「情報科学における論理[1]」問題解答集（途中省略有り）

高田　篤司[2]　　　　原田　崇司[3]

2016 年 10 月 17 日

[1]小野寛晰, 日本評論社, 1994
[2]神奈川大学理学部情報科学科 田中研究室
[3]神奈川大学大学院理学研究科理学専攻 田中研究室

問 1.1 の解答

1) 正しくない．

1) が正しくないことを証明する為には，$A \supset B$ および A がともに充足可能であることを仮定して，B が充足可能であることを示せば良い．

よって，初めに，

$$A \supset B \text{ および } A \text{ がともに充足可能である} \tag{1}$$

と仮定する．そして，

$$\text{論理式 } A \text{ を } p\text{，論理式 } B \text{ を } r \wedge \neg r \tag{2}$$

と仮定する．

仮定 (2) より，論理式 $A \supset B$，即ち，$p \supset r \wedge \neg r$ の真理値表は表 1 となる．

表 1: $p \supset r \wedge \neg r$ $(A \supset B)$ の真理値表

p	r	$\neg r$	p	$r \wedge \neg r$	$p \supset r \wedge \neg r$
t	t	f	t	f	f
t	f	t	t	f	f
f	t	f	f	f	t
f	f	f	f	f	t

表 1 より，$A \supset B$ は充足可能である．

さらに，表 1 より，A は充足可能である．

しかし，表 1 より，B は充足可能でない．

以上より，1) は正しくない．

2) 正しい．

2) が正しいことを証明する為には，$A \supset B$ がトートロジで A が充足可能であることを仮定して，B が充足可能であることを示せば良い．よって，初めに，

$$A \supset B \text{ がトートロジで } A \text{ 充足可能である} \tag{3}$$

と仮定する．

仮定 (3) より，$A \supset B$ がトートロジーで A が充足可能なので，$\nu(A) = t$, $\nu(A \supset B) = t$ を満たす付値 ν が存在する．

ここで，表 2 より，$\nu(A) = t \ \wedge \ \nu(A \supset B) = t$ ならば，$\nu(B) = t$ である．

表 2: $A \supset B$ の真理値表

A	B	$A \supset B$
t	t	t
t	f	f
f	t	t
f	f	t

よって，$A \supset B$ がトートロジーで A が充足可能なとき，$\nu(B) = t$ となる付値 ν が存在するので，B も充足可能である．

以上より，2) は正しい．

問 1.2 の解答

表 3 より，$(\nu(p), \nu(q), \nu(r)) = (t, f, f)$ 若しくは，$(\nu(p), \nu(q), \nu(r)) = (f, t, f)$ の組を与えればよい．

表 3: $((p \vee q) \supset r) \vee (p \wedge q)$ の真理値表

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \supset r$	$p \wedge q$	$((p \vee q) \supset r) \vee (p \wedge q)$
t	t	t	t	t	t	t
t	t	f	t	f	t	t
t	f	t	t	t	f	t
t	f	f	t	f	f	f
f	t	t	t	t	f	t
f	t	f	t	f	f	f
f	f	t	f	t	f	t
f	f	f	f	t	f	t

問 1.3 の解答

論理結合子として $\supset$ と $\wedge$ だけを用いる任意の論理式を L と表す．

L に現れる全ての論理式に t を割り当てるような付値 ν を与えれば，$\supset$ の真理値表 2 と $\wedge$ の真理値表 4 より，$\nu(L) = t$ となる．

よって，L を真とするような付値 ν が存在するので，論理結合子として $\supset$ と $\wedge$ のみを含むようなすべての論理式は充足可能である．

表 4: $A \supset B$ の真理値表

A	B	$A \wedge B$
t	t	t
t	f	f
f	t	f
f	f	f

問 1.4 の解答

表 5 の $A \equiv B$ の真理値表より A と B の真偽が等しいとき，またそのときに限り $A \equiv B$ は真となっているので，任意の付値 ν に対して．$\nu(A \equiv B) = t \iff \nu(A) = \nu(B)$ である．

表 5: $A \equiv B$ $(\iff (A \supset B) \wedge (B \supset A))$ の真理値表

A	B	$A \supset B$	$B \supset A$	$A \equiv B$
t	t	t	t	t
t	f	f	t	f
f	t	t	f	f
f	f	t	t	t

問 1.5 の解答

問 1.4 と同様に，$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ の真理値表を書くことにより示す．

$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$ の真理値表 6 より，

$$\text{任意の付値 } \nu \text{ に対して } A \text{ と } B \text{ の真偽が等しいとき，またそのときに限り } (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \text{ は真となる．} \tag{4}$$

問 1.4 より，

$$\text{任意の付値 } \nu \text{ に対して } A \text{ と } B \text{ の真偽が等しいとき，またそのときに限り } A \equiv B \text{ は，真となる．} \tag{5}$$

(4), (5) より，任意の付値 ν に対して $\mathrm{A} \equiv \mathrm{B}$ が真のとき，またそのときに限り $(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \vee (\neg \mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B})$ は真となる．即ち，任意の付値 ν に対して $\nu(\mathrm{A} \equiv \mathrm{B}) = \nu((\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \vee (\neg \mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B}))$ となる．

表 6: $(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \vee (\neg \mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B})$ の真理値表

A	B	$\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$	$\neg \mathrm{A}$	$\neg \mathrm{B}$	$\neg \mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B}$	$(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \vee (\neg \mathrm{A} \wedge \neg \mathrm{B})$
t	t	t	f	f	f	t
t	f	f	f	t	f	f
f	f	f	t	t	t	f
f	f	f	t	f	f	t

問 1.6 1) の解答

1. 真理値表 7 より，$\mathrm{A} \wedge \mathrm{A} \equiv \mathrm{A}$ はトートロジーである．
   真理値表 8 より，$\mathrm{A} \vee \mathrm{A} \equiv \mathrm{A}$ はトートロジーである．

表 7: $(\mathrm{A} \supset \mathrm{A} \wedge \mathrm{A}) \wedge (\mathrm{A} \wedge \mathrm{A} \supset \mathrm{A})$ の真理値表

A	$\mathrm{A} \wedge \mathrm{A}$	$\mathrm{A} \supset \mathrm{A} \wedge \mathrm{A}$	$\mathrm{A} \wedge \mathrm{A} \supset \mathrm{A}$	$(\mathrm{A} \supset \mathrm{A} \wedge \mathrm{A}) \wedge (\mathrm{A} \wedge \mathrm{A} \supset \mathrm{A})$
t	t	t	t	t
f	f	t	t	t

表 8: $(\mathrm{A} \supset \mathrm{A} \vee \mathrm{A}) \wedge (\mathrm{A} \vee \mathrm{A} \supset \mathrm{A})$ の真理値表

A	$\mathrm{A} \vee \mathrm{A}$	$\mathrm{A} \supset \mathrm{A} \vee \mathrm{A}$	$\mathrm{A} \vee \mathrm{A} \supset \mathrm{A}$	$(\mathrm{A} \supset \mathrm{A} \vee \mathrm{A}) \wedge (\mathrm{A} \vee \mathrm{A} \supset \mathrm{A})$
t	t	t	t	t
f	f	t	t	t

2. 真理値表 9 より，任意の付値 ν で $\nu(\underline{(\mathrm{A} \wedge (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) \supset (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \wedge \mathrm{C})} \wedge \underline{((\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \wedge \mathrm{C} \supset \mathrm{A} \wedge (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}))}) = \mathrm{t}$ なので，$\mathrm{A} \wedge (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) \equiv (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \wedge \mathrm{C}$ はトートロジーである．
   また，真理値表 10 より，任意の付値 ν で $\nu(\underline{(\mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \vee \mathrm{C}) \supset (\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \vee \mathrm{C})} \wedge \underline{((\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \vee \mathrm{C} \supset \mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \vee \mathrm{C}))}) = \mathrm{t}$ なので，$\mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \vee \mathrm{C}) \equiv (\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \vee \mathrm{C}$ はトートロジーである．

表 9: $\mathrm{A} \wedge (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C})$ と $(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \wedge \mathrm{C}$ の真理値表

A	B	C	$\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}$	$\mathrm{A} \wedge (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C})$	$\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}$	$(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \wedge \mathrm{C}$	$\mathrm{A} \wedge (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) \supset (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \wedge \mathrm{C}$	$(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \wedge \mathrm{C} \supset \mathrm{A} \wedge (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C})$
t	t	t	t	t	t	t	t	t
t	t	f	f	f	t	f	t	t
t	f	t	f	f	f	f	t	t
t	f	f	f	f	f	f	t	t
f	t	t	t	f	f	f	t	t
f	t	f	f	f	f	f	t	t
f	f	t	f	f	f	f	t	t
f	f	f	f	f	f	f	t	t

3. 真理値表 11 より，$\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \equiv \mathrm{B} \wedge \mathrm{A}$ はトートロジーである．
   真理値表 12 より，$\mathrm{A} \vee \mathrm{B} \equiv \mathrm{B} \vee \mathrm{A}$ はトートロジーである．

4. 真理値表 13 より，$\mathrm{A} \wedge (\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \equiv \mathrm{A}$ はトートロジーである．
   真理値表 14 より，$\mathrm{A} \vee (\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}) \equiv \mathrm{A}$ はトートロジーである．

表 10: $A \lor (B \lor C)$ と $(A \lor B) \lor C$ の真理値表

A	B	C	$B \lor C$	$A \lor (B \lor C)$	$A \lor B$	$(A \lor B) \lor C$	$A \lor (B \lor C) \supset (A \lor B) \lor C$	$(A \lor B) \lor C \supset A \lor (B \lor C)$
t	t	t	t	t	t	t	t	t
t	t	f	t	t	t	t	t	t
t	f	t	t	t	t	t	t	t
t	f	f	f	t	t	t	t	t
f	t	t	t	t	t	t	t	t
f	t	f	t	t	t	t	t	t
f	f	t	t	t	f	t	t	t
f	f	f	f	f	f	f	t	t

表 11: $A \land B \equiv B \land A$ の真理値表

A	B	$A \land B$	$B \land A$	$A \land B \supset B \land A$	$B \land A \supset A \land B$	$(A \land B \supset B \land A) \ \land \ (B \land A \supset A \land B)$
t	t	t	t	t	t	t
t	f	f	f	t	t	t
f	t	f	f	t	t	t
f	f	f	f	t	t	t

表 12: $A \lor B \equiv B \lor A$ の真理値表

A	B	$A \lor B$	$B \lor A$	$A \lor B \supset B \lor A$	$B \lor A \supset A \lor B$	$(A \lor B \supset B \lor A) \ \land \ (B \lor A \supset A \lor B)$
t	t	t	t	t	t	t
t	f	t	t	t	t	t
f	t	t	t	t	t	t
f	f	f	f	t	t	t

表 13: $A \land (A \lor B) \equiv A$ の真理値表

A	B	$A \lor B$	$A \land (A \lor B)$	$A \land (A \lor B) \supset A$	$A \supset A \land (A \lor B)$	$(A \land (A \lor B) \supset A) \land (A \supset A \land (A \lor B))$
t	t	t	t	t	t	t
t	f	t	t	t	t	t
f	t	t	f	t	t	t
f	f	f	f	t	t	t

表 14: $A \lor (A \land B) \equiv A$ の真理値表

A	B	$A \land B$	$A \lor (A \land B)$	$A \lor (A \land B) \supset A$	$A \supset A \lor (A \land B)$	$(A \land (A \lor B) \supset A) \land (A \supset A \lor (A \land B))$
t	t	t	t	t	t	t
t	f	f	t	t	t	t
f	t	f	f	t	t	t
f	f	f	f	t	t	t

5.

6.

7.

8.

問 1.10 の解答

それぞれの論理式を例 1.10 のように論理和標準形および論理積標準形置き換える．

1. $((p \supset q) \supset p)) \supset p$

$$
\begin{aligned}
((p \supset q) \supset p)) \supset p &\sim ((\neg p \lor q) \supset p)) \supset p && \text{（定理 1.3.8 より）}\\
&\sim (\neg(\neg p \lor q) \lor p)) \supset p && \text{（定理 1.3.8 より）}\\
&\sim \neg(\neg(\neg p \lor q) \lor p) \lor p && \text{（定理 1.3.8 より）}\\
&\sim \neg((\neg\neg p \land \neg q) \lor p) \lor p && \text{（de Morgan の法則より）}\\
&\sim (\neg(\neg\neg p \land \neg q) \land \neg p) \lor p && \text{（de Morgan の法則より）}\\
&\sim ((\neg(\neg\neg p) \lor \neg\neg\neg q) \land \neg p) \lor p && \text{（de Morgan の法則より）}\\
&\sim ((\neg p \lor q) \land \neg p) \lor p && \text{（定理 1.3.6 より）}\\
&\sim ((\neg p \land \neg p) \lor (q \land \neg p)) \lor p && \text{（分配律より）}\\
&\sim (\neg p \lor (q \land \neg p)) \lor p && \text{（冪等律より）} \quad \text{「論理和標準形」}\\
&\sim ((\neg p \lor q) \land (\neg p \lor \neg p)) \lor p && \text{（分配律より）}\\
&\sim ((\neg p \lor q) \land \neg p) \lor p && \text{（冪等律より）}\\
&\sim ((\neg p \lor q) \lor p) \land (\neg p \lor p) && \text{（分配律より）}\\
&\sim ((\neg p \lor p) \lor q) \land (\neg p \lor p) && \text{（結合律と交換律より）}\\
&\sim (\top \lor q) \land \top && \text{（定理 1.3.9 より）} \quad \text{「論理積標準形？」}
\end{aligned}
$$

「論理和標準形」と注を付けている行の 3 行下の行は，節に同一の論理変数が二つ以上現れているので「論理積標準形」と見做さない．

2. $(p \supset (p \wedge \neg q)) \wedge (q \supset (q \wedge \neg p)))$

$(p \supset (p \wedge \neg q)) \wedge (q \supset (q \wedge \neg p)))$ $\sim$ $(\neg p \vee (p \wedge \neg q)) \wedge (q \supset (q \wedge \neg p)))$　（定理 1.3.8 より）

$\sim$ $(\neg p \vee (p \wedge \neg q)) \wedge (\neg q \vee (q \wedge \neg p)))$　（定理 1.3.8 より）

$\sim$ $((\neg p \vee (p \wedge \neg q)) \wedge \neg q) \vee ((\neg p \vee (p \wedge \neg q)) \wedge (q \wedge \neg p)))$　（分配律より）

$\sim$ $((\neg p \wedge \neg q) \vee ((p \wedge \neg q) \wedge \neg q)) \vee ((\neg p \vee (p \wedge \neg q)) \wedge (q \wedge \neg p)))$　（分配律より）

$\sim$ $((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q)) \vee ((\neg p \vee (p \wedge \neg q)) \wedge (q \wedge \neg p)))$　（冪等律より）

$\sim$ $((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q))$
$\vee ((\neg p \wedge (q \wedge \neg p)) \vee ((p \wedge \neg q) \wedge (q \wedge \neg p)))$　（分配律より）

$\sim$ $((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q))$
$\vee ((\neg p \wedge q) \vee ((p \wedge \neg p) \wedge (q \wedge \neg q)))$　（交換律と結合律と冪等律より）

$\sim$ $((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q)) \vee ((\neg p \wedge q) \vee (\bot \wedge \bot))$　（定理 1.3.9 より）

$\sim$ $((\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$　（定理 1.3.11 より）　「論理和標準形」

$\sim$ $((\neg p \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg q \vee (p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$　（分配律より）

$\sim$ $((\neg p \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q) \vee (\neg q \vee (p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$　（分配律より）

$\sim$ $(\top \wedge (\neg p \vee \neg q) \vee (\neg q \vee (p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$　（定理 1.3.9 より）

$\sim$ $((\neg p \vee \neg q) \vee (\neg q \vee (p \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$　（定理 1.3.9 より）

$\sim$ $((\neg p \vee \neg q) \vee ((\neg q \vee p) \wedge (\neg q \vee \neg q))) \vee (\neg p \wedge q)$　（分配律より）

$\sim$ $((\neg p \vee \neg q) \vee ((\neg q \vee p) \wedge \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$　（冪等律より）

$\sim$ $((\neg p \vee \neg q) \vee (\neg q \vee p)) \wedge ((\neg p \vee \neg q) \vee \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$　（分配律より）

$\sim$ $((\neg p \vee \neg q) \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$　（結合律と冪等律より）

$\sim$ $(\top \wedge (\neg p \vee \neg q)) \vee (\neg p \wedge q)$　（結合律と交換律と定理 1.3.10 より）

$\sim$ $(\neg p \vee \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$　（結合律と交換律と定理 1.3.11 より）

$\sim$ $((\neg p \vee \neg q) \vee \neg p) \wedge ((\neg p \vee \neg q) \vee q)$　（分配律より）

$\sim$ $(\neg p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee (\neg q \vee q))$　（結合律と交換律と冪等律より）

$\sim$ $(\neg p \vee \neg q)$　（定理 1.3.9, 1.3.10, 1.3.11 より）　「論理積標準形」

3. $\neg(p \supset q) \wedge ((q \supset s) \supset r)$

（省略）

問 2.1 の解答

(1) 1) すべての教師を好きな学生がいる

2) すべての怠け者の学生は，怠け者の教師が好きではない

(2) $\neg(\forall x\ (T(x) \supset L(x)))$

問 2.2 の解答

(1) 実数の集合は稠密順序集合である（任意の実数のいくらでも近くに別の実数が存在する）.

(2) 関係 $<$ は推移律を満たす.

問 2.5 の解答

(1) 1) 成り立たない．何故ならば a_4Ry，a_5Ry となるような y は存在しないから.

2) 成り立つ．任意の x に対して，y として a_4 か a_5 をとる（$x := a_4$ なら $y := a_4$，$x := a_5$ なら $y := a_5$ とする）．そうすると yRz を満たすような z は適当に選んだ y 自身しかないので $yRy \supset yRy$ となる．R は順序関係なので反射律を満たすのでこの論理式は成り立つ.

(2)

3) 成り立つ．$y := a_4, z := a_5$ とすれば良い.

4) 成り立たない．$x := a_1, y := a_2, z := a_3$ とすると，$xRy \wedge yRz$ は成り立つが，$x = y \vee y = z$ は成り立たない．つまり，$\forall x \forall y \forall z\,((xRy \wedge yRz) \supset (x = y \vee y = z))$ は成り立たない.

問 2.8 の解答

(1) 1) $\models \forall x\, A \equiv A$ を示す.

恒真性の定義 (p.70) より，

任意の構造 $\mathfrak{A}$ に対し，$\mathfrak{A} \models \forall y_1 \cdots \forall y_n\ (\forall x\, A \equiv A)$ となることをいえばよい．ここで論理式 $\forall x\ A \equiv A$ は自由変数として $y_1 \cdots y_n$ を持つものとしておく．さらに，$\equiv$ の定義 (p.10) より

$$\mathfrak{A} \models \forall y_1 \cdots \forall y_n\ ((\forall x\, A \supset A) \wedge (A \supset \forall x\, A))$$

をいえばよい．これを示すには，任意の構造 $\mathfrak{A} = \langle U, I\rangle$ および任意の $u_1, \ldots, u_n \in U$ に対し

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models ((\forall x\ A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n] \supset A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n])\\ \wedge\ (A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n] \supset \forall x\ A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n]))\end{aligned}$$

をいえばよい.

ここで，$A \wedge B$ の形の論理式が正しいということの意味 (p.64(4)) より

$$\mathfrak{A} \models (\forall x\ A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n] \supset A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n])$$

と

$$\mathfrak{A} \models A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n] \supset \forall x\ A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n]$$

が正しいことを示せばよい．以下の証明では，自由変数 $x_1, \cdots, x_n$ への $\underline{u_1}, \cdots \underline{u_n}$ への代入がすでに行われているものとし，したがって，A が自由変数を一つも含まない場合について述べる.

a) $\mathfrak{A} \models \forall x\, A \supset A$ を示す.

これを示すには $\mathfrak{A} \models \forall x\, A$ を仮定して $\mathfrak{A} \models A$ を示せば十分である.

構造 $\mathfrak{A} = \langle U, I\rangle$ に対して，$\mathfrak{A} \models \forall x\, A$ と仮定する．したがって，すべての $u \in U$ に対して $\mathfrak{A} \models A[\underline{u}/x]$ となる．ここで，A は x を自由変数として含まないので，すべての $u \in U$ に対して，A は $A[\underline{u}/x]$ に等しい．よって $\mathfrak{A} \models A$ である.

b) $\mathfrak{A} \models A \supset \forall x\, A$ を示す．
これを示すには $\mathfrak{A} \models A$ を仮定して $\mathfrak{A} \models \forall x\, A$ を示せば十分である．
構造 $\mathfrak{A} = \langle U, I \rangle$ に対して，$\mathfrak{A} \models A$ と仮定する．したがって，すべての $u \in U$ に対して $\mathfrak{A} \models A$ となる．ここで，A は x を自由変数として含まないので，すべての $u \in U$ に対して，A は $A[\underline{u}/x]$ に等しい．これは，$\mathfrak{A} \models \forall x\, A$ である．

a), b) より $\models \forall x\, A \equiv A$ は恒真である．

2) $\models \exists x\, A \equiv A$ を示す．
恒真性の定義 (p.70) より，
任意の構造 $\mathfrak{A}$ に対し，$\mathfrak{A} \models \forall y_1 \cdots \forall y_n\ (\exists x\, A \equiv A)$ となることをいえばよい．ここで論理式 $\exists x\ A \equiv A$ は自由変数として $y_1 \cdots y_n$ を持つものとしておく．さらに，$\equiv$ の定義 (p.10) より

$$\mathfrak{A} \models \forall y_1 \cdots \forall y_n\ ((\exists x\, A \supset A) \land (A \supset \exists x\, A))$$

をいえばよい．これを示すには，任意の構造 $\mathfrak{A} = \langle U, I \rangle$ および任意の $u_1, \ldots, u_n \in U$ に対し

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \models ((\exists x\ A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n] \supset A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n]) \\ \land\ (A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n] \supset \exists x\ A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n]))\end{aligned}$$

をいえばよい．ここで，$A \land B$ の形の論理式が正しいということの意味 (p.64(4)) より

$$\mathfrak{A} \models (\exists x\ A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n] \supset A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n])$$

と

$$\mathfrak{A} \models A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n] \supset \exists x\ A[\underline{u_1}/y_1, \cdots, \underline{u_n}/y_n]$$

が正しいことを示せばよい．以下の証明では，自由変数 $x_1, \cdots, x_n$ への $\underline{u_1}, \cdots \underline{u_n}$ への代入がすでに行われているものとし，したがって，A が自由変数を一つも含まない場合について述べる．

a) $\mathfrak{A} \models \exists x\, A \supset A$ を示す．
これを示すためには $\mathfrak{A} \models \exists x\, A$ を仮定して $\mathfrak{A} \models A$ を示せば十分である．
構造 $\mathfrak{A} = \langle U, I \rangle$ に対して，$\mathfrak{A} \models \exists x\, A$ と仮定する．したがって，ある $u \in U$ に対して $\mathfrak{A} \models A[\underline{u}/x]$ となる．ここで，A は x を自由変数として含まないので，A は $A[\underline{u}/x]$ に等しい．よって $\mathfrak{A} \models A$ である．

b) $\mathfrak{A} \models A \supset \exists x\, A$ を示す．
これを示すには $\mathfrak{A} \models A$ を仮定して $\mathfrak{A} \models \exists x\, A$ を示せば十分である．
構造 $\mathfrak{A} = \langle U, I \rangle$ に対して，$\mathfrak{A} \models A$ と仮定する．したがって，ある $u \in U$ に対して $\mathfrak{A} \models A$ となる．ここで，A は x を自由変数として含まないので，ある $u \in U$ に対して，A は $A[\underline{u}/x]$ に等しい．これは，$\mathfrak{A} \models \exists x\, A[x]$ である．

a), b) より $\models \exists x\, A \equiv A$ は恒真である．

(2) 以下省略

問 2.11 の解答

1)

$$\begin{array}{lll} & \exists x\, R(x, y) \supset \forall y\, (P(y) \land \neg \forall z\, Q(z)) & \\ \sim & \exists x\, R(x, y) \supset \forall u\, (P(u) \land \neg \forall z\, Q(z)) & \text{定理 2.1 の 2)} \\ \sim & \exists x\, \forall u\, (R(x, y) \supset (P(u) \land \exists z \neg\, Q(z))) & \text{定理 2.1 の 11) の左} \\ \sim & \exists x\, \forall u\, (R(x, y) \supset \exists z\, (P(u) \land \neg\, Q(z))) & \text{定理 2.1 の 4) の右} \\ \sim & \exists x\, \forall u\, \exists z\, (R(x, y) \supset (P(u) \land \neg\, Q(z))) & \text{定理 2.1 の 11) の右} \end{array}$$

2)

$$
\begin{array}{lll}
 & \exists x\,(\forall y\,(P(y) \supset Q(x,z)) \lor \exists z\,(\neg\,(\exists u\,R(z,u) \land Q(x,z)))) & \\
\sim & \exists x\,(\forall y\,(P(y) \supset Q(x,z)) \lor \exists v\,(\neg\,(\exists u\,R(v,u) \land Q(x,v)))) & \text{定理 2.1 の 2) の右} \\
\sim & \exists x\,\exists v\,(\forall y\,(P(y) \supset Q(x,z)) \lor (\neg\,(\exists u\,R(v,u) \land Q(x,v)))) & \text{定理 2.1 の 3) の右} \\
\sim & \exists x\,\exists v\,(\forall y\,(P(y) \supset Q(x,z)) \lor (\neg\,\exists u\,R(v,u) \lor \neg\,Q(x,v))) & \text{定理 1.3 の 7) の右} \\
\sim & \exists x\,\exists v\,(\forall y\,(P(y) \supset Q(x,z)) \lor (\forall u\,\neg\,R(v,u) \lor \neg\,Q(x,v))) & \text{定理 2.1 の 10) の右} \\
\sim & \exists x\,\exists v\,(\forall y\,(P(y) \supset Q(x,z)) \lor \forall u\,(\neg\,R(v,u) \lor \neg\,Q(x,v))) & \text{定理 2.1 の 4) の左} \\
\sim & \exists x\,\exists v\,\forall u\,(\forall y\,(P(y) \supset Q(x,z)) \lor (\neg\,R(v,u) \lor \neg\,Q(x,v))) & \text{定理 2.1 の 11) の左} \\
\sim & \exists x\,\exists v\,\forall u\,((\neg\,R(v,u) \lor \neg\,Q(x,v)) \lor \forall y\,(P(y) \supset Q(x,z))) & \text{定理 1.3 の 3) の右} \\
\sim & \exists x\,\exists v\,\forall u\,\forall y\,((\neg\,R(v,u) \lor \neg\,Q(x,v)) \lor (P(y) \supset Q(x,z))) & \text{定理 2.1 の 4) の左}
\end{array}
$$

問 2.14

1)

$$
\cfrac{
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{P(x) \to P(x)}{P(x) \to P(x),\ Q(x)}}{\to P(x), P(x) \supset Q(x)}}{\to \forall x P(x), P(x) \supset Q(x)}}{\to \forall x P(x), \exists x(P(x) \supset Q(x))}}{\to \exists x(P(x) \supset Q(x)), \forall x P(x)}
\qquad
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{Q(t) \to Q(t)}{P(t),\ Q(t) \to Q(t))}}{Q(t) \to P(t) \supset Q(t))}}{Q(t) \to \exists x(P(x) \supset Q(x))}}{\exists x Q(t) \to \exists x(P(x) \supset Q(x))}
}{
\cfrac{\forall x P(x) \supset \exists Q(x) \to \exists x(P(x) \supset Q(x)), \exists x(P(x) \supset Q(x))}{\forall x P(x) \supset \exists Q(x) \to \exists x(P(x) \supset Q(x))}
}
$$

2) 誤り

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{P(x) \to P(x),\ Q(x)}{\to P(x), P(x) \supset Q(x)}}{\to \forall x P(x), P(x) \supset Q(x)}}{\to \forall x P(x), \exists x(P(x) \supset Q(x))}
$$

正しい

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{P(x) \to P(x),\ Q(x)}{\to P(x), P(x) \supset Q(x)}}{\to P(x), \exists x(P(x) \supset Q(x))}}{\to \forall x P(x), \exists x(P(x) \supset Q(x))}
$$

問 3.1 の解答

スコーレム標準形を求める.

1)

$$
\begin{array}{lll}
 & P(x) \supset (\exists y(\exists u Q(x,u) \supset R(y,z)) \lor S(x,y)) & \text{12) の右} \\
\sim & P(x) \supset (\exists y \forall u(Q(x,u) \supset R(y,z)) \lor S(x,y)) & \text{変数の置き換え} \\
\sim & P(x) \supset (\exists w \forall u(Q(x,u) \supset R(w,z)) \lor S(x,y)) & \text{3) の右} \\
\sim & P(x) \supset \exists w(\forall u(Q(x,u) \supset R(w,z)) \lor S(x,y)) & \text{4) の左} \\
\sim & P(x) \supset \exists w \forall u((Q(x,u) \supset R(w,z)) \lor S(x,y)) & \text{11) の右} \\
\sim & \exists w(P(x) \supset \forall u(Q(x,u) \supset R(w,z)) \lor S(x,y)) & \text{11) の左} \\
\sim & \exists w \forall u(P(x) \supset ((Q(x,u) \supset R(w,z)) \lor S(x,y)) &
\end{array}
$$

上記の論理式の冠頭標準形を以下に示す.

$$
\forall x \forall y \forall z \exists w \forall u(P(x) \supset ((Q(x,u)) \supset R(w,z)) \lor S(x,y))
$$

$\forall u$ の左側には，存在記号が一つ現れるので一変数関数記号 f を導入し，自由変数 (x,y,z) に定数記号 a,b,c を導入すると，

$$\exists w(P(a) \supset ((Q(a,f(w)) \supset R(w,c)) \vee S(a,b))$$

問 3.2 の解答

スコーレム標準形を求める．

1)

$$\begin{array}{lll} & \exists z((\forall x P(x) \supset \exists y Q(y) \supset (P(z) \supset Q(z)) & \text{11) の右} \\ \sim & \exists z(\exists y(\forall x P(x) \supset Q(y) \supset (P(z) \supset Q(z)) & \text{12) の右} \\ \sim & \exists z \forall y((\forall x P(x) \supset Q(y) \supset (P(z) \supset Q(z)) & \text{12) の右} \\ \sim & \exists z \forall y(\exists x(P(x) \supset Q(y) \supset (P(z) \supset Q(z)) & \text{12) の左} \\ \sim & \exists z \forall y \forall x(P(x) \supset Q(y) \supset (P(z) \supset Q(z)) & \end{array}$$

$\forall y$ の左側には，存在記号が一つ現れるので一変数関数記号 f を導入，$\forall x$ の左側にも，存在記号は一つ現れるので一変数関数記号 g を導入して，

$$\exists z((P(g(z)) \supset Q(f(z))) \supset (P(z) \supset Q(z))$$

2) A を $\exists z((\forall x P(x) \supset \exists y Q(y) \supset (P(z) \supset Q(z))$ とする．

このとき，A のスコーレム標準形は， $\exists z((P(g(z)) \supset Q(f(z))) \supset (P(z) \supset Q(z))$ になる．

この論理式は，一つも対象定数を含まないので，新たな対象定数 c を付け加えることにする. そうするとエルブラン領域 H_L は，

$$H_L = \{c, f(c), g(c), f(f(c)), f(g(c)), \cdots\}$$

になる. 論理式 $(P(g(z)) \supset Q(f(z))) \supset (P(z) \supset Q(z))$ の z に c を代入すると，$(P(g(c)) \supset Q(f(c))) \supset (P(c) \supset Q(c))$ が得られる．

この論理式に対して，π をほどこして命題論理の論理式を作ると，

$$(P \supset q) \supset (r \supset s)$$

の形になる. この論理式はトートロジーではない.

次に，$(P(g(z)) \supset Q(f(z))) \supset (P(z) \supset Q(z))$ の z に f(c) を代入した論理式に π をほどこすと以下になる.

$$(t \supset u) \supset (v \supset q)$$

得られた論理式上の論理式との論理和は，

$$((P \supset q) \supset (r \supset s)) \vee ((t \supset u) \supset (v \supset q))$$

の形になる. この論理式はトートロジーではない. 次に，$(P(g(z)) \supset Q(f(z))) \supset (P(z) \supset Q(z))$ の z に g(c) を代入した論理式に π をほどこすと以下になる.

$$(h \supset i) \supset (p \supset j)$$

得られた論理式上の論理式との論理和は，

$$((P \supset q) \supset (r \supset s)) \vee ((t \supset u) \supset (v \supset q)) \vee (h \supset i) \supset (p \supset j)$$

の形となる. この論理式はトートロジーになる. よって，

.1 証明の書き方

- 接続詞などに用いる用語を統一する（教科書を参考にする）.
- 証明を書くときは，一行ずつ書いて改行する.
- サ変動詞を用いない．~~〜として，〜とする~~ $\Longrightarrow$ 〜と仮定する，〜と置く，... となるような〜をとる.
- 仮定が何で結論は何なのかを明示する.
- 問題文の情報を用いた場合は，問題文のどこを用いたのかを明示する.
- 推論する場合は，用いた根拠と用いた推論規則を明示する.