UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

Implementação de Controle com Redução Modal

Ataias Pereira Reis
Emanuel Pereira Barroso Neto

24 de janeiro de 2016

1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste documento é apresentar os procedimentos necessários para implementar o método controle apresentado no artigo “*Modal Reduction Based Tracking Control for Installation of Subsea Equipments*”, desenvolvido por Fabrício et al, em um controlador industrial da Rockwell. Nem todos os detalhes estão presentes no artigo, o que torna difícil simplesmente lê-lo e realizar o sistema.

2 EQUAÇÕES GOVERNANTES

Para o riser, a Equação 2.1 representa o deslocamento horizontal $\Upsilon(z,t)$ do tubo — um barbante, no caso da bancada de laboratório — sob a ação de forças hidrodinâmicas externas $F_n(z,t)$ e tração $T(z)$:

$$m_s \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = -EJ \frac{\partial^4 \Upsilon}{\partial z^4} + \frac{\partial}{\partial z}\left(T(z)\frac{\partial \Upsilon}{\partial z}\right) + F_n(z,t) \tag{2.1}$$

Antes de prosseguir, é importante definir termos desta equação:

- m_s é a massa linear do barbante (o professor Eugênio disse isso, mas o que seria massa linear? É a densidade linear? Ou é simplesmente a massa do barbante?)
- E é o módulo de Young do barbante e ele é desconhecido

- J é o segundo momento de área e representa a resistência do barbante à flexão. O barbante não apresenta tal resistência, daí $J = 0$

- $T(z)$ é a força de tração e é dada por

$$T(z) = \left(m_b + \frac{z}{L} m_s\right) g,$$

sendo m_b a massa da bolinha, L o comprimento do barbante, z a posição vertical sendo o carrinho o zero e g é a força da gravidade. (Aqui, estou considerando m_s como a massa total do barbante. Caso fosse densidade linear, $T(z) = (m_b + z \cdot m_s)g$)

A força externa resultante, $F_n(z,t)$, é dada por

$$F_n(z,t) = -m_f \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} - \mu \left|\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}\right| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t}, \tag{2.2}$$

na qual μ é o coeficiente de arrasto e m_f é a massa do fluido adicionado, que será posteriormente pormenorizada. Fazendo $m = m_s + m_f$ e substituindo a Equação 2.2 na 2.1, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = -\frac{EJ}{m} \frac{\partial^4 \Upsilon}{\partial z^4} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{T(z)}{m} \frac{\partial \Upsilon}{\partial z}\right) - \frac{\mu}{m} \left|\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}\right| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \tag{2.3}$$

No artigo do Fabrício, fala "*Since the traction $T(z)$ is mostly due to the heavy payload, it can be assumed an average value T for it, taken in the middle of the riser's length.*". Eu suspeito da veracidade desta frase quando analisado os dados

- Massa do isopor: 0.15g
- Diâmetro da bolinha: 30.6mm
- Massa do barbante: 0.492g
- Comprimento do barbante: 0.82m
- Diâmetro do barbante: 2mm
- Densidade linear considerando densidade volumétrica 191kg/m^3 é de 0.6g/m.
- Massa do barbante pela da bolinha aproximadamente 3 (0.492/0.15).

A massa do barbante, $m_s = 0.492$g, é bem maior que a massa m_f do fluido adicionado. Para verificar isso, calculemos primeiro a massa m_{f1} do fluido adicionado ao redor do barbante:

$$\begin{aligned} m_{f1} &= 2V_b \rho_{\text{ar}} \\ &= 2\pi r^2 L \rho_{\text{ar}} \\ &= 0.025246\text{g} \end{aligned} \tag{2.4}$$

e a massa m_{f2} do fluido adicionado ao redor da bolinha de isopor é

$$\begin{aligned} m_{f2} &= 1.2 V_e \rho_{\text{ar}} \\ &= 1.2 \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \rho_{\text{ar}} \\ &= 4.926 \cdot 10^{-5} \end{aligned} \tag{2.5}$$

A massa do fluido adicionado é aproximadamente $m_f = m_{f1} + m_{f2} = 0.0253$g. Tem que a massa do barbante é $m_s/m_f = 19.45$ vezes maior que a massa do fluido adicionado.

Nota-se que o barbante pesa mais que o isopor, o que faria com que a tração não fosse principalmente devida pela bolinha de isopor, mas sim pelo barbante. Neste caso, pode-se prosseguir com o uso de um valor médio para $T(z)$? No momento considero que sim, pois acho que foi assim que foi feito nas simulações. Definindo uma constante τ que substitui o termo $\frac{\mu}{m}\left|\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}\right|$ já levando em conta um valor médio para $\left|\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}\right|$ e usando o valor médio T para a tração, tem-se

$$\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = -\frac{EJ}{m}\frac{\partial^4 \Upsilon}{\partial z^4} + \frac{T}{m}\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial z^2} - \tau \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \tag{2.6}$$

Antes de prosseguirmos para a discretização, e então obter as matrizes em espaço de estados, é importante pensar nas condições de contorno. No topo, $z = L$, tem-se $\Upsilon(L, t) = u(t)$, ou seja, o carrinho se move conforme uma trajetória $u(t)$ definida. Neste mesmo ponto, $\frac{\partial \Upsilon}{\partial z}(L, t) = 0$. Para a ponta na qual a carga está situada, $z = 0$, tem-se $\frac{\partial \Upsilon}{\partial z}(0, t) = \frac{F_L}{T}$, sendo F_L a força aplicada pela ponta do riser na carga. (Outra coisa que confundi, eu entendi $u(t)$ sendo uma trajetória, pois Υ é deslocamento, mas no artigo do Fabrício está escrito em uma momento que é uma força).

2.1 Discretização

De forma a se realizar o controle proposto, o sistema deve ter um espaço de estados finito. Para isso, aplica-se o método de diferenças finitas na coordenada z, de maneira a se aproximar a EDP governante em um número finito de EDOs. No espaço discreto, a equação do k-ésimo elemento é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Upsilon_k}{dt^2} = &-\frac{EJ}{m\Delta z^4}\left(\Upsilon_{k-2} - 4\Upsilon_{k-1} + 6\Upsilon_k - 4\Upsilon_{k+1} + \Upsilon_{k+2}\right) \\ &+ \frac{T}{m\Delta z^2}\left(\Upsilon_{k-1} - 2\Upsilon_k + \Upsilon_{k+1}\right) - \tau\frac{d\Upsilon_k}{dt}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

sendo Δz a distância entre dois pontos de discretização ($\Delta z = L/N$), L é o comprimento do riser e N é o número de pontos de discretização. (A tração $T(z)$ foi trocada por T já na Equação 2.6, sendo um valor médio).

Sendo $k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq N$, o que aconteceria quando $k = 1$ e se precisasse de Υ_{k-1} e Υ_{k-2}? Estes termos estariam fora do domínio. Para esse caso especial, deve ser utilizado diferenças finitas unilaterais, ou basta essa única discretização? Um problema similar ocorrer quando $k = N$. Vou considerar que é necessário usar diferenças finitas unilaterais. Assim, para $k = 1$, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Upsilon_k}{dt^2} = &-\frac{EJ}{m\Delta z^4}\left(3\Upsilon_k - 14\Upsilon_{k+1} + 26\Upsilon_{k+2} - 24\Upsilon_{k+3} + 11\Upsilon_{k+4} - 2\Upsilon_{k+5}\right) \\ &+ \frac{T}{m\Delta z^2}\left(2\Upsilon_k - 5\Upsilon_{k+1} + 4\Upsilon_{k+2} - \Upsilon_{k+3}\right) - \tau\frac{d\Upsilon_k}{dt},\end{aligned} \tag{2.8}$$

enquanto para $k = N$ tem-se

$$\begin{aligned}\frac{d^2\Upsilon_k}{dt^2} = &-\frac{EJ}{m\Delta z^4}\left(3\Upsilon_k - 14\Upsilon_{k-1} + 26\Upsilon_{k-2} - 24\Upsilon_{k-3} + 11\Upsilon_{k-4} - 2\Upsilon_{k-5}\right) \\ &+ \frac{T}{m\Delta z^2}\left(2\Upsilon_k - 5\Upsilon_{k-1} + 4\Upsilon_{k-2} - \Upsilon_{k-3}\right) - \tau\frac{d\Upsilon_k}{dt},\end{aligned} \tag{2.9}$$

Para simplificar, definem-se as constantes

$$a = -\frac{EJ}{m\Delta z^4} \tag{2.10}$$

$$b = \frac{T}{m\Delta z^4} \tag{2.11}$$

A meu ver, a melhor forma de se analisar como as matrizes do sistema ficarão é expandir o sistema para casos com N pequeno e ver o que está ocorrendo. Observe que $a = 0$ para o barbante, o que simplifica os próximos passos.

Para o caso $N = 6$, tem-se

$$\mathbf{x} = \left(\Upsilon_1\ \Upsilon_2\ \Upsilon_3\ \Upsilon_4\ \Upsilon_5\ \Upsilon_6\ \dot{\Upsilon}_1\ \dot{\Upsilon}_2\ \dot{\Upsilon}_3\ \dot{\Upsilon}_4\ \dot{\Upsilon}_5\ \dot{\Upsilon}_6\right)^T \tag{2.12}$$

$$u = \Upsilon(L,t) = \Upsilon_6 \tag{2.13}$$

$$y = \Upsilon(0,t) = \Upsilon_1 \tag{2.14}$$

e as equações são

$$\ddot{\Upsilon}_1 = b\left(2\Upsilon_1 - 5\Upsilon_2 + 4\Upsilon_3 - \Upsilon_4\right) - \tau\dot{\Upsilon}_1 \tag{2.15}$$

$$\ddot{\Upsilon}_2 = b\left(\Upsilon_1 - 2\Upsilon_2 + \Upsilon_3\right) - \tau\dot{\Upsilon}_2 \tag{2.16}$$

$$\ddot{\Upsilon}_3 = b\left(\Upsilon_2 - 2\Upsilon_3 + \Upsilon_4\right) - \tau\dot{\Upsilon}_3 \tag{2.17}$$

$$\ddot{\Upsilon}_4 = b\left(\Upsilon_3 - 2\Upsilon_4 + \Upsilon_5\right) - \tau\dot{\Upsilon}_4 \tag{2.18}$$

$$\ddot{\Upsilon}_5 = b\left(\Upsilon_4 - 2\Upsilon_5 + \Upsilon_6\right) - \tau\dot{\Upsilon}_5 \tag{2.19}$$

$$\ddot{\Upsilon}_6 = b\left(2\Upsilon_6 - 5\Upsilon_5 + 4\Upsilon_4 - \Upsilon_3\right) - \tau\dot{\Upsilon}_6 \tag{2.20}$$

Fazendo uso da Equação 2.13, tem-se

$$\ddot{\Upsilon}_1 = b(2\Upsilon_1 - 5\Upsilon_2 + 4\Upsilon_3 - \Upsilon_4) - \tau\dot{\Upsilon}_1 \tag{2.21}$$
$$\ddot{\Upsilon}_2 = b(\Upsilon_1 - 2\Upsilon_2 + \Upsilon_3) - \tau\dot{\Upsilon}_2 \tag{2.22}$$
$$\ddot{\Upsilon}_3 = b(\Upsilon_2 - 2\Upsilon_3 + \Upsilon_4) - \tau\dot{\Upsilon}_3 \tag{2.23}$$
$$\ddot{\Upsilon}_4 = b(\Upsilon_3 - 2\Upsilon_4 + \Upsilon_5) - \tau\dot{\Upsilon}_4 \tag{2.24}$$
$$\ddot{\Upsilon}_5 = b(\Upsilon_4 - 2\Upsilon_5 + u) - \tau\dot{\Upsilon}_5 \tag{2.25}$$
$$\ddot{\Upsilon}_6 = b(2u - 5\Upsilon_5 + 4\Upsilon_4 - \Upsilon_3) - \tau\dot{\Upsilon}_6, \tag{2.26}$$

desta forma tem-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2b & -5b & 4b & -b & 0 & 0 & -\tau & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & -2b & b & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & -2b & b & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & -2b & b & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & -2b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & -b & 4b & -5b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b \\ 2b \end{bmatrix} u \tag{2.27}$$

que pode ser representado concisamente como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6\times6} & \mathbf{I}_{6\times6} \\ \mathbf{M}_{6\times6} & -\tau\mathbf{I}_{6\times6} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{10\times1} \\ b \\ 2b \end{bmatrix} u \tag{2.28}$$

Esta matriz fornece um padrão que pode ser utilizado para se criar um algoritmo que gera as matrizes **A** e **B** automaticamente, sendo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$.

Listing 1: Código para gerar matrizes A, B e C

```
module GenerateABC
export generateA, generateB, generateC

function generateA(n, b, tau)
        M = zeros(n,n)
        #Primeira linha de M
        M[1,1] = 2*b
        M[1,2] = -5*b
        M[1,3] = 4*b
        M[1,4] = -b
```

```
	#Linhas 2 ate n-2
	for i = 2:n-2
		M[i,i-1] = b
		M[i,i] = -2*b
		M[i,i+1] = b
	end

	#Linha n-1
	M[n-1,n-2] = b
	M[n-1,n-1] = -2*b

	#Linha n
	M[n,n-3] = -b
	M[n,n-2] = 4*b
	M[n,n-1] = -5*b

	#Concatenar matrizes, gerando matriz (2n,2n)
	A = [[zeros(n,n) eye(n)]; [M -tau*eye(n)]]

	return A
end

function generateB(n, b, tau)
	B = zeros(2*n)
	B[2*n-1] = b
	B[2*n] = 2*b

	return B
end

function generateC(n,b,tau)
	C = zeros(2*n)
	C[1] = 1

	return C
end
end
```

3 Redução Modal