Ex5 (TD Blackboard)

D : "v.a Demande annuelle"

$$D \hookrightarrow N(m,\sigma) \Longrightarrow Z = \frac{D-m}{\sigma} \hookrightarrow N(0,1)$$

$$\begin{cases} P(D < 1500) = 0{,}195 \\ P(D > 2910) = 0{,}025 \end{cases}$$

1/

$$\begin{cases} P\left(Z < \frac{1500-m}{\sigma}\right) = 0{,}195 \\ P\left(Z > \frac{2910-m}{\sigma}\right) = 0{,}025 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} P\left(Z > \frac{m-1500}{\sigma}\right) = 0{,}195 \\ P\left(Z > \frac{2910-m}{\sigma}\right) = 0{,}025 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m-1500}{\sigma} = 0{,}86 \\ \frac{2910-m}{\sigma} = 1{,}96 \end{cases}$$

$$(1)\ \begin{cases} m - 0,86\,\sigma = 1500 \\ m + 1,96\,\sigma = 2910 \end{cases}\ (2)$$

$$(2) - (1) \Rightarrow \quad 2,82\,\sigma = 1410$$

$$\sigma = \frac{1410}{2,82} = 500.$$

$$(1) \Rightarrow \quad m = 1500 + 0,86 \times 500 = 1930$$

$$D \hookrightarrow N(1930\,;\,500)$$

2/ $P(2000 \leq D \leq 2500)$

$$= P\left(\frac{2000-1930}{500} \leq Z \leq \frac{2500-1930}{500}\right)$$

$$= P(0{,}14 \leq Z \leq 1{,}14)$$

$$= P(\underline{Z \geq 0{,}14}) - P(Z \geq 1{,}14)$$

$$= 0{,}44433 - 0{,}12714 = \ldots$$

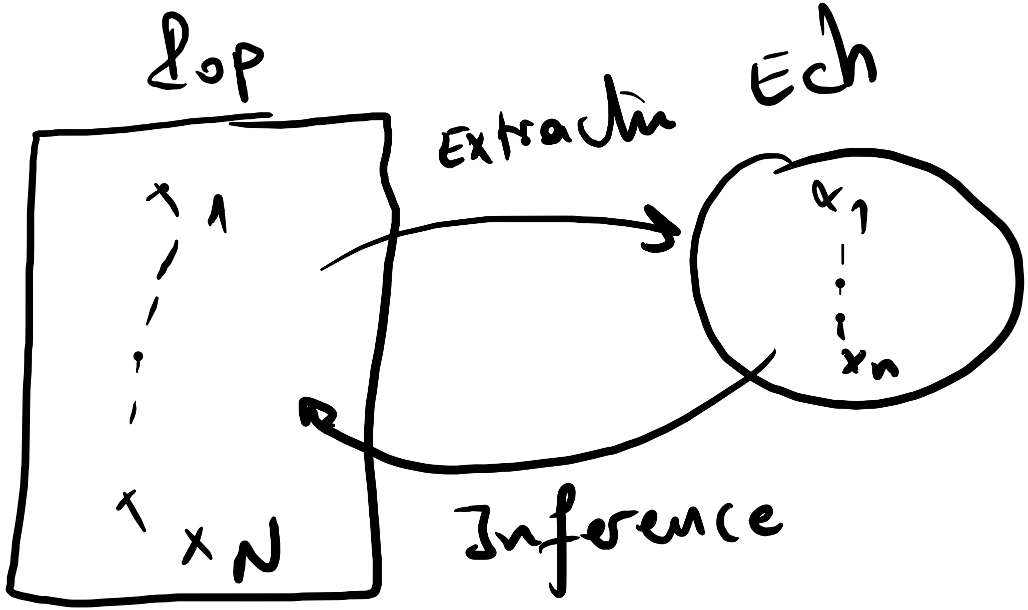
3/ $P(D \geq d_0) = 0{,}25$

$$P\left(Z \geq \frac{d_0 - 1930}{500}\right) = 0{,}25$$

$$\frac{d_0 - 1930}{500} = 0{,}67 \rightarrow d_0 = 1930 + 0{,}67 \times 500$$

$$= \ldots$$

ch2 : Estimation ponctuelle et Distribution d'échantillonnage



Un echantillon de taille (n-echantillon)
et une famille $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables
aleatoires independantes et identiquement
distribuées

Ex : on lance une pièce de monnaie truquée une fois.

$\mathbb{P}(\text{pile}) = p$.

$\mathbb{P}(\text{face}) = 1-p$

	face	pile
x_i	0	1
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$1-p$	p.

inconnue

$$X \hookrightarrow Br(p)$$

$E(X) = E(X_i)$

$V(X) = V(X_i)$

Echantillon $(X_1 \; X_2 \; X_3 \; X_4 \; X_5 \; X_6 \; X_7 \; X_8 \; X_9 \; X_{10})$

$x_i \to$ 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1

réalisation $x_1 \; x_2 \; x_3 \; x_4 \; x_5 \; x_6 \; x_7 \; x_8 \; x_9 \; x_{10}$

l'estimateur : $\hat{p} = \dfrac{\sum X_i}{n}$ l'estimation : $\dfrac{\sum x_i}{n} = \dfrac{7}{10}$

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{L}(\theta)$; θ inconnue

$(X_1, \ldots, X_n)$ un n-ech i.i.d

soit $\hat{\theta}_n$ un estimateur de θ

$(x_1, \ldots, x_n)$ les n-realisation de $(X_1, \ldots, X_n)$

$\hat{\theta}_n$: toute fonction $g(X_1, \ldots, X_n)$

et l'estimation $g(x_1, \ldots, x_n)$

$X \hookrightarrow Ber(p)$ $\quad$ p inconnue

Bavard $\longrightarrow$ $\hat{p} = 0,7$

Meilleur estimation ?

Autre : $\hat{p} = 0,8$

l'estimateur 1 : $\hat{p} = \dfrac{\sum x_i}{n}$ $\quad$ $0,65$

l'estimateur 2 : $\hat{q} = \sqrt{\dfrac{\sum x_i^2}{n}}$ $\quad$ $0,73$

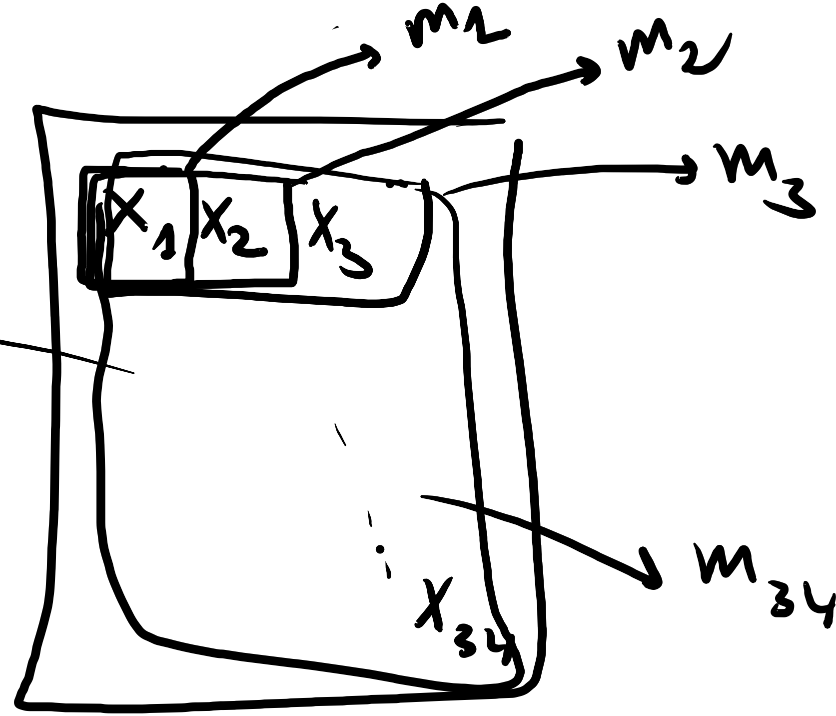
Qualité d'estimateur :

① Le biais d'un estimateur :

X : v.a note

M à estimer

M moyenne classe



$$\frac{m_1+m_2+\dots+m_{34}}{34} = M$$

$$E(m_i) = M$$

Biais :

soit $X \hookrightarrow \mathcal{L}(\theta)$; θ inconnue

$\hat{\theta}_n$ un estimateur de θ

$\hat{\theta}_n$ est sans-biais (non biaisé) ssi

$$\underbrace{E(\hat{\theta}_n)}_{\text{l'estimateur}} = \underbrace{\theta}_{\text{paramètre à estimer}}$$

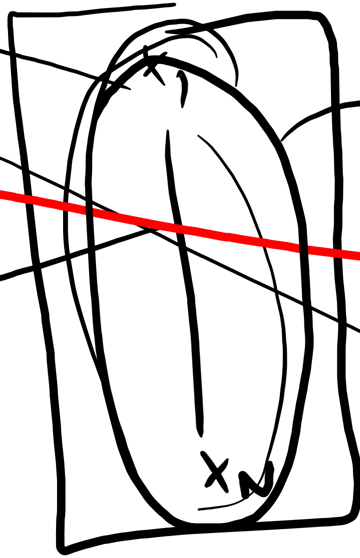
Moyenne

$$m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Variance

$$\sigma^2_{pop} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (x_i - m)^2$$

Pop



Echantillon

x_1 … x_n

estimateur

Moyenne empirique

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Variance empirique

si m connue

$$\sigma^2_{ech} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - m)^2$$

si m inconnue

$$\sigma^2_{ech} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_n)^2$$

estimateur

$$X \sim \mathcal{L}(\theta)$$

si $\bar{X}_n$ est sans-biais

$$E(\bar{X}_n) = m \; ?$$

Le biais de $\bar{X}_n$?

$(X_1, \dots, X_n)$ iid de X

$\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $E(X_i) = E(X)$

$V(X_i) = V(X)$

$$E(\bar{X}_n) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$E(\alpha X_1 + \beta Y_2)$$

$$= \alpha E(X_1) + \beta E(Y_2)$$

$$\boxed{E(X) = m}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} m$$

$$= \frac{1}{n} \underbrace{m + m + \dots + m}_{n \text{ fois}} = \frac{1}{\cancel{n}} \cancel{n} \cdot m$$

$$= m$$

$$\boxed{E(\bar{X}_n) = m}$$

X : dépense

moyenne dépense année $\frac{1}{365}\sum_{i=1}^{365} x_i = m$

Echantillon 7 jours $(x_1, \dots, x_7)$

$$\bar{X}_n = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} x_i$$

$\bar{X}_n$: la moyenne échantionnalle

est un estimateur sans-biais

de la

MOYENNE

m

$$\boxed{E(\bar{X}_n) = m}$$

Si σ^2_{ech} est sans-biais

$$E(\sigma^2_{ech}) = \sigma^2_{pop} \quad ???$$

$\{X_1, \ldots, X_n\}$ iid

$V(X_i) = V(X)$

1er cas m connue

$$E(\sigma^2_{ech}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boxed{E(X_i - m)^2}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\boxed{V(X_i)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V(X)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{\sigma^2_{pop}}_{c^{ste}}$$

$$= \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n}\, \sigma^2_{pop}$$

$$= \sigma^2_{pop}$$

$$E(\sigma^2_{ech}) = \sigma^2_{pop}$$

estimateur

paramètre à estimer

$\Rightarrow \sigma^2_{ech}$ est un estimateur sans biais de σ^2_{pop} (m connue)

$$E(\bar{X}_n) = m$$

$$E(\sigma^2_{ech}) = \sigma^2_{pop} \ (m \text{ connue})$$

estimateur sans biais de m et σ^2_{pop}

si m inconnue

$$\sigma^2_{ech} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2$$

si σ^2_{ech} est sans biais.

$$E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2\right) = \sigma^2_{pop} = \frac{1}{\boxed{N}} \sum_{i=1}^{N} (X_i - m)^2$$

??

?

faisons des transformations

sur $\sigma^2_{ech} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X}_n)^2$

on doit faire apparaître m

$$\sigma^2_{ech} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}_n\right)^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\overbrace{X_i - m}^{A} + \overbrace{m - \bar{X}_n}^{B}\Big)^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - m)^2 + 2(X_i - m)(m - \bar{X}_n) + (m - \bar{X}_n)^2\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)\underbrace{(m - \bar{X}_n)}_{\text{cste}} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underbrace{(m - \bar{X}_n)^2}_{\text{cste}}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 + 2(m-\bar{x}_n)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m) + (m-\bar{x}_n)^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 + 2(m-\bar{x}_n)\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m\right] + (m-\bar{x}_n)^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 + \underbrace{2(m-\bar{x}_n)(\bar{x}_n - m)} + \underbrace{(m-\bar{x}_n)^2}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 - 2(\bar{x}_n - m)^2 + (\bar{x}_n - m)^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2 - (\bar{x}_n - m)^2$$

$$E(\sigma^2_{ech}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2 - (\bar{X}_n - m)^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i - \underset{E(X_i)}{m})^2 - E(\bar{X}_n - m)^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) - V(\bar{X}_n)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V(X) - \frac{\sigma^2_{pop}}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2_{pop} - \frac{\sigma^2_{pop}}{n}$$

$$= \sigma^2_{pop} - \frac{\sigma^2_{pop}}{n} = \frac{n-1}{n}\sigma^2_{pop}$$

$E(\bar{X}_n) = m$

$$V(\bar{X}_n) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X)$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \sigma^2_{pop}$$

$$= \frac{1}{n^2}\cdot n\,\sigma^2_{pop} = \frac{\sigma^2_{pop}}{n}$$

$$E(\sigma^2_{ech}) = \frac{n-1}{n}\sigma^2_{pop} \neq \sigma^2_{pop}$$

estimateur

$\neq$ du paramètre à estimer

$\Rightarrow \sigma^2_{ech}$ est un estimateur avec

biais de σ^2_{pop}.

$E(\bar{x}_n) = m$

$E(\sigma^2_{ech})$ $\to$ $= \sigma^2_{pop}$ m connue

$\to$ $\neq \sigma^2_{pop}$ m inconnue