UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

Implementação de Controle com Redução Modal

Ataias Pereira Reis
Emanuel Pereira Barroso Neto

18 de fevereiro de 2016

1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste documento é apresentar os procedimentos necessários para implementar o método controle apresentado no artigo "*Modal Reduction Based Tracking Control for Installation of Subsea Equipments*", desenvolvido por Fabrício et al, em um controlador industrial da Rockwell. Nem todos os detalhes estão presentes no artigo, o que torna difícil simplesmente lê-lo e realizar o sistema.

2 EQUAÇÕES GOVERNANTES

Para o riser, a Equação 2.1 representa o deslocamento horizontal $\Upsilon(z,t)$ do tubo — um barbante, no caso da bancada de laboratório — sob a ação de forças hidrodinâmicas externas $F_n(z,t)$ e tração $T(z)$:

$$m_s \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = -EJ \frac{\partial^4 \Upsilon}{\partial z^4} + \frac{\partial}{\partial z}\left(T(z) \frac{\partial \Upsilon}{\partial z} \right) + F_n(z,t) \tag{2.1}$$

Antes de prosseguir, é importante definir termos desta equação:

- m_s é a massa linear do barbante (o professor Eugênio disse isso, mas o que seria massa linear? É a densidade linear? Ou é simplesmente a massa do barbante?)
- E é o módulo de Young do barbante e ele é desconhecido

- J é o segundo momento de área e representa a resistência do barbante à flexão. O barbante não apresenta tal resistência, daí $J = 0$

- $T(z)$ é a força de tração e é dada por

$$T(z) = \left(m_b + \frac{z}{L} m_s\right) g,$$

sendo m_b a massa da bolinha, L o comprimento do barbante, z a posição vertical sendo o carrinho o zero e g é a força da gravidade. (Aqui, estou considerando m_s como a massa total do barbante. Caso fosse densidade linear, $T(z) = (m_b + z \cdot m_s) g$)

A força externa resultante, $F_n(z,t)$, é dada por

$$F_n(z,t) = -m_f \frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} - \mu \left| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \right| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t}, \tag{2.2}$$

na qual μ é o coeficiente de arrasto e m_f é a massa do fluido adicionado, que será posteriormente pormenorizada. Fazendo $m = m_s + m_f$ e substituindo a Equação 2.2 na 2.1, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = -\frac{EJ}{m} \frac{\partial^4 \Upsilon}{\partial z^4} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{T(z)}{m} \frac{\partial \Upsilon}{\partial z} \right) - \frac{\mu}{m} \left| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \right| \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \tag{2.3}$$

No artigo do Fabrício, fala "*Since the traction $T(z)$ is mostly due to the heavy payload, it can be assumed an average value T for it, taken in the middle of the riser's length.*". Eu suspeito da veracidade desta frase quando analisado os dados

- Massa do isopor: 0.15g
- Diâmetro da bolinha: 30.6mm
- Massa do barbante: 0.492g
- Comprimento do barbante: 0.82m
- Diâmetro do barbante: 2mm
- Densidade linear considerando densidade volumétrica 191kg/m^3 é de 0.6g/m.
- Massa do barbante pela da bolinha aproximadamente 3 (0.492/0.15).

A massa do barbante, $m_s = 0.492$g, é bem maior que a massa m_f do fluido adicionado. Para verificar isso, calculemos primeiro a massa m_{f1} do fluido adicionado ao redor do barbante:

$$\begin{aligned} m_{f1} &= 2 V_b \rho_{\text{ar}} \\ &= 2\pi r^2 L \rho_{\text{ar}} \\ &= 0.025246\text{g} \end{aligned} \tag{2.4}$$

e a massa m_{f2} do fluido adicionado ao redor da bolinha de isopor é

$$\begin{aligned} m_{f2} &= 1.2 V_e \rho_{\text{ar}} \\ &= 1.2\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)\rho_{\text{ar}} \\ &= 4.926 \cdot 10^{-5} \end{aligned} \tag{2.5}$$

A massa do fluido adicionado é aproximadamente $m_f = m_{f1} + m_{f2} = 0.0253$g. Tem que a massa do barbante é $m_s/m_f = 19.45$ vezes maior que a massa do fluido adicionado.

Nota-se que o barbante pesa mais que o isopor, o que faria com que a tração não fosse principalmente devida pela bolinha de isopor, mas sim pelo barbante. Neste caso, não se prossegue usando um valor médio para $T(z)$ como no artigo do Fabrício, mas ainda se define uma constante τ que substitui o termo $\frac{\mu}{m}\left|\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}\right|$ já levando em conta um valor médio para $\left|\frac{\partial \Upsilon}{\partial t}\right|$, resultando em

$$\frac{\partial^2 \Upsilon}{\partial t^2} = -\frac{EJ}{m}\frac{\partial^4 \Upsilon}{\partial z^4} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{T(z)}{m}\frac{\partial \Upsilon}{\partial z}\right) - \tau\frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \tag{2.6}$$

Antes de prosseguirmos para a discretização, e então obter as matrizes em espaço de estados, é importante pensar nas condições de contorno. No topo, $z = L$, tem-se $\Upsilon(L,t) = u(t)$, ou seja, o carrinho se move conforme uma trajetória $u(t)$ definida. Neste mesmo ponto, $\frac{\partial \Upsilon}{\partial z}(L,t) = 0$. Para a ponta na qual a carga está situada, $z = 0$, tem-se $\frac{\partial \Upsilon}{\partial z}(0,t) = \frac{F_L}{T}$, sendo F_L a força aplicada pela ponta do riser na carga. (Outra coisa que confundi, eu entendi $u(t)$ sendo uma trajetória, pois Υ é deslocamento, mas no artigo do Fabrício está escrito em uma momento que é uma força).

2.1 Discretização

De forma a se realizar o controle proposto, o sistema deve ter um espaço de estados finito. Para isso, aplica-se o método de diferenças finitas na coordenada z de maneira a se aproximar a EDP governante em um número finito de EDOs. No espaço discreto, a equação do k-ésimo elemento é dada por

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Upsilon_k}{dt^2} = &-\frac{EJ}{ml^4}\left(\Upsilon_{k-2} - 4\Upsilon_{k-1} + 6\Upsilon_k - 4\Upsilon_{k+1} + \Upsilon_{k+2}\right) \\ &+ \frac{T_0 + mg(k-1)l}{ml^2}\left(\Upsilon_{k-1} - 2\Upsilon_k + \Upsilon_{k+1}\right) + g\frac{-\Upsilon_{k-1} + \Upsilon_{k+1}}{2l} - \tau\frac{d\Upsilon_k}{dt}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

sendo l a distância entre dois pontos de discretização ($l = L/N$), L é o comprimento do riser e N é o número de pontos de discretização. (A tração $T(z)$ foi trocada por T já na Equação 2.6, sendo um valor médio).

Sendo $k \in \mathbb{N} : 1 \le k \le N$, o que aconteceria quando $k = 1$ e se precisasse de Υ_{k-1} e Υ_{k-2}? Na realidade, os N pontos se referem aos pontos internos e então este problema não deve ocorrer.

Para simplificar, definem-se as constantes

$$a = -\frac{EJ}{ml^4} \tag{2.8}$$

$$b_k = \frac{T_0 + mg(k-1)l}{ml^4},\ k \geq 2 \tag{2.9}$$

$$c = b + \frac{g}{2l} \tag{2.10}$$

$$d_k = b_k - c,\ k \geq 2 \tag{2.11}$$

$$e_k = b_k + c,\ k \geq 2 \tag{2.12}$$

A meu ver, a melhor forma de se analisar como as matrizes do sistema ficarão é expandir o sistema para casos com N pequeno e ver o que está ocorrendo. Observe que $a = 0$ para o barbante, o que simplifica os próximos passos.

Para o caso $N = 6$, tem-se

$$\mathbf{x} = \left(\Upsilon_1\ \Upsilon_2\ \Upsilon_3\ \Upsilon_4\ \Upsilon_5\ \Upsilon_6\ \dot{\Upsilon}_1\ \dot{\Upsilon}_2\ \dot{\Upsilon}_3\ \dot{\Upsilon}_4\ \dot{\Upsilon}_5\ \dot{\Upsilon}_6\right)^T \tag{2.13}$$

$$u = \Upsilon(L,t) = \Upsilon_7 \tag{2.14}$$

$$y = \Upsilon(0,t) = \Upsilon_1 \tag{2.15}$$

e as equações são

$$\begin{aligned}\ddot{\Upsilon}_2 &= b_2\left(\Upsilon_1 - 2\Upsilon_2 + \Upsilon_3\right) + c(-\Upsilon_1 + \Upsilon_3) - \tau\dot{\Upsilon}_2 \\ &= d_2\Upsilon_1 - 2b_2\Upsilon_2 + e_2\Upsilon_3 - \tau\dot{\Upsilon}_2 \end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\Upsilon}_3 &= b_3\left(\Upsilon_2 - 2\Upsilon_3 + \Upsilon_4\right) + c(-\Upsilon_2 + \Upsilon_4) - \tau\dot{\Upsilon}_3 \\ &= d_3\Upsilon_2 - 2b_3\Upsilon_3 + e_3\Upsilon_4 - \tau\dot{\Upsilon}_3 \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\Upsilon}_4 &= b_4\left(\Upsilon_3 - 2\Upsilon_4 + \Upsilon_5\right) + c(-\Upsilon_3 + \Upsilon_5) - \tau\dot{\Upsilon}_4 \\ &= d_4\Upsilon_3 - 2b_4\Upsilon_4 + e_4\Upsilon_5 - \tau\dot{\Upsilon}_4 \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\Upsilon}_5 &= b_5\left(\Upsilon_4 - 2\Upsilon_5 + \Upsilon_6\right) + c(-\Upsilon_4 + \Upsilon_6) - \tau\dot{\Upsilon}_5 \\ &= d_5\Upsilon_4 - 2b_5\Upsilon_5 + e_5\Upsilon_6 - \tau\dot{\Upsilon}_5 \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\Upsilon}_6 &= b_6\left(\Upsilon_5 - 2\Upsilon_6 + u\right) + c(-\Upsilon_5 + u) - \tau\dot{\Upsilon}_6 \\ &= d_6\Upsilon_5 - 2b_6\Upsilon_6 + e_6 u - \tau\dot{\Upsilon}_6 \end{aligned} \tag{2.20}$$

A equação para a posição da carga Υ_1 leva em conta a massa da bolinha e a força de Morison:

$$m_b\ddot{\Upsilon}_1 = \frac{m_b g}{(N-1)l}\left(\Upsilon_2 - \Upsilon_1\right) + \rho C_m V\ddot{\Upsilon}_1 - \frac{1}{2}\rho C_d A\dot{\Upsilon}_1\left|\dot{\Upsilon}_1\right|, \tag{2.21}$$

e, isolando-se $\ddot{\Upsilon}_1$, tem-se

$$\ddot{\Upsilon}_1 = \frac{m_b g}{m'(N-1)l}\left(\Upsilon_2 - \Upsilon_1\right) - \frac{1}{2m'}\rho C_d A\dot{\Upsilon}_1\left|\dot{\Upsilon}_1\right|, \tag{2.22}$$

com as constantes

- $\rho = 1.225\text{kg/m}^3$, a densidade do ar
- $C_m = 2$, o coeficiente de inércia da esfera
- $C_d = 0.6$, o coeficiente de arrasto da esfera
- $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, o volume da esfera
- $A = \pi r^2$, a área da maior seção transversal da esfera
- $m' = m_b + \rho C_m V$

Anteriormente, foi apresentada a linearização τ para o termo $\frac{1}{2m}\rho C_d A\left|\dot{\Upsilon}_k\right|$ do cabo. Assumo que isso também seja necessário para a bola, resultando em um τ':

$$\ddot{\Upsilon}_1 = b_1\left(-\Upsilon_1 + \Upsilon_2\right) - \tau'\dot{\Upsilon}_1, \tag{2.23}$$

com $b_1 = \frac{m_b g}{m'(N-1)l}$.

Desta forma, pode-se definir o sistema linear em forma matricial

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -b_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_2 & -2b_2 & e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_3 & -2b_3 & e_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_4 & -2b_4 & e_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_5 & -2b_5 & e_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_6 & -2b_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e_6 \end{bmatrix} u \tag{2.24}$$

que pode ser representado concisamente como

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{6\times 6} & \mathbf{I}_{6\times 6} \\ \mathbf{M}_{6\times 6} & \mathbf{L}_{6\times 6} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{11\times 1} \\ e_6 \end{bmatrix} u \tag{2.25}$$

Para o caso de uma discretização com N pontos, tem-se

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{N\times N} & \mathbf{I}_{N\times N} \\ \mathbf{M}_{N\times N} & \mathbf{L}_{N\times N} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2N-1\times 1} \\ e_N \end{bmatrix} u \tag{2.26}$$

3 Uma Estratégia de Redução da Ordem do Modelo

A maior parte da teoria clássica de controle lida com sistemas representados por um pequeno número de variáveis de estado. Portanto, uma forma de aplicar métodos clássicos de controle da literatura para sistemas de parâmetros distribuídos discretos é por meio de uma redução da ordem do modelo.

Tal redução do modelo será feita em duas etapas: primeiro, uma transformação modal é aplicada nas equações originais do espaço de estados, resultando em uma nova representação em variáveis modais. Nesta forma, o sistema pode ser visto como um conjunto de subsistemas dissociados em paralelo, cuja influência na saída pode ser calculada individualmente. Então, os subsistemas com os maiores ganhos estáticos são escolhidos para criar um modelo de ordem reduzida.

3.1 Decomposição Modal