Записки по Теория на Множествата

При проф. Тинко Тинчев

Atanas Ormanov

December 7, 2022

Лекция 1

Book recomendation:
Introduction to Set Theory (3d Edition) by Karel Hrbackeck & Toomas Yech

Съпоставка м-ду Актуална безкрайност и Потенциална безкрайност:
На пръв поглед ако $B \subseteq A$ и $B \neq A$, то B има по-малко елементи, но при безкрайни мн-ва не е задължително.

$\boxed{\text{def}}$ Принцип за неограничената абстракция:
Нека $\mathcal{A}(x)$ е едноместно свойство на обекта x. Тогава има множество A, такова че $x \in A \Leftrightarrow \mathcal{A}(x)$

Парадокс на Ръсел:
Нека $\mathcal{R}$ е св-во такова че $\mathcal{R}(x) \Leftrightarrow x \notin x$ за произволно x

От принципа за неограничената абстракция (*) - има множество R,
такова че $x \in R \Leftrightarrow \mathcal{R}(x)$ за произволно x
... $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$

Езикът на теория на множествата се състои от:

- Двуместни свойства: $=, \in$
  (равенство в смисъла на Лайбниц означава неотличимост)
- Булеви връзки: $\vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- Квантори: $\forall x \phi, \exists x \phi$

ZF - аксиоми на Цермело Френкел
ZFC - ZF заедно с аксиомата за избора

$\boxed{\text{def}}$ Теоритико множествени свойства:
В света (универсума) има само множества (това са обектите с които ще работим)

ТМ свойствата разделяме на:
1) Логически аксиоми

- $\forall x \forall y (x = y \Rightarrow y = x)$
- $\forall x \forall y (x = y \Rightarrow y = x)$
- $\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z)$
- $\forall x \forall y \forall z (x \in y \wedge y = z \Rightarrow x \in z)$
- $\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge y \in z \Rightarrow x \in z)$

1-3 са аксиомите за еквивалентност на равенството
4-5 са аксиомите за конгруентност

2) Аксиоми на ZF:

1. $\exists x(x = x)$ - Има поне един обект в света
2. $\forall x \forall y(\forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y))$ - Обемност / екстенсионалност. Ако 2 множества имат едни и същи елементи, то те са равни.
3. $\exists x(x = x)$ - принцип за ограничената абстракция / схема за отделянето.

Док 2.2: $\forall y \forall z(y = z \Rightarrow \forall x(x \in y \Leftrightarrow x \in z))$
Нека предположим че $y = z$, нека x е произволно множество. Използваме логическа аксиома 4 за да докажем.

Док 2.3: Нека $\phi(x, u_1, u_2, ..., u_n)$ е ТМ. св-во, нека $u_1, ..., u_n$ са произволно мн-ва. Всеки път, когато A е множество, съществува множество, чийто елементи са точно онези елементи на A, за които е в сила $\phi(x, u_1, u_2, ..., u_n)$.
$\forall u_1 u_2 ... u_n \forall A \exists B \forall x(x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge \phi(x, u_1, u_2, ..., u_n))$ - св-во на x.

$\boxed{\text{Тв}}$ При фиксирани $A, u_1, ..., u_n$ - множества и теоритико множествено свойство ϕ, съществуват единствено множество B, за което $\forall x(x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge \phi(x, \overline{u}))$, където $\overline{u}$ са параметри.

Док: Нека B_1 и B_2 са такива мн-ва, че: $\forall x(x \in B_1 \Leftrightarrow x \in A \wedge \phi(x, \overline{u}))$ $\forall x(x \in B_2 \Leftrightarrow x \in A \wedge \phi(x, \overline{u}))$ Искаме да док че $B_1 = B_2$. Нека $y \in B_1$ е произволен. Тогава $y \in A \wedge \phi(y, \overline{u})$. Следователно $y \in B_2$. Така $\forall x(x \in B_1 \Leftrightarrow x \in B_2)$. От аксиомата за обемност $B_1 = B_2$.

$\boxed{\text{Тв}}$ Съществува празно множество

Док: Ще докажем че $\exists A \forall x(x \notin A)$
Нека B е множество (От. аксиомата 0). Нека $\phi(x) \leftrightharpoons \neg(x = x)$. Нека M е единственото множество, такова че $\forall x(x \in M \Leftrightarrow x \in B \wedge \phi(x))$. Ще док. че $\forall x(x \notin M)$. Допускаме че $x \in M$ е произволно. Тогава $x \in B \wedge \phi(x)$. Така $\phi(x)$, т.е. $x \neq x$, противоречи с 1-вата лог. аксиома. Следователно $x \notin M$. Понеже x е произволно то $\forall x(x \notin M)$.

$\boxed{\text{Опр}}$ За множество A, параметри $\overline{u}$ и св-во ϕ, съществува единствено такова B, което бележим така: $B = \{x \mid x \in A \wedge \phi(x, \overline{u})\}$

$\boxed{\text{Тв}}$ Съществува единствено празно множество.

Док: Нека M_1 и M_2 са празни, т.е. $\forall x(x \notin M_1)$ и $\forall x(x \notin M_2)$ Нека t е произволно множество, тогава $t \notin M_1$ и $t \notin M_2$. Но t беше произволно, значи $t \in M_1 \Leftrightarrow t \in M_2$ и от аксиомата за обемност $M_1 = M_2$ Празното множество бележим с $\emptyset$

Означение: $A \subseteq B \leftrightharpoons \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$

$\boxed{\text{Тв}}$ За всяко множество A, е изп. че $\emptyset \subseteq A$

$\boxed{\text{Тв}}$ Не същ. множество, което съдържа всички мн-ва: $\neg \exists A \forall x(x \in A)$

Док: Допускаме противното. Нека B е такова че $\forall x(x \in B)$
Нека $R = \{x \mid x \in R \wedge x \notin x\}$. Използваме аксиомата схема за отделяне с A = B и $\phi(x) \leftrightharpoons x \notin x$. Отделяме онези x, за които $x \notin x$. Така R е множество. Тогава $R \in B$. Получаваме че $R \in R \Leftrightarrow R \in B \wedge R \notin R \Leftrightarrow R \notin R$ - противоречие с допускането. Тоест няма такива мн-ва.

Future reading:

- actual infinity vs potential infinity
- Banach–Tarski paradox (occurs after the patch of Russel's paradox)
- Cantor's definition of real numbers

Лекция 2

$\boxed{\text{Тв}}$ За всеки две множества A и B, съществува единствено множество С, такова че $\forall x(x \in C \Leftrightarrow x \in A \land x \in B)$.

Док за съществуване: Нека $\phi(x,u) \leftrightharpoons x \in u$. Според аксиомната схема за отделяне в-ху множеството A и ϕ за $u = B$, същ. множество $C = \{x \mid x \in A \land \phi(x,B)\} = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$. Значи за всяко x, $x \in C \Leftrightarrow x \in A \land x \in B$

Док за единственост: Нека C_1 и C_2 са такива мн-ва, че $x \in C_i \Leftrightarrow x \in A \land x \in B, i = 1,2$.
Тогава за всяко х, $x \in C_1 \Leftrightarrow x \in A \land x \in B \Leftrightarrow x \in C_2$ и по аксиомата за обемност $C_1 = C_2$.
Това множество означаваме с $A \cap B$.

$\boxed{\text{Тв}}$ За всеки две множества А и В, съществува единствено множество С, такова че $\forall x(x \in C \Leftrightarrow x \in A \land x \notin B)$

$\phi(x,u) \leftrightharpoons x \notin u$, т.е. отделяме от А всички ел. х, за които $\phi(x,B)$
$x \in C \Leftrightarrow x \in A \land x \notin B, i = 1,2$
$x \in C_1 \Leftrightarrow x \in C_2, \forall x$
$C_1 = C_2$
Това единствено множество бележим $A \setminus B$ и наричаме разлика на А и В.

Можем да правим "голямо" сечение

$\boxed{\text{Тв}}$ Нека $A \neq \emptyset$. Тогава съществува единствено множество B, което съдържа точно множествата, които са елементи на всеки един елемент на А.
$\forall x(x \in B \Leftrightarrow \forall y(y \in A \Rightarrow x \in y))$

Док за същ.: Нека $y_0 \in A$, защото А е непразно. Нека $\phi(x,u) \leftrightharpoons \forall y(y \in u \Rightarrow x \in y)$. От аксиомната схема за отделянето, има множество
$B' = \{x \in y_0 \land \phi(x,A\} = \{x \mid x \in y_0 \land \forall y(y \in A \Rightarrow x \in y\}$
Ще док че $\forall x(x \in B' \Leftrightarrow \forall y(y \in A \Rightarrow x \in y))$ Нека $x \in B'$. Тогава $x \in y_0 \land \forall y(y \in A \Rightarrow x \in y)$, в частност $\forall y(y \in A \Rightarrow x \in y)$.
Обратното, нека х е т.ч. $\forall y(y \in A \Rightarrow x \in y)$.
Но $y_0 \in A$, следователно $x \in y_0$. Така $x \in y_0 \land \forall y(y \in A \Rightarrow x \in y)$ от където $x \in B'$

Док единств.: Нека B_1 и B_2 са такива мн-ва че ... $x \in B_i \Leftrightarrow \forall y(y \in A \Rightarrow x \in y)$ за $i = 1,2$
Така за всяко х, $x\ inB_1 \Leftrightarrow \forall y(y \in A \Rightarrow x \in y) \Leftrightarrow x \in B_2$ Т.е. има единствено такова множество, бележим го $\bigcap A$ или $\bigcap_{x \in A} x$

Приемаме че $\bigcap \emptyset \leftrightharpoons \emptyset$

$\boxed{\text{Аксиома за чифта}}$ За всеки 2 мн-ва а и b, съществува множество А, измежду чиито ел. са а и b.
$\forall a \forall b \exists A(a \in A \land b \in A)$

$\boxed{\text{Тв}}$ За всеки 2 мн-ва а и b същ. единствено множество В, т.ч. $\forall x(x \in B \Leftrightarrow x = a \lor x = b)$

Док ед.: Нека B_1 и B_1 са мн-ва, т.ч. $\forall x(x \in B_i \Leftrightarrow x = a \vee x = b)$
Тогава за всяко x, $x \in B_1 \Leftrightarrow x = a \vee x = b \Leftrightarrow x \in B_2)$ След. $B_1 = B_2$

Док същ.: Нека A е такова множество че $a \in A$ и $b \in A$. Нека $\phi(x, u_1, u_2) \leftrightharpoons x = u_1 \vee x = u_2))$
По аксиомата схема за отд., същ. множество $B = \{x \mid x \in A \wedge \phi(x, a, b)\}$.
Ще док. че $\forall x(x \in B \Leftrightarrow x = a \vee x = b)$. Нека x е произв. и нека $x \in B$. Тогава $x \in A \wedge \phi(x, a, b)$, в частност $\phi(x, a, b)$ т.е. $x = a \vee x = b$.
Нека сега $x = b \vee x = b$. Така $\phi(x, a, b)$. Понеже $a \in A$ и $b \in A$, то $x \in A$. Следователно $x \in B$
Това единствено множество ще означаваме $\{a, b\}$ и ще нар. чифт на A и B.

Заб: Ако $a = b$, то $\{a, a\} = \{a\}$ наричаме синглетон на а.

Определимо е в езика на ТМ дали x е синглетон.
x е синглетон $\Leftrightarrow \exists a(x = \{a\}) \Leftrightarrow \exists a \forall y(y \in x \Leftrightarrow y = a)$.
Тогава можем да използваме "синглетон" като свойство във ф-ла. Сега ясно се вижда че сме разширили езика защото следните са различни $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}$ и т.н. (така получаваме безкрайна редица)

$\boxed{\text{Св}}$ $\{a, b\} = \{b, a\}$. Ясно се вижда че $\forall x(x \in \{a, b\} \Leftrightarrow x \in \{b, a\})$

$\boxed{\text{def}}$ $< a, b > = < a_1, b_1 > \Leftrightarrow a = a_1 \wedge b = b_1$

$\boxed{\text{Опр}}$ Наредена двойка на мн-вата x и y наричаме множеството $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ и ще означаваме с $< x, y >$.

Заб: Ако използваме x вместо $\{x\}$ ще можем да правим цикли на принадлежност - $A \in B \in C$. другия път ще въведем "правило" което ще забрани такива неща.

$\boxed{\text{Тв}}$ За всяко $x1, y1, x2, y2$ е в сила, че $< x1, y1 > = < x2, y2 > \Leftrightarrow x1 = x2 \wedge y1 = y2$

Док: $(\Leftarrow) x1 = x2 \wedge y1 = y2$, показваме че $\{x1\} = \{x2\} \wedge \{x1, y1\} = \{x2, y2\}$
$\{\{x1\}, \{x1, y1\}\} = \{\{x2\}, \{x2, y2\}\}$ и от там $< x1, y1 > = < x2, y2 >$

$(\Rightarrow)$ Нека $< x1, y1 > = < x2, y2 >$

1. $x1 = y1$, тогава $< x1, y1 > = \{\{x1\}, \{x1, x2\}\} = \{\{x1\}, \{x1\}\} = \{\{x1\}\} = < x2, y2 > = \{\{x2\}, \{x2, y2\}\}$. Следователно $\{x1\} = \{x2\} = \{x2, y2\}$. Така: $x1 = x2$ и $x2 = y2$. Тогава $x1 = x2 = y2 = y1$

2. $x1 \neq y1$. Тогава $\{x1\} \neq \{x1, y1\}$. Тогава $\{x2\} \neq \{x2, y2\}$. Тогава $y2 \neq x2$, защото иначе чифта и синглетона щяха да съвпадат. От тук $\{x1\} \neq \{x2, y2\}$. Но $\{x1\} \in < x2, y2 >$, и така $\{x1\} = \{x2\}$. След. $\{x1, y1\} \neq \{x2\}$, от където $\{x1, y1\} = \{x2, y2\}$. От $\{x1\} = \{x2\}$, следва че $x1 = x2$. Тогава $\{x1, y1\} = \{x2, y1\} = \{x2, y2\}$. Понеже $y1 \neq x1 = x2$, то $y1 = y2$

$\boxed{\text{Аксиома за обединение}}$ За всяко множество A съществува множество B, т.ч. всеки елемент на елемент на A е елемент на B.
$\forall x \forall y(x \in y \wedge y \in A \Rightarrow x \in B)$

$\boxed{\text{Тв}}$ За всяко множество А съществува единствено множество В, т.ч. $\forall x(x \in B \Leftrightarrow \exists y(y \in A \wedge x \in y))$

<u>Док за ед:</u> $i = 1, 2. \forall x(x \in B_i \Leftrightarrow \exists y(y \in A \wedge x \in y))$ за всяко х,
$x \in B_1 \Leftrightarrow \exists y(y \in A \wedge xiny) \Leftrightarrow x \in B_2$, т.е. $B_1 = B_2$

<u>Док за същ.</u> Нека С е такова множество, че $\forall x \forall y(y \in A \wedge x \in y \Rightarrow x \in C)$.
Нека $B = \{x \mid x \in C \wedge \exists y(y \in A \wedge x \in y)\}$
Сега ако $x \in B \implies x \in C \wedge \exists y(y \in A \wedge x \in y) \implies \exists y(y \in A \wedge x \in y)$
Нека $\exists y(y \in A \wedge x \in y)$. Нека y_0 е свидетел за това $(y_0 \in A \wedge x \in y_0)$.
Понеже $y_0 \in A \wedge x \in y_0$, то $x \in C$. Следователно $x \in B$

Значи съществува такова множество и то е единствено. Ще го бележим с $\bigcup A$.

Заб: Означение означава че ще го използваме във формула като съкращение(syntax sugar).

Не може да се дефинира операция за допълнение. Тоест:
$\boxed{\text{Тв}}$ За нито едно множество A не съществува множество $\overline{A}$, т.ч. $\forall x(x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A)$

<u>Док:</u> Допускаме противното - нека A и $\overline{A}$ са такива мн-ва, такова че за всяко х $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$. Нека $V = \bigcup\{A, \overline{A}\}$ - от аксиомата за чифта и обединението. Нека х е произволно. Ако $x \in A$, то $\exists y(y \in \{A, \overline{A}\} \wedge x \in y)$ от където $xinV$. Ако пък $x \notin A$, то $x \in \overline{A}$ и отново $\exists y(y \in \{A, \overline{A}\} \wedge x \in y)$, т.е. $x \in V$. След $\forall x(x \in V)$, противоречие!

$\overline{0} = \emptyset$
$\overline{1} = \{\overline{0}\}$
$\overline{2} = \overline{1} \cup \{\overline{1}\} = \{\overline{0}, \overline{1}\}$
...
$\overline{n+1} = \overline{n} \cup \{\overline{n}\}$ (n + 1 елемента)

$\boxed{\text{Аксиома за степенното множество}}$ За всяко множество А съществува множество В, измежду чиито елементи са всички подмножества на А.
$\forall A \exists B \forall x(x \subseteq A \Rightarrow x \in B)$

$\boxed{\text{Тв}}$ За всяко множество А същ. единствено множество В, т.ч. $\forall x(x \in B \Leftrightarrow x \subseteq A)$

<u>Док за същ.:</u> Некеа С е т.ч. $\forall x(x \subseteq A \Rightarrow x \in C)$.
Нека $B = \{x \mid x \in C \wedge x \subseteq A\}$. Нека $x \in B$. След $x \in C \wedge x \subseteq A$, от където $x \subseteq A$. След. $x \in C$, от където $x \in C \wedge x \subseteq A$, т.е. $x \in B$
Заб: $x \in C \wedge x \subseteq A \Leftrightarrow x \subseteq A$, защото $x \subseteq A \Rightarrow x \in C$

<u>Док за единственост:</u> Взимаме B_1, B_2 и $\forall x(x \in B_i \Leftrightarrow x \subseteq A)$
$x \in B_1 \Leftrightarrow x \subseteq A \Leftrightarrow x \in B_2$, т.е. $B_1 = B_2$.
Такова множество В съществува и е единствено и ще означаваме с $\mathcal{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$

<u>Какво можем да изведем от тук?</u>

- $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ за всяко А
- $A \in \mathcal{P}(A)$, за всяко А

- $A \in \mathcal{P}(A)$, за всяко A
- $A \subseteq B \implies \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ - монотонност
- Можем ли да твърдим монотонността в обратната посока? Да!
- Възможно ли е $\mathcal{P}(A) \subseteq A$? Не! (дори и за празното). Това е същото като $\mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(A)$, но това все още не можем да докажем.

Но можем да докажем следното:
$\boxed{\text{Тв}}$ Не същ. множество A, т.ч. $\mathcal{P}(A) \subseteq A$

Док: Допускаме противното и нека A е такова множество, че $\mathcal{P}(A) \subseteq A$.
Нека $\mathcal{R}_A = \{x \mid x \in A \wedge x \notin x\}$. Според аксиомата схема за отделяне $\mathcal{R}_A$ е множество. Освен това, $\mathcal{R}_A \subseteq A$. След $\mathcal{R}_A \in \mathcal{P}(A)$ и по допускане $\mathcal{P}(A) \subseteq A$, от където $\mathcal{R}_A \in A$.
Но $\mathcal{R}_A \in A \Leftrightarrow \mathcal{R}_A \in A \wedge \mathcal{R}_A \notin \mathcal{R}_A \Leftrightarrow \mathcal{R}_A \notin \mathcal{R}_A$. Противоречие! След. $\neg\exists A(\mathcal{P}(A) \subseteq A)$

$\boxed{\text{Опр}}$ Казваме, че множеството z е транзитивно, ако $z \subseteq \mathcal{P}(z)$. (ще бележим с $trans(z)$)
Тоест z е транзитивно $\Leftrightarrow \forall y(y \in z \Rightarrow y \subseteq z) \Leftrightarrow \forall x \forall y(x \in y \wedge y \in z \Rightarrow x \in z)$
$\bigcup z \subseteq z$

$\boxed{\text{Тв}}$ Нека x е множество. Тогава:

1. $trans(x) \Rightarrow trans(\bigcup x)$
2. $\forall y(y \in x \Rightarrow trans(y)) \Rightarrow trans(\bigcup x)$
3. $\forall y(y \in x \Rightarrow trans(y)) \Rightarrow trans(\bigcap x)$
4. $trans(x) \Rightarrow trans(\mathcal{P}(x))$
5. $trans(x) \Rightarrow trans(x \cup \{x\})$

Заб: $S(x) = x \cup \{x\}$ е наследник на x

Док 1: Нека x е транз. Нека $y \in \bigcup x$. Следователно $\exists z(y \in z \wedge z \in x)$. Нека z_0 е свидетел за това: $y \in z_0, z_0 \in x$. Но $trans(x)$, от където $y \in x$. От $y \in x$, винаги е вярно че $y \subseteq \bigcup x$. Тогава $y \subseteq \bigcup x$. След $\bigcup x$ е транзитивно.

Док 2: Нека вс. ел. на x е транзитивно множество. Нека $y \in \bigcup x$. Нека z е т.ч. $y \in z \wedge z \in x$. Но z е транзитивно ($z \in x$) значи $y \subseteq z$. Понеже $z \in x$, то $z \in \bigcup x$. Така $y \subseteq z \wedge z \subseteq \bigcup x$, от където $y \subseteq \bigcup x$. Т.е. $trans(\bigcup x)$

Док 3: Нека x е множество от транзитивни множества.
Заб: Трябва да внимаваме, защото $\forall y(y \in \emptyset \Rightarrow trans(y))$
Ако $x = \emptyset$, то $\bigcup x = \bigcup \emptyset = \emptyset$
Нека сега $x \neq \emptyset$. Нека $y \in \bigcap x$. Тогава $\forall z(z \in x \Rightarrow y \in z)$. Понеже $\forall z(z \in x \Rightarrow trans(z))$, то $\forall z(z \in x \Rightarrow y \subseteq z)$. Така y съдържа елементи, които са общи за всички елементи на x. Тогава $y \subseteq \bigcap x$. Следователно $trans(\bigcap x)$.

Док 4: Нека $trans(x)$.
Можем да използваме че $\bigcup z \subseteq z$ и можем да докажем следното $\bigcup \mathcal{P}(x) = x \subseteq \mathcal{P}(x)$

Друг подход:
$trans(x) \implies x \subseteq \mathcal{P}(x) \implies \mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(x)) \implies trans(\mathcal{P}(x))$

<u>Док 5:</u> Нека $trans(x)$. Нека $y \in S(x) = x \cup \{x\}$. Ако $y \in x$, то понеже $trans(x)$ имаме че $y \subseteq x$. Но $x \subseteq S(x) = x \cup \{x\}$. Така $y \subseteq S(x)$. Ако $y \in \{x\}$, то $y = x \subseteq S(x)$.
$\forall y(y \in S(x) \Rightarrow y \subseteq S(x))$. Така $trans(S(x))$

Въвеждаме още съкратен синтаксис (синтактична захар) за $\phi(x)$ и A - множество:

- $(\exists x \in A)(\phi(x)) \leftrightharpoons \exists x(x \in A \land \phi(x))$
- $(\forall x \in A)(\phi(x)) \leftrightharpoons \forall x(x \in A \Rightarrow \phi(x))$
- $\exists! x(\phi(x)) \leftrightharpoons \exists x(\phi(x) \land \forall y(\phi(y) \Rightarrow x = y))$

Лекция 3

$\boxed{\text{def}}$ Декартово произведение
$A \times B = \{< a, b > \ | \ a \in A \wedge b \in B\}$. Тук $\phi(x) \leftrightharpoons \exists a \exists b(x =< a, b > \wedge a \in A \wedge b \in B)$
и $x \in A \times B \Leftrightarrow \phi(x)$

Наблюдение: $< a, b >, a \in A$ и $b \in B$
$\{a\} \subseteq A \subseteq A \cup B$, $\{a, b\} \subseteq A \cup B$
$\{a\}, \{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$
$\{\{a\}, \{a, b\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
$< a, b >\subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
$< a, b >\in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$

$\boxed{\text{Тв}}$ За вс. 2 мн-ва A и B, същ. единствено мн-во C, такова че:
$\forall u(u \in C \Leftrightarrow \exists a \exists b(a \in A \wedge b \in B \wedge u =< a, b >))$

Док за единственост: за домашна.

Док за съществуване: Нека $C = \{u \mid u \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \wedge \phi(u)\}$.
Имаме че $\forall u(\phi(u) \Rightarrow u \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$, от където $\forall u(u \in C \Leftrightarrow \phi(u))$. Това единствено множество ще бележим с $A \times B$ и ще наричаме декартово произведение на A и B.

$\boxed{\text{Тв}}$ За всеки A, B, C - множества, е в сила че:

1. Ax$\emptyset = \emptyset$
2. $\exists A \exists B(AxB = BxA)$, т.е. операцията не е комутативна
3. $(AxB)xC = Ax(BxC)$? Не е асоциативна!
4. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
5. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
6. $B \times (\bigcup A) = \bigcup \{B \times x \mid x \in A\}$ - като за начало се питаме синтаксиса коректен ли е? Тоест това от десния край е мн-во ли е?

Док 5:
$(\subseteq)$ Нека $x \in A \times (B \cap C)$. Нека $a \in A, b \in B \cap C$ са т.ч. $x =< a, b >$. Но $b \in B, b \in C$, от където $< a, b >\in A \times B$ и $< a, b >\in A \times C$. Така $x \in (A \times B) \cap (A \times C)$.

$(\supseteq)$ Нека $x \in (A \times B) \cap (A \times C)$. Тогава $x \in A \times B$ и $x \in A \times C$. Нека $a \in A, b \in B$, т.ч. $x =< a, b >$. Нека $a' \in A$ и $c \in C$ са такива че $x =< a', c >>$.
Понеже $< a, b >= x =< a', c >$, то $a = a'$ и $b = c$. Следователно $b \in B \cap C$, от където $x =< a, b >\in A \times (B \cap C)$.

Док 6: Първо да докажем че операцията е коректна.
$B \times x, x \in A \implies x \subseteq \bigcup A \implies B \times x \subseteq B \times (\bigcup A) \implies B \times x \in \mathcal{P}(B \times (\bigcup A))$.
Тук $M \leftrightharpoons \mathcal{P}(B \times (\bigcup A))$, което ще е резултат от отделянето.

$\boxed{\text{Лема}}$ Съществува единствено мн-во $\forall u(u \in C \Leftrightarrow (\exists x \in A)(u = B \times x))$

Док: Единственост - от аксиомата за обемност.

(съществуване): Нека $C = \{u \mid u \in \mathcal{P}(B \times \bigcup A) \wedge (\exists x \in A)(u = B \times x)\}$.
$u \in C \implies u \in \mathcal{P}(B \times \bigcup A) \wedge \phi(u) \implies \phi(u)$. Сега от $\phi(u) \Rightarrow u \in \mathcal{P}(B \times \bigcup A)$ следва ...

($\subseteq$) Нека $u \in B \times (\bigcup A)$ е произволно. Нека $< b, c >= u$ като $b \in B$ и $c \in \bigcup A$. Нека $a \in A$ е т.ч. $c \in a$. Тогава $u =< b, c >\in B \times a, a \in A$. Но $B \times a \in \{B \times x \mid x \in A\}$, от където $u \in \bigcup\{B \times x \mid x \in A\}$

($\supseteq$) Нека $u \in \bigcup\{B \times x \mid x \in A\}$. Нека $a \in A$ е т.ч. $u \in B \times a$. Нека $b \in B, c \in a$ са т.ч. $u =< b, c >$. Но $a \in A \implies a \subseteq \bigcup A$, така $c \in \bigcup A$. Тогава $u =< b, c >\in B \times (\bigcup A)$.

Сега от Тинко:
Множествата са естествени числа - $\mathbb{N}$,
т.е. един обект е множество $\iff$ този обект е естествено число.

Нека x и y са множества, $x = y \iff x = y$ като естествени числа.

Сега ще дефинираме принадлежност.
Нека $n > 0$, тогава $n = (1b_{k-1}...b_1b_0) = 1.2^k + ... + b_1.2^1 + b_0.2^0$
Нека x и y са множества. Казваме че $y \in x$ ако $b_{y-1} = 1$ в двоичното представяне на x.

Вижда се че логическите аксиоми са в сила - еквивалентност на равенството и конгруентност.

Какво означава аксиомата за екстенсионалност $\forall x \forall y(\forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y)$?
Ами x и y имат еднакви двоични представяния, т.е. те са равни.

Аксиома за чифта: Нека a и b са множества:

1. $a = b$, тогава $x = 2^a$
2. $a \neq b$, тогава $x = 2^a + 2^b$

Схема за отделяне: Нека $\phi(x)$ е ТМ свойство.
Нека A е съвкупността на естествените числа x, за които $\phi(x)$ е вярно. Нека B е множество.
Сега се чудим дали $\exists C \forall x(x \in C \Leftrightarrow x \in B \wedge \phi(x))$ е изпълнено.
Ами това са тези битове b на B, за които е вярно свойството $\phi(b)$. Съответно в двоичния запис на C само на съответните позиции на тези b-та има 1, на всички останали има 0.

$\boxed{\text{Аксиома за безкрайност}}$

Форма на Цермело: $\exists A(\emptyset \in A \wedge \forall x(x \in A \Rightarrow \{x\} \in A))$
Нека A_0 е множество със свойството $\emptyset \in A_0 \wedge \forall x(x \in A_0 \Rightarrow \{x\} \in A_0)$. $\emptyset \in A_0 \Rightarrow \{\emptyset\} \in A_0$, така $\{\emptyset\} \in A_0$ и т.н. Показваме за произволен брой влагания на $\emptyset$.

Форма на Фон Нойман: $\exists A(\emptyset \in A \wedge \forall x(x \in A \Rightarrow x \cup \{x\} \in A)$
A_0: $\emptyset \in A_0, \{\emptyset\} \in A_0, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in A_0$ и т.н. Ние ще ползваме тази дефиниция когато говорим за естествени числа, където $0 \leftrightharpoons \emptyset$.

$\boxed{\text{Аксиома за регулярност/фундираност}}$ $\forall x(x \neq \emptyset \Rightarrow \exists y(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset))$
(Формулирана от Мириманов през 1917г и от Фон Нойман през 1925г)

$\boxed{\text{T}}$

1. $\neg \exists x(x \in x)$
2. $\neg \exists x \exists y(x \in y \wedge y \in x)$
3. $\neg \exists x \exists y \exists z(x \in y \wedge y \in z \wedge z \in x)$
4. Не съществува редица от мн-ва $x_0, x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...$, такива че$x_0 \in x_1, x_1 \in x_2, ...$

Док 1: Да допусканем, че $\exists x(x \in x)$. Нека x_0 е свидетел за това съществуване, т.е. нека x_0 е мн-во със свойството $x_0 \in x_0$. Нека $x_1 = \{x_0\}$, т.е. $x_0 \in x_1$. Значи $x_1 \neq \emptyset$, следователно $\exists y(y \in x_1 \wedge y \cap x_1 = \emptyset)$. Нека y_0 е свидетел за това съществуване, т.е. $y_0 \in x_1 \wedge y_0 \cap x_1 = \emptyset$.
Така $y_0 \in x_1$, но $x_1 = \{x_0\}$, следователно $y_0 = x_0$ и така $x_0 \in x_0$.
Следователно $x_0 \in y_0$, $x_0 \in \{x_0\}, \{x_0 = x_1\}$. Така $x_0 \in y_0$ и $x_0 \in x_1$. Значи $x_0 \in y_0 \cap x_1$.
Това е абсурд, понеже $y_0 \cap x_1 = \emptyset$.

Док 2: Да доп. че $\exists x \exists y(x \in y \wedge y \in x)$. Нека x_0 и y_0 са мн-ва, т.ч. $x_0 \in y_0 \wedge y_0 \in x_0$. Нека $x_1 = \{x_0, y_0\}$. Така $x_1 \neq \emptyset$. От $x_1 \neq \emptyset \implies \exists y(y \in x_1 \wedge y \cap x_1 = \emptyset)$.
Следователно $\exists y(y \in x_1 \wedge y \cap x_1 = \emptyset)$. Нека y_1 е такова мн-во, че $y_1 \in x_1 \wedge y_1 \cap x_1 = \emptyset$. $y_1 \in x_1, x_1 = \{x_0, y_0\}$. Следователно $y_1 = x_0 \vee y_1 = y_0$. Да разгледаме случаите:

1. $y_1 = x_0$. Разглеждаме y_0. Знаем че $y_0 \in x_0$ и $x_0 \in y_0$. Така $y_0 \in y_1$, но $y_0 \in x_1$ защото $x_1 = \{x_0, y_0\} \implies y_0 \in y_1 \cap x_1 \implies$ противоречие $y_1 \cap x_1 = \emptyset$
2. $y_1 = y_0$. $x_0 \in y_0$, следователно $x_0 \in y_1$. Така ?...?
3. Сами! Hint: Допускаме че $x_0 \in y_0 \wedge y_0 \in z_0 \wedge z_0 \in x_0$ и $x_1 \leftrightharpoons \{x_0, y_0, z_0\}$

$\boxed{\text{Аксиомна схема за замяната}}$ (С тази аксиома вече имаме аксиомната схема $\mathcal{ZF}$)
Имаме един детерминистичен преобразувател (на интуитивно ниво функция) - $\phi(x, y, \overline{u})$, в който можем да фиксираме $\overline{u}$ и за дадено x то ни връща y.
Аксиомната схема твърди, че за такова ϕ с дефиниционна област A, има съответен образ на ϕ. Френкел забелязва че ако разгледаме $\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), ..., \mathcal{P}^n(\mathbb{N})$, то не можем да гарантираме че това последното $\mathcal{P}(N)^n$ съществува.

Схемата: Нека $\forall u_1 ... \forall u_n((\forall x \forall y_1 \forall y_2(\phi(x, y_1, \overline{u}) \wedge \phi(x, y_2, \overline{u})) \Rightarrow y_1 = y_2) \Rightarrow \forall A \exists B \forall z(z \in B \Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge \phi(x, z, \overline{u}))))$

Разглеждаме: $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}, A \leftrightharpoons \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$\phi(x, y) \leftrightharpoons (x = \emptyset \wedge y = a) \vee (x = \{\emptyset\} \wedge y = b))$
$\forall x \forall y_1 \forall y_2(\phi(x, y_1) \wedge \phi(x, y_2) \Rightarrow y_1 = y_2)$
$\exists B \forall z(z \in B \Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge \phi(x, z)))$

$\boxed{\text{Аксиома за избора } (\mathcal{AC})}$ Нека имам някакво разделяне(разбиване) на множеството А и взема по един елемент от всяка част. $\forall z(z \in A \Rightarrow \bigcap z$ е синглетон $(\exists u(z \cap c = \{u\})))$

С помощта на аксиомата за избора се доказва че всяко множество може да бъде добре наредено (contraversial). $\forall x(x \in A \Rightarrow \emptyset) \Rightarrow \exists f(Func(f))$
$Fom(f) = A \wedge \forall x(x \in A \Rightarrow f(x) \in x)$
Това поражда и парадокса на Банарх Тарски: Взимаме кълбо B с $r = 1$, значи може да разделим $B = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_7$. След което можем да вземем $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ с $r = 1$ и $B_4 \cup B_5 \cup ... \cup B_17$ с $r = 1$ - абсурд! Аксиомата за избора не е конструктивна!

Аксиомата: Аксиома на мултипликативност - форма на Ръсел, защото още не сме въвели понятието за функция
$\forall A(\forall x(x \in A \Rightarrow x \neq \emptyset) \wedge \forall x \forall y(x \in A \wedge y \in A \wedge x \neq y \Rightarrow x \cap y = \emptyset) \Rightarrow \exists C \forall x(x \in A \Rightarrow \exists u(x \cap C = \{u\})))$

Заб: Ако A е крайно - всичко е точно. Но ако A е безкрайно вече е различно.

$f : A \to B, A \twoheadrightarrow B$ (сюрекция), то можем да ограничим домейна за да получим биекция. Тоест съществува $A_0 \subseteq A : f \restriction A_0$ е биекция м-ду A_0 и B.

Лекция 4

$\boxed{\text{(Бинарни) Релации}}$ Това са множества (обекти от света ни).

Пример: $P_1(A,l) \leftrightharpoons$ точката A лежи на правате l.
Обаче може да имаме различни свойства, които описват еднакви релации (множества).
Ако $P_2(A,l) \leftrightharpoons$ правата l минава през точката A,
то $R_1 = \{< A, l > \mid P_1(A,l)\}$ и $R_2 = \{< A, l > \mid P_2(A,l)\}$ са равни. За нас релация е просто множество от наредени двойки $R \subseteq A \times B$

$\boxed{\text{Опр}}$ Бинарна релация е множество, чийто елементи са наредени двойки.
$Rel(R) \leftrightharpoons \forall z(z \in R \Rightarrow \exists x \exists y(z =< x, y >))$

Примери:

1. $\emptyset$ - никъде недефинираната релация
2. A е множество, $A \times A$ е релация (пълна релация над A)
3. A е мн-во, $id_A = \{< x, x > \mid x \in A\}$ е идентитет на A.
   Заб: $T = \{< x, x > \mid x = x\}$ не е множество (поражда парадокса на Ръсел)

$\boxed{\text{def}}$ Нека R е релация.
Дефиниционна област на R наричаме: $Dom(R) \leftrightharpoons \{x \mid \exists y(< x, y >\in R)\}$
Област на стойностите на R наричаме: $Rng(R) \leftrightharpoons \{y \mid \exists x(< x, y >\in R)\}$

$\boxed{\text{Тв}}$ За всяка релация R, $Dom(R)$ и $Rng(R)$ са множества.

Док: $x \in Dom(R) \implies \exists y(< x, y >\in R) \implies \exists y(\{x\} \in< x, y >\in R) \implies \{x\} \in \bigcup R \implies Dom(R) \subseteq \bigcup\bigcup R, Dom(R)$ е определима съвкупност (клас).
$\bigcup\bigcup R$ е множество $\implies Dom(R)$ е множество.
Аналогично получаваме $y \in Rng(R) \Rightarrow y \in \bigcup\bigcup R \implies Rng(R) \subseteq \bigcup\bigcup R$ - множество.

$\boxed{\text{Тв}}$ $Rel(R) \Rightarrow R \subseteq Dom(R) \times Rng(R)$

Док: Нека $z \in R$. Тогава z е наредена двойка. Нека x и y са т.ч. $z =< x, y >$.
Тогава $x \in Dom(R)$ и $y \in Rng(R)$. Следователно $z =< x, y >\in Dom(R) \times Rng(R)$

$\boxed{\text{Операции върху релации}}$ R, S - релации, то $\implies R \cup S, R \cap S, R \setminus S$ са релации
$R^{-1} \leftrightharpoons \{< x, y > \mid < y, x >\in R\}$ е съвкупност от наредени двойки. Обаче множество ли е?
$R^{-1} = \{< x, y > \mid < y, x >\in R\} = \{u \mid \exists x \exists y(u =< x, y > \wedge < y, x >\in R)\} = \{u \mid u \in Rng(R) \times Dom(R) \wedge \exists x, y(u =< x, y > \wedge < y, x >\in R)\}$

$\boxed{\text{def}}$ Операция - композиция на релации. $(f \circ g)(x) = g(f(x))$

$\boxed{\text{Опр}}$ Композицията на релациите R и S наричаме мн-вото:
$R \circ S \leftrightharpoons \{< x, y > \mid \exists z(< x, z >\in R \wedge < z, y >\in S)\} = \{u \mid (\exists x, y, z)(u =< x, y > \wedge < x, z >\in R \wedge < z, y >\in S)\} = \{u \mid u \in Dom(R) \times Rng(S) \wedge (\exists x, y, z)(u =< x, y > \wedge < x, z >\in R \wedge < z, y >\in S)\}$

Св Нека R, S_1, S_2 са релации. Тогава са изпълнени:

1. $R \circ (S_1 \circ S_2) = (R \circ S_1) \circ S_2$ - асоциативност
2. $(S_1 \cup S_2) \circ R = (S_1 \circ R) \cup (S_2 \circ R)$
   $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$
3. $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$, обратното включване не винаги е вярно.
4. $R \circ (S_1 \setminus S_2) \supseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$
5. $(S_1 \circ S_2)^{-1} = S_2^{-1} \circ S_2^{-1}$

Док 3: Нека $u \in R \circ (S_1 \cap S_2)$. Нека x, y, z, т.ч. $u =< x, y >, < x, z >\in R$ и $< z, y >\in S_1 \cap S_2$. Тогава $< z, y >\in S_1$ и $< z, y >\in S_2$. След. $< x, y >\in R \circ S_1$ и $< x, y >\in R \circ S_2$. Така $u =< x, y >\in (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$.

$R = \{< x, z >, < x, t >\}, z \neq t$
$S_1 = \{< z, y >\}$
$S_2 = \{< t, y >\}$
$S_1 \cap S_2 = \emptyset, R \circ (S_1 \cap S_2) = R \circ \emptyset = \emptyset$
$R \circ S_1 = < x, y >$
$R \circ S_2 = < x, y >$
$\implies (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2) = \{< x, y >\}$

Док 4: Нека $u \in (R \circ S_1) \setminus (R \circ S_2)$. Така $u \in R \circ S_1$ и $u \notin R \circ S_2$. Нека x, y, z са такива че $< x, z >\in R$ и $< z, y >\in S_1$. Понеже $u \notin R \circ S_2$, то $\forall t(< x, t >\in R \Rightarrow < t, y >\notin S_2)$. Но $< x, z >\in R$, след. $< z, y >\notin S_2$. Обаче $< z, y >\in S_1$, от където $< z, y >\in S_1 \setminus S_2$. От $< x, z >\in R$, следва че $u =< x, y >\in R \circ (S_1 \setminus S_2)$
Обратното не е винаги вярно!

Заб: $(\circ)$ не е комутативна!

Опр Нека $Rel(R)$ и $A \subseteq Dom(R)$. Образ на A при R наричаме множеството:
$R[A] = \{y \mid \exists(x \in A)(< x, y >\in R)\} \subseteq Rng(R)$

Опр Нека $Rel(R)$ и $B \subseteq Rng(R)$. Праобраз на B при R наричаме множеството:
$R^{-1}[B] = \{x \mid \exists(y \in B)(< x, y >\in R)\} \subseteq Dom(R)$

Тв (за коректност) Нека R е релация и $B \subseteq Rng(R)$. Тогава $(R^{-1})[B] = R^{-1}[B]$, където $(R^{-1})[B]$ е образ на B ри R^{-1}, а $R^{-1}[B]$ е праобраз на B при R.

Док: За вс. x е в сила че $x \in (R^{-1}[B]) \iff \exists y(< y, x >\in R^{-1} \wedge y \in B) \iff \exists y(y \in B \wedge < x, y >\in (R^{-1})^{-1}) \iff \exists y(y \in B \wedge < x, y >\in R) \iff x \in (R)^{-1}[B]$

Тв Нека $\forall x(x \in X \Rightarrow x \subseteq Dom(R))$. Тогава $R[\bigcup X] = \bigcup\{R[x] \mid x \in X\}$. Тук $Rel(R)$ и X е множество. Това е коректно защото $(\forall x \in X) x \subseteq Dom(R)) \implies \bigcup X \subseteq Dom(R)$. $a \in \bigcup X \implies \exists x(x \in X \wedge a \in x) \implies a \in Dom(R)$. Сега това множество ли е?
Нека $x \in X \implies x \subseteq Dom(R) \implies R[x] \subseteq R[Dom(R)]$. Тогава ако $A \subseteq A_1 \subseteq Dom(R) \implies R[A] \subseteq R[A_1]$ и съответно $B \subseteq B_1 \subseteq Rng(R) \implies R^{-1}[A] \subseteq R^{-1}[B_1]$. Значи това е определима съвкупност $\{R[x] \mid x \in X\} \subseteq \mathcal{P}(Rng(R))$. Всичко е коректно, сега доказателството.

Док: Нека $b \in R[\bigcup X]$. Нека $a \in \bigcup X$ е т.ч. $< a, b > \in R$. Нека $x_0 \in X$ е такъв че $a \in x_0$. Тогава $b \in R[x_0]$. Следователно $b \in \bigcup\{R[x] \mid x \in X\}$

Сега обратното включване. Нека $b \in \bigcup\{R[x] \mid x \in X\}$. Нека $x_0 \in X$ е т.ч. $b \in R[x_0]$. Но $x_0 \subseteq \bigcup X$. Пак от монотонността следва че $b \in R[x_0] \subseteq R[\bigcup X]$.

$\boxed{\text{Тв}}$ Нека $Rel(R)$ и X е мн-во за което е изп. че $\forall x(x \in X \Rightarrow x \subseteq Dom(R))$. Тогава $R[\cap X] \subseteq \cap\{R[x] \mid x \in X\}$, като не винаги е в сила обратното включване. Ако допълнително $(\forall y Rng(R))(\exists! x \in Dom(R))(< x, y > \in R))$ (нещо като инективност), то тогава
$R[\cap X] = \cap\{R[x] \mid x \in X\}$.

Док: Нека $b \in R[\cap X]$. Нека $a \in \cap X$ е такова че $< a, b > \in R$. Следователно за всяко $x \in X, a \in x$. Следователно за вскяо $x \in X, b \in R[x]$. Така b принадлежи на всички елементи на $\{R[x] \mid x \in X\}$, значи $b \in \cap\{R[x] \mid x \in X\}$.

Пример: $X = \{\{a_1\}, a_2\}$ и $a_1 \neq a_2, R = \{< a_1, b_1 >, < a_2, b_2 >\}$
$\cap X = \{a_1\} \cap \{a_2\} = \emptyset, R[\cap X] = \emptyset$
$R[\{a_1\}] = \{y \mid (\exists x \in \{a_1\})(< x, y > \in R)\} = \{y \mid < a_1, y > \in R\} = \{b\}$.
Значи $R[\{a_2\}] = \{b\}, \{R[x] \mid x \in X\} = \{\{b\}\}$.
$\cap\{\{b\}\} = \{b\}$, $A = \{a\}, a = \{b\}$,
$x \in \cap A \Leftrightarrow \forall a \in A(x \in a)$

Нека $(\forall y \in Rng(R))(\exists! x \in Dom(R))(< x, y > \in R)$. Нека $b \in \cap\{R[x] \mid x \in X\}$.
Следователно за всяко $x \in X, b \in R[x]$, т.е. за всяко $x \in X$ същ $a \in x$, т.ч. $< a, b > \in R$.

$b \in Rng(R)$: $x \neq \emptyset$. Нека $x_0 \in X$. Тогава $b \in R[x_0]$. След $b \in Rng(R)$. Нека $a_0 \in x_0$ е т.ч. $< a_0, b > \in R$. Нека сега $x \in X$ е произволно и $a \in x$ е т.ч. $< a, b > \in R$. Но $< a_0, b > \in R$, от където $a_0 = a$. В частност $a_0 \in x$, но x е произволно. Следователно $a_0 \in \cap X$. Но тогава $b \in R[\cap X]$, защото $< a_0, b > \in R$ и $a_0 \in \cap X$. Така $\cap\{R[x] \mid x \in X\} \subseteq R[\cap X]$

$\boxed{< \text{Функции} >}$

$\boxed{\text{Опр}}$ Казваме че релацията R е функция,
ако $Funct(R)$, където $Funct(R) \leftrightharpoons Rel(R) \wedge \forall x \forall y \forall y'(< x, y > \in R \wedge < x, y' > \in R \Rightarrow y = y')$

1. $Funct(R) \implies Rel(R)$
2. $Funct(R), Dom(R) = A, Rng(R) \subseteq B$, то пишем $R : A \to B$
3. $Funct(R), Dom(R) \subseteq A, Rng(R) \subseteq B$, то ще казваме че R е частична функция от A към B. Ще пишем $R : A \nrightarrow B$
4. $R : A \to B$ и $Rng(R) = B$, ще казваме че R е сюрекция (епиморфизъм) на A върху B. Означаваме с $R : A \twoheadrightarrow B$
5. $R : A \to B, R$ е инекция (мономорфизъм), ако $\forall x \forall x' \forall y(x \neq x' \wedge < x, y > \in R \Rightarrow < x', y > \notin R)$. Означаваме $R : A \rightarrowtail B$

6. $R : A \to B$ е биекция, ако R е сюрекция на A в-ху B и R е инекция. Означаваме $R : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$

Понеже функциите са релации, директно се пренасят и понятията за образ и праобраз.
Ще използваме $f, g, h...$, за да означаваме че дадена релация е функция.
Ако $Func(f)$, вместо $< x, y >\in f$ ще пишем $f(x) = y$

$\boxed{\text{Следствие}}$ Нека $Func(f)$ и нека X и Y са такива мн-ва че:
$(\forall x \in X)(x \subseteq Dom(f))$ и $(\forall y \in Y)(y \subseteq Rng(f))$.
Тогава $f[\bigcup X] = \bigcup\{f[x] \mid x \in X\}$ и $f[\cap X] \subseteq \cap\{f[x] \mid x \in X\}$ (равенство не винаги се достига).
Изпълнено е че $f^{-1}[\bigcup X] = \bigcup\{f^{-1}[x] \mid x \in X\}$ и $f^{-1}[\cap X] = \cap\{f^{-1}[x] \mid x \in X\}$.
$\forall y \in Rng(R)\exists! x \in Dom(R)(< x, y >\in R)$

<u>$(\Rightarrow)$</u> Нека $Func(f^{-1})$. Нека x, x', y са т.ч. $x \neq x'$ и $< x, y >\in f$. Тогава $< y, x >\in f^{-1}$. Ако доп, че $< x', y >\in f$, то $< y, x' >\in f^{-1}$. Понеже f^{-1} е функция, то $x = x'$. Но f^{-1} е функция, т.е. $x \neq x' \implies$ Противоречие! $\implies < x', y >\notin f$ и значи f е инективна.

<u>$(\Leftarrow)$</u> Нека f е инективна. Нека x, y, y' са т.ч. $< x, y >, < x, y' >\in f^{-1}$.
Тогава $< y, x >, < y', x >\in f$ и понеже f е инективна то $y = y'$. Следователно $Func(f^{-1})$.

$\boxed{\text{Тв}}$ Нека f и g са функции.
Тогава $f \circ g$ е функция с $Dom(f \circ g) = \{x \mid x \in Dom(f) \land f(x) \in Deom(g)\}$.
За всяко $x \in Dom(f \circ g)$ е вярно $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

<u>Док:</u> $Rel(f \circ g)$. Нека $< x, y >, < x, y' >\in f \circ g$. Нека z, z' са т.ч. $< x, z >\in f \land < z', y >\in g$ и $< x, z' >\in f \land < z', y' >\in g$
$Func(f) \implies z = z' \implies < z, y >, < z, y' >\in g \implies y = y'$ (от $Func(g)$)

Нека $x \in Dom(f \circ g)$. Нека y е т.ч. $< x, y >\in f \circ g$. Нека z е т.ч. $< x, z >\in f$ и $< z, y >\in g$.
Тогава $x \in Dom(f)$ и $z = f(x)$. Но $z \in Dom(g)$, от където $f(x) \in Dom(g)$.
Сега наобратно. Взимаме $x \in Dom(f)$ и $f(x) \in Dom(g)$. Тогава $< x, f(x) >\in f$ и $< f(x), g(f(x)) >\in g$. Следователно $< x, g(f(x)) >\in f \circ g$. В частност получаваме че $x \in Dom(f \circ g)$ и понеже $Func(f \circ g)$, то $(f \circ g)(x) = g(f(x))$.

$\boxed{\text{Опр}}$ Казваме, че функциите f и g са съвместими, ако $Func(f \cup g)$.

$\boxed{\text{Опр}}$ $f : A \to B, A_1 \subseteq A$
Рестрикция на f до A_1: $f \restriction A_1 \leftrightharpoons f \cap (A_1 \times Rng(f))$

$\boxed{\text{Тв}}$ f и g са съвместими $\iff f \restriction (Dom(f) \cap Dom(g)) = g \restriction (Dom(f) \cap Dom(g))$

<u>Док:</u> *To be continued...*

Да уточним някакви неща:
$f : A \to B, A_1 \subseteq A = Dom(f)$
Рестрикция на f до A_1: $f \restriction A_1 = f \cap (A_1 \times Rng(f)) = \{< x, f(x) > \ | x \in A_1\}$

1. $Funct(f \restriction A_1)$
2. $f \restriction A_1 \subseteq f \restriction A$
3. $A_1 \subseteq A2 \subseteq A \Rightarrow f \restriction A_1 \subseteq f \restriction A_2$

$\boxed{\text{Опр}}$ f и g са съвместими функции, ако $f \cup g$ е функция.

$\boxed{\text{Тв}}$ Функциите f и g са съвместими $\Leftrightarrow f \restriction (Dom(f) \cap Dom(g)) = g \restriction (Dom(f) \cap Dom(g))$

Док: $(\to)$ Нека $Funct(f \cup g)$. Нека $u \in f \restriction (Dom(f) \cap Dom(g))$. Тогава $u =< x, y >$ като $x \in Dom(f) \cap Dom(g)$ и $y = (f \restriction (Dom(f) \cap Dom(g)))(x) = f(x)$. Poneve $x \in Dom(g)$, то $< x, g(x) >\in g$. Така $< x, f(x) >, < x, g(x) >\in f \cup g$. Понеже $Funct(f \cup g)$, то $f(x) = y = g(x)$. След. $u =< x, y >=< x, g(x) >\in g$ и понеже $x \in Dom(f) \cap Dom(g)$, то $u =< x, y >\in y \restriction (Dom(f) \cap Dom(g))$.

$(\Leftarrow)$ Нека $f \restriction (Dom(f) \cap Dom(g)) = g \restriction (Dom(f) \cap Dom(g))$. Ясно е, че $Rel(f \cup g)$. Нека $< x, y >, < x, y' >\in f \cup g$
Възможни са 3 случея:

1. $< x, y >, < x, y' >\in f$. Но $Funct(f)$, от където $y = y'$.
2. $< x, y >, < x, y' >\in g$. Подобно - получава се $y = y'$
3. $< x, y >\in f, < x, y' >\in g$. Тогава $x \in Dom(f), x \in Dom(g)$. След $x \in Dom(f) \cap Dom(g)$. Така $y = f(x) = g(x) = y'$

$\boxed{\text{Тв}}$ Нека F е множество от две по две съвместими функции. Тогава $\bigcup F$ е функция като: $Dom(\bigcup F) = \bigcup\{Dom(f) \mid f \in F\}$ $Rng(\bigcup F) = \bigcap\{Rng(f) \mid f \in F\}$

Док: Ясно е, че $Rel(\bigcup F)$. Нека $< x, y >\in \bigcup F$ и $< x, y' >\in \bigcup F$. Нека $f, f' \in F$ са такива че $< x, y >\in f$ и $< x, y' >\in f'$. Тогава $Funct(f \cup f')$, като $< x, y >, < x, y' >\in f \cup f'$. Следователно $y = y'$. Така получаваме $Funct(\bigcup F)$.

Нека $x \in Dom(\bigcup F)$. Нека y е т.ч. $< x, y >\in \bigcup F$. Нека $f_0 \in F$ е такова че $< x, y >\in f_0$. Тогава $x \in Dom(f_0)$ и следователно $x \in \bigcup\{Dom(f) \mid f \in F\}$. Нека сега $f_0 \in F$ е т.ч. $x \in Dom(f_0)$. Но $f_0 \subseteq \bigcup F$ и $\bigcup F$ е функция, следователно $Dom(f_0) \subseteq Dom(\bigcup F)$. Следователно $x \in Dom(\bigcup F)$

Лекция 5

$\boxed{\text{Опр}}$ За $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, ще казваме че f е монотонна, ако:
$(\forall X_1 \supset A)(\forall X_2 \subseteq A)(X_1 \subseteq X2 \to f(X_1) \subseteq f(X_2))$

$\boxed{\text{Опр}}$ И за монотонна $f : B \to B$, x е неподвижнда точка на f, ако $f(x) = x$

$\boxed{\text{Лема}}$ (Тарски)
Нека $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ е монотонна функция. Тогава f има неподвижнда точка.
Нещо повече, f има най-малка и най-голяма неподвижнда точка:
тоест съществуват $X_1, X_2 \in \mathcal{P}(A)$ т.ч. $f(X_1) = X_1, f(X_2) = X_2$ и за всяко $X \in \mathcal{P}(A)$ с $f(X) = X$ е изпълнено, че $X_1 \subseteq X \subseteq X_2$.

Док: Нека $\Pi = \{X \mid X \subseteq A \wedge f(X) \subseteq X\}$ Понеже $A \in \Pi$, то $\Pi \neq \emptyset$. Нека $X_1 = \bigcap \Pi$. За вс. $X \in \Pi$, $X_1 = \bigcap \Pi \subseteq X$. Понеже f е монотонна, то за вс. $X \in \Pi$, $f(X_1) \subseteq f(X) \subseteq X$. Следователно $f(X_1) \subseteq \bigcap \Pi = X_1$. Понеже $X_1 \subseteq A$, то $X_1 \in \Pi$. Отново от монотонността на f имаме, че $f(f(X_1)) \subseteq f(X_1)$. Значи $f(X_1) \in \Pi$. Следователно $X_1 \subseteq f(X_1)$. От тук $f(X_1) = X_1$ и така X_1 е неподвижнда точка на f. Ясно се вижда че: $f(X) = X \implies x \in \Pi \implies X_1 = \bigcap \Pi \subseteq X \implies X_1$ е най-малката неподвижна точка на f
За най-голяма неподвижна точка - за домашна!

(от Тинко)

$\boxed{<\text{ Равномощни множества. Сравняване на множества по мощност }>}$

$\boxed{\text{def}}$ Казваме че A и B са равномощни, ако съществува биекция на A върху B,
тоест $\exists f(f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B)$. Означения: $|A| = |B|$ или $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$
Съответно $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{B}} \leftrightharpoons \neg(\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}})$

Казваме че мощността на A не надминава мощността на B, ако $\exists f(f : A \rightarrowtail B)$.
Пишем $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$.

Казваме че мощността на A е строго по-малка от мощността на B, ако $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} \wedge \overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{B}}$.
Пишем $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$.

$\boxed{\text{Св}}$

1. $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}$, от $Id_A : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A$
2. $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} \implies \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}}$
3. $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} \wedge \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{C}} \implies \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}}$

Док 2: Нека $f_0 : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$ (свидетел за съществуващата биекция), тогава $f_0^{-1} : B \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A$.
Значи $\exists f'(f' : B \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A)$

Док 3: $\exists f(A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B)$ и $\exists f(B \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow C)$. Нека вземем свидетели: $f_0 : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B, f_1 : B \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow C$.
Нека $h = f_0 \circ f_1$, т.е. $h(x) = f_1(f_0(x))$. Вижда се че $h : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow C$. Следователно $\exists f'(f' : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow C)$.

Нека A и c са произволни множества. Тогава $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A \times \{c\}}}$ и $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{\{c\} \times A}}$
Дефинираме $f : f(a) =< a, c >$ за вс. $a \in A$. $f = \{u \mid \exists a(a \in A \wedge u =< a, < a, c >>)\} =$ $\{< a, c > \mid a \in A\}$, съответно тук отделяме $u \in A \times \{c\}$. **idk???**

$\boxed{\text{Тв}}$ $A \neq \emptyset \iff \neg \exists B \forall x(x \in B \Leftrightarrow \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{A}})$

Док: Нека $A \neq \emptyset$. $a_0 \in A$. Да доп. че $\exists B \forall x(x \in B \Leftrightarrow \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{A}})$. Нека B е свидетел за съществуването $\forall x(x \in B \Leftrightarrow \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{A}})$. И нека вземем $B_0 \leftrightharpoons \{w \mid w \in B \wedge \exists c(w = A \times \{c\})\}$.
Значи $Rel(\bigcup B_0)$.
Нека t е произволно множеството, тогава $A \times \{t\} \in B_0$. Значи за $< a_0, t >\in \bigcup B_0$.
Тогава $t \in Rng(\bigcup B_0)$. Така, $\forall t(t \in Rng(\bigcup B_0))$ - абсурт! (от допускането че B_0 съществува).

Допускането че $A \neq \emptyset$ беше съществено.
Ако $A = \emptyset$, то $\exists B(x \in B \Leftrightarrow \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{A}})$. И единствената възможност е $B = \{\emptyset\}$

$\boxed{\text{Тв}}$ $\forall A \forall B \exists A' \exists B'(\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A'}} \wedge \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{B'}} \wedge A' \cap B' = \emptyset)$
Ще дефинираме $\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} \leftrightharpoons \overline{\overline{A' \cup B'}}$. Как го постигаме?
Взимаме $c_1 \neq c_2$ и тогава $A' \leftrightharpoons A \times \{c_1 c1\}$ и $B' \leftrightharpoons B \times \{c_2\}$. А $A' \cap B' = \emptyset$

$\boxed{\text{Св}}$ Ако $\overline{\overline{A'}} = \overline{\overline{A''}} \wedge \overline{\overline{B'}} = \overline{\overline{B''}} \wedge A' \cap B' = \emptyset \wedge A'' \cap B'' = \emptyset \implies \overline{\overline{A' \cup B'}} = \overline{\overline{A'' \cup B''}}$

Док: Взимаме свидетели $f_1 : A' \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A''$ и $f_2 : B' \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B''$, тогава $f_1 \cup f_2$ е функция, защото f_1 и f_2 са съвместими. Съответно $Dom(f_1 \cup f_2) = Dom(f_1) \cup Dom(f_2) = A' \cup B'$. Аналогично за за $Rng(f_1 \cup f_2)$

$\boxed{\text{def}}$ Бихме искали да го дефинираме така $\overline{\overline{A}}.\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A \times B}}$.
Пак ще вземем равномощни на A и B. $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A'}} \wedge \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{B'}} \implies \overline{\overline{A \times B}} = \overline{\overline{A' \times B'}}$.

$\boxed{\text{def}}$ Ами степенуване - k^n ? Ако $\overline{\overline{A}} = k$ и $\overline{\overline{B}} = n$, то това ще са всички функции от B в A.
Искаме да покажем $\overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}} = \overline{\overline{B_A}}$, където $B_A = \{f \mid f : B \to A\}$. $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A'}} \wedge \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{B'}} \implies \overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}} = \overline{\overline{B'_{A'}}}$

$\boxed{\text{Задачи}}$

1. $\forall A \exists A'(\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A'}} \wedge A \cap A' = \emptyset)$
2. Нека $A \cap B = \emptyset$, тогава $\overline{\overline{{}^{A \cup B}C}} = \overline{\overline{{}^{A}C}} \times \overline{\overline{{}^{B}C}}$
3. $2 \leftrightharpoons \{0, 1\}$, където $0 \leftrightharpoons \emptyset$, $1 \leftrightharpoons \{\emptyset\}$
4. $\overline{\overline{A_2}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$
5. $\overline{\overline{(A \times B)_C}} = \overline{\overline{A_{B_C}}}$

$\boxed{\text{Т}}$ (Кантор-Шрьодер-Берщайн) $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} \wedge \overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}} \implies \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$

Док: Нека $f : A \rightarrowtail B, g : B \rightarrowtail A$. Търсим биекция h. Можем да дефинираме $h \leftrightharpoons (f \upharpoonright X) \cup (h^{-1} \upharpoonright (A \setminus X))$, за някое $X \subseteq A$. Как да вземем такова X?
Трябва ни $A \setminus g[B \setminus f[x]] = X$ (търсим неподвижна точка?).
Дефинираме $\mathcal{F} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, за $X \subseteq A$ полагаме $\mathcal{F}(X) \leftrightharpoons A \setminus g[B \setminus f[x]]$ и твърдим че $\mathcal{F}$ е монотонно. Наистина нека $X_1 \subseteq X_2 \subseteq A$ и $f[X_1] \subseteq f[X_2]$. Значи $B \setminus f[X_2] \subseteq B \setminus f[X_1] \subseteq B$ и $g[B \setminus f[X_2]] \subseteq g[B \setminus f[X_1]] \subseteq A$ $A \setminus g[B \setminus f[X_1]] \subseteq A \setminus g[B \setminus f[X_2]] \subseteq A$.
$\mathcal{F}(X_1) \subseteq \mathcal{F}(X_2)$. Следователно от Лемата на Тарски за неподвижната точка - $\mathcal{F}$ ма неповижна точка. Нека X_0 е неподвижна точка на $\mathcal{F}$, т.е. $X_0 \subseteq A$ и $\mathcal{F}(X_0) = X_0$.
$A \setminus g[B \setminus f[X_0]] = X_0$ и $A \setminus X_0 = g[B \setminus f[X_0]] = x_0$. Това може ли да е вярно за произволно ножество? Не, защото $X_0 \subseteq A$, т.е. $Rng(g) \subseteq A$
Ние дефинирахме $h \leftrightharpoons (f \upharpoonright X) \cup (h^{-1} \upharpoonright (A \setminus X))$. Това е възможно защото $Dom(g^{-1}) = Rng(g)$ и $A \setminus X_0 \subseteq Dom(g^{-1})$. Каква е дефиниционната област на h? $Dom(h) = Dom(f \upharpoonright x_0) \cup Dom(g^{-1} \upharpoonright (A \setminus X_0)) = X_0 \cup (A \setminus x_0) = A$
$Rng(h) = Rng(f \upharpoonright X_0) \cup Rng(g^{-1} \upharpoonright (A \setminus X_0)) = f[X_0] \cup (B \setminus X_0) = B$. Това което се случва е че ако $Dom(f \upharpoonright X_0) \cap Dom(g^{-1} \upharpoonright (A \setminus X_0)) = \emptyset$ и $Rng(f \upharpoonright X_0) \cap Rng(g^{-1} \upharpoonright (A \setminus X_0)) = \emptyset$ и те са инекции, е в сила твърдението че тяхното обединение също е инекция. Така теоремата е доказана.

Лекция 6

$\boxed{\text{Т}}$ В $\mathcal{ZF}$ следните са еквивалентни:

- $\forall A \forall B(\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} \vee \overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}})$
- Аксиомата за избора

$\boxed{\text{Т за междинното множество}}$
Нека $A \subseteq B \subseteq C$. Тогава ако $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}}$, то $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ и $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{C}}$

<u>Док:</u> $A \subseteq B, B \subseteq C, \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}}$. Тогава: $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$. $B \subseteq C \implies \overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{C}}$. Нека $f : B \rightarrowtail C$ и $g : C \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow A$, тогава $h \leftrightharpoons f \circ g$ и $h : B \to A$. $h(x_1) = h(x_2) \implies g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, g е инекция и $f(x_1) = f(x_2)$ - инекция. Тоест $x_1 = x_2$. $g : B \to A$, т.е. $\overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}}$. Получаваме $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$ (от Т на К.Ш.Б)

$\boxed{\text{Т на Кантор за степенното множество}}$ $\forall A(\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}})$

<u>Док:</u> 1) $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$?
Дефинираме $f(a) = \{a\}$ за $a \in A$. Или по друг начин записано $f \leftrightharpoons \{z \mid z \in A \times \mathcal{P}(A) \wedge \exists x \exists y(z =< x, y > \wedge x \in A \wedge y = \{y\})\}$
2) $\neg \exists f(f : A \twoheadrightarrow \mathcal{P}(A))$
Да доп че $\exists f(f : A \twoheadrightarrow \mathcal{P}(A))$. Нека $g : A \twoheadrightarrow \mathcal{P}(A)$ е свидетел за това съществуване. Нека $B \leftrightharpoons \{x \mid x \in A \wedge x \notin g(x)\}$, $B \subseteq A$, т.е. $B \in \mathcal{P}(A), \exists x(g(x) = B)$. Нека $x_0 \in A$ и $g(x_0) = B$
1) $x_0 \in g(x_0)$. Тъй като $g(x_0) = B$, то $x_0 \in B$. Тогава $x_0 \notin g(x_0)$. Знаем че $x_0 \in g(x_0) \implies x_0 \notin g(x_0)$. Следователно $x_0 \notin g(x_0)$, но $x_0 \in A$ и от деф. на B заключваме $x_0 \in B$. Тъй като $g(x_0) = B$, то $x_0 \in g(x_0)$. Тогава $x_0 \notin g(x_0) \implies x_0 \in g(x_0) \implies$ Противоречие!
Така получаваме $x_0 \in g(x_0) \iff x_0 \notin g(x_0)$, което е противоречие!

Щом $\neg \exists f(f : A \twoheadrightarrow \mathcal{P}(A))$, значи $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$.

$\neg \exists V \forall x(x \in V)$, да допуснем че $\exists V \forall x(x \in V)$.
Нека вземем такова V, тогава от $\mathcal{P}(V) \leq V, \overline{\overline{\mathcal{P}(V)}} \leq \overline{\overline{V}}$ и $\overline{\overline{V}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(V)}} \implies$ противоречие! Получаваме го от $\overline{\overline{V}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(V)}} \implies \overline{\overline{V}} \leq \overline{\overline{\mathcal{P}(V)}}$, т.е. съществува биекция - абсурд!

$\boxed{\text{Тв}}$ $\neg \exists A \forall x(\exists y \in A)(\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}})$

<u>Док:</u> Да допуснем, че $\exists A \forall x(\exists y \in A)(\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}})$. Нека A_0 е свидетел за съществуването, т.е. A_0 е такова че $\forall x(\exists y \in A_0)(\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}})$. Нека разгледаме $\bigcup A_0$. Нека x е произволно множество, т.ч. $(\exists y \in A_0)(\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}})$. $y \subseteq A_0, \overline{\overline{y}} \leq \overline{\overline{\bigcup A_0}}$. От тук получаваме $\overline{\overline{x}} \leq \overline{\overline{A_0}}$. В частност за $x = \mathcal{P}(\bigcup A_0)$ и $\overline{\overline{\mathcal{P}(\bigcup A_0)}} \leq \overline{\overline{\bigcup A_0}}$ - противоречие!

$\boxed{< \text{Частични наредби} >}$

$\boxed{\text{Опр}}$ Нека R е бинарна релация. Казваме че:

- R е над A, ако $R \subseteq A \times A$
- R е рефлексивна в A, ако $\forall x(x \in A \Rightarrow < x, x > \in R)$
- R е антисиметрична, ако $\forall x \forall y(< x, y > \in R \wedge < y, x > \in R \Rightarrow x = y)$
- R е асиметрична, ако $\forall x \forall y(< x, y > \in R \Rightarrow < y, x > \notin R)$
- R е транзитивна, ако $\forall x \forall y \forall z(< x, y > \in R \wedge < y, z > \in R \Rightarrow < x, z > \in R)$
- R е ирефлексивна, ако $\forall x(x \in A \Rightarrow < x, x > \notin R)$

$\boxed{\text{Тв}}$ Нека R е бинарна релация над A. Тогава:

- R е рефлексивна в $A \iff id_A \subseteq R$
- R е транзитивна $\iff R \circ R \subseteq R$
- R е антисиметрична $\iff R \cap R^{-1} \subseteq id_A$
- R е асиметрична $\iff R \cap R^{-1} = \emptyset$
- R е ирефлексивна $\iff R \cap id_A = \emptyset$

$\boxed{\text{Опр}}$ R е частична наредба в A, ако R е над A, ако R е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна в A. Тогава наредената двойка $< A, R >$ ще наричаме частично наредено множество.

Вярно ли е че $\forall A \exists R(< A, R > -$ч.н.м.)? Да - ${id_A}^{-1} = id_A$

$\boxed{\text{Опр}}$ Ако $< A, R >$ е частично наредено множество, $x, y \in A$. Казваме че x и y са R-сравними, ако $< x, y > \in R \vee < y, x > \in R$.

<u>Заб:</u> "$< A, R >$ е ч.н.м." е определимо свойство - $\phi(A, R)$.
Ако $< A, R >$ - ч.н.м, $A_1 \subseteq A \implies < A_1, R \cap (A_1 \times A_1) >$ - тази наредба се нарича индуцирана наредба в A_1

$\boxed{\text{Опр}}$ R е строга частична наредба в A ако R е над A, R е антисиметрична и транзитивна. (+ ирефлексивност). Тогава $< A, R >$ - строго частично наредено множество.

$\boxed{\text{Тв}}$ Нека R е релация над A, която е асиметрична. Тогава R е ирефлексивна.

<u>Док:</u> Нека $R \subseteq A \times A$ е асиметрична, но не е ирефлексивна. Тоест $\exists x(x \in A \wedge < x, x > \in R)$. Нека a е свидетел за това, т.е. $a \in A \wedge < a, a > \in R$. Тогава по асиметричността на R получаваме, че $< a, a > \notin R$. Противоречие! $\implies R$ е ирефлексивна.

Вярно ли е че $\forall A \exists R(R$ - строга ч.н. в $A)$? Да това е $\emptyset$

$\boxed{\text{Тв}}$ Нека R е ралация над A. Ако R е частична наредба в A, то $R \setminus id_A$ е строга частична наредба в A. Ако R е с.ч.н. в A, то $R \cup id_A$ е ч.н. в A.

Док: 1) Нека R е ч.н. в A. Тогава $(R \setminus id_A) \cap (R \setminus id_A)^{-1} = (R \setminus id_A) \cap (R^{-1} \setminus {id_A}^{-1}) = (R \setminus id_A) \cap (R^{-1} \setminus id_A) = (R \cap R^{-1}) \setminus id_A \subseteq id_A \setminus id_A = \emptyset$, защото R е антисиметрична, т.е. $R \cap R^{-1} \subseteq id_A$. Следователно $R \setminus id_A$ е асиметрична.
Сега док че тя е транзитивна. Нека $< x, y >, < y, z > \in R \setminus id_A$. Но тогава $< x, y >, < y, z > \in R$ и от транзитивността на R имаме, че $< x, z > \in R$. Да допуснем, че $< x, z > \in id_A$, тогава $x = z$. Така $< x, y >, < y, x > \in R$. От където $y = x$, т.е. $< x, y > \in id_A$. Но $< x, y > \in R \setminus id_A \implies$ Противоречие! Следователно $< x, z > \notin R \setminus id_A$. Тогава $R \setminus id_A$ е транзитивна. И така получаваме че е с.ч.н в A.

2) Нека R е с.ч.н. в A. Тогава $id_A \subseteq R \cup id_A$, от където $R \cup id_A$ е рефлексивна в A. Понеже R е асиметрична, то $R \cap R^{-1} = \emptyset$. Тогава $(R \cup id_A) \cap (R \cup id_A)^{-1} = (R \cup id_A) \cap (R^{-1} \cup {id_A}^{-1}) = (R \cup id_A) \cap (R^{-1} \cup id_A) = (R \cup R^{-1}) \cup id_A = \emptyset \cup id_A = id_A$. В частност $R \cup id_A$ е антисиметрична. Накрая имаме, че $(R \cup id_A) \circ (R \cup id_A) = R \circ R \cup R \circ id_A \circ R \cup id_A \circ id_A = R \circ R \cup R \cup R \cup id_A \subseteq R \cup id_A$, защото R е транзитивна $\implies R \cup id_A$ е транзитивна. Така получаваме че $R \cup id_A$ е ч.н.

Ако R е ч.н. в A, то $R = (R \setminus id_A) \cup id_A$, като $R \setminus id_A$ е строга ч.н. в A. R - ч.н. в $A \iff$ съществува S - с.ч.н. в A, т.ч. $R = S \cup id_A$.
Подобно, ако S е с.ч.н. в A, то $S = (S \cup id_A) \setminus id_A$, като $S \cup id_A$ е ч.н. в A. S - с.ч.н. в $\iff$ съществува R - ч.н. в A, т.ч. $S = R \setminus id_A$.

$\boxed{\text{Тв}}$ Ако $< A, R >$ е (с.)ч.н. $\iff < A, R^{-1} >$ - (с.)ч.н. множество. $< A, R^{-1} >$ наричаме обратна наредба на R.

Док: R е рефлексивна в $A \iff id_A \subseteq R \iff {id_A}^{-1} \subseteq R^{-1} \iff id_A \subseteq R^{-1} \iff R^{-1}$ е рефлексивна в A.
R е асиметрична $\iff R \cap R^{-1} = \emptyset \iff R^{-1} \cap R = \emptyset \iff R^{-1} \cap (R^{-1})^{-1} = \emptyset \iff R^{-1}$ е асиметрична
R е антисиметрична $\iff R \cap R^{-1} \subseteq id_A \iff R^{-1} \cap (R^{-1})^{-1} \iff R^{-1}$ е антисиметрична
R е транзитивна $\iff R \circ R \subseteq R \iff (R \circ R)^{-1} \subseteq R^{-1} \iff R^{-1} \circ R^{-1} \subseteq R^{-1}$ е транзитивна

$\boxed{\text{Опр}}$ Нека $< A, R >$ - ч.н.м., В $\subseteq A$ и $a \in A$. Казваме че:

- a е горна граница за B в $< A, R >$, ако $\forall x (x \in B \Rightarrow < x, a > \in R)$
- a е най-голям елемент на B, ако $a \in B$ и a е горна граница за B
- a е долна граница за B в $< A, R >$, ако a е горна граница за B в $< A, R^{-1} >$
- a е най-малък елемент на B в $< A, R >$, ако a е най-голям елемент на B в $< A, R^{-1} >$
- a е точна горна граница за B в $< A, R >$, ако a е горна граница за B в $< A, R >$ и a е най-малкия елемент на множеството от горни граници за B в $< A, R >$ в $< A, R >$. Означава се $a = sup(B) < A, R >$. (Тук ч.н.м. го записа на долния ред ??)
- a е точна долна граница за B в $< A, R >$, ако a е точна горна граница за B в $< A, R^{-1} >$. Означава се $a = inf(B) < A, R >= sup(B) < A, R^{-1} >$
- a е максимален елемент на B в $< A, R >$, ако $\forall x (x \in B \wedge < a, x > \in R \Rightarrow x = a)$
- a е минимален елемент на B в $< A, R >$, ако е максимален е $< A, R^{-1} >$

Нова лекция!
Предния път разглеждахме наредени множества.

$< A, \subseteq_A >$ - ч.н.м. (правим ограничение до елементите на A)
$x \subseteq_A y \leftrightharpoons x, y \in A \wedge x \subseteq y$, ако $B \subseteq A$, то не е задължително B да има точна горна граница.

Пример: $A = \{\{0\}, \{1\}\}$ и $B = A$. B дори няма горна граница.
Тоест $\neg \exists x (x \in A \wedge \forall y \in B (y \subseteq_A x))$

Това не е така при $< \mathcal{P}(A), \subseteq_{\mathcal{P}(A)>, B \subseteq \mathcal{P}(A)}$. Тогава $\bigcup B$ е такова множество, че:

1. $\forall x \in B (x \subseteq \bigcup B)$

2. ако C е т.ч. $\forall x \in B (x \subseteq C)$, то $\bigcup B \subseteq C$
   $a \in \bigcup B \implies$ има $x \in B$ т.ч. $a \in x \implies a \in x \subseteq C$

3. $\bigcup B \in \mathcal{P}(A)$, $(\forall x \in B)(x \in \mathcal{P}(A)) \implies (\forall x \in B)(x \subseteq A) \implies \bigcup B \subseteq A \implies \bigcup B \in \mathcal{P}(A) \implies (\forall x \in B)(x \subseteq_{\mathcal{P}(A)} \bigcup B)$ и $\bigcup B$ е най-малкото с това св-во по отношение на $\subseteq_{\mathcal{P}(A)}$. $\bigcup B$ е т.г.гр. за B в $< \mathcal{P}(A), \subseteq_{\mathcal{P}(A)>)}$

$\boxed{\text{Опр}}$ Нека $< A, R >$ е ч.н.м., $B \subseteq A$. Казваме, че B е верига в $< A, R >$, ако всеки два елемента са R-сравними. Тоест $(\forall x \in B)(\forall y \in B)(< x, y > \in R \vee < y, x > \in R)$
B верига, ако $< B, R \cap (B \times B) >$ е линейно наредено множество.
Пример: $\emptyset$ е верига във всяко ч.н.м.
$A_B = (A \to B) = \{f \mid f : A \to B\}$
Кои са непразните вериги в $(A_B, \subseteq_{A_B})$? Тв? Никоя една верига няма повече от 1 елемент.
Тоест всички вериги имат вида $\{f\}, f : A \to B$

$(A \nrightarrow B) = \{f \mid f : A \nrightarrow B\}, Dom(f) \subseteq A, Rng(f) \subseteq B$
Всяка верига в $< (A \nrightarrow B), \subseteq_{(A \nrightarrow B)} >$ има точна горна граница.

<u>Док:</u> Нека $\Lambda \subseteq (A \nrightarrow B)$ е верига. Тогава:

1. $(\forall f \in \Lambda)(f \subseteq \bigcup \Lambda)$

2. За всяко C, за което $(\forall f \in \Lambda)(f \subseteq C)$ е в сила че $\bigcup \Lambda \subseteq C$

3. $\bigcup \Lambda \in (A \nrightarrow B)$. Знаем, че Λ е верига $\implies \forall f, g \in \Lambda (f \subseteq g \vee g \subseteq f) \implies (\forall f, g \in \Lambda)(Funct(f \cup g)) \implies \Lambda$ е мн-во от съвместими функции $\implies Funct(\bigcup \Lambda) \wedge Dom(\bigcup \Lambda) = \bigcup \{Dom(f) \mid f \in \Lambda\} \wedge Rng(\bigcup \Lambda) = \bigcup \{Rng(f) \mid f \in \Lambda\}) \implies Funct(\bigcup \Lambda) \wedge Dom(\bigcup \Lambda) \subseteq A \wedge Rng(\bigcup \Lambda) \subseteq B \implies \bigcup \Lambda \in (A \nrightarrow B)$

$\boxed{\text{Тв}}$ Нека $< A, R >$ е ч.н.м. Нека $\rfloor = \{B \mid B$ е верига в $< A, R >\}$. Тогава всяка верига в $< \mathcal{C}, \subseteq_{\mathcal{C}} >$ има точна горна граница.
<u>Док:</u> Нека Λ е верига в $< \mathcal{C}, \subseteq_{\mathcal{C}} >$

1. $(\forall B \in \Lambda)(B \subseteq \bigcup \Lambda)$

2. $\forall X((\forall B \in \Lambda)(B \subseteq X) \Rightarrow \bigcup \Lambda \subseteq X)$

3. $\bigcup \Lambda$ е верига в $< A, R >$, т.е. $\bigcup \Lambda \in \mathcal{C}$

3) $(\forall B \in \Lambda)(B \subseteq A) \implies \bigcup \Lambda \subseteq A$.
Нека $x, y \in \bigcup \Lambda$. Нека $B_1, B_2 \in \Lambda$ са т.ч. $x \in B_1$ и $y \in B_2$. Но Λ е верига: така без ограничение можем да считаме, че $B_1 \subseteq B_2$ тогава $x, y \in B_2$; Но B_2 е верига в $< A, R >$, където x и y са R-сравними. Следователно $\bigcup \Lambda$ е верига в $< A, R >$

$\boxed{\text{Опр}}$ Казваме че ч.н.м. $< A_1, R_1 >$ и $< A_2, R_2 >$ са изоморфни, ако същ. биекция $f : A_1 \to A_2$, т.ч. $(\forall x \in A_1)(\forall y \in A_1)(< x, y > \in R_1 \Leftrightarrow < f(x), f(y) > \in R_2)$, $< A_1, R_1 > \approx < A_2, R_2 >$
...

Ще казваме, че $< A_1, R_1 >$ е изоморфно вложима в $< A_2, R_2 >$, ако съществува инекция $f : A_1 \to A_2$, която запазва наредбата: $(\forall x \in A_1)(\forall y \in A_1)(< x, y > \in R_1 \Rightarrow < f(x), f(y) > \in R_2)$
$< A_1, R_1 > \precsim < A_2, R_2 >$

$\boxed{\text{Тв}}$ Нека $< A, R >$ е ч.н.м. Тогава $< A, R > \precsim < \mathcal{P}(A), \subseteq_{\mathcal{P}(A)} >$.

<u>Док:</u> TODO!

$\boxed{< \text{Добре наредени множества} >}$

$\boxed{\text{Опр}}$ Казваме, че ч.н.м. $< W, \leq >$ е добре наредено множество, ако всяко непразно подмножество на W има най-малък относно
$\leq$. $\forall B(B \neq \emptyset \wedge B \subseteq W \Rightarrow \exists y(y \in B \wedge (\forall x \in B)(y \leq x)))$

<u>Заб:</u> ще използваме $\leq, <$ за да отбелязваме релация за наредба.

<u>Еквивалентно:</u> $< W, \leq >$ е д.н.м. в което всяко непразно множество има минимален елемент.

<u>Примери за д.н.м:</u>

1. $< \omega, \leq >$, където $\omega = \{x \mid x \text{ е естествено число }\}$

2. $n <_1 k \leftrightharpoons (2/n \wedge \neg(2/k)) \vee (2/(k - n) \wedge n < k)$

3. Всяко крайно л.н.м.

4. $< W, \leq >$ е д.н.м. то при $B \subseteq W \implies < B, \leq \cap (B \times B) >$ - д.н.м.

$\boxed{\text{Опр}}$ Казваме че $x \in W$ е граничен, ако $x \neq 0_W$ и нев е наследник на никой в W.
$Limit(x) \leftrightharpoons x \neq 0_W \wedge \neg \exists y \in W(x = S(y))$

$\boxed{\text{Опр}}$ Нека $x \in W$. Начален сегмент на x е мн-вото $seg(x) \leftrightharpoons \{y \mid y < x\}$

$\boxed{\text{Опр}}$ I е начален елемент на $< W, \leq >$, ако $I \leq W$ и е затворено надолу отн. $\leq$:
$(\forall x \in I)\forall y(y \leq x \Rightarrow y \in I)$

От Тинко:

A е безкрайно $\implies$ същ. $A_0, A_0 \subseteq A, A_0$ е изброимо
$a_0 \in A, A \setminus \{a_0\}$ не е крайно, поради което то е безкр. Можем да продължим да повтаряме този процес. (използваме аксиомата за избора в някаква слаба форма)

- $\mathbb{Z}$ - изброимо много
- $\mathbb{Q}$ - изброимо много

Можем да представим рационалните числа $\mathbb{Q}$ като пълно двоично дърво, свърхове съответно:

- $Root \leftrightharpoons 1/1$
- $Left = p/p + q, whereRoot \leftrightharpoons p/q$
- $Right = p + q/q, whereRoot \leftrightharpoons p/q$

Те са изброимо много (доказваме с индукция по $p+q$), защото върховете са изброимо много. Всички пътища в пълното двоично дърво от друга страна - са неизброимо много (доказваме с диагонален метод).

$\boxed{\text{Тв}}$ Реалните числа са неизброимо много.

Док: Всяко реално число $r \in (0, 1]$ има десетично представяне $r = 0.r_1r_2...r_n$,
където $r_n \in \{0, 1, ..., 9\}$.

Проблем! 1/2 има два записа:

- $1/2 = 0, 50000...$
- $1/2 = 0, 49999...$

Забраняваме записите от вида $0, r_1r_2...r_n0000000...$. Така се отърваваме от нулите, които могат да са произволно много. ...

$\boxed{\text{Тв}}$ $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(\mathbb{N})}}$

$\boxed{\text{Лема за горното Тв}}$ Нека A е множество, $A_0 \subseteq A$ и A_0 е изброимо. Ако B е изброимо и $B \cap A = \emptyset$, то $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A \cup B}}$

$\boxed{\text{Тв}}$ $\overline{\overline{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}}$

Лекция 7

Заб! $\mathcal{AL}_0$ вместо първата буква от иврид - алеф??

Ще докажем че $\overline{\overline{(0,1] \times (0,1]}} = \overline{\overline{(0,1]}}$. Ще забраним представяния, чийто запис се стабилизират на 0. Тоест $\neg \exists k \forall n > k (x_n = 0)$. Тогава $0.x_0 y_0 x_1 y_1$ също няма да се стабилизира на 0, но ще загубим свойството за сюрекция.

$\mathcal{AL}_0^n = \mathcal{AL}_0$ Нека въведем $\mathbb{N}_n \leftrightharpoons \mathbb{N}_{n-1} \times \mathbb{N}$. Тогава крайните редици $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_2 \cup ...$?? $\mathcal{AL}_0$ и са изброими.

Нека означим множеството на онези редици $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ естествени числа, т.ч. съществува $\lim_{n \to \infty} a_n$, т.е. A е множество от сходящи редици от естествени числа.

$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ от ествествени числа е сходяща $\iff$ същ. $k : \forall m (a_k = a_{k+m})$

Правим съпоставката $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е сходяща $\to (a_0, a_1, ..., a_k)$, $a_{k+1} \neq a_k$

Да разгледаме множеството на полиномите с цели коеф. (с 1 неизвестно) - $\mathcal{P}$. Това са редиците от цели числа съответстващи на коефициенти. Тоест $\overline{\overline{\mathcal{P}}} = \mathcal{AL}_0$. Тоест те са изброимо много. Следователно онези реални числа, които са корени на полином със цели коеф. и степен ≥ 1 са изброимо много. Тоест алгебричните числа (Alg) са изброимо много. $\mathbb{R} \setminus Alg$ са трансцендентните числа. Те са колкото реалните.

Колко са множествата от всички редици $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ от реални числа? Това е броя на всички функции $\mathbb{N}_{\mathbb{R}}$

$\boxed{\text{Континиум хипотеза (Кантор)}}$ Няма множество $A \subseteq \mathbb{R} : \mathcal{AL}_0 < \overline{\overline{A}} < c$

<u>1939, К. Гьодел</u> Ако $\mathcal{ZF}$ е непротиворечива, то и $\mathcal{ZF} + \mathcal{CH}$ също е непротиворечива.
<u>1963</u>

<u>Хипотеза на Линденбаум и Тарски</u> $\mathcal{CH} \Rightarrow \mathcal{AC}$ (доказана от В. Серпински през 1947)

<u>Обобщена $\mathcal{CH}$:</u> Ако A е безкрайно, то няма мн-во B, т.ч. $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$

$\boxed{\text{def}}$ Индексирана фамилия от множества $I \neq \emptyset$, f - функция с $Dom(f) = I$. Казваме че имаме индекси $\{f(i)\}_{i \in I}$, $\{A_i\}_{i \in I}$. $\bigcup_{i \in I} f(i) \leftrightharpoons \bigcup Rng(f)$.

$\forall x (x \in \bigcup_{i \in I} f(i) \Leftrightarrow (\exists i \in I)(x \in f(i)))$ $\bigcap_{i \in I} f(i) \leftrightharpoons \bigcap Rng(f)$ $\forall x (x \in \bigcap_{i \in I} f(i) \Leftrightarrow (\forall i \in I)(x \in f(i)))$

$\boxed{\text{Задача}}$ Нека J е безкрайно множество и $\{A_j\}_{j \in J}$ е индексирана фамилия от множества от естествени числа. $A_j \subseteq \mathbb{N}$. Докажете че съществува най-много изброимо $I \subseteq J$, такова че $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{j \in J} A_j$ и $\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{j \in J} A_j$

$<$ Добре наредени множества $>$

$< W, \leq >$ - д.н.м. , ако $\leq$ е ч.н. в W и всяко непразно подмножество на W има най-малък елемент относно $\leq$. Този елемент означаваме с $0_w = min_{\leq}(W)$. $S(x) = min\{y \mid x < y\}$ е наследник на x, ако такъв има.

x е граничен: $Limit(x) \leftrightharpoons x \neq 0_w \wedge \forall y \in W(x \neq S(y))$

Начален сегмент на $x \in W$ е $seg(x) \leftrightharpoons \{y \mid y \in W \wedge y < x\}$

- $seg(0_w) = \emptyset$
- $seg(S(x)) = seg(x) \cup \{x\}$
- $Limit(x) \Rightarrow seg(x) = \bigcup\{seg(y) \mid y \in seg(x)\}$

$I \subseteq W$ е начален сегмент, ако е затворено над W относно $\leq$: $(\forall x \in I)(\forall y \leq x)(y \in I)$

$\boxed{\text{Тв}}$ Нека $< W, \leq >$ е д.н.м. и $I \subseteq W$ е начален сегмент. Тогава $I = W$ или $I = seg(x)$ за някое $x \in W$.

Док: Нека $I \neq W$ е начален елемент. Тогава $W \setminus I \neq \emptyset$ и нека $x = min_{\leq}(W \setminus I)$. Нека $y \in I$. Да предположим че $y \notin seg(x)$, т.е. $\neg(y < x)$. Тогава $x \leq y$, защото W е добре наредено. Но I е начален елемент и $y \in I$ - следователно $x \in I$. Противоречие! Следователно $y \in seg(x)$ и $I \subseteq seg(x)$.

Нека $y \in seg(x)$. Тогава $y < x$, от където $y \notin W \setminus I$. Следователно $y \in I$. Значи $seg(x) \subseteq I$.

Така $I = seg(x)$.

$\boxed{\text{Опр}}$ Нека $< W, \leq >$ е д.н.м. . Казваме, че $B \subseteq W$ е $\leq$-индуктивно, ако:
$\forall x(\forall y(y < x \Rightarrow y \in B) \Rightarrow x \in B)$ или еквивалентното - $\forall x(seg(x) \subseteq B \Rightarrow x \in B)$
$\boxed{\text{Тв}}$ Нека $< W, \leq >$ е д.н.м. . Тогава W е единственото $\leq$-индуктивно множество.

Док: Нека $B \subseteq W$ е $\leq$-индуктивно и да допуснем, че $B \neq W$. Тогава $W \setminus B \neq \emptyset$ и нека $x = min_{\leq}(W \setminus B)$. Тогава за всяко $y < x$ имаме, че $y \notin W \setminus B$ и така $y \in B$. Тоест $seg(x) \subseteq B$. Но B е $\leq$-индуктивно, значи $x \in B$. Противоречие! Защото $x \in W \setminus B$. Следователно $B = W$.

$\boxed{\text{Тв}}$ Нека $< W, \leq >$ е линейно наредено мн-во и единственото $\leq$-индуктивно подмножество на W е W. Тогава $< W, \leq >$ е д.н.м.

Док: Нека $B \subseteq W$. Нека C е множество от строгите долни граници на B:
$C = \{t \in W \mid (\forall x \in B)(t < x)\}$
Тогава $B \cap C = \emptyset$. Възможни са 2 случея:

1. C е $\leq$-индуктивно. Следователно $C = W$ и значи $B = \emptyset$
2. C не е $\leq$-индуктивно. Значи $\exists x(seg(x) \subseteq C \wedge x \notin C)$. Нека $t \in W$ е такъв че $t \notin C$ и $seg(t) \in C$. Значи $\exists x(x \in B \wedge \neg(t < x))$. Нека x_0 е представител. Но $< W, \leq >$ е л.н.м. и така $x \leq t$. Но ако $x < t$, то $x \in seg(t) \subseteq C$ и значи $x \notin B$, защото $B \cap C = \emptyset$. Понеже $x \in B$, то $x = t \in B$. Но всичко, което е по-малко от $x = t$ е в $seg(t) \subseteq C$ и така е извън B, т.е. $\forall y(y < t \Rightarrow y \notin B)$.
   Еквивалентно: $\forall y(y \in B \Rightarrow \neg(y < t))$, т.е. $\forall y(y \in B \Rightarrow t \leq y)$ и понеже $t \in B$, то t е най-малкият елемент на B.

$\boxed{\text{Опр}}$ Нека $\pi : A \to A$ и $< A, \leq >$ е ч.н.м. Казваме, че π е разширяваща, ако за вс. $x \in A$ е изп. $x \leq \pi(x)$

$\boxed{\text{Тв}}$ Нека $< W, \leq >$ е д.н.м. и функцията $\pi : W \to W$ е инективна и запазваща наредбата. Тогава π е разширяваща. Интективност: $\forall x, y \in W(x \neq y \Rightarrow \pi(x) \neq \pi(y))$. Запазване на наредбата: $\forall x, y \in W(x \leq y \Rightarrow \pi(x) \leq \pi(y))$.

Док: Да допуснем, че π не е разширяваща. Тогава множеството $\{x \in W \mid \pi(x) > \pi(y)\}$ е непразно. Нека $x^* = min_{\leq}\{x \in W \mid \pi(x) < x\}$. В частност, $\pi(x^*) < x^*$.
Тогава $\pi(\pi(x^*)) < \pi(x^*)$. Следователно $\pi(x^*) \in \{x \in W \mid \pi(x) < x\}$. Но x^* е най-малкият елемент на това множество и така $x^* \leq \pi(x^*)$. Противоречие! Следователно π е разширяващо.

$\boxed{\text{Тв}}$ Никое добре наредено множество не е изоморфно на на свой собствен начален сегмент.

Док: Нека $< W, \leq >$ е д.н.м. и $I \subseteq W$, $I \neq W$ и I е начален сегмент т.ч.
$< W, \leq > \eqsim < I, \leq \cap (I \times I) >$. Нека $\pi : W \to I$ е изоморфнизъм. В частност π е инекция и запазва наредбата. Следователно π е разширяващо. Понеже I е начален сегмент и $I \neq W$, то $I = seg(x)$ за някое $x \in W$. Тогава $\pi(x) \in I = seg(x)$, т.е. $\pi(x) < x$. Но π е разширяваща $\Longrightarrow$ противоречие! Следователно W не е изоморфно на I

$\boxed{\text{Тв}}$ Между всеки две добре наредени множества има най-много един изоморфнизъм.

Док: Нека $< W, \leq > \eqsim < I, \leq >$ са добре наредени множества и $\pi, \psi : W_1 \to W_2$ са изоморфизми. $\pi \neq \psi$, $\{x \in W_1 \mid \pi(x) \neq \psi(x)\} \neq \emptyset$. Нека $x^* = min_{\leq 1}\{x \in W_q \mid \pi(x) \neq \psi(x)\}$. $\pi(x^*) \neq \psi(x^*)$. БОО, $\pi(x^*) <_2 \psi(x^*) \implies \pi(x^*) \in W_2, \psi$ - сюрекция в-ху W_2. Нека $y \in W_1$, е т.ч. $\psi(y) <_2 \psi(x^*)$ и следователно $y <_1 x^*$, т.е. $y \notin \{x \in W_1 \mid \pi(x) \neq \psi(x)\}$ и така $\pi(y) = \psi(y) = \pi(x^*)$, от където $y = x^*$. Но $y < x^* \implies$ Противоречие!

Лекция 7

$\mathbb{Q}$ са изброимо много.
$\mathbb{R}$ са неизброимо много.
$\mathbb{Q}$ са гъсти в $\mathbb{R}$: $\forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R}(a < b \Rightarrow (\exists c \in \mathbb{Q})(a < c \wedge c < b))(\exists c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$
$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ са също гъсти в $\mathbb{R}$

А в равнината? Нека A е множество от отворени подмножества на Евклидовата равнина и всеки два разл. елем. на A са непресичащи се. Тогава $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{\mathcal{AL}_0}}$

$\boxed{\text{def}}$ A е отворено множество, ако за $(\forall x \in A)\exists D($"$D$ е отворен кръг с център x" $\wedge D \subseteq A)$

Зад: Нека A е отворено множество в Евклидовата равнина. Тогава съществува най-много изброимо множество B, такво че $\alpha \in B \Rightarrow \alpha$ е отворен кръг с център рационални координати и рационален радиус. Освен това $\bigcup B = A$.

Зад: Нека l е фиксирана права в Евклидовата равнина. Нека A е множество от окръжности в равнината, такова че $(\forall p \in l)(\exists C \in A)($"$C$ се допира до "$l)$. Да се докаже, че в A има поне 2 пресичащи се окръжности.

Нека за всяка точка $P \in l$ фиксираме една окръжност C_p, т.ч. $C_p \in A \wedge C \cap l = \{p\}$. Тогава множеството $A_l = \{C_p \mid p \in l\}$ е неизброимо. Във всяка окръжност $C \in A_l$ да фиксираме точка P_c, която има рационални координати (във вътрешността на окръжността C). Нека $B = \{P_c \mid c \in A_l\}$. $B \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ и е изброимо. Значи имаме $\overline{\overline{B}} = \mathcal{AL}_0$ и $\overline{\overline{A_l}} = 2^{\mathcal{AL}_0}$. Дефинирахме $f : A_l \to B$, където $f(c) = P_c$. Вижда се че f не е инекция, т.е. има $c_1, c_2 \in A_l, c_1 \neq c_2, f(c_1) = f(c_2)$. Това означава че има две окръжности с обща вътрешна точка. Разглеждаме случаите за това и единствената възможност е те да са различни окръжности

$\boxed{\text{def}}$ Регулярно каберче вравнината - като Т, перпендикулярни отсечки, с дължина 1 и пресечната точка е среда на горната.

$\boxed{\text{def}}$ каберче в равнината - като регулярно каберче, но само перпендикулярно с > 0 дължини на компонентите.

Зад: в равнината са разхвърляни регулярни каберчета, никои две от които не се наслагват (най-много се допират). Док., че каберчетата са $\leq \mathcal{AL}_0$.

Взимаме окръжности с център лежащ на основата на каберчето и радиус $\leq 1/4$. Можем да ги нареждаме едно до друго и се вижда, че защото в равнината можем да наложим изброимо много отворени множества, то и каберчетата ще са изброимо много.
Но при нормалните каберчета, не е толкова просто. Нека $K_n = \{min(|\alpha|, |\beta|, |\gamma|) \geq 1/n\}$, ще докажем че K_n е изброимо.

$\boxed{\text{Тв}}$ Нека $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и f е монотонна. Нека D_f е множеството от всички точки на прекъсване на f. Тогава $D_f \leq \mathcal{AL}_0$

Док: БОО: f е монотонно растяща $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, $x \in D_f \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) < \lim_{x \to x_0} f(x)$...

$\boxed{\text{Аксиома за мултипликативност}}$ За фамилия X_i от непресичащи се непразни множества, съществува множество Y, такова че $Y \cap X_i = \{x\}$ за някое x. Тоест:
$\forall A((\forall x \in A)(x \neq \emptyset) \wedge (\forall x \in A)(\forall y \in A)(x \neq y \Rightarrow x \cap y = \emptyset) \Rightarrow \exists B(\forall x \in A)\exists u(B \cap x = \{u\}))$

От $\mathcal{AM} \Rightarrow \forall A((\forall x \in A)(x \neq \emptyset) \wedge (\forall x \in A)(\forall y \in A)(x \neq y \Rightarrow x \cap y = \emptyset) \Rightarrow \exists B)(B \subseteq \bigcup A \wedge (\forall x \in A)\exists u(B \cap x = \{u\}))$. Наистина, нека A удовл. пред. и тогава от $\mathcal{AM}$ моем да вземем конкретно мн-во $B : (\forall x \in A)\exists u(B \cap x = \{u\})$. Нека $B_1 \leftrightharpoons B \cap (\bigcup A)$. Тогава $B_1 \subseteq (\bigcup A)$ и за произв. $x \in A$ $x \cap B_1 = (x \cap B) \cap (x \cap (\bigcup A)) = (x \cap B) \cap x = B \cap x \neq \emptyset$, защото от $x \in A \implies x \subseteq (\bigcup A) \implies x \cap (\bigcup A)$.
Това ни напомня за класове на еквивалентност, може да си мислим че $\mathcal{AM}$ твърди - ако имаме класове на еквивалентност, то има множество от представители на тези класове.

$\boxed{\text{Аксиома за избора}}$ $\forall A((\forall x \in A)(x \neq \emptyset) \Rightarrow \exists f(Func(f) \wedge Dom(f) = A \wedge (\forall x \in A)(f(x) \in x)))$

$\boxed{\text{Тв}}$ В $\mathcal{ZF}$ е изпълнено $\mathcal{AM} \iff \mathcal{AC}$

Док: Нека $\mathcal{AC}$ е в сила. Нека A е множество, за което предиката на $\mathcal{AM}$ е в сила.
Нека f е функция на избора за A, т.е. $Func(f) \wedge Dom(f) = A \wedge (\forall x \in A)(f(x) = x)$.
Нека $B \leftrightharpoons Rng(f)$, сега ще докажем че B има желаното свойство. Нека $x \in A$. Тогава $f(x) \in x$ и е дефинирана, но $f(x) \in Rng(f)$. Значи $f(x) \in B \cap x$, т.е. $\{f(x)\} \subseteq B \cap x$. Нека $a \in B \cap x$. Но $a \in Rng(f)$ и $a = f(y)$ за някое $y \in A$. Нека разгледаме една точка $y \in A$, такава че $a = f(y)$. $f(y) \in y$
...
$x = y$ $\forall a(a \in B \cap x \Rightarrow a = f(x))$, тоест $B \cap x \subseteq \{f(x)\}$. Така $u = f(x)$.

Сега ще докажем че $\mathcal{AM} \Rightarrow \mathcal{AC}$. Нека A е множество и $(\forall x \in A)(x \neq \emptyset)$. Искаме да сме сигурни че работим с непресичащи се множества, затова решаваме да оцветим множествата (например x оцветяваме с $\{x\}$). Дефинираме A_1, такова че $A_1 = \{z \mid z \in A \times (\bigcup A) \wedge (\exists x \in A)(z = \{x\} \times x)\}$. Нека $x \in A$ и $z = \{x\} \times x$, значи $z \in Ax(\bigcup A)$. Така елементите на A са $\neq \emptyset$. Нека вземем свидетел - $x \in A$ и $z = \{x\} \times x$. $x \in A \implies x \neq \emptyset$. Нека $a \in x$ и така $< x, a > \in z$, т.е. $z \neq \emptyset$. Нека $z_1, z_2 \in A$ и $z_1 \neq z_2$. Значи $z_1 = \{x_1\} \times x_1$, $z_2 = \{x_2\} \times x_2$, където $x_1, x_2 \in A$. Да допуснем, че $z_1 \cap z_2 \neq \emptyset$. Нека $u \in z_1 \cap z_2$,
$u \in z_1 \implies u =< x_1, a_1 >, a_1 \in x_1$
$u \in z_2 \implies u =< x_2, a_2 >, a_2 \in x_2$
$< x_1, a_1 >=< x_2, a_2 >$, $x_1 = x_2$ и $a_1 = a_2$. Така $\{x_1\} \times x_1 = \{x_2\} \times x_2$ и $z_1 = z_2 \implies$ Противоречие! Следователно $z_1 \cap z_2 = \emptyset$. Ето защо $\mathcal{AM}$ е приложима към A_1. Нека $B \subseteq \bigcup A_1 \wedge (\forall z \in A_1)\exists u(B \cap z = \{u\})$.
Нека $v \in B$. Тогава $v \in \bigcup A_1$, значи има елемент $z \in A_1$, т.ч. $v \in z$. Следователно $v =< x, a >$, където $x \in A$ и $a \in x$. Така $Rel(B)$. Нека $< x, y >, < x, y' > \in B$. Значи $< x, y >, < x, y' > \in \{x\} \times x$, още $y \in x$ и $y' \in x$. $< x, y >, < x, y' > \in (\{x\} \times x) \cap B$, но $(\{x\} \times x) \cap B = \{w\}$ за някое w. $< x, y >, < x, y' > \in \{w\} \implies < x, y >=< x, y' > \implies y = y'$. Следователно $Func(B)$.
Сега твърдим че тази функция е функция на избора. Нека $w \in Dom(B)$. Тогава за някой елемент $z \in A_1$ $< w, v > \in z$, където $< w, v > \in B$. Значи $z = \{x\} \times x$, за някое $x \in A$. Следователно $w = x$. Така $Dom(B) \subseteq A$. Обратно - нека $x \in A$, тогава $\{x\} \times x \in A_1$. Значи $\{x\} \times x \cap B = \{u\}$, за някое u. Тоест $u =< x, a >$, където $a \in x$. Следователно

$x \in Dom(B)$. Поради което $A = Dom(B)$. Освен това $< x, a > \in B$ за някое $a \in x$. Но $Func(B)$ и $< x, a > \in B \Leftrightarrow a = B(x); B(x) \in x$. И така B е функция на избора.

$\boxed{\text{def}}$ Нека $I \neq \emptyset$, I е индексирана фамилия. $\{A_i\}_{i \in I}$ наричаме функция A с $Dom(I)$ и вместо $A(i)$ пишем A_i.

$\prod_{i \in I} A_i = \{f \mid Func(f) \wedge Dom(f) = I \wedge (\forall i \in I)(f(i) \in A_i)\}$

$\boxed{\text{Тв}}$ В $\mathcal{ZF} + \mathcal{AC}$ твърдим че декартовото произведение на индексирана фамилия от непразни множества е непразно множество: $\forall I((\forall i \in I)(A_i \neq \emptyset) \Rightarrow \prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset)$

<u>Док:</u> 1) Нека $\mathcal{AC}$ е в сила. $I \neq \emptyset, (\forall i \in I)(A_i \neq \emptyset)$. $A_i = \{\{i\} \times A_i \mid i \in I\}$. Значи $(\forall z \in A_1)(z \neq \emptyset)$ и $(\forall z_1 \in A_1)(\forall z_2 \in A_1)(z_1 \neq z_2 \Rightarrow z_1 \cap z_2 = \emptyset)$.
Тогава от $\mathcal{AM} \implies \exists B(B \subseteq A_1 \wedge (\forall z \in A_1)\exists u(B \cap z = \{u\}))$. Така $B \in \prod_{i \in I} A_i$ (от тук идва името на аксиомата).
2) Нека $\forall I((\forall i \in I)(A_i \neq \emptyset) \Rightarrow \prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset)$. Нека A е множество от непразни множества, т.е. $(\forall x \in A)(x \neq \emptyset)$. Разглеждаме A фамилия с индексно множество A (??). $\{x\}_{x \in A}$, Id_A - индекс. ф-я.
$\prod_{x \in A} x \neq \emptyset$. Нека $f \in \prod_{x \in A} x$. Тогава $Func(f)$, $Dom(f) = A$ и $(\forall x \in A)(f(x) \in x)$. След f е функция на избора за $\{x\}_{x \in A}$

Лекция 7

Some definitions and properties

$< W, \leq >$ е д.н.м., ако е ч.н.м. и всяко непразно подмножество на W има най-малък елемент относно $\leq$.

$I \subseteq W$ е начален сегмент в $< W, \leq >$ - $(\forall x \in I)\forall y(y \leq x \Rightarrow y \in I)$

$x \in W, seg(x) = \{y \in W \mid y < x\}$

$I \neq W$ е начален сегмент, то $I = seg(t)$ за някое $t \in W$

Между всеки две добре наредени множества има най-много един изоморфизъм.

Никое добре наредено множество не е изоморфно на свой собствен начален сегмент.

За всяко добре наредено множество съществува единствен автоморфизъм:
$(\forall x, y \in W)(x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y))$, където $f : W \to W$ е биекция

$\boxed{\text{T}}$ Нека $< W_1, \leq_1 >$ и $< W_2, \leq_2 >$ са д.н.м. Тогава е в сила точно едно от:

1. $< W_1, \leq_1 > \approx < W_2, \leq_2 >$
2. $< W_1, \leq_1 >$ е изоморфно на собствен начален сегмент на $< W_2, \leq_2 >$
3. $< W_2, \leq_2 >$ е изоморфно на собствен начален сегмент на $< W_1, \leq_1 >$

Освен това, този изоморфизъм е единствен.
Няма как повече от едно от изброените може да е вярно.

<u>Означение:</u> $a \in W_1, W_1(a) \leftrightharpoons < seg(a), \leq_1 \cap (seg(a) \times seg(a))$,
аналогично $b \in W_2, W_2(b) \leftrightharpoons < seg(b), \leq_2 \cap (seg(b) \times seg(b))$
Нека $f = \{< a, b > \mid a \in W_1 \wedge b \in W_2 \wedge W_1(a) \approx W_2(b)\}$

<u>Док:</u>

1. $Funct(f)$: Нека $< a, b_1 >, < a, b_2 > \in f$ и $b_1 \neq b_2, a \in W_1; b_1, b_2 \in W_2$. БО, $b_1 <_2 b_2$. Тогава $W_2(b_1) \approx W_1(a) \approx W_2(b_2) \implies W_2(b_1) \approx W_2(b_2)$. Значи $W_2(b_1)$ е собствен начален сегмент на $W_2(b_2) \implies$ Противоречие! $\implies b_1 = b_2 \implies Funct(f)$
2. f е инекция: Нека $< a_1, b >, < a_2, b > \in f$, съответно $a_1, a_2 \in W_1; b \in W_2, a_1 \neq a_2$. БО $a_1 <_1 a_2$. Значи $W_1(a_1) \approx W_2(b) \approx W_1(a_2)$. Но $W_1(a_1)$ е собствен начален сегмент на $W_1(a_2)$ и те са изоморфни $\implies$ Противоречие! $\implies a_1 = a_2$, тоест f е инекция.

3. f запазва наредбата: Тоест $(\forall a_1, a_2 \in Dom(f))(a_1 <_1 a_2 \Rightarrow f(a_1) <_2 f(a_2))$.
   Нека $a_1, a_2 \in Dom(f)$, и $a_1 <_1 a_2$. Тогава $W_1(a_2) \approx W_2(f(a_2))$ и h е единственият изоморфизъм между двете. Но така $W_1(a_1) \approx W_2(h(a_1))$ посредством $h \restriction seg(a_1)$. Тогава $W_1(a_1) \approx W_2(f(a_1))$, следователно $f(a_1) = h(a_1) <_2 f(a_2)$. Значи f запазва наредбата.

$\boxed{\text{Св. 4}}$ $Dom(f)$ е начален сегмент на $< W_1, \leq_1 >$. Нека $a \in Dom(f)$ и $c <_1 a, c \in W_1$. Тогава $W_1(a) \approx W_2(f(a))$. Нека h е изоморфизъм между двете. Тогава $h \restriction seg(c)$ е изоморфизъм между $W_1(c)$ и $W_2(h(c))$. Следователно $< c, h(c) > \in f$ и така $c \in Dom(f)$.

<u>Упражнение:</u> Покажете че $Rng(f)$ е начален сегмент на $< W_2, \leq_2 >$ (напълно подобно)

f е изоморфизъм между $Dom(f)$ и $Rng(f)$. Да допуснем, че $Dom(f) \neq W_1$ и $Rng(f) \neq W_2$. Следователно $Dom(f)$ и $Rng(f)$ са собствени начални сегменти съответно на $< W_1, \leq_1 >$ и $< W_2, \leq_2 >$. Нека $a \in W_1$ и $b \in W_2$ са такива че $Dom(f) = seg(a)$ и $Rng(f) = seg(b)$. Понеже $< Dom(f), \leq_1 >$ и $< Rng(f), \leq_2$ са изоморфни, то $< a, b > \in f$ и така $a \in Dom(f) = seg(a) \implies$ Противоречие!

Така виждаме че е изпълнен точно в един от случаите:

1. $Dom(f) = W_1, Rng(f) = W_2 \implies 1)$
2. $Dom(f) = W_1, Rng(f) \neq W_2 \implies 2)$
3. $Dom(f) \neq W_1, Rng(f) = W_2 \implies 3)$

$\boxed{\text{Опр}}$ x е транзитивно множество, ако $\forall y \forall z (y \in x \wedge z \in y \Rightarrow z \in x) \implies \forall y (y \in x \Rightarrow y \subseteq x) \implies \forall y (y \in x \Rightarrow y \in \mathcal{P}(x)) \implies x \subseteq \mathcal{P}(x)$

$trans(x) \Rightarrow trans(s(x)), s(x) = x \cup \{x\}$
$\forall y (y \in x \Rightarrow trans(y)) \Rightarrow trans(\bigcup x) \wedge trans(\bigcap x)$

$\boxed{\text{Опр}}$ x е ε-добре наредено, ако: $\forall y \forall z (y \in x \wedge z \in x \Rightarrow (y \in z \vee y = z \vee z \in y)) \wedge$
$\forall u (u \neq \emptyset \wedge u \subseteq x \Rightarrow \exists y (y \in u \wedge y \cap u = \emptyset))$
Пишем $EWO(x)$

$\boxed{\text{Опр}}$ Множеството x е ординал, ако е транзитивно и ε-д.н.: $ord(x) \leftrightharpoons trans(x) \wedge EWO(x)$

<u>Заб:</u> Тази дефиниция не използва акс. за регулярност, акс. за замяната и акс. за избора.

<u>Наблюдение:</u> Ако $EWO(x)$ и $\emptyset \neq u \subseteq x \implies \exists! y (y \in u \wedge y \cap u = \emptyset)$

<u>Означение:</u> Ординалите означаваме с малки гръцки букво - α, β, γ...

<u>Означение:</u> $\alpha < \beta \leftrightharpoons \alpha \in \beta$ и съответно $\alpha \leq \beta \leftrightharpoons \alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$

$\boxed{\text{Свойства}}$

1. $\alpha \notin \alpha$; $\neg \exists x (x \in \alpha \wedge \alpha \in x)$ и т.н. за вериги с произвлна дължина
2. $\alpha < \beta \wedge \beta < \gamma \Rightarrow \alpha < \gamma$ (директно от транзитивността на γ)
3. $\alpha < \beta \Rightarrow \neg(\beta < \alpha)$
4. $ord(S(\alpha))$, $\neg \exists \beta (\alpha < \beta \wedge \beta < S(\alpha))$

Още свойства (общо около 10) ->

$\boxed{\text{Св. 5}}$ $x \in \alpha \Rightarrow ord(x)$

Док а: Ще покажем че $trans(x)$. Нека $y \in x \wedge z \in y$. Понеже $y \in x, x \in \alpha$ и $trans(\alpha)$, то $y \in \alpha$. Но $z \in y$ и отново по транзитивността на α, получаваме че $z \in \alpha$. Но $EWO(\alpha)$, от където $x \in z \vee x = z \vee z \in x$ (защото $x, z \in \alpha$).

- Ако $x = z$, то $y \in x$ и $x \in y$ като $x, y \in \alpha$ (невъзможно). Тогава $\emptyset \neq \{x, y\} \subseteq \alpha$ и $\exists t (t \in \{x, y\} \wedge t \cap \{x, y\} = \emptyset)$. Ако $t = x$, то $y \in x$ и $y \in \{x, y\}$. Значи $y \in t \cap \{x, y\}$ - противоречие! От друга страна ако $t = y$, то $x \in y$ и $x \in \{x, y\}$, от където $x \in t \cap \{x, y\} = \emptyset$ - противоречие! $\implies x \neq z$
- Ако $x \in z$, то $y \in x$ и $x \in z$ и $z \in y$, като $x, y, z \in \alpha$ (също невъзможно). Тогава $\emptyset \neq \{x, y, \} \subseteq \alpha$ и $\exists t (t \in \{x, y, z\} \wedge t \cap \{x, y, z\} = \emptyset)$. Пак разглеждаме случаи (3) и аналогично всики са противоречиви. Така $x \notin z$.

Следователно $z \in x$ и така $trans(x)$.

Док б: Нека $y, z \in x$, но $x \in \alpha$ и $trans(\alpha) \implies y, z, \in \alpha$. Но $EWO(\alpha) \implies y \in z \vee y = z \vee z \in y$

Сега ще покажем че всяко непразно множество на x има най-малък елемент. Нека $\emptyset \neq u \subseteq x$. Понеже $trans(\alpha)$, то $u \subseteq \alpha$. $(y \in u \Rightarrow y \in x \implies y \in \alpha)$ (от $x \in \alpha$ и $trans(\alpha)$). Тъй като $EWO(\alpha)$, то $\exists y \in u (y \cap u = \emptyset)$. От (а) и (б) - $ord(x)$

$\boxed{\text{Св. 6}}$ $x \subseteq \alpha \wedge trans(x) \Rightarrow x \in \alpha \vee x = \alpha$

Док: Нека $x \neq \alpha$. Тогава, ако $u = \alpha \setminus x$, то $\emptyset \neq u \subseteq \alpha$. Идея - ще покажем че x е най-малкият елемент на α, който е по-голям от всеки един елемент на x. Нека $y \in u$ е такова че $y \cap u = \emptyset$ (такова има защото $EWO(\alpha)$). Нека $z \in y$. Понеже $y \cap u = \emptyset$, то $z \notin u$. Обаче $y \in u \subseteq \alpha$ и от $trans(\alpha) \implies z \in \alpha$. Но $u = \alpha \setminus x$, следователно $z \in x$. Така $y \subseteq x$.
Сега нека $z \in x$. Но $y \in u \subseteq \alpha$ и $z \in x \subseteq \alpha$, следователно $y, z, \in \alpha$. Понеже $EWO(\alpha)$, то $y \in z \vee y = z \vee z \in y$.
Ако $y \in z$, то понеже $z \in x$ и $trans(x)$, имаме, че $y \in x$. Обаче $y \in u = \alpha \setminus x$ - противоречие! Следователно $y \notin z$
От друга страна ако $y = z$, то $y = z \in x$ и $y \in u = \alpha \setminus x$ - противоречие! Следователно $y \neq z$. Така $z \in y$. Така $x \subseteq y$. Следователно $x = y \in u \subseteq \alpha$, т.е. $x \in \alpha$

$\boxed{\text{Св. 7}}$ $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$

Док($\Rightarrow$): Нека $\alpha \leq \beta$. Тогава $\alpha \in \beta$ или $\alpha = \beta$. Понеже $trans(\beta)$, то $\alpha \subseteq \beta$ или $\alpha = \beta$, т.е. $\alpha \subseteq \beta$

Док($\Leftarrow$): Нека $\alpha \subseteq \beta$. Понеже $trans(\alpha)$, по (св. 6) $\alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$, т.е. $\alpha \leq \beta$.

$\boxed{\text{Св. 8}}$ (Закон за трихотомия на ординалите) $\alpha < \beta \vee \alpha = \beta \vee \beta < \alpha$

Док: Нека $x = \alpha \cap \beta$, тогава $trans(x)$, като сечение на транзитивни множества. Но $x \subseteq \alpha$ и $x \subseteq \beta$, от където (от св. 6) ($x \in \alpha \vee x = \alpha$) и ($x \in \beta \vee x = \beta$). Има 4 възможности:

1. $x \in \alpha$ и $x \in \beta \implies x \in \alpha \cap \beta$, но така $x \in x$ и $ord(x)$ - противоречие!
2. $x \in \alpha$ и $x = \beta$. Следователно $\beta < \alpha$
3. $x = \alpha$ и $x \in \beta$. Следователно $\alpha < \beta$
4. $x = \alpha$ и $x = \beta$. Следователно $\alpha = \beta$

$\boxed{\text{Св. 9}}$ $\alpha < \beta \Leftrightarrow S(\alpha) \leq \beta$

Док($\Rightarrow$): Нека $\alpha < \beta$ и да допуснем че $\neg(S(\alpha) \leq \beta)$. По (св. 8) следва, че $\beta < S(\alpha)$ - противоречие със (св. 4). Следователно $S(\alpha \leq \beta)$

Док($\Leftarrow$): Нека $S(\alpha \leq \beta)$ и да допуснем че $\neg(\alpha < \beta)$. Следователно $\beta \leq \alpha$. Тогава $S(\alpha) \leq \alpha$, т.е. $\neg(\alpha < S(\alpha))$ - противоречие със (св. 4).

$\boxed{\text{Св. 10}}$ $\forall y \in x(ord(y)) \Rightarrow EWO(x) \wedge ord(\bigcup x)$

Док а: Ще док. че $EWO(x)$. Нека $y, z \in x$. Следователно $ord(y)$ и $ord(z)$ и по (св.8): $y < z \vee y = z \vee z < y$, т.е. $y \in z \vee y = z \vee z \in y$.

Док б: Нека $\emptyset \neq u \subseteq x$. Нека $\alpha \in u$ (търсим най-малкия). Ако $\alpha \cap u = \emptyset$, то α е най-малкият елемент на u. Нека $u' = u \cap \alpha$. Тогава $\emptyset \neq u' \subseteq \alpha$ и понеже $EWO(\alpha)$ - нека y е най-малкият елемент на u'. Тоест $y \in u'$ и $y \cap u' = \emptyset$. $y \in u' = u \cap \alpha \subseteq u$ и $y \in \alpha$. Да допуснем, че $y \cap u \neq \emptyset$. Нека $z \in y \cap u$. Така $z \in y$ и $z \in u$. Но $y \in \alpha$ и $trans(\alpha)$, от където $z \in \alpha$. Тъй като $z \in u$, то $z \in u \cap \alpha = u'$. Следователно $z \in y \cap u' = \emptyset$ - противоречие! Следователно $y \cap u = \emptyset$ и $y \in u$