

# Solução Numérica da Equação de Navier Stokes

Orientador: *Yuri Dumaresq Sobral*

Ataias Pereira Reis

# 1 Introdução

A equação de Navier Stokes é apresentada abaixo, essa é a equação que governa a dinâmica dos fluidos.

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

Neste trabalho consideraremos um campo vetorial de duas dimensões. A equação de Navier Stokes é fortemente não-linear. Isso ocorre devido aos termos de convecção (aceleração independente do tempo,  $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ ) e gradiente de pressão ( $\nabla p$ ).

A abordagem para se obter uma solução para a equação dos fluidos é de seguir o método de Chorin[1] com malha escalonada. Para cada passo de tempo, há 3 etapas a serem realizadas. Será utilizado *time-splitting* de forma a se desacoplar a pressão da velocidade, ambas incógnitas.

O que deve ser definido antes de se resolver tal equação são os parâmetros do fluido,  $\mu$  e  $\rho$  (massa específica), a força externa  $\mathbf{f}$  e as condições de fronteira. Nosso interesse inicial é resolver o problema da cavidade num quadrado de lado igual a 1 numa malha de  $n$  pontos. As condições de fronteira são  $u(x, 1) = \sin \pi x^2$  e zero caso contrário.

A seguir será feita uma introdução do que vem a ser *time-splitting*, de forma a se compreender este trabalho.

## 1.1 Time-splitting

A primeira etapa neste método de resolução é o *time-splitting*. A discretização no tempo tem duas etapas. Para se entender isso, começamos com a equação abaixo:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \approx \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^*}{\Delta t} + \frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^n}{\Delta t} \quad (3)$$

A ideia do *time-splitting* é responsabilizar cada um dos termos do lado direito desta equação com uma parte da equação de Navier-Stokes. Reescrevendo a equação de Navier-Stokes:

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^*}{\Delta t} + \frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\mathbf{f}}{\rho} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$$

Agora, é possível impor o seguinte:

$$\frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^n}{\Delta t} = \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\mathbf{f}}{\rho} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (4)$$

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (5)$$

A equação 4 pode ser discretizada e então obtemos  $\mathbf{v}^*$ . A equação 5, por sua vez, não pode ser diretamente discretizada e resolvida pois não se sabe  $\mathbf{v}^{n+1}$ . No entanto, se o gradiente da equação for obtido, tem-se:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^*}{\Delta t} \right) &= \nabla \cdot \frac{\mathbf{v}^{n+1}}{\Delta t} - \nabla \cdot \frac{\mathbf{v}^*}{\Delta t} \\ &= -\frac{1}{\rho} \nabla^2 p\end{aligned}$$

A equação da continuidade  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  tem de valer para  $\mathbf{v}^{n+1}$ , logo:

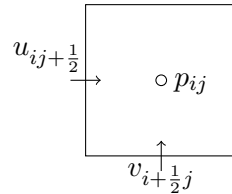
$$\nabla^2 p = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{v}^* \quad (6)$$

Nos próximos passos, iremos fazer o seguinte:

1. obter  $\mathbf{v}^*$ , que seria o intermediário entre  $\mathbf{v}^n$  e  $\mathbf{v}^{n+1}$
2. obter a pressão,  $p$
3. obter  $\mathbf{v}^{n+1}$

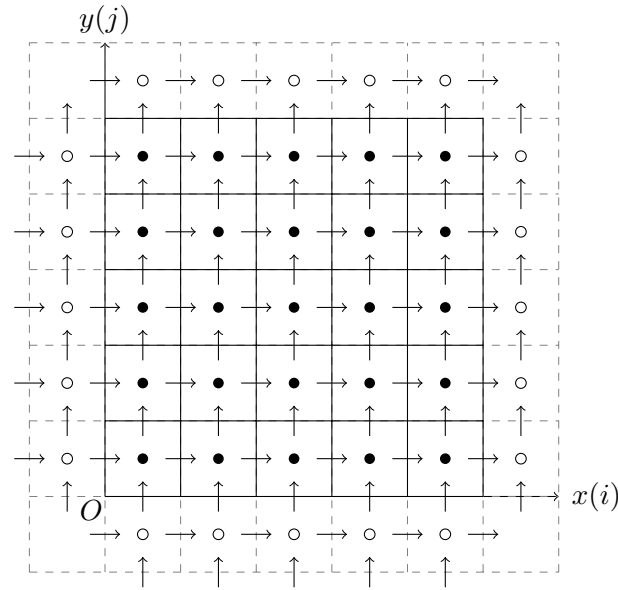
## 1.2 Malha escalonada

De forma sintética: o uso de uma malha normal pode gerar modos espúrios de pressão indesejados. Uma outra forma de representar os dados nas matrizes é a escalonada. Nela, o ponto  $ij$ , ao invés de representar a velocidade  $\mathbf{v}(i\Delta x, j\Delta y)$ , representará a velocidade  $u(i\Delta x, (j + \frac{1}{2})\Delta x)$  e  $v((i + \frac{1}{2})\Delta x, j\Delta x)$ . Logo, ao invés de um ponto  $ij$  é melhor pensar num pequeno quadrado de índice  $ij$  que contém as velocidades, pressão e força utilizadas em nosso problema. Consideramos a força em  $x$  e  $y$  na mesma posição que as velocidades. A pressão permanece no centro do quadrado. A figura abaixo ilustra isso:



Uma representação de um domínio mais completo está na figura abaixo. Note que cada ponto preto no meio de um bloco é a pressão em ponto interno. Enquanto a pressão em pontos da fronteira imaginária são círculos com interior branco. Pontos na fronteira imaginária são utilizados nos cálculos, mas não precisam ser salvos no resultado final.

Se é definida, no computador, uma matriz  $n \times n$ , tem-se  $\Delta x = \frac{1}{n-2}$ . Os cálculos devem ser todos feitos com base neste  $\Delta x$ . Além disso, note que as velocidades da extrema esquerda e do extremo inferior não são utilizadas. Você pode declarar tais valores como Not a Number. Se seu programa utilizá-los, há algo errado.



## 2 Física

Antes de iniciar-se a resolução numérica da equação de Navier Stokes, seja qual for o método escolhido, é necessário ter em mente que certas condições físicas devem ser satisfeitas de modo a se ter um resultado que convirja numericamente. As restrições irão determinar quais os mínimos/máximos de  $\Delta t$  e  $\Delta x$ . Nesta seção veremos as condições de difusão estável, advecção (ou transporte) estável e camada limite hidrodinâmica.

Além de restrições físicas, iremos também introduzir o número de Reynolds:  $Re$ . Este é um número adimensional no qual se escolhe uma velocidade e tamanho característicos para o problema em questão. O número de Reynolds é dado por:

$$Re = \frac{\rho L U}{\mu} \quad (7)$$

Neste trabalho, tem-se um quadrado de lado 1. Seja então  $L = 1$  o tamanho característico e  $U = 1$  a velocidade característica (note que esse  $U$  é a velocidade que multiplica a condição de fronteira  $u(x, 1) = U \sin \pi x$ ). Ainda, escolha  $\rho = 1$ . Desta forma:

$$Re = \frac{1}{\mu} \quad (8)$$

As equações de Navier Stokes são discretizadas adiante com  $\rho$  e  $\mu$ . Utilizaremos o número de Reynolds por meio da técnica mostrada aqui e variar-se-á somente  $\mu$  para influenciar as características do escoamento.

### 2.1 Difusão Estável

$$\Delta t < \frac{1}{4} Re \Delta x^2 \quad (9)$$

## 2.2 Advecção Estável

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{U} \quad (10)$$

## 2.3 Camada Limite Hidrodinâmica

O que é essa camada mesmo?

$$\begin{aligned} Re_{\Delta x} &= \frac{\rho U \Delta x}{\mu} < 1 \\ Re_{\Delta x} &= \frac{\rho U \Delta x}{\mu} \frac{L}{L} \\ &= \frac{\rho U L}{\mu} \frac{\Delta x}{L} = Re \cdot \lambda < 1 \end{aligned}$$

Assim

$$\lambda < \frac{1}{Re} \quad (11)$$

## 3 Resolução Numérica

### 3.1 Desconsiderando a pressão

A velocidade  $\mathbf{v}^*$  não leva em conta a pressão. Primeiramente, discretizamos a Equação 4 por meio de diferenças finitas. A parte da direita de cada equação é avaliada no tempo passado, enquanto a parte da esquerda é o resultado no tempo estrela.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{ij}^s &= (u_{i+1j}^n + u_{i-1j}^n + u_{ij+1}^n + u_{ij-1}^n) \mathbf{i} \\ &\quad + (v_{i+1j}^n + v_{i-1j}^n + v_{ij+1}^n + v_{ij-1}^n) \mathbf{j} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{ij}^t &= 0.25(u_{ij}^n + u_{i+1j}^n + u_{i-1j}^n + u_{ij-1}^n) \mathbf{i} \\ &\quad + 0.25(v_{ij}^n + v_{i+1j}^n + v_{i-1j}^n + v_{ij+1}^n) \mathbf{j} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} u_{ij}^* &= u_{ij}^n + \frac{\Delta t}{\rho} \left[ \mu \left( \frac{u_{ij}^s - 4u_{ij}^n}{\Delta x^2} \right) + Fx_{ij}^n \right] + \\ &\quad - \left[ u_{ij}^n (u_{i+1j}^n - u_{i-1j}^n) + v_{ij}^n (u_{ij+1}^n - u_{ij-1}^n) \right] \frac{\Delta t}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} v_{ij}^* &= v_{ij}^n + \frac{\Delta t}{\rho} \left[ \mu \left( \frac{v_{ij}^s - 4v_{ij}^n}{\Delta x^2} \right) + Fy_{ij}^n \right] \\ &\quad - \left[ u_{ij}^n (v_{i+1j}^n - v_{i-1j}^n) + v_{ij}^n (v_{ij+1}^n - v_{ij-1}^n) \right] \frac{\Delta t}{2\Delta x} \end{aligned} \quad (15)$$

Note que as equações acima são só válidas para pontos internos à malha escalonada. Os pontos de fronteira não sofrem alteração nenhum nesta etapa. É importante atender às condições de não deslizamento e impenetrabilidade em todo momento.

### 3.2 Obter a pressão

Como já foi apresentado na seção de introdução, a segunda etapa é obter a pressão, por meio da Equação 16.

$$\nabla^2 p = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{v}^* = \frac{\rho}{\Delta t} \left( \frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} \right) \quad (16)$$

Para cada ponto  $ij$  da malha, deve-se calcular a não-homogeneidade apresentada na direita da Equação 16:

$$DIV_{ij} = \frac{\rho}{\Delta t} \left( \frac{u_{i+1j}^* - u_{ij}^*}{\Delta x} + \frac{v_{ij+1}^* - v_{ij}^*}{\Delta x} \right) \quad (17)$$

A equação 16 é uma equação de Poisson. Para pontos internos à malha, tem-se:

$$p_{ij} = \frac{1}{4} [(p_{i+1j} + p_{i-1j} + p_{ij+1} + p_{ij-1}) - \Delta x^2 DIV_{ij}] \quad (18)$$

O que acontece com as condições de fronteira? Ainda não sabemos quais são elas, é necessário que sejam obtidas antes de se resolver a equação de Poisson. Para obter tais condições, considere novamente a equação de Navier Stokes:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Destrinchando a equação para duas coordenadas, tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f_x \quad (19)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + f_y \quad (20)$$

Se fizermos uma análise dos pontos na parede da esquerda ou direita, nossa fronteira, e aplicarmos as condições de impenetrabilidade e não-deslizamento, que dizem que  $u = 0$  e  $v = 0$  na parede, temos a simplificação da equação, pois vários termos se tornam zero. As Equações 21 e 22 são as condições de fronteira, tipo Neumann, para as paredes verticais e horizontais, respectivamente.

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_{\text{parede}} = \rho \nu \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{\text{parede}} + \rho f_x \quad (21)$$

$$\left. \frac{\partial p}{\partial y} \right|_{\text{parede}} = \rho \nu \left. \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right|_{\text{parede}} + \rho f_y \quad (22)$$

O próximo passo é reescrever as Equações 21 e 22 com diferenças finitas. Para isso, foram utilizadas diferenças finitas unilaterais, para as velocidades, e centrais, para a pressão. A discretização tem ordem 2. As equações, em sequência, para as fronteiras da esquerda, direita, baixo e topo da matriz estão nas Equações 23 até 26. Todas as discretizações foram feitas com malha escalonada, lembre-se!

$$\frac{p_{ij} - p_{i-1j}}{\Delta x} = \frac{\mu}{\Delta x^2} (2u_{ij} - 5u_{i+1j} + 4u_{i+2j} - u_{i+3j}) + \rho f_{x,ij} \quad (23)$$

$$\frac{p_{ij} - p_{i-1j}}{\Delta x} = \frac{\mu}{\Delta x^2} (2u_{ij} - 5u_{i-1j} + 4u_{i-2j} - u_{i-3j}) + \rho f_{x,ij} \quad (24)$$

$$\frac{p_{ij} - p_{ij-1}}{\Delta y} = \frac{\mu}{\Delta y^2} (2v_{ij} - 5v_{ij+1} + 4v_{ij+2} - v_{ij+3}) + \rho f_{y,ij} \quad (25)$$

$$\frac{p_{ij} - p_{ij-1}}{\Delta y} = \frac{\mu}{\Delta y^2} (2v_{ij} - 5v_{ij-1} + 4v_{ij-2} - v_{ij-3}) + \rho f_{y,ij} \quad (26)$$

Reescrevendo-se as equações 23 até 26, e considerando  $n$  a ordem da matriz, temos:

$$i = 1 \mid p_{i-1j} = p_{ij} - \frac{\mu}{\Delta x} (2u_{ij} - 5u_{i+1j} + 4u_{i+2j} - u_{i+3j}) - \rho \Delta x f_{x,ij} \quad (27)$$

$$i = n \mid p_{ij} = p_{i-1j} + \frac{\mu}{\Delta x} (2u_{ij} - 5u_{i-1j} + 4u_{i-2j} - u_{i-3j}) + \rho \Delta x f_{x,ij} \quad (28)$$

$$j = 1 \mid p_{ij-1} = p_{ij} - \frac{\mu}{\Delta x} (2v_{ij} - 5v_{ij+1} + 4v_{ij+2} - v_{ij+3}) - \rho \Delta x f_{y,ij} \quad (29)$$

$$j = n \mid p_{ij} = p_{ij-1} + \frac{\mu}{\Delta x} (2v_{ij} - 5v_{ij-1} + 4v_{ij-2} - v_{ij-3}) + \rho \Delta x f_{y,ij} \quad (30)$$

Dependendo se a linguagem que você usa inicia índices de 0 ou 1, você pode precisar mudar um pouco os índices  $i$  e  $j$  acima, mas as equação permanecem as mesmas.

### 3.3 Resolver para o passo $t + \Delta t$

Finalmente, tem-se:

$$\frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (31)$$

Expandindo para as equações escalares, tem-se:

$$u^{n+1} = u^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (32)$$

$$v^{n+1} = v^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (33)$$

Basta discretizar os termos das derivadas parciais agora:

$$p_{x,ij} = \frac{p_{ij} - p_{i-1j}}{\Delta x} \quad (34)$$

$$p_{y,ij} = \frac{p_{ij} - p_{ij-1}}{\Delta x} \quad (35)$$

E finalmente tem-se a solução para o tempo  $n + 1$  a partir do tempo passado  $n$ :

$$u^{n+1} = u^* - \frac{\Delta t}{\rho} p_x \quad (36)$$

$$v^{n+1} = v^* - \frac{\Delta t}{\rho} p_y \quad (37)$$

As equações acima são válidas para pontos internos. Para as fronteiras, comece considerando a parede da esquerda da cavidade, onde a velocidade normal é 0. Como nossa malha é escalonada, este ponto não está salvo na matriz e uma média deve ser feita de modo a determinar o ponto da fronteira da malha. Neste caso, teria-se:

$$\frac{v_{i-\frac{1}{2}j} + v_{i+\frac{1}{2}j}}{2} = 0$$

o que leva a:

$$v_{i-\frac{1}{2}j} = -v_{i+\frac{1}{2}j} \quad (38)$$

De maneira similar, para as paredes de baixo e da direita, tem-se:

$$u_{ij-\frac{1}{2}} = -u_{ij+\frac{1}{2}} \quad (39)$$

$$v_{i+\frac{1}{2}j} = -v_{i-\frac{1}{2}j} \quad (40)$$

Para a parte de cima, onde a velocidade é diferente de zero, tem-se:

$$\frac{u_{ij+\frac{1}{2}} + u_{ij-\frac{1}{2}}}{2} = u_{Bi}$$

$u_{Bi}$  é a condição de fronteira para o ponto na coluna  $i$ .

Retirando os índices fracionários:

$$v_{i-1j} = -v_{ij}, \text{ esquerda} \quad (41)$$

$$u_{ij-1} = -u_{ij}, \text{ embaixo} \quad (42)$$

$$v_{ij} = -v_{i-1j}, \text{ direita} \quad (43)$$

$$u_{ij} = 2u_{Bi} - u_{ij-1}, \text{ em cima} \quad (44)$$

fixando o índice de cada lado:

$$v_{0j} = -v_{1j}, \text{ esquerda} \quad (45)$$

$$u_{i0} = -u_{i1}, \text{ embaixo} \quad (46)$$

$$v_{n-1j} = -v_{n-2j}, \text{ direita} \quad (47)$$

$$u_{in-1} = 2u_{Bi} - u_{in-2}, \text{ em cima} \quad (48)$$

## 4 Validação

A validação do programa foi realizada pela comparação numérica e análise da evolução do erro conforme o número de pontos da malha aumenta.

### 4.1 Análise da Ordem do Erro

Para uma dimensão de tamanho  $N$  da malha escalonada, avaliou-se a diferença entre o ponto central nessa malha e em outras cujas dimensões eram menores. Pelo fato de toda a discretização realizada ser de ordem dois, deve-se ter que o erro diminui de forma quadrática com o aumento da dimensão  $N$ .



## ADICIONAR GRAFICOS AQUI!

### 4.2 Comparação Numérica

Sabe-se que a vorticidade no centro da malha no tempo  $t = 1$  é  $\omega(0.5, 0.5, 1) = -0.63925 \pm 0.00005$  e a força no topo é  $F = 3.8998 \pm 0.0002$ . Os resultados do programa criado são apresentados na Tabela 1. Realizando-se a regressão linear dos 6 últimos pontos, tem-se que  $\omega(0.5, 0.5, 1) = -0.639243$  que está dentro da faixa de erro. A força extrapolada é  $F = 0.390296$ . Talvez haja algum erro no cálculo ou na faixa de erro dada.

$n$	$\omega$	$F$	t (s)
50	-0.63835	0.38957	3.2
70	-0.63874	0.38986	38.4
80	-0.63884	0.38993	65.0
90	-0.63891	0.38999	104.4
100	-0.63895	0.39003	162.5
120	-0.63902	0.39008	328.9
140	-0.63905	0.39012	620.1
160	-0.63908	0.39014	993.3
180	-0.63910	0.39016	1637.7
200	-0.63911	0.39017	2391.8
220	-0.63912	0.39018	3476.0

Tabela 1: Resultados da simulação e evolução do tempo computacional

### 4.3 Cálculo da Força

Calcular-se-á a força resultante na parte superior da cavidade. Para isso, primeiro se tem de saber que a tensão cisalhante é calculada pela Equação 49:

$$\tau = \frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (49)$$

A integral dessa tensão é a força que desejamos obter, dada pela Equação

$$F = \int_A \tau dA \quad (50)$$

Calculamos essa força por unidade de área, considerando a profundidade  $P_z = 1$  e então  $dA = P_z dx = dx$ . Dessa forma tem-se a Equação 51. Note que, para o topo da cavidade,  $y = 1$ .

$$F(x, y) = \frac{1}{Re} \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial y} dx \quad (51)$$

O cálculo dessa integral será feito pela regra de Simpson composta.

## 4.4 Poisson

O teste da solução real do problema de Poisson com fronteiras de Neumann e o algoritmo desenvolvido será demonstrado nesta seção. Dois problemas analíticos serão testados.

### 4.4.1 Problema 1

O primeiro problema é definido pela seguinte equação:

$$\begin{cases} \nabla^2 u(x, y) &= \cos \pi y \\ u_x(1, y) &= \cos \pi y \\ u_n(x, y) &= 0, \text{ caso contrário, na fronteira} \end{cases} \quad (52)$$

Este problema foi resolvido pelo método de separação de variáveis e então obteve-se o seguinte:

$$u(x, y) = \left( \frac{\cosh \pi x}{\pi \sinh \pi} - \frac{1}{\pi^2} \right) \cos \pi y \quad (53)$$

### 4.4.2 Problema 2

O segundo problema é definido pela seguinte equação:

$$\begin{cases} \nabla^2 u(x, y) &= 0 \\ u_x(1, y) &= \cos 2\pi y \\ u_n(x, y) &= 0, \text{ caso contrário, na fronteira} \end{cases} \quad (54)$$

Este problema foi resolvido pelo método de separação de variáveis e então obteve-se o seguinte:

$$u(x, y) = \frac{\cosh 2\pi x}{2\pi \sinh 2\pi} \cos 2\pi y \quad (55)$$

### 4.4.3 Problema 3

Neste caso, temos fronteiras do tipo Dirichlet e o código é um pouco modificado em relação aos casos anteriores. Isto nos permite avaliar se a discretização está condizente.

$$\begin{cases} \nabla^2 u(x, y) &= 0 \\ u(x, 1) &= \sin \pi x \\ u(x, y) &= 0, \text{ caso contrário, na fronteira} \end{cases} \quad (56)$$

A solução, portanto, é:

$$u(x, y) = \frac{\sinh \pi y}{\sinh \pi} \sin \pi x \quad (57)$$

## Referências

- [1] Chorin A. J. Numerical solutions of the Navier-Stokes Equations. *AMS*, February 1968.