Solução Numérica da Equação de Navier Stokes

Orientador: *Yuri Dumaresq Sobral*

Ataias Pereira Reis

1 Introdução

A equação de Navier Stokes é apresentada abaixo, essa é a equação que governa a dinâmica dos fluidos.

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{f} \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \tag{2}$$

Neste trabalho consideraremos um campo vetorial de duas dimensões. A equação de Navier Stokes é altamente não-linear. Isso ocorre devido ao termo de convecção (aceleração independente do tempo, $\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}$) e o termo da pressão ∇p.

A abordagem para se obter uma solução para a equação dos fluidos é de seguir o método de Chorin[1] com malha escalonada. Para cada passo de tempo, há 3 etapas a serem realizadas. Será utilizado *time-splitting* de forma a se desacoplar a pressão da velocidade, ambas incógnitas.

O que deve ser definido antes de se resolver tal equação são os parâmetros do fluido, μ e ρ (massa específica), a força externa $\mathbf{f}$ e as condições de fronteira. Nosso interesse inicial é resolver o problema da cavidade num quadradro de lado igual a 1 numa malha de n pontos.

A seguir será feita uma introdução do que vem a ser *time-splitting*, de forma a se compreender este trabalho.

1.1 Time-splitting

A primeira etapa neste método de resolução é o *time-splitting*. A discretização no tempo tem duas etapas. Para se entender isso, começamos com a equação abaixo:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \approx \frac{\mathbf{v}^{n+1}-\mathbf{v}^n}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}^{n+1}-\mathbf{v}^*}{\Delta t} + \frac{\mathbf{v}^*-\mathbf{v}^n}{\Delta t} \tag{3}$$

A ideia do *time-splitting* é responsabilizar cada um dos termos do lado direito desta equação com uma parte da equação de Navier-Stokes.
Reescrevendo a equação de Navier-Stokes:

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1}-\mathbf{v}^*}{\Delta t} + \frac{\mathbf{v}^*-\mathbf{v}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{v} + \frac{\mathbf{f}}{\rho} - \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}$$

Agora, é possível impor o seguinte:

$$\frac{\mathbf{v}^*-\mathbf{v}^n}{\Delta t} = \nu\nabla^2\mathbf{v} + \frac{\mathbf{f}}{\rho} - \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} \tag{4}$$

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1}-\mathbf{v}^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{5}$$

A equação 4 pode ser discretizada e então obtemos $\mathbf{v}^*$. A equação 5, por sua vez, não pode ser diretamente discretizada e resolvida pois não se sabe $\mathbf{v}^{n+1}$. No entanto, se o gradiente da equação for obtido, tem-se:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^*}{\Delta t} \right) &= \nabla \cdot \frac{\mathbf{v}^{n+1}}{\Delta t} - \nabla \cdot \frac{\mathbf{v}^*}{\Delta t} \\ &= -\frac{1}{\rho} \nabla^2 p \end{aligned}$$

A equação da continuidade $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ tem de valer para $\mathbf{v}^{n+1}$, logo:

$$\nabla^2 p = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{v}^* \tag{6}$$

Nos próximos passos, iremos (1) resolver para o tempo "*", que seria o intermediário entre n e $n+1$, (2) obter a pressão (3) obter $n+1$.

2 Física

Antes de iniciar-se a resolução numérica da equação de Navier Stokes, seja qual for o método escolhido, é necessário ter em mente que certas condições físicas devem ser satisfeitas de modo a se ter um resultado que convirja numericamente. As restrições irão determinar quais os mínimos/máximos de Δt e Δx. Nesta seção veremos as condições de difusão estável, advecção (ou transporte) estável e camada limite hidrodinâmica.

Além de restrições físicas, iremos também introduzir o número de Reynolds: Re. Este é um número adimensional no qual se escolhe uma velocidade e tamanho característicos para o problema em questão. O número de Reynolds é dado por:

$$Re = \frac{\rho L U}{\mu} \tag{7}$$

Neste trabalho, tem-se um quadrado de lado 1. Seja então $L = 1$ o tamanho característico e $U = 1$ a velocidade característica. Ainda, escolha $\rho = 1$. Desta forma:

$$Re = \frac{1}{\mu} \tag{8}$$

As equações de Navier Stokes são discretizadas adiante com ρ e μ. Utilizaremos o número de Reynolds por meio da técnica mostrada aqui e variar-se-á somente μ para influenciar as características do escoamento.

2.1 Difusão Estável

$$\Delta t < \frac{1}{4} \frac{\Delta x^2}{Re} \tag{9}$$

2.2 Advecção Estável

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{U} \tag{10}$$

2.3 Camada Limite Hidrodinâmica

O que é essa camada mesmo?

$$\begin{aligned} Re_{\Delta x} &= \frac{\rho U \Delta x}{\mu} < 1 \\ Re_{\Delta x} &= \frac{\rho U \Delta x}{\mu} \frac{L}{L} \\ &= \frac{\rho U L}{\mu} \frac{\Delta x}{L} = Re \cdot \lambda < 1 \end{aligned}$$

Assim

$$\lambda < \frac{1}{Re} \tag{11}$$

3 Resolução Numérica

3.1 Desconsiderando a pressão

Numericamente, O primeiro passo é resolver a equação 4, que não leva em conta a pressão. Nas equações abaixo foi realizada a discretização da equação com essa simplificação. A parte direita de cada equação é avaliada no tempo passado, enquanto a parte da esquerda é avaliada para o próximo passo de tempo que deve ser obtido.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^s_{ij} &= (u^n_{i+1j} + u^n_{i-1j} + u^n_{ij+1} + u^n_{ij-1})\mathbf{i} \\ &+ (v^n_{i+1j} + v^n_{i-1j} + v^n_{ij+1} + v^n_{ij-1})\mathbf{j} \qquad (12) \\ \mathbf{v}^t_{ij} &= 0.25(u^n_{ij} + u^n_{i+1j} + u^n_{i+1j-1} + u^n_{ij-1})\mathbf{i} \\ &+ 0.25(v^n_{ij} + v^n_{i-1j} + v^n_{i-1j+1} + v^n_{ij+1})\mathbf{j} \qquad (13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^*_{ij} &= u^n_{ij} + \frac{\Delta t}{\rho}\left[\mu\left(\frac{u^s_{ij} - 4u^n_{ij}}{\Delta x^2}\right) + Fx^n_{ij}\right] + \\ &- \left[u^n_{ij}(u^n_{i+1j} - u^n_{i-1j}) + v^t_{ij}(u^n_{ij+1} - u^n_{ij-1})\right]\frac{\Delta t}{2\Delta x} \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} v^*_{ij} &= v_{ij} + \frac{\Delta t}{\rho}\left[\mu\left(\frac{v^s_{ij} - 4v^n_{ij}}{\Delta x^2}\right) + Fy^n_{ij}\right] \\ &- \left[u^t_{ij}(v^n_{i+1j} - v^n_{i-1j}) + v^n_{ij}(v^n_{ij+1} - v^n_{ij-1})\right]\frac{\Delta t}{2\Delta x} \end{aligned} \tag{15}$$

Note que as equações acima são só válidas para pontos internos à malha escalonada. Os pontos de fronteira serão obtidos por equações diferentes, porém, na etapa 3.

Com isto, tem-se

$$\mathbf{v}^* = (u^*, v^*)$$

3.2 Obter a pressão

É necessário calcular uma pressão que satisfaça nossa equação. É possível obter uma nova equação, somente para a pressão, aplicando-se o operador divergente na equação de Navier Stokes, de forma a obter-se o seguinte:

$$\nabla^2 p = \frac{\rho}{\Delta t}\nabla \cdot \mathbf{v}^* = \frac{\rho}{\Delta t}\left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y}\right) \tag{16}$$

Para cada ponto ij da malha, pode-se calcular a não-homogeneidade apresentada na direita da Equação 16:

$$DIV_{ij} = \frac{\rho}{\Delta t}\left(\frac{u^*_{i+1j} - u^*_{ij}}{\Delta x} + \frac{v^*_{ij+1} - v^*_{ij}}{\Delta x}\right) \tag{17}$$

A equação 16 é uma equação de Poisson. Para pontos internos à malha, tem-se:

$$p_{ij} = \frac{1}{4}[(p_{i+1j} + p_{i-1j} + p_{ij+1} + p_{ij-1}) - \Delta x^2 DIV_{ij}] \tag{18}$$

O que acontece com as condições de fronteira? É necessário que sejam obtidas. Considere novamente a equação de Navier Stokes:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{f}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Destrinchando a equação para duas coordenadas, tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}\right) + f_x \tag{19}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y}\right) + f_y \tag{20}$$

Se fizermos uma análise dos pontos na parede da esquerda ou direita, e aplicarmos as condições de impenetrabilidade e não-deslizamento, que dizem que $u = 0$ e $v = 0$ na parede, temos a simplificação da equação, pois vários termos se tornam zero. As Equações 21 e 22 são as condições de fronteira, tipo Neumann, para as paredes verticais e horizontais, respectivamente.

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{\text{parede}} = \rho\nu\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\text{parede}} + \rho f_x \tag{21}$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_{\text{parede}} = \rho\nu\left.\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|_{\text{parede}} + \rho f_y \tag{22}$$

O próximo passo é reescrever as Equações 21 e 22 com diferenças finitas.

Equações discretizadas para fronteira de Poisson As equações, em sequência, para as fronteiras da esquerda, direita, baixo e topo da matriz são as seguintes:

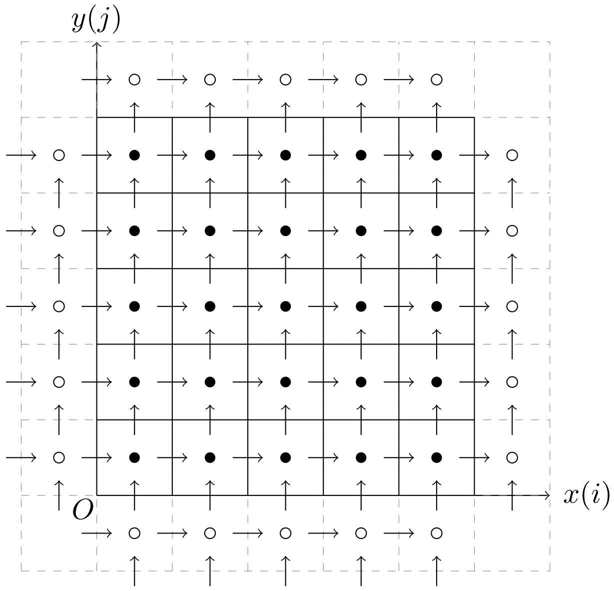
$$\frac{p_{0j} - p_{-1j}}{\Delta x} = \frac{\mu}{\Delta x^2}(2u_{ij} - 5u_{i+1j} + 4u_{i+2j} - u_{i+3j}) + \frac{\rho}{2}(f_{x,ij} + f_{x,i+1j}) \tag{23}$$

$$\frac{p_{nj} - p_{n-1j}}{\Delta x} = \frac{\mu}{\Delta x^2}(2u_{ij} - 5u_{i-1j} + 4u_{i-2j} - u_{i-3j}) + \frac{\rho}{2}(f_{x,ij} + f_{x,i-1j}) \tag{24}$$

$$\frac{p_{i0} - p_{i-1}}{\Delta y} = \frac{\mu}{\Delta y^2}(2v_{ij} - 5v_{ij+1} + 4v_{ij+2} - v_{ij+3}) + \frac{\rho}{2}(f_{y,ij} + f_{y,ij+1}) \tag{25}$$

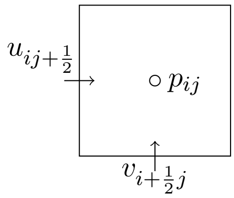
$$\frac{p_{in} - p_{in-1}}{\Delta y} = \frac{\mu}{\Delta y^2}(2v_{ij} - 5v_{ij-1} + 4v_{ij-2} - v_{ij-3}) + \frac{\rho}{2}(f_{y,ij} + f_{y,ij-1}) \tag{26}$$

Agora, tem-se as equações que serão utilizadas no domínio em questão, na malha escalonada, para resolver a equação da pressão em Navier Stokes. Abaixo tem-se o nosso domínio.

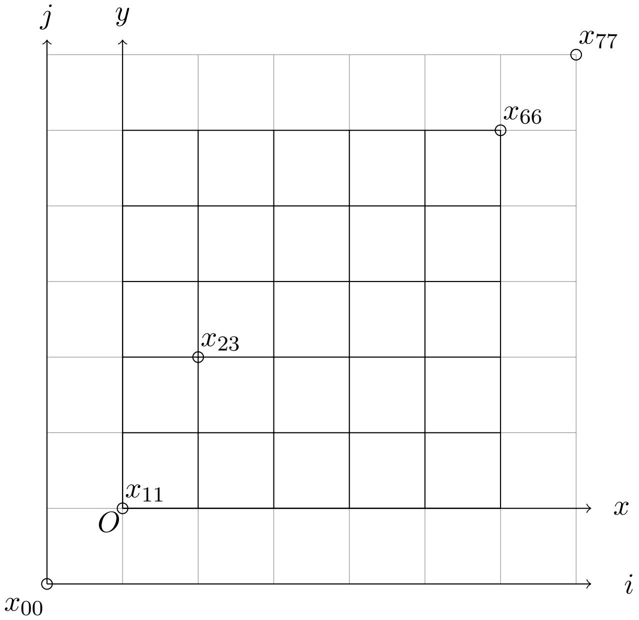


Cada um dos pontos pretos são pontos internos, e nestes pontos precisamos saber os valores das derivadas, de forma a obter a matriz DIV, para então utilizar na resolução da equação de Navier, que estamos originalmente interessados. Com a malha extendida, com a fronteira imaginária adicionada, ela fica no "ponto" para obter o gradiente de pressão usando derivadas centrais em cada um dos pontos, agora internos, da nossa malha extendida. As setas verticais indicam as velocidades horizontais, enquanto as setas verticais indicas velocidades verticais.

O modelo de cada bloco é o seguinte:



Para a representação no computador, somente com índices positivos, tem-se de mudar o local da origem, e fica-se com o seguinte esquema:



As coordenadas dos pontos acima, onde os pontos são x_{ij}, são diferentes do original mencionado antes com uma malha escalonada com índices negativos, e as equações ficam com os termos de uma forma um pouco diferente. Em relação ao tamanho da matriz, note que para uma malha de ordem 6 como acima, a malha escalonada ficou de ordem 8. Logo, há um aumento da ordem da matriz por uma adição de 2 ordens.

Reescrevendo as equação de 23 até 26, e considerando n a ordem da matriz, temos:

$$\begin{aligned}
i = 1 \,|\, p_{i-1j} &= p_{ij} - \frac{\mu}{\Delta x}(2u_{ij} - 5u_{i+1j} + 4u_{i+2j} - u_{i+3j}) - \frac{\rho \Delta x}{2}(f_{x,ij} + f_{x,i+1j}) && (27) \\
i = n \,|\, p_{i+1j} &= p_{ij} + \frac{\mu}{\Delta x}(2u_{ij} - 5u_{i-1j} + 4u_{i-2j} - u_{i-3j}) + \frac{\rho \Delta x}{2}(f_{x,ij} + f_{x,i-1j}) && (28) \\
j = 1 \,|\, p_{ij-1} &= p_{ij} - \frac{\mu}{\Delta x}(2v_{ij} - 5v_{ij+1} + 4u_{ij+2} - u_{ij+3}) - \frac{\rho \Delta x}{2}(f_{y,ij} + f_{y,ij+1}) && (29) \\
j = n \,|\, p_{ij+1} &= p_{ij} + \frac{\mu}{\Delta x}(2v_{ij} - 5v_{ij-1} + 4u_{ij-2} - u_{ij-3}) + \frac{\rho \Delta x}{2}(f_{y,ij} + f_{y,ij-1}) && (30)
\end{aligned}$$

3.3 Resolver para o passo $t + \Delta t$

Finalmente, tem-se:

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{31}$$

Expandindo para as equações escalares, tem-se:

$$u^{n+1} = u^* - \frac{\Delta t}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{32}$$

$$v^{n+1} = v^* - \frac{\Delta t}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{33}$$

Basta discretizar os termos das derivadas parciais agora:

$$p_{x,ij} = \frac{p_{ij} - p_{i-1j}}{\Delta x} \tag{34}$$
$$p_{y,ij} = \frac{p_{ij} - p_{ij-1}}{\Delta x} \tag{35}$$

E finalmente tem-se a solução para o tempo $n+1$ a partir do tempo passado n:

$$u^{n+1} = u^* - \frac{\Delta t}{\rho} p_x \tag{36}$$
$$v^{n+1} = v^* - \frac{\Delta t}{\rho} p_y \tag{37}$$

As equações acima são válidas para pontos internos. Para as fronteiras, considere a parede da esquerda da cavidade, onde a velocidade normal é 0. Como nossa malha é escalonada, este ponto não está salvo na matriz e uma média deve ser feita de modo a determinar o ponto da fronteira da malha. Neste caso, teria-se:

$$\frac{v_{i-\frac{1}{2}j} + v_{i+\frac{1}{2}j}}{2} = 0$$

o que leva a:

$$v_{i-\frac{1}{2}j} = -v_{i+\frac{1}{2}j} \tag{38}$$

De maneira similar, para as paredes de baixo e da direita, tem-se:

$$u_{ij-\frac{1}{2}} = -u_{ij+\frac{1}{2}} \tag{39}$$
$$v_{i+\frac{1}{2}j} = -v_{i-\frac{1}{2}j} \tag{40}$$

Para a parte de cima, onde a velocidade é diferente de zero, tem-se:

$$\frac{u_{ij+\frac{1}{2}} + u_{ij-\frac{1}{2}}}{2} = u_{Bi}$$

u_{Bi} é a condição de fronteira para o ponto na coluna i.
Retirando os índices fracionários:

$$v_{i-1j} = -v_{ij}, \text{ esquerda} \tag{41}$$
$$u_{ij-1} = -u_{ij}, \text{ embaixo} \tag{42}$$
$$v_{ij} = -v_{i-1j}, \text{ direita} \tag{43}$$
$$u_{ij} = 2u_{Bi} - u_{ij-1}, \text{ em cima} \tag{44}$$

fixando o índice de cada lado:

$$v_{0j} = -v_{1j}, \text{ esquerda} \tag{45}$$
$$u_{i0} = -u_{i1}, \text{ embaixo} \tag{46}$$
$$v_{n-1j} = -v_{n-2j}, \text{ direita} \tag{47}$$
$$u_{in-1} = 2u_{Bi} - u_{in-2}, \text{ em cima} \tag{48}$$

Referências

[1] Chorin A. J. Numerical solutions of the Navier-Stokes Equations. *AMS*, February 1968.