

Eletromagnetismo

Orientador: *Yuri Dumaresq Sobral*

Ataias Pereira Reis

1 Introdução

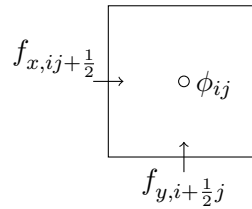
Este trabalho tem por objetivo o estudo dos fluidos magnéticos. Um algoritmo foi feito para resolver a equação de Navier Stokes em um quadrado unitário. Essa é a equação que governa a dinâmica dos fluidos.

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

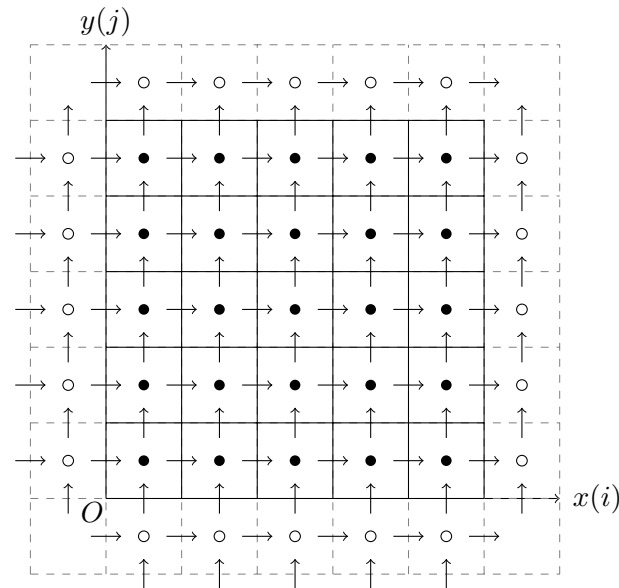
1.1 Malha escalonada

O algoritmo para resolver a hidrodinâmica foi feito considerando-se uma malha escalonada. Como o magnetismo será acoplado com esse algoritmo, é necessário também utilizar a malha escalonada. ϕ será localizada no centro da célula enquanto a força f e os campos H e B estarão normais à celula, como mostrado abaixo. A posição de H e B é a mesma que de f .



Uma representação de um domínio mais completo está na figura abaixo. Note que cada ponto preto no meio de um bloco é a pressão em ponto interno. Enquanto a pressão em pontos da fronteira imaginária são círculos com interior branco. Pontos na fronteira imaginária são utilizados nos cálculos, mas não precisam ser salvos no resultado final.

Se é definida, no computador, uma matriz $n \times n$, tem-se $\Delta x = \frac{1}{n-2}$. Os cálculos devem ser todos feitos com base neste Δx . Além disso, note que as velocidades da extrema esquerda e do extremo inferior não são utilizadas. Você pode declarar tais valores como Not a Number. Se seu programa utilizá-los, há algo errado.



1.2 Matriz de rotação

É útil ter um método de se rotacionar o campo magnético para se testar diferentes configurações do mesmo e analisar simetrias e assimetrias no nosso domínio. Como nosso problema é 2D, tem-se:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Esta é uma matriz de rotação, logo:

- $\det R(\theta) = 1$;
- $R^{-1}(\theta) = R^T(\theta)$.

Considere o campo magnético $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, no qual $\mathbf{x} = (x, y)$, rotacionado de um ângulo θ . Neste caso, o ponto \mathbf{x} será dado pelo seguinte:

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = R \cdot \mathbf{f}(R' \cdot \mathbf{x}) \quad (4)$$

Dúvida: se for deslocar o centro do campo magnético, devo fazer isso antes ou depois de rotacionar? Se \mathbf{f} não é linear, fará diferença.

2 Eletromagnetismo

Esta é a hora na qual as equações do eletromagnetismo serão introduzidas neste projeto. Até a última seção, a força utilizada era nula. A partir deste momento, iniciar-se-á um estudo matemático do comportamento de um fluido magnético na presença de um campo magnético. Iniciaremos com algoritmos básicos e não tão precisos e após isso iremos melhorar nosso ferramental.

2.1 Equações Básicas

Primeiramente, temos a equação do campo magnético e de seu divergente. O fato do divergente ser 0 indica que o campo é solenoidal, isto é, todas as linhas de campo magnético que saem, tem de voltar à superfície.

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{M} + \mathbf{H}) \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6)$$

A consequência das equações acima é que

$$\nabla \cdot \mathbf{M} = -\nabla \cdot \mathbf{H} \quad (7)$$

No caso de nosso estudo, temos um caso magnetostático, o que implica que:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (8)$$

Lembre-se que \mathbf{H} é o fluxo elétrico. Como este campo é irrotacional, temos que \mathbf{H} é um campo potencial:

$$\mathbf{H} = -\nabla\phi \quad (9)$$

A partir das Equações 7 e 9, tem-se:

$$\nabla^2\phi = \nabla \cdot \mathbf{M} \quad (10)$$

Equação do Campo Magnético

2.2 Relação entre Magnetismo e Força

A relação entre força e o campo magnético é dada pelas equações abaixo:

$$\mathbf{f} = \mu_0 \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} \quad (11)$$

Caso dimensional

$$\mathbf{f} = \text{Cpm} \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} \quad (12)$$

Caso adimensional

$$\text{Cpm} = \frac{\mu_0 H_0^2}{\rho u^2} \quad (13)$$

Coefficiente de permeabilidade magnética

Desta forma, cada componente da força toma a seguinte forma:

$$f_x = \text{Cpm} \left[M_x \cdot \frac{\partial H_x}{\partial x} + M_y \cdot \frac{\partial H_x}{\partial y} \right] \quad (14)$$

$$f_y = \text{Cpm} \left[M_x \cdot \frac{\partial H_y}{\partial x} + M_y \cdot \frac{\partial H_y}{\partial y} \right] \quad (15)$$

A pesquisa se centra no M , que depende do campo magnético, da velocidade do escoamento e do material. Na malha escalonada, \mathbf{H} e \mathbf{M} serão localizados da mesma forma que a velocidade \mathbf{v} .

2.3 Campo Aplicado

Para definir o campo aplicado \mathbf{H} , nos basearemos no trabalho de McCaig e Clegg [1]. O livro citado apresenta uma fórmula que condiz com a realidade muito bem. O campo magnético na horizontal, H_x , é apresentado na Equação

$$H_x = \frac{B_r}{\pi\mu_m} \left[\tan^{-1} \left(\frac{ab}{x(a^2 + b^2 + x^2)^{1/2}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{ab}{(x + L_0)(a^2 + b^2 + (x + L_0)^2)^{1/2}} \right) \right] \quad (16)$$

O valor x é a distância perpendicular do centro de um pólo do ímã até um ponto. É desejado que se saiba o vetor campo aplicado - um campo não horizontal - quando o ímã estiver com inclinação θ em relação ao horizonte e seu centro estiver numa posição (x_0, y_0) em relação à origem. Considerando isto, chegamos na seguinte formulação:

$$d = (x - x_0) \cos \theta + (y - y_0) \sin \theta \quad (17)$$

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{i} = H_d \cos \theta \quad (18)$$

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{j} = H_d \sin \theta \quad (19)$$

$$(20)$$

2.4 Condições de Contorno

A componente normal de \mathbf{B} deve ser contínua através da interface entre o meio de fora (ar) e o de dentro (fluido magnético). Isto é

$$(\mathbf{B}_f - \mathbf{B}_d) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (21)$$

Assim

$$\mu_0(H_f^n + M_f^n) = \mu_0(H_d^n + M_d^n) \quad (22)$$

O meio de fora é o ar, logo, a magnetização M_f é zero. Sabe-se que $H = -\nabla\phi$, assim

$$\nabla\phi_d^n = -H_f^n + M_d^n \quad (23)$$

Desta forma

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{\text{left}} \approx -H_{2,j}^x + M_{2,j}^x \quad (24)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{\text{right}} \approx -H_{n,j}^x + M_{n,j}^x \quad (25)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{\text{lower}} \approx -H_{i,2}^y + M_{i,2}^y \quad (26)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{\text{upper}} \approx -H_{i,n}^y + M_{i,n}^y \quad (27)$$

2.5 Procedimento

O procedimento para se resolver a Equação de Navier Stokes com o campo magnético, nas condições simples apresentadas, é:

1. Resolver equação do campo magnético, se for passo inicial: $\mathbf{M} = \mathbf{0}$
2. Calcular $\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}$ (lei simples)
3. Calcular força $\mathbf{f} = C_{pm} \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H}$
4. Resolver hidrodinâmica
5. Avançar no tempo e voltar ao passo 1

Referências

- [1] M. McCaig and A. G. Clegg. *Permanent Magnets in Theory and Practice*. Wiley, New York, 2nd edition, 1987.