UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

Implementação de Controle com Redução Modal

Ataias Pereira Reis
Emanuel Pereira Barroso Neto

2 de fevereiro de 2016

1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste documento é apresentar os procedimentos necessários para implementar o método controle apresentado no artigo "*Modal Reduction Based Tracking Control for Installation of Subsea Equipments*", desenvolvido por Fabrício et al, em um controlador industrial da Rockwell. Nem todos os detalhes estão presentes no artigo, o que torna difícil simplesmente lê-lo e realizar o sistema.

2 EQUAÇÕES GOVERNANTES

Para o riser, a Equação 2.1 representa o deslocamento horizontal $\Upsilon(z,t)$ do tubo — um barbante, no caso da bancada de laboratório — sob a ação de forças hidrodinâmicas externas $F_n(z,t)$ e tração $T(z)$:

$$m_s \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = -EJ\frac{\partial^4 \Upsilon}{\partial z^4} + \frac{\partial}{\partial z}\left(T(z)\frac{\partial \Upsilon}{\partial z}\right) + F_n(z,t) \tag{2.1}$$

Antes de prosseguir, é importante definir termos desta equação:

- m_s é a massa linear do barbante (o professor Eugênio disse isso, mas o que seria massa linear? É a densidade linear? Ou é simplesmente a massa do barbante?)
- E é o módulo de Young do barbante e ele é desconhecido

- J é o segundo momento de área e representa a resistência do barbante à flexão. O barbante não apresenta tal resistência, daí $J = 0$

- $T(z)$ é a força de tração e é dada por

$$T(z) = \left(m_b + \frac{z}{L} m_s\right) g,$$

sendo m_b a massa da bolinha, L o comprimento do barbante, z a posição vertical sendo o carrinho o zero e g é a força da gravidade. (Aqui, estou considerando m_s como a massa total do barbante. Caso fosse densidade linear, $T(z) = (m_b + z \cdot m_s)g$)

A força externa resultante, $F_n(z,t)$, é dada por

$$F_n(z,t) = -m_f \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} - \mu \left| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \right| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t}, \tag{2.2}$$

na qual μ é o coeficiente de arrasto e m_f é a massa do fluido adicionado, que será posteriormente pormenorizada. Fazendo $m = m_s + m_f$ e substituindo a Equação 2.2 na 2.1, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = -\frac{EJ}{m} \frac{\partial^4 \Upsilon}{\partial z^4} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{T(z)}{m} \frac{\partial \Upsilon}{\partial z}\right) - \frac{\mu}{m} \left| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \right| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \tag{2.3}$$

No artigo do Fabrício, fala "*Since the traction $T(z)$ is mostly due to the heavy payload, it can be assumed an average value T for it, taken in the middle of the riser's length.*". Eu suspeito da veracidade desta frase quando analisado os dados

- Massa do isopor: 0.15g
- Diâmetro da bolinha: 30.6mm
- Massa do barbante: 0.492g
- Comprimento do barbante: 0.82m
- Diâmetro do barbante: 2mm
- Densidade linear considerando densidade volumétrica 191kg/m^3 é de 0.6g/m.
- Massa do barbante pela da bolinha aproximadamente 3 (0.492/0.15).

A massa do barbante, $m_s = 0.492$g, é bem maior que a massa m_f do fluido adicionado. Para verificar isso, calculemos primeiro a massa m_{f1} do fluido adicionado ao redor do barbante:

$$\begin{aligned} m_{f1} &= 2V_b \rho_{\text{ar}} \\ &= 2\pi r^2 L \rho_{\text{ar}} \\ &= 0.025246\text{g} \end{aligned} \tag{2.4}$$

e a massa m_{f2} do fluido adicionado ao redor da bolinha de isopor é

$$
\begin{aligned}
m_{f2} &= 1.2V_e\rho_{\text{ar}} \\
&= 1.2\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)\rho_{\text{ar}} \\
&= 4.926\cdot 10^{-5}
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

A massa do fluido adicionado é aproximadamente $m_f = m_{f1} + m_{f2} = 0.0253$g. Tem que a massa do barbante é $m_s/m_f = 19.45$ vezes maior que a massa do fluido adicionado.

Nota-se que o barbante pesa mais que o isopor, o que faria com que a tração não fosse principalmente devida pela bolinha de isopor, mas sim pelo barbante. Neste caso, não se prossegue usando um valor médio para $T(z)$ como no artigo do Fabrício, mas ainda se define uma constante τ que substitui o termo $\frac{\mu}{m}\left|\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}\right|$ já levando em conta um valor médio para $\left|\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}\right|$, resultando em

$$
\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = -\frac{EJ}{m}\frac{\partial^4 \Upsilon}{\partial z^4} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{T(z)}{m}\frac{\partial \Upsilon}{\partial z}\right) - \tau\frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \tag{2.6}
$$

Antes de prosseguirmos para a discretização, e então obter as matrizes em espaço de estados, é importante pensar nas condições de contorno. No topo, $z = L$, tem-se $\Upsilon(L,t) = u(t)$, ou seja, o carrinho se move conforme uma trajetória $u(t)$ definida. Neste mesmo ponto, $\frac{\partial \Upsilon}{\partial z}(L,t) = 0$. Para a ponta na qual a carga está situada, $z = 0$, tem-se $\frac{\partial \Upsilon}{\partial z}(0,t) = \frac{F_L}{T}$, sendo F_L a força aplicada pela ponta do riser na carga. (Outra coisa que confundi, eu entendi $u(t)$ sendo uma trajetória, pois Υ é deslocamento, mas no artigo do Fabrício está escrito em uma momento que é uma força).

2.1 Discretização

De forma a se realizar o controle proposto, o sistema deve ter um espaço de estados finito. Para isso, aplica-se o método de diferenças finitas na coordenada z de maneira a se aproximar a EDP governante em um número finito de EDOs. No espaço discreto, a equação do k-ésimo elemento é dada por

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\Upsilon_k}{dt^2} = &-\frac{EJ}{ml^4}(\Upsilon_{k-2} - 4\Upsilon_{k-1} + 6\Upsilon_k - 4\Upsilon_{k+1} + \Upsilon_{k+2}) \\
&+ \frac{T_0 + mg(k-1)l}{ml^2}(\Upsilon_{k-1} - 2\Upsilon_k + \Upsilon_{k+1}) + g\frac{-\Upsilon_{k-1} + \Upsilon_{k+1}}{2l} - \tau\frac{d\Upsilon_k}{dt},
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

sendo l a distância entre dois pontos de discretização ($l = L/N$), L é o comprimento do riser e N é o número de pontos de discretização. (A tração $T(z)$ foi trocada por T já na Equação 2.6, sendo um valor médio).

Sendo $k \in \mathbb{N} : 1 \le k \le N$, o que aconteceria quando $k = 1$ e se precisasse de Υ_{k-1} e Υ_{k-2}? Na realidade, os N pontos se referem aos pontos internos e então este problema não deve ocorrer.

Para simplificar, definem-se as constantes

$$a = -\frac{EJ}{ml^4} \tag{2.8}$$

$$b_k = \frac{T_0 + mg(k-1)l}{ml^4},\ k \geq 2 \tag{2.9}$$

$$c = b + \frac{g}{2l} \tag{2.10}$$

$$d_k = b_k - c,\ k \geq 2 \tag{2.11}$$

$$e_k = b_k + c,\ k \geq 2 \tag{2.12}$$

A meu ver, a melhor forma de se analisar como as matrizes do sistema ficarão é expandir o sistema para casos com N pequeno e ver o que está ocorrendo. Observe que $a = 0$ para o barbante, o que simplifica os próximos passos.

Para o caso $N = 6$, tem-se

$$\mathbf{x} = \left(\Upsilon_1\ \Upsilon_2\ \Upsilon_3\ \Upsilon_4\ \Upsilon_5\ \Upsilon_6\ \dot{\Upsilon}_1\ \dot{\Upsilon}_2\ \dot{\Upsilon}_3\ \dot{\Upsilon}_4\ \dot{\Upsilon}_5\ \dot{\Upsilon}_6\right)^T \tag{2.13}$$

$$u = \Upsilon(L,t) = \Upsilon_7 \tag{2.14}$$

$$y = \Upsilon(0,t) = \Upsilon_1 \tag{2.15}$$

e as equações são

$$\begin{aligned}\ddot{\Upsilon}_2 &= b_2\left(\Upsilon_1 - 2\Upsilon_2 + \Upsilon_3\right) + c(-\Upsilon_1 + \Upsilon_3) - \tau\dot{\Upsilon}_2 \\ &= d_2\Upsilon_1 - 2b_2\Upsilon_2 + e_2\Upsilon_3 - \tau\dot{\Upsilon}_2 \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\Upsilon}_3 &= b_3\left(\Upsilon_2 - 2\Upsilon_3 + \Upsilon_4\right) + c(-\Upsilon_2 + \Upsilon_4) - \tau\dot{\Upsilon}_3 \\ &= d_3\Upsilon_2 - 2b_3\Upsilon_3 + e_3\Upsilon_4 - \tau\dot{\Upsilon}_3 \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\Upsilon}_4 &= b_4\left(\Upsilon_3 - 2\Upsilon_4 + \Upsilon_5\right) + c(-\Upsilon_3 + \Upsilon_5) - \tau\dot{\Upsilon}_4 \\ &= d_4\Upsilon_3 - 2b_4\Upsilon_4 + e_4\Upsilon_5 - \tau\dot{\Upsilon}_4 \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\Upsilon}_5 &= b_5\left(\Upsilon_4 - 2\Upsilon_5 + \Upsilon_6\right) + c(-\Upsilon_4 + \Upsilon_6) - \tau\dot{\Upsilon}_5 \\ &= d_5\Upsilon_4 - 2b_5\Upsilon_5 + e_5\Upsilon_6 - \tau\dot{\Upsilon}_5 \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\Upsilon}_6 &= b_6\left(\Upsilon_5 - 2\Upsilon_6 + u\right) + c(-\Upsilon_5 + u) - \tau\dot{\Upsilon}_6 \\ &= d_6\Upsilon_5 - 2b_6\Upsilon_6 + e_6 u - \tau\dot{\Upsilon}_6 \end{aligned} \tag{2.20}$$

A equação para a posição da carga Υ_1 leva em conta a massa da bolinha e a força de Morison:

$$m_b\ddot{\Upsilon}_1 = \frac{m_b g}{(N-1)l}\left(\Upsilon_2 - \Upsilon_1\right) + \rho C_m V\ddot{\Upsilon}_1 - \frac{1}{2}\rho C_d A\dot{\Upsilon}_1\left|\dot{\Upsilon}_1\right|, \tag{2.21}$$

e, isolando-se $\ddot{\Upsilon}_1$, tem-se

$$\ddot{\Upsilon}_1 = \frac{m_b g}{m'(N-1)l}\left(\Upsilon_2 - \Upsilon_1\right) - \frac{1}{2m'}\rho C_d A\dot{\Upsilon}_1\left|\dot{\Upsilon}_1\right|, \tag{2.22}$$

com as constantes

- $\rho = 1.225 \text{kg/m}^3$, a densidade do ar
- $C_m = 2$, o coeficiente de inércia da esfera
- $C_d = 0.6$, o coeficiente de arrasto da esfera
- $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, o volume da esfera
- $A = \pi r^2$, a área da maior seção transversal da esfera
- $m' = m_b + \rho C_m V$

Anteriormente, foi apresentada a linearização τ para o termo $\frac{1}{2m}\rho C_d A \left|\dot{\Upsilon}_k\right|$ do cabo. Assumo que isso também seja necessário para a bola, resultando em um τ':

$$\ddot{\Upsilon}_1 = b_1 \left(-\Upsilon_1 + \Upsilon_2\right) - \tau' \dot{\Upsilon}_1, \tag{2.23}$$

com $b_1 = \frac{m_b g}{m'(N-1)l}$.

Desta forma, pode-se definir o sistema linear em forma matricial

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -b_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & -2b_2 & e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_3 & -2b_3 & e_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_4 & -2b_4 & e_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_5 & -2b_5 & e_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_6 & -2b_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e_6 \end{bmatrix} u \tag{2.24}$$

que pode ser representado concisamente como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6\times 6} & \mathbf{I}_{6\times 6} \\ \mathbf{M}_{6\times 6} & \mathbf{L}_{6\times 6} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{11\times 1} \\ e_6 \end{bmatrix} u \tag{2.25}$$