magnético $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, no qual $\mathbf{x} = (x, y)$, rotacionado de um ângulo θ. Neste caso, o ponto $\mathbf{x}$ será dado pelo seguinte:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = R\cdot\mathbf{f}(R'\cdot\mathbf{x}) \tag{2}$$

Dúvida: se for deslocar o centro do campo magnético, devo fazer isso antes ou depois de rotacionar? Se $\mathbf{f}$ *não é linear, fará diferença.*

2 Eletromagnetismo

Esta é a hora na qual as equações do eletromagnetismo serão introduzidas neste projeto. Até a última seção, a força utilizada era nula. A partir deste momento, iniciar-se-á um estudo matemático do comportamento de um fluido magnético na presença de um campo magnético. Iniciaremos com algoritmos básicos e não tão precisos e após isso iremos melhorar nosso ferramental.

2.1 Equações Básicas

Primeiramente, temos a equação do campo magnético e de seu divergente. O fato do divergente ser 0 indica que o campo é solenoidal, isto é, todas as linhas de campo magnético que saem, tem de voltar à superfície.

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{M} + \mathbf{H}) \tag{3}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{4}$$

A consequência das equações acima é que

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = -\nabla \cdot \mathbf{M} \tag{5}$$

No caso de nosso estudo, temos um caso magnetostático, o que implica que:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \tag{6}$$

Lembre-se que $\mathbf{H}$ é o fluxo elétrico. Como este campo é irrotacional, temos que $\mathbf{H}$ é um campo potencial:

$$\mathbf{H} = -\nabla\phi \tag{7}$$

A partir das Equações 5 e 7, tem-se:

$$\nabla^2\phi = \nabla \cdot \mathbf{M} \tag{8}$$

Equação do Campo Magnético

2.2 Escolha do Campo Aplicado

2.2.1 Atualmente

Campo aplicado de um fio infinito conforme [2]:

$$\overline{H}_x = \frac{\gamma}{2\pi}\frac{\overline{y} - \overline{b}}{(\overline{x} - \overline{a})^2 + (\overline{y} - \overline{b})^2}, \tag{9}$$
$$\overline{H}_y = -\frac{\gamma}{2\pi}\frac{\overline{x} - \overline{b}}{(\overline{x} - \overline{a})^2 + (\overline{y} - \overline{b})^2}. \tag{10}$$

As equações que acabaram de ser apresentadas são dimensionais. Elas são tornadas adimensionais utilizando os termos: comprimento característico, L; e escala de campo magnético H_0. Para $\overline{H}_x$, tem-se

$$H_x \cdot H_0 = \frac{\gamma}{2\pi}\frac{y \cdot L - b \cdot L}{(x \cdot L - a \cdot L)^2 + (y \cdot L - b \cdot L)^2} \tag{11}$$

que resulta em

$$H_x = \frac{1}{2\pi}\frac{\gamma}{LH_0}\frac{y - b}{(x - a)^2 + (y - b)^2} \tag{12}$$

2.2.2 Posteriormente

Para definir o campo aplicado $\mathbf{H}$, nos basearemos no trabalho de McCaig e Clegg [?]. O livro citado apresenta uma fórmula que condiz com a realidade muito bem. O campo magnético na horizontal, H_x, é apresentado na Equação

$$H_x = \frac{B_\mathrm{r}}{\pi\mu_\mathrm{m}}\left[\tan^{-1}\left(\frac{ab}{x(a^2+b^2+x^2)^{1/2}}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{ab}{(x+L_0)(a^2+b^2+(x+L_0)^2)^{1/2}}\right)\right] \tag{13}$$

O valor x é a distância perpendicular do centro de um pólo do ímã até um ponto. É desejado que se saiba o vetor campo aplicado - um campo não horizontal - quando o ímã estiver com inclinação θ em relação ao horizonte e seu centro estiver numa posição (x_0, y_0) em relação à origem. Considerando isto, chegamos na seguinte formulação:

$$\begin{aligned} d &= (x-x_0)\cos\theta + (y-y_0)\sin\theta && (14)\\ \mathbf{H}\cdot\mathbf{i} &= H_d\cos\theta && (15)\\ \mathbf{H}\cdot\mathbf{j} &= H_d\sin\theta && (16)\\ & && (17) \end{aligned}$$

2.3 Evolução do campo magnético

Masao [1] cita Shliomis (cheguei a achar o artigo, mas era muito esquisito...) e mostra uma equação constitutiva para a evolução do campo magnético

$$\frac{\partial\mathbf{M}^*}{\partial t^*} = -\frac{1}{\tau}[\mathbf{M}^* - \mathbf{M}_0^*] + \frac{1}{\zeta}[(\mathbf{M}^*\times\mathbf{H}^*)\times\mathbf{M}^*] + \mathbf{\Omega}^*\times\mathbf{M}^*, \tag{18}$$

na qual $\mathbf{\Omega}^* = \frac{1}{2}\nabla\times\mathbf{v}^*$ (qual a referência para isso? acho que Yuri não me mostrou). Nesta equação: Ω^* é a velocidade angular macroscópica do fluido; τ é o tempo de relaxação rotacional de movimento Browniano; Todos os termos tem astericos indicando que são unidades dimensionais.

2.3.1 Adimensionalizar

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathbf{M}H_0}{\partial t(L/U)} &= -\frac{H_0}{\tau}[\mathbf{M}-\mathbf{M}_0] + \frac{H_0^3}{\zeta}[(\mathbf{M}\times\mathbf{H})\times\mathbf{M}] + \frac{H_0U}{2L}(\nabla\times\mathbf{v})\times\mathbf{M} && (19)\\ \frac{\partial\mathbf{M}}{\partial t} &= \frac{L}{UH_0}\left(-\frac{H_0}{\tau}[\mathbf{M}-\mathbf{M}_0] + \frac{H_0^3}{\zeta}[(\mathbf{M}\times\mathbf{H})\times\mathbf{M}] + \frac{H_0U}{2L}(\nabla\times\mathbf{v})\times\mathbf{M}\right) \\ &= -\frac{L}{\tau U}[\mathbf{M}-\mathbf{M}_0] + \frac{LH_0^2}{U\zeta}[(\mathbf{M}\times\mathbf{H})\times\mathbf{M}] + \frac{1}{2}(\nabla\times\mathbf{v})\times\mathbf{M} && (20) \end{aligned}$$

2.3.2 Expansão

Primeiro, note que

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}. \tag{21}$$

No caso $\mathbf{M} = (M_x, M_y, 0)$ e $\mathbf{H} = (H_x, H_y, 0)$, daí:

$$\mathbf{M} \times \mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ M_x & M_y & 0 \\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix} = (M_x H_y - M_y H_x)\mathbf{k} \tag{22}$$

assim

$$(\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & (M_x H_y - M_y H_x) \\ M_x & M_y & 0 \end{vmatrix} \tag{23}$$

$$= -M_y(M_x H_y - M_y H_x)\mathbf{i} + M_x(M_x H_y - M_y H_x)\mathbf{j} \tag{24}$$

O rotacional de $\mathbf{v} = (u, v, 0)$ é dado por

$$\nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{k} \tag{25}$$

e daí

$$(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ M_x & M_y & 0 \end{vmatrix} \tag{26}$$

$$= -M_y\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{i} + M_x\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathbf{j} \tag{27}$$

Pode-se definir as constantes

$$c_1 = \frac{L}{\tau U} \tag{28}$$

$$c_2 = \frac{L H_0^2}{U\zeta} \tag{29}$$

Desta maneira:

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} = -c_1[M_x - M_{x0}] - c_2 M_y(M_x H_y - M_y H_x) - \frac{1}{2} M_y\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{30}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} = -c_1[M_y - M_{y0}] + c_2 M_x(M_x H_y - M_y H_x) + \frac{1}{2} M_x\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{31}$$

2.3.3 Discretização em x

A discretização temporal é simples:

$$\frac{\partial M_{x,ij}}{\partial t} = \frac{M_{x,ij}^{n+1} - M_{x,ij}^{n}}{\Delta t} \tag{32}$$

M e **H** estão dispostos na malha escalonada de maneira similar à velocidade. Assim, é importante tomar cuidado para que o resultado esteja no ponto correto. No ponto ij para direção x, tem-se

$$\begin{aligned} M_xH_y - M_yH_x &= M_{x,ij}\frac{H_{y,ij}+H_{y,ij+1}+H_{y,i-1j}+H_{y,i-1j+1}}{4} && (33)\\ &- \frac{M_{y,ij}+M_{y,ij+1}+M_{y,i-1j}+M_{y,i-1j+1}}{4}H_x && (34)\\ &= M_{x,ij}H^t_{y,ij} - M^t_{y,ij}H_{x,ij} && (35)\end{aligned}$$

O sobrescrito t indica a média realizada para que os cálculos se refiram ao mesmo ponto físico. Por simplificação e concisão, será utilizado isso daqui em diante. Também na direção x e no ponto ij, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\frac{v_{ij}+v_{ij+1}}{2} - \frac{v_{i-1j}+v_{i-1j+1}}{2}}{\Delta x} && (36)\\ &= \frac{v_{ij}+v_{ij+1}}{2\Delta x} - \frac{v_{i-1j}+v_{i-1j+1}}{2\Delta x} && (37)\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{u_{ij+1}-u_{ij-1}}{2\Delta x} && (38)\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned} M^{n+1}_{x,ij} &= M^n_{x,ij} - c_1\Delta t[M_{x,ij} - M_{x0,ij}] - c_2\Delta t M^t_{y,ij}(M_{x,ij}H^t_{y,ij} - M^t_{y,ij}H_{x,ij})\\ &- \frac{1}{2}\Delta t M^t_{y,ij}\left(\frac{v_{ij}+v_{ij+1}}{2\Delta x} - \frac{v_{i-1j}+v_{i-1j+1}}{2\Delta x} - \frac{u_{ij+1}-u_{ij-1}}{2\Delta x}\right) && (39)\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} M^{n+1}_{x,ij} = M^n_{x,ij} &- c_1\Delta t[M_{x,ij} - M_{x0,ij}] - c_2\Delta t M^t_{y,ij}(M_{x,ij}H^t_{y,ij} - M^t_{y,ij}H_{x,ij})\\ &- \frac{\Delta t M^t_{y,ij}}{4\Delta x}\left(\frac{v_{ij}+v_{ij+1}}{1} - \frac{v_{i-1j}+v_{i-1j+1}}{1} - \frac{u_{ij+1}-u_{ij-1}}{1}\right) && (40)\end{aligned}$$

2.3.4 Discretização em y

A discretização temporal é simples:

$$\frac{\partial M_{y,ij}}{\partial t} = \frac{M^{n+1}_{y,ij} - M^n_{y,ij}}{\Delta t} \qquad (41)$$

M e **H** estão dispostos na malha escalonada de maneira similar à velocidade. Assim, é importante tomar cuidado para que o resultado esteja no ponto correto. No ponto ij para direção y, tem-se

$$M_xH_y - M_yH_x = M^t_{x,ij}H_{y,ij} - M_{y,ij}H^t_{x,ij} \qquad (42)$$

Também na direção y e no ponto ij, tem-se:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{v_{i+1j} - v_{i-1j}}{2\Delta x} && (43)\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\frac{u_{ij}+u_{i+1j}}{2} - \frac{u_{ij-1}+u_{i+1j-1}}{2}}{\Delta x} && (44)\\
&= \frac{u_{ij} + u_{i+1j}}{2\Delta x} - \frac{u_{ij-1} + u_{i+1j-1}}{2\Delta x} && (45)
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\begin{aligned}
M_{y,ij}^{n+1} &= M_{y,ij}^{n} - c_1\Delta t[M_{y,ij} - M_{y0,ij}] + c_2\Delta t M_{x,ij}^{t}(M_{x,ij}^{t} H_{y,ij} - M_{y,ij} H_{x,ij}^{t})\\
&+ \frac{1}{2}\Delta t M_{x,ij}^{t}\left(\frac{v_{i+1j} - v_{i-1j}}{2\Delta x} - \frac{u_{ij} + u_{i+1j}}{2\Delta x} + \frac{u_{ij-1} + u_{i+1j-1}}{2\Delta x}\right) && (46)
\end{aligned}
$$

2.4 Relação entre Magnetismo e Força

A relação entre força e o campo magnético é dada pelas equações abaixo: (força de Kelvin)

$$
\mathbf{f} = \mu_0\left(\mathbf{M}\cdot\nabla\mathbf{H} + \frac{1}{2}\nabla\times(\mathbf{M}\times\mathbf{H})\right) \tag{47}
$$

Caso dimensional

$$
\mathbf{f} = \mathrm{C_{pm}}\left(\mathbf{M}\cdot\nabla\mathbf{H} + \frac{1}{2}\nabla\times(\mathbf{M}\times\mathbf{H})\right) \tag{48}
$$

Caso adimensional

$$
\mathrm{C_{pm}} = \frac{\mu_0 H_0^2}{\rho U^2} \tag{49}
$$

Coeficiente de pressão magnética

Na Equação 48, $\mathbf{M} = (M_x, M_y, 0)$, $\mathbf{H} = (H_x, H_y, 0)$ e

$$
\mathbf{M}\times\mathbf{H} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ M_x & M_y & 0\\ H_x & H_y & 0 \end{vmatrix} = (M_xH_y - M_yH_x)\mathbf{k}. \tag{50}
$$

Observe que $\mathbf{M}$ e $\mathbf{H}$ considerados aqui são vetores que estão em um plano e não dependem da componente z, logo, a derivada parcial nessa dimensão é nula. Assim, tem-se que

$$
\begin{aligned}
\nabla\times(\mathbf{M}\times\mathbf{H}) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & 0 & (M_xH_y - M_yH_x) \end{vmatrix}\\
&= \frac{\partial}{\partial y}(M_xH_y - M_yH_x)\mathbf{i} - \frac{\partial}{\partial x}(M_xH_y - M_yH_x)\mathbf{j} && (51)
\end{aligned}
$$

Desta forma, cada componente da força toma a seguinte forma:

$$f_x = \mathrm{C_{pm}}\left[M_x\frac{\partial H_x}{\partial x} + M_y\frac{\partial H_x}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(M_xH_y - M_yH_x)\right] \tag{52}$$

$$f_y = \mathrm{C_{pm}}\left[M_x\frac{\partial H_y}{\partial x} + M_y\frac{\partial H_y}{\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(M_xH_y - M_yH_x)\right] \tag{53}$$

A pesquisa se centra no M, que depende do campo magnético, da velocidade do escoamento e do material. Na malha escalonada, **H**, **M** e **f** serão localizados da mesma forma que a velocidade **v**. Desta forma, a discretização para f_x se torna:

$$\begin{aligned} f_{x,ij} = \mathrm{C_{pm}}\Bigg[&M_{x,ij}\frac{H_{x,i+1j} - H_{x,i-1j}}{2\Delta x} + M^t_{y,ij}\frac{H_{x,ij+1} - H_{x,ij-1}}{2\Delta x} \\ &+ \frac{1}{2}\frac{M_{x,ij+1}H^t_{y,ij+1} - M^t_{y,ij+1}H_{x,ij+1} - M_{x,ij-1}H^t_{y,ij-1} + M^t_{y,ij-1}H_{x,ij-1}}{2\Delta x}\Bigg] \end{aligned} \tag{54}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f_{x,ij} = \frac{\mathrm{C_{pm}}}{2\Delta x}\Big[&M_{x,ij}(H_{x,i+1j} - H_{x,i-1j}) + M^t_{y,ij}(H_{x,ij+1} - H_{x,ij-1}) \\ &+ \tfrac{1}{2}(M_{x,ij+1}H^t_{y,ij+1} - M^t_{y,ij+1}H_{x,ij+1} - M_{x,ij-1}H^t_{y,ij-1} + M^t_{y,ij-1}H_{x,ij-1})\Big] \end{aligned} \tag{55}$$

enquanto para f_y tem-se

$$\begin{aligned} f_{y,ij} = \mathrm{C_{pm}}\Bigg[&M^t_{x,ij}\frac{H_{y,i+1j} - H_{y,i-1j}}{2\Delta x} + M_{y,ij}\frac{H_{y,ij+1} - H_{y,ij-1}}{2\Delta x} \\ &- \frac{1}{2}\frac{M^t_{x,ij+1}H_{y,ij+1} - M_{y,ij+1}H^t_{x,ij+1} - M^t_{x,ij-1}H_{y,ij-1} + M_{y,ij-1}H^t_{x,ij-1}}{2\Delta x}\Bigg] \end{aligned} \tag{56}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} f_{y,ij} = \frac{\mathrm{C_{pm}}}{2\Delta x}\Big[&M^t_{x,ij}(H_{y,i+1j} - H_{y,i-1j}) + M_{y,ij}(H_{y,ij+1} - H_{y,ij-1}) \\ &- \tfrac{1}{2}(M^t_{x,ij+1}H_{y,ij+1} - M_{y,ij+1}H^t_{x,ij+1} - M^t_{x,ij-1}H_{y,ij-1} + M_{y,ij-1}H^t_{x,ij-1})\Big] \end{aligned} \tag{57}$$

2.5 Condições de Contorno

A componente normal de **B** deve ser contínua através da interface entre o meio de fora (ar) e o de dentro (fluido magnético). Isto é

$$(\mathbf{B}_\mathrm{f} - \mathbf{B}_\mathrm{d}) \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{58}$$

Assim

$$\mu_0(H^\mathrm{n}_\mathrm{f} + M^\mathrm{n}_\mathrm{f}) = \mu_0(H^\mathrm{n}_\mathrm{d} + M^\mathrm{n}_\mathrm{d}) \tag{59}$$

O meio de fora é o ar, logo, a magnetização M_f é zero. Sabe-se que $H = -\nabla\phi$, assim

$$\nabla\phi^\mathrm{n}_\mathrm{d} = -H^\mathrm{n}_\mathrm{f} + M^\mathrm{n}_\mathrm{d} \tag{60}$$

Desta forma

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{\text{left}} \approx -H^x_{2,j} + M^x_{2,j} \tag{61}$$

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{\text{right}} \approx -H^x_{n,j} + M^x_{n,j} \tag{62}$$

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_{\text{lower}} \approx -H^y_{i,2} + M^y_{i,2} \tag{63}$$

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_{\text{upper}} \approx -H^y_{i,n} + M^y_{i,n} \tag{64}$$

3 Shliomis

3.1 Primeiro passo

Inicia-se somente com o termo que $\mathbf{M} - \mathbf{M}_0$ nas Equações 40 e 46, resultando em

$$M^{n+1}_{x,ij} = M^n_{x,ij} - c_1\Delta t[M_{x,ij} - M_{x_0,ij}] \tag{65}$$

$$M^{n+1}_{y,ij} = M^n_{y,ij} - c_1\Delta t[M_{y,ij} - M_{y_0,ij}], \tag{66}$$

nas quais $\mathbf{M}_0$ é dado por

$$\mathbf{M}_0 = M_S L(\alpha|\mathbf{H}|)\hat{\mathrm{e}}_H \tag{67}$$

sendo M_S uma constante, $L(x) = \coth(x) - \frac{1}{x}$ a função de Langevin, α um parâmetro e $\hat{\mathrm{e}}_H$ um vetor unitário na direção campo $\mathbf{H}_{\text{aplicado}}$. Para o vetor unitário, tem-se:

$$\hat{\mathrm{e}}_H = \frac{\mathbf{H}}{|\mathbf{H}|} = \frac{1}{|\mathbf{H}|}\left(H_x\mathbf{i} + H_y\mathbf{j}\right). \tag{68}$$

Assim, para a direção horizontal, tem-se

$$M_{x_0,ij} = \left(\coth\alpha|\mathbf{H}| - \frac{1}{\alpha|\mathbf{H}|}\right)\left.\frac{H_x}{|\mathbf{H}|}\right|_{x=(i-1)\Delta x, y=(j-1)\Delta x+\Delta x/2}, \tag{69}$$

enquanto para a direção vertical tem-se

$$M_{y_0,ij} = \left(\coth\alpha|\mathbf{H}| - \frac{1}{\alpha|\mathbf{H}|}\right)\frac{H_y}{|\mathbf{H}|}. \tag{70}$$

Referências

[1] J. P. Shen and Masao Doi. Effective viscosity of magnetic fluids. *Journal of the Physical Society of Japan*, 59(1):111–117, 1990.

[2] E.E. Tzirtzilakis and M.A. Xenos. Biomagnetic fluid flow in a driven cavity. *Meccanica*, 48(1):187–200, 2013.