

# 「情報科学における論理<sup>1</sup>」問題解答集（途中省略有り）

高田 篤司<sup>2</sup>          原田 崇司<sup>3</sup>

2016 年 5 月 30 日

<sup>1</sup>小野寛晰, 日本評論社, 1994

<sup>2</sup>神奈川大学理学部情報科学科

<sup>3</sup>神奈川大学大学院理学研究科情報科学専攻 田中研究室

### 問 1.1 の解答

1) 正しくない.

1) が正しくないことを証明する為には,  $A \supset B$  および  $A$  がともに充足可能であることを仮定して,  $B$  が充足可能であることを示せば良い.

よって, 初めに,

$$A \supset B \text{ および } A \text{ がともに充足可能である} \quad (1)$$

と仮定する. そして,

$$\text{論理式 } A \text{ を } p, \text{ 論理式 } B \text{ を } r \wedge \neg r \quad (2)$$

と仮定する.

仮定 (2) より, 論理式  $A \supset B$ , 即ち,  $p \supset r \wedge \neg r$  の真理値表は表 1 となる.

表 1:  $p \supset r \wedge \neg r$  ( $A \supset B$ ) の真理値表

p	r	$\neg r$	p	$r \wedge \neg r$	$p \supset r \wedge \neg r$
t	t	f	t	f	f
t	f	t	t	f	f
f	t	f	f	f	t
f	f	f	f	f	t

表 1 より,  $A \supset B$  は充足可能である.

さらに, 表 1 より,  $A$  は充足可能である.

しかし, 表 1 より,  $B$  は充足可能でない.

以上より, 1) は正しくない.

2) 正しい.

2) が正しいことを証明する為には,  $A \supset B$  がトートロジで  $A$  が充足可能であることを仮定して,  $B$  が充足可能であることを示せば良い. よって, 初めに,

$$A \supset B \text{ がトートロジで } A \text{ 充足可能である} \quad (3)$$

と仮定する.

仮定 (3) より,  $A \supset B$  がトートロジで  $A$  が充足可能なので,  $v(A) = t$ ,  $v(A \supset B) = t$  を満たす付値  $v$  が存在する.

ここで, 表 2 より,  $v(A) = t \wedge v(A \supset B) = t$  ならば,  $v(B) = t$  である.

表 2:  $A \supset B$  の真理値表

A	B	$A \supset B$
t	t	t
t	f	f
f	t	t
f	f	t

よって,  $A \supset B$  がトートロジで  $A$  が充足可能なとき,  $v(B) = t$  となる付値  $v$  が存在するので,  $B$  も充足可能である.

以上より, 2) は正しい.

## 問 2.14

1)

$$\begin{array}{c}
 \frac{P(x) \rightarrow P(x)}{P(x) \rightarrow P(x), Q(x)} \\
 \frac{\rightarrow P(x), P(x) \supset Q(x)}{\rightarrow \forall x P(x), P(x) \supset Q(x)} \\
 \frac{\rightarrow \forall x P(x), \exists x (P(x) \supset Q(x))}{\rightarrow \exists x (P(x) \supset Q(x)), \forall x P(x)} \\
 \frac{\rightarrow \exists x (P(x) \supset Q(x)), \forall x P(x)}{\forall x P(x) \supset \exists x (P(x) \supset Q(x))} \\
 \frac{\forall x P(x) \supset \exists x (P(x) \supset Q(x)), \exists x (P(x) \supset Q(x))}{\forall x P(x) \supset \exists x (P(x) \supset Q(x))}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 \frac{Q(t) \rightarrow Q(t)}{P(t), Q(t) \rightarrow Q(t)} \\
 \frac{P(t), Q(t) \rightarrow Q(t)}{Q(t) \rightarrow P(t) \supset Q(t)} \\
 \frac{Q(t) \rightarrow P(t) \supset Q(t)}{Q(t) \rightarrow \exists x (P(x) \supset Q(x))} \\
 \frac{Q(t) \rightarrow \exists x (P(x) \supset Q(x))}{\exists x Q(t) \rightarrow \exists x (P(x) \supset Q(x))} \\
 \frac{\exists x Q(t) \rightarrow \exists x (P(x) \supset Q(x))}{\exists x Q(t) \rightarrow \exists x (P(x) \supset Q(x))}
 \end{array}$$

2) 誤り

$$\begin{array}{c}
 \frac{P(x) \rightarrow P(x), Q(x)}{\rightarrow P(x), P(x) \supset Q(x)} \\
 \frac{\rightarrow P(x), P(x) \supset Q(x)}{\rightarrow \forall x P(x), P(x) \supset Q(x)} \\
 \frac{\rightarrow \forall x P(x), P(x) \supset Q(x)}{\rightarrow \forall x P(x), \exists x (P(x) \supset Q(x))}
 \end{array}$$

正しい

$$\begin{array}{c}
 \frac{P(x) \rightarrow P(x), Q(x)}{\rightarrow P(x), P(x) \supset Q(x)} \\
 \frac{\rightarrow P(x), P(x) \supset Q(x)}{\rightarrow P(x), \exists x (P(x) \supset Q(x))} \\
 \frac{\rightarrow P(x), \exists x (P(x) \supset Q(x))}{\rightarrow \forall x P(x), \exists x (P(x) \supset Q(x))}
 \end{array}$$

## .1 証明の書き方

- 接続詞などに用いる用語を統一する（教科書を参考にする）。
- 証明を書くときは、一行ずつ書いて改行する。
- サ変動詞を用いない。～として、～とする  $\implies$  ～と仮定する、～と置く、... となるような～をとる。
- 仮定が何で結論は何なのかを明示する。
- 問題文の情報をを用いた場合は、問題文のどこを用いたのかを明示する。
- 推論する場合は、用いた根拠と用いた推論規則を明示する。