

「情報科学における論理¹」問題解答集（途中省略有り）

高田 篤司² 原田 崇司³

2016 年 9 月 9 日

¹小野寛晰, 日本評論社, 1994

²神奈川大学理学部情報科学科 田中研究室

³神奈川大学大学院理学研究科理学専攻 田中研究室

問 1.1 の解答

1) 正しくない.

1) が正しくないことを証明する為には, $A \supset B$ および A がともに充足可能であることを仮定して, B が充足可能であることを示せば良い.

よって, 初めに,

$$A \supset B \text{ および } A \text{ がともに充足可能である} \quad (1)$$

と仮定する. そして,

$$\text{論理式 } A \text{ を } p, \text{ 論理式 } B \text{ を } r \wedge \neg r \quad (2)$$

と仮定する.

仮定 (2) より, 論理式 $A \supset B$, 即ち, $p \supset r \wedge \neg r$ の真理値表は表 1 となる.

表 1: $p \supset r \wedge \neg r$ ($A \supset B$) の真理値表

p	r	$\neg r$	p	$r \wedge \neg r$	$p \supset r \wedge \neg r$
t	t	f	t	f	f
t	f	t	t	f	f
f	t	f	f	f	t
f	f	f	f	f	t

表 1 より, $A \supset B$ は充足可能である.

さらに, 表 1 より, A は充足可能である.

しかし, 表 1 より, B は充足可能でない.

以上より, 1) は正しくない.

2) 正しい.

2) が正しいことを証明する為には, $A \supset B$ がトートロジで A が充足可能であることを仮定して, B が充足可能であることを示せば良い. よって, 初めに,

$$A \supset B \text{ がトートロジで } A \text{ 充足可能である} \quad (3)$$

と仮定する.

仮定 (3) より, $A \supset B$ がトートロジで A が充足可能なので, $v(A) = t$, $v(A \supset B) = t$ を満たす付値 v が存在する.

ここで, 表 2 より, $v(A) = t \wedge v(A \supset B) = t$ ならば, $v(B) = t$ である.

表 2: $A \supset B$ の真理値表

A	B	$A \supset B$
t	t	t
t	f	f
f	t	t
f	f	t

よって, $A \supset B$ がトートロジで A が充足可能なとき, $v(B) = t$ となる付値 v が存在するので, B も充足可能である.

以上より, 2) は正しい.

問 1.2 の解答

表 3 より, $(v(p), v(q), v(r)) = (t, f, f)$ 若しくは, $(v(p), v(q), v(r)) = (f, t, f)$ の組を与えればよい.

表 3: $((p \vee q) \supset r) \vee (p \wedge q)$ の真理値表

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \supset r$	$p \wedge q$	$((p \vee q) \supset r) \vee (p \wedge q)$
t	t	t	t	t	t	t
t	t	f	t	f	t	t
t	f	t	t	t	f	t
t	f	f	t	f	f	f
f	t	t	t	t	f	t
f	t	f	t	f	f	f
f	f	t	f	t	f	t
f	f	f	f	t	f	t

問 1.3 の解答

論理結合子として \supset と \wedge だけを用いる任意の論理式を L と表す.

L に現れる全ての論理式に t を割り当てるような付値 v を与えれば, \supset の真理値表 2 と \wedge の真理値表 4 より, $v(L) = t$ となる.

よって, L を真とするような付値 v が存在するので, 論理結合子として \supset と \wedge のみを含むようなすべての論理式は充足可能である.

表 4: $A \supset B$ の真理値表

A	B	$A \supset B$
t	t	t
t	f	f
f	t	t
f	f	t

問 1.4 の解答

表 5 の $A \equiv B$ の真理値表より A と B の真偽が等しいとき, またそのときに限り $A \equiv B$ は真となっているので, 任意の付値 v に対して, $v(A \equiv B) = t \iff v(A) = v(B)$ である.

表 5: $A \equiv B$ ($\iff (A \supset B) \wedge (B \supset A)$) の真理値表

A	B	$A \supset B$	$B \supset A$	$A \equiv B$
t	t	t	t	t
t	f	f	t	f
f	t	t	f	f
f	f	t	t	t

問 1.5 の解答

問 1.4 と同様に, $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ の真理値表を書くことにより示す.

$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ の真理値表 6 より,

任意の付値 v に対して A と B の真偽が等しいとき, またそのときに限り $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ は真となる. (4)

問 1.4 より,

任意の付値 v に対して A と B の真偽が等しいとき, またそのときに限り $A \equiv B$ は, 真となる. (5)

(4), (5) より, 任意の付値 v に対して $A \equiv B$ が真のとき, またそのときに限り $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ は真となる.
 即ち, 任意の付値 v に対して $v(A \equiv B) = v((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$ となる.

表 6: $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ の真理値表

A	B	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
t	t	t	f	f	f	t
t	f	f	f	t	f	f
f	f	f	t	t	t	f
f	t	f	t	f	f	t

問 1.6 1) の解答

- 真理値表 7 より, $A \wedge A \equiv A$ はトートロジーである.
 真理値表 8 より, $A \vee A \equiv A$ はトートロジーである.

表 7: $(A \supset A \wedge A) \wedge (A \wedge A \supset A)$ の真理値表

A	$A \wedge A$	$A \supset A \wedge A$	$A \wedge A \supset A$	$(A \supset A \wedge A) \wedge (A \wedge A \supset A)$
t	t	t	t	t
f	f	t	t	t

表 8: $(A \supset A \vee A) \wedge (A \vee A \supset A)$ の真理値表

A	$A \vee A$	$A \supset A \vee A$	$A \vee A \supset A$	$(A \supset A \vee A) \wedge (A \vee A \supset A)$
t	t	t	t	t
f	f	t	t	t

- 真理値表 9 より, 任意の付値 v で $v((A \wedge (B \wedge C) \supset (A \wedge B) \wedge C) \wedge ((A \wedge B) \wedge C \supset A \wedge (B \wedge C))) = t$ なので, $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ はトートロジーである.
 また, 真理値表 10 より, 任意の付値 v で $v((A \vee (B \vee C) \supset (A \vee B) \vee C) \wedge ((A \vee B) \vee C \supset A \vee (B \vee C))) = t$ なので, $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ はトートロジーである.

表 9: $A \wedge (B \wedge C)$ と $(A \wedge B) \wedge C$ の真理値表

A	B	C	$B \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C) \supset (A \wedge B) \wedge C$	$(A \wedge B) \wedge C \supset A \wedge (B \wedge C)$
t	t	t	t	t	t	t	t	t
t	t	f	f	f	t	f	t	t
t	f	t	f	f	f	f	t	t
t	f	f	f	f	f	f	t	t
f	t	t	t	f	f	f	t	t
f	t	f	f	f	f	f	t	t
f	f	t	f	f	f	f	t	t
f	f	f	f	f	f	f	t	t

- 真理値表 11 より, $A \wedge B \equiv B \wedge A$ はトートロジーである.
 真理値表 12 より, $A \vee B \equiv B \vee A$ はトートロジーである.
- 真理値表 13 より, $A \wedge (A \vee B) \equiv A$ はトートロジーである.
 真理値表 14 より, $A \vee (A \wedge B) \equiv A$ はトートロジーである.

表 10: $A \vee (B \vee C)$ と $(A \vee B) \vee C$ の真理値表

A	B	C	$B \vee C$	$A \vee (B \vee C)$	$A \vee B$	$(A \vee B) \vee C$	$A \vee (B \vee C) \supset (A \vee B) \vee C$	$(A \vee B) \vee C \supset A \vee (B \vee C)$
t	t	t	t	t	t	t	t	t
t	t	f	t	t	t	t	t	t
t	f	t	t	t	t	t	t	t
t	f	f	f	t	t	t	t	t
f	t	t	t	t	t	t	t	t
f	t	f	t	t	t	t	t	t
f	f	t	t	t	f	t	t	t
f	f	f	f	f	f	f	t	t

表 11: $A \wedge B \equiv B \wedge A$ の真理値表

A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$	$A \wedge B \supset B \wedge A$	$B \wedge A \supset A \wedge B$	$(A \wedge B \supset B \wedge A) \wedge (B \wedge A \supset A \wedge B)$
t	t	t	t	t	t	t
t	f	f	f	t	t	t
f	t	f	f	t	t	t
f	f	f	f	t	t	t

表 12: $A \vee B \equiv B \vee A$ の真理値表

A	B	$A \vee B$	$B \vee A$	$A \vee B \supset B \vee A$	$B \vee A \supset A \vee B$	$(A \vee B \supset B \vee A) \wedge (B \vee A \supset A \vee B)$
t	t	t	t	t	t	t
t	f	t	t	t	t	t
f	t	t	t	t	t	t
f	f	f	f	t	t	t

表 13: $A \wedge (A \vee B) \equiv A$ の真理値表

A	B	$A \vee B$	$A \wedge (A \vee B)$	$A \wedge (A \vee B) \supset A$	$A \supset A \wedge (A \vee B)$	$(A \wedge (A \vee B) \supset A) \wedge (A \supset A \wedge (A \vee B))$
t	t	t	t	t	t	t
t	f	t	t	t	t	t
f	t	t	f	t	t	t
f	f	f	f	t	t	t

表 14: $A \vee (A \wedge B) \equiv A$ の真理値表

A	B	$A \wedge B$	$A \vee (A \wedge B)$	$A \vee (A \wedge B) \supset A$	$A \supset A \vee (A \wedge B)$	$(A \vee (A \wedge B) \supset A) \wedge (A \supset A \vee (A \wedge B))$
t	t	t	t	t	t	t
t	f	f	t	t	t	t
f	t	f	f	t	t	t
f	f	f	f	t	t	t

- 5.
- 6.
- 7.
- 8.

問 1.7 の解答

1. C が $D \vee E$ の形のとき,

C_A および C_B はそれぞれ $D_A \vee E_A$ および $D_B \vee E_B$ である. D と E はともに C よりも「簡単」な論理式だから, 仮定より $D_A \sim D_B, E_A \sim E_B$ がともになりたつ. つまり, どんな付値 v をとっても $v(D_A) = v(D_B)$ および $v(E_A) = v(E_B)$ となる. ところが

$$\begin{aligned} v(D_A \vee E_A) = t &\iff v(D_A) = t \text{ または } v(E_A) = t \\ &\iff v(D_B) = t \text{ または } v(E_B) = t \\ &\iff v(D_B \vee E_B) = t \end{aligned}$$

より, $v(C_A) = v(C_B)$ となる. v は任意の付値だから, $C_A \sim C_B$ が得られる.

2. C が $D \supset E$ の形のとき,

C_A および C_B はそれぞれ $D_A \supset E_A$ および $D_B \supset E_B$ である. D と E はともに C よりも「簡単」な論理式だから, 仮定より $D_A \sim D_B, E_A \sim E_B$ がともになりたつ. つまり, どんな付値 v をとっても $v(D_A) = v(D_B)$ および $v(E_A) = v(E_B)$ となる. ところが

$$\begin{aligned} v(D_A \supset E_A) = t &\iff v(D_A) = f \text{ または } v(E_A) = t \\ &\iff v(D_B) = f \text{ または } v(E_B) = t \\ &\iff v(D_B \supset E_B) = t \end{aligned}$$

より, $v(C_A) = v(C_B)$ となる. v は任意の付値だから, $C_A \sim C_B$ が得られる.

3. C が $\neg D$ の形のとき,

C_A は $\neg D_A$ である. D は C よりも「簡単」な論理式だから, 仮定より $D_A \sim D_B$ がともになりたつ. つまり, どんな付値 v をとっても $v(D_A) = v(D_B)$ となる. ところが

$$\begin{aligned} v(\neg D_A) = t &\iff v(D_A) = f \\ &\iff v(D_B) = f \\ &\iff v(\neg D_B) = t \end{aligned}$$

より, $v(C_A) = v(C_B)$ となる. v は任意の付値だから, $C_A \sim C_B$ が得られる.

問 1.8 の解答

$p \supset (q \supset r) \sim (p \wedge q) \supset r$ がなりたつことを, 論理式 $p \supset (q \supset r)$ を同値変形で置き換えて論理式 $(p \wedge q) \supset r$ へと置き換えることにより示す.

$$\begin{aligned} p \supset (q \supset r) &\sim \neg p \vee (q \supset r) \quad (\text{定理 1.3.8 より}) \\ &\sim \neg p \vee (\neg q \vee r) \quad (\text{定理 1.3.8 より}) \\ &\sim (\neg p \vee \neg q) \vee r \quad (\vee \text{ の結合法則より}) \\ &\sim (\neg(p \wedge q)) \vee r \quad (\text{De Morgan の法則より}) \\ &\sim (p \wedge q) \supset r \quad (\text{De Morgan の法則より}) \end{aligned}$$

以上の置き換えより, $p \supset (q \wedge r) \sim (p \wedge q) \supset r$ になりたつ.

問 1.9 の解答

1. $\neg(p \supset (q \wedge r))$ と $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ の真理値表を書いて, それぞれを照らし合わせて $\neg(p \supset (q \wedge r)) \sim (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ となることを確かめる.

表 15: $\neg(p \supset (q \wedge r))$ の真理値表

p	q	r	$q \wedge r$	$p \supset (q \wedge r)$	$\neg(p \supset (q \wedge r))$
t	t	t	t	t	f
t	t	f	f	f	t
t	f	t	f	f	t
t	f	f	f	f	t
f	t	t	t	t	f
f	t	f	f	t	f
f	f	t	f	t	f
f	f	f	f	t	f

表 16: $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ の真理値表

p	q	r	$p \wedge q \wedge \neg r$	$p \wedge \neg q \wedge r$	$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$
t	t	t	f	f	f	f
t	t	f	t	f	f	t
t	f	t	f	t	f	t
t	f	f	f	f	t	t
f	t	t	f	f	f	f
f	t	f	f	f	f	f
f	f	t	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f

$\neg(p \supset (q \wedge r))$ の真理値表と $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ の真理値表を見ると, どちらの論理式も $(p = t, q = t, r = f), (p = t, q = f, r = t), (p = t, q = f, r = f)$ の割り当てのときのみ t となる. つまり, 任意の付置 v に対して二つの論理式の真偽が一致しているので, $\neg(p \supset (q \wedge r)) \sim (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ となる.

2. 2016 年 9 月 9 日の時点において分かっていない.

問 1.10 の解答

それぞれの論理式を例 1.10 のように論理和標準形および論理積標準形置き換える.

$$1. ((p \supset q) \supset p) \supset p$$

$$\begin{aligned}
 ((p \supset q) \supset p) \supset p &\sim ((\neg p \vee q) \supset p) \supset p && \text{(定理 1.3.8 より)} \\
 &\sim (\neg(\neg p \vee q) \vee p) \supset p && \text{(定理 1.3.8 より)} \\
 &\sim \neg(\neg(\neg p \vee q) \vee p) \vee p && \text{(定理 1.3.8 より)} \\
 &\sim \neg((\neg\neg p \wedge \neg q) \vee p) \vee p && \text{(de Morgan の法則より)} \\
 &\sim (\neg(\neg\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg p) \vee p && \text{(de Morgan の法則より)} \\
 &\sim ((\neg(\neg\neg p) \vee \neg\neg q) \wedge \neg p) \vee p && \text{(de Morgan の法則より)} \\
 &\sim ((\neg p \vee q) \wedge \neg p) \vee p && \text{(定理 1.3.6 より)} \\
 &\sim ((\neg p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p)) \vee p && \text{(分配律より)} \\
 &\sim (\neg p \vee (q \wedge \neg p)) \vee p && \text{(冪等律より)} && \text{「論理和標準形」} \\
 &\sim ((\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg p)) \vee p && \text{(分配律より)} \\
 &\sim ((\neg p \vee q) \wedge \neg p) \vee p && \text{(冪等律より)} \\
 &\sim ((\neg p \vee q) \vee p) \wedge (\neg p \vee p) && \text{(分配律より)} \\
 &\sim ((\neg p \vee p) \vee q) \wedge (\neg p \vee p) && \text{(結合律と交換律より)} \\
 &\sim (\top \vee q) \wedge \top && \text{(定理 1.3.9 より)} && \text{「論理積標準形?」}
 \end{aligned}$$

「論理和標準形」と注を付けている行の 3 行下の行は，節に同一の論理変数が二つ以上現れているので「論理積標準形」と見做さない．

$$2. (p \supset (p \wedge \neg q)) \wedge (q \supset (q \wedge \neg p))$$

$$\begin{aligned}
& (p \supset (p \wedge \neg q)) \wedge (q \supset (q \wedge \neg p)) \sim (\neg p \vee (p \wedge \neg q)) \wedge (q \supset (q \wedge \neg p)) \quad (\text{定理 1.3.8 より}) \\
& \sim (\neg p \vee (p \wedge \neg q)) \wedge (\neg q \vee (q \wedge \neg p)) \quad (\text{定理 1.3.8 より}) \\
& \sim ((\neg p \vee (p \wedge \neg q)) \wedge \neg q) \vee ((\neg p \vee (p \wedge \neg q)) \wedge (q \wedge \neg p)) \quad (\text{分配律より}) \\
& \sim ((\neg p \wedge \neg q) \vee ((p \wedge \neg q) \wedge \neg q)) \vee ((\neg p \vee (p \wedge \neg q)) \wedge (q \wedge \neg p)) \quad (\text{分配律より}) \\
& \sim ((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q)) \vee ((\neg p \vee (p \wedge \neg q)) \wedge (q \wedge \neg p)) \quad (\text{冪等律より}) \\
& \sim ((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q)) \\
& \quad \vee ((\neg p \wedge (q \wedge \neg p)) \vee ((p \wedge \neg q) \wedge (q \wedge \neg p))) \quad (\text{分配律より}) \\
& \sim ((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q)) \\
& \quad \vee ((\neg p \wedge q) \vee ((p \wedge \neg p) \wedge (q \wedge \neg q))) \quad (\text{交換律と結合律と冪等律より}) \\
& \sim ((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q)) \vee ((\neg p \wedge q) \vee (\perp \wedge \perp)) \quad (\text{定理 1.3.9 より}) \\
& \sim ((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q) \quad (\text{定理 1.3.11 より}) \quad \text{「論理和標準形」} \\
& \sim ((\neg p \vee (p \wedge \neg q)) \vee (\neg q \vee (p \wedge \neg q))) \vee (\neg p \wedge q) \quad (\text{分配律より}) \\
& \sim ((\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee (\neg q \vee (p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q) \quad (\text{分配律より}) \\
& \sim (\top \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee (\neg q \vee (p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q) \quad (\text{定理 1.3.9 より}) \\
& \sim ((\neg p \vee \neg q) \vee (\neg q \vee (p \wedge \neg q))) \vee (\neg p \wedge q) \quad (\text{定理 1.3.9 より}) \\
& \sim ((\neg p \vee \neg q) \vee ((\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg q))) \vee (\neg p \wedge q) \quad (\text{分配律より}) \\
& \sim ((\neg p \vee \neg q) \vee ((\neg q \vee p) \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q) \quad (\text{冪等律より}) \\
& \sim ((\neg p \vee \neg q) \vee (\neg q \vee p)) \wedge ((\neg p \vee \neg q) \vee \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \quad (\text{分配律より}) \\
& \sim ((\neg p \vee \neg q) \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \quad (\text{結合律と冪等律より}) \\
& \sim (\top \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee (\neg p \wedge q) \quad (\text{結合律と交換律と定理 1.3.10 より}) \\
& \sim (\neg p \vee \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \quad (\text{結合律と交換律と定理 1.3.11 より}) \\
& \sim ((\neg p \vee \neg q) \vee \neg p) \wedge ((\neg p \vee \neg q) \vee q) \quad (\text{分配律より}) \\
& \sim (\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee (\neg q \vee q)) \quad (\text{結合律と交換律と冪等律より}) \\
& \sim (\neg p \vee \neg q) \quad (\text{定理 1.3.9, 1.3.10, 1.3.11 より}) \quad \text{「論理積標準形」}
\end{aligned}$$

$$3. \neg(p \supset q) \wedge ((q \supset s) \supset r)$$

(省略)

問 1.11 の解答

$A \wedge B$ と $C \vee D$ の形の論理式を \neg と \rightarrow のみを用いた同値な論理式へ置き換えることによって示す.

$$\begin{aligned}
A \wedge B & \sim \neg \neg A \wedge \neg \neg B \quad (\text{定理 1.3.6 より}) \\
& \sim \neg(\neg A \vee \neg B) \quad (\text{De Morgan の法則より}) \\
& \sim \neg(A \supset \neg B) \quad (\text{定理 1.3.8 より})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A \vee B & \sim \neg \neg A \vee B \quad (\text{定理 1.3.6 より}) \\
& \sim \neg A \supset B \quad (\text{定理 1.3.8 より})
\end{aligned}$$

問 1.12 の解答

2016 年 9 月 9 日の時点において分かっていない.

問 1.13 の解答

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \rightarrow A}{\rightarrow A, \neg A} (\neg \text{右}) \\
 \frac{\rightarrow A, \neg A}{\rightarrow A, A \vee \neg A} (\vee \text{右 } 2) \\
 \frac{\rightarrow A, A \vee \neg A}{\rightarrow A \vee \neg A, A} (\text{exchange 右}) \\
 \frac{\rightarrow A \vee \neg A, A}{\rightarrow A \vee \neg A, A \vee \neg A} (\vee \text{右 } 1) \\
 \frac{\rightarrow A \vee \neg A, A \vee \neg A}{\rightarrow A \vee \neg A} (\text{contraction 右})
 \end{array}$$

問 1.14 の解答

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \rightarrow A \quad B \rightarrow B}{A \supset B, A \rightarrow B} (\supset \text{左}) \\
 \frac{A \supset B, A \rightarrow B}{\neg B, A \supset B, A \rightarrow} (\neg \text{左}) \\
 \frac{\neg B, A \supset B, A \rightarrow}{\neg B, A, A \supset B \rightarrow} (\text{ex. 左}) \\
 \frac{\neg B, A, A \supset B \rightarrow}{A \wedge \neg B, A, A \supset B \rightarrow} (\wedge \text{左 } 2) \\
 \frac{A \wedge \neg B, A, A \supset B \rightarrow}{A, A \wedge \neg B, A \supset B \rightarrow} (\text{ex. 左}) \\
 \frac{A, A \wedge \neg B, A \supset B \rightarrow}{A \wedge \neg B, A \wedge \neg B, A \supset B \rightarrow} (\wedge \text{左 } 1) \\
 \frac{A \wedge \neg B, A \wedge \neg B, A \supset B \rightarrow}{A \wedge \neg B, A \supset B \rightarrow} (\text{cont. 左}) \\
 \frac{A \wedge \neg B, A \supset B \rightarrow}{A \supset B \rightarrow \neg(A \wedge \neg B)} (\neg \text{右})
 \end{array}$$

問 1.15 の解答

$$\begin{array}{c}
 \frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta, B}{A, \Gamma \rightarrow \Delta, \neg A \vee B} (\vee \text{右 } 2) \\
 \frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta, \neg A \vee B}{\Gamma \rightarrow \Delta, \neg A \vee B, \neg A} (\neg \text{右}) \\
 \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, \neg A \vee B, \neg A}{\Gamma \rightarrow \Delta, \neg A \vee B, \neg A \vee B} (\vee \text{右 } 1) \\
 \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, \neg A \vee B, \neg A \vee B}{\Gamma \rightarrow \Delta, \neg A \vee B} (\text{cont. 右})
 \end{array}$$

問 1.16 の解答

1)

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \rightarrow A}{\rightarrow A, \neg A} (\neg \text{右}) \quad \frac{B \rightarrow B}{\rightarrow B, \neg B} (\neg \text{右}) \\
 \frac{\rightarrow A, \neg A}{\rightarrow A, \neg A \vee \neg B} (\vee \text{右 } 1) \quad \frac{\rightarrow B, \neg B}{\rightarrow B, \neg A \vee \neg B} (\vee \text{右 } 2) \\
 \frac{\rightarrow A, \neg A \vee \neg B}{\rightarrow \neg A \vee \neg B, A} (\text{ex. 右}) \quad \frac{\rightarrow B, \neg A \vee \neg B}{\rightarrow \neg A \vee \neg B, B} (\text{ex. 右}) \\
 \frac{\rightarrow \neg A \vee \neg B, A \quad \rightarrow \neg A \vee \neg B, B}{\rightarrow \neg A \vee \neg B, A \wedge B} (\wedge \text{右}) \\
 \frac{\rightarrow \neg A \vee \neg B, A \wedge B}{\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg A \vee \neg B} (\neg \text{左})
 \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \rightarrow A}{\neg A, A \rightarrow} (\neg \text{左}) \\
 \frac{\neg A, A \rightarrow}{A \rightarrow \neg \neg A} (\neg \text{右})
 \end{array}$$

3)

$$\begin{array}{c}
 \frac{A \rightarrow A}{\rightarrow A, \neg A} (\neg \text{右}) \\
 \frac{\rightarrow A, \neg A}{\neg \neg A \rightarrow A} (\neg \text{左})
 \end{array}$$

4)

$$\begin{array}{c}
\frac{B \rightarrow B}{A, B \rightarrow B} \text{ (weakening 左)} \quad \frac{A \rightarrow A \quad C \rightarrow C}{A \supset C, A \rightarrow C} \text{ (}\supset\text{ 左)} \\
\frac{B \rightarrow A \supset B}{(A \supset B) \supset (A \supset C), B, A \rightarrow C} \text{ (}\supset\text{ 右)} \quad \frac{A \rightarrow C, A \rightarrow C}{(A \supset B) \supset (A \supset C), B, A \rightarrow C} \text{ (}\supset\text{ 左)} \\
\frac{(A \supset B) \supset (A \supset C), B, A \rightarrow C}{B, A, (A \supset B) \supset (A \supset C) \rightarrow C} \text{ (ex. 左*)} \\
\frac{B, A, (A \supset B) \supset (A \supset C) \rightarrow C}{A, (A \supset B) \supset (A \supset C) \rightarrow B \supset C} \text{ (}\supset\text{ 右)} \\
\frac{A, (A \supset B) \supset (A \supset C) \rightarrow B \supset C}{(A \supset B) \supset (A \supset C) \rightarrow A \supset (B \supset C)} \text{ (}\supset\text{ 右)}
\end{array}$$

5)

$$\begin{array}{c}
\frac{A \rightarrow A}{A \rightarrow A \quad \neg A, A \rightarrow} \text{ (}\neg\text{ 右)} \\
\frac{A \rightarrow A \quad \neg A, A \rightarrow}{A \supset \neg A, A, A \rightarrow} \text{ (}\neg\text{ 右)} \\
\frac{A \supset \neg A, A, A \rightarrow}{A, A, A \supset \neg A \rightarrow} \text{ (ex. 左*)} \\
\frac{A, A, A \supset \neg A \rightarrow}{A, A \supset \neg A \rightarrow} \text{ (cont. 左)} \\
\frac{A, A \supset \neg A \rightarrow}{A \supset \neg A \rightarrow \neg A} \text{ (}\neg\text{ 右)}
\end{array}$$

問 1.17 の解答

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A \quad \perp \rightarrow}{A \supset \perp, \Gamma \rightarrow \Delta} \text{ (}\supset\text{ 左)}$$

$$\frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta}{A, \Gamma \rightarrow \Delta, \perp} \text{ (weak. 右)} \\
\frac{A, \Gamma \rightarrow \Delta, \perp}{\Gamma \rightarrow \Delta, A \supset \perp} \text{ (}\supset\text{ 右)}$$

問 1.18 の解答

(1a)

(1b)

(2a)

(2b)

(3a)

(4a)

(4b)

問 2.1 の解答

- (1) 1) すべての教師を好きな学生がいる
 2) すべての怠け者の学生は、怠け者の教師が好きではない
- (2) $\neg(\forall x (T(x) \supset L(x)))$

問 2.2 の解答

- (1) 実数の集合は稠密順序集合である (任意の実数のいくらでも近くに別の実数が存在する).
- (2) 関係 $<$ は推移律を満たす.

問 2.5 の解答

- (1) 1) 成り立たない. 何故ならば $a_4 R y$, $a_5 R y$ となるような y は存在しないから.
- 2) 成り立つ. 任意の x に対して, y として a_4 か a_5 をとる ($x := a_4$ なら $y := a_4$, $x := a_5$ なら $y := a_5$ とする). そうすると $y R z$ を満たすような z は適当に選んだ y 自身しかないので $y R y \supset y R y$ となる. R は順序関係なので反射律を満たすのでこの論理式は成り立つ.
- (2)
- 3) 成り立つ. $y := a_4, z := a_5$ とすれば良い.
- 4) 成り立たない. $x := a_1, y := a_2, z := a_3$ とすると, $x R y \wedge y R z$ は成り立つが, $x = y \vee y = z$ は成り立たない. つまり, $\forall x \forall y \forall z ((x R y \wedge y R z) \supset (x = y \vee y = z))$ は成り立たない.

問 2.8 の解答

- (1) 1) $\models \forall x A \equiv A$ を示す.
 恒真性の定義 (p.70) より,
 任意の構造 \mathfrak{A} に対し, $\mathfrak{A} \models \forall y_1 \cdots \forall y_n (\forall x A \equiv A)$ となることをいえばよい. ここで論理式 $\forall x A \equiv A$ は自由変数として $y_1 \cdots y_n$ を持つものとしておく. さらに, \equiv の定義 (p.10) より

$$\mathfrak{A} \models \forall y_1 \cdots \forall y_n ((\forall x A \supset A) \wedge (A \supset \forall x A))$$

をいえばよい. これを示すには, 任意の構造 $\mathfrak{A} = \langle U, I \rangle$ および任意の $u_1, \dots, u_n \in U$ に対し

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models ((\forall x A[\underline{u}_1/y_1, \dots, \underline{u}_n/y_n] \supset A[\underline{u}_1/y_1, \dots, \underline{u}_n/y_n]) \\ \wedge (A[\underline{u}_1/y_1, \dots, \underline{u}_n/y_n] \supset \forall x A[\underline{u}_1/y_1, \dots, \underline{u}_n/y_n])) \end{aligned}$$

をいえばよい.

ここで, $A \wedge B$ の形の論理式が正しいということの意味 (p.64(4)) より

$$\mathfrak{A} \models (\forall x A[\underline{u}_1/y_1, \dots, \underline{u}_n/y_n] \supset A[\underline{u}_1/y_1, \dots, \underline{u}_n/y_n])$$

と

$$\mathfrak{A} \models A[\underline{u}_1/y_1, \dots, \underline{u}_n/y_n] \supset \forall x A[\underline{u}_1/y_1, \dots, \underline{u}_n/y_n]$$

が正しいことを示せばよい. 以下の証明では, 自由変数 x_1, \dots, x_n への $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ への代入がすでに行われているものとし, したがって, A が自由変数一つも含まない場合について述べる.

- a) $\mathfrak{A} \models \forall x A \supset A$ を示す.

これを示すには $\mathfrak{A} \models \forall x A$ を仮定して $\mathfrak{A} \models A$ を示せば十分である.

構造 $\mathfrak{A} = \langle U, I \rangle$ に対して, $\mathfrak{A} \models \forall x A$ と仮定する. したがって, すべての $u \in U$ に対して $\mathfrak{A} \models A[\underline{u}/x]$ となる. ここで, A は x を自由変数として含まないので, すべての $u \in U$ に対して, A は $A[\underline{u}/x]$ に等しい. よって $\mathfrak{A} \models A$ である.

b) $\mathfrak{A} \models A \supset \forall x A$ を示す.

これを示すには $\mathfrak{A} \models A$ を仮定して $\mathfrak{A} \models \forall x A$ を示せば十分である.

構造 $\mathfrak{A} = \langle U, I \rangle$ に対して, $\mathfrak{A} \models A$ と仮定する. したがって, すべての $u \in U$ に対して $\mathfrak{A} \models A$ となる. ここで, A は x を自由変数として含まないので, すべての $u \in U$ に対して, A は $A[\underline{u}/x]$ に等しい. これは, $\mathfrak{A} \models \forall x A$ である.

a), b) より $\models \forall x A \equiv A$ は恒真である.

2) $\models \exists x A \equiv A$ を示す.

恒真性の定義 (p.70) より,

任意の構造 \mathfrak{A} に対し, $\mathfrak{A} \models \forall y_1 \cdots \forall y_n (\exists x A \equiv A)$ となることをいえばよい. ここで論理式 $\exists x A \equiv A$ は自由変数として $y_1 \cdots y_n$ を持つものとしておく. さらに, \equiv の定義 (p.10) より

$$\mathfrak{A} \models \forall y_1 \cdots \forall y_n ((\exists x A \supset A) \wedge (A \supset \exists x A))$$

をいえばよい. これを示すには, 任意の構造 $\mathfrak{A} = \langle U, I \rangle$ および任意の $u_1, \dots, u_n \in U$ に対し

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \models & ((\exists x A[\underline{u}_1/y_1, \dots, \underline{u}_n/y_n] \supset A[\underline{u}_1/y_1, \dots, \underline{u}_n/y_n]) \\ & \wedge (A[\underline{u}_1/y_1, \dots, \underline{u}_n/y_n] \supset \exists x A[\underline{u}_1/y_1, \dots, \underline{u}_n/y_n])) \end{aligned}$$

をいえばよい. ここで, $A \wedge B$ の形の論理式が正しいということの意味 (p.64(4)) より

$$\mathfrak{A} \models (\exists x A[\underline{u}_1/y_1, \dots, \underline{u}_n/y_n] \supset A[\underline{u}_1/y_1, \dots, \underline{u}_n/y_n])$$

と

$$\mathfrak{A} \models A[\underline{u}_1/y_1, \dots, \underline{u}_n/y_n] \supset \exists x A[\underline{u}_1/y_1, \dots, \underline{u}_n/y_n]$$

が正しいことを示せばよい. 以下の証明では, 自由変数 x_1, \dots, x_n への $\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ への代入がすでに行われているものとし, したがって, A が自由変数をもつ場合について述べる.

a) $\mathfrak{A} \models \exists x A \supset A$ を示す.

これを示すためには $\mathfrak{A} \models \exists x A$ を仮定して $\mathfrak{A} \models A$ を示せば十分である.

構造 $\mathfrak{A} = \langle U, I \rangle$ に対して, $\mathfrak{A} \models \exists x A$ と仮定する. したがって, ある $u \in U$ に対して $\mathfrak{A} \models A[\underline{u}/x]$ となる. ここで, A は x を自由変数として含まないので, A は $A[\underline{u}/x]$ に等しい. よって $\mathfrak{A} \models A$ である.

b) $\mathfrak{A} \models A \supset \exists x A$ を示す.

これを示すには $\mathfrak{A} \models A$ を仮定して $\mathfrak{A} \models \exists x A$ を示せば十分である.

構造 $\mathfrak{A} = \langle U, I \rangle$ に対して, $\mathfrak{A} \models A$ と仮定する. したがって, ある $u \in U$ に対して $\mathfrak{A} \models A$ となる. ここで, A は x を自由変数として含まないので, ある $u \in U$ に対して, A は $A[\underline{u}/x]$ に等しい. これは, $\mathfrak{A} \models \exists x A[x]$ である.

a), b) より $\models \exists x A \equiv A$ は恒真である.

(2) 以下省略

問 2.11 の解答

1)

$$\begin{aligned} & \exists x R(x, y) \supset \forall y (P(y) \wedge \neg \forall z Q(z)) \\ \sim & \exists x R(x, y) \supset \forall u (P(u) \wedge \neg \forall z Q(z)) && \text{定理 2.1 の 2)} \\ \sim & \exists x \forall u (R(x, y) \supset (P(u) \wedge \exists z \neg Q(z))) && \text{定理 2.1 の 11) の左} \\ \sim & \exists x \forall u (R(x, y) \supset \exists z (P(u) \wedge \neg Q(z))) && \text{定理 2.1 の 4) の右} \\ \sim & \exists x \forall u \exists z (R(x, y) \supset (P(u) \wedge \neg Q(z))) && \text{定理 2.1 の 11) の右} \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
 & \exists x (\forall y (P(y) \supset Q(x, z)) \vee \exists z (\neg (\exists u R(z, u) \wedge Q(x, z)))) \\
 \sim & \exists x (\forall y (P(y) \supset Q(x, z)) \vee \exists v (\neg (\exists u R(v, u) \wedge Q(x, v)))) && \text{定理 2.1 の 2) の右} \\
 \sim & \exists x \exists v (\forall y (P(y) \supset Q(x, z)) \vee (\neg (\exists u R(v, u) \wedge Q(x, v)))) && \text{定理 2.1 の 3) の右} \\
 \sim & \exists x \exists v (\forall y (P(y) \supset Q(x, z)) \vee (\neg \exists u R(v, u) \vee \neg Q(x, v))) && \text{定理 1.3 の 7) の右} \\
 \sim & \exists x \exists v (\forall y (P(y) \supset Q(x, z)) \vee (\forall u \neg R(v, u) \vee \neg Q(x, v))) && \text{定理 2.1 の 10) の右} \\
 \sim & \exists x \exists v (\forall y (P(y) \supset Q(x, z)) \vee \forall u (\neg R(v, u) \vee \neg Q(x, v))) && \text{定理 2.1 の 4) の左} \\
 \sim & \exists x \exists v \forall u (\forall y (P(y) \supset Q(x, z)) \vee (\neg R(v, u) \vee \neg Q(x, v))) && \text{定理 2.1 の 11) の左} \\
 \sim & \exists x \exists v \forall u ((\neg R(v, u) \vee \neg Q(x, v)) \vee \forall y (P(y) \supset Q(x, z))) && \text{定理 1.3 の 3) の右} \\
 \sim & \exists x \exists v \forall u \forall y ((\neg R(v, u) \vee \neg Q(x, v)) \vee (P(y) \supset Q(x, z))) && \text{定理 2.1 の 4) の左}
 \end{aligned}$$

問 2.14

1)

$$\begin{array}{c}
 \frac{P(x) \rightarrow P(x)}{P(x) \rightarrow P(x), Q(x)} \\
 \frac{\rightarrow P(x), P(x) \supset Q(x)}{\rightarrow \forall x P(x), P(x) \supset Q(x)} \\
 \frac{\rightarrow \forall x P(x), \exists x (P(x) \supset Q(x))}{\rightarrow \exists x (P(x) \supset Q(x)), \forall x P(x)} \\
 \frac{\rightarrow \exists x (P(x) \supset Q(x)), \forall x P(x)}{\forall x P(x) \supset \exists x (P(x) \supset Q(x)), \exists x (P(x) \supset Q(x))} \\
 \frac{\forall x P(x) \supset \exists x (P(x) \supset Q(x)), \exists x (P(x) \supset Q(x))}{\forall x P(x) \supset \exists x (P(x) \supset Q(x))}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \frac{Q(t) \rightarrow Q(t)}{P(t), Q(t) \rightarrow Q(t)} \\
 \frac{P(t), Q(t) \rightarrow Q(t)}{Q(t) \rightarrow P(t) \supset Q(t)} \\
 \frac{Q(t) \rightarrow P(t) \supset Q(t)}{Q(t) \rightarrow \exists x (P(x) \supset Q(x))} \\
 \frac{Q(t) \rightarrow \exists x (P(x) \supset Q(x))}{\exists x Q(t) \rightarrow \exists x (P(x) \supset Q(x))}
 \end{array}$$

2) 誤り

$$\begin{array}{c}
 \frac{P(x) \rightarrow P(x), Q(x)}{\rightarrow P(x), P(x) \supset Q(x)} \\
 \frac{\rightarrow P(x), P(x) \supset Q(x)}{\rightarrow \forall x P(x), P(x) \supset Q(x)} \\
 \frac{\rightarrow \forall x P(x), P(x) \supset Q(x)}{\rightarrow \forall x P(x), \exists x (P(x) \supset Q(x))}
 \end{array}$$

正しい

$$\begin{array}{c}
 \frac{P(x) \rightarrow P(x), Q(x)}{\rightarrow P(x), P(x) \supset Q(x)} \\
 \frac{\rightarrow P(x), P(x) \supset Q(x)}{\rightarrow P(x), \exists x (P(x) \supset Q(x))} \\
 \frac{\rightarrow P(x), \exists x (P(x) \supset Q(x))}{\rightarrow \forall x P(x), \exists x (P(x) \supset Q(x))}
 \end{array}$$

.1 証明の書き方

- 接続詞などに用いる用語を統一する（教科書を参考にする）。
- 証明を書くときは、一行ずつ書いて改行する。
- サ変動詞を用いない。～として、～とする \Rightarrow ～と仮定する、～と置く、... となるような～をとる。
- 仮定が何で結論は何なのかを明示する。
- 問題文の情報をを用いた場合は、問題文のどこを用いたのかを明示する。
- 推論する場合は、用いた根拠と用いた推論規則を明示する。