

Записки по Теория на Множествата  
При проф. Тинко Тинчев

Atanas Ormanov

November 30, 2022

# Лекция 1

Book recommendation:

Introduction to Set Theory (3d Edition) by Karel Hrbacek & Thomas Jech

Съпоставка м-ду Актуална безкрайност и Потенциална безкрайност:

На пръв поглед ако  $B \subseteq A$  и  $B \neq A$ , то В има по-малко елементи, но при безкрайни мн-ва не е задължително.

def Принцип за неограничената абстракция:

Нека  $\mathcal{A}(x)$  е едноместно свойство на обекта  $x$ . Тогава има множество  $A$ , такова че  $x \in A \Leftrightarrow \mathcal{A}(x)$

Парадокс на Ръсел:

Нека  $\mathcal{R}$  е св-во такова че  $\mathcal{R}(x) \Leftrightarrow x \notin x$  за произволно  $x$

От принципа за неограничената абстракция (\*) - има множество  $R$ ,

такова че  $x \in R \Leftrightarrow \mathcal{R}(x)$  за произволно  $x$

...  $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$

Езикът на теория на множествата се състои от:

- Двуместни свойства:  $=, \in$   
(равенство в смисъла на Лайбниц означава неотличимост)
- Булеви връзки:  $\vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- Квантори:  $\forall x\phi, \exists x\phi$

ZF - аксиоми на Цермело Френкел

ZFC - ZF заедно с аксиомата за избора

def Теоритико множествени свойства:

В света (универсума) има само множества (това са обектите с които ще работим)

TM свойствата разделяме на:

1) Логически аксиоми

- $\forall x\forall y(x = y \Rightarrow y = x)$
- $\forall x\forall y(x = y \Rightarrow y = x)$
- $\forall x\forall y\forall z(x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z)$
- $\forall x\forall y\forall z(x \in y \wedge y = z \Rightarrow x \in z)$
- $\forall x\forall y\forall z(x = y \wedge y \in z \Rightarrow x \in z)$

1-3 са аксиомите за еквивалентност на равенството

4-5 са аксиомите за конгруентност

2) Аксиоми на ZF:

1.  $\exists x(x = x)$  - Има поне един обект в света
2.  $\forall x \forall y (\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y)$  - Обемност / екстенционалност. Ако 2 множества имат едни и същи елементи, то те са равни.
3.  $\exists x(x = x)$  - принцип за ограничената абстракция / схема за отделянето.

Док 2.2:  $\forall y \forall z (y = z \Rightarrow \forall x (x \in y \Leftrightarrow x \in z))$

Нека предположим че  $y = z$ , нека  $x$  е произволно множество. Използваме логическа аксиома 4 за да докажем.

Док 2.3: Нека  $\phi(x, u_1, u_2, \dots, u_n)$  е ТМ. св-во, нека  $u_1, \dots, u_n$  са произволно мн-ва. Всеки път, когато  $A$  е множество, съществува множество, чийто елементи са точно онези елементи на  $A$ , за които е в сила  $\phi(x, u_1, u_2, \dots, u_n)$ .

$\forall u_1 u_2 \dots u_n \forall A \exists B \forall x (x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge \phi(x, u_1, u_2, \dots, u_n))$  - св-во на  $x$ .

**Тв** При фиксирани  $A, u_1, \dots, u_n$  - множества и теоритико множествено свойство  $\phi$ , съществуват единствено множество  $B$ , за което  $\forall x (x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge \phi(x, \bar{u}))$ , където  $\bar{u}$  са параметри.

Док: Нека  $B_1$  и  $B_2$  са такива мн-ва, че:  $\forall x (x \in B_1 \Leftrightarrow x \in A \wedge \phi(x, \bar{u})) \quad \forall x (x \in B_2 \Leftrightarrow x \in A \wedge \phi(x, \bar{u}))$  Искаме да док че  $B_1 = B_2$ . Нека  $y \in B_1$  е произволен. Тогава  $y \in A \wedge \phi(y, \bar{u})$ . Следователно  $y \in B_2$ . Така  $\forall x (x \in B_1 \Leftrightarrow x \in B_2)$ . От аксиомата за обемност  $B_1 = B_2$ .

**Тв** Съществува празно множество

Док: Ще докажем че  $\exists A \forall x (x \notin A)$

Нека  $B$  е множество (От аксиомата 0). Нека  $\phi(x) \Leftrightarrow \neg(x = x)$ . Нека  $M$  е единственото множество, такова че  $\forall x (x \in M \Leftrightarrow x \in B \wedge \phi(x))$ . Ще док. че  $\forall x (x \notin M)$ . Допускаме че  $x \in M$  е произволно. Тогава  $x \in B \wedge \phi(x)$ . Така  $\phi(x)$ , т.е.  $x \neq x$ , противоречи с 1-вата лог. аксиома. Следователно  $x \notin M$ . Понеже  $x$  е произволно то  $\forall x (x \notin M)$ .

**Опр** За множество  $A$ , параметри  $\bar{u}$  и св-во  $\phi$ , съществува единствено такова  $B$ , което бележим така:  $B = \{x \mid x \in A \wedge \phi(x, \bar{u})\}$

**Тв** Съществува единствено празно множество.

Док: Нека  $M_1$  и  $M_2$  са празни, т.е.  $\forall x (x \notin M_1)$  и  $\forall x (x \notin M_2)$  Нека  $t$  е произволно множество, тогава  $t \notin M_1$  и  $t \notin M_2$ . Но  $t$  беше произволно, значи  $t \in M_1 \Leftrightarrow t \in M_2$  и от аксиомата за обемност  $M_1 = M_2$  Празното множество бележим с  $\emptyset$

Означение:  $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$

**Тв** За всяко множество  $A$ , е изп. че  $\emptyset \subseteq A$

**Тв** Не същ. множество, което съдържа всички мн-ва:  $\neg \exists A \forall x (x \in A)$

Док: Допускаме противното. Нека  $B$  е такова че  $\forall x(x \in B)$   
Нека  $R = \{x \mid x \in R \wedge x \notin x\}$ . Използваме аксиомата схема за отделяне с  $A = B$  и  $\phi(x) \Leftrightarrow x \notin x$ . Отделяме онези  $x$ , за които  $x \notin x$ . Така  $R$  е множество. Тогава  $R \in B$ . Получаваме че  $R \in R \Leftrightarrow R \in B \wedge R \notin R \Leftrightarrow R \notin R$  - противоречие с допускането. Тоест няма такива мн-ва.

Future reading:

- actual infinity vs potential infinity
- Banach–Tarski paradox (occurs after the patch of Russel’s paradox)
- Cantor’s definition of real numbers

## Лекция 2

**Тв** За всеки две множества  $A$  и  $B$ , съществува единствено множество  $C$ , такова че  $\forall x(x \in C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B)$ .

Док за съществуване: Нека  $\phi(x, u) \Leftrightarrow x \in u$ . Според аксиомната схема за отделяне в-ху множеството  $A$  и  $\phi$  за  $u = B$ , същ. множество  $C = \{x \mid x \in A \wedge \phi(x, B)\} = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ .  
Значи за всяко  $x$ ,  $x \in C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

Док за единственост: Нека  $C_1$  и  $C_2$  са такива мн-ва, че  $x \in C_i \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B, i = 1, 2$ .  
Тогава за всяко  $x$ ,  $x \in C_1 \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in C_2$  и по аксиомата за обемност  $C_1 = C_2$ .  
Това множество означаваме с  $A \cap B$ .

**Тв** За всеки две множества  $A$  и  $B$ , съществува единствено множество  $C$ , такова че  $\forall x(x \in C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B)$

$\phi(x, u) \Leftrightarrow x \notin u$ , т.е. отделяме от  $A$  всички ел.  $x$ , за които  $\phi(x, B)$   
 $x \in C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B, i = 1, 2$   
 $x \in C_1 \Leftrightarrow x \in C_2, \forall x$   
 $C_1 = C_2$

Това единствено множество бележим  $A \setminus B$  и наричаме разлика на  $A$  и  $B$ .

Можем да правим "голямо" сечение

**Тв** Нека  $A \neq \emptyset$ . Тогава съществува единствено множество  $B$ , което съдържа точно множествата, които са елементи на всеки един елемент на  $A$ .  
 $\forall x(x \in B \Leftrightarrow \forall y(y \in A \Rightarrow x \in y))$

Док за същ.: Нека  $y_0 \in A$ , защото  $A$  е непразно. Нека  $\phi(x, u) \Leftrightarrow \forall y(y \in u \Rightarrow x \in y)$ . От аксиомната схема за отделянето, има множество

$B' = \{x \in y_0 \mid \phi(x, A)\} = \{x \mid x \in y_0 \wedge \forall y(y \in A \Rightarrow x \in y)\}$

Ще док че  $\forall x(x \in B' \Leftrightarrow \forall y(y \in A \Rightarrow x \in y))$  Нека  $x \in B'$ . Тогава  $x \in y_0 \wedge \forall y(y \in A \Rightarrow x \in y)$ , в частност  $\forall y(y \in A \Rightarrow x \in y)$ .

Обратното, нека  $x$  е т.ч.  $\forall y(y \in A \Rightarrow x \in y)$ .

Но  $y_0 \in A$ , следователно  $x \in y_0$ . Така  $x \in y_0 \wedge \forall y(y \in A \Rightarrow x \in y)$  от където  $x \in B'$

Док единств.: Нека  $B_1$  и  $B_2$  са такива мн-ва че ...  $x \in B_i \Leftrightarrow \forall y(y \in A \Rightarrow x \in y)$  за  $i = 1, 2$

Така за всяко  $x$ ,  $x \in B_1 \Leftrightarrow \forall y(y \in A \Rightarrow x \in y) \Leftrightarrow x \in B_2$  Т.е. има единствено такова множество, бележим го  $\bigcap A$  или  $\bigcap_{x \in A} x$

Приемаме че  $\bigcap \emptyset \Leftrightarrow \emptyset$

**Аксиома за чифта** За всеки 2 мн-ва  $a$  и  $b$ , съществува множество  $A$ , измежду чиито ел. са  $a$  и  $b$ .

$\forall a \forall b \exists A(a \in A \wedge b \in A)$

**Тв** За всеки 2 мн-ва  $a$  и  $b$  същ. единствено множество  $B$ , т.ч.  $\forall x(x \in B \Leftrightarrow x = a \vee x = b)$

Док ед.: Нека  $B_1$  и  $B_2$  са мн-ва, т.ч.  $\forall x(x \in B_1 \Leftrightarrow x = a \vee x = b)$   
Тогава за всяко  $x$ ,  $x \in B_1 \Leftrightarrow x = a \vee x = b \Leftrightarrow x \in B_2$  След.  $B_1 = B_2$

Док същ.: Нека  $A$  е такова множество че  $a \in A$  и  $b \in A$ . Нека  $\phi(x, u_1, u_2) \Leftrightarrow x = u_1 \vee x = u_2$   
По аксиомата схема за отд., същ. множество  $B = \{x \mid x \in A \wedge \phi(x, a, b)\}$ .

Ще док. че  $\forall x(x \in B \Leftrightarrow x = a \vee x = b)$ . Нека  $x$  е произв. и нека  $x \in B$ . Тогава  $x \in A \wedge \phi(x, a, b)$ , в частност  $\phi(x, a, b)$  т.е.  $x = a \vee x = b$ .

Нека сега  $x = b \vee x = b$ . Така  $\phi(x, a, b)$ . Понеже  $a \in A$  и  $b \in A$ , то  $x \in A$ . Следователно  $x \in B$   
 Това единствено множество ще означаваме  $\{a, b\}$  и ще нар. чифт на  $A$  и  $B$ .

Заб: Ако  $a = b$ , то  $\{a, a\} = \{a\}$  наричаме синглетон на  $a$ .

Определимо е в езика на ТМ дали  $x$  е синглетон.

$x$  е синглетон  $\Leftrightarrow \exists a(x = \{a\}) \Leftrightarrow \exists a \forall y(y \in x \Leftrightarrow y = a)$ .

Тогава можем да използваме "синглетон" като свойство във ф-ла. Сега ясно се вижда че сме разширили езика защото следните са различни  $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}$  и т.н. (така получаваме безкрайна редица)

СВ  $\{a, b\} = \{b, a\}$ . Ясно се вижда че  $\forall x(x \in \{a, b\} \Leftrightarrow x \in \{b, a\})$

def  $\langle a, b \rangle = \langle a_1, b_1 \rangle \Leftrightarrow a = a_1 \wedge b = b_1$

Опр Наредена двойка на мн-вата  $x$  и  $y$  наричаме множеството  $\{\{x\}, \{x, y\}\}$  и ще означаваме  $s \langle x, y \rangle$ .

Заб: Ако използваме  $x$  вместо  $\{x\}$  ще можем да правим цикли на принадлежност -  $A \in B \in C$ .  
 другия път ще въведем "правило" което ще забрани такива неща.

Тв За всяко  $x_1, y_1, x_2, y_2$  е в сила, че  $\langle x_1, y_1 \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$

Док:  $(\Leftarrow) x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$ , показваме че  $\{x_1\} = \{x_2\} \wedge \{x_1, y_1\} = \{x_2, y_2\}$   
 $\{\{x_1\}, \{x_1, y_1\}\} = \{\{x_2\}, \{x_2, y_2\}\}$  и от там  $\langle x_1, y_1 \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle$

$(\Rightarrow)$  Нека  $\langle x_1, y_1 \rangle = \langle x_2, y_2 \rangle$

1.  $x_1 = y_1$ , тогава  $\langle x_1, y_1 \rangle = \{\{x_1\}, \{x_1, x_2\}\} = \{\{x_1\}, \{x_1\}\} = \{\{x_1\}\} = \langle x_2, y_2 \rangle = \{\{x_2\}, \{x_2, y_2\}\}$ . Следователно  $\{x_1\} = \{x_2\} = \{x_2, y_2\}$ . Така:  $x_1 = x_2$  и  $x_2 = y_2$ .  
 Тогава  $x_1 = x_2 = y_2 = y_1$
2.  $x_1 \neq y_1$ . Тогава  $\{x_1\} \neq \{x_1, y_1\}$ . Тогава  $\{x_2\} \neq \{x_2, y_2\}$ . Тогава  $y_2 \neq x_2$ , защото иначе чифта и синглетона щяха да съвпадат. От тук  $\{x_1\} \neq \{x_2, y_2\}$ . Но  $\{x_1\} \in \langle x_2, y_2 \rangle$ , и така  $\{x_1\} = \{x_2\}$ . След.  $\{x_1, y_1\} \neq \{x_2\}$ , от където  $\{x_1, y_1\} = \{x_2, y_2\}$ . От  $\{x_1\} = \{x_2\}$ , следва че  $x_1 = x_2$ . Тогава  $\{x_1, y_1\} = \{x_2, y_1\} = \{x_2, y_2\}$ . Понеже  $y_1 \neq x_1 = x_2$ , то  $y_1 = y_2$

Аксиома за обединение За всяко множество  $A$  съществува множество  $B$ , т.ч. всеки елемент на елемент на  $A$  е елемент на  $B$ .

$\forall x \forall y (x \in y \wedge y \in A \Rightarrow x \in B)$

**ТВ** За всяко множество  $A$  съществува единствено множество  $B$ ,  
т.ч.  $\forall x(x \in B \Leftrightarrow \exists y(y \in A \wedge x \in y))$

Док за ед:  $i = 1, 2. \forall x(x \in B_i \Leftrightarrow \exists y(y \in A \wedge x \in y))$  за всяко  $x$ ,  
 $x \in B_1 \Leftrightarrow \exists y(y \in A \wedge x \in y) \Leftrightarrow x \in B_2$ , т.е.  $B_1 = B_2$

Док за същ. Нека  $C$  е такова множество, че  $\forall x \forall y(y \in A \wedge x \in y \Rightarrow x \in C)$ .

Нека  $B = \{x \mid x \in C \wedge \exists y(y \in A \wedge x \in y)\}$

Сега ако  $x \in B \Rightarrow x \in C \wedge \exists y(y \in A \wedge x \in y) \Rightarrow \exists y(y \in A \wedge x \in y)$

Нека  $\exists y(y \in A \wedge x \in y)$ . Нека  $y_0$  е свидетел за това ( $y_0 \in A \wedge x \in y_0$ ).

Понеже  $y_0 \in A \wedge x \in y_0$ , то  $x \in C$ . Следователно  $x \in B$

Значи съществува такова множество и то е единствено. Ще го бележим с  $\bigcup A$ .

Заб: Означение означава че ще го използваме във формула като съкращение(syntax sugar).

Не може да се дефинира операция за допълнение. Тоест:

**ТВ** За нито едно множество  $A$  не съществува множество  $\bar{A}$ , т.ч.  $\forall x(x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A)$

Док: Допускаме противното - нека  $A$  и  $\bar{A}$  са такива мн-ва, такова че за всяко  $x$   $x \in \bar{A} \Leftrightarrow x \notin A$ .

Нека  $V = \bigcup \{A, \bar{A}\}$  - от аксиомата за чифта и обединението. Нека  $x$  е произволно. Ако  $x \in A$ , то  $\exists y(y \in \{A, \bar{A}\} \wedge x \in y)$  от където  $x \in V$ . Ако пък  $x \notin A$ , то  $x \in \bar{A}$  и отново  $\exists y(y \in \{A, \bar{A}\} \wedge x \in y)$ , т.е.  $x \in V$ . След  $\forall x(x \in V)$ , противоречие!

$$\bar{0} = \emptyset$$

$$\bar{1} = \{\bar{0}\}$$

$$\bar{2} = \bar{1} \cup \{\bar{1}\} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$$

...

$$\overline{n+1} = \bar{n} \cup \{\bar{n}\} \text{ (n + 1 елемента)}$$

**Аксиома за степенното множество** За всяко множество  $A$  съществува множество  $B$ ,  
измежду чиито елементи са всички подмножества на  $A$ .  
 $\forall A \exists B \forall x(x \subseteq A \Rightarrow x \in B)$

**ТВ** За всяко множество  $A$  същ. единствено множество  $B$ , т.ч.  $\forall x(x \in B \Leftrightarrow x \subseteq A)$

Док за същ.: Нека  $C$  е т.ч.  $\forall x(x \subseteq A \Rightarrow x \in C)$ .

Нека  $B = \{x \mid x \in C \wedge x \subseteq A\}$ . Нека  $x \in B$ . След  $x \in C \wedge x \subseteq A$ , от където  $x \subseteq A$ . След.  
 $x \in C$ , от където  $x \in C \wedge x \subseteq A$ , т.е.  $x \in B$

Заб:  $x \in C \wedge x \subseteq A \Leftrightarrow x \subseteq A$ , защото  $x \subseteq A \Rightarrow x \in C$

Док за единственост: Взимаме  $B_1, B_2$  и  $\forall x(x \in B_i \Leftrightarrow x \subseteq A)$

$x \in B_1 \Leftrightarrow x \subseteq A \Leftrightarrow x \in B_2$ , т.е.  $B_1 = B_2$ .

Такова множество  $B$  съществува и е единствено и ще означаваме с  $\mathcal{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$

Какво можем да изведем от тук?

- $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$  за всяко  $A$
- $A \in \mathcal{P}(A)$ , за всяко  $A$

- $A \in \mathcal{P}(A)$ , за всяко  $A$
- $A \subseteq B \implies \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$  - монотонност
- Можем ли да твърдим монотонността в обратната посока? Да!
- Възможно ли е  $\mathcal{P}(A) \subseteq A$ ? Не! (дори и за празното). Това е същото като  $\mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(A)$ , но това все още не можем да докажем.

Но можем да докажем следното:

**ТВ** Не същ. множество  $A$ , т.ч.  $\mathcal{P}(A) \subseteq A$

**Док:** Допускаме противното и нека  $A$  е такова множество, че  $\mathcal{P}(A) \subseteq A$ .

Нека  $\mathcal{R}_A = \{x \mid x \in A \wedge x \notin x\}$ . Според аксиомата схема за отделяне  $\mathcal{R}_A$  е множество. Освен това,  $\mathcal{R}_A \subseteq A$ . След  $\mathcal{R}_A \in \mathcal{P}(A)$  и по допускане  $\mathcal{P}(A) \subseteq A$ , от където  $\mathcal{R}_A \in A$ .

Но  $\mathcal{R}_A \in A \Leftrightarrow \mathcal{R}_A \in A \wedge \mathcal{R}_A \notin \mathcal{R}_A \Leftrightarrow \mathcal{R}_A \notin \mathcal{R}_A$ . Противоречие! След.  $\neg \exists A(\mathcal{P}(A) \subseteq A)$

**Опр** Казваме, че множеството  $z$  е транзитивно, ако  $z \subseteq \mathcal{P}(z)$ . (ще бележим с  $trans(z)$ )

Тоест  $z$  е транзитивно  $\Leftrightarrow \forall y(y \in z \Rightarrow y \subseteq z) \Leftrightarrow \forall x \forall y(x \in y \wedge y \in z \Rightarrow x \in z)$

$\bigcup z \subseteq z$

**ТВ** Нека  $x$  е множество. Тогава:

1.  $trans(x) \Rightarrow trans(\bigcup x)$
2.  $\forall y(y \in x \Rightarrow trans(y)) \Rightarrow trans(\bigcup x)$
3.  $\forall y(y \in x \Rightarrow trans(y)) \Rightarrow trans(\bigcap x)$
4.  $trans(x) \Rightarrow trans(\mathcal{P}(x))$
5.  $trans(x) \Rightarrow trans(x \cup \{x\})$

Заб:  $S(x) = x \cup \{x\}$  е наследник на  $x$

**Док 1:** Нека  $x$  е транз. Нека  $y \in \bigcup x$ . Следователно  $\exists z(y \in z \wedge z \in x)$ . Нека  $z_0$  е свидетел за това:  $y \in z_0, z_0 \in x$ . Но  $trans(x)$ , от където  $y \in x$ . От  $y \in x$ , винаги е вярно че  $y \subseteq \bigcup x$ . Тогава  $y \subseteq \bigcup x$ . След  $\bigcup x$  е транзитивно.

**Док 2:** Нека вс. ел. на  $x$  е транзитивно множество. Нека  $y \in \bigcup x$ . Нека  $z$  е т.ч.  $y \in z \wedge z \in x$ . Но  $z$  е транзитивно ( $z \in x$ ) значи  $y \subseteq z$ . Понеже  $z \in x$ , то  $z \in \bigcup x$ . Така  $y \subseteq z \wedge z \subseteq \bigcup x$ , от където  $y \subseteq \bigcup x$ . Т.е.  $trans(\bigcup x)$

**Док 3:** Нека  $x$  е множество от транзитивни множества.

Заб: Трябва да внимаваме, защото  $\forall y(y \in \emptyset \Rightarrow trans(y))$

Ако  $x = \emptyset$ , то  $\bigcup x = \bigcup \emptyset = \emptyset$

Нека сега  $x \neq \emptyset$ . Нека  $y \in \bigcap x$ . Тогава  $\forall z(z \in x \Rightarrow y \in z)$ . Понеже  $\forall z(z \in x \Rightarrow trans(z))$ , то  $\forall z(z \in x \Rightarrow y \subseteq z)$ . Така  $y$  съдържа елементи, които са общи за всички елементи на  $x$ . Тогава  $y \subseteq \bigcap x$ . Следователно  $trans(\bigcap x)$ .

**Док 4:** Нека  $trans(x)$ .

Можем да използваме че  $\bigcup z \subseteq z$  и можем да докажем следното  $\bigcup \mathcal{P}(x) = x \subseteq \mathcal{P}(x)$



Друг подход:

$$trans(x) \implies x \subseteq \mathcal{P}(x) \implies \mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(x)) \implies trans(\mathcal{P}(x))$$

Док 5: Нека  $trans(x)$ . Нека  $y \in S(x) = x \cup \{x\}$ . Ако  $y \in x$ , то понеже  $trans(x)$  имаме че  $y \subseteq x$ . Но  $x \subseteq S(x) = x \cup \{x\}$ . Така  $y \subseteq S(x)$ . Ако  $y \in \{x\}$ , то  $y = x \subseteq S(x)$ .  
 $\forall y(y \in S(x) \Rightarrow y \subseteq S(x))$ . Така  $trans(S(x))$

Въвеждаме още съкратен синтаксис (синтактична захар) за  $\phi(x)$  и  $A$  - множество:

- $(\exists x \in A)(\phi(x)) \Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge \phi(x))$
- $(\forall x \in A)(\phi(x)) \Leftrightarrow \forall x(x \in A \Rightarrow \phi(x))$
- $\exists! x(\phi(x)) \Leftrightarrow \exists x(\phi(x) \wedge \forall y(\phi(y) \Rightarrow x = y))$

## Лекция 3

**def** Декартово произведение

$A \times B = \{ \langle a, b \rangle \mid a \in A \wedge b \in B \}$ . Тук  $\phi(x) \Leftrightarrow \exists a \exists b (x = \langle a, b \rangle \wedge a \in A \wedge b \in B)$   
и  $x \in A \times B \Leftrightarrow \phi(x)$

Наблюдение:  $\langle a, b \rangle, a \in A$  и  $b \in B$

$\{a\} \subseteq A \subseteq A \cup B, \{a, b\} \subseteq A \cup B$

$\{a\}, \{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$

$\{\{a\}, \{a, b\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

$\langle a, b \rangle \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

$\langle a, b \rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$

**ТВ** За вс. 2 мн-ва  $A$  и  $B$ , същ. единствено мн-во  $C$ , такова че:  
 $\forall u (u \in C \Leftrightarrow \exists a \exists b (a \in A \wedge b \in B \wedge u = \langle a, b \rangle))$

Док за единственост: за домашна.

Док за съществуване: Нека  $C = \{u \mid u \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \wedge \phi(u)\}$ .

Имаме че  $\forall u (\phi(u) \Rightarrow u \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)))$ , от където  $\forall u (u \in C \Leftrightarrow \phi(u))$ . Това единствено множество ще бележим с  $A \times B$  и ще наричаме декартово произведение на  $A$  и  $B$ .

**ТВ** За всеки  $A, B, C$  - множества, е в сила че:

1.  $A \times \emptyset = \emptyset$
2.  $\exists A \exists B (A \times B = B \times A)$ , т.е. операцията не е комутативна
3.  $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$  ? Не е асоциативна!
4.  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
5.  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
6.  $B \times (\bigcup A) = \bigcup \{B \times x \mid x \in A\}$  - като за начало се питаме синтаксиса коректен ли е?  
Тоест това от десния край е мн-во ли е?

Док 5:

$(\subseteq)$  Нека  $x \in A \times (B \cap C)$ . Нека  $a \in A, b \in B \cap C$  са т.ч.  $x = \langle a, b \rangle$ . Но  $b \in B, b \in C$ , от където  $\langle a, b \rangle \in A \times B$  и  $\langle a, b \rangle \in A \times C$ . Така  $x \in (A \times B) \cap (A \times C)$ .

$(\supseteq)$  Нека  $x \in (A \times B) \cap (A \times C)$ . Тогава  $x \in A \times B$  и  $x \in A \times C$ . Нека  $a \in A, b \in B$ , т.ч.  $x = \langle a, b \rangle$ . Нека  $a' \in A$  и  $c \in C$  са такива че  $x = \langle a', c \rangle$ .

Понеже  $\langle a, b \rangle = \langle a', c \rangle$ , то  $a = a'$  и  $b = c$ . Следователно  $b \in B \cap C$ , от където  $x = \langle a, b \rangle \in A \times (B \cap C)$ .

Док 6: Първо да докажем че операцията е коректна.

$B \times x, x \in A \Rightarrow x \subseteq \bigcup A \Rightarrow B \times x \subseteq B \times (\bigcup A) \Rightarrow B \times x \in \mathcal{P}(B \times (\bigcup A))$ .

Тук  $M \Rightarrow \mathcal{P}(B \times (\bigcup A))$ , което ще е резултат от отделянето.

**Лема** Съществува единствено мн-во  $\forall u(u \in C \Leftrightarrow (\exists x \in A)(u = B \times x))$

Док: Единственост - от аксиомата за обемност.

(съществуване): Нека  $C = \{u \mid u \in \mathcal{P}(B \times \bigcup A) \wedge (\exists x \in A)(u = B \times x)\}$ .

$u \in C \implies u \in \mathcal{P}(B \times \bigcup A) \wedge \phi(u) \implies \phi(u)$ . Сега от  $\phi(u) \Rightarrow u \in \mathcal{P}(B \times \bigcup A)$  следва ...

( $\subseteq$ ) Нека  $u \in B \times (\bigcup A)$  е произволно. Нека  $\langle b, c \rangle = u$  като  $b \in B$  и  $c \in \bigcup A$ . Нека  $a \in A$  е т.ч.  $c \in a$ . Тогава  $u = \langle b, c \rangle \in B \times a, a \in A$ . Но  $B \times a \in \{B \times x \mid x \in A\}$ , от където  $u \in \bigcup \{B \times x \mid x \in A\}$

( $\supseteq$ ) Нека  $u \in \bigcup \{B \times x \mid x \in A\}$ . Нека  $a \in A$  е т.ч.  $u \in B \times a$ . Нека  $b \in B, c \in a$  са т.ч.  $u = \langle b, c \rangle$ . Но  $a \in A \implies a \subseteq \bigcup A$ , така  $c \in \bigcup A$ . Тогава  $u = \langle b, c \rangle \in B \times (\bigcup A)$ .

---

Сега от Тинко:

Множествата са естествени числа -  $\mathbb{N}$ ,

т.е. един обект е множество  $\iff$  този обект е естествено число.

Нека  $x$  и  $y$  са множества,  $x = y \iff x = y$  като естествени числа.

Сега ще дефинираме принадлежност.

Нека  $n > 0$ , тогава  $n = (1b_{k-1}...b_1b_0) = 1.2^k + ... + b_1.2^1 + b_0.2^0$

Нека  $x$  и  $y$  са множества. Казваме че  $y \in x$  ако  $b_{y-1} = 1$  в двоичното представяне на  $x$ .

Вижда се че логическите аксиоми са в сила - еквивалентност на равенството и конгруентност.

Какво означава аксиомата за екстенционалност  $\forall x \forall y (\forall z (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y)$ ?

Ами  $x$  и  $y$  имат еднакви двоични представяния, т.е. те са равни.

Аксиома за чифта: Нека  $a$  и  $b$  са множества:

1.  $a = b$ , тогава  $x = 2^a$

2.  $a \neq b$ , тогава  $x = 2^a + 2^b$

Схема за отделяне: Нека  $\phi(x)$  е ТМ свойство.

Нека  $A$  е съвкупността на естествените числа  $x$ , за които  $\phi(x)$  е вярно. Нека  $B$  е множество.

Сега се чудим дали  $\exists C \forall x (x \in C \Leftrightarrow x \in B \wedge \phi(x))$  е изпълнено.

Ами това са тези битове  $b$  на  $B$ , за които е вярно свойството  $\phi(b)$ . Съответно в двоичния запис на  $C$  само на съответните позиции на тези  $b$ -та има 1, на всички останали има 0.

**Аксиома за безкрайност**

Форма на Цермело:  $\exists A (\emptyset \in A \wedge \forall x (x \in A \Rightarrow \{x\} \in A))$

Нека  $A_0$  е множество със свойството  $\emptyset \in A_0 \wedge \forall x (x \in A_0 \Rightarrow \{x\} \in A_0)$ .  $\emptyset \in A_0 \Rightarrow \{\emptyset\} \in A_0$ , така  $\{\emptyset\} \in A_0$  и т.н. Показваме за произволен брой вложения на  $\emptyset$ .

Форма на Фон Нойман:  $\exists A (\emptyset \in A \wedge \forall x (x \in A \Rightarrow x \cup \{x\} \in A))$

$A_0$ :  $\emptyset \in A_0, \{\emptyset\} \in A_0, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in A_0$  и т.н. Ние ще ползваме тази дефиниция когато говорим за естествени числа, където  $0 \Leftarrow \emptyset$ .

**Аксиома за регулярност/фундираност**  $\forall x(x \neq \emptyset \Rightarrow \exists y(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset))$   
(Формулирана от Мириманов през 1917г и от Фон Нойман през 1925г)

**T**

1.  $\neg \exists x(x \in x)$
2.  $\neg \exists x \exists y(x \in y \wedge y \in x)$
3.  $\neg \exists x \exists y \exists z(x \in y \wedge y \in z \wedge z \in x)$
4. Не съществува редица от мн-ва  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$ , такива че  $x_0 \in x_1, x_1 \in x_2, \dots$

Док 1: Да допусканем, че  $\exists x(x \in x)$ . Нека  $x_0$  е свидетел за това съществуване, т.е. нека  $x_0$  е мн-во със свойството  $x_0 \in x_0$ . Нека  $x_1 = \{x_0\}$ , т.е.  $x_0 \in x_1$ . Значи  $x_1 \neq \emptyset$ , следователно  $\exists y(y \in x_1 \wedge y \cap x_1 = \emptyset)$ . Нека  $y_0$  е свидетел за това съществуване, т.е.  $y_0 \in x_1 \wedge y_0 \cap x_1 = \emptyset$ . Така  $y_0 \in x_1$ , но  $x_1 = \{x_0\}$ , следователно  $y_0 = x_0$  и така  $x_0 \in x_0$ . Следователно  $x_0 \in y_0, x_0 \in \{x_0\}, \{x_0 = x_1\}$ . Така  $x_0 \in y_0$  и  $x_0 \in x_1$ . Значи  $x_0 \in y_0 \cap x_1$ . Това е абсурд, понеже  $y_0 \cap x_1 = \emptyset$ .

Док 2: Да доп. че  $\exists x \exists y(x \in y \wedge y \in x)$ . Нека  $x_0$  и  $y_0$  са мн-ва, т.ч.  $x_0 \in y_0 \wedge y_0 \in x_0$ . Нека  $x_1 = \{x_0, y_0\}$ . Така  $x_1 \neq \emptyset$ . От  $x_1 \neq \emptyset \Rightarrow \exists y(y \in x_1 \wedge y \cap x_1 = \emptyset)$ . Следователно  $\exists y(y \in x_1 \wedge y \cap x_1 = \emptyset)$ . Нека  $y_1$  е такова мн-во, че  $y_1 \in x_1 \wedge y_1 \cap x_1 = \emptyset$ .  $y_1 \in x_1, x_1 = \{x_0, y_0\}$ . Следователно  $y_1 = x_0 \vee y_1 = y_0$ . Да разгледаме случаите:

1.  $y_1 = x_0$ . Разглеждаме  $y_0$ . Знаем че  $y_0 \in x_0$  и  $x_0 \in y_0$ . Така  $y_0 \in y_1$ , но  $y_0 \in x_1$  защото  $x_1 = \{x_0, y_0\} \Rightarrow y_0 \in y_1 \cap x_1 \Rightarrow$  противоречие  $y_1 \cap x_1 = \emptyset$
2.  $y_1 = y_0$ .  $x_0 \in y_0$ , следователно  $x_0 \in y_1$ . Така ?...?
3. Сами! Hint: Допускаме че  $x_0 \in y_0 \wedge y_0 \in z_0 \wedge z_0 \in x_0$  и  $x_1 \rightleftharpoons \{x_0, y_0, z_0\}$

**Аксиомна схема за замяната** (С тази аксиома вече имаме аксиомната схема  $\mathcal{ZF}$ )

Имаме един детерминистичен преобразувател (на интуитивно ниво функция) -  $\phi(x, y, \bar{u})$ , в който можем да фиксираме  $\bar{u}$  и за дадено  $x$  то ни връща  $y$ .

Аксиомната схема твърди, че за такова  $\phi$  с дефиниционна област  $A$ , има съответен образ на  $\phi$ . Френкел забелязва че ако разгледаме  $\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \dots, \mathcal{P}^n(\mathbb{N})$ , то не можем да гарантираме че това последното  $\mathcal{P}(N)^n$  съществува.

Схемата: Нека  $\forall u_1 \dots \forall u_n ((\forall x \forall y_1 \forall y_2 (\phi(x, y_1, \bar{u}) \wedge \phi(x, y_2, \bar{u})) \Rightarrow y_1 = y_2) \Rightarrow \forall A \exists B \forall z (z \in B \Leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge \phi(x, z, \bar{u}))))$

Разглеждаме:  $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}, A \rightleftharpoons \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$\phi(x, y) \rightleftharpoons (x = \emptyset \wedge y = a) \vee (x = \{\emptyset\} \wedge y = b)$

$\forall x \forall y_1 \forall y_2 (\phi(x, y_1) \wedge \phi(x, y_2) \Rightarrow y_1 = y_2)$

$\exists B \forall z (z \in B \Leftrightarrow \exists x (x \in A \wedge \phi(x, z)))$

**Аксиома за избора ( $\mathcal{AC}$ )** Нека имам някакво разделяне(разбиване) на множеството  $A$  и взема по един елемент от всяка част.  $\forall z (z \in A \Rightarrow \bigcap z \text{ е синглетон } (\exists u (z \cap c = \{u\})))$

С помощта на аксиомата за избора се доказва че всяко множество може да бъде добре наредено (contraversial).  $\forall x(x \in A \Rightarrow \emptyset) \Rightarrow \exists f(Func(f))$

$$Fom(f) = A \wedge \forall x(x \in A \Rightarrow f(x) \in x)$$

Това поражда и парадокса на Банарх Тарски: Взимаме кълбо В с  $r = 1$ , значи може да разделим  $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_7$ . След което можем да вземем  $B_1 \cup B_2 \cup B_3$  с  $r = 1$  и  $B_4 \cup B_5 \cup \dots \cup B_7$  с  $r = 1$  - абсурд! Аксиомата за избора не е конструктивна!

Аксиомата: Аксиома на мултипликативност - форма на Ръсел, защото още не сме въвели понятието за функция

$$\forall A(\forall x(x \in A \Rightarrow x \neq \emptyset) \wedge \forall x \forall y(x \in A \wedge y \in A \wedge x \neq y \Rightarrow x \cap y = \emptyset) \Rightarrow \exists C \forall x(x \in A \Rightarrow \exists u(x \cap C = \{u\})))$$

Заб: Ако  $A$  е крайно - всичко е точно. Но ако  $A$  е безкрайно вече е различно.

$f : A \rightarrow B, A \twoheadrightarrow B$  (сюрекция), то можем да ограничим домейна за да получим биекция. Тоест съществува  $A_0 \subseteq A : f \upharpoonright A_0$  е биекция м-ду  $A_0$  и  $B$ .

# Лекция 4

**(Бинарни) Релации** Това са множества (обекти от света ни).

Пример:  $P_1(A, l) \Leftrightarrow$  точката  $A$  лежи на правата  $l$ .

Обаче може да имаме различни свойства, които описват еднакви релации (множества).

Ако  $P_2(A, l) \Leftrightarrow$  правата  $l$  минава през точката  $A$ ,

то  $R_1 = \{ \langle A, l \rangle \mid P_1(A, l) \}$  и  $R_2 = \{ \langle A, l \rangle \mid P_2(A, l) \}$  са равни. За нас релация е просто множество от наредени двойки  $R \subseteq A \times B$

**Опр** Бинарна релация е множество, чийто елементи са наредени двойки.

$Rel(R) \Leftrightarrow \forall z(z \in R \Rightarrow \exists x \exists y(z = \langle x, y \rangle))$

Примери:

1.  $\emptyset$  - никъде недефинираната релация

2.  $A$  е множество,  $A \times A$  е релация (пълна релация над  $A$ )

3.  $A$  е мн-во,  $id_A = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \}$  е идентитет на  $A$ .

Заб:  $T = \{ \langle x, x \rangle \mid x = x \}$  не е множество (поражда парадокса на Ръсел)

**def** Нека  $R$  е релация.

Дефиниционна област на  $R$  наричаме:  $Dom(R) \Leftrightarrow \{x \mid \exists y(\langle x, y \rangle \in R)\}$

Област на стойностите на  $R$  наричаме:  $Rng(R) \Leftrightarrow \{y \mid \exists x(\langle x, y \rangle \in R)\}$

**ТВ** За всяка релация  $R$ ,  $Dom(R)$  и  $Rng(R)$  са множества.

Док:  $x \in Dom(R) \Rightarrow \exists y(\langle x, y \rangle \in R) \Rightarrow \exists y(\{x\} \times \{y\} \cap R \neq \emptyset) \Rightarrow \{x\} \in \bigcup R \Rightarrow Dom(R) \subseteq \bigcup \bigcup R$ ,  $Dom(R)$  е определима съвкупност (клас).

$\bigcup \bigcup R$  е множество  $\Rightarrow Dom(R)$  е множество.

Аналогично получаваме  $y \in Rng(R) \Rightarrow y \in \bigcup \bigcup R \Rightarrow Rng(R) \subseteq \bigcup \bigcup R$  - множество.

**ТВ**  $Rel(R) \Rightarrow R \subseteq Dom(R) \times Rng(R)$

Док: Нека  $z \in R$ . Тогава  $z$  е наредена двойка. Нека  $x$  и  $y$  са т.ч.  $z = \langle x, y \rangle$ .

Тогава  $x \in Dom(R)$  и  $y \in Rng(R)$ . Следователно  $z = \langle x, y \rangle \in Dom(R) \times Rng(R)$

**Операции върху релации**  $R, S$  - релации, то  $\Rightarrow R \cup S, R \cap S, R \setminus S$  са релации

$R^{-1} \Leftrightarrow \{ \langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in R \}$  е съвкупност от наредени двойки. Обаче множество ли е?

$R^{-1} = \{ \langle x, y \rangle \mid \langle y, x \rangle \in R \} = \{u \mid \exists x \exists y(u = \langle x, y \rangle \wedge \langle y, x \rangle \in R)\} = \{u \mid u \in Rng(R) \times Dom(R) \wedge \exists x, y(u = \langle x, y \rangle \wedge \langle y, x \rangle \in R)\}$

**def** Операция - композиция на релации.  $(f \circ g)(x) = g(f(x))$

**Опр** Композицията на релациите  $R$  и  $S$  наричаме мн-вото:

$R \circ S \Leftrightarrow \{ \langle x, y \rangle \mid \exists z(\langle x, z \rangle \in R \wedge \langle z, y \rangle \in S) \} = \{u \mid (\exists x, y, z)(u = \langle x, y \rangle \wedge \langle x, z \rangle \in R \wedge \langle z, y \rangle \in S)\} = \{u \mid u \in Dom(R) \times Rng(S) \wedge (\exists x, y, z)(u = \langle x, y \rangle \wedge \langle x, z \rangle \in R \wedge \langle z, y \rangle \in S)\}$

**СВ** Нека  $R, S_1, S_2$  са релации. Тогава са изпълнени:

1.  $R \circ (S_1 \circ S_2) = (R \circ S_1) \circ S_2$  - асоциативност
2.  $(S_1 \cup S_2) \circ R = (S_1 \circ R) \cup (S_2 \circ R)$   
 $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$
3.  $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$ , обратното включване не винаги е вярно.
4.  $R \circ (S_1 \setminus S_2) \supseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$
5.  $(S_1 \circ S_2)^{-1} = S_2^{-1} \circ S_1^{-1}$

Док 3: Нека  $u \in R \circ (S_1 \cap S_2)$ . Нека  $x, y, z$ , т.ч.  $u = \langle x, y \rangle, \langle x, z \rangle \in R$  и  $\langle z, y \rangle \in S_1 \cap S_2$ . Тогава  $\langle z, y \rangle \in S_1$  и  $\langle z, y \rangle \in S_2$ . След.  $\langle x, y \rangle \in R \circ S_1$  и  $\langle x, y \rangle \in R \circ S_2$ . Така  $u = \langle x, y \rangle \in (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$ .

$R = \{\langle x, z \rangle, \langle x, t \rangle\}, z \neq t$   
 $S_1 = \{\langle z, y \rangle\}$   
 $S_2 = \{\langle t, y \rangle\}$   
 $S_1 \cap S_2 = \emptyset, R \circ (S_1 \cap S_2) = R \circ \emptyset = \emptyset$   
 $R \circ S_1 = \langle x, y \rangle$   
 $R \circ S_2 = \langle x, y \rangle$   
 $\implies (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2) = \{\langle x, y \rangle\}$

Док 4: Нека  $u \in (R \circ S_1) \setminus (R \circ S_2)$ . Така  $u \in R \circ S_1$  и  $u \notin R \circ S_2$ . Нека  $x, y, z$  са такива че  $\langle x, z \rangle \in R$  и  $\langle z, y \rangle \in S_1$ . Понеже  $u \notin R \circ S_2$ , то  $\forall t (\langle x, t \rangle \in R \implies \langle t, y \rangle \notin S_2)$ . Но  $\langle x, z \rangle \in R$ , след.  $\langle z, y \rangle \notin S_2$ . Обаче  $\langle z, y \rangle \in S_1$ , от където  $\langle z, y \rangle \in S_1 \setminus S_2$ . От  $\langle x, z \rangle \in R$ , следва че  $u = \langle x, y \rangle \in R \circ (S_1 \setminus S_2)$ .  
 Обратното не е винаги вярно!

Заб:  $(\circ)$  не е комутативна!

**Опр** Нека  $Rel(R)$  и  $A \subseteq Dom(R)$ . Образ на  $A$  при  $R$  наричаме множеството:  
 $R[A] = \{y \mid \exists (x \in A)(\langle x, y \rangle \in R)\} \subseteq Rng(R)$

**Опр** Нека  $Rel(R)$  и  $B \subseteq Rng(R)$ . Праобраз на  $B$  при  $R$  наричаме множеството:  
 $R^{-1}[B] = \{x \mid \exists (y \in B)(\langle x, y \rangle \in R)\} \subseteq Dom(R)$

**Тв (за коректност)** Нека  $R$  е релация и  $B \subseteq Rng(R)$ . Тогава  $(R^{-1})[B] = R^{-1}[B]$ , където  $(R^{-1})[B]$  е образ на  $B$  при  $R^{-1}$ , а  $R^{-1}[B]$  е праобраз на  $B$  при  $R$ .

Док: За вс.  $x$  е в сила че  $x \in (R^{-1}[B]) \iff \exists y (\langle x, y \rangle \in R^{-1} \wedge y \in B) \iff \exists y (y \in B \wedge \langle x, y \rangle \in (R^{-1})^{-1}) \iff \exists y (y \in B \wedge \langle x, y \rangle \in R) \iff x \in (R^{-1})^{-1}[B]$

**Тв** Нека  $\forall x (x \in X \implies x \subseteq Dom(R))$ . Тогава  $R[\bigcup X] = \bigcup \{R[x] \mid x \in X\}$ . Тук  $Rel(R)$  и  $X$  е множество. Това е коректно защото  $(\forall x \in X) x \subseteq Dom(R) \implies \bigcup X \subseteq Dom(R)$ .  
 $a \in \bigcup X \implies \exists x (x \in X \wedge a \in x) \implies a \in Dom(R)$ . Сега това множество ли е?  
 Нека  $x \in X \implies x \subseteq Dom(R) \implies R[x] \subseteq R[Dom(R)]$ . Тогава ако  $A \subseteq A_1 \subseteq Dom(R) \implies R[A] \subseteq R[A_1]$  и съответно  $B \subseteq B_1 \subseteq Rng(R) \implies R^{-1}[A] \subseteq R^{-1}[B_1]$ . Значи това е определяема съвкупност  $\{R[x] \mid x \in X\} \subseteq \mathcal{P}(Rng(R))$ . Всичко е коректно, сега доказателството.

Док: Нека  $b \in R[\bigcup X]$ . Нека  $a \in \bigcup X$  е т.ч.  $\langle a, b \rangle \in R$ . Нека  $x_0 \in X$  е такъв че  $a \in x_0$ .  
Тогава  $b \in R[x_0]$ . Следователно  $b \in \bigcup \{R[x] \mid x \in X\}$

Сега обратното включване. Нека  $b \in \bigcup \{R[x] \mid x \in X\}$ . Нека  $x_0 \in X$  е т.ч.  $b \in R[x_0]$ . Но  $x_0 \subseteq \bigcup X$ . Пак от монотонността следва че  $b \in R[x_0] \subseteq R[\bigcup X]$ .

**Тв** Нека  $Rel(R)$  и  $X$  е мн-во за което е изп. че  $\forall x(x \in X \Rightarrow x \subseteq Dom(R))$ . Тогава  $R[\cap X] \subseteq \cap \{R[x] \mid x \in X\}$ , като не винаги е в сила обратното включване. Ако допълнително  $(\forall y Rng(R))(\exists! x \in Dom(R))(\langle x, y \rangle \in R)$  (нещо като инективност), то тогава  $R[\cap X] = \cap \{R[x] \mid x \in X\}$ .

Док: Нека  $b \in R[\cap X]$ . Нека  $a \in \cap X$  е такава че  $\langle a, b \rangle \in R$ . Следователно за всяко  $x \in X, a \in x$ . Следователно за всяко  $x \in X, b \in R[x]$ . Така  $b$  принадлежи на всички елементи на  $\{R[x] \mid x \in X\}$ , значи  $b \in \cap \{R[x] \mid x \in X\}$ .

Пример:  $X = \{\{a_1\}, a_2\}$  и  $a_1 \neq a_2, R = \{\langle a_1, b_1 \rangle, \langle a_2, b_2 \rangle\}$   
 $\cap X = \{a_1\} \cap \{a_2\} = \emptyset, R[\cap X] = \emptyset$   
 $R[\{a_1\}] = \{y \mid (\exists x \in \{a_1\})(\langle x, y \rangle \in R)\} = \{y \mid \langle a_1, y \rangle \in R\} = \{b\}$ .  
 Значи  $R[\{a_2\}] = \{b\}, \{R[x] \mid x \in X\} = \{\{b\}\}$ .  
 $\cap \{\{b\}\} = \{b\}, A = \{a\}, a = \{b\},$   
 $x \in \cap A \Leftrightarrow \forall a \in A(x \in a)$

Нека  $(\forall y \in Rng(R))(\exists! x \in Dom(R))(\langle x, y \rangle \in R)$ . Нека  $b \in \cap \{R[x] \mid x \in X\}$ .  
 Следователно за всяко  $x \in X, b \in R[x]$ , т.е. за всяко  $x \in X$  същ  $a \in x$ , т.ч.  $\langle a, b \rangle \in R$ .

$b \in Rng(R): x \neq \emptyset$ . Нека  $x_0 \in X$ . Тогава  $b \in R[x_0]$ . След  $b \in Rng(R)$ . Нека  $a_0 \in x_0$  е т.ч.  $\langle a_0, b \rangle \in R$ . Нека сега  $x \in X$  е произволно и  $a \in x$  е т.ч.  $\langle a, b \rangle \in R$ . Но  $\langle a_0, b \rangle \in R$ , от където  $a_0 = a$ . В частност  $a_0 \in x$ , но  $x$  е произволно. Следователно  $a_0 \in \cap X$ . Но тогава  $b \in R[\cap X]$ , защото  $\langle a_0, b \rangle \in R$  и  $a_0 \in \cap X$ . Така  $\cap \{R[x] \mid x \in X\} \subseteq R[\cap X]$

## < Функции >

**Опр** Казваме че релацията  $R$  е функция,  
 ако  $Funct(R)$ , където  $Funct(R) \Leftrightarrow Rel(R) \wedge \forall x \forall y \forall y' (\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle x, y' \rangle \in R \Rightarrow y = y')$

1.  $Funct(R) \Rightarrow Rel(R)$
2.  $Funct(R), Dom(R) = A, Rng(R) \subseteq B$ , то пишем  $R : A \rightarrow B$
3.  $Funct(R), Dom(R) \subseteq A, Rng(R) \subseteq B$ , то ще казваме че  $R$  е частична функция от  $A$  към  $B$ . Ще пишем  $R : A \rightarrowtail B$
4.  $R : A \rightarrow B$  и  $Rng(R) = B$ , ще казваме че  $R$  е сюрекция (епиморфизъм) на  $A$  върху  $B$ .  
 Означаваме с  $R : A \twoheadrightarrow B$
5.  $R : A \rightarrow B, R$  е инекция (мономорфизъм), ако  $\forall x \forall x' \forall y (x \neq x' \wedge \langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle x', y \rangle \notin R)$ . Означаваме  $R : A \hookrightarrow B$



6.  $R : A \rightarrow B$  е биекция, ако  $R$  е сюрекция на  $A$  в-ху  $B$  и  $R$  е инекция. Означаваме  $R : A \twoheadrightarrow B$

Понеже функциите са релации, директно се пренасят и понятията за образ и праобраз.

Ще използваме  $f, g, h, \dots$ , за да означаваме че дадена релация е функция.

Ако  $Func(f)$ , вместо  $\langle x, y \rangle \in f$  ще пишем  $f(x) = y$

**Следствие** Нека  $Func(f)$  и нека  $X$  и  $Y$  са такива мн-ва че:

$(\forall x \in X)(x \subseteq Dom(f))$  и  $(\forall y \in Y)(y \subseteq Rng(f))$ .

Тогава  $f[\bigcup X] = \bigcup \{f[x] \mid x \in X\}$  и  $f[\bigcap X] \subseteq \bigcap \{f[x] \mid x \in X\}$  (равенство не винаги се достига).

Изпълнено е че  $f^{-1}[\bigcup X] = \bigcup \{f^{-1}[x] \mid x \in X\}$  и  $f^{-1}[\bigcap X] = \bigcap \{f^{-1}[x] \mid x \in X\}$ .

$\forall y \in Rng(R) \exists! x \in Dom(R)(\langle x, y \rangle \in R)$

$(\Rightarrow)$  Нека  $Func(f^{-1})$ . Нека  $x, x', y$  са т.ч.  $x \neq x'$  и  $\langle x, y \rangle \in f$ . Тогава  $\langle y, x \rangle \in f^{-1}$ . Ако доп, че  $\langle x', y \rangle \in f$ , то  $\langle y, x' \rangle \in f^{-1}$ . Понеже  $f^{-1}$  е функция, то  $x = x'$ . Но  $f^{-1}$  е функция, т.е.  $x \neq x' \Rightarrow$  Противоречие!  $\Rightarrow \langle x', y \rangle \notin f$  и значи  $f$  е инективна.

$(\Leftarrow)$  Нека  $f$  е инективна. Нека  $x, y, y'$  са т.ч.  $\langle x, y \rangle, \langle x, y' \rangle \in f^{-1}$ .

Тогава  $\langle y, x \rangle, \langle y', x \rangle \in f$  и понеже  $f$  е инективна то  $y = y'$ . Следователно  $Func(f^{-1})$ .

**Тв** Нека  $f$  и  $g$  са функции.

Тогава  $f \circ g$  е функция с  $Dom(f \circ g) = \{x \mid x \in Dom(f) \wedge f(x) \in Dom(g)\}$ .

За всяко  $x \in Dom(f \circ g)$  е вярно  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ .

Док:  $Rel(f \circ g)$ . Нека  $\langle x, y \rangle, \langle x, y' \rangle \in f \circ g$ . Нека  $z, z'$  са т.ч.  $\langle x, z \rangle \in f \wedge \langle z', y \rangle \in g$  и  $\langle x, z' \rangle \in f \wedge \langle z', y' \rangle \in g$

$Func(f) \Rightarrow z = z' \Rightarrow \langle z, y \rangle, \langle z, y' \rangle \in g \Rightarrow y = y'$  (от  $Func(g)$ )

Нека  $x \in Dom(f \circ g)$ . Нека  $y$  е т.ч.  $\langle x, y \rangle \in f \circ g$ . Нека  $z$  е т.ч.  $\langle x, z \rangle \in f$  и  $\langle z, y \rangle \in g$ . Тогава  $x \in Dom(f)$  и  $z = f(x)$ . Но  $z \in Dom(g)$ , от където  $f(x) \in Dom(g)$ .

Сега наобратно. Взимаме  $x \in Dom(f)$  и  $f(x) \in Dom(g)$ . Тогава  $\langle x, f(x) \rangle \in f$  и  $\langle f(x), g(f(x)) \rangle \in g$ . Следователно  $\langle x, g(f(x)) \rangle \in f \circ g$ . В частност получаваме че  $x \in Dom(f \circ g)$  и понеже  $Func(f \circ g)$ , то  $(f \circ g)(x) = g(f(x))$ .

**Опр** Казваме, че функциите  $f$  и  $g$  са съвместими, ако  $Func(f \cup g)$ .

**Опр**  $f : A \rightarrow B, A_1 \subseteq A$

Рестрикция на  $f$  до  $A_1$ :  $f \upharpoonright A_1 \Leftarrow f \cap (A_1 \times Rng(f))$

**Тв**  $f$  и  $g$  са съвместими  $\iff f \upharpoonright (Dom(f) \cap Dom(g)) = g \upharpoonright (Dom(f) \cap Dom(g))$

Док: *To be continued...*

Да уточним някакви неща:

$$f : A \rightarrow B, A_1 \subseteq A = \text{Dom}(f)$$

$$\text{Рестрикция на } f \text{ до } A_1: f \upharpoonright A_1 = f \cap (A_1 \times \text{Rng}(f)) = \{ \langle x, f(x) \rangle \mid x \in A_1 \}$$

1.  $\text{Funct}(f \upharpoonright A_1)$
2.  $f \upharpoonright A_1 \subseteq f \upharpoonright A$
3.  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A \Rightarrow f \upharpoonright A_1 \subseteq f \upharpoonright A_2$

**Опр**  $f$  и  $g$  са съвместими функции, ако  $f \cup g$  е функция.

**ТВ** Функциите  $f$  и  $g$  са съвместими  $\Leftrightarrow f \upharpoonright (\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)) = g \upharpoonright (\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g))$

Док: ( $\rightarrow$ ) Нека  $\text{Funct}(f \cup g)$ . Нека  $u \in f \upharpoonright (\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g))$ . Тогава  $u = \langle x, y \rangle$  като  $x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$  и  $y = (f \upharpoonright (\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)))(x) = f(x)$ . Понеже  $x \in \text{Dom}(g)$ , то  $\langle x, g(x) \rangle \in g$ . Така  $\langle x, f(x) \rangle, \langle x, g(x) \rangle \in f \cup g$ . Понеже  $\text{Funct}(f \cup g)$ , то  $f(x) = y = g(x)$ . След.  $u = \langle x, y \rangle = \langle x, g(x) \rangle \in g$  и понеже  $x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$ , то  $u = \langle x, y \rangle \in g \upharpoonright (\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g))$ .

( $\Leftarrow$ ) Нека  $f \upharpoonright (\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)) = g \upharpoonright (\text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g))$ . Ясно е, че  $\text{Rel}(f \cup g)$ . Нека  $\langle x, y \rangle, \langle x, y' \rangle \in f \cup g$

Възможни са 3 случая:

1.  $\langle x, y \rangle, \langle x, y' \rangle \in f$ . Но  $\text{Funct}(f)$ , от където  $y = y'$ .
2.  $\langle x, y \rangle, \langle x, y' \rangle \in g$ . Подобно - получава се  $y = y'$
3.  $\langle x, y \rangle \in f, \langle x, y' \rangle \in g$ . Тогава  $x \in \text{Dom}(f), x \in \text{Dom}(g)$ . След  $x \in \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$ . Така  $y = f(x) = g(x) = y'$

**ТВ** Нека  $F$  е множество от две по две съвместими функции. Тогава  $\bigcup F$  е функция като:  $\text{Dom}(\bigcup F) = \bigcup \{ \text{Dom}(f) \mid f \in F \}$   $\text{Rng}(\bigcup F) = \bigcap \{ \text{Rng}(f) \mid f \in F \}$

Док: Ясно е, че  $\text{Rel}(\bigcup F)$ . Нека  $\langle x, y \rangle \in \bigcup F$  и  $\langle x, y' \rangle \in \bigcup F$ . Нека  $f, f' \in F$  са такива че  $\langle x, y \rangle \in f$  и  $\langle x, y' \rangle \in f'$ . Тогава  $\text{Funct}(f \cup f')$ , като  $\langle x, y \rangle, \langle x, y' \rangle \in f \cup f'$ . Следователно  $y = y'$ . Така получаваме  $\text{Funct}(\bigcup F)$ .

Нека  $x \in \text{Dom}(\bigcup F)$ . Нека  $y$  е т.ч.  $\langle x, y \rangle \in \bigcup F$ . Нека  $f_0 \in F$  е такова че  $\langle x, y \rangle \in f_0$ . Тогава  $x \in \text{Dom}(f_0)$  и следователно  $x \in \bigcup \{ \text{Dom}(f) \mid f \in F \}$ . Нека сега  $f_0 \in F$  е т.ч.  $x \in \text{Dom}(f_0)$ . Но  $f_0 \subseteq \bigcup F$  и  $\bigcup F$  е функция, следователно  $\text{Dom}(f_0) \subseteq \text{Dom}(\bigcup F)$ . Следователно  $x \in \text{Dom}(\bigcup F)$

# Лекция 5

**Опр** За  $f : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ , ще казваме че  $f$  е монотонна, ако:  
 $(\forall X_1 \supset A)(\forall X_2 \subseteq A)(X_1 \subseteq X_2 \rightarrow f(X_1) \subseteq f(X_2))$

**Опр** И за монотонна  $f : B \rightarrow B$ ,  $x$  е неподвижна точка на  $f$ , ако  $f(x) = x$

**Лема** (Тарски)

Нека  $f : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$  е монотонна функция. Тогава  $f$  има неподвижна точка.

Нещо повече,  $f$  има най-малка и най-голяма неподвижна точка:

тоест съществуват  $X_1, X_2 \in \mathcal{P}(A)$  т.ч.  $f(X_1) = X_1, f(X_2) = X_2$  и за всяко  $X \in \mathcal{P}(A)$  с  $f(X) = X$  е изпълнено, че  $X_1 \subseteq X \subseteq X_2$ .

Док: Нека  $\Pi = \{X \mid X \subseteq A \wedge f(X) \subseteq X\}$  Понеже  $A \in \Pi$ , то  $\Pi \neq \emptyset$ . Нека  $X_1 = \bigcap \Pi$ . За вс.  $X \in \Pi$ ,  $X_1 = \bigcap \Pi \subseteq X$ . Понеже  $f$  е монотонна, то за вс.  $X \in \Pi$ ,  $f(X_1) \subseteq f(X) \subseteq X$ . Следователно  $f(X_1) \subseteq \bigcap \Pi = X_1$ . Понеже  $X_1 \subseteq A$ , то  $X_1 \in \Pi$ . Отново от монотонността на  $f$  имаме, че  $f(f(X_1)) \subseteq f(X_1)$ . Значи  $f(X_1) \in \Pi$ . Следователно  $X_1 \subseteq f(X_1)$ . От тук  $f(X_1) = X_1$  и така  $X_1$  е неподвижна точка на  $f$ . Ясно се вижда че:  $f(X) = X \implies x \in \Pi \implies X_1 = \bigcap \Pi \subseteq X \implies X_1$  е най-малката неподвижна точка на  $f$

За най-голяма неподвижна точка - за домашна!

(от Тинко)

< Равномощни множества. Сравняване на множества по мощност >

**def** Казваме че  $A$  и  $B$  са равномощни, ако съществува биекция на  $A$  върху  $B$ , тоест  $\exists f(f : A \rightarrow B)$ . Означения:  $|A| = |B|$  или  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$   
Съответно  $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{B}} \iff \neg(\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}})$

Казваме че мощността на  $A$  не надминава мощността на  $B$ , ако  $\exists f(f : A \rightarrow B)$ .  
Пишем  $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$ .

Казваме че мощността на  $A$  е строго по-малка от мощността на  $B$ , ако  $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} \wedge \overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{B}}$ .  
Пишем  $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$ .

**Св**

1.  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}$ , от  $Id_A : A \rightarrow A$
2.  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} \implies \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}}$
3.  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} \wedge \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{C}} \implies \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}}$

Док 2: Нека  $f_0 : A \rightarrow B$  (свидетел за съществуващата биекция), тогава  $f_0^{-1} : B \rightarrow A$ .  
Значи  $\exists f'(f' : B \rightarrow A)$

Док 3:  $\exists f(A \twoheadrightarrow B)$  и  $\exists f(B \twoheadrightarrow C)$ . Нека вземем свидетели:  $f_0 : A \twoheadrightarrow B$ ,  $f_1 : B \twoheadrightarrow C$ .  
 Нека  $h = f_0 \circ f_1$ , т.е.  $h(x) = f_1(f_0(x))$ . Вижда се че  $h : A \twoheadrightarrow C$ . Следователно  $\exists f'(f' : A \twoheadrightarrow C)$ .

Нека  $A$  и  $c$  са произволни множества. Тогава  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A \times \{c\}}}$  и  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{\{c\} \times A}}$   
 Дефинираме  $f : f(a) = \langle a, c \rangle$  за вс.  $a \in A$ .  $f = \{u \mid \exists a(a \in A \wedge u = \langle a, \langle a, c \rangle \rangle)\} =$   
 $\{\langle a, c \rangle \mid a \in A\}$ , съответно тук отделяме  $u \in A \times \{c\}$ . **idk???**

**ТВ**  $A \neq \emptyset \iff \neg \exists B \forall x(x \in B \iff \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{A}})$

Док: Нека  $A \neq \emptyset$ .  $a_0 \in A$ . Да доп. че  $\exists B \forall x(x \in B \iff \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{A}})$ . Нека  $B$  е свидетел за съществуването  $\forall x(x \in B \iff \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{A}})$ . И нека вземем  $B_0 \Leftarrow \{w \mid w \in B \wedge \exists c(w = A \times \{c\})\}$ .  
 Значи  $Rel(\bigcup B_0)$ .

Нека  $t$  е произволно множеството, тогава  $A \times \{t\} \in B_0$ . Значи за  $\langle a_0, t \rangle \in \bigcup B_0$ .

Тогава  $t \in Rng(\bigcup B_0)$ . Така,  $\forall t(t \in Rng(\bigcup B_0))$  - абсурт! (от допускането че  $B_0$  съществува).

Допускането че  $A \neq \emptyset$  беше съществено.

Ако  $A = \emptyset$ , то  $\exists B(x \in B \iff \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{A}})$ . И единствената възможност е  $B = \{\emptyset\}$

**ТВ**  $\forall A \forall B \exists A' \exists B'(\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A'}} \wedge \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{B'}} \wedge A' \cap B' = \emptyset)$

Ще дефинираме  $\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} \Leftarrow \overline{\overline{A' \cup B'}}$ . Как го постигаме?

Взимаме  $c_1 \neq c_2$  и тогава  $A' \Leftarrow A \times \{c_1\}$  и  $B' \Leftarrow B \times \{c_2\}$ . А  $A' \cap B' = \emptyset$

**СВ** Ако  $\overline{\overline{A'}} = \overline{\overline{A''}} \wedge \overline{\overline{B'}} = \overline{\overline{B''}} \wedge A' \cap B' = \emptyset \wedge A'' \cap B'' = \emptyset \implies \overline{\overline{A' \cup B'}} = \overline{\overline{A'' \cup B''}}$

Док: Взимаме свидетели  $f_1 : A' \twoheadrightarrow A''$  и  $f_2 : B' \twoheadrightarrow B''$ , тогава  $f_1 \cup f_2$  е функция, защото  $f_1$  и  $f_2$  са съвместими. Съответно  $Dom(f_1 \cup f_2) = Dom(f_1) \cup Dom(f_2) = A' \cup B'$ . Аналогично за за  $Rng(f_1 \cup f_2)$

**def** Бихме искали да го дефинираме така  $\overline{\overline{A \cdot B}} = \overline{\overline{A \times B}}$ .

Пак ще вземем равномошни на  $A$  и  $B$ .  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A'}} \wedge \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{B'}} \implies \overline{\overline{A \times B}} = \overline{\overline{A' \times B'}}$ .

**def** Ами степенуване -  $k^n$ ? Ако  $\overline{\overline{A}} = k$  и  $\overline{\overline{B}} = n$ , то това ще са всички функции от  $B$  в  $A$ .

Искаме да покажем  $\overline{\overline{A^B}} = \overline{\overline{B_A}}$ , където  $B_A = \{f \mid f : B \rightarrow A\}$ .  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A'}} \wedge \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{B'}} \implies \overline{\overline{A^B}} = \overline{\overline{B'^{A'}}}$

**Задачи**

1.  $\forall A \exists A'(\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A'}} \wedge A \cap A' = \emptyset)$

2. Нека  $A \cap B = \emptyset$ , тогава  $\overline{\overline{A \cup B}}_C = \overline{\overline{A}}_C \times \overline{\overline{B}}_C$

3.  $2 \Leftarrow \{0, 1\}$ , където  $0 \Leftarrow \emptyset$ ,  $1 \Leftarrow \{\emptyset\}$

4.  $\overline{\overline{A_2}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$

5.  $\overline{\overline{(A \times B)}_C} = \overline{\overline{A_{B_C}}}$

**Т** (Кантор-Шрьодер-Берщайн)  $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} \wedge \overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}} \implies \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$

Док: Нека  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow A$ . Търсим биекция  $h$ . Можем да дефинираме  $h \Leftarrow (f \upharpoonright X) \cup (h^{-1} \upharpoonright (A \setminus X))$ , за някое  $X \subseteq A$ . Как да вземем такова  $X$ ?

Трябва ни  $A \setminus g[B \setminus f[x]] = X$  (търсим неподвижна точка?).

Дефинираме  $\mathcal{F} : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ , за  $X \subseteq A$  полагаме  $\mathcal{F}(X) \Leftarrow A \setminus g[B \setminus f[x]]$  и твърдим че  $\mathcal{F}$  е монотонно. Наистина нека  $X_1 \subseteq X_2 \subseteq A$  и  $f[X_1] \subseteq f[X_2]$ . Значи  $B \setminus f[X_2] \subseteq B \setminus f[X_1] \subseteq B$  и  $g[B \setminus f[X_2]] \subseteq g[B \setminus f[X_1]] \subseteq A \setminus g[B \setminus f[X_1]] \subseteq A \setminus g[B \setminus f[X_2]] \subseteq A$ .

$\mathcal{F}(X_1) \subseteq \mathcal{F}(X_2)$ . Следователно от Лемата на Тарски за неподвижната точка -  $\mathcal{F}$  ма неподвижна точка. Нека  $X_0$  е неподвижна точка на  $\mathcal{F}$ , т.е.  $X_0 \subseteq A$  и  $\mathcal{F}(X_0) = X_0$ .

$A \setminus g[B \setminus f[X_0]] = X_0$  и  $A \setminus X_0 = g[B \setminus f[X_0]] = x_0$ . Това може ли да е вярно за произволно множество? Не, защото  $X_0 \subseteq A$ , т.е.  $Rng(g) \subseteq A$

Ние дефинирахме  $h \Leftarrow (f \upharpoonright X) \cup (h^{-1} \upharpoonright (A \setminus X))$ . Това е възможно защото  $Dom(g^{-1}) = Rng(g)$  и  $A \setminus X_0 \subseteq Dom(g^{-1})$ . Каква е дефиниционната област на  $h$ ?  $Dom(h) = Dom(f \upharpoonright x_0) \cup Dom(g^{-1} \upharpoonright (A \setminus X_0)) = X_0 \cup (A \setminus x_0) = A$

$Rng(h) = Rng(f \upharpoonright X_0) \cup Rng(g^{-1} \upharpoonright (A \setminus X_0)) = f[X_0] \cup (B \setminus X_0) = B$ . Това което се случва е че ако  $Dom(f \upharpoonright X_0) \cap Dom(g^{-1} \upharpoonright (A \setminus X_0)) = \emptyset$  и  $Rng(f \upharpoonright X_0) \cap Rng(g^{-1} \upharpoonright (A \setminus X_0)) = \emptyset$  и те са инекции, е в сила твърдението че тяхното обединение също е инекция. Така теоремата е доказана.

# Лекция 6

Т В  $\mathcal{ZF}$  следните са еквивалентни:

- $\forall A \forall B (\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} \vee \overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}})$
- Аксиомата за избора

Т за междинното множество

Нека  $A \subseteq B \subseteq C$ . Тогава ако  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}}$ , то  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$  и  $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{C}}$

Док:  $A \subseteq B, B \subseteq C, \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}}$ . Тогава:  $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$ .  $B \subseteq C \implies \overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{C}}$ . Нека  $f : B \rightarrow C$  и  $g : C \rightarrow A$ , тогава  $h \Leftarrow f \circ g$  и  $h : B \rightarrow A$ .  $h(x_1) = h(x_2) \implies g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ ,  $g$  е инекция и  $f(x_1) = f(x_2)$  - инекция. Тоест  $x_1 = x_2$ .  $g : B \rightarrow A$ , т.е.  $\overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}}$ . Получаваме  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$  (от Т на К.Ш.Б)

Т на Кантор за степенното множество  $\forall A (\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}})$

Док: 1)  $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$ ?

Дефинираме  $f(a) = \{a\}$  за  $a \in A$ . Или по друг начин записано  $f \Leftarrow \{z \mid z \in A \times \mathcal{P}(A) \wedge \exists x \exists y (z = \langle x, y \rangle \wedge x \in A \wedge y = \{y\})\}$

2)  $\neg \exists f (f : A \rightarrow \mathcal{P}(A))$

Да доп че  $\exists f (f : A \rightarrow \mathcal{P}(A))$ . Нека  $g : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$  е свидетел за това съществуване. Нека  $B \Leftarrow \{x \mid x \in A \wedge x \notin g(x)\}$ ,  $B \subseteq A$ , т.е.  $B \in \mathcal{P}(A)$ ,  $\exists x (g(x) = B)$ . Нека  $x_0 \in A$  и  $g(x_0) = B$

1)  $x_0 \in g(x_0)$ . Тъй като  $g(x_0) = B$ , то  $x_0 \in B$ . Тогава  $x_0 \notin g(x_0)$ . Знаем че  $x_0 \in g(x_0) \implies x_0 \notin g(x_0)$ . Следователно  $x_0 \notin g(x_0)$ , но  $x_0 \in A$  и от деф. на  $B$  заключаваме  $x_0 \in B$ . Тъй като  $g(x_0) = B$ , то  $x_0 \in g(x_0)$ . Тогава  $x_0 \notin g(x_0) \implies x_0 \in g(x_0) \implies$  Противоречие!

Така получаваме  $x_0 \in g(x_0) \iff x_0 \notin g(x_0)$ , което е противоречие!

Щом  $\neg \exists f (f : A \rightarrow \mathcal{P}(A))$ , значи  $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$ .

$\neg \exists V \forall x (x \in V)$ , да допуснем че  $\exists V \forall x (x \in V)$ .

Нека вземем такова  $V$ , тогава от  $\mathcal{P}(V) \leq V, \overline{\overline{\mathcal{P}(V)}} \leq \overline{\overline{V}}$  и  $\overline{\overline{V}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(V)}} \implies$  противоречие!

Получаваме го от  $\overline{\overline{V}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(V)}} \implies \overline{\overline{V}} \leq \overline{\overline{\mathcal{P}(V)}}$ , т.е. съществува биекция - абсурд!

Тв  $\neg \exists A \forall x (\exists y \in A) (\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}})$

Док: Да допуснем, че  $\exists A \forall x (\exists y \in A) (\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}})$ . Нека  $A_0$  е свидетел за съществуването, т.е.  $A_0$  е такова че  $\forall x (\exists y \in A_0) (\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}})$ . Нека разгледаме  $\bigcup A_0$ . Нека  $x$  е произволно множество, т.ч.  $(\exists y \in A_0) (\overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}})$ .  $y \subseteq A_0, \overline{\overline{y}} \leq \overline{\overline{\bigcup A_0}}$ . От тук получаваме  $\overline{\overline{x}} \leq \overline{\overline{A_0}}$ . В частност за  $x = \mathcal{P}(\bigcup A_0)$  и  $\overline{\overline{\mathcal{P}(\bigcup A_0)}} \leq \overline{\overline{\bigcup A_0}}$  - противоречие!

< Частични наредби >

**Опр** Нека  $R$  е бинарна релация. Казваме че:

- $R$  е над  $A$ , ако  $R \subseteq A \times A$
- $R$  е рефлексивна в  $A$ , ако  $\forall x(x \in A \Rightarrow \langle x, x \rangle \in R)$
- $R$  е антисиметрична, ако  $\forall x \forall y(\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, x \rangle \in R \Rightarrow x = y)$
- $R$  е асиметрична, ако  $\forall x \forall y(\langle x, y \rangle \in R \Rightarrow \langle y, x \rangle \notin R)$
- $R$  е транзитивна, ако  $\forall x \forall y \forall z(\langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \Rightarrow \langle x, z \rangle \in R)$
- $R$  е ирефлексивна, ако  $\forall x(x \in A \Rightarrow \langle x, x \rangle \notin R)$

**Тв** Нека  $R$  е бинарна релация над  $A$ . Тогава:

- $R$  е рефлексивна в  $A \iff id_A \subseteq R$
- $R$  е транзитивна  $\iff R \circ R \subseteq R$
- $R$  е антисиметрична  $\iff R \cap R^{-1} \subseteq id_A$
- $R$  е асиметрична  $\iff R \cap R^{-1} = \emptyset$
- $R$  е ирефлексивна  $\iff R \cap id_A = \emptyset$

**Опр**  $R$  е частична наредба в  $A$ , ако  $R$  е над  $A$ , ако  $R$  е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна в  $A$ . Тогава наредената двойка  $\langle A, R \rangle$  ще наричаме частично наредено множество.

Вярно ли е че  $\forall A \exists R(\langle A, R \rangle \text{ - ч.н.м.})$ ? Да -  $id_A^{-1} = id_A$

**Опр** Ако  $\langle A, R \rangle$  е частично наредено множество,  $x, y \in A$ . Казваме че  $x$  и  $y$  са  $R$ -сравними, ако  $\langle x, y \rangle \in R \vee \langle y, x \rangle \in R$ .

**Заб:** " $\langle A, R \rangle$  е ч.н.м." е определимо свойство -  $\phi(A, R)$ .

Ако  $\langle A, R \rangle$  - ч.н.м,  $A_1 \subseteq A \implies \langle A_1, R \cap (A_1 \times A_1) \rangle$  - тази наредба се нарича индуцирана наредба в  $A_1$

**Опр**  $R$  е строга частична наредба в  $A$  ако  $R$  е над  $A$ ,  $R$  е антисиметрична и транзитивна. (+ ирефлексивност). Тогава  $\langle A, R \rangle$  - строго частично наредено множество.

**Тв** Нека  $R$  е релация над  $A$ , която е асиметрична. Тогава  $R$  е ирефлексивна.

**Док:** Нека  $R \subseteq A \times A$  е асиметрична, но не е ирефлексивна. Тоест  $\exists x(x \in A \wedge \langle x, x \rangle \in R)$ . Нека  $a$  е свидетел за това, т.е.  $a \in A \wedge \langle a, a \rangle \in R$ . Тогава по асиметричността на  $R$  получаваме, че  $\langle a, a \rangle \notin R$ . Противоречие!  $\implies R$  е ирефлексивна.

Вярно ли е че  $\forall A \exists R(R \text{ - строга ч.н. в } A)$ ? Да това е  $\emptyset$

**Тв** Нека  $R$  е релация над  $A$ . Ако  $R$  е частична наредба в  $A$ , то  $R \setminus id_A$  е строга частична наредба в  $A$ . Ако  $R$  е с.ч.н. в  $A$ , то  $R \cup id_A$  е ч.н. в  $A$ .

Док: 1) Нека  $R$  е ч.н. в  $A$ . Тогава  $(R \setminus id_A) \cap (R \setminus id_A)^{-1} = (R \setminus id_A) \cap (R^{-1} \setminus id_A^{-1}) = (R \setminus id_A) \cap (R^{-1} \setminus id_A) = (R \cap R^{-1}) \setminus id_A \subseteq id_A \setminus id_A = \emptyset$ , защото  $R$  е антисиметрична, т.е.  $R \cap R^{-1} \subseteq id_A$ . Следователно  $R \setminus id_A$  е асиметрична.

Сега док че тя е транзитивна. Нека  $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in R \setminus id_A$ . Но тогава  $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in R$  и от транзитивността на  $R$  имаме, че  $\langle x, z \rangle \in R$ . Да допуснем, че  $\langle x, z \rangle \in id_A$ , тогава  $x = z$ . Така  $\langle x, y \rangle, \langle y, x \rangle \in R$ . От където  $y = x$ , т.е.  $\langle x, y \rangle \in id_A$ . Но  $\langle x, y \rangle \in R \setminus id_A \implies$  Противоречие! Следователно  $\langle x, z \rangle \notin R \setminus id_A$ . Тогава  $R \setminus id_A$  е транзитивна. И така получаваме че е с.ч.н в  $A$ .

2) Нека  $R$  е с.ч.н. в  $A$ . Тогава  $id_A \subseteq R \cup id_A$ , от където  $R \cup id_A$  е рефлексивна в  $A$ . Понеже  $R$  е асиметрична, то  $R \cap R^{-1} = \emptyset$ . Тогава  $(R \cup id_A) \cap (R \cup id_A)^{-1} = (R \cup id_A) \cap (R^{-1} \cup id_A^{-1}) = (R \cup id_A) \cap (R^{-1} \cup id_A) = (R \cup id_A) \cap (R^{-1} \cup id_A) = (R \cup R^{-1}) \cup id_A = \emptyset \cup id_A = id_A$ . В частност  $R \cup id_A$  е антисиметрична. Накрая имаме, че  $(R \cup id_A) \circ (R \cup id_A) = R \circ R \cup R \circ id_A \cup id_A \circ R \cup id_A \circ id_A = R \circ R \cup R \cup id_A \subseteq R \cup id_A$ , защото  $R$  е транзитивна  $\implies R \cup id_A$  е транзитивна. Така получаваме че  $R \cup id_A$  е ч.н.

Ако  $R$  е ч.н. в  $A$ , то  $R = (R \setminus id_A) \cup id_A$ , като  $R \setminus id_A$  е строга ч.н. в  $A$ .  $R$  - ч.н. в  $A \iff$  съществува  $S$  - с.ч.н. в  $A$ , т.ч.  $R = S \cup id_A$ .

Подобно, ако  $S$  е с.ч.н. в  $A$ , то  $S = (S \cup id_A) \setminus id_A$ , като  $S \cup id_A$  е ч.н. в  $A$ .  $S$  - с.ч.н. в  $A \iff$  съществува  $R$  - ч.н. в  $A$ , т.ч.  $S = R \setminus id_A$ .

**Тв** Ако  $\langle A, R \rangle$  е (с.)ч.н.  $\iff \langle A, R^{-1} \rangle$  - (с.)ч.н. множество.  $\langle A, R^{-1} \rangle$  наричаме обратна наредба на  $R$ .

Док:  $R$  е рефлексивна в  $A \iff id_A \subseteq R \iff id_A^{-1} \subseteq R^{-1} \iff id_A \subseteq R^{-1} \iff R^{-1}$  е рефлексивна в  $A$ .

$R$  е асиметрична  $\iff R \cap R^{-1} = \emptyset \iff R^{-1} \cap R = \emptyset \iff R^{-1} \cap (R^{-1})^{-1} = \emptyset \iff R^{-1}$  е асиметрична

$R$  е антисиметрична  $\iff R \cap R^{-1} \subseteq id_A \iff R^{-1} \cap (R^{-1})^{-1} \subseteq id_A \iff R^{-1}$  е антисиметрична

$R$  е транзитивна  $\iff R \circ R \subseteq R \iff (R \circ R)^{-1} \subseteq R^{-1} \iff R^{-1} \circ R^{-1} \subseteq R^{-1}$  е транзитивна

**Опр** Нека  $\langle A, R \rangle$  - ч.н.м.,  $B \subseteq A$  и  $a \in A$ . Казваме че:

- $a$  е горна граница за  $B$  в  $\langle A, R \rangle$ , ако  $\forall x (x \in B \implies \langle x, a \rangle \in R)$
- $a$  е най-голям елемент на  $B$ , ако  $a \in B$  и  $a$  е горна граница за  $B$
- $a$  е долна граница за  $B$  в  $\langle A, R \rangle$ , ако  $a$  е горна граница за  $B$  в  $\langle A, R^{-1} \rangle$
- $a$  е най-малък елемент на  $B$  в  $\langle A, R \rangle$ , ако  $a$  е най-голям елемент на  $B$  в  $\langle A, R^{-1} \rangle$
- $a$  е точна горна граница за  $B$  в  $\langle A, R \rangle$ , ако  $a$  е горна граница за  $B$  в  $\langle A, R \rangle$  и  $a$  е най-малкият елемент на множеството от горни граници за  $B$  в  $\langle A, R \rangle$  в  $\langle A, R \rangle$ .  
Означава се  $a = \sup(B) \langle A, R \rangle$ . (Тук ч.н.м. го записа на долния ред ??)
- $a$  е точна долна граница за  $B$  в  $\langle A, R \rangle$ , ако  $a$  е точна горна граница за  $B$  в  $\langle A, R^{-1} \rangle$ .  
Означава се  $a = \inf(B) \langle A, R \rangle = \sup(B) \langle A, R^{-1} \rangle$
- $a$  е максимален елемент на  $B$  в  $\langle A, R \rangle$ , ако  $\forall x (x \in B \wedge \langle a, x \rangle \in R \implies x = a)$
- $a$  е минимален елемент на  $B$  в  $\langle A, R \rangle$ , ако е максимален в  $\langle A, R^{-1} \rangle$



---

Нова лекция!

Предния път разглеждахме наредени множества.

$\langle A, \subseteq_A \rangle$  - ч.н.м. (правим ограничение до елементите на  $A$ )

$x \subseteq_A y \Leftrightarrow x, y \in A \wedge x \subseteq y$ , ако  $B \subseteq A$ , то не е задължително  $B$  да има точна горна граница.

Пример:  $A = \{\{0\}, \{1\}\}$  и  $B = A$ .  $B$  дори няма горна граница.

Тоест  $\neg \exists x(x \in A \wedge \forall y(y \in B(y \subseteq_A x))$

Това не е така при  $\langle \mathcal{P}(A), \subseteq_{\mathcal{P}(A)} \rangle, B \subseteq \mathcal{P}(A)$ . Тогава  $\bigcup B$  е такова множество, че:

1.  $\forall x \in B(x \subseteq \bigcup B)$
2. ако  $C$  е т.ч.  $\forall x \in B(x \subseteq C)$ , то  $\bigcup B \subseteq C$   
 $a \in \bigcup B \Rightarrow$  има  $x \in B$  т.ч.  $a \in x \Rightarrow a \in x \subseteq C$
3.  $\bigcup B \in \mathcal{P}(A)$ ,  $(\forall x \in B)(x \in \mathcal{P}(A)) \Rightarrow (\forall x \in B)(x \subseteq A) \Rightarrow \bigcup B \subseteq A \Rightarrow \bigcup B \in \mathcal{P}(A) \Rightarrow (\forall x \in B)(x \subseteq_{\mathcal{P}(A)} \bigcup B)$  и  $\bigcup B$  е най-малкото с това св-во по отношение на  $\subseteq_{\mathcal{P}(A)}$ .  $\bigcup B$  е т.г.гр. за  $B$  в  $\langle \mathcal{P}(A), \subseteq_{\mathcal{P}(A)} \rangle$

**Опр** Нека  $\langle A, R \rangle$  е ч.н.м.,  $B \subseteq A$ . Казваме, че  $B$  е верига в  $\langle A, R \rangle$ , ако всеки два елемента са  $R$ -сравними. Тоест  $(\forall x \in B)(\forall y \in B)(\langle x, y \rangle \in R \vee \langle y, x \rangle \in R)$

$B$  верига, ако  $\langle B, R \cap (B \times B) \rangle$  е линейно наредено множество.

Пример:  $\emptyset$  е верига във всяко ч.н.м.

$A_B = (A \rightarrow B) = \{f \mid f : A \rightarrow B\}$

Кои са непразните вериги в  $(A_B, \subseteq_{A_B})$ ? Тв? Никоя една верига няма повече от 1 елемент.

Тоест всички вериги имат вида  $\{f\}, f : A \rightarrow B$

---

$(A \twoheadrightarrow B) = \{f \mid f : A \twoheadrightarrow B\}, \text{Dom}(f) \subseteq A, \text{Rng}(f) \subseteq B$

Всяка верига в  $\langle (A \twoheadrightarrow B), \subseteq_{(A \twoheadrightarrow B)} \rangle$  има точна горна граница.

Док: Нека  $\Lambda \subseteq (A \twoheadrightarrow B)$  е верига. Тогава:

1.  $(\forall f \in \Lambda)(f \subseteq \bigcup \Lambda)$
2. За всяко  $C$ , за което  $(\forall f \in \Lambda)(f \subseteq C)$  е в сила че  $\bigcup \Lambda \subseteq C$
3.  $\bigcup \Lambda \in (A \twoheadrightarrow B)$ . Знаем, че  $\Lambda$  е верига  $\Rightarrow \forall f, g \in \Lambda(f \subseteq g \vee g \subseteq f) \Rightarrow (\forall f, g \in \Lambda)(\text{Funct}(f \cup g)) \Rightarrow \Lambda$  е мн-во от съвместими функции  $\Rightarrow \text{Funct}(\bigcup \Lambda) \wedge \text{Dom}(\bigcup \Lambda) = \bigcup \{\text{Dom}(f) \mid f \in \Lambda\} \wedge \text{Rng}(\bigcup \Lambda) = \bigcup \{\text{Rng}(f) \mid f \in \Lambda\} \Rightarrow \text{Funct}(\bigcup \Lambda) \wedge \text{Dom}(\bigcup \Lambda) \subseteq A \wedge \text{Rng}(\bigcup \Lambda) \subseteq B \Rightarrow \bigcup \Lambda \in (A \twoheadrightarrow B)$

**Тв** Нека  $\langle A, R \rangle$  е ч.н.м. Нека  $\mathcal{J} = \{B \mid B \text{ е верига в } \langle A, R \rangle\}$ . Тогава всяка верига в  $\langle \mathcal{J}, \subseteq_{\mathcal{J}} \rangle$  има точна горна граница.

Док: Нека  $\Lambda$  е верига в  $\langle \mathcal{J}, \subseteq_{\mathcal{J}} \rangle$

1.  $(\forall B \in \Lambda)(B \subseteq \bigcup \Lambda)$

$$2. \forall X((\forall B \in \Lambda)(B \subseteq X) \Rightarrow \bigcup \Lambda \subseteq X)$$

$$3. \bigcup \Lambda \text{ е верига в } \langle A, R \rangle, \text{ т.е. } \bigcup \Lambda \in \mathcal{C}$$

$$3) (\forall B \in \Lambda)(B \subseteq A) \Rightarrow \bigcup \Lambda \subseteq A.$$

Нека  $x, y \in \bigcup \Lambda$ . Нека  $B_1, B_2 \in \Lambda$  са т.ч.  $x \in B_1$  и  $y \in B_2$ . Но  $\Lambda$  е верига: така без ограничение можем да считаме, че  $B_1 \subseteq B_2$  тогава  $x, y \in B_2$ ; Но  $B_2$  е верига в  $\langle A, R \rangle$ , където  $x$  и  $y$  са  $R$ -сравними. Следователно  $\bigcup \Lambda$  е верига в  $\langle A, R \rangle$

**Опр** Казваме че ч.н.м.  $\langle A_1, R_1 \rangle$  и  $\langle A_2, R_2 \rangle$  са изоморфни, ако същ. биекция  $f : A_1 \rightarrow A_2$ , т.ч.  $(\forall x \in A_1)(\forall y \in A_1)(\langle x, y \rangle \in R_1 \Leftrightarrow \langle f(x), f(y) \rangle \in R_2)$ ,  $\langle A_1, R_1 \rangle \approx \langle A_2, R_2 \rangle$

...

Ще казваме, че  $\langle A_1, R_1 \rangle$  е изоморфно вложима в  $\langle A_2, R_2 \rangle$ , ако съществува инекция  $f : A_1 \rightarrow A_2$ , която запазва наредбата:  $(\forall x \in A_1)(\forall y \in A_1)(\langle x, y \rangle \in R_1 \Rightarrow \langle f(x), f(y) \rangle \in R_2)$   
 $\langle A_1, R_1 \rangle \preceq \langle A_2, R_2 \rangle$

**Тв** Нека  $\langle A, R \rangle$  е ч.н.м. Тогава  $\langle A, R \rangle \preceq \langle \mathcal{P}(A), \subseteq_{\mathcal{P}(A)} \rangle$ .

Док: TODO!

< Добре наредени множества >

**Опр** Казваме, че ч.н.м.  $\langle W, \leq \rangle$  е добре наредено множество, ако всяко непразно подмножество на  $W$  има най-малък относно

$$\leq. \forall B(B \neq \emptyset \wedge B \subseteq W \Rightarrow \exists y(y \in B \wedge (\forall x \in B)(y \leq x)))$$

Заб: ще използваме  $\leq, <$  за да отбелязваме релация за наредба.

Еквивалентно:  $\langle W, \leq \rangle$  е д.н.м. в което всяко непразно множество има минимален елемент.

Примери за д.н.м:

$$1. \langle \omega, \leq \rangle, \text{ където } \omega = \{x \mid x \text{ е естествено число} \}$$

$$2. n <_1 k \Leftrightarrow (2/n \wedge \neg(2/k)) \vee (2/(k-n) \wedge n < k)$$

3. Всяко крайно л.н.м.

$$4. \langle W, \leq \rangle \text{ е д.н.м. то при } B \subseteq W \Rightarrow \langle B, \leq \cap (B \times B) \rangle - \text{ д.н.м.}$$

**Опр** Казваме че  $x \in W$  е граничен, ако  $x \neq 0_W$  и не е наследник на никой в  $W$ .

$$\text{Limit}(x) \Leftrightarrow x \neq 0_W \wedge \neg \exists y \in W(x = S(y))$$

**Опр** Нека  $x \in W$ . Начален сегмент на  $x$  е мн-вото  $\text{seg}(x) \Leftrightarrow \{y \mid y < x\}$

**Опр**  $I$  е начален елемент на  $\langle W, \leq \rangle$ , ако  $I \leq W$  и е затворено надолу отн.  $\leq$ :  
 $(\forall x \in I) \forall y (y \leq x \Rightarrow y \in I)$

От Тинко:

$A$  е безкрайно  $\implies$  същ.  $A_0, A_0 \subseteq A, A_0$  е изброимо  
 $a_0 \in A, A \setminus \{a_0\}$  не е крайно, поради което то е безкр. Можем да продължим да повтаряме този процес. (използваме аксиомата за избора в някаква слаба форма)

---

- $\mathbb{Z}$  - изброимо много
  - $\mathbb{Q}$  - изброимо много
- 

Можем да представим рационалните числа  $\mathbb{Q}$  като пълно двоично дърво, върхове съответно:

- $Root \Leftarrow 1/1$
- $Left = p/p + q, where Root \Leftarrow p/q$
- $Right = p + q/q, where Root \Leftarrow p/q$

Те са изброимо много (доказваме с индукция по  $p + q$ ), защото върховете са изброимо много. Всички пътища в пълното двоично дърво от дръга страна - са неизброимо много (доказваме с диагонален метод).

**Тв** Реалните числа са неизброимо много.

Док: Всяко реално число  $r \in (0, 1]$  има десетично представяне  $r = 0.r_1r_2...r_n$ , където  $r_n \in \{0, 1, ..., 9\}$ .

Проблем!  $1/2$  има два записа:

- $1/2 = 0,50000...$
- $1/2 = 0,49999...$

Забраняваме записите от вида  $0, r_1r_2...r_n0000000... .$  Така се отърваваме от нулите, които могат да са произволно много. ...

---

**Тв**  $\overline{\overline{\mathbb{R}}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(\mathbb{N})}}$

**Лема за горното Тв** Нека  $A$  е множество,  $A_0 \subseteq A$  и  $A_0$  е изброимо. Ако  $B$  е изброимо и  $B \cap A = \emptyset$ , то  $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A \cup B}}$

**Тв**  $\overline{\overline{\mathbb{R} \times \mathbb{R}}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}}$

# Лекция 7

Заб!  $\mathcal{AL}_0$  вместо първата буква от иврид - алеф??

Ще докажем че  $\overline{(0, 1] \times (0, 1]} = \overline{(0, 1]}$ . Ще забраним представяния, чийто запис се стабилизира на 0. Тоест  $\neg \exists k \forall n > k (x_n = 0)$ . Тогава  $0.x_0y_0x_1y_1$  също няма да се стабилизира на 0, но ще загубим свойството за сюрекция.

$\mathcal{AL}_0^n = \mathcal{AL}_0$  Нека въведем  $\mathbb{N}_n \hookrightarrow \mathbb{N}_{n-1} \times \mathbb{N}$ . Тогава крайните редици  $\mathbb{N} \cup \mathbb{N}_2 \cup \dots$  ??  $\mathcal{AL}_0$  и са изброими.

Нека означим множеството на онези редици  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$  естествени числа, т.ч. съществува  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ , т.е.  $A$  е множество от сходящи редици от естествени числа.

$\{a_n\}_{n=0}^\infty$  от естествени числа е сходяща  $\iff$  същ.  $k : \forall m (a_k = a_{k+m})$

Правим съпоставката  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$  е сходяща  $\rightarrow (a_0, a_1, \dots, a_k)$ ,  $a_{k+1} \neq a_k$

Да разгледаме множеството на полиномите с цели коеф. (с 1 неизвестно) -  $\mathcal{P}$ . Това са редиците от цели числа съответстващи на коефициенти. Тоест  $\overline{\overline{\mathcal{P}}} = \mathcal{AL}_0$ . Тоест те са изброимо много. Следователно онези реални числа, които са корени на полином със цели коеф. и степен  $\geq 1$  са изброимо много. Тоест алгебричните числа ( $Alg$ ) са изброимо много.  $\mathbb{R} \setminus Alg$  са трансцендентните числа. Те са колкото реалните.

---

Колко са множествата от всички редици  $\{a_n\}_{n=0}^\infty$  от реални числа? Това е броя на всички функции  $\mathbb{N}_{\mathbb{R}}$

Континуум хипотеза (Кантор) Няма множество  $A \subseteq \mathbb{R} : \mathcal{AL}_0 < \overline{\overline{A}} < c$

1939, К. Гьодел Ако  $\mathcal{ZF}$  е непротиворечива, то и  $\mathcal{ZF} + \mathcal{CH}$  също е непротиворечива.  
1963

Хипотеза на Линденбаум и Тарски  $\mathcal{CH} \Rightarrow \mathcal{AC}$  (доказана от В. Серпински през 1947)

Обобщена  $\mathcal{CH}$ : Ако  $A$  е безкрайно, то няма мн-во  $B$ , т.ч.  $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$

---

def Индексирана фамилия от множества  $I \neq \emptyset$ ,  $f$  - функция с  $Dom(f) = I$ . Казваме че имаме индекси  $\{f(i)\}_{i \in I}$ ,  $\{A_i\}_{i \in I}$ .  $\bigcup_{i \in I} f(i) \hookrightarrow \bigcup Rng(f)$ .

$\forall x (x \in \bigcup_{i \in I} f(i) \Leftrightarrow (\exists i \in I) (x \in f(i))) \cap \bigcap_{i \in I} f(i) \hookrightarrow \bigcap Rng(f) \quad \forall x (x \in \bigcap_{i \in I} f(i) \Leftrightarrow (\forall i \in I) (x \in f(i)))$

Задача Нека  $J$  е безкрайно множество и  $\{A_j\}_{j \in J}$  е индексирана фамилия от множества от естествени числа.  $A_j \subseteq \mathbb{N}$ . Докажете че съществува най-много изброимо  $I \subseteq J$ , такова че  $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{j \in J} A_j$  и  $\bigcap_{i \in I} A_i = \bigcap_{j \in J} A_j$

---

$< \text{Добре наредени множества} >$

---

$< W, \leq >$  - д.н.м. , ако  $\leq$  е ч.н. в  $W$  и всяко непразно подмножество на  $W$  има най-малък елемент относно  $\leq$ . Този елемент означаваме с  $0_w = \min_{\leq}(W)$ .  $S(x) = \min\{y \mid x < y\}$  е наследник на  $x$ , ако такъв има.

$x$  е граничен:  $\text{Limit}(x) \Leftrightarrow x \neq 0_w \wedge \forall y \in W (x \neq S(y))$

Начален сегмент на  $x \in W$  е  $\text{seg}(x) \Leftrightarrow \{y \mid y \in W \wedge y < x\}$

- $\text{seg}(0_w) = \emptyset$
  - $\text{seg}(S(x)) = \text{seg}(x) \cup \{x\}$
  - $\text{Limit}(x) \Rightarrow \text{seg}(x) = \bigcup \{\text{seg}(y) \mid y \in \text{seg}(x)\}$
- 

$I \subseteq W$  е начален сегмент, ако е затворено над  $W$  относно  $\leq$ :  $(\forall x \in I)(\forall y \leq x)(y \in I)$

**Тв** Нека  $< W, \leq >$  е д.н.м. и  $I \subseteq W$  е начален сегмент. Тогава  $I = W$  или  $I = \text{seg}(x)$  за някое  $x \in W$ .

Док: Нека  $I \neq W$  е начален елемент. Тогава  $W \setminus I \neq \emptyset$  и нека  $x = \min_{\leq}(W \setminus I)$ . Нека  $y \in I$ . Да предположим че  $y \notin \text{seg}(x)$ , т.е.  $\neg(y < x)$ . Тогава  $x \leq y$ , защото  $W$  е добре наредено. Но  $I$  е начален елемент и  $y \in I$  - следователно  $x \in I$ . Противоречие! Следователно  $y \in \text{seg}(x)$  и  $I \subseteq \text{seg}(x)$ .

Нека  $y \in \text{seg}(x)$ . Тогава  $y < x$ , от където  $y \notin W \setminus I$ . Следователно  $y \in I$ . Значи  $\text{seg}(x) \subseteq I$ .

Така  $I = \text{seg}(x)$ .

**Опр** Нека  $< W, \leq >$  е д.н.м. . Казваме, че  $B \subseteq W$  е  $\leq$ -индуктивно, ако:

$\forall x (\forall y (y < x \Rightarrow y \in B) \Rightarrow x \in B)$  или еквивалентното -  $\forall x (\text{seg}(x) \subseteq B \Rightarrow x \in B)$

**Тв** Нека  $< W, \leq >$  е д.н.м. . Тогава  $W$  е единственото  $\leq$ -индуктивно множество.

Док: Нека  $B \subseteq W$  е  $\leq$ -индуктивно и да допуснем, че  $B \neq W$ . Тогава  $W \setminus B \neq \emptyset$  и нека  $x = \min_{\leq}(W \setminus B)$ . Тогава за всяко  $y < x$  имаме, че  $y \notin W \setminus B$  и така  $y \in B$ . Тоест  $\text{seg}(x) \subseteq B$ . Но  $B$  е  $\leq$ -индуктивно, значи  $x \in B$ . Противоречие! Защото  $x \in W \setminus B$ . Следователно  $B = W$ .

**Тв** Нека  $< W, \leq >$  е линейно наредено мн-во и единственото  $\leq$ -индуктивно подмножество на  $W$  е  $W$ . Тогава  $< W, \leq >$  е д.н.м.

Док: Нека  $B \subseteq W$ . Нека  $C$  е множество от строгите долни граници на  $B$ :

$$C = \{t \in W \mid (\forall x \in B)(t < x)\}$$

Тогава  $B \cap C = \emptyset$ . Възможни са 2 случая:

1.  $C$  е  $\leq$ -индуктивно. Следователно  $C = W$  и значи  $B = \emptyset$
2.  $C$  не е  $\leq$ -индуктивно. Значи  $\exists x(seg(x) \subseteq C \wedge x \notin C)$ . Нека  $t \in W$  е такъв че  $t \notin C$  и  $seg(t) \subseteq C$ . Значи  $\exists x(x \in B \wedge \neg(t < x))$ . Нека  $x_0$  е представител. Но  $< W, \leq >$  е л.н.м. и така  $x \leq t$ . Но ако  $x < t$ , то  $x \in seg(t) \subseteq C$  и значи  $x \notin B$ , защото  $B \cap C = \emptyset$ . Понеже  $x \in B$ , то  $x = t \in B$ . Но всичко, което е по-малко от  $x = t$  е в  $seg(t) \subseteq C$  и така е извън  $B$ , т.е.  $\forall y(y < t \Rightarrow y \notin B)$ .  
Еквивалентно:  $\forall y(y \in B \Rightarrow \neg(y < t))$ , т.е.  $\forall y(y \in B \Rightarrow t \leq y)$  и понеже  $t \in B$ , то  $t$  е най-малкият елемент на  $B$ .

**Опр** Нека  $\pi : A \rightarrow A$  и  $< A, \leq >$  е ч.н.м. Казваме, че  $\pi$  е разширяваща, ако за вс.  $x \in A$  е изп.  $x \leq \pi(x)$

**Тв** Нека  $< W, \leq >$  е д.н.м. и функцията  $\pi : W \rightarrow W$  е инективна и запазваща наредбата. Тогава  $\pi$  е разширяваща. Интективност:  $\forall x, y \in W(x \neq y \Rightarrow \pi(x) \neq \pi(y))$ . Запазване на наредбата:  $\forall x, y \in W(x \leq y \Rightarrow \pi(x) \leq \pi(y))$ .

Док: Да допуснем, че  $\pi$  не е разширяваща. Тогава множеството  $\{x \in W \mid \pi(x) > \pi(y)\}$  е непразно. Нека  $x^* = \min_{\leq} \{x \in W \mid \pi(x) < x\}$ . В частност,  $\pi(x^*) < x^*$ . Тогава  $\pi(\pi(x^*)) < \pi(x^*)$ . Следователно  $\pi(x^*) \in \{x \in W \mid \pi(x) < x\}$ . Но  $x^*$  е най-малкият елемент на това множество и така  $x^* \leq \pi(x^*)$ . Противоречие! Следователно  $\pi$  е разширяващо.

**Тв** Никое добре наредено множество не е изоморфно на на свой собствен начален сегмент.

Док: Нека  $< W, \leq >$  е д.н.м. и  $I \subseteq W$ ,  $I \neq W$  и  $I$  е начален сегмент т.ч.

$< W, \leq > \approx < I, \leq \cap (I \times I) >$ . Нека  $\pi : W \rightarrow I$  е изоморфнизъм. В частност  $\pi$  е инекция и запазва наредбата. Следователно  $\pi$  е разширяващо. Понеже  $I$  е начален сегмент и  $I \neq W$ , то  $I = seg(x)$  за някое  $x \in W$ . Тогава  $\pi(x) \in I = seg(x)$ , т.е.  $\pi(x) < x$ . Но  $\pi$  е разширяваща  $\Rightarrow$  противоречие! Следователно  $W$  не е изоморфно на  $I$

**Тв** Между всеки две добре наредени множества има най-много един изоморфнизъм.

Док: Нека  $< W, \leq > \approx < I, \leq >$  са добре наредени множества и  $\pi, \psi : W_1 \rightarrow W_2$  са изоморфизми.  $\pi \neq \psi$ ,  $\{x \in W_1 \mid \pi(x) \neq \psi(x)\} \neq \emptyset$ . Нека  $x^* = \min_{\leq_1} \{x \in W_1 \mid \pi(x) \neq \psi(x)\}$ .  $\pi(x^*) \neq \psi(x^*)$ . БОО,  $\pi(x^*) <_2 \psi(x^*) \Rightarrow \pi(x^*) \in W_2, \psi$  - сюрекция в-ху  $W_2$ . Нека  $y \in W_1$ , е т.ч.  $\psi(y) <_2 \psi(x^*)$  и следователно  $y <_1 x^*$ , т.е.  $y \notin \{x \in W_1 \mid \pi(x) \neq \psi(x)\}$  и така  $\pi(y) = \psi(y) = \pi(x^*)$ , от където  $y = x^*$ . Но  $y < x^* \Rightarrow$  Противоречие!

# Лекция 7

$\mathbb{Q}$  са изброимо много.

$\mathbb{R}$  са неизброимо много.

$\mathbb{Q}$  са гъсти в  $\mathbb{R}$  :  $\forall a \in \mathbb{R} \forall b \in \mathbb{R} (a < b \Rightarrow (\exists c \in \mathbb{Q})(a < c \wedge c < b)) (\exists c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  са също гъсти в  $\mathbb{R}$

А в равнината? Нека  $A$  е множество от отворени подмножества на Евклидовата равнина и всеки два разл. елем. на  $A$  са непресичащи се. Тогава  $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{\mathcal{AL}_0}}$

**def**  $A$  е отворено множество, ако за  $(\forall x \in A) \exists D ("D$  е отворен кръг с център  $x" \wedge D \subseteq A)$

**Зад:** Нека  $A$  е отворено множество в Евклидовата равнина. Тогава съществува най-много изброимо множество  $B$ , такво че  $\alpha \in B \Rightarrow \alpha$  е отворен кръг с център рационални координати и рационален радиус. Освен това  $\bigcup B = A$ .

**Зад:** Нека  $l$  е фиксирана права в Евклидовата равнина. Нека  $A$  е множество от окръжности в равнината, такова че  $(\forall p \in l)(\exists C \in A)("C$  се допира до  $l$ ). Да се докаже, че в  $A$  има поне 2 пресичащи се окръжности.

Нека за всяка точка  $P \in l$  фиксираме една окръжност  $C_p$ , т.ч.  $C_p \in A \wedge C \cap l = \{p\}$ . Тогава множеството  $A_l = \{C_p \mid p \in l\}$  е неизброимо. Във всяка окръжност  $C \in A_l$  да фиксираме точка  $P_c$ , която има рационални координати (във вътрешността на окръжността  $C$ ). Нека  $B = \{P_c \mid c \in A_l\}$ .  $B \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$  и е изброимо. Значи имаме  $\overline{\overline{B}} = \mathcal{AL}_0$  и  $\overline{\overline{A_l}} = 2^{\mathcal{AL}_0}$ . Дефинирахме  $f : A_l \rightarrow B$ , където  $f(c) = P_c$ . Вижда се че  $f$  не е инекция, т.е. има  $c_1, c_2 \in A_l, c_1 \neq c_2, f(c_1) = f(c_2)$ . Това означава че има две окръжности с обща вътрешна точка. Разглеждаме случаите за това и единствената възможност е те да са различни окръжности

**def** Регулярно каберче в равнината - като Т, перпендикулярни отсечки, с дължина 1 и пресечната точка е среда на горната.

**def** каберче в равнината - като регулярно каберче, но само перпендикулярно с  $> 0$  дължини на компонентите.

**Зад:** в равнината са разхвърляни регулярни каберчета, някои две от които не се наслагват (най-много се допират). Док., че каберчетата са  $\leq \mathcal{AL}_0$ .

Взимаме окръжности с център лежащ на основата на каберчето и радиус  $\leq 1/4$ . Можем да ги нареждаме едно до друго и се вижда, че защото в равнината можем да насложим изброимо много отворени множества, то и каберчетата ще са изброимо много.

Но при нормалните каберчета, не е толкова просто. Нека  $K_n = \{min(|\alpha|, |\beta|, |\gamma|) \geq 1/n\}$ , ще докажем че  $K_n$  е изброимо.

**ТВ** Нека  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $f$  е монотонна. Нека  $D_f$  е множеството от всички точки на прекъсване на  $f$ . Тогава  $D_f \leq \mathcal{AL}_0$

**Док:** БОО:  $f$  е монотонно растяща  $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y), x \in D_f \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \dots$

**Аксиома за мултипликативност** За фамилия  $X_i$  от непресичащи се непразни множества, съществува множество  $Y$ , такова че  $Y \cap X_i = \{x\}$  за някое  $x$ . Тоест:

$$\forall A((\forall x \in A)(x \neq \emptyset) \wedge (\forall x \in A)(\forall y \in A)(x \neq y \Rightarrow x \cap y = \emptyset) \Rightarrow \exists B(\forall x \in A)\exists u(B \cap x = \{u\}))$$

От  $\mathcal{AM} \Rightarrow \forall A((\forall x \in A)(x \neq \emptyset) \wedge (\forall x \in A)(\forall y \in A)(x \neq y \Rightarrow x \cap y = \emptyset) \Rightarrow \exists B)(B \subseteq \bigcup A \wedge (\forall x \in A)\exists u(B \cap x = \{u\}))$ . Наистина, нека  $A$  удовл. пред. и тогава от  $\mathcal{AM}$  моем да вземем конкретно мн-во  $B : (\forall x \in A)\exists u(B \cap x = \{u\})$ . Нека  $B_1 \Leftarrow B \cap (\bigcup A)$ . Тогава  $B_1 \subseteq (\bigcup A)$  и за произв.  $x \in A$   $x \cap B_1 = (x \cap B) \cap (x \cap (\bigcup A)) = (x \cap B) \cap x = B \cap x \neq \emptyset$ , защото от  $x \in A \Rightarrow x \subseteq (\bigcup A) \Rightarrow x \cap (\bigcup A) = x$ .

Това ни напомня за класове на еквивалентност, може да си мислим че  $\mathcal{AM}$  твърди - ако имаме класове на еквивалентност, то има множество от представители на тези класове.

**Аксиома за избора**  $\forall A((\forall x \in A)(x \neq \emptyset) \Rightarrow \exists f(Func(f) \wedge Dom(f) = A \wedge (\forall x \in A)(f(x) \in x)))$

**ТВ** В  $\mathcal{ZF}$  е изпълнено  $\mathcal{AM} \iff \mathcal{AC}$

Док: Нека  $\mathcal{AC}$  е в сила. Нека  $A$  е множество, за което предиката на  $\mathcal{AM}$  е в сила.

Нека  $f$  е функция на избора за  $A$ , т.е.  $Func(f) \wedge Dom(f) = A \wedge (\forall x \in A)(f(x) \in x)$ .

Нека  $B \Leftarrow Rng(f)$ , сега ще докажем че  $B$  има желаното свойство. Нека  $x \in A$ . Тогава  $f(x) \in x$  и е дефинирана, но  $f(x) \in Rng(f)$ . Значи  $f(x) \in B \cap x$ , т.е.  $\{f(x)\} \subseteq B \cap x$ . Нека  $a \in B \cap x$ . Но  $a \in Rng(f)$  и  $a = f(y)$  за някое  $y \in A$ . Нека разгледаме една точка  $y \in A$ , такава че  $a = f(y)$ .  $f(y) \in y$

...

$x = y \forall a(a \in B \cap x \Rightarrow a = f(x))$ , тоест  $B \cap x \subseteq \{f(x)\}$ . Така  $u = f(x)$ .

Сега ще докажем че  $\mathcal{AM} \Rightarrow \mathcal{AC}$ . Нека  $A$  е множество и  $(\forall x \in A)(x \neq \emptyset)$ . Искаме да сме сигурни че работим с непресичащи се множества, затова решаваме да оцветим множествата (например  $x$  оцветяваме с  $\{x\}$ ). Дефинираме  $A_1$ , такова че  $A_1 = \{z \mid z \in A \times (\bigcup A) \wedge (\exists x \in A)(z = \{x\} \times x)\}$ . Нека  $x \in A$  и  $z = \{x\} \times x$ , значи  $z \in Ax(\bigcup A)$ . Така елементите на  $A$  са  $\neq \emptyset$ . Нека вземем свидетел -  $x \in A$  и  $z = \{x\} \times x$ .  $x \in A \Rightarrow x \neq \emptyset$ . Нека  $a \in x$  и така  $\langle x, a \rangle \in z$ , т.е.  $z \neq \emptyset$ . Нека  $z_1, z_2 \in A$  и  $z_1 \neq z_2$ . Значи  $z_1 = \{x_1\} \times x_1$ ,  $z_2 = \{x_2\} \times x_2$ , където  $x_1, x_2 \in A$ . Да допуснем, че  $z_1 \cap z_2 \neq \emptyset$ . Нека  $u \in z_1 \cap z_2$ ,

$$u \in z_1 \Rightarrow u = \langle x_1, a_1 \rangle, a_1 \in x_1$$

$$u \in z_2 \Rightarrow u = \langle x_2, a_2 \rangle, a_2 \in x_2$$

$$\langle x_1, a_1 \rangle = \langle x_2, a_2 \rangle, x_1 = x_2 \text{ и } a_1 = a_2. \text{ Така } \{x_1\} \times x_1 = \{x_2\} \times x_2 \text{ и } z_1 = z_2 \Rightarrow$$

Противоречие! Следователно  $z_1 \cap z_2 = \emptyset$ . Ето защо  $\mathcal{AM}$  е приложима към  $A_1$ . Нека  $B \subseteq \bigcup A_1 \wedge (\forall z \in A_1)\exists u(B \cap z = \{u\})$ .

Нека  $v \in B$ . Тогава  $v \in \bigcup A_1$ , значи има елемент  $z \in A_1$ , т.ч.  $v \in z$ . Следователно  $v = \langle x, a \rangle$ , където  $x \in A$  и  $a \in x$ . Така  $Rel(B)$ . Нека  $\langle x, y \rangle, \langle x, y' \rangle \in B$ . Значи  $\langle x, y \rangle, \langle x, y' \rangle \in \{x\} \times x$ , още  $y \in x$  и  $y' \in x$ .  $\langle x, y \rangle, \langle x, y' \rangle \in (\{x\} \times x) \cap B$ , но  $(\{x\} \times x) \cap B = \{w\}$  за някое  $w$ .  $\langle x, y \rangle, \langle x, y' \rangle \in \{w\} \Rightarrow \langle x, y \rangle = \langle x, y' \rangle \Rightarrow y = y'$ . Следователно  $Func(B)$ .

Сега твърдим че тази функция е функция на избора. Нека  $w \in Dom(B)$ . Тогава за някой елемент  $z \in A_1$   $\langle w, v \rangle \in z$ , където  $\langle w, v \rangle \in B$ . Значи  $z = \{x\} \times x$ , за някое  $x \in A$ . Следователно  $w = x$ . Така  $Dom(B) \subseteq A$ . Обратно - нека  $x \in A$ , тогава  $\{x\} \times x \in A_1$ . Значи  $\{x\} \times x \cap B = \{u\}$ , за някое  $u$ . Тоест  $u = \langle x, a \rangle$ , където  $a \in x$ . Следователно



$x \in Dom(B)$ . Поради което  $A = Dom(B)$ . Освен това  $\langle x, a \rangle \in B$  за някое  $a \in x$ . Но  $Func(B)$  и  $\langle x, a \rangle \in B \Leftrightarrow a = B(x); B(x) \in x$ . И така  $B$  е функция на избора.

---

def Нека  $I \neq \emptyset$ ,  $I$  е индексирана фамилия.  $\{A_i\}_{i \in I}$  наричаме функция  $A$  с  $Dom(I)$  и вместо  $A(i)$  пишем  $A_i$ .

$$\prod_{i \in I} A_i = \{f \mid Func(f) \wedge Dom(f) = I \wedge (\forall i \in I)(f(i) \in A_i)\}$$

ТВ В  $\mathcal{ZF} + \mathcal{AC}$  твърдим че декартовото произведение на индексирана фамилия от непразни множества е непразно множество:  $\forall I((\forall i \in I)(A_i \neq \emptyset) \Rightarrow \prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset)$