「情報科学における論理[1]」問題解答集（途中省略有り）

高田　篤司[2]　　　　原田　崇司[3]

2016 年 10 月 31 日

[1]小野寛晰, 日本評論社, 1994
[2]神奈川大学理学部情報科学科 田中研究室
[3]神奈川大学大学院理学研究科理学専攻 田中研究室

問 1.1 の解答

1) 正しくない．

1) が正しくないことを証明する為には，$A \supset B$ および A がともに充足可能であることを仮定して，B が充足可能であることを示せば良い．

よって，初めに，

$$A \supset B \text{ および } A \text{ がともに充足可能である} \tag{1}$$

と仮定する．そして，

$$\text{論理式 } A \text{ を } p\text{，論理式 } B \text{ を } r \wedge \neg r \tag{2}$$

と仮定する．

仮定 (2) より，論理式 $A \supset B$，即ち，$p \supset r \wedge \neg r$ の真理値表は表 1 となる．

表 1: $p \supset r \wedge \neg r$ $(A \supset B)$ の真理値表

p	r	$\neg r$	p	$r \wedge \neg r$	$p \supset r \wedge \neg r$
t	t	f	t	f	f
t	f	t	t	f	f
f	t	f	f	f	t
f	f	f	f	f	t

表 1 より，$A \supset B$ は充足可能である．

さらに，表 1 より，A は充足可能である．

しかし，表 1 より，B は充足可能でない．

以上より，1) は正しくない．

2) 正しい．

2) が正しいことを証明する為には，$A \supset B$ がトートロジで A が充足可能であることを仮定して，B が充足可能であることを示せば良い．よって，初めに，

$$A \supset B \text{ がトートロジで } A \text{ 充足可能である} \tag{3}$$

と仮定する．

仮定 (3) より，$A \supset B$ がトートロジーで A が充足可能なので，$\nu(A) = t$, $\nu(A \supset B) = t$ を満たす付値 ν が存在する．

ここで，表 2 より，$\nu(A) = t \ \wedge \ \nu(A \supset B) = t$ ならば，$\nu(B) = t$ である．

表 2: $A \supset B$ の真理値表

A	B	$A \supset B$
t	t	t
t	f	f
f	t	t
f	f	t

よって，$A \supset B$ がトートロジーで A が充足可能なとき，$\nu(B) = t$ となる付値 ν が存在するので，B も充足可能である．

以上より，2) は正しい．

問 1.2 の解答

表 3 より，$(\nu(p), \nu(q), \nu(r)) = (t, f, f)$ 若しくは，$(\nu(p), \nu(q), \nu(r)) = (f, t, f)$ の組を与えればよい．

表 3: $((p \lor q) \supset r) \lor (p \land q)$ の真理値表

p	q	r	$p \lor q$	$(p \lor q) \supset r$	$p \land q$	$((p \lor q) \supset r) \lor (p \land q)$
t	t	t	t	t	t	t
t	t	f	t	f	t	t
t	f	t	t	t	f	t
t	f	f	t	f	f	f
f	t	t	t	t	f	t
f	t	f	t	f	f	f
f	f	t	f	t	f	t
f	f	f	f	t	f	t

問 1.3 の解答

論理結合子として $\supset$ と $\land$ だけを用いる任意の論理式を L と表す．

L に現れる全ての論理式に t を割り当てるような付値 ν を与えれば，$\supset$ の真理値表 2 と $\land$ の真理値表 4 より，$\nu(L) = t$ となる．

よって，L を真とするような付値 ν が存在するので，論理結合子として $\supset$ と $\land$ のみを含むようなすべての論理式は充足可能である．

表 4: $A \supset B$ の真理値表

A	B	$A \land B$
t	t	t
t	f	f
f	t	f
f	f	f

問 1.4 の解答

表 5 の $A \equiv B$ の真理値表より A と B の真偽が等しいとき，またそのときに限り $A \equiv B$ は真となっているので，任意の付値 ν に対して．$\nu(A \equiv B) = t \iff \nu(A) = \nu(B)$ である．

表 5: $A \equiv B$ ($\iff (A \supset B) \land (B \supset A)$) の真理値表

A	B	$A \supset B$	$B \supset A$	$A \equiv B$
t	t	t	t	t
t	f	f	t	f
f	t	t	f	f
f	f	t	t	t

問 1.5 の解答

問 1.4 と同様に，$(A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)$ の真理値表を書くことにより示す．

$(A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)$ の真理値表 6 より，

任意の付値 ν に対して A と B の真偽が等しいとき，またそのときに限り $(A \land B) \lor (\neg A \land \neg B)$ は真となる． (4)

問 1.4 より，

任意の付値 ν に対して A と B の真偽が等しいとき，またそのときに限り $A \equiv B$ は，真となる． (5)

(4), (5) より，任意の付値 ν に対して $A \equiv B$ が真のとき，またそのときに限り $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ は真となる．
即ち，任意の付値 ν に対して $\nu(A \equiv B) = \nu((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$ となる．

表 6: $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ の真理値表

A	B	$A \wedge B$	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$	$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
t	t	t	f	f	f	t
t	f	f	f	t	f	f
f	f	f	t	t	t	f
f	f	f	t	f	f	t

問 1.6 1) の解答

1. 真理値表 7 より，$A \wedge A \equiv A$ はトートロジーである．
   真理値表 8 より，$A \vee A \equiv A$ はトートロジーである．

表 7: $(A \supset A \wedge A) \wedge (A \wedge A \supset A)$ の真理値表

A	$A \wedge A$	$A \supset A \wedge A$	$A \wedge A \supset A$	$(A \supset A \wedge A) \wedge (A \wedge A \supset A)$
t	t	t	t	t
f	f	t	t	t

表 8: $(A \supset A \vee A) \wedge (A \vee A \supset A)$ の真理値表

A	$A \vee A$	$A \supset A \vee A$	$A \vee A \supset A$	$(A \supset A \vee A) \wedge (A \vee A \supset A)$
t	t	t	t	t
f	f	t	t	t

2. 真理値表 9 より，任意の付値 ν で $\nu(\underline{(A \wedge (B \wedge C) \supset (A \wedge B) \wedge C)} \wedge \underline{((A \wedge B) \wedge C \supset A \wedge (B \wedge C))}) = t$ なので，$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$ はトートロジーである．
   また，真理値表 10 より，任意の付値 ν で $\nu(\underline{(A \vee (B \vee C) \supset (A \vee B) \vee C)} \wedge \underline{((A \vee B) \vee C \supset A \vee (B \vee C))}) = t$ なので，$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ はトートロジーである．

表 9: $A \wedge (B \wedge C)$ と $(A \wedge B) \wedge C$ の真理値表

A	B	C	$B \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C)$	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \wedge C$	$A \wedge (B \wedge C) \supset (A \wedge B) \wedge C$	$(A \wedge B) \wedge C \supset A \wedge (B \wedge C)$
t	t	t	t	t	t	t	t	t
t	t	f	f	f	t	f	t	t
t	f	t	f	f	f	f	t	t
t	f	f	f	f	f	f	t	t
f	t	t	t	f	f	f	t	t
f	t	f	f	f	f	f	t	t
f	f	t	f	f	f	f	t	t
f	f	f	f	f	f	f	t	t

3. 真理値表 11 より，$A \wedge B \equiv B \wedge A$ はトートロジーである．
   真理値表 12 より，$A \vee B \equiv B \vee A$ はトートロジーである．

4. 真理値表 13 より，$A \wedge (A \vee B) \equiv A$ はトートロジーである．
   真理値表 14 より，$A \vee (A \wedge B) \equiv A$ はトートロジーである．

表 10: $A \vee (B \vee C)$ と $(A \vee B) \vee C$ の真理値表

A	B	C	$B \vee C$	$A \vee (B \vee C)$	$A \vee B$	$(A \vee B) \vee C$	$A \vee (B \vee C) \supset (A \vee B) \vee C$	$(A \vee B) \vee C \supset A \vee (B \vee C)$
t	t	t	t	t	t	t	t	t
t	t	f	t	t	t	t	t	t
t	f	t	t	t	t	t	t	t
t	f	f	f	t	t	t	t	t
f	t	t	t	t	t	t	t	t
f	t	f	t	t	t	t	t	t
f	f	t	t	t	f	t	t	t
f	f	f	f	f	f	f	t	t

表 11: $A \wedge B \equiv B \wedge A$ の真理値表

A	B	$A \wedge B$	$B \wedge A$	$A \wedge B \supset B \wedge A$	$B \wedge A \supset A \wedge B$	$(A \wedge B \supset B \wedge A) \ \wedge \ (B \wedge A \supset A \wedge B)$
t	t	t	t	t	t	t
t	f	f	f	t	t	t
f	t	f	f	t	t	t
f	f	f	f	t	t	t

表 12: $A \vee B \equiv B \vee A$ の真理値表

A	B	$A \vee B$	$B \vee A$	$A \vee B \supset B \vee A$	$B \vee A \supset A \vee B$	$(A \vee B \supset B \vee A) \ \wedge \ (B \vee A \supset A \vee B)$
t	t	t	t	t	t	t
t	f	t	t	t	t	t
f	t	t	t	t	t	t
f	f	f	f	t	t	t

表 13: $A \wedge (A \vee B) \equiv A$ の真理値表

A	B	$A \vee B$	$A \wedge (A \vee B)$	$A \wedge (A \vee B) \supset A$	$A \supset A \wedge (A \vee B)$	$(A \wedge (A \vee B) \supset A) \wedge (A \supset A \wedge (A \vee B))$
t	t	t	t	t	t	t
t	f	t	t	t	t	t
f	t	t	f	t	t	t
f	f	f	f	t	t	t

表 14: $A \vee (A \wedge B) \equiv A$ の真理値表

A	B	$A \wedge B$	$A \vee (A \wedge B)$	$A \vee (A \wedge B) \supset A$	$A \supset A \vee (A \wedge B)$	$(A \wedge (A \vee B) \supset A) \wedge (A \supset A \vee (A \wedge B))$
t	t	t	t	t	t	t
t	f	f	t	t	t	t
f	t	f	f	t	t	t
f	f	f	f	t	t	t

5.

6.

7.

8.

問 1.7 の解答

1. C が $\mathsf{D} \vee \mathsf{E}$ の形のとき，

   $\mathsf{C_A}$ および $\mathsf{C_B}$ はそれぞれ $\mathsf{D_A} \vee \mathsf{E_A}$ および $\mathsf{D_B} \vee \mathsf{E_B}$ である．D と E はともに C よりも「簡単」な論理式だから，仮定より $\mathsf{D_A} \sim \mathsf{D_B}, \mathsf{E_A} \sim \mathsf{E_B}$ がともになりたつ．つまり，どんな付値 ν をとっても $\nu(\mathsf{D_A}) = \nu(\mathsf{D_B})$ および $\nu(\mathsf{E_A}) = \nu(\mathsf{E_B})$ となる．ところが

$$
\begin{aligned}
\nu(\mathsf{D_A} \vee \mathsf{E_A}) = \mathsf{t} &\iff \nu(\mathsf{D_A}) = \mathsf{t} \text{ または } \nu(\mathsf{E_A}) = \mathsf{t} \\
&\iff \nu(\mathsf{D_B}) = \mathsf{t} \text{ または } \nu(\mathsf{E_B}) = \mathsf{t} \\
&\iff \nu(\mathsf{D_B} \vee \mathsf{E_B}) = \mathsf{t}
\end{aligned}
$$

   より，$\nu(\mathsf{C_A}) = \nu(\mathsf{C_B})$ となる．ν は任意の付値だから，$\mathsf{C_A} \sim \mathsf{C_B}$ が得られる．

2. C が $\mathsf{D} \supset \mathsf{E}$ の形のとき，

   $\mathsf{C_A}$ および $\mathsf{C_B}$ はそれぞれ $\mathsf{D_A} \supset \mathsf{E_A}$ および $\mathsf{D_B} \supset \mathsf{E_B}$ である．D と E はともに C よりも「簡単」な論理式だから，仮定より $\mathsf{D_A} \sim \mathsf{D_B}, \mathsf{E_A} \sim \mathsf{E_B}$ がともになりたつ．つまり，どんな付値 ν をとっても $\nu(\mathsf{D_A}) = \nu(\mathsf{D_B})$ および $\nu(\mathsf{E_A}) = \nu(\mathsf{E_B})$ となる．ところが

$$
\begin{aligned}
\nu(\mathsf{D_A} \supset \mathsf{E_A}) = \mathsf{t} &\iff \nu(\mathsf{D_A}) = \mathsf{f} \text{ または } \nu(\mathsf{E_A}) = \mathsf{t} \\
&\iff \nu(\mathsf{D_B}) = \mathsf{f} \text{ または } \nu(\mathsf{E_B}) = \mathsf{t} \\
&\iff \nu(\mathsf{D_B} \supset \mathsf{E_B}) = \mathsf{t}
\end{aligned}
$$

   より，$\nu(\mathsf{C_A}) = \nu(\mathsf{C_B})$ となる．ν は任意の付値だから，$\mathsf{C_A} \sim \mathsf{C_B}$ が得られる．

3. C が $\neg\mathsf{D}$ の形のとき，

   $\mathsf{C_A}$ は $\neg\mathsf{D_A}$ である．D は C よりも「簡単」な論理式だから，仮定より $\mathsf{D_A} \sim \mathsf{D_B}$ がともになりたつ．つまり，どんな付値 ν をとっても $\nu(\mathsf{D_A}) = \nu(\mathsf{D_B})$ となる．ところが

$$
\begin{aligned}
\nu(\neg\mathsf{D_A}) = \mathsf{t} &\iff \nu(\mathsf{D_A}) = \mathsf{f} \\
&\iff \nu(\mathsf{D_B}) = \mathsf{f} \\
&\iff \nu(\neg\mathsf{D_B}) = \mathsf{t}
\end{aligned}
$$

   より，$\nu(\mathsf{C_A}) = \nu(\mathsf{C_B})$ となる．ν は任意の付値だから，$\mathsf{C_A} \sim \mathsf{C_B}$ が得られる．

問 1.8 の解答

$\mathsf{p} \supset (\mathsf{q} \supset \mathsf{r}) \sim (\mathsf{p} \wedge \mathsf{q}) \supset \mathsf{r}$ がなりたつことを，論理式 $\mathsf{p} \supset (\mathsf{q} \supset \mathsf{r})$ を同値変形で置き換えて論理式 $(\mathsf{p} \wedge \mathsf{q}) \supset \mathsf{r}$ へと置き換えることにより示す．

$$
\begin{aligned}
\mathsf{p} \supset (\mathsf{q} \supset \mathsf{r}) &\sim \neg\mathsf{p} \vee (\mathsf{q} \supset \mathsf{r}) \text{（定理 1.3.8 より）} \\
&\sim \neg\mathsf{p} \vee (\neg\mathsf{q} \vee \mathsf{r}) \text{（定理 1.3.8 より）} \\
&\sim (\neg\mathsf{p} \vee \neg\mathsf{q}) \vee \mathsf{r} \text{（} \vee \text{ の結合法則より）} \\
&\sim (\neg(\mathsf{p} \wedge \mathsf{q})) \vee \mathsf{r} \text{（De Morgan の法則より）} \\
&\sim (\mathsf{p} \wedge \mathsf{q}) \supset \mathsf{r} \text{（De Morgan の法則より）}
\end{aligned}
$$

以上の置き換えより，$p \supset (q \supset r) \sim (p \wedge q) \supset r$ がなりたつ．

問 1.9 の解答

1. $\neg(p \supset (q \wedge r))$ と $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ の真理値表を書いて，それぞれを照らし合わせて $\neg(p \supset (q \wedge r)) \sim (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ となることを確かめる．

表 15: $\neg(p \supset (q \wedge r))$ の真理値表

p	q	r	$q \wedge r$	$p \supset (q \wedge r)$	$\neg(p \supset (q \wedge r))$
t	t	t	t	t	f
t	t	f	f	f	t
t	f	t	f	f	t
t	f	f	f	f	t
f	t	t	t	t	f
f	t	f	f	t	f
f	f	t	f	t	f
f	f	f	f	t	f

表 16: $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ の真理値表

p	q	r	$p \wedge q \wedge \neg r$	$p \wedge \neg q \wedge r$	$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$
t	t	t	f	f	f	f
t	t	f	t	f	f	t
t	f	t	f	t	f	t
t	f	f	f	f	t	t
f	t	t	f	f	f	f
f	t	f	f	f	f	f
f	f	t	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f

$\neg(p \supset (q \wedge r))$ の真理値表と $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ の真理値表を見ると，どちらの論理式も $(p = t, q = t, r = f), (p = t, q = f, r = t), (p = t, q = f, r = f)$ の割り当てのときのみ t となる．つまり，任意の付置 v に対して二つの論理式の真偽が一致しているので，$\neg(p \supset (q \wedge r)) \sim (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)$ となる．

2. 2016 年 10 月 31 日の時点において分かっていない．

問 1.10 の解答

それぞれの論理式を例 1.10 のように論理和標準形および論理積標準形置き換える．

1. $((p \supset q) \supset p)) \supset p$

$$
\begin{aligned}
((p \supset q) \supset p)) \supset p &\sim ((\neg p \vee q) \supset p)) \supset p && \text{（定理 1.3.8 より）}\\
&\sim (\neg(\neg p \vee q) \vee p)) \supset p && \text{（定理 1.3.8 より）}\\
&\sim \neg(\neg(\neg p \vee q) \vee p) \vee p && \text{（定理 1.3.8 より）}\\
&\sim \neg((\neg\neg p \wedge \neg q) \vee p) \vee p && \text{（de Morgan の法則より）}\\
&\sim (\neg(\neg\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg p) \vee p && \text{（de Morgan の法則より）}\\
&\sim ((\neg(\neg\neg p) \vee \neg\neg q) \wedge \neg p) \vee p && \text{（de Morgan の法則より）}\\
&\sim ((\neg p \vee q) \wedge \neg p) \vee p && \text{（定理 1.3.6 より）}\\
&\sim ((\neg p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p)) \vee p && \text{（分配律より）}\\
&\sim (\neg p \vee (q \wedge \neg p)) \vee p && \text{（冪等律より）} \quad \text{「論理和標準形」}\\
&\sim ((\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg p)) \vee p && \text{（分配律より）}\\
&\sim ((\neg p \vee q) \wedge \neg p) \vee p && \text{（冪等律より）}\\
&\sim ((\neg p \vee q) \vee p) \wedge (\neg p \vee p) && \text{（分配律より）}\\
&\sim ((\neg p \vee p) \vee q) \wedge (\neg p \vee p) && \text{（結合律と交換律より）}\\
&\sim (\top \vee q) \wedge \top && \text{（定理 1.3.9 より）} \quad \text{「論理積標準形？」}
\end{aligned}
$$

「論理和標準形」と注を付けている行の 3 行下の行は，節に同一の論理変数が二つ以上現れているので「論理積標準形」と見做さない．

2. $(p \supset (p \wedge \neg q)) \wedge (q \supset (q \wedge \neg p)))$

$(p \supset (p \wedge \neg q)) \wedge (q \supset (q \wedge \neg p)))$ ~ $(\neg p \vee (p \wedge \neg q)) \wedge (q \supset (q \wedge \neg p)))$ （定理 1.3.8 より）
~ $(\neg p \vee (p \wedge \neg q)) \wedge (\neg q \vee (q \wedge \neg p)))$ （定理 1.3.8 より）
~ $((\neg p \vee (p \wedge \neg q)) \wedge \neg q) \vee ((\neg p \vee (p \wedge \neg q)) \wedge (q \wedge \neg p)))$ （分配律より）
~ $((\neg p \wedge \neg q) \vee ((p \wedge \neg q) \wedge \neg q)) \vee ((\neg p \vee (p \wedge \neg q)) \wedge (q \wedge \neg p)))$ （分配律より）
~ $((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q)) \vee ((\neg p \vee (p \wedge \neg q)) \wedge (q \wedge \neg p)))$ （冪等律より）
~ $((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q))$
$\vee ((\neg p \wedge (q \wedge \neg p)) \vee ((p \wedge \neg q) \wedge (q \wedge \neg p)))$ （分配律より）
~ $((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q))$
$\vee ((\neg p \wedge q) \vee ((p \wedge \neg p) \wedge (q \wedge \neg q)))$ （交換律と結合律と冪等律より）
~ $((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q)) \vee ((\neg p \wedge q) \vee (\bot \wedge \bot))$ （定理 1.3.9 より）
~ $((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$ （定理 1.3.11 より） 「論理和標準形」
~ $((\neg p \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg q \vee (p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$ （分配律より）
~ $((\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q) \vee (\neg q \vee (p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$ （分配律より）
~ $(\top \wedge (\neg p \vee \neg q) \vee (\neg q \vee (p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$ （定理 1.3.9 より）
~ $((\neg p \vee \neg q) \vee (\neg q \vee (p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$ （定理 1.3.9 より）
~ $((\neg p \vee \neg q) \vee ((\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg q))) \vee (\neg p \wedge q)$ （分配律より）
~ $((\neg p \vee \neg q) \vee ((\neg q \vee p) \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$ （冪等律より）
~ $((\neg p \vee \neg q) \vee (\neg q \vee p)) \wedge ((\neg p \vee \neg q) \vee \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$ （分配律より）
~ $((\neg p \vee \neg q) \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$ （結合律と冪等律より）
~ $(\top \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$ （結合律と交換律と定理 1.3.10 より）
~ $(\neg p \vee \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ （結合律と交換律と定理 1.3.11 より）
~ $((\neg p \vee \neg q) \vee \neg p) \wedge ((\neg p \vee \neg q) \vee q)$ （分配律より）
~ $(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee (\neg q \vee q))$ （結合律と交換律と冪等律より）
~ $(\neg p \vee \neg q)$ （定理 1.3.9, 1.3.10, 1.3.11 より） 「論理積標準形」

3. $\neg(p \supset q) \wedge ((q \supset s) \supset r)$
（省略）

問 1.11 の解答

A $\wedge$ B と C $\vee$ D の形の論理式を $\supset$ と $\neg$ のみを用いた同値な論理式へ置き換えることによって示す.

$$A \wedge B \sim \neg\neg A \wedge \neg\neg B \quad （定理 1.3.6 より）$$
$$\sim \neg(\neg A \vee \neg B) \quad （De Morgan の法則より）$$
$$\sim \neg(A \supset \neg B) \quad （定理 1.3.8 より）$$

$$A \vee B \sim \neg\neg A \vee B \quad （定理 1.3.6 より）$$
$$\sim \neg A \supset B \quad （定理 1.3.8 より）$$

問 1.12 の解答

2016 年 10 月 31 日の時点において分かっていない.

問 1.13 の解答

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A}{\to A, \neg A}\,(\neg\,\text{右})}{\to A, A \vee \neg A}\,(\vee\,\text{右}\,2)}{\to A \vee \neg A, A}\,(\text{exchange 右})}{\to A \vee \neg A, A \vee \neg A}\,(\vee\,\text{右}\,1)}{\to A \vee \neg A}\,(\text{contraction 右})
$$

問 1.14 の解答

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A \quad B \to B}{A \supset B, A \to B}\,(\supset\,\text{左})}{\neg B, A \supset B, A \to}\,(\neg\,\text{左})}{\neg B, A, A \supset B \to}\,(\text{ex. 左})}{A \wedge \neg B, A, A \supset B \to}\,(\wedge\,\text{左}\,2)}{A, A \wedge \neg B, A \supset B \to}\,(\text{ex. 左})}{A \wedge \neg B, A \wedge \neg B, A \supset B \to}\,(\wedge\,\text{左}\,1)}{A \wedge \neg B, A \supset B \to}\,(\text{cont. 左})}{A \supset B \to \neg(A \wedge \neg B)}\,(\neg\,\text{右})
$$

問 1.15 の解答

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, \Gamma \to \Delta, B}{A, \Gamma \to \Delta, \neg A \vee B}\,(\vee\,\text{右}\,2)}{\Gamma \to \Delta, \neg A \vee B, \neg A}\,(\neg\,\text{右})}{\Gamma \to \Delta, \neg A \vee B, \neg A \vee B}\,(\vee\,\text{右}\,1)}{\Gamma \to \Delta, \neg A \vee B}\,(\text{cont. 右})
$$

問 1.16 の解答

1)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A}{\to A, \neg A}\,(\neg\,\text{右})}{\to A, \neg A \vee \neg B}\,(\vee\,\text{右}\,1)}{\to \neg A \vee \neg B, A}\,(\text{ex. 右}) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{B \to B}{\to B, \neg B}\,(\neg\,\text{右})}{\to B, \neg A \vee \neg B}\,(\vee\,\text{右}\,2)}{\to \neg A \vee \neg B, B}\,(\text{ex. 右})}{\to \neg A \vee \neg B, A \wedge B}\,(\wedge\,\text{右})}{\neg(A \wedge B) \to \neg A \vee \neg B}\,(\neg\,\text{左})
$$

2)

$$
\dfrac{\dfrac{A \to A}{\neg A, A \to}\,(\neg\,\text{左})}{A \to \neg\neg A}\,(\neg\,\text{右})
$$

3)

$$
\dfrac{\dfrac{A \to A}{\to A, \neg A}\,(\neg\,\text{右})}{\neg\neg A \to A}\,(\neg\,\text{左})
$$

4)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{B \to B}{A, B \to B}\,(\text{weakening 左})}{B \to A \supset B}\,(\supset\text{右}) \qquad \dfrac{A \to A \quad C \to C}{A \supset C, A \to C}\,(\supset\text{左})}{(A \supset B) \supset (A \supset C), B, A \to C}\,(\supset\text{左})}{B, A, (A \supset B) \supset (A \supset C) \to C}\,(\text{ex. 左*})}{A, (A \supset B) \supset (A \supset C) \to B \supset C}\,(\supset\text{右})}{(A \supset B) \supset (A \supset C) \to A \supset (B \supset C)}\,(\supset\text{右})$$

5)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A \to A \quad \dfrac{A \to A}{\neg A, A \to}\,(\neg\text{右})}{A \supset \neg A, A, A \to}\,(\neg\text{右})}{A, A, A \supset \neg A \to}\,(\text{ex. 左*})}{A, A \supset \neg A \to}\,(\text{cont. 左})}{A \supset \neg A \to \neg A}\,(\neg\text{右})$$

問 1.17 の解答

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta, A \quad \bot \to}{A \supset \bot, \Gamma \to \Delta}\,(\supset\text{左}) \qquad\qquad \dfrac{\dfrac{A, \Gamma \to \Delta}{A, \Gamma \to \Delta, \bot}\,(\text{weak. 右})}{\Gamma \to \Delta, A \supset \bot}\,(\supset\text{右})$$

問 1.18 の解答

(1a)

(1b)

(2a)

(2b)

(3a)

(4a)

(4b)

問 1.22 の解答

9)

$$\begin{array}{lll} & a \cup a = a & \textbf{定義 1.4}\ \text{1) 右} \\ \iff & a \leq a & \text{p.48 8)} \end{array}$$

10) $a \leq b$ ($a \cup b = b$) と $b \leq c$ を仮定する．$a \leq c$ を示す．

$$\begin{array}{lll} & b \leq c & \text{仮定} \\ \iff & b \cup c = c & \text{p.48 8)} \\ \iff & (a \cup b) \cup c = c & \text{仮定と p.48 8)} \\ \iff & a \cup (b \cup c) = c & \textbf{定義 1.4}\ \text{2) の右)} \\ \iff & a \cup c = c & \text{仮定と p.48 8)} \\ \iff & a \leq c & \text{p.48 8)} \end{array}$$

11)　$\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b} = \mathfrak{b}$ と $\mathfrak{b} \cup \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ を仮定する．$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ を示す．

	$(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}) = (\mathfrak{b} \cup \mathfrak{a})$	**定義 1.4** 3) 右
$\Longleftrightarrow$	$(\mathfrak{b} \cup \mathfrak{a}) = (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b})$	両辺のそれぞれに**定義 1.4** 3) 右を適用
$\Longleftrightarrow$	$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$	仮定と p.48 8)

12)　これに関しては解答の書き方が解っていない．

$$
\begin{aligned}
& \mathfrak{a} \cap (\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \\
\Longleftrightarrow\ & \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \\
\Longleftrightarrow\ & \mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}
\end{aligned}
$$

13)

	$\mathfrak{a} \cup 0 = \mathfrak{a}$	**定義 1.4** 7) 左
$\Longleftrightarrow$	$0 \cup \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$	**定義 1.4** 3) 右
$\Longleftrightarrow$	$0 \leq \mathfrak{a}$	p.48 8)

	$\mathfrak{a} \cup 1 = 1$	**定義 1.4** 7) 右
$\Longleftrightarrow$	$\mathfrak{a} \leq 1$	p.48 8)

問 2.1 の解答

(1) 1) すべての教師を好きな学生がいる．

2) すべての怠け者は，すべての教師が好きではない．

(2) $\neg(\forall x\ (T(x) \supset L(x)))$

問 2.2 の解答

(1) 実数の集合は稠密順序集合である（任意の実数のいくらでも近くに別の実数が存在する）．

(2) 関係 $<$ は推移律を満たす．

問 2.3 の解答

項 t に変数 y が出現せず，且つ，項 s に変数 x が出現しないこと．

問 2.4 の解答

変数 y が論理式 A に自由な出現をしないこと．

問 2.5 の解答

(1) 1) 成り立たない．何故ならば a_4Ry，a_5Ry となるような y は存在しないから．

2) 成り立つ．任意の x に対して，y として a_4 か a_5 をとる（$x := a_4$ なら $y := a_4$，$x := a_5$ なら $y := a_5$ とする）．そうすると yRz を満たすような z は適当に選んだ y 自身しかないので $yRy \supset yRy$ となる．R は順序関係なので反射律を満たすのでこの論理式は成り立つ．

(2)

3) 成り立つ．$y := a_4, z := a_5$ とすれば良い．

4) 成り立たない．$x := a_1, y := a_2, z := a_3$ とすると，$xRy \wedge yRz$ は成り立つが，$x = y \vee y = z$ は成り立たない．つまり，$\forall x \forall y \forall z\, ((xRy \wedge yRz) \supset (x = y \vee y = z))$ は成り立たない．

問 2.8 の解答

(1) 1) $\models \forall x\, A \equiv A$ を示す．

恒真性の定義 (p.70) より，

任意の構造 $\mathfrak{A}$ に対し，$\mathfrak{A} \models \forall y_1 \cdots \forall y_n\ (\forall x\, A \equiv A)$ となることをいえばよい．ここで論理式 $\forall x\ A \equiv A$ は自由変数として $y_1 \cdots y_n$ を持つものとしておく．さらに，$\equiv$ の定義 (p.10) より

$$\mathfrak{A} \models \forall y_1 \cdots \forall y_n\ ((\forall x\, A \supset A) \wedge (A \supset \forall x\, A))$$

をいえばよい．これを示すには，任意の構造 $\mathfrak{A} = \langle U, I \rangle$ および任意の $u_1, \ldots, u_n \in U$ に対し

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models (&(\forall x\ A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n] \supset A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n]) \\ &\wedge\ (A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n] \supset \forall x\ A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n]))\end{aligned}$$

をいえばよい．

ここで，$A \wedge B$ の形の論理式が正しいということの意味 (p.64(4)) より

$$\mathfrak{A} \models (\forall x\ A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n] \supset A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n])$$

と

$$\mathfrak{A} \models A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n] \supset \forall x\ A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n]$$

が正しいことを示せばよい．以下の証明では，自由変数 $x_1, \cdots, x_n$ への $\underline{u_1}, \cdots \underline{u_n}$ への代入がすでに行われているものとし，したがって，A が自由変数を一つも含まない場合について述べる．

a) $\mathfrak{A} \models \forall x\, A \supset A$ を示す.
これを示すには $\mathfrak{A} \models \forall x\, A$ を仮定して $\mathfrak{A} \models A$ を示せば十分である.
構造 $\mathfrak{A} = \langle U, I \rangle$ に対して, $\mathfrak{A} \models \forall x\, A$ と仮定する. したがって, すべての $u \in U$ に対して $\mathfrak{A} \models A[\underline{u}/x]$ となる. ここで, A は x を自由変数として含まないので, すべての $u \in U$ に対して, A は $A[\underline{u}/x]$ に等しい. よって $\mathfrak{A} \models A$ である.

b) $\mathfrak{A} \models A \supset \forall x\, A$ を示す.
これを示すには $\mathfrak{A} \models A$ を仮定して $\mathfrak{A} \models \forall x\, A$ を示せば十分である.
構造 $\mathfrak{A} = \langle U, I \rangle$ に対して, $\mathfrak{A} \models A$ と仮定する. したがって, すべての $u \in U$ に対して $\mathfrak{A} \models A$ となる. ここで, A は x を自由変数として含まないので, すべての $u \in U$ に対して, A は $A[\underline{u}/x]$ に等しい. これは, $\mathfrak{A} \models \forall x\, A$ である.

a), b) より $\models \forall x\, A \equiv A$ は恒真である.

2) $\models \exists x\, A \equiv A$ を示す.
恒真性の定義 (p.70) より,
任意の構造 $\mathfrak{A}$ に対し, $\mathfrak{A} \models \forall y_1 \cdots \forall y_n\ (\exists x\, A \equiv A)$ となることをいえばよい. ここで論理式 $\exists x\ A \equiv A$ は自由変数として $y_1 \cdots y_n$ を持つものとしておく. さらに, $\equiv$ の定義 (p.10) より

$$\mathfrak{A} \models \forall y_1 \cdots \forall y_n\ ((\exists x\, A \supset A) \wedge (A \supset \exists x\, A))$$

をいえばよい. これを示すには, 任意の構造 $\mathfrak{A} = \langle U, I \rangle$ および任意の $u_1, \ldots, u_n \in U$ に対し

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models ((&\exists x\ A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n] \supset A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n]) \\ &\wedge\ (A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n] \supset \exists x\ A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n]))\end{aligned}$$

をいえばよい. ここで, $A \wedge B$ の形の論理式が正しいということの意味 (p.64(4)) より

$$\mathfrak{A} \models (\exists x\ A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n] \supset A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n])$$

と

$$\mathfrak{A} \models A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n] \supset \exists x\ A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n]$$

が正しいことを示せばよい. 以下の証明では, 自由変数 $x_1, \cdots, x_n$ への $\underline{u_1}, \cdots \underline{u_n}$ への代入がすでに行われているものとし, したがって, A が自由変数を一つも含まない場合について述べる.

a) $\mathfrak{A} \models \exists x\, A \supset A$ を示す.
これを示すためには $\mathfrak{A} \models \exists x\, A$ を仮定して $\mathfrak{A} \models A$ を示せば十分である.
構造 $\mathfrak{A} = \langle U, I \rangle$ に対して, $\mathfrak{A} \models \exists x\, A$ と仮定する. したがって, ある $u \in U$ に対して $\mathfrak{A} \models A[\underline{u}/x]$ となる. ここで, A は x を自由変数として含まないので, A は $A[\underline{u}/x]$ に等しい. よって $\mathfrak{A} \models A$ である.

b) $\mathfrak{A} \models A \supset \exists x\, A$ を示す.
これを示すには $\mathfrak{A} \models A$ を仮定して $\mathfrak{A} \models \exists x\, A$ を示せば十分である.
構造 $\mathfrak{A} = \langle U, I \rangle$ に対して, $\mathfrak{A} \models A$ と仮定する. したがって, ある $u \in U$ に対して $\mathfrak{A} \models A$ となる. ここで, A は x を自由変数として含まないので, ある $u \in U$ に対して, A は $A[\underline{u}/x]$ に等しい. これは, $\mathfrak{A} \models \exists x\, A[x]$ である.

a), b) より $\models \exists x\, A \equiv A$ は恒真である.

(2) 以下省略

問 2.11 の解答

1)

$$\begin{array}{lll} & \exists x\, R(x,y) \supset \forall y\, (P(y) \wedge \neg \forall z\, Q(z)) & \\ \sim & \exists x\, R(x,y) \supset \forall u\, (P(u) \wedge \neg \forall z\, Q(z)) & \text{定理 2.1 の 2)} \\ \sim & \exists x\, \forall u\, (R(x,y) \supset (P(u) \wedge \exists z \neg\, Q(z))) & \text{定理 2.1 の 11) の左} \\ \sim & \exists x\, \forall u\, (R(x,y) \supset \exists z\, (P(u) \wedge \neg\, Q(z))) & \text{定理 2.1 の 4) の右} \\ \sim & \exists x\, \forall u\, \exists z\, (R(x,y) \supset (P(u) \wedge \neg\, Q(z))) & \text{定理 2.1 の 11) の右} \end{array}$$

2)

$$
\begin{array}{lll}
 & \exists x\,(\forall y\,(P(y) \supset Q(x,z)) \vee \exists z\,(\neg\,(\exists u\,R(z,u) \wedge Q(x,z)))) & \\
\sim & \exists x\,(\forall y\,(P(y) \supset Q(x,z)) \vee \exists v\,(\neg\,(\exists u\,R(v,u) \wedge Q(x,v)))) & \text{定理 2.1 の 2) の右} \\
\sim & \exists x\,\exists v\,(\forall y\,(P(y) \supset Q(x,z)) \vee (\neg\,(\exists u\,R(v,u) \wedge Q(x,v)))) & \text{定理 2.1 の 3) の右} \\
\sim & \exists x\,\exists v\,(\forall y\,(P(y) \supset Q(x,z)) \vee (\neg\,\exists u\,R(v,u) \vee \neg\,Q(x,v))) & \text{定理 1.3 の 7) の右} \\
\sim & \exists x\,\exists v\,(\forall y\,(P(y) \supset Q(x,z)) \vee (\forall u\,\neg\,R(v,u) \vee \neg\,Q(x,v))) & \text{定理 2.1 の 10) の右} \\
\sim & \exists x\,\exists v\,(\forall y\,(P(y) \supset Q(x,z)) \vee \forall u\,(\neg\,R(v,u) \vee \neg\,Q(x,v))) & \text{定理 2.1 の 4) の左} \\
\sim & \exists x\,\exists v\,\forall u\,(\forall y\,(P(y) \supset Q(x,z)) \vee (\neg\,R(v,u) \vee \neg\,Q(x,v))) & \text{定理 2.1 の 11) の左} \\
\sim & \exists x\,\exists v\,\forall u\,((\neg\,R(v,u) \vee \neg\,Q(x,v)) \vee \forall y\,(P(y) \supset Q(x,z))) & \text{定理 1.3 の 3) の右} \\
\sim & \exists x\,\exists v\,\forall u\,\forall y\,((\neg\,R(v,u) \vee \neg\,Q(x,v)) \vee (P(y) \supset Q(x,z))) & \text{定理 2.1 の 4) の左}
\end{array}
$$

問 2.14

1)

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x) \to P(x)}{P(x) \to P(x),\ Q(x)}}{\to P(x), P(x) \supset Q(x)}}{\to \forall x P(x), P(x) \supset Q(x)}}{\to \forall x P(x), \exists x(P(x) \supset Q(x))}}{\to \exists x(P(x) \supset Q(x)), \forall x P(x)}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Q(t) \to Q(t)}{P(t),\ Q(t) \to Q(t))}}{Q(t) \to P(t) \supset Q(t))}}{Q(t) \to \exists x(P(x) \supset Q(x))}}{\exists x Q(t) \to \exists x(P(x) \supset Q(x))}
}{\forall x P(x) \supset \exists Q(x) \to \exists x(P(x) \supset Q(x)), \exists x(P(x) \supset Q(x))}
}{\forall x P(x) \supset \exists Q(x) \to \exists x(P(x) \supset Q(x))}
$$

2) 誤り

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x) \to P(x),\ Q(x)}{\to P(x), P(x) \supset Q(x)}}{\to \forall x P(x), P(x) \supset Q(x)}}{\to \forall x P(x), \exists x(P(x) \supset Q(x))}
$$

正しい

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{P(x) \to P(x),\ Q(x)}{\to P(x), P(x) \supset Q(x)}}{\to P(x), \exists x(P(x) \supset Q(x))}}{\to \forall x P(x), \exists x(P(x) \supset Q(x))}
$$

問 3.1 の解答

スコーレム標準形を求める.

1)

$$
\begin{array}{lll}
 & P(x) \supset (\exists y(\exists u Q(x,u) \supset R(y,z)) \vee S(x,y)) & \text{12) の右} \\
\sim & P(x) \supset (\exists y \forall u(Q(x,u) \supset R(y,z)) \vee S(x,y)) & \text{変数の置き換え} \\
\sim & P(x) \supset (\exists w \forall u(Q(x,u) \supset R(w,z)) \vee S(x,y)) & \text{3) の右} \\
\sim & P(x) \supset \exists w(\forall u(Q(x,u) \supset R(w,z)) \vee S(x,y)) & \text{4) の左} \\
\sim & P(x) \supset \exists w \forall u((Q(x,u) \supset R(w,z)) \vee S(x,y)) & \text{11) の右} \\
\sim & \exists w(P(x) \supset \forall u(Q(x,u) \supset R(w,z)) \vee S(x,y)) & \text{11) の左} \\
\sim & \exists w \forall u(P(x) \supset ((Q(x,u) \supset R(w,z)) \vee S(x,y)) &
\end{array}
$$

上記の論理式の冠頭標準形を以下に示す.

$$\forall x \forall y \forall z \exists w \forall u(P(x) \supset ((Q(x,u)) \supset R(w,z)) \vee S(x,y))$$

$\forall u$ の左側には，存在記号が一つ現れるので一変数関数記号 f を導入し，自由変数 (x,y,z) に定数記号 a,b,c を導入すると，

$$\exists w(P(a) \supset ((Q(a, f(w)) \supset R(w, c)) \vee S(a, b))$$

問 3.2 の解答

スコーレム標準形を求める．

1)

$$\begin{array}{lll} & \exists z((\forall x P(x) \supset \exists y Q(y) \supset (P(z) \supset Q(z)) & \text{11) の右} \\ \sim & \exists z(\exists y(\forall x P(x) \supset Q(y) \supset (P(z) \supset Q(z)) & \text{12) の右} \\ \sim & \exists z \forall y((\forall x P(x) \supset Q(y) \supset (P(z) \supset Q(z)) & \text{12) の右} \\ \sim & \exists z \forall y(\exists x(P(x) \supset Q(y) \supset (P(z) \supset Q(z)) & \text{12) の左} \\ \sim & \exists z \forall y \forall x(P(x) \supset Q(y) \supset (P(z) \supset Q(z)) & \end{array}$$

$\forall y$ の左側には，存在記号が一つ現れるので一変数関数記号 f を導入，$\forall x$ の左側にも，存在記号は一つ現れるので一変数関数記号 g を導入して，

$$\exists z((P(g(z)) \supset Q(f(z))) \supset (P(z) \supset Q(z))$$

2) A を $\exists z((\forall x P(x) \supset \exists y Q(y) \supset (P(z) \supset Q(z))$ とする．
このとき，A のスコーレム標準形は， $\exists z((P(g(z)) \supset Q(f(z))) \supset (P(z) \supset Q(z))$ になる．
この論理式は，一つも対象定数を含まないので，新たな対象定数 c を付け加えることにする. そうするとエルブラン領域 H_L は，

$$H_L = \{c, f(c), g(c), f(f(c)), f(g(c)), \cdots\}$$

になる. 論理式 $(P(g(z)) \supset Q(f(z))) \supset (P(z) \supset Q(z))$ の z に c を代入すると，$(P(g(c)) \supset Q(f(c))) \supset (P(c) \supset Q(c))$ が得られる．
この論理式に対して， π をほどこして命題論理の論理式を作ると，

$$(P \supset q) \supset (r \supset s)$$

の形になる. この論理式はトートロジーではない．
次に，$(P(g(z)) \supset Q(f(z))) \supset (P(z) \supset Q(z))$ の z に f(c) を代入した論理式に π をほどこすと以下になる．

$$(t \supset u) \supset (v \supset q)$$

得られた論理式上の論理式との論理和は，

$$((P \supset q) \supset (r \supset s)) \vee ((t \supset u) \supset (v \supset q))$$

の形になる. この論理式はトートロジーではない．次に，$(P(g(z)) \supset Q(f(z))) \supset (P(z) \supset Q(z))$ の z に g(c) を代入した論理式に π をほどこすと以下になる．

$$(h \supset i) \supset (p \supset j)$$

得られた論理式上の論理式との論理和は，

$$((P \supset q) \supset (r \supset s)) \vee ((t \supset u) \supset (v \supset q)) \vee (h \supset i) \supset (p \supset j)$$

の形となる. この論理式はトートロジーになる．したがって，

$$\exists z((\forall x P(x) \supset ((\forall y Q(y) \supset (P(z) \supset Q(z)))$$

は，恒真になる．

問 3.3 の解答

スコーレム標準形を求める．$\forall z$ と $\forall w$ の左側には，存在記号が二つ現れるので二変数関数記号 f,g を導入すると，

$$
\begin{aligned}
& \exists x \exists y \forall z \forall w((p(x) \supset Q(z)) \vee (Q(y) \supset P(w))) \\
\sim \quad & \exists x \exists y((p(x) \supset Q(f(x,y))) \vee (Q(y) \supset P(g(x,y))))
\end{aligned}
$$

となる．この論理式は，一つも対象定数を含まないので，新たな対象定数 a を付け加えることにする．そうするとエルブラン領域 H_L は，

$$H_L = \{a, f(a,a), g(a,a), \cdots\}$$

になる．論理式 $((p(x) \supset Q(f(x,y))) \vee (Q(y) \supset P(g(x,y))))$ の x,y に a を代入すると，$((p(a) \supset Q(f(a,a))) \vee (Q(a) \supset P(g(a,a))))$ が得られる．
この論理式に対して，π をほどこして命題論理の論理式を作ると，

$$(P \supset q) \supset (r \supset s)$$

の形になる．この論理式はトートロジーではない．
次に，$((p(x) \supset Q(f(x,y))) \vee (Q(y) \supset P(g(x,y))))$ の z に f(a,a) を代入した論理式に π をほどこすと以下になる．

$$(h \supset i) \supset (s \supset j)$$

得られた論理式上の論理式との論理和は，

$$((r \supset s) \vee (t \supset u)) \vee ((h \supset i) \vee (s \supset j))$$

の形となる．この論理式はトートロジーになる．したがって，

$$\exists x \exists y \forall z \forall w((p(x) \supset Q(z)) \vee (Q(y) \supset P(w)))$$

は，恒真になる．

.1 証明の書き方

- 接続詞などに用いる用語を統一する（教科書を参考にする）．
- 証明を書くときは，一行ずつ書いて改行する．
- サ変動詞を用いない．~~～として，～とする~~ $\Longrightarrow$ ～と仮定する，～と置く，... となるような～をとる．
- 仮定が何で結論は何なのかを明示する．
- 問題文の情報を用いた場合は，問題文のどこを用いたのかを明示する．
- 推論する場合は，用いた根拠と用いた推論規則を明示する．