Ferrofluidos

Orientador: *Yuri Dumaresq Sobral*

Ataias Pereira Reis

1 Poisson

O primeiro problema a ser solucionado é a equação de Poisson com condições de fronteira de Dirichlet. A equação de Poisson é uma equação diferencial parcial elíptica largamente utilizada em eletrostática, engenharia mecânica e física teórica [1].

1.1 Condições de Dirichlet

1.2 Condições de Neumann

2 Navier Stokes

Quer-se resolver a seguinte equação:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{f} \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \tag{2}$$

2.1 Resolução Numérica

2.1.1 Desconsiderando a pressão

Desconsiderando ∇p por agora, e notando que a parte da diferente é avaliada no tempo atual, não no futuro, tem-se:

$$\mathbf{v}^s_{ij} = (u_{i+1j} + u_{i-1j} + u_{ij+1} + u_{ij-1}, v_{i+1j} + v_{i-1j} + v_{ij+1} + v_{ij-1}) \tag{3}$$

$$\mathbf{v}^t_{ij} = \frac{1}{4}(u_{ij} + u_{i+1j} + u_{i+1j-1} + u_{ij-1}, v_{ij} + v_{i-1j} + v_{i-1j+1} + v_{ij+1}) \tag{4}$$

$$\begin{aligned} u^*_{ij} &= \left[\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{u^s_{ij} - 4u_{ij}}{\Delta x^2}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{f_{x,ij} + f_{x,i-1j}}{2}\right] + u_{ij} \\ &- \left[u_{ij}\frac{u_{i+1j} - u_{i-1j}}{2\Delta x} - v^t_{ij}\frac{u_{ij+1} - u_{ij-1}}{2\Delta x}\right]\Delta t \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} v^*_{ij} &= \left[\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{v^s_{ij} - 4v_{ij}}{\Delta x^2}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{f_{y,ij} + f_{y,ij-1}}{2}\right] + v_{ij} \\ &- \left[u^t_{ij}\frac{v_{i+1j} - v_{i-1j}}{2\Delta x} - v_{ij}\frac{v_{ij+1} - v_{ij-1}}{2\Delta x}\right]\Delta t \end{aligned} \tag{6}$$

Com isto, tem-se

$$\mathbf{v}^* = (u^*, v^*)$$

2.1.2 Obter a pressão

Tirando o divergente das equações vetoriais, tem-se a seguinte equação:

$$\nabla^2 p = \frac{\rho}{\Delta t}\nabla\cdot\mathbf{v}^* = \frac{\rho}{\Delta t}\left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y}\right) \tag{7}$$

Dado ter-se um sistema resolvendo a equação de poisson, basta-se calcular o termo da direita e colocar como não-homogeneidade.

$$DIV_{ij} = \frac{\rho}{\Delta t}\left(\frac{u^*_{i+1j} - u^*_{ij}}{\Delta x} + \frac{v^*_{ij+1} - v^*_{ij}}{\Delta x}\right) \tag{8}$$

As condições de contorno são todas de Neumann. Para pontos internos à malha, tem-se:

$$p_{ij} = \frac{1}{4}[(p_{i+1j} + p_{i-1j} + p_{ij+1} + p_{ij-1}) - \Delta x^2 DIV_{ij}] \tag{9}$$

Quais pontos são internos à malha? São os pontos x_{ij} em D que é definido da seguinte maneira:

$$D = \{x_{ij} \,|\, 0 \leq i < N \text{ e } 0 \leq j < N\} \tag{10}$$

A rotina para Poisson com Neumann já está implementada. Falta agora as condições de contorno nas fronteiras. Como obtê-las?

Primeiramente, considere-se novamente a equação de Navier Stokes:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{f}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0$$

Destrinchando a equação para duas coordenadas, tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}\right) + f_x \tag{11}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y}\right) + f_y \tag{12}$$

Se fizermos uma análise dos pontos na parede da esquerda ou direita, e aplicarmos as condições de impenetrabilidade e não-deslizamento, que dizem que $u = 0$ e $v = 0$ na parede, temos a simplificação da equação, pois vários termos se tornam zero. As equações para as duas paredes verticais é a seguinte:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{\text{parede}} = \rho\nu\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{\text{parede}} + \rho f_x \tag{13}$$

Para as paredes que ficam na horizontal tem-se:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial y}\right|_{\text{parede}} = \rho\nu\left.\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right|_{\text{parede}} + \rho f_y \tag{14}$$

Equações discretizadas para fronteira de Poisson As equações, em sequência, para as fronteiras da esquerda, direita, baixo e topo da matriz são as seguintes:

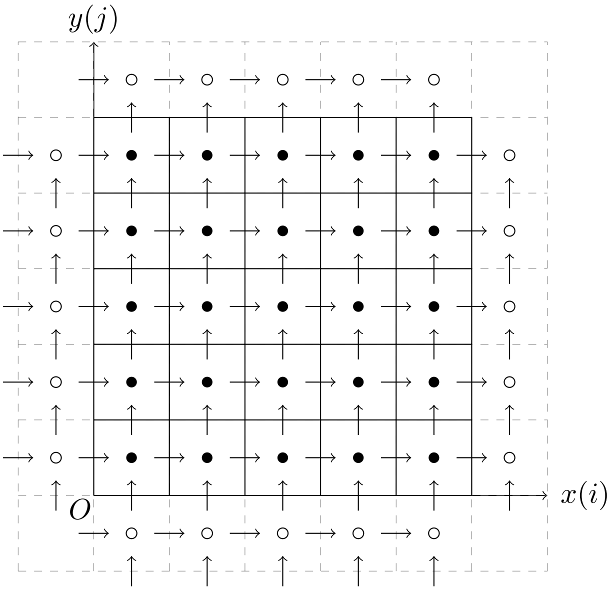
$$\frac{p_{0j} - p_{-1j}}{\Delta x} = \frac{\mu}{\Delta x^2}(2u_{ij} - 5u_{i+1j} + 4u_{i+2j} - u_{i+3j}) + \frac{\rho}{2}(f_{ij} + f_{i+1j}) \tag{15}$$

$$\frac{p_{nj} - p_{n-1j}}{\Delta x} = \frac{\mu}{\Delta x^2}(2u_{ij} - 5u_{i-1j} + 4u_{i-2j} - u_{i-3j}) + \frac{\rho}{2}(f_{ij} + f_{i-1j}) \tag{16}$$

$$\frac{p_{i0} - p_{i-1}}{\Delta y} = \frac{\mu}{\Delta y^2}(2v_{ij} - 5v_{ij+1} + 4v_{ij+2} - v_{ij+3}) + \frac{\rho}{2}(f_{ij} + f_{ij-1}) \tag{17}$$

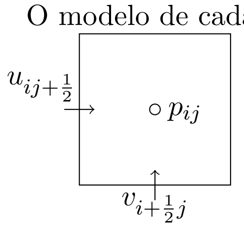
$$\frac{p_{in} - p_{in-1}}{\Delta y} = \frac{\mu}{\Delta y^2}(2v_{ij} - 5v_{ij-1} + 4v_{ij-2} - v_{ij-3}) + \frac{\rho}{2}(f_{ij} + f_{ij-1}) \tag{18}$$

Agora, tem-se as equações que serão utilizadas no domínio em questão, na malha escalonada, para resolver a equação da pressão em Navier Stokes. Abaixo tem-se o nosso domínio.

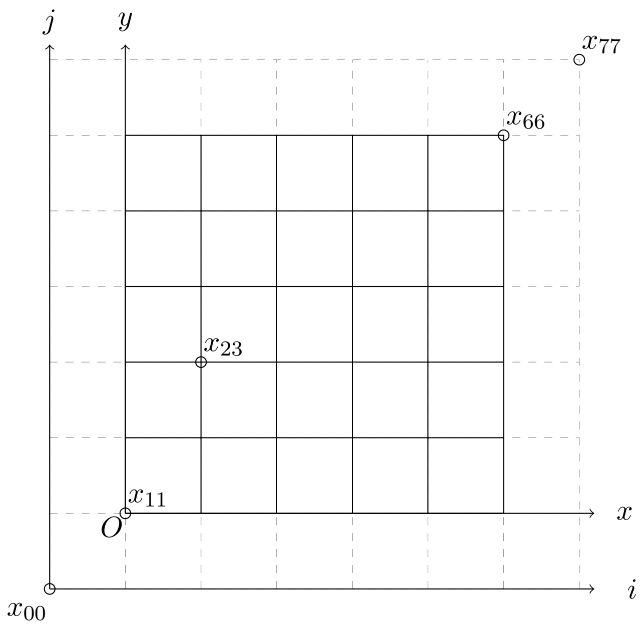


Cada um dos pontos pretos são pontos internos, e nestes pontos precisamos saber os valores das derivadas, de forma a obter a matriz DIV, para então utilizar na resolução da equação de Navier, que estamos originalmente interessados. Com a malha extendida, com a fronteira imaginária adicionada, ela fica no "ponto" para obter o gradiente de pressão usando derivadas centrais em cada um dos pontos, agora internos, da nossa malha extendida. As setas verticais indicam as velocidades horizontais, enquanto as setas verticais indicas velocidades verticais.

O modelo de cada bloco é o seguinte:



Para a representação no computador, somente com índices positivos, tem-se de mudar o local da origem, e fica-se com o seguinte esquema:



As coordenadas dos pontos acima, onde os pontos são x_{ij}, são diferentes do original mencionado antes com uma malha escalonada com índices negativos, e as equações ficam com os termos de uma forma um pouco diferente. Em relação ao tamanho da matriz, note que para uma malha de ordem 6 como acima, a malha escalonada ficou de ordem 8. Logo, há um aumento da ordem da matriz por uma adição de 2 ordens.

Reescrevendo as equação de 15 até 18, e considerando n a ordem da matriz, temos:

$$i = 1 \,|\, p_{i-1j} = p_{ij} - \frac{\mu}{\Delta x}\left(2u_{ij} - 5u_{i+1j} + 4u_{i+2j} - u_{i+3j}\right) - \frac{\rho \Delta x}{2}(f_{ij} + f_{i+1j}) \tag{19}$$

$$i = n \,|\, p_{i+1j} = p_{ij} + \frac{\mu}{\Delta x}\left(2u_{ij} - 5u_{i-1j} + 4u_{i-2j} - u_{i-3j}\right) + \frac{\rho \Delta x}{2}(f_{ij} + f_{i+1j}) \tag{20}$$

$$j = 1 \,|\, p_{ij-1} = p_{ij} - \frac{\mu}{\Delta x}\left(2v_{ij} - 5v_{ij+1} + 4u_{ij+2} - u_{ij+3}\right) - \frac{\rho \Delta x}{2}(f_{ij} + f_{i+1j}) \tag{21}$$

$$j = n \,|\, p_{ij+1} = p_{ij} + \frac{\mu}{\Delta x}\left(2v_{ij} - 5v_{ij-1} + 4u_{ij-2} - u_{ij-3}\right) + \frac{\rho \Delta x}{2}(f_{ij} + f_{i+1j}) \tag{22}$$

2.1.3 Resolver para o passo $t + \Delta t$

Finalmente, tem-se:

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{23}$$

Expandindo para as equações escalares, tem-se:

$$u^{n+1} = u^* - \frac{\Delta t}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{24}$$

$$v^{n+1} = v^* - \frac{\Delta t}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{25}$$

Basta discretizar os termos das derivadas parciais agora:

$$p_{x,ij} = \frac{p_{ij} - p_{i-1j}}{\Delta x} \tag{26}$$

$$p_{y,ij} = \frac{p_{ij} - p_{ij-1}}{\Delta x} \tag{27}$$

E finalmente tem-se a solução para o tempo $n + 1$ a partir do tempo passado n:

$$u^{n+1} = u^* - \frac{\Delta t}{\rho} p_x \tag{28}$$

$$v^{n+1} = v^* - \frac{\Delta t}{\rho} p_y \tag{29}$$

Cada uma das varíaveis acima é uma matriz.

References

[1] Wikipedia. Poisson's equation. `http://en.wikipedia.org/wiki/Poisson's_equation`, 2014. [Online; accessed 19-May-2014].