Universidade de Brasília

Implementação de Controle com Redução Modal

Ataias Pereira Reis
Emanuel Pereira Barroso Neto

28 de março de 2016

1 Introdução

O objetivo deste documento é apresentar os procedimentos necessários para implementar o método controle apresentado no artigo "*Modal Reduction Based Tracking Control for Installation of Subsea Equipments*", desenvolvido por Fabrício et al, em um controlador industrial da Rockwell. Nem todos os detalhes estão presentes no artigo, o que torna difícil simplesmente lê-lo e realizar o sistema.

2 Equações Governantes

Para o riser, a Equação 2.1 representa o deslocamento horizontal $\Upsilon(z,t)$ do tubo — um barbante, no caso da bancada de laboratório — sob a ação de forças hidrodinâmicas externas $F_n(z,t)$ e tração $T(z)$:

$$m_s \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = -EJ \frac{\partial^4 \Upsilon}{\partial z^4} + \frac{\partial}{\partial z}\left(T(z)\frac{\partial \Upsilon}{\partial z}\right) + F_n(z,t) \tag{2.1}$$

Antes de prosseguir, é importante definir termos desta equação:

- m_s é a massa linear do barbante (o professor Eugênio disse isso, mas o que seria massa linear? É a densidade linear? Ou é simplesmente a massa do barbante?)
- E é o módulo de Young do barbante e ele é desconhecido

- J é o segundo momento de área e representa a resistência do barbante à flexão. O barbante não apresenta tal resistência, daí $J = 0$

- $T(z)$ é a força de tração e é dada por

$$T(z) = \left(m_b + \frac{z}{L} m_s\right) g,$$

sendo m_b a massa da bolinha, L o comprimento do barbante, z a posição vertical sendo o carrinho o zero e g é a força da gravidade. (Aqui, estou considerando m_s como a massa total do barbante. Caso fosse densidade linear, $T(z) = (m_b + z \cdot m_s) g$)

A força externa resultante, $F_n(z,t)$, é dada por

$$F_n(z,t) = -m_f \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} - \mu \left| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \right| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t}, \tag{2.2}$$

na qual μ é o coeficiente de arrasto e m_f é a massa do fluido adicionado, que será posteriormente pormenorizada. Fazendo $m = m_s + m_f$ e substituindo a Equação 2.2 na 2.1, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = -\frac{EJ}{m} \frac{\partial^4 \Upsilon}{\partial z^4} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{T(z)}{m} \frac{\partial \Upsilon}{\partial z} \right) - \frac{\mu}{m} \left| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \right| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \tag{2.3}$$

No artigo do Fabrício, fala "*Since the traction $T(z)$ is mostly due to the heavy payload, it can be assumed an average value T for it, taken in the middle of the riser's length.*". Eu suspeito da veracidade desta frase quando analisado os dados

- Massa do isopor: 0.15g
- Diâmetro da bolinha: 30.6mm
- Massa do barbante: 0.492g
- Comprimento do barbante: 0.82m
- Diâmetro do barbante: 2mm
- Densidade linear considerando densidade volumétrica 191kg/m^3 é de 0.6g/m.
- Massa do barbante pela da bolinha aproximadamente 3 (0.492/0.15).

A massa do barbante, $m_s = 0.492$g, é bem maior que a massa m_f do fluido adicionado. Para verificar isso, calculemos primeiro a massa m_{f1} do fluido adicionado ao redor do barbante:

$$\begin{aligned} m_{f1} &= 2V_b \rho_{\text{ar}} \\ &= 2\pi r^2 L \rho_{\text{ar}} \\ &= 0.025246\text{g} \end{aligned} \tag{2.4}$$

e a massa m_{f2} do fluido adicionado ao redor da bolinha de isopor é

$$\begin{aligned} m_{f2} &= 1.2 V_e \rho_{\text{ar}} \\ &= 1.2 \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) \rho_{\text{ar}} \\ &= 4.926 \cdot 10^{-5} \end{aligned} \tag{2.5}$$

A massa do fluido adicionado é aproximadamente $m_f = m_{f1} + m_{f2} = 0.0253$g. Tem que a massa do barbante é $m_s/m_f = 19.45$ vezes maior que a massa do fluido adicionado.

Nota-se que o barbante pesa mais que o isopor, o que faria com que a tração não fosse principalmente devida pela bolinha de isopor, mas sim pelo barbante. Neste caso, não se prossegue usando um valor médio para $T(z)$ como no artigo do Fabrício, mas ainda se define uma constante τ que substitui o termo $\frac{\mu}{m} \left| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \right|$ já levando em conta um valor médio para $\left| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \right|$, resultando em

$$\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = -\frac{EJ}{m} \frac{\partial^4 \Upsilon}{\partial z^4} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{T(z)}{m} \frac{\partial \Upsilon}{\partial z} \right) - \tau \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \tag{2.6}$$

Antes de prosseguirmos para a discretização, e então obter as matrizes em espaço de estados, é importante pensar nas condições de contorno. No topo, $z = L$, tem-se $\Upsilon(L, t) = u(t)$, ou seja, o carrinho se move conforme uma trajetória $u(t)$ definida. Neste mesmo ponto, $\frac{\partial \Upsilon}{\partial z}(L, t) = 0$. Para a ponta na qual a carga está situada, $z = 0$, tem-se $\frac{\partial \Upsilon}{\partial z}(0, t) = \frac{F_L}{T}$, sendo F_L a força aplicada pela ponta do riser na carga. (Outra coisa que confundi, eu entendi $u(t)$ sendo uma trajetória, pois Υ é deslocamento, mas no artigo do Fabrício está escrito em uma momento que é uma força).

2.1 Discretização

De forma a se realizar o controle proposto, o sistema deve ter um espaço de estados finito. Para isso, aplica-se o método de diferenças finitas na coordenada z de maneira a se aproximar a EDP governante em um número finito de EDOs. No espaço discreto, a equação do k-ésimo elemento é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Upsilon_k}{dt^2} &= -\frac{EJ}{ml^4} \left(\Upsilon_{k-2} - 4\Upsilon_{k-1} + 6\Upsilon_k - 4\Upsilon_{k+1} + \Upsilon_{k+2} \right) \\ &\quad + \frac{T_0 + mg(k-1)l}{ml^2} \left(\Upsilon_{k-1} - 2\Upsilon_k + \Upsilon_{k+1} \right) + g \frac{-\Upsilon_{k-1} + \Upsilon_{k+1}}{2l} - \tau \frac{d\Upsilon_k}{dt}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

sendo l a distância entre dois pontos de discretização ($l = L/N$), L é o comprimento do riser e N é o número de pontos de discretização. (A tração $T(z)$ foi trocada por T já na Equação 2.6, sendo um valor médio).

Sendo $k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq N$, o que aconteceria quando $k = 1$ e se precisasse de Υ_{k-1} e Υ_{k-2}? Na realidade, os N pontos se referem aos pontos internos e então este problema não deve ocorrer.

Para simplificar, definem-se as constantes

$$a = -\frac{EJ}{ml^4} \tag{2.8}$$

$$b_k = \frac{T_0 + mg(k-1)l}{ml^4}, \ k \geq 2 \tag{2.9}$$

$$c = b + \frac{g}{2l} \tag{2.10}$$

$$d_k = b_k - c, \ k \geq 2 \tag{2.11}$$

$$e_k = b_k + c, \ k \geq 2 \tag{2.12}$$

A meu ver, a melhor forma de se analisar como as matrizes do sistema ficarão é expandir o sistema para casos com N pequeno e ver o que está ocorrendo. Observe que $a = 0$ para o barbante, o que simplifica os próximos passos.

Para o caso $N = 6$, tem-se

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \ \Upsilon_2 \ \Upsilon_3 \ \Upsilon_4 \ \Upsilon_5 \ \Upsilon_6 \ \dot{\Upsilon}_1 \ \dot{\Upsilon}_2 \ \dot{\Upsilon}_3 \ \dot{\Upsilon}_4 \ \dot{\Upsilon}_5 \ \dot{\Upsilon}_6 \end{pmatrix}^T \tag{2.13}$$

$$u = \Upsilon(L, t) = \Upsilon_7 \tag{2.14}$$

$$y = \Upsilon(0, t) = \Upsilon_1 \tag{2.15}$$

e as equações são

$$\begin{aligned} \ddot{\Upsilon}_2 &= b_2 \left(\Upsilon_1 - 2\Upsilon_2 + \Upsilon_3\right) + c(-\Upsilon_1 + \Upsilon_3) - \tau\dot{\Upsilon}_2 \\ &= d_2\Upsilon_1 - 2b_2\Upsilon_2 + e_2\Upsilon_3 - \tau\dot{\Upsilon}_2 \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\Upsilon}_3 &= b_3 \left(\Upsilon_2 - 2\Upsilon_3 + \Upsilon_4\right) + c(-\Upsilon_2 + \Upsilon_4) - \tau\dot{\Upsilon}_3 \\ &= d_3\Upsilon_2 - 2b_3\Upsilon_3 + e_3\Upsilon_4 - \tau\dot{\Upsilon}_3 \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\Upsilon}_4 &= b_4 \left(\Upsilon_3 - 2\Upsilon_4 + \Upsilon_5\right) + c(-\Upsilon_3 + \Upsilon_5) - \tau\dot{\Upsilon}_4 \\ &= d_4\Upsilon_3 - 2b_4\Upsilon_4 + e_4\Upsilon_5 - \tau\dot{\Upsilon}_4 \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\Upsilon}_5 &= b_5 \left(\Upsilon_4 - 2\Upsilon_5 + \Upsilon_6\right) + c(-\Upsilon_4 + \Upsilon_6) - \tau\dot{\Upsilon}_5 \\ &= d_5\Upsilon_4 - 2b_5\Upsilon_5 + e_5\Upsilon_6 - \tau\dot{\Upsilon}_5 \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\Upsilon}_6 &= b_6 \left(\Upsilon_5 - 2\Upsilon_6 + u\right) + c(-\Upsilon_5 + u) - \tau\dot{\Upsilon}_6 \\ &= d_6\Upsilon_5 - 2b_6\Upsilon_6 + e_6 u - \tau\dot{\Upsilon}_6 \end{aligned} \tag{2.20}$$

A equação para a posição da carga Υ_1 leva em conta a massa da bolinha e a força de Morison:

$$m_b\ddot{\Upsilon}_1 = \frac{m_b g}{(N-1)l}\left(\Upsilon_2 - \Upsilon_1\right) + \rho C_m V\ddot{\Upsilon}_1 - \frac{1}{2}\rho C_d A\dot{\Upsilon}_1 \left|\dot{\Upsilon}_1\right|, \tag{2.21}$$

e, isolando-se $\ddot{\Upsilon}_1$, tem-se

$$\ddot{\Upsilon}_1 = \frac{m_b g}{m'(N-1)l}\left(\Upsilon_2 - \Upsilon_1\right) - \frac{1}{2m'}\rho C_d A \dot{\Upsilon}_1 \left|\dot{\Upsilon}_1\right|, \tag{2.22}$$

com as constantes

- $\rho = 1.225 \mathrm{kg/m^3}$, a densidade do ar
- $C_m = 2$, o coeficiente de inércia da esfera
- $C_d = 0.6$, o coeficiente de arrasto da esfera
- $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, o volume da esfera
- $A = \pi r^2$, a área da maior seção transversal da esfera
- $m' = m_b + \rho C_m V$

Anteriormente, foi apresentada a linearização τ para o termo $\frac{1}{2m}\rho C_d A \left|\dot{\Upsilon}_k\right|$ do cabo. Assumo que isso também seja necessário para a bola, resultando em um τ':

$$\ddot{\Upsilon}_1 = b_1\left(-\Upsilon_1 + \Upsilon_2\right) - \tau'\dot{\Upsilon}_1, \tag{2.23}$$

com $b_1 = \frac{m_b g}{m'(N-1)l}$.

Desta forma, pode-se definir o sistema linear em forma matricial

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -b_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & -2b_2 & e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_3 & -2b_3 & e_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_4 & -2b_4 & e_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_5 & -2b_5 & e_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_6 & -2b_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e_6 \end{bmatrix} u \tag{2.24}$$

que pode ser representado concisamente como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6\times 6} & \mathbf{I}_{6\times 6} \\ \mathbf{M}_{6\times 6} & \mathbf{L}_{6\times 6} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{11\times 1} \\ e_6 \end{bmatrix} u \tag{2.25}$$

Para o caso de uma discretização com N pontos, tem-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N\times N} & \mathbf{I}_{N\times N} \\ \mathbf{M}_{N\times N} & \mathbf{L}_{N\times N} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2N-1\times 1} \\ e_N \end{bmatrix} u \tag{2.26}$$

3 Uma Estratégia de Redução da Ordem do Modelo

A maior parte da teoria clássica de controle lida com sistemas representados por um pequeno número de variáveis de estado. Portanto, uma forma de aplicar métodos clássicos de controle da literatura para sistemas de parâmetros distribuídos discretos é por meio de uma redução da ordem do modelo.

Tal redução do modelo será feita em duas etapas: primeiro, uma transformação modal é aplicada nas equações originais do espaço de estados, resultando em uma nova representação em variáveis modais. Nesta forma, o sistema pode ser visto como um conjunto de subsistemas dissociados em paralelo, cuja influência na saída pode ser calculada individualmente. Então, os subsistemas com os maiores ganhos estáticos são escolhidos para criar um modelo de ordem reduzida.

3.1 Decomposição Modal

Primeiro, deve-se obter os autovalores do espaço de estados do *riser*. Observa-se que eles são sempre distintos entre si, uma condição suficiente para a diagonalização da matriz do espaço de estados. Assim, calcula-se a matriz modal $\mathbf{T}$, cuja i-ésima coluna é o i-ésimo autovetor do sistema:

$$\mathbf{T} = (\ \mathbf{v_1} \mid \mathbf{v_2} \mid \ \dots \ \mid \mathbf{v_{2N}}\ )_{1\times 2N} \tag{3.1}$$

A matriz $\mathbf{T}$ é utilizada para uma transformação de similaridade no sistema original:

$$\mathbf{A_M} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}, \tag{3.2}$$

$$\mathbf{x_M} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}, \tag{3.3}$$

$$\mathbf{B_M} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}, \ \text{e} \tag{3.4}$$

$$\mathbf{C_M} = \mathbf{C}\mathbf{T}. \tag{3.5}$$

O sistema transformado, denotado pelo subscrito $\mathbf{M}$, é mais adequado à análise. $\mathbf{A_M}$ é uma matriz diagonal, com seus autovalores explícitos, e permitindo o desacoplamento do sistema original em N subsistemas de segunda ordem formados por pares de autovalores reais ou complexo-conjugados.

3.2 Redução Modal

Neste estágio, procura-se determinar quais dos subsistemas são mais adequados para aproximar o modelo original por meio do cálculo do ganho estático de cada um. Este método depende da predominância de uns poucos autovalores na resposta do sistema, já que altas frequências são muito atenuadas pelas forças hidrodinâmicas e pela suavidade da entrada.

Os subsistemas selecionados são combinados em um modelo reduzido

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A_R}\mathbf{z} + \mathbf{B_R}u \tag{3.6}$$

$$y = \mathbf{C_R}\mathbf{z} + \mathbf{D_R}u \tag{3.7}$$

cuja ordem é escolhida considerando o custo-benefício entre a acurácia da dinâmica reduzida e a simplicidade da estrutura de controle exigida. Além disso, o sistema reduzido deve compensar o ganho estático perdido nos autovalores desconsiderados. Isto é feito por meio de uma matriz de transferência direta $\mathbf{D_R}$, que é a diferença dos ganhos dos sistemas original e reduzido:

$$\mathbf{D_R} = \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{C_R}\mathbf{A_R^{-1}}\mathbf{B_R} \tag{3.8}$$

O subsistemas são de ordem 1 ou 2 dependendo se o autovalor é real ou um par complexo conjugado.

A matriz de transferência direta $\mathbf{D_R}$ introduz novas dinâmicas: uma saída não-nula que não leva em conta o atraso de propagação da entrada e um ganho em altas frequências. Conforme mostrado por Fortaleza (2009), podemos refinar o modelo reduzido introduzindo um atraso de entrada ϵ que minimiza a transferência direta e garante dinâmica nula para $t < \epsilon$:

$$\begin{array}{rcl} \dot{\mathbf{z}} & = & \mathbf{A_R}\mathbf{z} + \mathbf{B_D}u(t-\epsilon) \\ y & = & \mathbf{C_R}\mathbf{z} + \mathbf{D_D}u(t-\epsilon) \end{array} \tag{3.9}$$

sendo

$$\mathbf{B_D} = \mathbf{A_M}\left(e^{\epsilon\mathbf{A_M}}\right)\mathbf{A_M^{-1}}\mathbf{B_M} \tag{3.10}$$

$$\mathbf{D_D} = \mathbf{C_M}\left(e^{\epsilon\mathbf{A_M}} - \mathbf{I}\right)\mathbf{A_M^{-1}}\mathbf{B_M} + \mathbf{D_M} \tag{3.11}$$

O novo modelo reduzido (3.9) é tal que, para uma entrada degrau no instante t', a saída mantém seu valor inicial enquanto $t < t' + \epsilon$. Para $t \geq t' + \epsilon$, ambos os modelos reduzidos produzem a mesma saída. O atraso ϵ pode ser visto como uma aproximação para o atraso natural de propagação da estrutura.

4 Projeto de Controle

4.1 Planejamento Offline de Trajetória

A dinâmica do modelo de ordem reduzida (3.9) é comparada com aquela do sistema original. Escolhendo uma redução para ordem 4, com dois pares de autovalores complexo-conjugados $(\lambda_i, \overline{\lambda}_i$, com $\lambda_i = \sigma_i + jw_i)$, a equação do sistema em espaço de estados é

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & w_1 & 0 & 0 \\ -w_1 & \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 & w_2 \\ 0 & 0 & -w_2 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} u(t-\epsilon) \tag{4.1}$$

$$y = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + (d)u(t-\epsilon) \tag{4.2}$$

As constantes b_i e c_i são diferentes das definidas anteriormente.

Normalmente o problema de planejamento de trajetória consiste em encontrar um controle em malha aberta $u^*(t)$, de forma que as variáveis de estado sigam uma trajetória $z^*(t)$. O problema aqui é que $z^*(t)$ carece de interpretação física; ou seja, $z^*(t)$ não se relaciona de maneira clara com nenhuma variável de estado original do *riser*, e, portanto, com a operação de re-entrada. Uma forma de se lidar com isso é lidar com a trajetória da saída *flat* do sistema.

Para um sistema ser *flat*, é condição suficiente ele ser plenamente controlável, ou seja, a matriz de controlabilidade $K = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix}$ deve ser de posto pleno. A partir de z, podemos obter uma saída *flat* (f), dada por uma combinação linear das variáveis de estado (z_1, z_2, z_3, z_4) obtida utilizando-se a última linha de K^{-1}:

$$f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} K^{-1} z \tag{4.3}$$

$$f = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 + \alpha_4 z_4 \tag{4.4}$$

Deseja-se que a entrada u dependa apenas de f e suas derivadas temporais. Para isso, é necessário que f seja tantas vezes derivável quanto indica a ordem do sistema. No presente estudo, f deve ser ao menos 4 vezes derivável. Derivando f de acordo com a Equação 4.4, temos:

$$\begin{aligned} \dot{f} &= \alpha_5 z_1 + \alpha_6 z_2 + \alpha_7 z_3 + \alpha_8 z_4 \\ \ddot{f} &= \alpha_9 z_1 + \alpha_{10} z_2 + \alpha_{11} z_3 + \alpha_{12} z_4 \\ \dddot{f} &= \alpha_{13} z_1 + \alpha_{14} z_2 + \alpha_{15} z_3 + \alpha_{16} z_4 \\ f^{(4)} &= \alpha_{17} z_1 + \alpha_{18} z_2 + \alpha_{19} z_3 + \alpha_{20} z_4 + \gamma u \end{aligned} \tag{4.5}$$

Das Equações 4.4 e 4.5, podemos definir a seguinte matriz M, sabendo que

$$\begin{pmatrix} f \\ \dot{f} \\ \ddot{f} \\ \dddot{f} \\ f^{(4)} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ u \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

Pela Equação 4.6:

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \\ \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_8 & 0 \\ \alpha_9 & \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ \alpha_{13} & \alpha_{14} & \alpha_{15} & \alpha_{16} & 0 \\ \alpha_{17} & \alpha_{18} & \alpha_{19} & \alpha_{20} & \gamma \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

Para se obter u em função de uma trajetória f, podemos utilizar a Equação 4.6. Multiplicando os dois membros da equação à esquerda por M^{-1}, vem

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ u \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} f \\ \dot{f} \\ \ddot{f} \\ \dddot{f} \\ f^{(4)} \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

Observando-se a Equação 4.8, é trivial notar que u será uma combinação linear de f e suas derivadas temporais, sendo os coeficientes fornecidos pela última linha da matriz M^{-1}. COm efeito, podemos escrever:

$$u = \beta_0 f + \beta_1 \dot{f} + \beta_2 \ddot{f} + \beta_3 \dddot{f} + \beta_4 f^{(4)} \tag{4.9}$$

O próximo passo, agora, é planejar a trajetória por meio de $f^*(t)$. O modo mais simples é utilizar uma interpolação polinomial, com coeficientes a_i escolhidos de tal forma que o valor de $f^*(t)$ seja nulo até o tempo de início da operação ($t = t'$); também é necessário que $f^*(t)$ atinja um valor constante c_f após um tempo de operação t_f ($t = t' + t_f$). Além disso, é necessário que as cinco primeiras derivadas temporais de $f^*(t)$ sejam nulas nos extremos da operação, de forma a assumir uma trajetória suave de referência para $f^{(4)}$ na vizinhança de c_f. Assumindo-se um polinômio de grau 11 para $f^*(t)$, vem

$$f^*(t) = \begin{cases} 0, \forall t < t' \\ \sum_{k=0}^{11} a_i t^k \\ c_f, \forall t > t_f + t' \end{cases} \tag{4.10}$$

4.2 Trajetória em Malha Fechada

Após o planejamento da trajetória, com a obtenção de $f^*(t)$, o próximo passo é obter uma lei de controle em malha fechada para que se corrija o erro de trajetória dado por $e = f(t) - f^*(t)$. Fazendo uma mudança de coordenadas:

$$\upsilon = -\frac{\beta_0}{\beta_4} f - \frac{\beta_1}{\beta_4} \dot{f} - \frac{\beta_2}{\beta_4} \ddot{f} - \frac{\beta_3}{\beta_4} \dddot{f} + \frac{1}{\beta_4} u \tag{4.11}$$

Tomando-se a Equação 4.9, temos que $\upsilon = f^{(4)}$. Com essa informação, podemos configurar um controlador com realimentação *tracking* (Nota: verificar esse conceito!) com a expressão que se segue

$$\upsilon = f^{*(4)} - k_4 \dddot{e} - k_3 \ddot{e} - k_2 \dot{e} - k_1 e - k_0 \int_0^t e \mathrm{d}t \tag{4.12}$$

Os valores dos ganhos k_i devem ser tais que o polinômio característico em malha fechada $s^5 + k_4 s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0$ seja estável (ver Fabrício et al.). Portanto, o erro e convergirá exponencialmente para 0, e $f(t)$, além de suas derivadas até a 4ª ordem, convergirão para suas trajetórias de referência: $f^*(t), ..., f^{*(4)}(t)$. Na Equação 4.12, o termo $k_0 \int_0^t e\mathrm{d}t$ é introduzido de forma a se corrigir erros estáticos causados por perturbações externas.

A expressão final para a entrada original u, portanto, fica

$$u = \beta_0 f + \beta_1 \dot{f} + \beta_1 \ddot{f} + \beta_1 \dddot{f} + \beta_4 \upsilon \tag{4.13}$$

Em que υ é dado pela Equação 4.11.