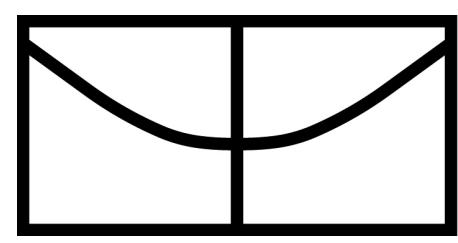


Introdução à Simulação Numérica de Escoamentos de Fluidos Magnéticos



{ Ataias Reis - ataiasreis@gmail.com } { Yuri Dumaresq - Y.D.Sobral@mat.unb.br } { Francisco Ricardo - frcunha@unb.br } Universidade de Brasília, Departamento de Matemática

1. INTRODUÇÃO

Objetivo

- Desenvolver um código de computador que resolva a equação de Navier Stokes numa cavidade para simular o escoamento de um fluido magnético[7] sob ação de um campo magnético aplicado.

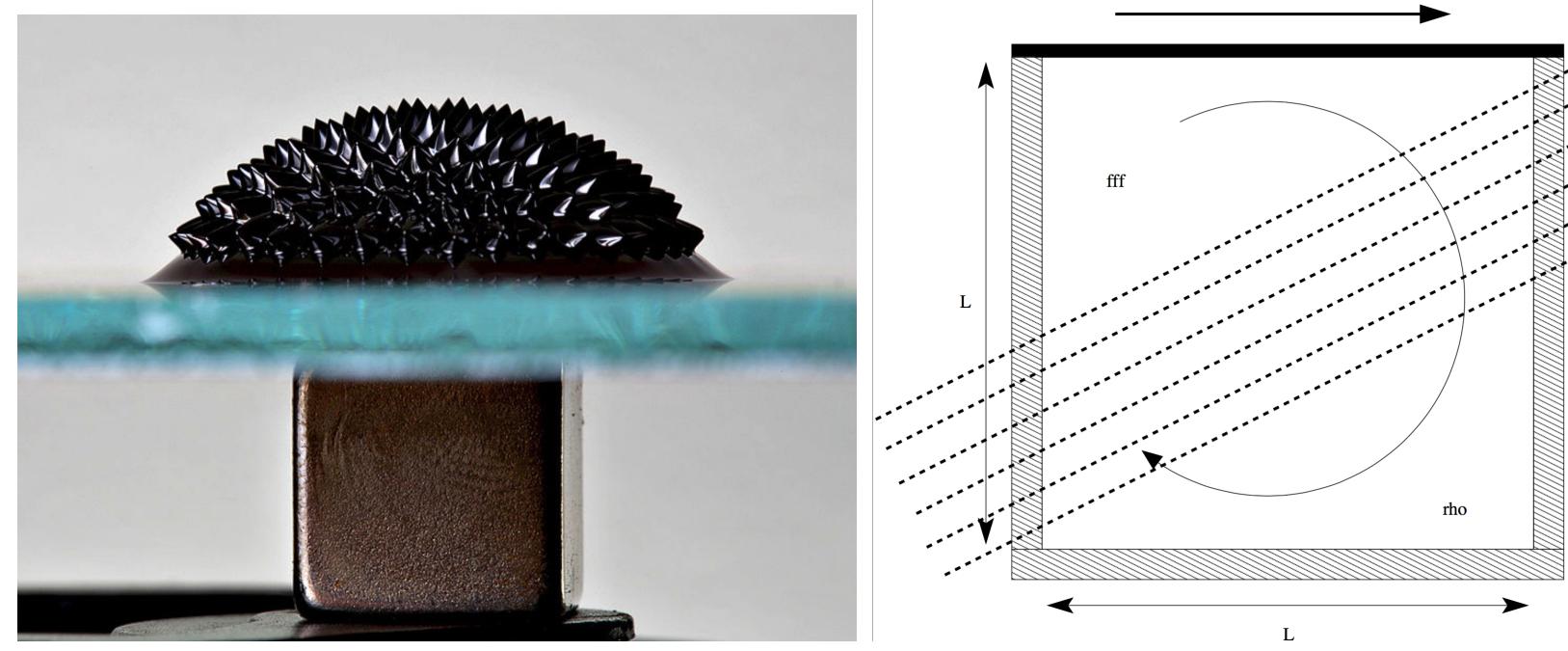


Figura 1: Ferrofluid e cavidade

$$\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + C_{pm} \mathbf{M} \cdot \nabla \mathbf{H} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{0} \quad (4)$$

- Hipótese constitutiva (regime superparamagnético):

$$\mathbf{M} = \chi \mathbf{H}. \quad (5)$$

Por quê?

- O caso superparamagnético já é conhecido e serve como validação do código antes de simular outras equações constitutivas para o magnetismo.

2. METODOLOGIA

- Solução numérica das equações governantes:

- Diferenças finitas de segunda ordem

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \quad (6)$$

- Time-splitting [4] aplicado às equações de Navier Stokes

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \approx \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^n}{\Delta t} = \frac{\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{v}^*}{\Delta t} + \frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^n}{\Delta t} \quad (7)$$

$$\frac{\mathbf{v}^* - \mathbf{v}^n}{\Delta t} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{f} - \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad (8)$$

$$\nabla^2 p = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{v}^* \quad (9)$$

$$\mathbf{v}^{n+1} = \mathbf{v}^* - \Delta t \cdot \nabla p \quad (10)$$

- Problemas de Poisson para a pressão, Equação 9, e para o campo magnético local com condições de contorno de Neumann resolvidos por fatoração Choleski

$$\text{Campo magnético: } \nabla^2 \phi = \nabla \cdot \mathbf{M} \quad (11)$$

- Staggered-grid [3] - tipo de malha que é utilizada para diminuir erros no cálculo da pressão

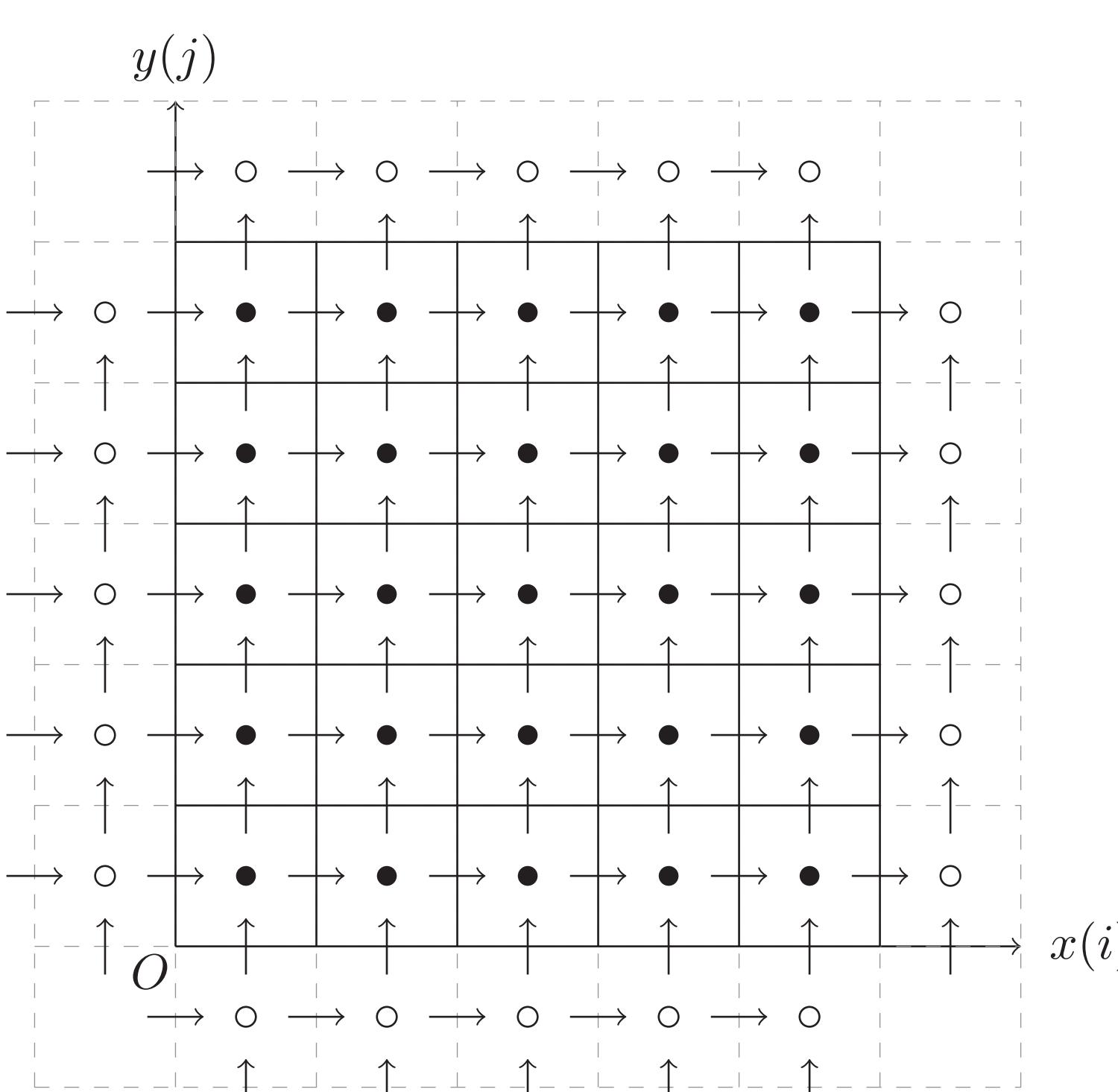


Figura 2: Malha escalonada

- Condições no passo de tempo e tamanho das células da malha

$$\text{Difusão estável: } \Delta t < \frac{1}{4} Re \Delta x^2 \quad (12)$$

$$\text{Advecção estável: } \Delta t < \frac{\Delta x}{U} \quad (13)$$

$$\text{Camada limite hidrodinâmica: } \Delta x < \frac{1}{Re} \quad (14)$$

AGRADECIMENTOS

Os autores são gratos pelo apoio financeiro a este trabalho que foi dado pelo CNPq, FAP-DF e Finatec.

3. RESULTADOS

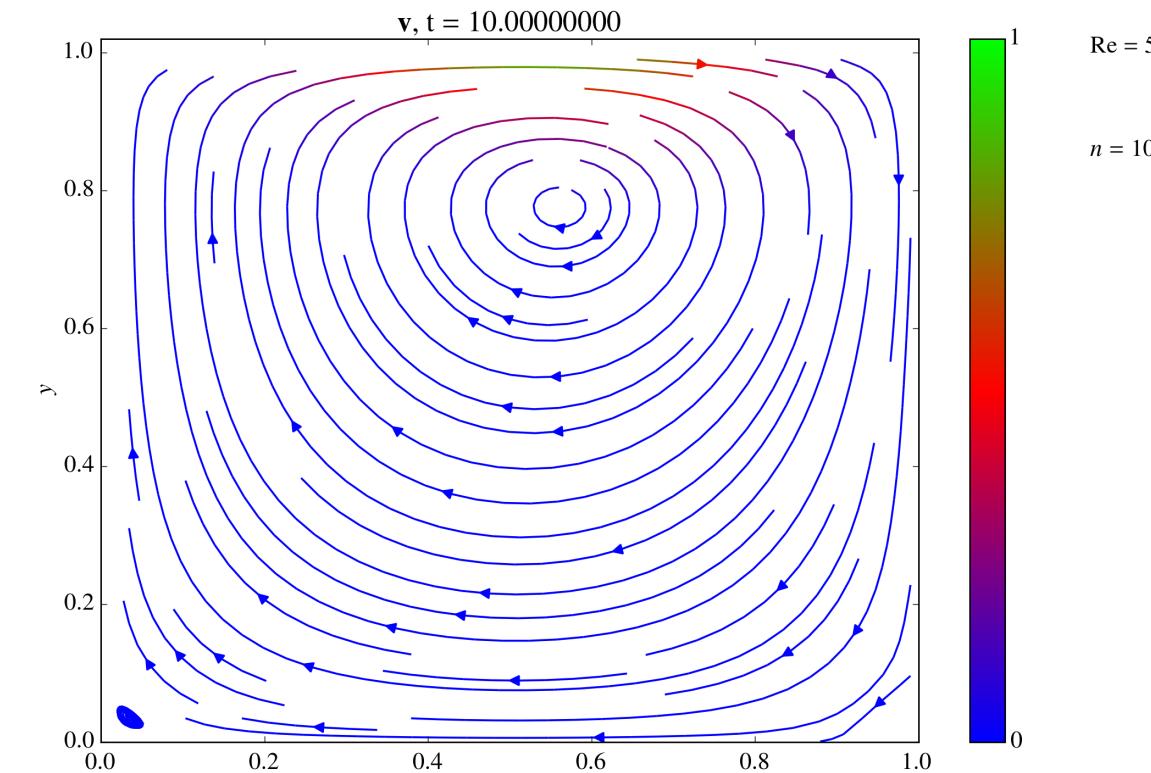


Figura 3: Linhas de velocidade em regime sem campo aplicado

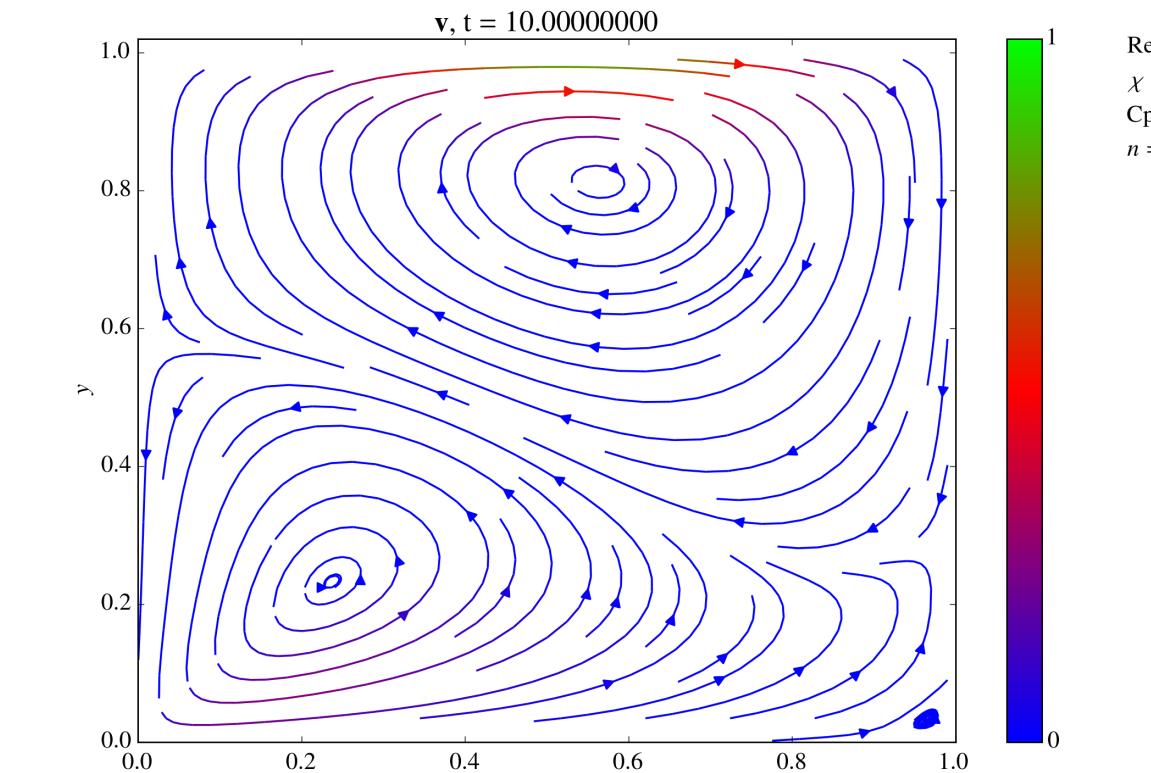


Figura 8: Linhas de velocidade em regime com campo aplicado

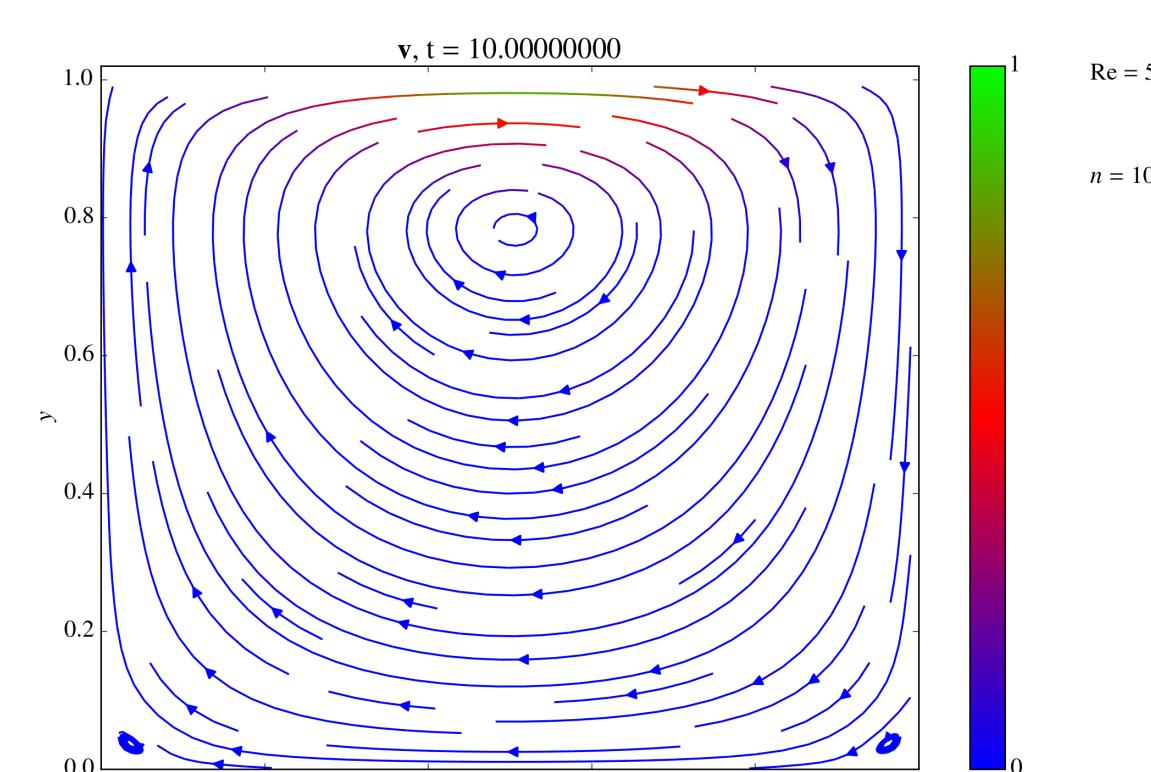


Figura 4: Linhas de velocidade em regime sem campo aplicado

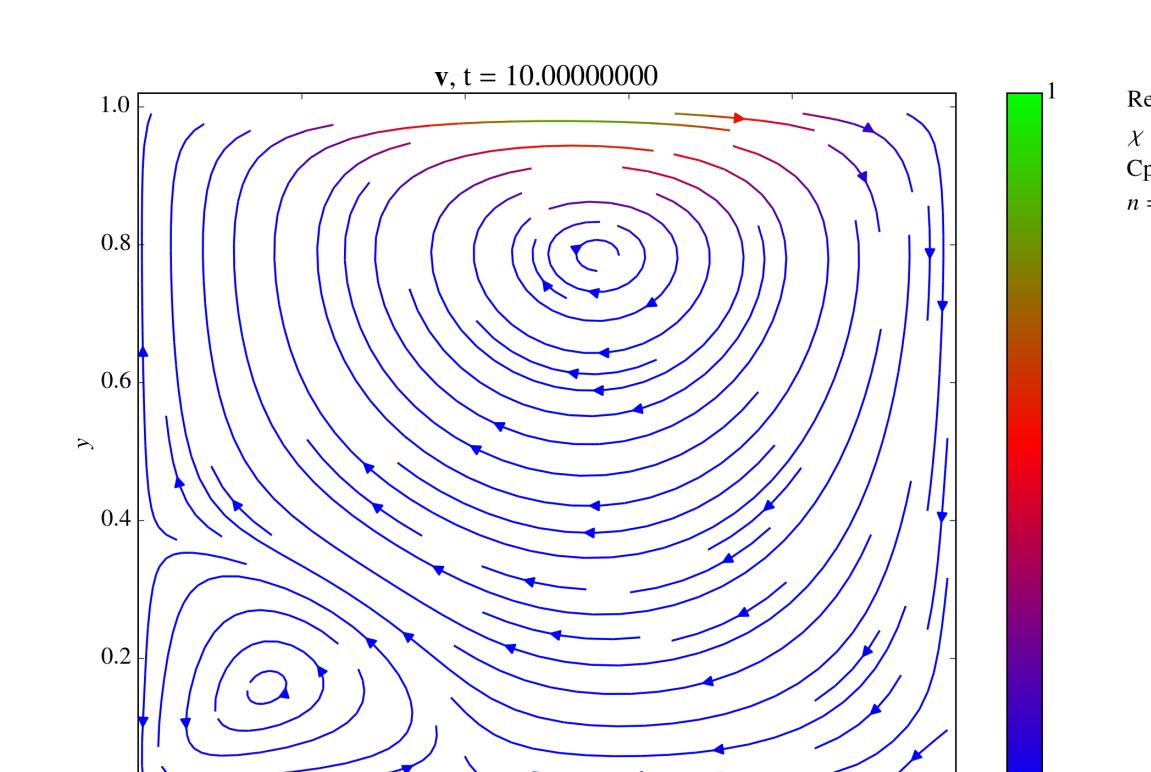


Figura 9: Linhas de velocidade em regime com campo aplicado

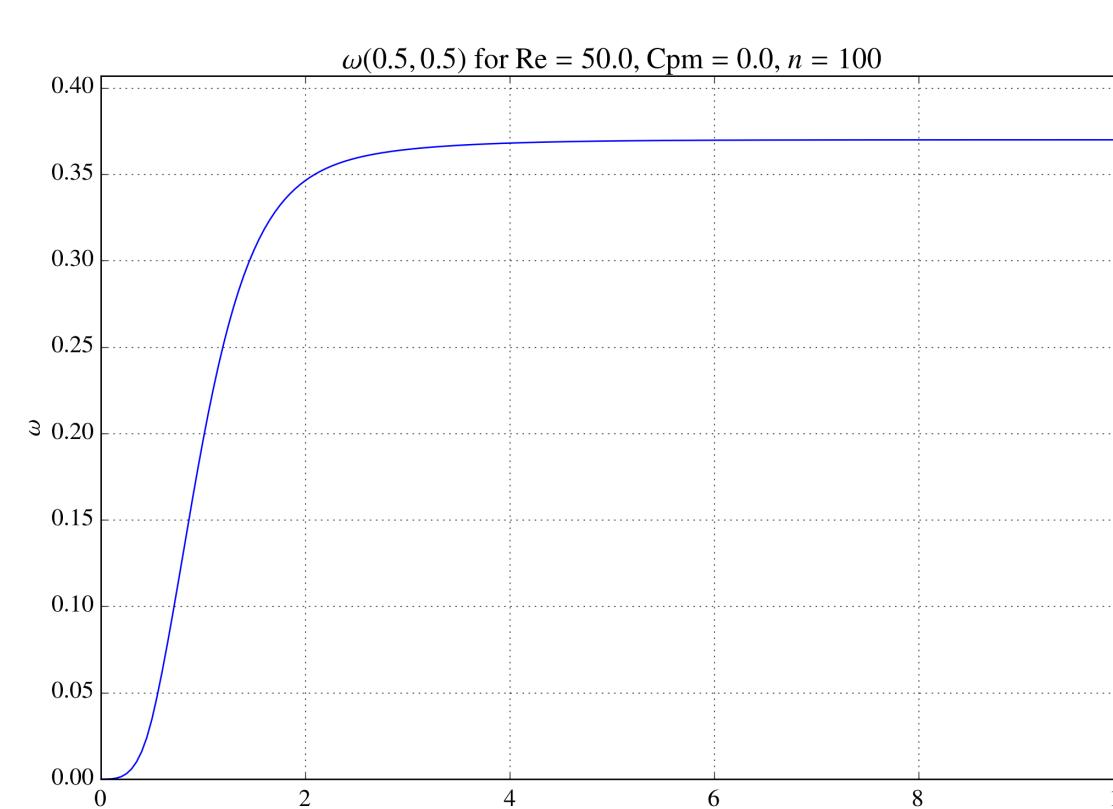


Figura 5: Evolução da vorticidade sem campo aplicado

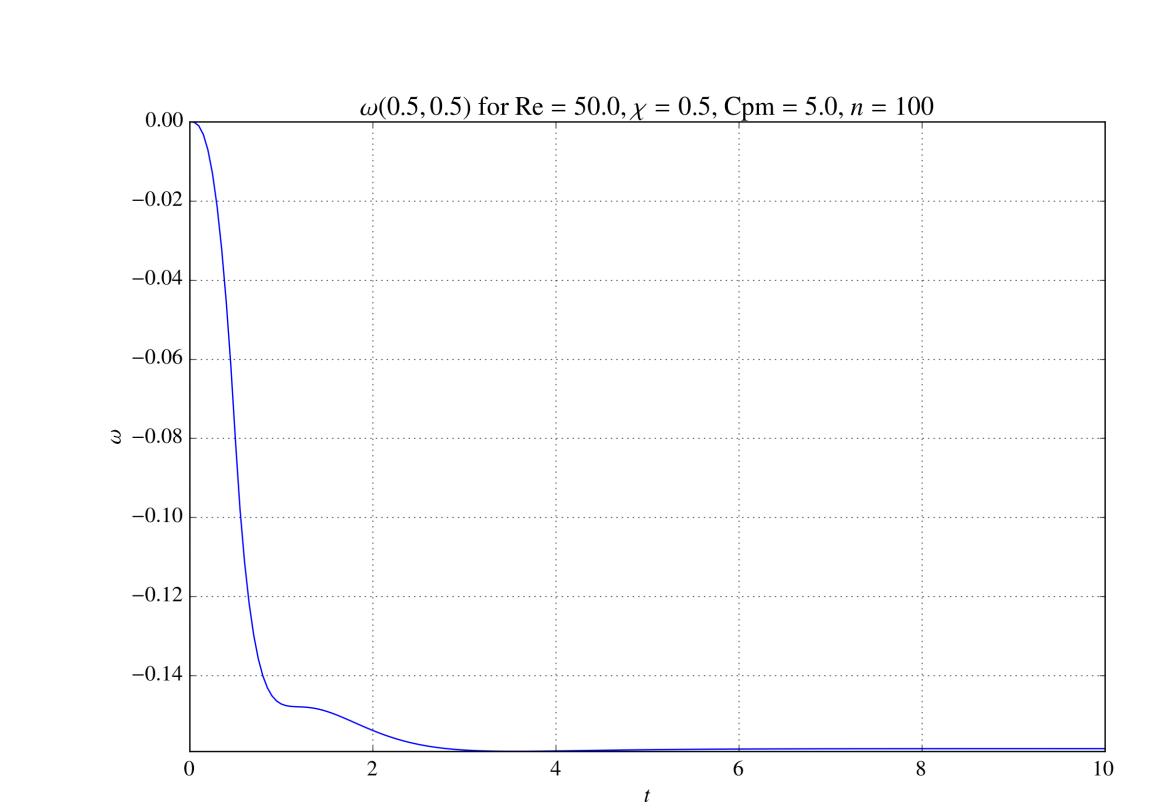


Figura 10: Evolução da vorticidade com campo aplicado

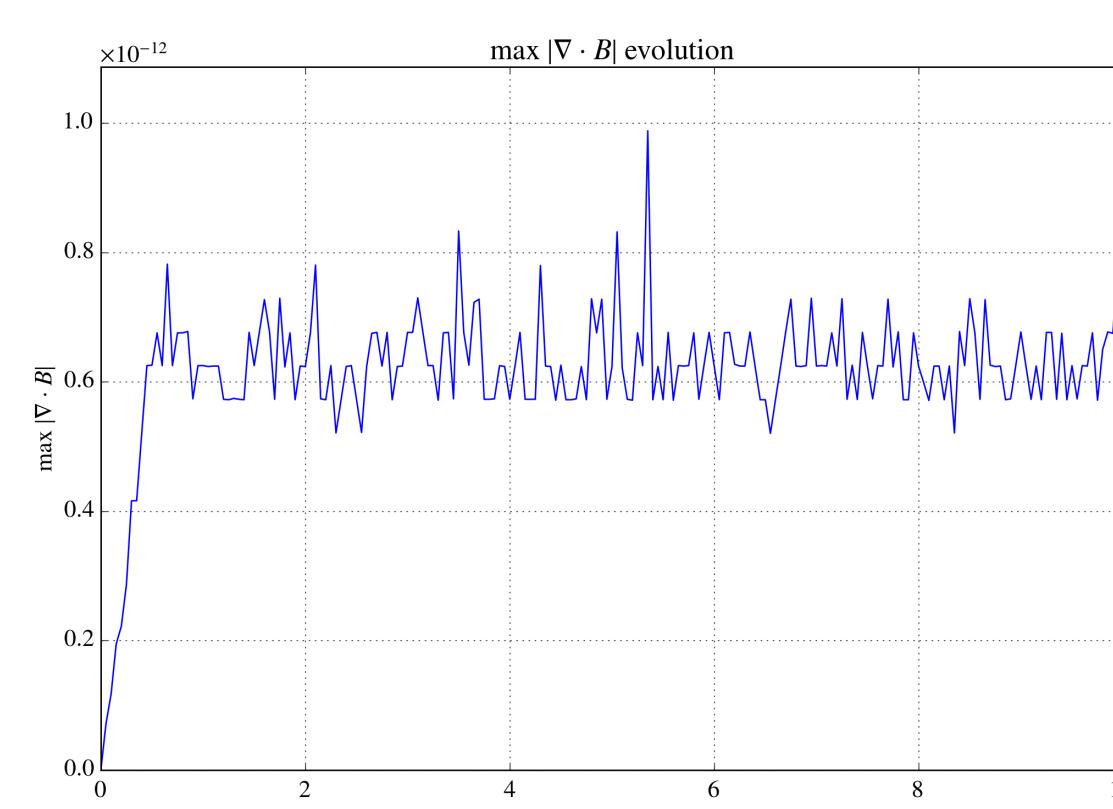


Figura 6: $\nabla \cdot \mathbf{B}$ máximo calculado na malha

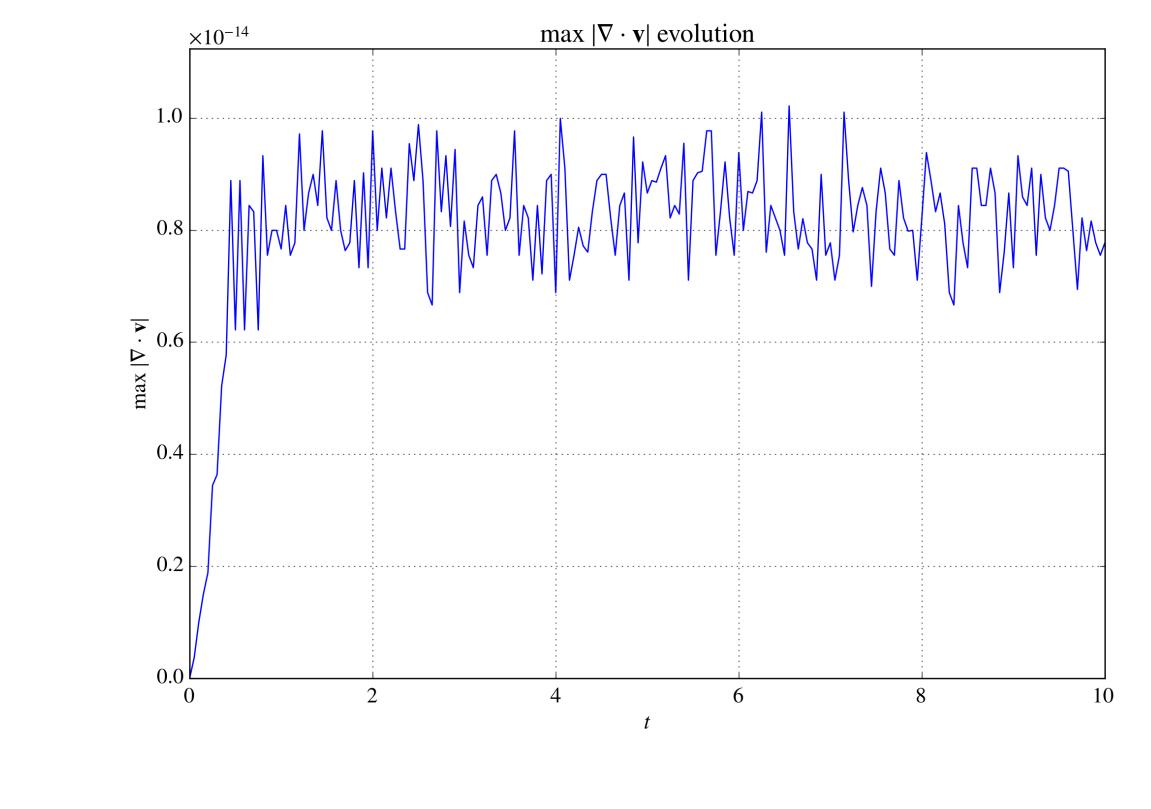


Figura 11: $\nabla \cdot \mathbf{v}$ máximo calculado na malha

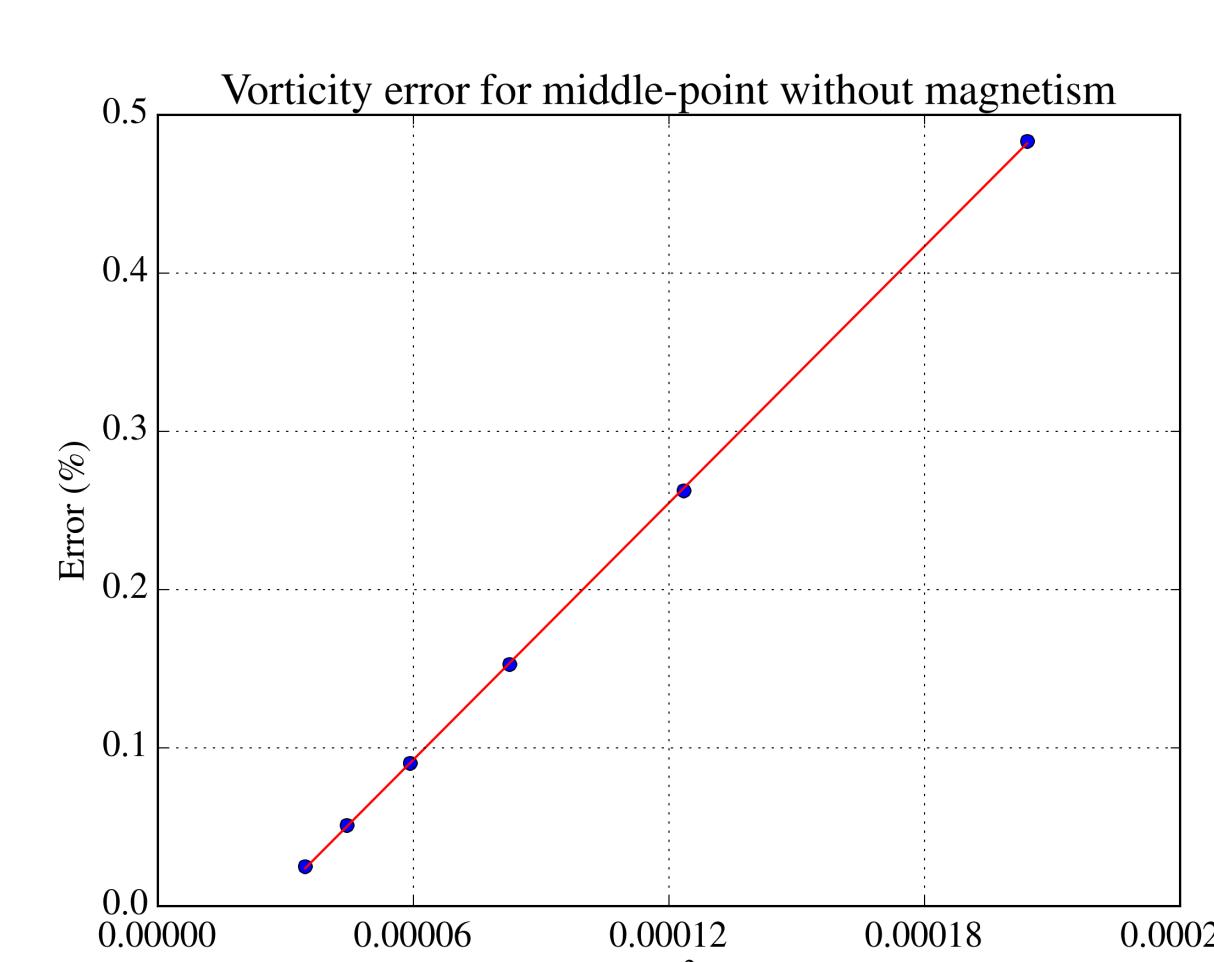


Figura 7: Análise do erro conforme Δx varia

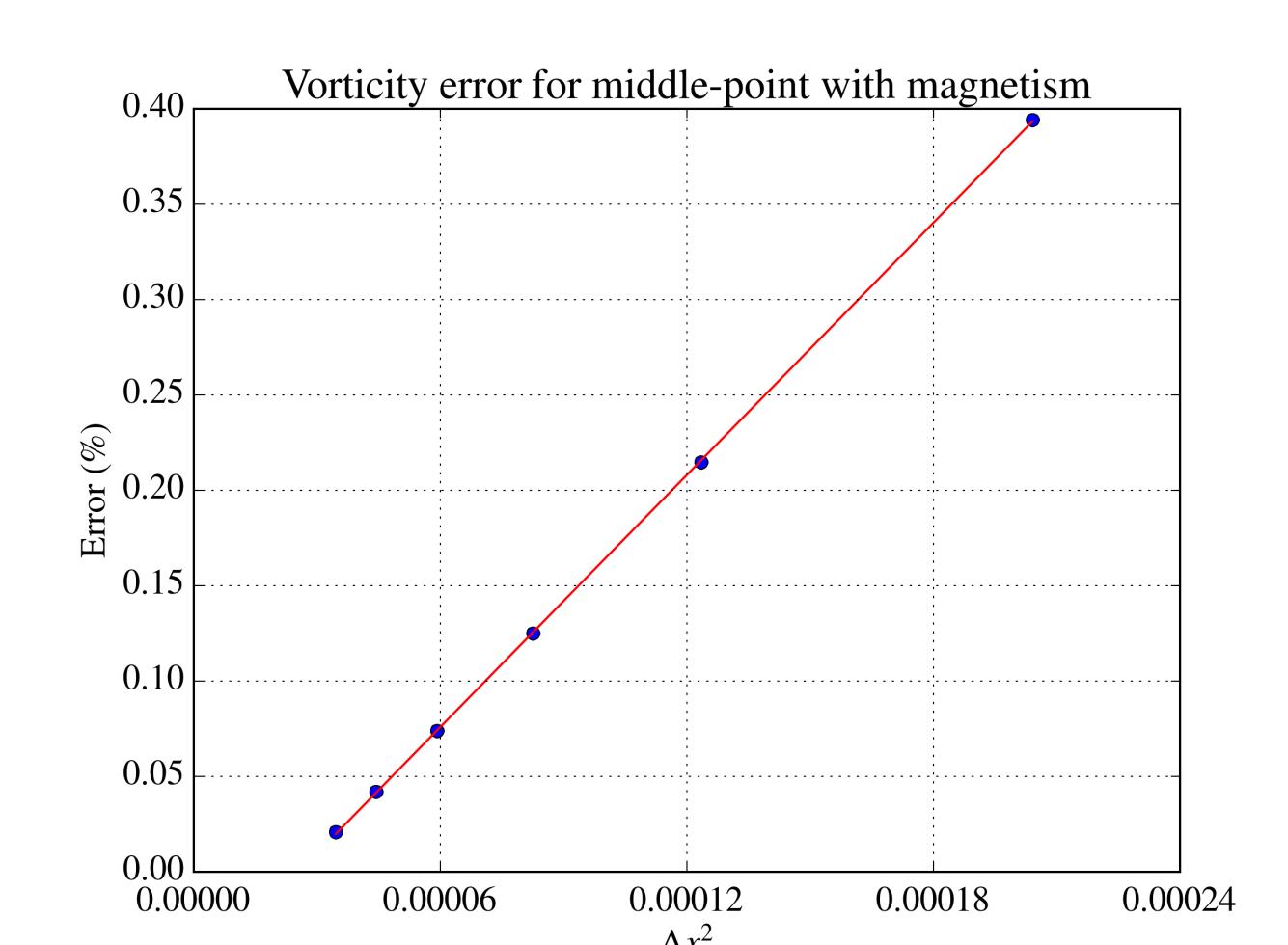


Figura 12: Análise do erro conforme Δx varia

4. CONCLUSÃO

- Método de solução numérica adequado para o problema proposto. Código foi construído e validado, e é eficiente computacionalmente.
- Campo aplicado influencia significativamente o escoamento de um ferrofluido.

5. TRABALHOS FUTUROS

- Explorar diversas configurações de campo magnético, Re , C_{pm} , χ e calcular propriedades como tempo para regime permanente, força na parede superior, etc.
- Simulação de fluidos magnéticos assimétricos, para os quais $\mathbf{M} \times \mathbf{H} \neq 0$. Nestes casos, é preciso descrever bem a magnetização do ferrofluido. Testar Equação de Shliomis [8] e outras.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = & -c_1 [\mathbf{M} - \mathbf{M}_0] + c_2 [(\mathbf{M} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{M}] \\ & + \frac{1}{2} (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{M}, \end{aligned} \quad (15)$$

REFERÊNCIAS

- [1] Alexandre Joel Chorin. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *Journal of Computational Physics*, 135(2):118 – 125, 1997.
- [2] NumFocus Foundation. The Julia Language. Disponível <http://julialang.org>, versão 0.3.11.
- [3] E.J. Hinch. Lecture notes on computational methods in fluid dynamics: Part i - a first problem., 2006.
- [4] Chorin A. J. Numerical solutions of the Navier-Stokes Equations. AMS, February 1968.
- [5] Eric Firing Michael Droettboom John Hunter, Darren Dale and the matplotlib development team. matplotlib: python plotting. Available at <http://matplotlib.org>, version 1.4.3.
- [6] Ataias Pereira Reis. Repositório Git: ferrofluidos. Disponível em <https://github.com/ataias/ferrofluidos>.
- [7] R E Rosensweig. Magnetic fluids. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 19(1):437–461, 1987.
- [8] J. P. Shen and Masao Doi. Effective viscosity of magnetic fluids. *Journal of the Physical Society of Japan*, 59(1):111–117, 1990.