



AFA



Temel Kavramlar



Dr. Kübra Atalay Kabasakal
Bahar 2023

AFA'da Amaç

- Bazı durumlarda, özellikle de ölçme araçları yeni geliştirildiyse:
 - Araştırmacıların bir grup gözlenen/ölçülen değişkenin altında yatan faktör sayısı hakkında **güçlü varsayımları yoktur.**
 - Araştırmacıların hangi grup **değişkenlerin birbirleriyle diğerlerine göre daha çok korelasyona** sahip olduğu hakkında güçlü varsayımları yoktur.
 - Bazen araştırmacılar belli **değişkenlerin kuramsal yapılarının iyi göstergeleri** olup olmadığı hakkında fikir sahibi olmayabilir.
 - Bu koşullarda **AFA gözlenen/ölçülen değişkenler arasındaki altta yatan yapının incelenmesi** için önemli bir araçtır.

AFA'da Amaç

- AFA'nın başlıca amaçları aşağıdaki gibidir:
 - Gözlenen/ölçülen değişkenler arasındaki **korelasyonların örüntüsünü özetlemek**.
 - Çok sayıdaki gözlenen/ölçülen değişkeni **daha az sayıdaki faktöre indirmek**.
 - Bazen AFA **veri indirgeme (data reduction)** yöntemi olarak da adlandırılır.
 - Gözlenen/ölçülen değişkenleri kullanarak altta yatan yapının **operasyonel tanımını sağlamak**.

Bir Örnek

- Varsayımsal bir veri olan **Heuristic** adlı veride 6 ölçülen değişken bulunmaktadır. Ancak bu ölçülen değişkenlerin altında yatan **yapı hakkında bir fikir yoktur.**
- Veri Thompson'ın (2004) kitabında sayfa 10'da verilmiş olup **6 ölçülen değişkene ilişkin 7 öğrenci** tarafından sağlanan derecelendirmeleri içermektedir.

Thompson, B. (2004). *Exploratory and confirmatory factor analysis: Understanding concepts and applications*. Washington, DC: American Psychological Association.

Bir Örnek

- Bir faktör analizi yapıldığında, ölçülen değişkenler arasındaki ilişkiler **araştırılır** ve bu ilişkilerin **daha az sayıda gizil yapıda özetlenip özetlenemeyeceği** belirlenmeye çalışılır.
- Değişkenler arasındaki **ilişkileri özetlemek için birkaç farklı istatistik kullanılır** (örneğin, Pearson momentler-çarpımı korelasyon katsayıları, Spearman'ın rho katsayıları, tetrakorik korelasyon katsayısı).

Bir Örnek

id	handsome	beatiful	ugly	brillant	smart	dumb
1	6	5	4	8	6	2
2	8	7	2	7	5	3
3	9	8	1	9	7	1
4	5	4	5	9	7	1
5	4	3	6	9	7	1
6	7	6	3	7	5	3
7	3	2	7	7	5	3

Bir Örnek

- Verideki 6 değişken arasındaki Pearson korelasyon katsayıları matrisi aşağıdaki gibidir:

```
cor(df[,-1])%>% kable(align = "c")
```

	handsome	beatiful	ugly	brillant	smart	dumb
handsome	1	1	-1	0	0	0
beatiful	1	1	-1	0	0	0
ugly	-1	-1	1	0	0	0
brillant	0	0	0	1	1	-1
smart	0	0	0	1	1	-1
dumb	0	0	0	-1	-1	1

Bir Örnek

- Korelasyon matrisindeki örüntülere dayanarak aşağıdakiler söylenebilir:
 - Bireyi tarif etmek için **Handsome**, **Beautiful** ve **Ugly** değişkenlerini kullanmak yerine bu üç ölçülen değişken **bir gizil değişken** (faktör analizinde gizil değişken faktör olarak adlandırılır) olarak özetlenebilir.
 - Bu gizil değişken **physical attractiveness** olarak etiketlenebilir.
- Benzer şekilde, bireyi tarif etmek için **Brilliant**, **Smart** ve **Dumb** değişkenlerini kullanmak yerine bu üç ölçülen değişken **bir gizil** değişken kullanarak özetlenebilir.
 - Bu gizil değişken **intellectual prowess** olarak etiketlenebilir.
- **physical attractiveness** ve **intellectual prowess** arasında **korelasyon yoktur**.

Bir Örnek

- 6 değişken yerine bu **2 faktör** kullanılarak:
 - 6 ölçülen değişken arasındaki **korelasyonun örüntüsü özetenir.**
- 6 ölçülen değişken **2 gizil faktöre** indirgenir.
 - Bu 3 değişkenlik **2 alt kümedeki korelasyonlar 1 veya -1** olduğundan, gözlenen/ölçülen korelasyon matrisindeki bilgiden **herhangi bir bilgi kaybedilmez**. Diğer bir ifadeyle, bu **iki faktör** kullanılarak **gözlenen/ölçülen korelasyon** matrisi mükemmel bir şekilde üretilebilir. **Ancak gerçek veride bu olmayacağı.**
- 2 gizil faktör için ölçülen değişkenler kullanılarak operasyonel bir tanım sağlanır.
 - Örneğin, Handsome, Beautiful ve Ugly değişkenlerinin nasıl değişkenler olduğundan "physical attractiveness" gizil faktörü tanımlanabilir.

Örüntü Katsayıları

- Korelasyon matrisinin faktör analizi sonucunda elde edilen **karesi alınmamış faktör ağırlıkları (MR1 ve MR2)**, karesi alınmış faktör ağırlıkları yandaki gibidir.

```
library(psych)
fa1 <- round(fa(df[,-1],2)$loading[,1:2],2)
cbind(fa1,fa1^2)%>% kable(align = "c",
col.names = c("MR1","MR2", "MR1*MR1","MR2*MR2"))
```

	MR1	MR2	MR1*MR1	MR2*MR2
handsome	1	0	1	0
beatiful	1	0	1	0
ugly	-1	0	1	0
brillant	0	1	0	1
smart	0	1	0	1
dumb	0	-1	0	1

Örüntü Katsayıları

- Faktör analizinde **örüntü katsayıları (pattern coefficients)** faktör analizindeki gizil değişkenler üzerinde puanlar (faktör puanları olarak adlandırılır) elde etmek için **ölçülen değişkenlere uygulanan ağırlıklardır**.
- Bu ağırlıklar
 - **çoklu regresyon** analizindeki β ağırlıklarına,
 - betimsel ayırma analizindeki standartlaştırılmış **ayırma fonksiyonu katsayılarına** benzerdir.

Örüntü Katsayıları

- Faktör örüntü katsayıları (P_{VxF} : V değişken sayısı, F faktör sayısı), kısmen, analiz edilen ve **faktörlerin çıkarıldığı korelasyon matrisinde temsil edilen varyansı yeniden ifade etmek için hesaplanır.**
- **Faktörler; birinci faktör analiz edilen matristeki en fazla varyansı yeniden üretebilecek, ikinci faktör ikinci en fazla varyansı yeniden üretebilecek** ve bu şekilde devam edecek şekilde çıkarılır.
- Bir veya daha fazla faktörün, analiz edilen matrisi yeniden üretme yeteneği, üretilen (reproduced) korelasyon matrisi (R_{VxV^+}) ile ölçülür. Üretilen korelasyon matrisi aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:

$$P_{VxF} P_{VxF'} = R_{VxV^+}$$

Örüntü Katsayıları

- Faktörlerin analiz edilen korelasyon matrisini yeniden üretme yeteneği, belirli sayıda faktör çıkarıldıkten sonra kalan matrisin hesaplanmasıyla da ölçülebilir. Bu matris **artık korelasyon matrisi** R_{VxV^-} olarak adlandırılır.
- Faktör örüntü katsayıları, korelasyon matrisini mükemmel bir şekilde yeniden oluşturursa, R_{VxV^-} matrisinin girdileri **tamamen sıfırlardan** oluşur ve bu **matriste hiçbir bilgi veya varyans** kalmadığını gösterir.
- Faktör örüntü katsayıları korelasyon matrisini mükemmel şekilde yeniden oluşturursa, R_{VxV^\pm} matrisindeki girdiler R_{VxV} matrisindeki girdilerle tam olarak eşleşir.

Örüntü Katsayıları

- Regresyon analizinde, belirli bir analizde yalnızca tek bir eşitlik β ağırlıkları seti vardır. Faktör analizinde ağırlık setlerine (örüntü katsayıları gibi) eşitlikler yerine **faktörler** denir.
- Örnekteki değişkenler arası korelasyon matrisindeki her girdi **+1 veya -1** olsaydı, her ölçülen değişken çifti arasındaki r^2 değeri %100 olacaktı. Bu da derecelendirmelerin altında **tek bir faktörün yattığı** anlamına gelecekti.
- Bu durumda sadece eksi veya artı örüntü katsayılarından P_{6x1} oluşan **bir faktör çıkarılacaktı**. Bu tek faktör, orijinal P_{6x6} matrisini **mükemmel şekilde yeniden üretecekti**.
- Teknik olarak, her biri sadece sıfır değerindeki örüntü katsayılarından oluşan, yani her birinin hiçbir bilgi içermediği ve **değişkenliğin yeniden üretilmediği beş ek faktör** olacaktı. Ancak bu tür faktörlerle ilgilenilmez.

Örüntü Katsayıları

- Örnekteki değişkenler arasındaki korelasyon **sıfır** olsaydı, korelasyon matrisindeki **köşegen dışındaki her girdi 0 olacaktı**, her ölçülen değişken çifti arasındaki r^2 değeri **%0** olacaktı.
- Bu da bir faktör oluşturmak için **iki değişken birleştirilemeyeceği** (yani her ölçülen değişken kendi faktörünü tanımlayacağı) anlamına gelecekti. Dolayısıyla **6 faktör** olacaktı.
- Her faktör bir **+1 değerinde örüntü katsayısına** sahip olacaktı ve geri kalan **beş girdi sıfır olacaktı**. Bu altı faktör, orijinal $P_{6 \times 6}$ matrisini mükemmel şekilde yeniden üretecekti.
 - Aslında, tüm olası faktörler çıkarıldığında (yani faktörlerin sayısı ölçülen değişkenlerin sayısına eşit olduğunda), örüntü katsayıları analiz edilen orijinal korelasyon matrisini mükemmel bir şekilde yeniden üretecekti.

Yapı Katsayıları

- Faktör analizinde, **örüntü katsayıları** faktör puanlarını elde etmek için ölçülen değişkenlere uygulanırlar. Bu katsayılar **kimi zaman korelasyon katsayılarıdır**, kimi zaman değildir.
- Ölçülen değişkenler ve faktör puanları arasındaki iki değişkenli korelasyon katsayıları hesaplanabilir. Bu korelasyon katsayıları **yapı katsayıları** olarak adlandırılır.
- Faktör analizinde, **örüntü katsayılarının** yanı sıra **yapı katsayıları** (structure coefficients) da önemlidir.

Yapı Katsayıları

Yapı katsayıları aşağıdaki şekilde hesaplanabilir. $P_{VxF}R_{FxF} = S_{VxF}$

- Burada,
- R_{FxF} faktörler arasındaki korelasyon matrisidir.
- **Faktörler arasındaki korelasyon sıfır** olduğunda (yani faktörler tamamen ilişkisiz olduğunda), faktörler arasındaki korelasyon matrisi birim matrise eşit olacağından ($R_{FxF} = I_{FxF}$), **örüntü katsayıları matrisi** de **yapı katsayıları matrisine** eşit olacaktır ($P_{VxF} = S_{VxF}$).
- Faktörler **ilk çıkarıldığında**, faktörler her zaman tamamen ilişkisizdir.

Ortak Varyans Katsayıları

- Örnekte çıkarılan faktörler tamamen ilişkisiz olduğundan, **karesi alınmamış katsayılar örüntü/yapı katsayılarıdır**. Dolayısıyla bu katsayıların değeri **-1,0 ve +1,0** aralığındadır. Ancak bu değerler **eşit oran ölçüğinde değildir**.
 - Örneğin, $r = 1$ değeri $r = 0.5$ değerinin iki katı büyük değildir.
 - Bu değerlerin karesi alınırsa, oransal olarak karşılaştırmalar yapılabilir.
 - Örneğin, $r = 1$ değeri, $r = 0.5$ değerinin dört katı büyüktür. Çünkü 1,0 değerinin karesi olan $r^2 = 1$ değeri, 0,5 değerinin karesi olan $r^2 = 0.25$ değerinin dört katıdır.
- Örnekteki **örüntü/yapı katsayılar korelasyon katsayıları** olduğundan, bu katsayıları karşılaştırabilmek için **karelerinin** alınması gerekmektedir.

Ortak Varyans Katsayıları

- Aralarında ilişki **bulunmayan faktörler için örüntü/yapı katsayılarının kareleri alınarak**, katsayıların karesi satır boyunca toplanırsa, elde edilen katsayı **ortak varyans** (communality) olarak adlandırılır ve h^2 ile gösterilir.
 - Örneğin, "Handsome" değişkeni için ortak varyans değeri,
 $(1.0)^2 + (0)^2 = 1.0$

```
fa(df[,-1],2,n.obs=7) %>% target.rot()
```

```
##  
## Call: NULL  
## Standardized loadings (pattern matrix) based upon correlation  
##   MR1  MR2  h2    u2  
## handsome   1   0   1  0.0017  
## beatiful   1   0   1  0.0017  
## ugly       -1   0   1  0.0017  
## brilliant   0   1   1  0.0017  
## smart      0   1   1  0.0017  
## dumb       0  -1   1  0.0017  
##  
##                               MR1  MR2  
## SS loadings              2.99 2.99  
## Proportion Var            0.50 0.50  
## Cumulative Var            0.50 1.00  
## Proportion Explained     0.50 0.50
```

Ortak Varyans Katsayıları

- Faktörler arasında **ilişki bulunmadığından**, her ölçülen değişkenin **bir faktör ile paylaştığı varyans kendine özgündür.**
- Dolayısıyla **ortak varyans** faktörlerin ölçülen bir değişkendeki **varyansın ne kadarını üretebileceğini** belirtir.
 - Ölçülen bir değişken **%o'a** yakın bir ortak varyans katsayısına sahipse, bu, **bu değişkenin faktörler içinde temsil edilmediği** anlamına gelir.

Araştırmacı, değişkenin faktörlerde temsil edilmesini istiyorsa, ek faktörlerin çıkarılması gerekebilir.

Ortak Varyans Katsayıları

- Ortak varyans **ölçülen bir değişken için**, belirli **bir ölçülen değişkenin varyansının ne kadarının faktörleri bir küme olarak tanımlamada yararlı olduğunu** yansıtır.
- Bir değişken için **ortak varyans katsayısı**, değişken üzerindeki puanların güvenilirliğinin **alt sınır** tahminidir.
 - Örneğin, bir değişkenin **% 50'lik** bir ortak varyansa sahip olması, değişken üzerindeki **puanların güvenilirliğinin 0.5'ten düşük olmadığına** işaret etmektedir.

Özdeğerler

- Aralarında ilişki bulunmayan faktörler için **örüntü/yapı katsayılarının kareleri alınarak, katsayıların karesi sütun boyunca toplanırsa**, elde edilen katsayı **özdeğer** (eigenvalue) olarak adlandırılır.
- **Özdeğerler karakteristik kökler** olarak da bilinmektedir.
- Örneğin, birinci faktör ve ikinci faktör için özdeğerler 3 ve 3'tür.

```
rbind(fa1*fa1,  
      toplam= colSums(fa1*fa1)) %>%  
      kable()
```

	MR1	MR2
handsome	1	0
beatiful	1	0
ugly	1	0
brilliant	0	1
smart	0	1
dumb	0	1
toplam	3	3

Özdeğerler

Aşağıdaki dört ifade, bir AFA'daki özdeğerler için geçerlidir:

- **Özdeğerlerin sayısı**, ölçülen değişkenlerin sayısına eşittir.
- **Özdeğerlerin toplamı**, ölçülen değişkenlerin sayısına eşittir.
- Ölçülen **değişkenlerin sayısına bölünen bir özdeğer**, belirli bir faktörün **analiz edilen korelasyon matrisindeki yeniden ürettiği bilgi oranını gösterir**.
- Çıkarılan faktörlerin özdeğerlerinin toplamının ölçülen değişkenlerin sayısına bölünmesi, **faktörlerin bir küme olarak analiz edilen korelasyon matrisindeki yeniden ürettiği bilgilerin oranını gösterir**.

Özdeğerler

- Örnekte, ölçülen değişkenlerin sayısı altıdır. Bu nedenle, korelasyon matrisi ile ilişkili altı özdeğer vardır.
- Örnekteki özdeğerlerin toplamı 6 olduğundan, ilk iki özdegerin 3 ve 3 olduğu göz önüne alındığında, kalan özdeğerlerin 0,0, 0,0, 0,0 ve 0,0 olması gereklidir.
- $3/6 = 0.5$ 'e eşit olduğu için, ilk özdeğer, Faktör I'in korelasyon matrisinde yer alan bilgilerin 0.5'ini (veya %50'sini) yeniden ürettiğini gösterir.

Özdeğerler

- DFA'da olduğu gibi AFA'da da ortak faktör modeli (common factor model) temeldir: Her bir değişken faktör puanlarının ve bir hata puanının bir fonksiyonudur. $X = \Lambda\xi + \delta$
- Örnekte AFA modeli aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} X_{1\text{handsome}} \\ X_{2\text{beautiful}} \\ X_{3\text{ugly}} \\ X_{4\text{brilliant}} \\ X_{5\text{smart}} \\ X_{6\text{dumb}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} \\ \lambda_{41} & \lambda_{42} \\ \lambda_{51} & \lambda_{52} \\ \lambda_{61} & \lambda_{62} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{1\text{physical}} \\ \xi_{1\text{intellectual}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix}$$

- X : gözlenen değişken matrisi ($Vx1$)
- Λ : yapısal katsayı matrisi (VxF)
- ξ : örtük değişken vektoru
- δ : ölçme hatası

AFA Modeli

- AFA'da genellikle korelasyon matrisi analiz edildiğinden, AFA modeli matris formunda aşağıdaki gibi temsil edilebilir:

$$R = \Lambda \Phi \Lambda' + R_{res}$$

- Faktörler ilk olarak dik olacak şekilde çıkarılacakları için, Φ bir birim matristir.
- Bu AFA modeli daha basit bir forma indirgenir: $R = \Lambda \Lambda' + R_{res}$
- Asıl fikir **üretilen korelasyon matrisinin \hat{R} , gözlenen korelasyon matrisine R** mümkün olduğunda yakın olmasını sağlayacak faktör yükleri matrisini Λ bulmaktadır.
- Sonuç olarak R_{res} mümkün olduğunda küçük olacaktır.

Bir Örnek

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} \\ \lambda_{41} & \lambda_{42} \\ \lambda_{51} & \lambda_{52} \\ \lambda_{61} & \lambda_{52} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} & \lambda_{15} & \lambda_{16} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \lambda_{24} & \lambda_{25} & \lambda_{26} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi_{11} & & & & & \\ \Psi_{11} & \Psi_{21} & & & & \\ \Psi_{11} & \Psi_{21} & \Psi_{31} & & & \\ \Psi_{11} & \Psi_{21} & \Psi_{31} & \Psi_{41} & & \\ \Psi_{11} & \Psi_{21} & \Psi_{31} & \Psi_{41} & \Psi_{51} & \\ \Psi_{11} & \Psi_{21} & \Psi_{31} & \Psi_{41} & \Psi_{51} & \Psi_{61} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11}^2 + \lambda_{12}^2 \\ \lambda_{21}\lambda_{11} + \lambda_{22}\lambda_{12} & \lambda_{21}^2 + \lambda_{22}^2 \\ \lambda_{31}\lambda_{11} + \lambda_{32}\lambda_{12} & \lambda_{31}\lambda_{21} + \lambda_{32}\lambda_{22} & \lambda_{31}^2 + \lambda_{32}^2 \\ \lambda_{41}\lambda_{11} + \lambda_{42}\lambda_{12} & \lambda_{41}\lambda_{21} + \lambda_{42}\lambda_{22} & \lambda_{41}\lambda_{31} + \lambda_{42}\lambda_{32} & \lambda_{41}^2 + \lambda_{42}^2 \\ \lambda_{51}\lambda_{11} + \lambda_{52}\lambda_{12} & \lambda_{51}\lambda_{21} + \lambda_{52}\lambda_{22} & \lambda_{51}\lambda_{31} + \lambda_{52}\lambda_{32} & \lambda_{51}\lambda_{41} + \lambda_{52}\lambda_{42} & \lambda_{51}^2 + \lambda_{52}^2 \\ \lambda_{61}\lambda_{11} + \lambda_{62}\lambda_{12} & \lambda_{61}\lambda_{21} + \lambda_{62}\lambda_{22} & \lambda_{61}\lambda_{31} + \lambda_{62}\lambda_{32} & \lambda_{61}\lambda_{41} + \lambda_{61}\lambda_{42} & \lambda_{61}\lambda_{51} + \lambda_{62}\lambda_{52} & \lambda_{61}^2 + \lambda_{62}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi_{11} & & & & & \\ \Psi_{11} & \Psi_{21} & & & & \\ \Psi_{11} & \Psi_{21} & \Psi_{31} & & & \\ \Psi_{11} & \Psi_{21} & \Psi_{31} & \Psi_{41} & & \\ \Psi_{11} & \Psi_{21} & \Psi_{31} & \Psi_{41} & \Psi_{51} & \\ \Psi_{11} & \Psi_{21} & \Psi_{31} & \Psi_{41} & \Psi_{51} & \Psi_{61} \end{bmatrix}$$

AFA'da Örneklem Büyüklüğü

- Örneklem büyüklüğü, AFA'da yapılanlar da dahil olmak üzere tüm istatistiksel **tahminlerin kesinliğini** etkiler.
- Çeşitli araştırmacılar, birey sayısının ölçülen değişkenlerin sayısına oranının bir fonksiyonu olan minimum örneklem büyüklüğü için kurallar önermiştir. Önerilen oranlar genellikle
 - ölçülen değişken başına 10 ila 20 birey arasındadır.
 - Gorsuch (1983), mutlak minimum oranın her değişken başına beş birey olmasını, ancak herhangi bir analiz için örneklem büyüklüğünün 100 bireyden az olmamasını önermiştir.

AFA'da Örneklem Büyüklüğü

- Bazı Monte Carlo simülasyon araştırmaları (Guadagnoli & Velicer, 1988) şunları önermektedir:
 1. Faktörlerin her biri, örneklem büyüklüğüne bakılmaksızın, **|0.6|'dan** büyük yapı katsayılarına **sahip dört veya daha fazla ölçülen değişken** tarafından tanımlanır.
 2. Faktörlerin her biri, örneklem büyüklüğü 150'den büyükse, **|0.4|'dan** civarında yapı katsayılarına sahip **10 veya daha fazla ölçülen değişken** tanımlanır.
 3. Örneklem büyüklüğü **en az 300** olmalıdır.

AFA'da Örneklem Büyüklüğü

- MacCallum, Widaman, Zhang ve Hong (1999), **ortak varyansların tümü, .60 veya daha büyükse**, örneklem büyülüğu 60 kadar düşük olsa bile, **örüntü katsayılarının doğru şekilde yeniden** üretildiğini bulmuştur.
- Ortak varyans değerleri **0.50** civarındaysa, 100 ila 200 arasında örneklem büyülüğu gereklidir.

- Guadagnoli, E., & Velicer, W. (1988). Relation of sample size to the stability of component patterns. *Psychological Bulletin*, 103, 265–275.
- MacCallum, R. C., Widaman, K. F., Zhang, S., & Hong, S. (1999). Sample size in factor analysis. *Psychological Methods*, 4, 84-99.

bitti