Записки по Теория на Множествата

При проф. Тинко Тинчев

Atanas Ormanov

November 9, 2022

Лекция 1

Book recomendation:
Introduction to Set Theory (3d Edition) by Karel Hrbackeck & Toomas Yech

Съпоставка м-ду Актуална безкрайност и Потенциална безкрайност:
На пръв поглед ако $B \subseteq A$ и $B \neq A$, то B има по-малко елементи, но при безкрайни мн-ва не е задължително.

$\boxed{\text{def}}$ Принцип за неограничената абстракция:
Нека $\mathcal{A}(x)$ е едноместно свойство на обекта x. Тогава има множество A, такова че $x \in A \Leftrightarrow \mathcal{A}(x)$

Парадокс на Ръсел:
Нека $\mathcal{R}$ е св-во такова че $\mathcal{R}(x) \Leftrightarrow x \notin x$ за произволно x

От принципа за неограничената абстракция (*) - има множество R,
такова че $x \in R \Leftrightarrow \mathcal{R}(x)$ за произволно x
... $R \in R \Leftrightarrow R \notin R$

Езикът на теория на множествата се състои от:

- Двуместни свойства: $=, \in$
  (равенство в смисъла на Лайбниц означава неотличимост)
- Булеви връзки: $\vee, \wedge, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
- Квантори: $\forall x\phi, \exists x\phi$

ZF - аксиоми на Цермело Френкел
ZFC - ZF заедно с аксиомата за избора

$\boxed{\text{def}}$ Теоритико множествени свойства:
В света (универсума) има само множества (това са обектите с които ще работим)

ТМ свойствата разделяме на:
1) Логически аксиоми

- $\forall x \forall y (x = y \Rightarrow y = x)$
- $\forall x \forall y (x = y \Rightarrow y = x)$
- $\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge y = z \Rightarrow x = z)$
- $\forall x \forall y \forall z (x \in y \wedge y = z \Rightarrow x \in z)$
- $\forall x \forall y \forall z (x = y \wedge y \in z \Rightarrow x \in z)$

1-3 са аксиомите за еквивалентност на равенството
4-5 са аксиомите за конгруентност

2) Аксиоми на ZF:

1. $\exists x(x = x)$ - Има поне един обект в света
2. $\forall x \forall y(\forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y))$ - Обемност / екстенсионалност. Ако 2 множества имат едни и същи елементи, то те са равни.
3. $\exists x(x = x)$ - принцип за ограничената абстракция / схема за отделянето.

Док 2.2: $\forall y \forall z(y = z \Rightarrow \forall x(x \in y \Leftrightarrow x \in z))$
Нека предположим че $y = z$, нека x е произволно множество. Използваме логическа аксиома 4 за да докажем.

Док 2.3: Нека $\phi(x, u_1, u_2, ..., u_n)$ е ТМ. св-во, нека $u_1, ..., u_n$ са произволно мн-ва. Всеки път, когато А е множество, съществува множество, чийто елементи са точно онези елементи на А, за които е в сила $\phi(x, u_1, u_2, ..., u_n)$.
$\forall u_1 u_2 ... u_n \forall A \exists B \forall x(x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge \phi(x, u_1, u_2, ..., u_n))$ - св-во на х.

$\boxed{\text{Тв}}$ При фиксирани $A, u_1, ..., u_n$ - множества и теоритико множествено свойство ϕ, съществуват единствено множество В, за което $\forall x(x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge \phi(x, \overline{u}))$, където $\overline{u}$ са параметри.

Док: Нека B_1 и B_2 са такива мн-ва, че: $\forall x(x \in B_1 \Leftrightarrow x \in A \wedge \phi(x, \overline{u}))$ $\forall x(x \in B_2 \Leftrightarrow x \in A \wedge \phi(x, \overline{u}))$ Искаме да док че $B_1 = B_2$. Нека $y \in B_1$ е произволен. Тогава $y \in A \wedge \phi(y, \overline{u})$. Следователно $y \in B_2$. Така $\forall x(x \in B_1 \Leftrightarrow x \in B_2)$. От аксиомата за обемност $B_1 = B_2$.

$\boxed{\text{Тв}}$ Съществува празно множество

Док: Ще докажем че $\exists A \forall x(x \notin A)$
Нека В е множество (От. аксиомата 0). Нека $\phi(x) \leftrightharpoons \neg(x = x)$. Нека М е единственото множество, такова че $\forall x(x \in M \Leftrightarrow x \in B \wedge \phi(x))$. Ще док. че $\forall x(x \notin M)$. Допускаме че $x \in M$ е произволно. Тогава $x \in B \wedge \phi(x)$. Така $\phi(x)$, т.е. $x \neq x$, противоречи с 1-вата лог. аксиома. Следователно $x \notin M$. Понеже x е произволно то $\forall x(x \notin M)$.

$\boxed{\text{Опр}}$ За множество А, параметри $\overline{u}$ и св-во ϕ, съществува единствено такова В, което бележим така: $B = \{x \mid x \in A \wedge \phi(x, \overline{u})\}$

$\boxed{\text{Тв}}$ Съществува единствено празно множество.

Док: Нека M_1 и M_2 са празни, т.е. $\forall x(x \notin M_1)$ и $\forall x(x \notin M_2)$ Нека t е произволно множество, тогава $t \notin M_1$ и $t \notin M_2$. Но t беше произволно, значи $t \in M_1 \Leftrightarrow t \in M_2$ и от аксиомата за обемност $M_1 = M_2$ Празното множество бележим с $\emptyset$

Означение: $A \subseteq B \leftrightharpoons \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$

$\boxed{\text{Тв}}$ За всяко множество А, е изп. че $\emptyset \subseteq A$

$\boxed{\text{Тв}}$ Не същ. множество, което съдържа всички мн-ва: $\neg \exists A \forall x(x \in A)$

Док: Допускаме противното. Нека B е такова че $\forall x(x \in B)$
Нека $R = \{x \mid x \in R \land x \notin x\}$. Използваме аксиомата схема за отделяне с A = B и $\phi(x) \leftrightharpoons x \notin x$. Отделяме онези x, за които $x \notin x$. Така R е множество. Тогава $R \in B$. Получаваме че $R \in R \Leftrightarrow R \in B \land R \notin R \Leftrightarrow R \notin R$ - противоречие с допускането. Тоест няма такива мн-ва.

Future reading:

- actual infinity vs potential infinity
- Banach–Tarski paradox (occurs after the patch of Russel's paradox)
- Cantor's definition of real numbers

Лекция 2

$\boxed{\text{Тв}}$ За всеки две множества A и B, съществува единствено множество C, такова че $\forall x(x \in C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B)$.

Док за съществуване: Нека $\phi(x, u) \leftrightharpoons x \in u$. Според аксиомната схема за отделяне в-ху множеството A и ϕ за $u = B$, същ. множество $C = \{x \mid x \in A \wedge \phi(x, B)\} = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$. Значи за всяко x, $x \in C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$

Док за единственост: Нека C_1 и C_2 са такива мн-ва, че $x \in C_i \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B, i = 1, 2$. Тогава за всяко x, $x \in C_1 \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \Leftrightarrow x \in C_2$ и по аксиомата за обемност $C_1 = C_2$. Това множество означаваме с $A \cap B$.

$\boxed{\text{Тв}}$ За всеки две множества A и B, съществува единствено множество C, такова че $\forall x(x \in C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B)$

$\phi(x, u) \leftrightharpoons x \notin u$, т.е. отделяме от A всички ел. x, за които $\phi(x, B)$
$x \in C \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B, i = 1, 2$
$x \in C_1 \Leftrightarrow x \in C_2, \forall x$
$C_1 = C_2$
Това единствено множество бележим $A \setminus B$ и наричаме разлика на A и B.

Можем да правим "голямо" сечение

$\boxed{\text{Тв}}$ Нека $A \neq \emptyset$. Тогава съществува единствено множество B, което съдържа точно множествата, които са елементи на всеки един елемент на A.
$\forall x(x \in B \Leftrightarrow \forall y(y \in A \Rightarrow x \in y))$

Док за същ.: Нека $y_0 \in A$, защото A е непразно. Нека $\phi(x, u) \leftrightharpoons \forall y(y \in u \Rightarrow x \in y)$. От аксиомната схема за отделянето, има множество
$B' = \{x \in y_0 \wedge \phi(x, A\} = \{x \mid x \in y_0 \wedge \forall y(y \in A \Rightarrow x \in y\}$
Ще док че $\forall x(x \in B' \Leftrightarrow \forall y(y \in A \Rightarrow x \in y))$ Нека $x \in B'$. Тогава $x \in y_0 \wedge \forall y(y \in A \Rightarrow x \in y)$, в частност $\forall y(y \in A \Rightarrow x \in y)$.
Обратното, нека x е т.ч. $\forall y(y \in A \Rightarrow x \in y)$.
Но $y_0 \in A$, следователно $x \in y_0$. Така $x \in y_0 \wedge \forall y(y \in A \Rightarrow x \in y)$ от където $x \in B'$

Док единств.: Нека B_1 и B_2 са такива мн-ва че ... $x \in B_i \Leftrightarrow \forall y(y \in A \Rightarrow x \in y)$ за $i = 1, 2$
Така за всяко x, $x\ inB_1 \Leftrightarrow \forall y(y \in A \Rightarrow x \in y) \Leftrightarrow x \in B_2$ Т.е. има единствено такова множество, бележим го $\bigcap A$ или $\bigcap_{x \in A} x$

Приемаме че $\bigcap \emptyset \leftrightharpoons \emptyset$

$\boxed{\text{Аксиома за чифта}}$ За всеки 2 мн-ва a и b, съществува множество A, измежду чиито ел. са a и b.
$\forall a \forall b \exists A(a \in A \wedge b \in A)$

$\boxed{\text{Тв}}$ За всеки 2 мн-ва a и b същ. единствено множество B, т.ч. $\forall x(x \in B \Leftrightarrow x = a \vee x = b)$

Док ед.: Нека B_1 и B_1 са мн-ва, т.ч. $\forall x(x \in B_i \Leftrightarrow x = a \vee x = b)$
Тогава за всяко x, $x \in B_1 \Leftrightarrow x = a \vee x = b \Leftrightarrow x \in B_2)$ След. $B_1 = B_2$

Док същ.: Нека A е такова множество че $a \in A$ и $b \in A$. Нека $\phi(x, u_1, u_2) \leftrightharpoons x = u_1 \vee x = u_2))$
По аксиомата схема за отд., същ. множество $B = \{x \mid x \in A \wedge \phi(x, a, b)\}$.
Ще док. че $\forall x(x \in B \Leftrightarrow x = a \vee x = b)$. Нека x е произв. и нека $x \in B$. Тогава $x \in A \wedge \phi(x, a, b)$, в частност $\phi(x, a, b)$ т.е. $x = a \vee x = b$.
Нека сега $x = b \vee x = b$. Така $\phi(x, a, b)$. Понеже $a \in A$ и $b \in A$, то $x \in A$. Следователно $x \in B$
Това единствено множество ще означаваме $\{a, b\}$ и ще нар. чифт на A и B.

Заб: Ако $a = b$, то $\{a, a\} = \{a\}$ наричаме синглетон на a.

Определимо е в езика на ТМ дали x е синглетон.
x е синглетон $\Leftrightarrow \exists a(x = \{a\}) \Leftrightarrow \exists a \forall y(y \in x \Leftrightarrow y = a)$.
Тогава можем да използваме "синглетон" като свойство във ф-ла. Сега ясно се вижда че сме разширили езика защото следните са различни $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}$ и т.н. (така получаваме безкрайна редица)

$\boxed{\text{Св}}$ $\{a, b\} = \{b, a\}$. Ясно се вижда че $\forall x(x \in \{a, b\} \Leftrightarrow x \in \{b, a\})$

$\boxed{\text{def}}$ $< a, b > = < a_1, b_1 > \Leftrightarrow a = a_1 \wedge b = b_1$

$\boxed{\text{Опр}}$ Наредена двойка на мн-вата x и y наричаме множеството $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ и ще означаваме с $< x, y >$.

Заб: Ако използваме x вместо $\{x\}$ ще можем да правим цикли на принадлежност - $A \in B \in C$. другия път ще въведем "правило" което ще забрани такива неща.

$\boxed{\text{Тв}}$ За всяко $x1, y1, x2, y2$ е в сила, че $< x1, y1 > = < x2, y2 > \Leftrightarrow x1 = x2 \wedge y1 = y2$

Док: $(\Leftarrow) x1 = x2 \wedge y1 = y2$, показваме че $\{x1\} = \{x2\} \wedge \{x1, y1\} = \{x2, y2\}$
$\{\{x1\}, \{x1, y1\}\} = \{\{x2\}, \{x2, y2\}\}$ и от там $< x1, y1 > = < x2, y2 >$

$(\Rightarrow)$ Нека $< x1, y1 > = < x2, y2 >$

1. $x1 = y1$, тогава $< x1, y1 > = \{\{x1\}, \{x1, x2\}\} = \{\{x1\}, \{x1\}\} = \{\{x1\}\} = < x2, y2 > = \{\{x2\}, \{x2, y2\}\}$. Следователно $\{x1\} = \{x2\} = \{x2, y2\}$. Така: $x1 = x2$ и $x2 = y2$. Тогава $x1 = x2 = y2 = y1$

2. $x1 \neq y1$. Тогава $\{x1\} \neq \{x1, y1\}$. Тогава $\{x2\} \neq \{x2, y2\}$. Тогава $y2 \neq x2$, защото иначе чифта и синглетона щяха да съвпадат. От тук $\{x1\} \neq \{x2, y2\}$. Но $\{x1\} \in < x2, y2 >$, и така $\{x1\} = \{x2\}$. След. $\{x1, y1\} \neq \{x2\}$, от където $\{x1, y1\} = \{x2, y2\}$. От $\{x1\} = \{x2\}$, следва че $x1 = x2$. Тогава $\{x1, y1\} = \{x2, y1\} = \{x2, y2\}$. Понеже $y1 \neq x1 = x2$, то $y1 = y2$

$\boxed{\text{Аксиома за обединение}}$ За всяко множество A съществува множество B, т.ч. всеки елемент на елемент на A е елемент на B.
$\forall x \forall y(x \in y \wedge y \in A \Rightarrow x \in B)$

$\boxed{\text{Тв}}$ За всяко множество A съществува единствено множество B,
т.ч. $\forall x(x \in B \Leftrightarrow \exists y(y \in A \land x \in y))$

<u>Док за ед:</u> $i = 1, 2. \forall x(x \in B_i \Leftrightarrow \exists y(y \in A \land x \in y))$ за всяко x,
$x \in B_1 \Leftrightarrow \exists y(y \in A \land xiny) \Leftrightarrow x \in B_2$, т.е. $B_1 = B_2$

<u>Док за същ.</u> Нека C е такова множество, че $\forall x \forall y(y \in A \land x \in y \Rightarrow x \in C)$.
Нека $B = \{x \mid x \in C \land \exists y(y \in A \land x \in y)\}$
Сега ако $x \in B \implies x \in C \land \exists y(y \in A \land x \in y) \implies \exists y(y \in A \land x \in y)$
Нека $\exists y(y \in A \land x \in y)$. Нека y_0 е свидетел за това ($y_0 \in A \land x \in y_0$).
Понеже $y_0 \in A \land x \in y_0$, то $x \in C$. Следователно $x \in B$

Значи съществува такова множество и то е единствено. Ще го бележим с $\bigcup A$.

Заб: Означение означава че ще го използваме във формула като съкращение(syntax sugar).

Не може да се дефинира операция за допълнение. Тоест:
$\boxed{\text{Тв}}$ За нито едно множество A не съществува множество $\overline{A}$, т.ч. $\forall x(x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A)$

<u>Док:</u> Допускаме противното - нека A и $\overline{A}$ са такива мн-ва, такова че за всяко x $x \in \overline{A} \Leftrightarrow x \notin A$. Нека $V = \bigcup\{A, \overline{A}\}$ - от аксиомата за чифта и обединението. Нека x е произволно. Ако $x \in A$, то $\exists y(y \in \{A, \overline{A}\} \land x \in y)$ от където $xinV$. Ако пък $x \notin A$, то $x \in \overline{A}$ и отново $\exists y(y \in \{A, \overline{A}\} \land x \in y)$, т.е. $x \in V$. След $\forall x(x \in V)$, противоречие!

$\overline{0} = \emptyset$
$\overline{1} = \{\overline{0}\}$
$\overline{2} = \overline{1} \cup \{\overline{1}\} = \{\overline{0}, \overline{1}\}$
...
$\overline{n+1} = \overline{n} \cup \{\overline{n}\}$ (n + 1 елемента)

$\boxed{\text{Аксиома за степенното множество}}$ За всяко множество A съществува множество B, измежду чиито елементи са всички подмножества на A.
$\forall A \exists B \forall x(x \subseteq A \Rightarrow x \in B)$

$\boxed{\text{Тв}}$ За всяко множество A същ. единствено множество B, т.ч. $\forall x(x \in B \Leftrightarrow x \subseteq A)$

<u>Док за същ.:</u> Некеа C е т.ч. $\forall x(x \subseteq A \Rightarrow x \in C)$.
Нека $B = \{x \mid x \in C \land x \subseteq A\}$. Нека $x \in B$. След $x \in C \land x \subseteq A$, от където $x \subseteq A$. След. $x \in C$, от където $x \in C \land x \subseteq A$, т.е. $x \in B$
Заб: $x \in C \land x \subseteq A \Leftrightarrow x \subseteq A$, защото $x \subseteq A \Rightarrow x \in C$

<u>Док за единственост:</u> Взимаме B_1, B_2 и $\forall x(x \in B_i \Leftrightarrow x \subseteq A)$
$x \in B_1 \Leftrightarrow x \subseteq A \Leftrightarrow x \in B_2$, т.е. $B_1 = B_2$.
Такова множество B съществува и е единствено и ще означаваме с $\mathcal{P}(A) = \{x \mid x \subseteq A\}$

<u>Какво можем да изведем от тук?</u>

- $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ за всяко A
- $A \in \mathcal{P}(A)$, за всяко A

- $A \in \mathcal{P}(A)$, за всяко A
- $A \subseteq B \implies \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ - монотонност
- Можем ли да твърдим монотонността в обратната посока? Да!
- Възможно ли е $\mathcal{P}(A) \subseteq A$? Не! (дори и за празното). Това е същото като $\mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(A)$, но това все още не можем да докажем.

Но можем да докажем следното:
$\boxed{\text{Тв}}$ Не същ. множество A, т.ч. $\mathcal{P}(A) \subseteq A$

Док: Допускаме противното и нека A е такова множество, че $\mathcal{P}(A) \subseteq A$.
Нека $\mathcal{R}_A = \{x \mid x \in A \wedge x \notin x\}$. Според аксиомата схема за отделяне $\mathcal{R}_A$ е множество. Освен това, $\mathcal{R}_A \subseteq A$. След $\mathcal{R}_A \in \mathcal{P}(A)$ и по допускане $\mathcal{P}(A) \subseteq A$, от където $\mathcal{R}_A \in A$.
Но $\mathcal{R}_A \in A \Leftrightarrow \mathcal{R}_A \in A \wedge \mathcal{R}_A \notin \mathcal{R}_A \Leftrightarrow \mathcal{R}_A \notin \mathcal{R}_A$. Противоречие! След. $\neg\exists A(\mathcal{P}(A) \subseteq A)$

$\boxed{\text{Опр}}$ Казваме, че множеството z е транзитивно, ако $z \subseteq \mathcal{P}(z)$. (ще бележим с $trans(z)$)
Тоест z е транзитивно $\Leftrightarrow \forall y(y \in z \Rightarrow y \subseteq z) \Leftrightarrow \forall x \forall y(x \in y \wedge y \in z \Rightarrow x \in z)$
$\bigcup z \subseteq z$

$\boxed{\text{Тв}}$ Нека x е множество. Тогава:

1. $trans(x) \Rightarrow trans(\bigcup x)$
2. $\forall y(y \in x \Rightarrow trans(y)) \Rightarrow trans(\bigcup x)$
3. $\forall y(y \in x \Rightarrow trans(y)) \Rightarrow trans(\bigcap x)$
4. $trans(x) \Rightarrow trans(\mathcal{P}(x))$
5. $trans(x) \Rightarrow trans(x \cup \{x\})$

Заб: $S(x) = x \cup \{x\}$ е наследник на x

Док 1: Нека x е транз. Нека $y \in \bigcup x$. Следователно $\exists z(y \in z \wedge z \in x)$. Нека z_0 е свидетел за това: $y \in z_0, z_0 \in x$. Но $trans(x)$, от където $y \in x$. От $y \in x$, винаги е вярно че $y \subseteq \bigcup x$. Тогава $y \subseteq \bigcup x$. След $\bigcup x$ е транзитивно.

Док 2: Нека вс. ел. на x е транзитивно множество. Нека $y \in \bigcup x$. Нека z е т.ч. $y \in z \wedge z \in x$. Но z е транзитивно ($z \in x$) значи $y \subseteq z$. Понеже $z \in x$, то $z \in \bigcup x$. Така $y \subseteq z \wedge z \subseteq \bigcup x$, от където $y \subseteq \bigcup x$. Т.е. $trans(\bigcup x)$

Док 3: Нека x е множество от транзитивни множества.
Заб: Трябва да внимаваме, защото $\forall y(y \in \emptyset \Rightarrow trans(y))$
Ако $x = \emptyset$, то $\bigcup x = \bigcup \emptyset = \emptyset$
Нека сега $x \neq \emptyset$. Нека $y \in \bigcap x$. Тогава $\forall z(z \in x \Rightarrow y \in z)$. Понеже $\forall z(z \in x \Rightarrow trans(z))$, то $\forall z(z \in x \Rightarrow y \subseteq z)$. Така y съдържа елементи, които са общи за всички елементи на x. Тогава $y \subseteq \bigcap x$. Следователно $trans(\bigcap x)$.

Док 4: Нека $trans(x)$.
Можем да използваме че $\bigcup z \subseteq z$ и можем да докажем следното $\bigcup \mathcal{P}(x) = x \subseteq \mathcal{P}(x)$

Друг подход:
$trans(x) \implies x \subseteq \mathcal{P}(x) \implies \mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(x)) \implies trans(\mathcal{P}(x))$

Док 5: Нека $trans(x)$. Нека $y \in S(x) = x \cup \{x\}$. Ако $y \in x$, то понеже $trans(x)$ имаме че $y \subseteq x$. Но $x \subseteq S(x) = x \cup \{x\}$. Така $y \subseteq S(x)$. Ако $y \in \{x\}$, то $y = x \subseteq S(x)$.
$\forall y(y \in S(x) \Rightarrow y \subseteq S(x))$. Така $trans(S(x))$

Въвеждаме още съкратен синтаксис (синтактична захар) за $\phi(x)$ и A - множество:

- $(\exists x \in A)(\phi(x)) \leftrightharpoons \exists x(x \in A \wedge \phi(x))$
- $(\forall x \in A)(\phi(x)) \leftrightharpoons \forall x(x \in A \Rightarrow \phi(x))$
- $\exists! x(\phi(x)) \leftrightharpoons \exists x(\phi(x) \wedge \forall y(\phi(y) \Rightarrow x = y))$

Лекция 3

$\boxed{\text{def}}$ Декартово произведение
$A \times B = \{< a, b > \ | \ a \in A \wedge b \in B\}$. Тук $\phi(x) \leftrightharpoons \exists a \exists b(x =< a, b > \wedge a \in A \wedge b \in B)$
и $x \in A \times B \Leftrightarrow \phi(x)$

Наблюдение: $< a, b >, a \in A$ и $b \in B$
$\{a\} \subseteq A \subseteq A \cup B$, $\{a, b\} \subseteq A \cup B$
$\{a\}, \{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$
$\{\{a\}, \{a, b\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
$< a, b > \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
$< a, b > \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$

$\boxed{\text{Тв}}$ За вс. 2 мн-ва A и B, същ. единствено мн-во C, такова че:
$\forall u(u \in C \Leftrightarrow \exists a \exists b(a \in A \wedge b \in B \wedge u =< a, b >))$

Док за единственост: за домашна.

Док за съществуване: Нека $C = \{u \mid u \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B)) \wedge \phi(u)\}$.
Имаме че $\forall u(\phi(u) \Rightarrow u \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$, от където $\forall u(u \in C \Leftrightarrow \phi(u))$. Това единствено множество ще бележим с $A \times B$ и ще наричаме декартово произведение на A и B.

$\boxed{\text{Тв}}$ За всеки A, B, C - множества, е в сила че:

1. Ax$\emptyset = \emptyset$
2. $\exists A \exists B(AxB = BxA)$, т.е. операцията не е комутативна
3. $(AxB)xC = Ax(BxC)$? Не е асоциативна!
4. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
5. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
6. $B \times (\bigcup A) = \bigcup\{B \times x \mid x \in A\}$ - като за начало се питаме синтаксиса коректен ли е? Тоест това от десния край е мн-во ли е?

Док 5:
($\subseteq$) Нека $x \in A \times (B \cap C)$. Нека $a \in A, b \in B \cap C$ са т.ч. $x =< a, b >$. Но $b \in B, b \in C$, от където $< a, b > \in A \times B$ и $< a, b > \in A \times C$. Така $x \in (A \times B) \cap (A \times C)$.

($\supseteq$) Нека $x \in (A \times B) \cap (A \times C)$. Тогава $x \in A \times B$ и $x \in A \times C$. Нека $a \in A, b \in B$, т.ч. $x =< a, b >$. Нека $a' \in A$ и $c \in C$ са такива че $x =< a', c >>$.
Понеже $< a, b >= x =< a', c >$, то $a = a'$ и $b = c$. Следователно $b \in B \cap C$, от където $x =< a, b > \in A \times (B \cap C)$.

Док 6: Първо да докажем че операцията е коректна.
$B \times x, x \in A \implies x \subseteq \bigcup A \implies B \times x \subseteq B \times (\bigcup A) \implies B \times x \in \mathcal{P}(B \times (\bigcup A))$.
Тук $M \leftrightharpoons \mathcal{P}(B \times (\bigcup A))$, което ще е резултат от отделянето.

$\boxed{\text{Лема}}$ Съществува единствено мн-во $\forall u(u \in C \Leftrightarrow (\exists x \in A)(u = B \times x))$

Док: Единственост - от аксиомата за обемност.

(съществуване): Нека $C = \{u \mid u \in \mathcal{P}(B \times \bigcup A) \land (\exists x \in A)(u = B \times x)\}$.
$u \in C \implies u \in \mathcal{P}(B \times \bigcup A) \land \phi(u) \implies \phi(u)$. Сега от $\phi(u) \Rightarrow u \in \mathcal{P}(B \times \bigcup A)$ следва ...

($\subseteq$) Нека $u \in B \times (\bigcup A)$ е произволно. Нека $< b, c >= u$ като $b \in B$ и $c \in \bigcup A$. Нека $a \in A$ е т.ч. $c \in a$. Тогава $u =< b, c >\in B \times a, a \in A$. Но $B \times a \in \{B \times x \mid x \in A\}$, от където $u \in \bigcup\{B \times x \mid x \in A\}$

($\supseteq$) Нека $u \in \bigcup\{B \times x \mid x \in A\}$. Нека $a \in A$ е т.ч. $u \in B \times a$. Нека $b \in B, c \in a$ са т.ч. $u =< b, c >$. Но $a \in A \implies a \subseteq \bigcup A$, така $c \in \bigcup A$. Тогава $u =< b, c >\in B \times (\bigcup A)$.

Сега от Тинко:
Множествата са естествени числа - $\mathbb{N}$,
т.е. един обект е множество $\iff$ този обект е естествено число.

Нека x и y са множества, $x = y \iff x = y$ като естествени числа.

Сега ще дефинираме принадлежност.
Нека $n > 0$, тогава $n = (1b_{k-1}...b_1b_0) = 1.2^k + ... + b_1.2^1 + b_0.2^0$
Нека x и y са множества. Казваме че $y \in x$ ако $b_{y-1} = 1$ в двоичното представяне на x.

Вижда се че логическите аксиоми са в сила - еквивалентност на равенството и конгруентност.

Какво означава аксиомата за екстенсионалност $\forall x \forall y(\forall z(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y)$?
Ами x и y имат еднакви двоични представяния, т.е. те са равни.

Аксиома за чифта: Нека a и b са множества:

1. $a = b$, тогава $x = 2^a$

2. $a \neq b$, тогава $x = 2^a + 2^b$

Схема за отделяне: Нека $\phi(x)$ е ТМ свойство.
Нека A е съвкупността на естествените числа x, за които $\phi(x)$ е вярно. Нека B е множество.
Сега се чудим дали $\exists C \forall x(x \in C \Leftrightarrow x \in B \land \phi(x))$ е изпълнено.
Ами това са тези битове b на B, за които е вярно свойството $\phi(b)$. Съответно в двоичния запис на C само на съответните позиции на тези b-та има 1, на всички останали има 0.

$\boxed{\text{Аксиома за безкрайност}}$

Форма на Цермело: $\exists A(\emptyset \in A \land \forall x(x \in A \Rightarrow \{x\} \in A))$
Нека A_0 е множество със свойството $\emptyset \in A_0 \land \forall x(x \in A_0 \Rightarrow \{x\} \in A_0)$. $\emptyset \in A_0 \Rightarrow \{\emptyset\} \in A_0$, така $\{\emptyset\} \in A_0$ и т.н. Показваме за произволен брой влагания на $\emptyset$.

Форма на Фон Нойман: $\exists A(\emptyset \in A \land \forall x(x \in A \Rightarrow x \cup \{x\} \in A)$
A_0: $\emptyset \in A_0, \{\emptyset\} \in A_0, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \in A_0$ и т.н. Ние ще ползваме тази дефиниция когато говорим за естествени числа, където $0 \leftrightharpoons \emptyset$.

$\boxed{\text{Аксиома за регулярност/фундираност}}$ $\forall x(x \neq \emptyset \Rightarrow \exists y(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset))$
(Формулирана от Мириманов през 1917г и от Фон Нойман през 1925г)

$\boxed{\text{T}}$

1. $\neg \exists x(x \in x)$
2. $\neg \exists x \exists y(x \in y \wedge y \in x)$
3. $\neg \exists x \exists y \exists z(x \in y \wedge y \in z \wedge z \in x)$
4. Не съществува редица от мн-ва $x_0, x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...$, такива че$x_0 \in x_1, x_1 \in x_2, ...$

Док 1: Да допусканем, че $\exists x(x \in x)$. Нека x_0 е свидетел за това съществуване, т.е. нека x_0 е мн-во със свойството $x_0 \in x_0$. Нека $x_1 = \{x_0\}$, т.е. $x_0 \in x_1$. Значи $x_1 \neq \emptyset$, следователно $\exists y(y \in x_1 \wedge y \cap x_1 = \emptyset)$. Нека y_0 е свидетел за това съществуване, т.е. $y_0 \in x_1 \wedge y_0 \cap x_1 = \emptyset$.
Така $y_0 \in x_1$, но $x_1 = \{x_0\}$, следователно $y_0 = x_0$ и така $x_0 \in x_0$.
Следователно $x_0 \in y_0$, $x_0 \in \{x_0\}, \{x_0 = x_1\}$. Така $x_0 \in y_0$ и $x_0 \in x_1$. Значи $x_0 \in y_0 \cap x_1$.
Това е абсурд, понеже $y_0 \cap x_1 = \emptyset$.

Док 2: Да доп. че $\exists x \exists y(x \in y \wedge y \in x)$. Нека x_0 и y_0 са мн-ва, т.ч. $x_0 \in y_0 \wedge y_0 \in x_0$. Нека $x_1 = \{x_0, y_0\}$. Така $x_1 \neq \emptyset$. От $x_1 \neq \emptyset \implies \exists y(y \in x_1 \wedge y \cap x_1 = \emptyset)$.
Следователно $\exists y(y \in x_1 \wedge y \cap x_1 = \emptyset)$. Нека y_1 е такова мн-во, че $y_1 \in x_1 \wedge y_1 \cap x_1 = \emptyset$. $y_1 \in x_1, x_1 = \{x_0, y_0\}$. Следователно $y_1 = x_0 \vee y_1 = y_0$. Да разгледаме случаите:

1. $y_1 = x_0$. Разглеждаме y_0. Знаем че $y_0 \in x_0$ и $x_0 \in y_0$. Така $y_0 \in y_1$, но $y_0 \in x_1$ защото $x_1 = \{x_0, y_0\} \implies y_0 \in y_1 \cap x_1 \implies$ противоречие $y_1 \cap x_1 = \emptyset$
2. $y_1 = y_0$. $x_0 \in y_0$, следователно $x_0 \in y_1$. Така ?...?
3. Сами! Hint: Допускаме че $x_0 \in y_0 \wedge y_0 \in z_0 \wedge z_0 \in x_0$ и $x_1 \leftrightharpoons \{x_0, y_0, z_0\}$

$\boxed{\text{Аксиомна схема за замяната}}$ (С тази аксиома вече имаме аксиомната схема $\mathcal{ZF}$)
Имаме един детерминистичен преобразувател (на интуитивно ниво функция) - $\phi(x, y, \overline{u})$, в който можем да фиксираме $\overline{u}$ и за дадено x то ни връща y.
Аксиомната схема твърди, че за такова ϕ с дефиниционна област A, има съответен образ на ϕ. Френкел забелязва че ако разгледаме $\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), ..., \mathcal{P}^n(\mathbb{N})$, то не можем да гарантираме че това последното $\mathcal{P}(N)^n$ съществува.

Схемата: Нека $\forall u_1 ... \forall u_n((\forall x \forall y_1 \forall y_2(\phi(x, y_1, \overline{u}) \wedge \phi(x, y_2, \overline{u})) \Rightarrow y_1 = y_2) \Rightarrow \forall A \exists B \forall z(z \in B \Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge \phi(x, z, \overline{u}))))$

Разлглеждаме: $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}, A \leftrightharpoons \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$\phi(x, y) \leftrightharpoons (x = \emptyset \wedge y = a) \vee (x = \{\emptyset\} \wedge y = b))$
$\forall x \forall y_1 \forall y_2(\phi(x, y_1) \wedge \phi(x, y_2) \Rightarrow y_1 = y_2)$
$\exists B \forall z(z \in B \Leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge \phi(x, z)))$

$\boxed{\text{Аксиома за избора } (\mathcal{AC})}$ Нека имам някакво разделяне(разбиване) на множеството A и взема по един елемент от всяка част. $\forall z(z \in A \Rightarrow \bigcap z$ е синглетон $(\exists u(z \cap c = \{u\})))$

С помощта на аксиомата за избора се доказва че всяко множество може да бъде добре наредено (contraversial). $\forall x(x \in A \Rightarrow \emptyset) \Rightarrow \exists f(Func(f))$
$Fom(f) = A \wedge \forall x(x \in A \Rightarrow f(x) \in x)$
Това поражда и парадокса на Банарх Тарски: Взимаме кълбо B с $r = 1$, значи може да разделим $B = B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_7$. След което можем да вземем $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ с $r = 1$ и $B_4 \cup B_5 \cup ... \cup B_17$ с $r = 1$ - абсурд! Аксиомата за избора не е конструктивна!

<u>Аксиомата:</u> Аксиома на мултипликативност - форма на Ръсел, защото още не сме въвели понятието за функция
$\forall A(\forall x(x \in A \Rightarrow x \neq \emptyset) \wedge \forall x \forall y(x \in A \wedge y \in A \wedge x \neq y \Rightarrow x \cap y = \emptyset) \Rightarrow \exists C \forall x(x \in A \Rightarrow \exists u(x \cap C = \{u\})))$

<u>Заб:</u> Ако A е крайно - всичко е точно. Но ако A е безкрайно вече е различно.

$f : A \to B, A \twoheadrightarrow B$ (сюрекция), то можем да ограничим домейна за да получим биекция. Тоест съществува $A_0 \subseteq A : f \restriction A_0$ е биекция м-ду A_0 и B.

Лекция 4

$\boxed{\text{(Бинарни) Релации}}$ Това са множества (обекти от света ни).

Пример: $P_1(A, l) \leftrightharpoons$ точката A лежи на правате l.
Обаче може да имаме различни свойства, които описват еднакви релации (множества).
Ако $P_2(A, l) \leftrightharpoons$ правата l минава през точката A,
то $R_1 = \{< A, l > \mid P_1(A, l)\}$ и $R_2 = \{< A, l > \mid P_2(A, l)\}$ са равни. За нас релация е просто множество от наредени двойки $R \subseteq A \times B$

$\boxed{\text{Опр}}$ Бинарна релация е множество, чийто елементи са наредени двойки.
$Rel(R) \leftrightharpoons \forall z(z \in R \Rightarrow \exists x \exists y(z =< x, y >))$

Примери:

1. $\emptyset$ - никъде недефинираната релация
2. A е множество, $A \times A$ е релация (пълна релация над A)
3. A е мн-во, $id_A = \{< x, x > \mid x \in A\}$ е идентитет на A.
   Заб: $T = \{< x, x > \mid x = x\}$ не е множество (поражда парадокса на Ръсел)

$\boxed{\text{def}}$ Нека R е релация.
Дефиниционна област на R наричаме: $Dom(R) \leftrightharpoons \{x \mid \exists y(< x, y >\in R)\}$
Област на стойностите на R наричаме: $Rng(R) \leftrightharpoons \{y \mid \exists x(< x, y >\in R)\}$

$\boxed{\text{Тв}}$ За всяка релация R, $Dom(R)$ и $Rng(R)$ са множества.

Док: $x \in Dom(R) \implies \exists y(< x, y >\in R) \implies \exists y(\{x\} \in< x, y >\in R) \implies \{x\} \in \bigcup R \implies Dom(R) \subseteq \bigcup\bigcup R, Dom(R)$ е определима съвкупност (клас).
$\bigcup\bigcup R$ е множество $\implies Dom(R)$ е множество.
Аналогично получаваме $y \in Rng(R) \Rightarrow y \in \bigcup\bigcup R \implies Rng(R) \subseteq \bigcup\bigcup R$ - множество.

$\boxed{\text{Тв}}$ $Rel(R) \Rightarrow R \subseteq Dom(R) \times Rng(R)$

Док: Нека $z \in R$. Тогава z е наредена двойка. Нека x и y са т.ч. $z =< x, y >$.
Тогава $x \in Dom(R)$ и $y \in Rng(R)$. Следователно $z =< x, y >\in Dom(R) \times Rng(R)$

$\boxed{\text{Операции върху релации}}$ R, S - релации, то $\implies R \cup S, R \cap S, R \setminus S$ са релации
$R^{-1} \leftrightharpoons \{< x, y > \mid < y, x >\in R\}$ е съвкупност от наредени двойки. Обаче множество ли е?
$R^{-1} = \{< x, y > \mid < y, x >\in R\} = \{u \mid \exists x \exists y(u =< x, y > \wedge < y, x >\in R)\} = \{u \mid u \in Rng(R) \times Dom(R) \wedge \exists x, y(u =< x, y > \wedge < y, x >\in R)\}$

$\boxed{\text{def}}$ Операция - композиция на релации. $(f \circ g)(x) = g(f(x))$

$\boxed{\text{Опр}}$ Композицията на релациите R и S наричаме мн-вото:
$R \circ S \leftrightharpoons \{< x, y > \mid \exists z(< x, z >\in R \wedge < z, y >\in S)\} = \{u \mid (\exists x, y, z)(u =< x, y > \wedge < x, z >\in R \wedge < z, y >\in S)\} = \{u \mid u \in Dom(R) \times Rng(S) \wedge (\exists x, y, z)(u =< x, y > \wedge < x, z >\in R \wedge < z, y >\in S)\}$

$\boxed{\text{Св}}$ Нека R, S_1, S_2 са релации. Тогава са изпълнени:

1. $R \circ (S_1 \circ S_2) = (R \circ S_1) \circ S_2$ - асоциативност
2. $(S_1 \cup S_2) \circ R = (S_1 \circ R) \cup (S_2 \circ R)$
   $R \circ (S_1 \cup S_2) = (R \circ S_1) \cup (R \circ S_2)$
3. $R \circ (S_1 \cap S_2) \subseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$, обратното включване не винаги е вярно.
4. $R \circ (S_1 \setminus S_2) \supseteq (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$
5. $(S_1 \circ S_2)^{-1} = S_2^{-1} \circ S_2^{-1}$

Док 3: Нека $u \in R \circ (S_1 \cap S_2)$. Нека x, y, z, т.ч. $u =< x, y >, < x, z > \in R$ и $< z, y > \in S_1 \cap S_2$. Тогава $< z, y > \in S_1$ и $< z, y > \in S_2$. След. $< x, y > \in R \circ S_1$ и $< x, y > \in R \circ S_2$. Така $u =< x, y > \in (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2)$.

$R = \{< x, z >, < x, t >\}, z \neq t$
$S_1 = \{< z, y >\}$
$S_2 = \{< t, y >\}$
$S_1 \cap S_2 = \emptyset, R \circ (S_1 \cap S_2) = R \circ \emptyset = \emptyset$
$R \circ S_1 = < x, y >$
$R \circ S_2 = < x, y >$
$\implies (R \circ S_1) \cap (R \circ S_2) = \{< x, y >\}$

Док 4: Нека $u \in (R \circ S_1) \setminus (R \circ S_2)$. Така $u \in R \circ S_1$ и $u \notin R \circ S_2$. Нека x, y, z са такива че $< x, z > \in R$ и $< z, y > \in S_1$. Понеже $u \notin R \circ S_2$, то $\forall t (< x, t > \in R \Rightarrow < t, y > \notin S_2)$. Но $< x, z > \in R$, след. $< z, y > \notin S_2$. Обаче $< z, y > \in S_1$, от където $< z, y > \in S_1 \setminus S_2$. От $< x, z > \in R$, следва че $u =< x, y > \in R \circ (S_1 \setminus S_2)$
Обратното не е винаги вярно!

Заб: $(\circ)$ не е комутативна!

$\boxed{\text{Опр}}$ Нека $Rel(R)$ и $A \subseteq Dom(R)$. Образ на A при R наричаме множеството:
$R[A] = \{y \mid \exists (x \in A)(< x, y > \in R)\} \subseteq Rng(R)$

$\boxed{\text{Опр}}$ Нека $Rel(R)$ и $B \subseteq Rng(R)$. Праобраз на B при R наричаме множеството:
$R^{-1}[B] = \{x \mid \exists (y \in B)(< x, y > \in R)\} \subseteq Dom(R)$

$\boxed{\text{Тв (за коректност)}}$ Нека R е релация и $B \subseteq Rng(R)$. Тогава $(R^{-1})[B] = R^{-1}[B]$, където $(R^{-1})[B]$ е образ на B ри R^{-1}, а $R^{-1}[B]$ е праобраз на B при R.

Док: За вс. x е в сила че $x \in (R^{-1}[B]) \iff \exists y (< y, x > \in R^{-1} \wedge y \in B) \iff \exists y (y \in B \wedge < x, y > \in (R^{-1})^{-1}) \iff \exists y (y \in B \wedge < x, y > \in R) \iff x \in (R)^{-1}[B]$

$\boxed{\text{Тв}}$ Нека $\forall x (x \in X \Rightarrow x \subseteq Dom(R))$. Тогава $R[\bigcup X] = \bigcup \{R[x] \mid x \in X\}$. Тук $Rel(R)$ и X е множество. Това е коректно защото $(\forall x \in X) x \subseteq Dom(R)) \implies \bigcup X \subseteq Dom(R)$. $a \in \bigcup X \implies \exists x (x \in X \wedge a \in x) \implies a \in Dom(R)$. Сега това множество ли е?
Нека $x \in X \implies x \subseteq Dom(R) \implies R[x] \subseteq R[Dom(R)]$. Тогава ако $A \subseteq A_1 \subseteq Dom(R) \implies R[A] \subseteq R[A_1]$ и съответно $B \subseteq B_1 \subseteq Rng(R) \implies R^{-1}[A] \subseteq R^{-1}[B_1]$. Значи това е определима съвкупност $\{R[x] \mid x \in X\} \subseteq \mathcal{P}(Rng(R))$. Всичко е коректно, сега доказателството.

Док: Нека $b \in R[\bigcup X]$. Нека $a \in \bigcup X$ е т.ч. $< a, b > \in R$. Нека $x_0 \in X$ е такъв че $a \in x_0$. Тогава $b \in R[x_0]$. Следователно $b \in \bigcup\{R[x] \mid x \in X\}$

Сега обратното включване. Нека $b \in \bigcup\{R[x] \mid x \in X\}$. Нека $x_0 \in X$ е т.ч. $b \in R[x_0]$. Но $x_0 \subseteq \bigcup X$. Пак от монотонността следва че $b \in R[x_0] \subseteq R[\bigcup X]$.

$\boxed{\text{Тв}}$ Нека $Rel(R)$ и X е мн-во за което е изп. че $\forall x(x \in X \Rightarrow x \subseteq Dom(R))$. Тогава $R[\cap X] \subseteq \cap\{R[x] \mid x \in X\}$, като не винаги е в сила обратното включване. Ако допълнително $(\forall y Rng(R))(\exists! x \in Dom(R))(< x, y > \in R))$ (нещо като инективност), то тогава
$R[\cap X] = \cap\{R[x] \mid x \in X\}$.

Док: Нека $b \in R[\cap X]$. Нека $a \in \cap X$ е такова че $< a, b > \in R$. Следователно за всяко $x \in X, a \in x$. Следователно за вскяо $x \in X, b \in R[x]$. Така b принадлежи на всички елементи на $\{R[x] \mid x \in X\}$, значи $b \in \cap\{R[x] \mid x \in X\}$.

Пример: $X = \{\{a_1\}, a_2\}$ и $a_1 \neq a_2, R = \{< a_1, b_1 >, < a_2, b_2 >\}$
$\cap X = \{a_1\} \cap \{a_2\} = \emptyset, R[\cap X] = \emptyset$
$R[\{a_1\}] = \{y \mid (\exists x \in \{a_1\})(< x, y > \in R)\} = \{y \mid < a_1, y > \in R\} = \{b\}$.
Значи $R[\{a_2\}] = \{b\}, \{R[x] \mid x \in X\} = \{\{b\}\}$.
$\cap\{\{b\}\} = \{b\}$, $A = \{a\}, a = \{b\}$,
$x \in \cap A \Leftrightarrow \forall a \in A(x \in a)$

Нека $(\forall y \in Rng(R))(\exists! x \in Dom(R))(< x, y > \in R)$. Нека $b \in \cap\{R[x] \mid x \in X\}$.
Следователно за всяко $x \in X, b \in R[x]$, т.е. за всяко $x \in X$ същ $a \in x$, т.ч. $< a, b > \in R$.

$b \in Rng(R)$: $x \neq \emptyset$. Нека $x_0 \in X$. Тогава $b \in R[x_0]$. След $b \in Rng(R)$. Нека $a_0 \in x_0$ е т.ч. $< a_0, b > \in R$. Нека сега $x \in X$ е произволно и $a \in x$ е т.ч. $< a, b > \in R$. Но $< a_0, b > \in R$, от където $a_0 = a$. В частност $a_0 \in x$, но x е произволно. Следователно $a_0 \in \cap X$. Но тогава $b \in R[\cap X]$, защото $< a_0, b > \in R$ и $a_0 \in \cap X$. Така $\cap\{R[x] \mid x \in X\} \subseteq R[\cap X]$

$\boxed{< \text{Функции} >}$

$\boxed{\text{Опр}}$ Казваме че релацията R е функция,
ако $Funct(R)$, където $Funct(R) \leftrightharpoons Rel(R) \wedge \forall x \forall y \forall y'(< x, y > \in R \wedge < x, y' > \in R \Rightarrow y = y')$

1. $Funct(R) \implies Rel(R)$
2. $Funct(R), Dom(R) = A, Rng(R) \subseteq B$, то пишем $R : A \to B$
3. $Funct(R), Dom(R) \subseteq A, Rng(R) \subseteq B$, то ще казваме че R е частична функция от A към B. Ще пишем $R : A \nrightarrow B$
4. $R : A \to B$ и $Rng(R) = B$, ще казваме че R е сюрекция (епиморфизъм) на A върху B. Означаваме с $R : A \twoheadrightarrow B$
5. $R : A \to B, R$ е инекция (мономорфизъм), ако $\forall x \forall x' \forall y(x \neq x' \wedge < x, y > \in R \Rightarrow < x', y > \notin R)$. Означаваме $R : A \rightarrowtail B$

6. $R : A \to B$ е биекция, ако R е сюрекция на A в-ху B и R е инекция. Означаваме $R : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$

Понеже функциите са релации, директно се пренасят и понятията за образ и праобраз.
Ще използваме $f, g, h...$, за да означаваме че дадена релация е функция.
Ако $Func(f)$, вместо $< x, y >\in f$ ще пишем $f(x) = y$

$\boxed{\text{Следствие}}$ Нека $Func(f)$ и нека X и Y са такива мн-ва че:
$(\forall x \in X)(x \subseteq Dom(f))$ и $(\forall y \in Y)(y \subseteq Rng(f))$.
Тогава $f[\bigcup X] = \bigcup\{f[x] \mid x \in X\}$ и $f[\cap X] \subseteq \cap\{f[x] \mid x \in X\}$ (равенство не винаги се достига).
Изпълнено е че $f^{-1}[\bigcup X] = \bigcup\{f^{-1}[x] \mid x \in X\}$ и $f^{-1}[\cap X] = \cap\{f^{-1}[x] \mid x \in X\}$.
$\forall y \in Rng(R)\exists! x \in Dom(R)(< x, y >\in R)$

<u>(⇒)</u> Нека $Func(f^{-1})$. Нека x, x', y са т.ч. $x \neq x'$ и $< x, y >\in f$. Тогава $< y, x >\in f^{-1}$. Ако доп, че $< x', y >\in f$, то $< y, x' >\in f^{-1}$. Понеже f^{-1} е функция, то $x = x'$. Но f^{-1} е функция, т.е. $x \neq x' \implies$ Противоречие! $\implies < x', y >\notin f$ и значи f е инективна.

<u>(⇐)</u> Нека f е инективна. Нека x, y, y' са т.ч. $< x, y >, < x, y' >\in f^{-1}$.
Тогава $< y, x >, < y', x >\in f$ и понеже f е инективна то $y = y'$. Следователно $Func(f^{-1})$.

$\boxed{\text{Тв}}$ Нека f и g са функции.
Тогава $f \circ g$ е функция с $Dom(f \circ g) = \{x \mid x \in Dom(f) \wedge f(x) \in Deom(g)\}$.
За всяко $x \in Dom(f \circ g)$ е вярно $(f \circ g)(x) = f(g(x))$.

<u>Док:</u> $Rel(f \circ g)$. Нека $< x, y >, < x, y' >\in f \circ g$. Нека z, z' са т.ч. $< x, z >\in f \wedge < z', y >\in g$ и $< x, z' >\in f \wedge < z', y' >\in g$
$Func(f) \implies z = z' \implies < z, y >, < z, y' >\in g \implies y = y'$ (от $Func(g)$)

Нека $x \in Dom(f \circ g)$. Нека y е т.ч. $< x, y >\in f \circ g$. Нека z е т.ч. $< x, z >\in f$ и $< z, y >\in g$.
Тогава $x \in Dom(f)$ и $z = f(x)$. Но $z \in Dom(g)$, от където $f(x) \in Dom(g)$.
Сега наобратно. Взимаме $x \in Dom(f)$ и $f(x) \in Dom(g)$. Тогава $< x, f(x) >\in f$ и $< f(x), g(f(x)) >\in g$. Следователно $< x, g(f(x)) >\in f \circ g$. В частност получаваме че $x \in Dom(f \circ g)$ и понеже $Func(f \circ g)$, то $(f \circ g)(x) = g(f(x))$.

$\boxed{\text{Опр}}$ Казваме, че функциите f и g са съвместими, ако $Func(f \cup g)$.

$\boxed{\text{Опр}}$ $f : A \to B, A_1 \subseteq A$
Рестрикция на f до A_1: $f \restriction A_1 \leftrightharpoons f \cap (A_1 \times Rng(f))$

$\boxed{\text{Тв}}$ f и g са съвместими $\iff f \restriction (Dom(f) \cap Dom(g)) = g \restriction (Dom(f) \cap Dom(g))$

<u>Док:</u> *To be continued...*

Да уточним някакви неща:
$f : A \to B, A_1 \subseteq A = Dom(f)$
Рестрикция на f до A_1: $f \restriction A_1 = f \cap (A_1 \times Rng(f)) = \{< x, f(x) > \ \mid x \in A_1\}$

1. $Funct(f \restriction A_1)$
2. $f \restriction A_1 \subseteq f \restriction A$
3. $A_1 \subseteq A2 \subseteq A \Rightarrow f \restriction A_1 \subseteq f \restriction A_2$

$\boxed{\text{Опр}}$ f и g са съвместими функции, ако $f \cup g$ е функция.

$\boxed{\text{Тв}}$ Функциите f и g са съвместими $\Leftrightarrow f \restriction (Dom(f) \cap Dom(g)) = g \restriction (Dom(f) \cap Dom(g))$

Док: $(\to)$ Нека $Funct(f \cup g)$. Нека $u \in f \restriction (Dom(f) \cap Dom(g))$. Тогава $u =< x, y >$ като $x \in Dom(f) \cap Dom(g)$ и $y = (f \restriction (Dom(f) \cap Dom(g)))(x) = f(x)$. Poneve $x \in Dom(g)$, то $< x, g(x) >\in g$. Така $< x, f(x) >, < x, g(x) >\in f \cup g$. Понеже $Funct(f \cup g)$, то $f(x) = y = g(x)$. След. $u =< x, y >=< x, g(x) >\in g$ и понеже $x \in Dom(f) \cap Dom(g)$, то $u =< x, y >\in y \restriction (Dom(f) \cap Dom(g))$.

$(\Leftarrow)$ Нека $f \restriction (Dom(f) \cap Dom(g)) = g \restriction (Dom(f) \cap Dom(g))$. Ясно е, че $Rel(f \cup g)$. Нека $< x, y >, < x, y' >\in f \cup g$
Възможни са 3 случея:

1. $< x, y >, < x, y' >\in f$. Но $Funct(f)$, от където $y = y'$.
2. $< x, y >, < x, y' >\in g$. Подобно - получава се $y = y'$
3. $< x, y >\in f, < x, y' >\in g$. Тогава $x \in Dom(f), x \in Dom(g)$. След $x \in Dom(f) \cap Dom(g)$. Така $y = f(x) = g(x) = y'$

$\boxed{\text{Тв}}$ Нека F е множество от две по две съвместими функции. Тогава $\bigcup F$ е функция като: $Dom(\bigcup F) = \bigcup\{Dom(f) \mid f \in F\}$ $Rng(\bigcup F) = \bigcap\{Rng(f) \mid f \in F\}$

Док: Ясно е, че $Rel(\bigcup F)$. Нека $< x, y >\in \bigcup F$ и $< x, y' >\in \bigcup F$. Нека $f, f' \in F$ са такива че $< x, y >\in f$ и $< x, y' >\in f'$. Тогава $Funct(f \cup f')$, като $< x, y >, < x, y' >\in f \cup f'$. Следователно $y = y'$. Така получаваме $Funct(\bigcup F)$.

Нека $x \in Dom(\bigcup F)$. Нека y е т.ч. $< x, y >\in \bigcup F$. Нека $f_0 \in F$ е такова че $< x, y >\in f_0$. Тогава $x \in Dom(f_0)$ и следователно $x \in \bigcup\{Dom(f) \mid f \in F\}$. Нека сега $f_0 \in F$ е т.ч. $x \in Dom(f_0)$. Но $f_0 \subseteq \bigcup F$ и $\bigcup F$ е функция, следователно $Dom(f_0) \subseteq Dom(\bigcup F)$. Следователно $x \in Dom(\bigcup F)$

Лекция 5

$\boxed{\text{Опр}}$ За $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, ще казваме че f е монотонна, ако:
$(\forall X_1 \supset A)(\forall X_2 \subseteq A)(X_1 \subseteq X2 \to f(X_1) \subseteq f(X_2))$

$\boxed{\text{Опр}}$ И за монотонна $f : B \to B$, x е неподвижнда точка на f, ако $f(x) = x$

$\boxed{\text{Лема}}$ (Тарски)
Нека $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ е монотонна функция. Тогава f има неподвижнда точка.
Нещо повече, f има най-малка и най-голяма неподвижнда точка:
тоест съществуват $X_1, X_2 \in \mathcal{P}(A)$ т.ч. $f(X_1) = X_1, f(X_2) = X_2$ и за всяко $X \in \mathcal{P}(A)$ с $f(X) = X$ е изпълнено, че $X_1 \subseteq X \subseteq X_2$.

Док: Нека $\Pi = \{X \mid X \subseteq A \wedge f(X) \subseteq X\}$ Понеже $A \in \Pi$, то $\Pi \neq \emptyset$. Нека $X_1 = \bigcap \Pi$. За вс. $X \in \Pi$, $X_1 = \bigcap \Pi \subseteq X$. Понеже f е монотонна, то за вс. $X \in \Pi$, $f(X_1) \subseteq f(X) \subseteq X$. Следователно $f(X_1) \subseteq \bigcap \Pi = X_1$. Понеже $X_1 \subseteq A$, то $X_1 \in \Pi$. Отново от монотонността на f имаме, че $f(f(X_1)) \subseteq f(X_1)$. Значи $f(X_1) \in \Pi$. Следователно $X_1 \subseteq f(X_1)$. От тук $f(X_1) = X_1$ и така X_1 е неподвижнда точка на f. Ясно се вижда че: $f(X) = X \implies x \in \Pi \implies X_1 = \bigcap \Pi \subseteq X \implies X_1$ е най-малката неподвижна точка на f
За най-голяма неподвижна точка - за домашна!

(от Тинко)

$\boxed{< \text{Равномощни множества. Сравняване на множества по мощност} >}$

$\boxed{\text{def}}$ Казваме че A и B са равномощни, ако съществува биекция на A върху B,
тоест $\exists f(f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B)$. Означения: $|A| = |B|$ или $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$
Съответно $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{B}} \leftrightharpoons \neg(\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}})$

Казваме че мощността на A не надминава мощността на B, ако $\exists f(f : A \rightarrowtail B)$.
Пишем $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$.

Казваме че мощността на A е строго по-малка от мощността на B, ако $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} \wedge \overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{B}}$.
Пишем $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$.

$\boxed{\text{Св}}$

1. $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A}}$, от $Id_A : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A$
2. $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} \implies \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A}}$
3. $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}} \wedge \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{C}} \implies \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{C}}$

Док 2: Нека $f_0 : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$ (свидетел за съществуващата биекция), тогава $f_0^{-1} : B \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A$.
Значи $\exists f'(f' : B \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A)$

Док 3: $\exists f(A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B)$ и $\exists f(B \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow C)$. Нека вземем свидетели: $f_0 : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B, f_1 : B \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow C$.
Нека $h = f_0 \circ f_1$, т.е. $h(x) = f_1(f_0(x))$. Вижда се че $h : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow C$. Следователно $\exists f'(f' : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow C)$.

Нека A и c са произволни множества. Тогава $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A \times \{c\}}}$ и $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{\{c\} \times A}}$
Дефинираме $f : f(a) =< a, c >$ за вс. $a \in A$. $f = \{u \mid \exists a(a \in A \wedge u =< a, < a, c >>)\} = \{< a, c > \mid a \in A\}$, съответно тук отделяме $u \in A \times \{c\}$. **idk???**

$\boxed{\text{Тв}}$ $A \neq \emptyset \iff \neg\exists B \forall x(x \in B \Leftrightarrow \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{A}})$

Док: Нека $A \neq \emptyset$. $a_0 \in A$. Да доп. че $\exists B \forall x(x \in B \Leftrightarrow \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{A}})$. Нека B е свидетел за съществуването $\forall x(x \in B \Leftrightarrow \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{A}})$. И нека вземем $B_0 \leftrightharpoons \{w \mid w \in B \wedge \exists c(w = A \times \{c\})\}$.
Значи $Rel(\bigcup B_0)$.
Нека t е произволно множеството, тогава $A \times \{t\} \in B_0$. Значи за $< a_0, t > \in \bigcup B_0$.
Тогава $t \in Rng(\bigcup B_0)$. Така, $\forall t(t \in Rng(\bigcup B_0))$ - абсурт! (от допускането че B_0 съществува).

Допускането че $A \neq \emptyset$ беше съществено.
Ако $A = \emptyset$, то $\exists B(x \in B \Leftrightarrow \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{A}})$. И единствената възможност е $B = \{\emptyset\}$

$\boxed{\text{Тв}}$ $\forall A \forall B \exists A' \exists B'(\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A'}} \wedge \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{B'}} \wedge A' \cap B' = \emptyset)$
Ще дефинираме $\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}} \leftrightharpoons \overline{\overline{A' \cup B'}}$. Как го постигаме?
Взимаме $c_1 \neq c_2$ и тогава $A' \leftrightharpoons A \times \{c_1 c1\}$ и $B' \leftrightharpoons B \times \{c_2\}$. А $A' \cap B' = \emptyset$

$\boxed{\text{Св}}$ Ако $\overline{\overline{A'}} = \overline{\overline{A''}} \wedge \overline{\overline{B'}} = \overline{\overline{B''}} \wedge A' \cap B' = \emptyset \wedge A'' \cap B'' = \emptyset \implies \overline{\overline{A' \cup B'}} = \overline{\overline{A'' \cup B''}}$

Док: Взимаме свидетели $f_1 : A' \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow A''$ и $f_2 : B' \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B''$, тогава $f_1 \cup f_2$ е функция, защото f_1 и f_2 са съвместими. Съответно $Dom(f_1 \cup f_2) = Dom(f_1) \cup Dom(f_2) = A' \cup B'$. Аналогично за за $Rng(f_1 \cup f_2)$

$\boxed{\text{def}}$ Бихме искали да го дефинираме така $\overline{\overline{A}}.\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{A \times B}}$.
Пак ще вземем равномощни на A и B. $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A'}} \wedge \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{B'}} \implies \overline{\overline{A \times B}} = \overline{\overline{A' \times B'}}$.

$\boxed{\text{def}}$ Ами степенуване - k^n ? Ако $\overline{\overline{A}} = k$ и $\overline{\overline{B}} = n$, то това ще са всички функции от B в A.
Искаме да покажем $\overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}} = \overline{\overline{B_A}}$, където $B_A = \{f \mid f : B \to A\}$. $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A'}} \wedge \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{B'}} \implies \overline{\overline{A}}^{\overline{\overline{B}}} = \overline{\overline{B'_{A'}}}$

$\boxed{\text{Задачи}}$

1. $\forall A \exists A'(\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{A'}} \wedge A \cap A' = \emptyset)$
2. Нека $A \cap B = \emptyset$, тогава $\overline{\overline{{}^{A\cup B}C}} = \overline{\overline{{}^{A}C}} \times \overline{\overline{{}^{B}C}}$
3. $2 \leftrightharpoons \{0, 1\}$, където $0 \leftrightharpoons \emptyset$, $1 \leftrightharpoons \{\emptyset\}$
4. $\overline{\overline{A_2}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$
5. $\overline{\overline{(A \times B)_C}} = \overline{\overline{A_{B_C}}}$

$\boxed{\text{Т}}$ (Кантор-Шрьодер-Берщайн) $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} \wedge \overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}} \implies \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$

Док: Нека $f : A \rightarrowtail B, g : B \rightarrowtail A$. Търсим биекция h. Можем да дефинираме $h \leftrightharpoons (f \restriction X) \cup (h^{-1} \restriction (A \setminus X))$, за някое $X \subseteq A$. Как да вземем такова X?
Трябва ни $A \setminus g[B \setminus f[x]] = X$ (търсим неподвижна точка?).
Дефинираме $\mathcal{F} : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, за $X \subseteq A$ полагаме $\mathcal{F}(X) \leftrightharpoons A \setminus g[B \setminus f[x]]$ и твърдим че $\mathcal{F}$ е монотонно. Наистина нека $X_1 \subseteq X_2 \subseteq A$ и $f[X_1] \subseteq f[X_2]$. Значи $B \setminus f[X_2] \subseteq B \setminus f[X_1] \subseteq B$ и $g[B \setminus f[X_2]] \subseteq g[B \setminus f[X_1]] \subseteq A$ $A \setminus g[B \setminus f[X_1]] \subseteq A \setminus g[B \setminus f[X_2]] \subseteq A$.
$\mathcal{F}(X_1) \subseteq \mathcal{F}(X_2)$. Следователно от Лемата на Тарски за неподвижната точка - $\mathcal{F}$ ма неповижна точка. Нека X_0 е неподвижна точка на $\mathcal{F}$, т.е. $X_0 \subseteq A$ и $\mathcal{F}(X_0) = X_0$.
$A \setminus g[B \setminus f[X_0]] = X_0$ и $A \setminus X_0 = g[B \setminus f[X_0]] = x_0$. Това може ли да е вярно за произволно ножество? Не, защото $X_0 \subseteq A$, т.е. $Rng(g) \subseteq A$
Ние дефинирахме $h \leftrightharpoons (f \restriction X) \cup (h^{-1} \restriction (A \setminus X))$. Това е възможно защото $Dom(g^{-1}) = Rng(g)$ и $A \setminus X_0 \subseteq Dom(g^{-1})$. Каква е дефиниционната област на h? $Dom(h) = Dom(f \restriction x_0) \cup Dom(g^{-1} \restriction (A \setminus X_0)) = X_0 \cup (A \setminus x_0) = A$
$Rng(h) = Rng(f \restriction X_0) \cup Rng(g^{-1} \restriction (A \setminus X_0)) = f[X_0] \cup (B \setminus X_0) = B$. Това което се случва е че ако $Dom(f \restriction X_0) \cap Dom(g^{-1} \restriction (A \setminus X_0)) = \emptyset$ и $Rng(f \restriction X_0) \cap Rng(g^{-1} \restriction (A \setminus X_0)) = \emptyset$ и те са инекции, е в сила твърдението че тяхното обединение също е инекция. Така теоремата е доказана.

$\boxed{\text{Т}}$ В $\mathcal{ZF}$ следните са еквивалентни:

- $\forall A \forall B (\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} \vee \overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}})$
- Аксиомата за избора

Лекция 5