OPERATORE $Tf = g(x) = \cos(x) f(x) + \sin(x) f(\pi - x)$ in $L^2(-\infty,\infty)$

Scrivo
$$Cf = \cos(x) f(x)$$
$$Sf = \sin(x) f(x) \quad \Rightarrow \quad T = C + RS$$
$$Rf = f(\pi - x)$$
OPERATORE DI RIFLESSIONE IN $(0,\pi)$

NB $RSf = \sin(x) f(\pi - x)$ perché $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
sarebbe in realtà SRf ma $SRf = RSf$ per quanto detto.

- NORMA

$$\|Tf\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{Tf}\, Tf\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{(\cos x f(x) + \sin x f(\pi-x))}(\cos x f(x) + \sin x f(\pi - x))\, dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2 x |f(x)|^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 x |f(\pi - x)|^2 dx +$$
$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \cos x \left[\overline{f(x)} f(\pi - x) + f(x) \overline{f(\pi - x)}\right] dx$$

$\Rightarrow$ CONSIDERO $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 x |f(\pi - x)|^2 dx$ E PONGO $z = \pi - x \rightarrow x = \pi - z$
$dx = -dz$

SARÀ UGUALE A $= \int_{+\infty}^{-\infty} \sin^2(\pi - z) |f(z)|^2 (-dz) =$ IL CAMBIO DI VARIABILE INVERTE GLI ESTREMI DI INT.
$\hookrightarrow$ TORNANO DRITTI COL $-$ DAVANTI A dz
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2(z) |f(z)|^2 dz$$

Allora posso scrivere $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2 x |f(x)|^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2 z |f(z)|^2 dz = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)|^2 dy$

CHE È PROPRIO PARI ALLA NORMA QUADRA DI f, $\|f\|^2$

$\Rightarrow$ CONSIDERO $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \cos x \left[\overline{f(x)} f(\pi - x) + f(x) \overline{f(\pi - x)}\right] dx$ CON LO STESSO CAMBIO DI VAR. z
$$= \int_{+\infty}^{-\infty} \sin(\pi - z) \cos(\pi - z) \left[\overline{f(\pi - z)} f(z) + f(\pi - z) \overline{f(z)}\right](-dz) =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} -\sin(z) \cos(z) \left[\overline{f(z)} f(\pi - z) + f(z) \overline{f(\pi - z)}\right] dz$$

vedo che l'integrale è uguale a MENO SE STESSO
$\hookrightarrow$ NON PUÒ CHE ESSERE NULLO

HO TROVATO CHE $\|Tf\|^2 = \|f\|^2$, allora la norma sarà

$$\|T\| = \sup \frac{\|Tf\|}{\|f\|} = 1$$

• OP. AGGIUNTO

→ C è un operatore autoaggiunto ($C^\dagger = C$), lo stesso per S ($S^\dagger = S$), perché sono OPERATORI MOLTIPLICATIVI REALI.

→ L'operatore riflessivo R anch'esso è autoaggiunto ($R^\dagger = R$)

Siano $w(x), v(x) \in L^2(-\infty, +\infty)$

$$(w, Rv) = (R^\dagger w, v) \Rightarrow (w, Rv) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{w(x)}\, v(\pi - x)\, dx$$

faccio il cambio di variabile $z = \pi - x \rightarrow dz = -dx$

$$(w, Rv) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{w(\pi - z)}\, v(z)\, dz = (Tw, v)$$

ALLORA $R^\dagger = R$ → R È AUTOAGGIUNTO

Calcolo l'operatore autoaggiunto esplicitamente come $T^\dagger$

$$T^\dagger = (C + SR)^\dagger = C^\dagger + R^\dagger S^\dagger = C + RS = C + SR = T$$

DA QUESTO VEDO CHE T È UN OPERATORE AUTOAGGIUNTO

• OP. UNITARIO, TROVARE T^2

→ L'OPERATORE È AUTOAGGIUNTO : $\boxed{T \equiv T^\dagger \rightarrow TT^\dagger = T^\dagger T = T^2}$

→ TROVO T^2 IN DUE MODI

I) CALCOLO DIRETTO DI $T(Tf) =$

$$= T(\cos x f(x) + \sin x f(\pi - x)) = \cos^2 x f(x) + \cos x \sin x f(\pi - x) +$$

$$+ \sin x \cos(\pi - x) f(\pi - x) + \sin^2 x f(\pi - \pi + x) =$$

$$= \cos^2 x f(x) + \cancel{\cos x \sin x f(\pi - x)} - \cancel{\cos x \sin x f(\pi - x)} + \sin^2 x f(x) =$$

$$= f(x)(\cos^2 x + \sin^2 x) = f(x) \Rightarrow \boxed{TTf = f \rightarrow T^2 = \mathbb{1}}$$

II) OPERATORI : $RS = SR$; $RC = -CR$; $R^2 = \mathbb{1}$; $S^2 + C^2 = \mathbb{1}$

$$T^2 = (C + SR)(C + SR) = C^2 + CSR + SRC + SRSR =$$

$$= C^2 + CSR - SCR + SR^2S = C^2 + S^2 = \mathbb{1} \rightarrow T^2 = \mathbb{1}$$

Per quanto detto prima su $T^\dagger = T$ ho che $T^2 = T^\dagger T = \mathbb{1}$

↳ QUESTO SIGNIFICA CHE $\boxed{T^\dagger \equiv T^{-1} \Rightarrow T \text{ È UNITARIO}}$

- AUTOVALORI E AUTOVETTORI

→ $\boxed{T \text{ è HERMITIANO}}$, IN QUANTO LIMITATO E AUTOAGGIUNTO

Se trovo autovalori saranno sicuramente reali

Dato un autovettore (eventuale) q : $Tq = \lambda q$

↳ DALLA LINEARITÀ DI T : $T^2 q = \lambda^2 q$

↳ DA $T^2 = \mathbb{1}$: $\lambda^2 q = q \implies \lambda^2 = 1 \rightarrow \boxed{\lambda = \pm 1}$

Avrò due autovettori : $q_+(x)$ per $\lambda = 1$; $q_-(x)$ per $\lambda = -1$

→ ESSENDO $Tq = \lambda q \rightarrow Tq_+ = q_+$; $Tq_- = -q_-$, da cui

$$q_+ (1 - \cos x) = \sin x \, q_+(\pi - x)$$

$$q_- (1 + \cos x) = - \sin x \, q_- (\pi - x)$$

↳ RICORDANDO LA RELAZIONE $\boxed{\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} \equiv \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}}$

$$q_+(x) \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) q_+(\pi - x)$$

$$q_-(x) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = -\sin\left(\frac{x}{2}\right) q_-(\pi - x)$$

↳ NOTANDO CHE $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi - x}{2}\right)$; $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi - x}{2}\right)$

$$\frac{q_+(x)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{q_+(\pi - x)}{\cos\left(\frac{\pi - x}{2}\right)} \equiv S(x)$$ SIMMETRICA RISPETTO A $\frac{\pi}{2}$

FUNZIONI GENERICHE

$$\frac{q_-(x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{q_-(\pi - x)}{\sin\left(\frac{\pi - x}{2}\right)} \equiv a(x)$$ ANTISIMMETRICA RISPETTO A $\frac{\pi}{2}$

↳ TROVO I DUE AUTOVETTORI

$$q_+(x) = S(x) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{per } \lambda = 1$$

$$q_-(x) = a(x) \sin\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{per } \lambda = -1$$

OPERATORE $Tf = g(x) = e^{ix} f(x) - e^{-ix} f(\pi - x)$

Siano $E_+ f = e^{ix} f(x)$

$E_- f = e^{-ix} f(x)$ $\Rightarrow Tf = E_+ f - E_- R f$

$R f = f(\pi - x)$

• LIMITATEZZA E NORMA

Vedo che è limitato usando la proprietà triangolare della norma

$\|T\| \le \|E_+\| + \|E_- R\|$

→ NOTO SUBITO CHE $E_+^\dagger = E_-$, infatti $(w, E_+ V) = \int_0^\pi \overline{w(x)} e^{ix} v(x)\, dx =$

$= \int_0^\pi \overline{e^{-ix} w(x)}\, v(x)\, dx = (E_- w, v)$ PER DEF. DI OP. AGGIUNTO

↳ VALE LO STESSO PER E_- : $E_-^\dagger = E_+$

↳ $\|E_+ f\|^2 = \int_0^\pi |\overline{E_+ f}\, E_+ f|\, dx = \int_0^\pi E_- E_+ |\overline{f(x)} f(x)|\, dx$ MA $E_- E_+ = \mathbb{1}$

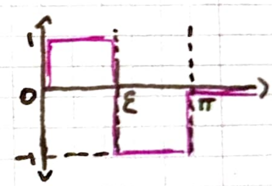
$= \int_0^\pi |\overline{f(x)} f(x)|\, dx \equiv \|f\|^2 \Rightarrow \|E_+\| = \|E_-\| = 1$

→ ANCHE $\|R\| = 1$, LO VEDO CAMBIANDO VARIABILE $z = \pi - x$

Allora T è limitato e $\|T\| \le 1 + 1 = 2$

Posso saturare la dis. con una $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } (0, \varepsilon) \\ -1 & \text{per } (\pi - \varepsilon, \pi) \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

AL DECRESCERE DI ε !!!



$\|Tf\|^2 = \int_0^\pi |\overline{(e^{ix} f(x) - e^{-ix} f(\pi - x))}(e^{ix} f(x) - e^{-ix} f(\pi - x))|\, dx =$

$= \int_0^\pi |(e^{-ix} f(x) - e^{ix} f(\pi - x))(e^{ix} f(x) - e^{-ix} f(\pi - x))|\, dx =$

$= \int_0^\pi \left(|f(x)|^2 - e^{-2ix} |f(x) f(\pi - x)| - e^{2ix} |f(x) f(\pi - x)| + |f(\pi - x)|^2\right) dx =$

$= \int_0^\pi |f(x)|^2 dx + \int_0^\pi |f(\pi - x)|^2 dx - \int_0^\pi (e^{-2ix} + e^{2ix})\, |f(x) f(\pi - x)|\, dx =$

$= 2\|f\|^2 - 2\int_0^\pi \cos(2x) f(x) f(\pi - x)\, dx$

→ $\|f\|^2 = \int_0^\pi |f(x)|^2 dx = \int_0^\varepsilon dx + \int_{\pi - \varepsilon}^\pi dx = \varepsilon + \pi - \pi + \varepsilon = 2\varepsilon$

↳ $\|Tf\|^2 = 4\varepsilon - 2\left[-\int_0^\varepsilon \cos(2x)\, dx - \int_{\pi - \varepsilon}^\pi \cos(2x)\, dx\right] = 4\varepsilon + 4\int_0^\varepsilon \cos(2x)\, dx =$

$= 4\varepsilon + 4\frac{1}{2}\sin(2\varepsilon) = 4(\varepsilon + \frac{1}{2}\sin(2\varepsilon))$ ESPANDO PER ε PICCOLI $\sin 2\varepsilon \to 2\varepsilon$

$\simeq 4(\varepsilon + \frac{1}{2} 2\varepsilon) = 8\varepsilon$

→ $\frac{\|Tf\|^2}{\|f\|^2} = \frac{8\varepsilon}{2\varepsilon} \to \|T\|^2 = 4 \to \boxed{\|T\| = 2}$

- AUTOVALORI E AUTOVETTORI

Scrivo l'equazione agli autovalori

$Tf = e^{ix} f(x) - e^{-ix} f(\pi - x) = \lambda f(x)$

$\shortparallel$

$g(x) = \lambda f(x)$ $\Rightarrow$ g HA QUALCHE SIMMETRIA! TIPO RISPETTO A $\pi/2$ $f(x) = f(\pi - x)$
SI! LO VEDO FACENDO I CONTI ($g(\pi - x) = g(x)$)

Allora anche f dev'essere simmetrica se $\lambda \neq 0$:

$e^{ix} f(x) - e^{-ix} f(x) = \lambda f(x)$

$(\cancel{\cos x} + i \sin x) f(x) - (\cancel{\cos x} - i \sin x) f(x) = \lambda f(x)$

$2i \sin x\, f(x) = \lambda f(x)$ $\rightarrow$ NON ESISTE ALCUN $\lambda \in \mathbb{C}$ IN GRADO DI SODDISFARE QUESTA RELAZIONE

Provo a considerare una $\lambda = 0$

$g(x) = 0 = e^{ix} f(x) - e^{ix} f(\pi - x)$

$\Leftrightarrow e^{ix} f(x) = e^{-ix} f(\pi - x) = -e^{i(\pi - x)} f(\pi - x)$ $\boxed{= a(x)}$

DOVE $a(x)$ E' UNA QUALSIASI FUNZIONE ANTISIMMETRICA RISPETTO A $\pi/2$

Allora $f(x) = a(x)\, e^{-ix}$ E' L'AUTOVALORE RELATIVO A $\lambda = 0$

dunque $f(x) \in \mathrm{Ker}(T)$

- NORMA, OP. AGGIUNTO

Si ricavano le seguenti proprietà: $\boxed{\begin{array}{l} RE_+ = -E_- R \\ E_+ E_- = E_- E_+ = \mathbb{1} \\ E_\pm^\dagger = E_\mp \ ; \ R^\dagger = R \end{array}}$

$\rightarrow \|T\| = \|E_+ - E_- R\| = \|E_+ + RE_+\| = \|E_+(\mathbb{1} + R)\| \leq \|E_+\| (\|\mathbb{1}\| + \|R\|) = 2$

ovvero $\|T\| \leq 2$ $\Rightarrow$ VOGLIO SATURARE LA DISEQUAZIONE con $f(x) = e^{-ix}$

$\|Tf\| = T e^{-ix} = e^{ix} e^{-ix} - e^{-ix} e^{i\pi} e^{ix} = 1 - e^{i\pi} = 2$

$\|f\| = 1$ DA CUI $\boxed{\|T\| = \|Tf\| / \|f\| = 2}$

$\rightarrow T^\dagger = (E_+ - E_- R)^\dagger = E_+^\dagger - R E_-^\dagger = E_- - RE_+ = E_- + E_- R = E_- (\mathbb{1} + R)$

$\|T^\dagger\| = \|E_- (\mathbb{1} + R)\| \leq \|E_-\| (\|\mathbb{1}\| + \|R\|) = 2$

Lo SATURO CON e^{ix}: $\|T^\dagger f\| = e^{ix} e^{ix} + \cancel{}\ e^{-ix} e^{i(\pi - x)} \cancel{} = \cancel{}$

$=$

OPERATORE $Mf = f(ax)$; $Df = f\left(\frac{x}{a}\right)$; $Tf = Mf + Df$ in $L^2(0,\infty)$, $a>1$

- LIMITATEZZA, AGGIUNTI

→ Parto dal calcolare le norme di M, D

$$\|Mf\|^2 = \int_0^{+\infty} |f(ax)|^2 dx \underset{y=ax}{=} \int_0^{+\infty} |f(y)|^2 \frac{dy}{a} = \frac{\|f\|^2}{a}$$

$$\|Df\|^2 = \int_0^{+\infty} \left|f\left(\frac{x}{a}\right)\right|^2 dx \underset{y=x/a}{=} \int_0^{+\infty} |f(y)|^2 a\,dy = a\|f\|^2$$

$$\|T\| \leq \|M\| + \|D\| = \frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{a} < \infty \rightarrow \underline{\text{TUTTI LIMITATI}}$$

→ Calcolo gli aggiunti di M, D

$$(h, Mf) = (M^+h, f) \rightarrow \int_0^{+\infty} \overline{h(x)} f(ax)\, dx \underset{y=x\cdot a}{=} \int_0^{+\infty} \overline{h\left(\frac{y}{a}\right)} f(y) \frac{dy}{a} =$$

$$= \left(\frac{1}{a}Dh, f\right) \quad \text{e quindi } M^+ = \frac{1}{a}D$$

$$(h, Df) = (D^+h, f) \rightarrow \int_0^{+\infty} \overline{h(x)} f\left(\frac{x}{a}\right) dx \underset{y=x/a}{=} \int_0^{+\infty} \overline{a\, h(ay)}\, f(y)\, dy =$$

$$= (aMh, f) \quad \text{e quindi } D^+ = aM$$

$$T^+ = (M+D)^+ = M^+ + D^+ = \frac{1}{a}D + aM$$

→ L'operatore T è NORMALE : $T^+T = TT^+$

$$\frac{1}{a}DT + aMT = \frac{1}{a}TD + aTM$$

$$\frac{1}{a}(DM + \cancel{DD}) + a(\cancel{MM} + MD) = \frac{1}{a}(MD + \cancel{DD}) + a(\cancel{MM} + DM)$$

$$\frac{1}{a}DM + aMD = \frac{1}{a}MD + aDM \quad \text{VERA PERCHÉ } DM = \mathbb{1} = MD$$

- PROPRIETÀ: SE f È AUTOVETTORE PER T CON λ, ALLORA f È AUTOVETTORE PER T^+ CON $\bar{\lambda}$

Considero l'operatore $A \equiv T - \lambda\mathbb{1}$ ⇒ SE f È AUTOVETT. DI T allora $Af = 0$

→ è NORMALE : $AA^+ = A^+A$ → $AA^+ = (T-\lambda\mathbb{1})(T^+ - \bar{\lambda}\mathbb{1}) =$

$$= TT^+ - \lambda T^+ - \bar{\lambda}T - |\lambda|^2\mathbb{1} = (T^+ - \bar{\lambda}\mathbb{1})(T - \lambda\mathbb{1}) = A^+A \quad \blacksquare$$

$$\rightarrow \|Af\|^2 = 0 = (Af, Af) = \boxed{(f, A^+Af) = (f, AA^+f) = (A^+f, A^+f)} = \|A^+f\|^2$$

allora dev'essere $A^+f = 0$ → $T^+f = \bar{\lambda}f$ → ottengo la tesi, ovvero f è autovettore per T^+ per l'autovalore $\bar{\lambda}$

• PROPRIETÀ: SE T HA UN'AUTOFUNZIONE f ALLORA f È AUTOFUNZIONE DI D E M

$$\begin{cases} Tf = Mf + Df = \lambda f \\ T^\dagger f = \frac{D}{a} f + aMf = \bar{\lambda} f \end{cases} \Rightarrow Mf = \frac{\bar{\lambda} a - \lambda}{a^2 - 1} f \quad Df = \frac{\bar{\lambda} a - \lambda a^2}{1 - a^2} f$$

Esistono gli autovettori di M? Considero un autovalore η

$$Mg = \eta g(x) = g(ax) \quad \to \int_0^K |f(ax)|^2 dx = \int_0^K |\eta|^2 |f(x)|^2 dx$$

$\to$ riscrivo come $\int_0^{aK} |f(y)|^2 \frac{dy}{a} = |\eta|^2 \int_0^K |f(x)|^2 dx$ CON $K \in \mathbb{R}$ COSTANTE ARBITRARIA

che posso esprimere come EQUAZIONE DI FUNZIONI INTEGRALI

$$\frac{F(aK)}{a} = |\eta|^2 F(K)$$

$\to$ applico D ad ambo i membri di $Mg = \eta g \Rightarrow DMg = D\eta g$

MA $DM = \mathbb{1}$; $D = aM^\dagger$

$$g = a\eta M^\dagger g = a\eta(\bar{\eta} g) \to 1 = a\eta\bar{\eta} = a|\eta|^2 \to |\eta|^2 = \frac{1}{a}$$

$\to$ tornando all'eq. integrale riscrivo il valore di $|\eta|^2$

$$\frac{F(aK)}{a} - \frac{F(K)}{a} = 0 = \int_K^{aK} |f(x)|^2 dx$$

DATA L'ARBITRARIETÀ DI K QUESTA VALE S.SSE $f=0$ Q.O. IN $(0,+\infty)$

$\to$ SEGUE CHE M NON HA AUTOVETTORI, NEMMENO T E D.

OP $Tf = \frac{1}{2}[e^{ix} f(x) + e^{-ix} f(x)]$ in $L^2[-1,1)$

$$Tf = \frac{1}{2}[E_+ f(-x) + E_- f(x)] = \frac{1}{2}(E_+ R f + E_- f) =$$ con $E_+ R = R E_-$

$$= \frac{1}{2}(R E_- f + E_- f) = \frac{1}{2}(R + 1) E_- \equiv P E_- f$$

con $P := \frac{1}{2}(R + 1)$ proiettore sulla parte pari,

dunque PE_- e' il proiettore sulla parte pari di e^{-ix}

→ LIMITATEZZA

$$\|Tf\| \le \frac{1}{2}[\|\overset{E_+R}{\cancel{E_+}}\| + \|E_-\|] = \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

oppure

$$\|Tf\| \le \frac{1}{2}[\|e^{+ix} f(-x)\| + \|e^{-ix} f(x)\|] = \frac{1}{2}(1+1) = 1 = \|f(x)\|$$

SIA $f(x) = e^{ix} p(x)$ con $p(x)$ PARI :

$$\|Tf\| = \frac{1}{2}[\|E_+ R f\| + \|E_- f\|] = \frac{1}{2}[\|e^{ix} e^{-ix} p(-x)\| + \|e^{-ix} e^{ix} p(x)\|] =$$

$$= \frac{1}{2}[\|p(x)\| + \|p(x)\|] = \|p(x)\| = \|e^{-ix} f(x)\| = \|f(x)\|$$

allora $\|Tf\| = \|f(x)\| \rightarrow \boxed{\|T\| = 1}$

→ AUTOVALORI E AUTOVETTORI

$$\underset{P(E_- f)}{\overset{\|}{PE_- f}} = \lambda f \Rightarrow$$ se $\lambda \neq 0$ f SARÀ PARI : $PE_- f = P(E_- f)$

$$e^{-ix} f(x) \xrightarrow[\text{+ EULERO}]{\text{PARTE PARI}} \boxed{\cos(x) f(x) = \lambda f(x)}$$

- $\cos(x) f(x) = \lambda f(x) \iff f(x) = 0$

TUTTI GLI AUTOVALORI NON NULLI GENERANO AUTOFUNZIONI NULLE

Se invece $\lambda = 0$ (cerco il $\ker T$) : $Tf = 0$

$$-\frac{1}{2} e^{ix} f(-x) = \frac{1}{2} e^{-ix} f(x) \rightarrow e^{-ix} f(x) = -e^{ix} f(-x)$$

OP $\quad Tf = \frac{1}{x-1} f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ in $L^2(1,\infty)$

→ NORMA (Mostrare che $\forall f$, $\|Tf\|^2 = \alpha \|f\|$; trovare α)

$$\|Tf\|^2 = \int_1^\infty \left|\frac{1}{x-1} f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right|^2 dx = \int_1^\infty \frac{1}{(x-1)^2} \left|f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right|^2 dx$$

sia $z = \frac{x+1}{x-1}$ → $\frac{dz}{dx} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$ → $dx = -\frac{(x-1)^2}{2} dz$

$$\|Tf\|^2 = \int_1^\infty \frac{1}{2} |f(z)|^2 dz = \frac{1}{2}\|f\|^2 \quad \rightarrow \quad \alpha = 1/2$$

~~OPPURE PIÙ VELOCEMENTE: SCRIVO~~ $\cancel{Af := \frac{1}{x-1} f(x)}$, $\cancel{Bf := f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}$

$\cancel{\|B\| = 1}$ → ~~immediato cambiando var.~~

$\cancel{\|A\| = \int_1^\infty \left|\frac{1}{x-1}\right|^2 dx = 1/2}$

→ AGGIUNTO

$$(g, Tf) = (T^+ g, f) \quad \rightarrow \quad \int_1^\infty \overline{g(x)} \frac{1}{x-1} f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) dx =$$

$x \Rightarrow (x-1)z = x+1$
$xz - x = 1+z$
$x(z-1) = 1+z$
$x = \frac{1+z}{z-1}$

$$= \int_1^\infty \overline{g\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} \frac{1}{\cancel{\left(\frac{1+z}{z-1}\right)-1}} f(z) \left(+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1+z}{z-1}-1\right)^{\cancel{2}} dz =$$

$$= \int_1^\infty \overline{g\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} \frac{+(1+\cancel{z}-\cancel{z}+1)}{\cancel{2}(z-1)} f(z) dz = \int_1^\infty \overline{g\left(\frac{z+1}{z-1}\right)} \frac{(+1)}{z-1} f(z) dz = (Tg, f)$$

ossia T è autoaggiunto, $T^+ = T$

→ CALCOLARE T^2 E CONCLUDERE CHE $T = \beta U$ (U unitario, β costante)

$$T^2 f = TTf = T\left[\frac{1}{x-1} f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right] = \frac{1}{2} f(x) \quad \text{CONTO DIRETTO}$$

↳ $TTf = \frac{1}{2} f$ → $T^+ T = TT^+ = \frac{1}{2}\mathbb{1}$

ALLORA POSSO SCRIVERE $T = \beta U$ CON U UNITARIO
E β UN GENERICO NUMERO COMPLESSO DI MODULO $\sqrt{1/2}$:

$$\frac{1}{2}\mathbb{1} = TT^+ = \beta U U^+ \bar{\beta} = |\beta|^2 \mathbb{1} \quad \rightarrow \quad |\beta|^2 = 1/2$$

NB: $\boxed{UU^+ = \mathbb{1}}$ DA SOLO NON IMPLICA U UNITARIO, MA SOLO ISOMETRICO

DEV'ESSERE ANCHE SURGETTIVO : $U^+ = U^{-1}$

↳ NOTO CHE T AUTOAGGIUNTO IMPLICA U AUTOAGGIUNTO, DUNQUE U È ISOMETRICO E SURGETTIVO ⇒ UNITARIO

→ AUTOVALORI

T AUTOAGGIUNTO → AUTOVALORI TUTTI REALI

MA: $T = \beta U$, l'equazione agli autovalori si scrive

$T\cancel{f} = \beta U f = \lambda f \rightarrow U f = \frac{\lambda}{\beta} f$ e $Tf = \lambda f$

ALLORA GLI AUTOVALORI DI U SONO GLI AUTOVALORI DI T DIVISI PER LA COSTANTE β → MA U E' UNITARIO, QUINDI HA TUTTI AUTOVALORI DI MODULO 1: $\lambda/\beta = \pm 1$

I λ SARANNO $\lambda = \pm\beta = \pm\frac{1}{2}$ (AUTOVALORI DI T)

OP (SO UNA BASE) $Te_n = e_{|n|}$; in $L^2[-\pi, \pi]$

Sia la base $\{e_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, n \in \mathbb{Z}\}$, ovvero la base degli esponenziali, una base ORTONORMALE COMPLETA DI $L^2[-\pi, \pi]$.

→ LIMITATEZZA E NORMA

Restringo l'operatore allo spazio $V_n = \text{Span}\{e_{-N}, \dots, e_N\}$, ovvero uno spazio a dimensione finita, in cui posso scrivere

$$T_N f = T \sum_{n=-N}^{N} f_n e_n = \sum_{n=-N}^{N} f_n Te_n = \sum_{n=-N}^{N} f_n e_{|n|} =$$

$$= \sum_{n=-N}^{-1} f_n e_{-n} + f_0 e_0 + \sum_{n=1}^{N} f_n e_n =$$

$$= f_0 e_0 + \sum_{n=1}^{N} (f_n + f_{-n}) e_n$$

$\Rightarrow$ Per definizione di T_N: $\lim_{N \to \infty} \|T_N f - Tf\| = 0$

ovvero T_N converge fortemente a T

$$\|T_N f\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |f_n + f_{-n}|^2 + |f_0|^2 \leq \sum_{n=1}^{N} (2|f_n|^2 + 2|f_{-n}|^2) + |f_0|^2 =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{N} (|f_n|^2 + |f_{-n}|^2) + |f_0|^2 \leq 2\left(\sum_{n=1}^{N} (|f_n|^2 + |f_{-n}|^2) + |f_0|^2\right) = 2\|f\|^2$$

trovo che $\|T_N f\|^2 \leq 2\|f\|^2$

Sia $f = e_n + e_{-n}$ → $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{N} (\|e_n + e_{-n}\|^2 + \|e_{-n} + e_n\|^2) + \|2e_0\|^2$

$= \sum_{n=1}^{N} 2(\|e_n + e_{-n}\|^2) + \|2e_0\|^2 = 2$ → $\|f\| = \sqrt{2}$

PASSAGGIO IMPORTANTE

$$\|T\| = \sup_f \lim_{N \to +\infty} \frac{\|T_N f\|}{\|f\|} = \lim_{N \to \infty} \sup_f \frac{\|T_N f\|}{\|f\|} = \lim_{N \to +\infty} \|T_N\|$$

Scrivo $\|Tf\|$ con f sopra definita: $Tf = 2e_n$ → $\|Tf\| = 2$

$$\|T\| = \frac{\|Tf\|}{\|f\|} = \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

→ T^2 E AUTOVALORI

Si vede ad occhio l'idempotenza di T: applicato due volte dà lo stesso risultato di applicato una volta:

$$T^2 f = Tf \rightarrow T^2 = T$$

Da questo: $Tf = \lambda f \rightarrow T^2 f = \lambda^2 f = Tf = \lambda f$

allora $\lambda^2 - \lambda = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda^2 = \lambda \rightarrow \lambda = 1 \end{cases}$

→ AUTOVETTORI

- $\lambda = 0 \rightarrow Tf = 0 = f_0 e_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (f_n + f_{-n}) e_n$

Ovvero trovo una COMBINAZIONE LINEARE DI VETTORI DI BASE, che è risolta solo per $f_0 = 0$, $f_n + f_{-n} = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

dunque $f_n = -f_{-n} \rightarrow$ sono autovettori per $\lambda = 0$ le funzioni della forma $s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} s_n (e_n - e_{-n})$; $(e_n - e_{-n}) \propto \sin(nx)$

- $\lambda = 1 \rightarrow Tf = \sum_{n=1}^{+\infty} (f_n + f_{-n}) e_0 + f_0 e_0 = f = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e_n$

Per l'unicità della decomposizione di ogni vettore in somma di vettori di base, l'equazione viene risolta solo ponendo i coefficienti uguali termine a termine: si ha $f_{-n} = 0 \quad \forall n > 0$, dunque sono autovettori per $\lambda = 1$ le ~~funzioni~~ funzioni della forma: $p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n e_n$