

**POLITECHNIKA LUBELSKA**  
**WYDZIAŁ PODSTAW TECHNIKI**

*Kierunek: MATEMATYKA*

*Specjalność: Matematyka w finansach i ubezpieczeniach*



**Praca inżynierska**

Twierdzenia Rosenkrantza w optymalizacji Guildensterna. Ubezpieczenia  
w królestwie Danii

*Rosenkrantz theorem in Guildenstern optimisation.*  
*Insurance in the kingdom of Denmark*

*Praca wykonana pod kierunkiem:*  
prof. dr. hab. Diego de la Vega

*Autor:*  
Andy Larkin  
nr albumu: 1984

**Lublin 2013**



## Spis treści

<b>Wstęp</b> . . . . .	5
<b>Rozdział 1. Twierdzenie Rosenkrantza i jego rola we współczesnej nauce</b> . .	11
1.1. Podstawy teoretyczne . . . . .	11
1.2. Zastosowania twierdzenia . . . . .	15
1.2.1. Zastosowania w promach kosmicznych . . . . .	15
1.2.2. Zastosowania w kopalniach węgla kamiennego . . . . .	16
<b>Rozdział 2. Optymalizacja Guildensterna w praktycznych rachunkach,</b> <b>który to tytuł jest na tyle długi, że nie będzie się ładnie mieścił w paginie,</b> <b>więc w paginie go skrócimy</b> . . . . .	21
2.1. Szokujące porównanie . . . . .	21
2.2. A nie, to ja się pomyliłem . . . . .	26
<b>Podsumowanie i wnioski</b> . . . . .	33
<b>Bibliografia</b> . . . . .	41
<b>Spis rysunków</b> . . . . .	43
<b>Spis tabel</b> . . . . .	45
<b>Załączniki</b> . . . . .	47
<b>Streszczenie (Summary)</b> . . . . .	49



## Wstęp

Na początku zwrócę uwagę na sposób cytowania literatury [1], lub [4, 9]. A teraz ubogaceni w tą wiedzę – czytajcie dalej.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie

podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem

i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do

niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego ko-



rzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności,

tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

## Rozdział 1

# Twierdzenie Rosenkrantza i jego rola we współczesnej nauce

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

### 1.1. Podstawy teoretyczne

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić

go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: ktoś z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

**Definicja 1.1.** Kulą domkniętą w przestrzeni metrycznej  $(X, \rho)$  o środku w punkcie  $x_0 \in X$  i o promieniu  $r$  nazywamy zbiór  $\{x \in X : \rho(x, x_0) \leq r\}$ .

**A przy okazji to zerknijcie na rysunek 2.1 na stronie 27.**

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: ktoś z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

**Twierdzenie 1.1** (Pitagorasa i odwrotne do tw. Pitagorasa). *Niech  $\mathbf{x}$  oraz  $\mathbf{y}$  będą elementami przestrzeni  $\mathbb{L}$  z iloczynem skalarnym.*

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{x} \text{ i } \mathbf{y} \text{ są ortogonalne}$$

*Dowód.* Załóżmy, że zachodzi równość podana w twierdzeniu. Wtedy

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \\ \langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \\ \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

a więc  $\mathbf{x}$  oraz  $\mathbf{y}$  są ortogonalne.

Założmy teraz, że wektory te są ortogonalne. Wtedy

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + 2\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

zatem równość z powyższego twierdzenia oczywiście zachodzi. □

**Tabela 1.1:** Opis podstawowego ataku

$A$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	...
$S$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
$Z^0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	...
$Z^1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$a_{11}$	...
$Z^2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$	$a_6$	$a_7$	$a_8$	$a_9$	$a_{10}$	$a_{11}$	$a_{12}$	...
...	...										

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność

nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności,

tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

## **1.2. Zastosowania twierdzenia**

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

### **1.2.1. Zastosowania w promach kosmicznych**

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem

i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

### **1.2.2. Zastosowania w kopalniach węgla kamiennego**

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności,



tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

**Twierdzenie 1.2.** *Niech  $\mathbb{V}$  przestrzeń unitarna,  $\mathbb{U}$  jej podprzestrzeń i niech  $\mathbf{f}$  będzie dowolnym elementem z  $\mathbb{V}$ . Element  $\mathbf{h}^* \in \mathbb{U}$  jest optymalny dla  $\mathbf{f}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathbf{f} - \mathbf{h}^*$  jest ortogonalny do podprzestrzeni<sup>1</sup>  $\mathbb{U}$*

W przestrzeniach euklidesowych ortogonalność elementów niezerowych oznacza zwykłą prostopadłość, twierdzenie ma łatwą do zapamiętania interpretację geometryczną, podaną na rysunku 1.1.

*Dowód twierdzenia 1.2.* Przypuśćmy, że  $\mathbf{h}_0 \in \mathbb{U}$  jest taki, że  $\mathbf{f} - \mathbf{h}_0$  nie jest ortogonalny do  $\mathbb{U}$ . Pokażę istnienie elementu  $\mathbf{h}_1 \in \mathbb{U}$  który lepiej niż  $\mathbf{h}_0$  aproksymuje  $\mathbf{f}$ .

Skoro  $\mathbf{f} - \mathbf{h}_0$  nie jest ortogonalny do  $\mathbb{U}$  to istnieje  $\mathbf{h} \in \mathbb{U}$  dla którego

$$\alpha = \langle \mathbf{f} - \mathbf{h}_0, \mathbf{h} \rangle \neq 0$$

Zdefiniujmy  $\mathbf{h}_1 \in \mathbb{U}$  wzorem

$$\mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_0 + \frac{\alpha}{\|\mathbf{h}\|^2} \cdot \mathbf{h}$$

Wyliczamy

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{h}_1\|^2 = \|(\mathbf{f} - \mathbf{h}_0) - \frac{\alpha}{\|\mathbf{h}\|^2} \cdot \mathbf{h}\|^2 = \|\mathbf{f} - \mathbf{h}_0\|^2 - \frac{\alpha^2}{\|\mathbf{h}\|^2} < \|\mathbf{f} - \mathbf{h}_0\|^2$$

Oznacza to, że jeśli  $\mathbf{h}^* \in \mathbb{U}$  miałby być elementem optymalnym dla  $\mathbf{f}$  to na pewno  $\mathbf{f} - \mathbf{h}^*$  jest ortogonalny do  $\mathbb{U}$ . Niech więc  $\mathbf{h}^*$  będzie taki, że  $\mathbf{f} - \mathbf{h}^*$  jest ortogonalny do  $\mathbb{U}$ . Wykażę teraz, że jest to element optymalny dla  $\mathbf{f}$ . Niech bowiem  $\mathbf{g} \in \mathbb{U}$ . Wtedy korzystając z tw. 1.1

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|^2 = \|(\mathbf{f} - \mathbf{h}^*) + (\mathbf{h}^* - \mathbf{g})\|^2 = \|\mathbf{f} - \mathbf{h}^*\|^2 + \|\mathbf{h}^* - \mathbf{g}\|^2 \geq \|\mathbf{f} - \mathbf{h}^*\|^2$$

□

Ponieważ ortogonalność elementu do całej podprzestrzeni  $\mathbb{U}$  jest równoważna jego ortogonalności do każdego elementu z dowolnie wybranej bazy przestrzeni  $\mathbb{U}$ , więc powyższe twierdzenie prowadzi do następującego wniosku.

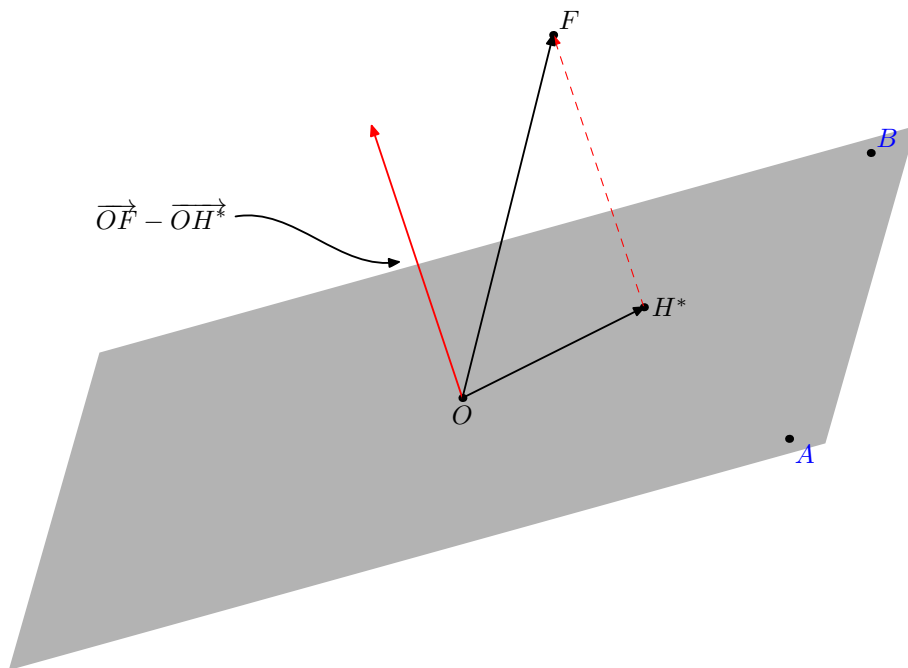
*Wniosek 1.1.* Niech  $\mathbb{U}$  będzie podprzestrzenią przestrzeni unitarnej  $\mathbb{V}$  i niech układ

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$$

będzie bazą  $\mathbb{U}$ . Niech  $\mathbf{f} \in \mathbb{V}$  i niech

$$\mathbf{h}^* = \alpha_1 \mathbf{f}_1 + \alpha_2 \mathbf{f}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{f}_n$$

<sup>1</sup> Tzn. dla dowolnego  $\mathbf{h} \in \mathbb{U}$  wektor  $\mathbf{f} - \mathbf{h}^*$  jest ortogonalny do  $\mathbf{h}$



**Rysunek 1.1:** Interpretacja tw. 1.2 przy aproksymowaniu wektorów trójwymiarowych zaczepionych w  $O$  wektorami z dwuwymiarowej podprzestrzeni  $OAB$

będzie elementem optymalnym dla  $\mathbf{f}$ . Wtedy współczynniki  $\alpha_i$  spełniają równanie

$$\begin{bmatrix} \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle & \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_n \rangle \\ \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1 \rangle & \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle \mathbf{f}_n, \mathbf{f}_1 \rangle & \langle \mathbf{f}_n, \mathbf{f}_2 \rangle & \dots & \langle \mathbf{f}_n, \mathbf{f}_n \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{f}, \mathbf{f}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{f}, \mathbf{f}_2 \rangle \\ \dots \\ \langle \mathbf{f}, \mathbf{f}_n \rangle \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

Okazuje się, że macierz główna układu (1.1) – zwana *macierzą Grama* – jest w przypadku liniowo niezależnego układu  $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n)$  nieosobliwa. W interesującej nas sytuacji wektory te stanowią bazę, więc są liniowo niezależne. Wynika stąd, że układ ten ma jednoznaczne rozwiązanie, co daje nam wygodną metodę rachunkową i dodatkowo następujące twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności aproksymacji.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: ktoś z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności,

tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.



## Rozdział 2

### Optymalizacja Guildensterna w praktycznych rachunkach, który to tytuł jest na tyle długi, że nie będzie się ładnie mieścił w paginie, więc w paginie go skrócimy

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

#### 2.1. Szokujące porównanie

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

**Twierdzenie 2.1.** *Zadanie aproksymacji elementu przestrzeni unitarnej elementem jej skończenie wymiarowej podprzestrzeni ma jednoznaczne rozwiązanie.*

## Bazy ortogonalne

Z postaci jaką ma macierz Grama widać, że szczególnie łatwe rozwiązanie zadania aproksymacji uzyskamy, gdy baza podprzestrzeni  $U$  jest ortogonalna. Wtedy bowiem uzyskamy

$$\alpha_i = \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{f}_i \rangle}{\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_i \rangle}, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n$$

a w przypadku bazy ortonormalnej nawet

$$\alpha_i = \langle \mathbf{f}, \mathbf{f}_i \rangle, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n$$

Pozostaje pytanie, jak w użytecznych dla aproksymacji przypadkach uzyskać bazę ortogonalną bądź ortonormalną. Otóż z bazy ortogonalnej uzyskać bazę ortonormalną jest bardzo łatwo – każdy wektor bazy dzielimy przez jego normę. Metodę uzyskania bazy ortonormalnej z dowolnej bazy otrzymamy analizując dowód następującego twierdzenia.

**Twierdzenie 2.2.** *Dla dowolnego układu  $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n$  liniowo niezależnych wektorów z przestrzeni unitarnej istnieje układ ortogonalny  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$  rozpinający tę samą podprzestrzeń wektorową.*

*Dowód (metoda ortogonalizacji Grama-Schmidta).*  $\mathbf{g}_1$  definiujemy jako  $\mathbf{f}_1$ .

Przypuśćmy, że określiliśmy już element  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_{i-1}$ , dla  $i \leq n$ . Wtedy określamy

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{f}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{g}_j \rangle}{\langle \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_j \rangle} \mathbf{g}_j$$

Z konstrukcji widać, że każdy element  $\mathbf{g}_i$  jest kombinacją liniową elementów typu  $\mathbf{f}_j$  a więc należy do podprzestrzeni generowanej przez wektory  $\mathbf{f}_j$ . Ale przestrzeń ta jest  $n$ -wymiarowa. Zatem gdyby wektory  $\mathbf{g}_i$  były między sobą liniowo niezależne, to oznaczałoby, że generują identyczną przestrzeń liniową co wektory  $\mathbf{f}_j$ . Zatem dla zakończenia dowodu wystarczy wykazanie ortogonalności układu  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$ , gdyż układ wektorów ortogonalnych na pewno jest liniowo niezależny.

Dowód ortogonalności układu  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_n$  prowadzimy indukcyjnie ze względu na liczbę elementów w układzie. Dla jednego wektora jest to oczywistość. Przepuśćmy, że własność ortogonalności ma układ  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_{i-1}$ , dla pewnego  $i \leq n$ . Pokażemy, że  $\langle \mathbf{g}_k, \mathbf{g}_i \rangle = 0$ , dla  $k < i$ .

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{g}_i, \mathbf{g}_k \rangle &= \left\langle \mathbf{f}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{g}_j \rangle}{\langle \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_j \rangle} \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k \right\rangle = \\ &= \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{g}_k \rangle - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{g}_j \rangle}{\langle \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_j \rangle} \langle \mathbf{g}_j, \mathbf{g}_k \rangle = \langle \mathbf{f}_i, \mathbf{g}_k \rangle - \frac{\langle \mathbf{f}_i, \mathbf{g}_k \rangle}{\langle \mathbf{g}_k, \mathbf{g}_k \rangle} \langle \mathbf{g}_k, \mathbf{g}_k \rangle = 0. \end{aligned}$$



Widać więc jasno jak można w standardowych przypadkach z dowolnej bazy skonstruować bazę ortogonalną po to, by w przyszłości w tych przestrzeniach łatwo rozwiązywać zadania aproksymacji. Okazuje się, że często bazy takie stanowią ciągi o łatwej do zapamiętania rekurencyjnej strukturze. Wykorzystywane one są nie tylko w aproksymacji, ale także w całkiem innych zagadnieniach, jak kwadratury (numeryczne całkowanie). Wymienimy kilka podstawowych przypadków. Dla jednolitości zapisu przyjmijmy umowę, że wielomian z numerem „ $-1$ ” jest równy zero, do bazy oczywiście wchodzi tylko niezerowe wielomiany, tzn. począwszy od numeru 0.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność

nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności,



tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego,

że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: ktoś z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

## 2.2. A nie, to ja się pomyliłem

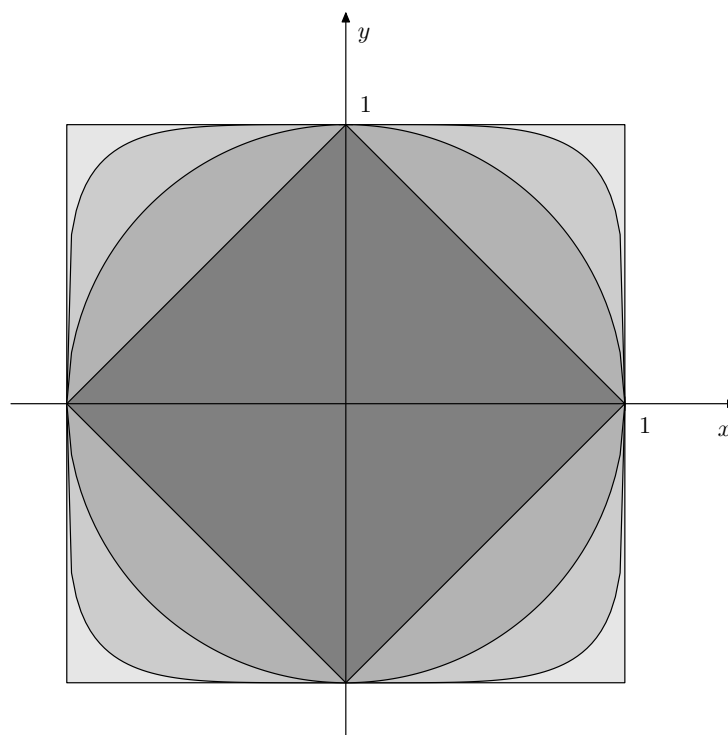
Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: ktoś z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: ktoś z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić

**Tabela 2.1:** Szaczenie pracochłonne wyliczenia

<i>co liczone</i>		<i>wynik</i>
$\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{B}{s_i^2}\right) \cdot \Delta s$	$n = 5$	0,036783
$\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{B}{s_i^2}\right) \cdot \Delta s$	$n = 20$	0,027285
$\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{B}{s_i^2}\right) \cdot \Delta s$	$n = 40$	0,025807
$\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{B}{s_i^2}\right) \cdot \Delta s$	$n = 100$	0,024935
$\sum_{i=1}^n \exp\left(-\frac{B}{s_i^2}\right) \cdot \Delta s$	$n = 1000$	0,024417
.....		
$\int_0^W \exp\left(-\frac{B}{s^2}\right) ds$		0,024360

**Rysunek 2.1:** Różne kule w  $\mathbb{R}^2$

go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia,

które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie

podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.





## Podsumowanie i wnioski

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność

nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: ktoś z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: ktoś z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: ktoś z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności,

tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego,

że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność

nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności,

tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego,

że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: ktoś z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: ktoś z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: ktoś z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegokolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.





## Bibliografia

- [1] Don Coppersmith, Hugo Krawczyk, Yishay Mansour, *The Shrinking Generator* Advances in Cryptology – CRYPTO '93, LNCS vol. 773, pp. 22–39, Springer-Verlag, 1993
- [2] P. R. Geffe, *How to Protect Data with Ciphers That Are Really Hard to Break* Electronics, Jan. 4, pp. 99–10, 1973
- [3] T. Beth, F. C. Piper, *The Stop-and-Go Generator* Advances in Cryptology – EUROCRYPT '84, LNCS vol. 209, pp. 88–92, Springer-Verlag, 1985
- [4] W. Chambers, D. Gollmann, *Clock-Controlled Shift Registers: A Review* IEEE J. Selected Areas Comm., 7(4): 525–533, May 1989
- [5] Ed Dawson, Jovan Dj. Golić, Leone Simpson, *A Probabilistic Correlation Attack on the Shrinking Generator* Information Security and Privacy – ACISP '98, LNCS vol. 1438, pp. 147–158, Springer-Verlag, 1998
- [6] Patrik Ekdhahl, Thomas Johansson, Willi Meier, *Predicting the Shrinking Generator with Fixed Connections* Advances in Cryptology – EUROCRYPT 2003, LNCS vol. 2656, pp. 330–344, Springer-Verlag, 2003
- [7] Jovan Dj. Golić, Luke O'Connor, *Embedding and Probabilistic Correlation Attacks on Clock-Controlled Shift Registers* Advances in Cryptology – EUROCRYPT '94, LNCS vol. 950, pp. 230–243, Springer-Verlag, 1995
- [8] Matthias Krause, Stefan Lucks, Erik Zenner, *Improved Cryptanalysis of the Self-Shrinking Generator* Information Security and Privacy – ACISP 2001, LNCS vol. 2119, pp. 21–35, Springer-Verlag, 2001.
- [9] W. Meier, O. Staffelbach, *The Self-shrinking Generator* Advances in Cryptology – EUROCRYPT '94, LNCS vol. 950, pp. 205–214, Springer-Verlag, 1995.
- [10] Miodrag Mihaljevic, *A Faster Cryptanalysis of the Self-shrinking Generator* Information Security and Privacy – ACISP '96, LNCS vol. 1172, pp. 182–188, Springer-Verlag, 1996.
- [11] W. Otto, *Ubezpieczenia majątkowe. Część I Teoria ryzyka*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 2004.
- [12] R. Dutak, W. Wzekly, *Matematyka ubezpieczeń majątkowych*, Uniwersytet Paragwajski, <http://www.math.uni.up/gracias/seniores>, stan w dniu 5.03.2012 r.
- [13] T. R. N. Rao, Chung-Huang Yang, Kencheng Zeng, *An Improved Linear Syndrome*

- Algorithm in Cryptanalysis With Applications* Advances in Cryptology – CRYPTO '90, LNCS vol. 537, pp. 34–47, Springer-Verlag, 1991.
- [14] Erik Zenner, *On the Efficiency of the Clock Control Guessing Attack* Information Security and Cryptology – ICISC 2002, LNCS vol. 2587, pp. 200–212, Springer-Verlag, 2003.

## Spis rysunków

1.1	Interpretacja tw. 1.2 przy aproksymowaniu wektorów trójwymiarowych zaczepionych w $O$ wektorami z dwuwymiarowej podprzestrzeni $OAB$ . . . . .	18
2.1	Różne kule w $\mathbb{R}^2$ . . . . .	27



## Spis tabel

1.1	Opis podstawowego ataku . . . . .	13
2.1	Szalenie pracochłonne wyliczenia . . . . .	27



## Załączniki

1. Płyta CD z niniejszą pracą w wersji elektronicznej.
2. Oświadczenie o oryginalności pracy i możliwości jej wykorzystania.





## Streszczenie (Summary)

Nie ma zatem takiego człowieka, który kocha cierpienie samo w sobie, kto by do niego dążył lub chciał go doświadczyć, tylko dlatego, że jest to cierpienie, a dlatego, że czasami zdarzają się takie okoliczności, w których to cierpienie może doprowadzić go do jakiejś wielkiej przyjemności. Dając przykład banalny: któż z nas kiedyś nie podejmował się trudnego wysiłku fizycznego mając na względzie uzyskanie z tego korzyści? Kto ma jakiegolwiek prawo obwiniać człowieka, który wybiera przyjemność nie wiążącą się z przykrymi konsekwencjami, albo tego, kto unika takiego cierpienia, które nie prowadzi do przyjemności? Jednocześnie potępiamy ze słusznym oburzeniem i czujemy niechęć do ludzi, którzy są tak owładnięci urokami nietrwałej przyjemności, tak zaślepieni jej pragnieniem, że nie dostrzegają, iż następstwem ich postępowania będą z pewnością cierpienie i trudności.

*Nor again is there anyone who loves or pursues or desires to obtain pain of itself, because it is pain, but because occasionally circumstances occur in which toil and pain can procure him some great pleasure. To take a trivial example, which of us ever undertakes laborious physical exercise, except to obtain some advantage from it? But who has any right to find fault with a man who chooses to enjoy a pleasure that has no annoying consequences, or one who avoids a pain that produces no resultant pleasure? On the other hand, we denounce with righteous indignation and dislike men who are so beguiled and demoralized by the charms of pleasure of the moment, so blinded by desire, that they cannot foresee the pain and trouble that are bound to ensue.*