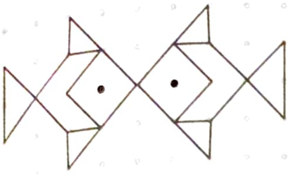


$\ddot{F} = \lambda F \rightarrow$ exponentials

$\ddot{F} = -\lambda F \rightarrow \sin / \cos$

DISUGUAGLIANZE UTILI

$|a \pm b| \leq |a| + |b| \quad ; \quad |a \pm b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2 \qquad a, b \in \mathbb{C}$

$|(\vec{v}, \vec{w})| \leq \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \longrightarrow$ SE $\vec{v} = (a,b)$, $\vec{w} = (c,d)$ $\boxed{|(\vec{v},\vec{w})|^2 = |ac + bd|^2 \leq (|a|^2 + |b|^2)(|c|^2 + |d|^2)}$

SCHWARZ

DISUGUAGLIANZA DI BESSEL

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(e_i, w)|^2 \leq \|w\|^2$$

$\Rightarrow$ SE GLI $\{e_i\}$ SONO UN SISTEMA ORTONORMALE COMPLETO LA DISUGUAGLIANZA SATURA, DIVENTANDO L'IDENTITÀ DI PARSEVAL

REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA $\rightarrow$ SE VALE PER UNA NORMA ALLORA È SICURAMENTE INDOTTA DAL PRODOTTO SCALARE: $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$

$$\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$$

FORMULA DI POLARIZZAZIONE $4(v,w) = \|v+w\|^2 - \|v-w\|^2 - i\|v+iw\|^2 + i\|v-iw\|^2$

QUADRATO DEL BINOMIO $\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2} \quad \forall x$

FORMULA DI TRIPLICAZIONE DEL SENO: $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$

EDP II^{nd} ORDER

$$L[u] = A\partial_{xx}u + B\partial_{xy}u + C\partial_{yy}u + D\partial_x u + E\partial_y u + Fu = 0$$

- EQ. $\boxed{\text{IPERBOLICA}}$: $B^2 - 4AC > 0$

  ONDE: $\partial_{tt}u - v^2\partial_{xx}u = 0$

  CORDA VIBRANTE: $\partial_{xx}u - \frac{1}{c^2}\partial_{tt}u = 0$

  Mi aspetto $\frac{\ddot{T}}{T} = \frac{\ddot{X}}{X} = -\lambda$ ovvero sin/cos su entrambi gli assi

  $\hookrightarrow \ddot{T} = -\lambda T \rightarrow T(t) = a\sin\sqrt{\lambda}t + b\cos\sqrt{\lambda}t$

  $\hookrightarrow \ddot{X} = -\lambda X \rightarrow X(x) = a\sin\sqrt{\lambda}x + b\cos\sqrt{\lambda}x$

- EQ. $\boxed{\text{PARABOLICA}}$: $B^2 - 4AC = 0$

  CALORE: $\partial_t u = \partial_{xx}u \cdot K$

  La derivata prima rispetto al tempo non nulla indica che c'è evoluzione temporale

  Mi aspetto EXP nei tempi e SIN/COS nella coordinata spaziale

  $\frac{\dot{T}}{T} = K\frac{\ddot{X}}{X} = -\lambda$ → NON HO SIMMETRIA TEMPORALE

  $\hookrightarrow \dot{T} = -\lambda T \rightarrow T(t) = c_1 e^{-\lambda t}$

  $\hookrightarrow K\ddot{X} = -\lambda X \rightarrow X(x) = a\sin\sqrt{\lambda/K}\,x + b\cos\sqrt{\lambda/K}\,x$

  - TENDE A SOLUZIONE COSTANTE (non ho simmetria temporale)

- EQ. $\boxed{\text{ELLITTICA}}$: $B^2 - 4AC < 0$

  LAPLACE: $\partial_{xx}u + \partial_{yy}u = \Delta u = 0$

  Descrive uno STATO STAZIONARIO, in cui la soluzione non dipende più dal tempo.

  Mi aspetto che se considero lungo una coordinata una soluzione con sin/cos, lungo l'altra avrò funzioni iperboliche

  $\frac{\ddot{X}}{X} = -\frac{\ddot{Y}}{Y} = -\lambda$

  $\hookrightarrow \ddot{X} = -\lambda X \rightarrow X(x) = a\sin\sqrt{\lambda}x + b\cos\sqrt{\lambda}x$

  $\hookrightarrow -\ddot{Y} = -\lambda Y \rightarrow Y(y) = a e^{\sqrt{\lambda}x} + b e^{-\sqrt{\lambda}x} = \hat{a}\sinh\sqrt{\lambda}x + \hat{b}\cosh\sqrt{\lambda}x$

SEPARAZIONI DI VARIABILI NOTEVOLI

→ $u_{xx} = u_{tx}$ → $\frac{\dot{T}}{T} = \frac{\ddot{X}}{\dot{X}} = \lambda$ DIVIDENDO PER $\dot{X}(x)T(t)$

→ $u_t = u_{xx} + u_x - u$ → $\frac{\dot{T}}{T} = \frac{\ddot{X}}{X} + \frac{\dot{X}}{X} - 1 = \lambda$

→ $u_{xx} + u_{yy} = 0$ → $\ddot{X}Y + \ddot{Y}X = 0$ → $\frac{\ddot{X}}{X} = -\frac{\ddot{Y}}{Y} = -\lambda$

→ $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ → $u(x,y,t) = TXY$

$$\frac{\dot{T}}{T} = \frac{\ddot{X}}{X} + \frac{\ddot{Y}}{Y} \Rightarrow \frac{\dot{T}}{T} = \lambda \; ; \; \frac{\ddot{X}}{X} = \mu \; ; \; \frac{\ddot{Y}}{Y} = \nu \quad \text{con } \lambda = \mu + \nu$$

DINAMICA DI UN SISTEMA DI OSCILLATORI ACCOPPIATI QUANDO IL NUMERO N DI OSCILLATORI $\to \infty$

Si può rappresentare una corda a livello microscopico con un sistema di N masse disposte orizzontalmente a distanza a e vincolate a muoversi verticalmente, accoppiate da molle di costante k e lunghezza a riposo l_R.

Considerando $N \to \infty$ e $l_R \ll a$ definisco la

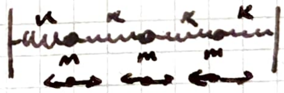
TENSIONE T [N] : $T = \lim_{a \to 0} ka$

DENSITÀ DI MASSA [Kg/m] : $\mu = \lim_{a \to 0} m/a$

posso esprimere l'equazione della dinamica con l'eq. differenziale

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(x,t) = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x,t)$$

$$\to \left[\frac{T}{\mu}\right] = \left[\frac{m^2}{s^2}\right] = [m/s]^2 \to \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \text{VELOCITÀ DELL'ONDA} \to \frac{T}{\mu} = v^2$$

→ Un sistema descritto in questo modo considera oscillazioni PERPENDICOLARI all'asse delle masse: si dicono ONDE TRASVERSALI perché l'oscillazione è perpendicolare alla direzione di propagazione.
Le onde LONGITUDINALI oscillano nella stessa direzione del movimento, si modellano con un sistema del genere 

☆ MI ASPETTO SOLUZIONI PERIODICHE SIA NELLO SPAZIO CHE NEL TEMPO

SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE DELLE ONDE CON SEP. VARIABILI

$$\left[\partial_{tt} - v^2 \partial_{xx}\right] y(x,t) = 0$$

→ Sia $y(x,t) = T(t)X(x)$

$$\ddot{T}X - v^2 T\ddot{X} = 0 \xrightarrow[\text{DIVIDO PER } y]{} \frac{\ddot{T}}{T} - v^2 \frac{\ddot{X}}{X} = 0$$

giungo alla forma $\frac{\ddot{T}}{T} = v^2 \frac{\ddot{X}}{X}$

↳ eguagliare due funzioni di variabili diverse senza nessuna relazione concettualmente non ha senso, a meno che non siano entrambe zero, o in generale costanti

Siccome voglio soluzioni sinusoidali definisco la costante $-\omega^2$

$$\frac{\ddot{T}}{T} = v^2 \frac{\ddot{X}}{X} = -\omega^2 \implies \begin{cases} \ddot{T} = -\omega^2 T & \text{I} \\ \ddot{X} = -\frac{\omega^2}{v^2} X & \text{II} \end{cases}$$

→ Risolvo I $\quad \tau^2 = -\omega^2$

$T = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$

Risolvo II $\quad \tau^2 = -\omega^2/v^2 = -k^2$

$X = C\cos(kx) + D\sin(kx)$

→ CONDIZIONI AL CONTORNO $\quad y(x=0,t)=0 \wedge y(x=L,t)=0$

$y(x,t) = XT = (A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))(C\cos(kx) + D\sin(kx))$

$y(0,t) = y(L,t) = 0$

↳ $y(0,t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)C = 0 \to C = 0$

↳ $y(L,t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)(D\sin kL) = 0 \to \boxed{\sin kL = 0}$

perché sia valida devo avere $kL = n\pi$ con $n \in \mathbb{N}^+$

Esprimo $k_n = \frac{n\pi}{L}$ → dalla relazione fra k e ω: $\omega_n = \frac{n\pi}{L} v$

→ TROVO LA SOLUZIONE PER UN n PARTICOLARE

$$y_n(x,t) = \left[A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)\right] \sin \frac{n\pi}{L} x$$

→ La soluzione più generale sarà una combinazione lineare

$$Y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n Y_n(x,t)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\alpha_n \cos \omega_n t + \beta_n \sin \omega_n t\right] \underbrace{\sin \frac{n\pi}{L} x}$$

dove $\alpha_n = c_n A_n$
$\beta_n = c_n B_n$

↳ "ARMONICHE" DELL'ONDA

NB Comunque la soluzione è specifica per queste condizioni di bordo

NB $\omega_n :=$ PULSAZIONE (angular frequency)
$k_n :=$ NUMERO D'ONDA

La relazione tra tali grandezze si chiama

RELAZIONE DI DISPERSIONE $kv = \omega$ (onde uni-dimensionale)

IN SINTESI

$\ddot{T} = -\lambda T$ ⟹ sin / cos

$\ddot{X} = -\lambda X$ ⟹ sin / cos

SOLUZIONI PARTICOLARI CON SERIE DI FOURIER

Sono note le funzioni $Y(x,0)$ e $\dot{Y}(x,0)$, allora si ha

(I) $Y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$ ← SERIE DI FOURIER

(II) $\dot{Y}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \omega_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$

→ Considero (I) e moltiplico ambo i membri per $\frac{2\sin(m\pi x/L)}{L}$ e integro

$$\frac{2}{L}\int_0^L dx\, Y(x,0)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) = \int_0^L dx \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) =$$

$$= \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \int_0^L dx \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n \delta_{nm}$$ (RELAZIONE NOTA)

→ Siccome $\sum_{n=1}^{\infty} F_n \delta_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \times \begin{cases} 1 & \text{se } n=m \\ 0 & \text{se } n \neq m \end{cases} = F_m$ allora

$$\alpha_m = \frac{2}{L}\int_0^L dx\, Y(x,0)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

$$\beta_m = \frac{2}{\omega_m L}\int_0^L dx\, \dot{Y}(x,0)\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$$

COEFFICIENTI DI FOURIER

ESEMPIO

STRINGA INIZIALMENTE FERMA ($\dot{Y}(x,0)=0$) E DI FORMA $Y(x,0) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$

$$Y(x,0) = \frac{1}{4}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \frac{1}{4}\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$

$$\alpha_m = \frac{1}{4}\delta_{2m} + \frac{1}{4}\delta_{3m} \quad ; \quad \beta_m = 0$$

$$Y(x,t) = \frac{1}{4}\left[\cos(\omega_2 t)\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \cos(\omega_3 t)\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\right]$$

→ SOLUZIONE CON METODO DI D'ALEMBERT

- ESTENDO LE CONDIZIONI AL BORDO $\varphi_0, \dot{\varphi}_0$, DEFINITE IN $[0,L]$, SU TUTTO $\mathbb{R}$

$$x = nL + y \quad (0 \le y \le L) \Rightarrow \tilde{\varphi}_0 = \begin{cases} \varphi_0(y) & \text{SE } n \text{ PARI} \\ -\varphi_0(L-y) & n \text{ DISPARI} \end{cases} \quad ; \quad \tilde{\dot{\varphi}}_0 = \begin{cases} \dot{\varphi}_0(y) & \text{SE } n \text{ PARI} \\ -\dot{\varphi}_0(L-y) & n \text{ DISPARI} \end{cases}$$

IN PARTICOLARE PERIODICA DI PERIODO $2L$ E ANTISIMMETRICA RISPETTO A 0

- RISCRIVO LE FUNZIONI CHE COMPONGONO LA SOLUZIONE

$$f(x) = \frac{\tilde{\varphi}_0(x)}{2} - \frac{1}{2v}\int_0^x \tilde{\dot{\varphi}}_0(y)\,dy$$

$$g(x) = \frac{\tilde{\varphi}_0(x)}{2} + \frac{1}{2v}\int_0^x \tilde{\dot{\varphi}}_0(y)\,dy$$

SODDISFANO L'EQ. DELLE ONDE E LE CONDIZIONI INIZIALI

- VERIFICO LE CONDIZIONI AL BORDO

$$\varphi(0,t) = f(-vt) + g(vt)$$

$$\varphi(L,t) = f(L-vt) + g(L+vt)$$

→ CONSIDERO PRIMA $\dot{\varphi}_0 = 0 \Rightarrow f = \tilde{\varphi}_0/2 = g$

$$\varphi(0,t) = \frac{\tilde{\varphi}_0(-vt)}{2} + \frac{\tilde{\varphi}_0(vt)}{2} = 0 \to f \text{ DISPARI}$$

$\varphi(L,t) = 0$ → sempre dispari dopo traslazione di L

→ CONSIDERO $\varphi_0 = 0 \Rightarrow f = -\frac{1}{2v}\int_0^x \tilde{\dot{\varphi}}_0(y)\,dy \; ; \; g = -f$

$\varphi(0,t) = 0$ → PARITÀ DI f

$\varphi(L,t) = 0$ → sempre pari dopo traslazione di L

La soluzione ha periodicità temporale $\frac{2L}{v}$ (tempo che l'onda impiega per fare due riflessioni) a prescindere dalle condizioni iniziali

$$\varphi\left(x, t + n\frac{2L}{v}\right) = \varphi(x,t) \quad \text{con } n \in \mathbb{Z}$$

CENNI SULLA SERIE DI FOURIER

Sia $u(x)$ una funzione periodica di periodo $2T$: $u(x+2T)=u(x)$ ed integrabile in $[-T,T]$

- COEFFICIENTI DI FOURIER DI u

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} u(x)\cos(n\omega x)\,dx \qquad \text{con } \omega = \pi/T$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} u(x)\sin(n\omega x)\,dx$$

- SERIE DI FOURIER ASSOCIATA AD u

$$u(x) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos(k\omega x) + b_k\sin(k\omega x)\right]$$

Alcune proprietà della serie di Fourier:

⇒ Se $u(x)$ è DISPARI: $u(-x)=-u(x)$ ALLORA $a_k=0 \ \forall k\geq 0$;

ALLORA LA SERIE DI FOURIER È A SOLI SENI, CON

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T u(x)\sin(k\omega x)\,dx \ ; \quad u(x) \simeq \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin(k\omega x)$$

⇒ Se $u(x)$ è PARI: $u(-x)=u(x)$ ALLORA $b_k=0 \ \forall k\geq 1$;

ALLORA LA SERIE DI FOURIER È A SOLI COSENI, CON

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T u(x)\cos(k\omega x)\,dx \ ; \quad u(x) \simeq \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(k\omega x) + \frac{a_0}{2}$$

⇒ FORMA COMPLESSA $\qquad (e^{ik\omega x} = \cos(k\omega x) + i\sin(k\omega x))$

$$u(x) \simeq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{u}_k e^{ik\omega x}$$

$$\hat{u}_k = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} u(x)e^{-ik\omega x}\,dx$$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ Se $u \in L^2([-T,T])$ ALLORA LA SERIE DI FOURIER CONVERGE IN MEDIA QUADRATICA A $u(x)$, CIOÈ

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-T}^{T} [u(x) - S_n(x)]^2 \, dx = 0$$

$$\text{con} \quad S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)]$$

$\Rightarrow$ VALE INOLTRE LA FORMULA DI BESSEL

$$\frac{1}{T} \int_{-T}^{T} u^2(x) \, dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

$\Rightarrow$ COROLLARIO DI RIEMANN-LEBESGUE $\lim_{k \to +\infty} a_k = \lim_{k \to +\infty} b_k = 0$

Condizioni al bordo ricorrenti per l'eq di d'Alembert / calore

$\ddot{X} = -\lambda X \implies X(x) = A\sin(\sqrt{\lambda}x) + B\cos(\sqrt{\lambda}x)$

$\dot{X}(x) = A\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x) - B\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x)$

I) $\boxed{\text{DIRICHLET - DIRICHLET}}$ $\quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0$

$0 = X(0) = B$

$0 = X(\pi) = A\sin(\sqrt{\lambda}\pi) \iff \sqrt{\lambda} = n \in \mathbb{N}$

perché $A \neq 0$

$\to X_n(x) = A_n \sin nx$

II) $\boxed{\text{NEUMANN - NEUMANN}}$ $\quad u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$

$0 = \dot{X}(0) = A\sqrt{\lambda} \to$ se $\lambda \neq 0$ DEV'ESSERE $A=0$

$0 = \dot{X}(\pi) = -B\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\pi) \iff \sqrt{\lambda} = n \in \mathbb{N}$

perché $B \neq 0$

$\to X_n(x) = B_n \cos(nx)$

III) $\boxed{\text{DIRICHLET - NEUMANN}}$ $\quad u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$

$0 = X(0) = B$

$0 = \dot{X}(\pi) = A\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\pi) \iff \sqrt{\lambda} = n + \frac{1}{2}$ con $n \in \mathbb{N}$

$\to X_n(x) = A_n \sin\left(\frac{2n+1}{2}x\right)$

IV) $\boxed{\text{NEUMANN - DIRICHLET}}$ $\quad u_x(0,t) = u(\pi,t) = 0$

$0 = \dot{X}(0) = A\sqrt{\lambda} \to$ DA $\sqrt{\lambda} \neq 0$ DEV'ESSERE $A=0$

$0 = X(\pi) = B\cos(\sqrt{\lambda}\pi) \iff \sqrt{\lambda} = n + \frac{1}{2}$ con $n \in \mathbb{N}$

$\to X_n(x) = B_n \cos\left(\frac{2n+1}{2}x\right)$

V) $\boxed{\text{STESSA FN. E DERIVATA}}$ $\quad u(0,t) = u(\pi,t)\ ;\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t)$

$B = X(0) = X(\pi) = A\sin\sqrt{\lambda}\pi + B\cos\sqrt{\lambda}\pi$

con $A, B, \lambda \neq 0$

$A\sqrt{\lambda} = \dot{X}(0) = \dot{X}(\pi) = A\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\pi - B\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi$

$\begin{cases} B(1-\cos\sqrt{\lambda}\pi) = A\sin\sqrt{\lambda}\pi \\ A(1-\cos\sqrt{\lambda}\pi) = -B\sin\sqrt{\lambda}\pi \end{cases} \implies B(1-\cos\sqrt{\lambda}\pi)^2 + B\sin^2\sqrt{\lambda}\pi = 0$

$\hookrightarrow \cos\sqrt{\lambda}\pi = 1 \to \sqrt{\lambda} = 2n,\ n \in \mathbb{N}$

$\to \{X_n\} = \{\sin 2nx, n \geq 1;\ \cos 2nx, n \geq 0\}$

SE INVECE $\lambda = 0 \to \ddot{X} = 0 \to X(x) = ax + b$ ma per soddisfare $X(0) = X(\pi) \to X(x) = b$

EQ DI LAPLACE IN UNA STRISCIA

In $S=\{0<x<\pi, y>0\}$ è dato $\Delta u=0$

con $\begin{cases} u(0,y)=u(\pi,y)=0 \\ u \text{ limitata} \\ u(x,0)=f(x) \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{\ddot{X}}{X} = -\frac{\ddot{Y}}{Y} = -\lambda$

I) $\ddot{X}=-\lambda X \rightarrow X(x)=A\sin\sqrt{\lambda}x+B\cos\sqrt{\lambda}x$

$\rightarrow X(0)=B=0$

$X(\pi)=A\sin\sqrt{\lambda}\pi=0 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda}=n, n\in\mathbb{N}$ perché $\lambda\neq 0$

$X_n(x)=A_n\sin nx$

II) $\ddot{Y}=\lambda Y \rightarrow Y(y)=Ce^{\sqrt{\lambda}y}+De^{-\sqrt{\lambda}y}$

$\rightarrow$ u limitata $\underset{???}{\Rightarrow}$ $Y_n \propto e^{-ny}$

Soluzioni particolari: $X_n(x)Y_n(y) \propto \sin(nx)e^{-ny}$

$\Rightarrow$ SCRIVERE LA SOLUZIONE SE $f(x)=\sin^3(x)$

ricordando la formula di triplicazione del seno $\sin(3x)=3\sin x-4\sin^3 x$

$f(x)=\frac{3}{4}\sin(x)-\frac{1}{4}\sin(3x)$

APPLICO LA CONDIZIONE $u(x,0)=f(x)$:

$u(x,0)=\sum_n a_n X_n(x)Y_n(0)=\sum_n a_n\sin(nx)=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$

$\rightarrow$ CHIARAMENTE GLI UNICI n PER CUI L'ESPR. È NON NULLA SONO 1, 3.

$a_1=\frac{3}{4}$; $a_3=-1/4$

LA SOLUZIONE È $u(x,y)=\frac{3}{4}\sin x e^{-y}-\frac{1}{4}\sin(3x)e^{-3y}$

$\partial_{tt} u = \partial_{xx} u$ in $0 < x < \pi$

$u(0,t) = 0$ DIRICHLET

$u_x(\pi,t) = 0$ NEUMANN $\Rightarrow X(x) \propto \sin((n+\frac{1}{2})x)$

$u_x(x,0) = 0$

$u(x,0) = \sin^2 x$

→ $u(x,t) = X(x)\,T(t)$ → $\frac{\ddot{X}}{X} = \frac{\ddot{T}}{T} = -\lambda$

$\ddot{T} = \lambda T$ → $T(t) = a\cos(\sqrt{\lambda}x) + b\sin(\sqrt{\lambda}x)$ con $\sqrt{\lambda} = n+\frac{1}{2}$

$\dot{T} = a\sqrt{\lambda}(-\sin\sqrt{\lambda}x) + b\sqrt{\lambda}(\cos\sqrt{\lambda}x)$

$\dot{T}(0) = b\sqrt{\lambda} = 0 =$ → $b = 0$

allora per T: $T(t) = a\cos(\sqrt{\lambda}x) = a\cos((n+\frac{1}{2})x)$

$u_n(x,t) = \alpha_n \sin((n+\frac{1}{2})x)\cos((n+\frac{1}{2})x)$

→ MOSTRARE CHE LE X_n SONO UN INSIEME COMPLETO IN $L^2(0,\pi)$

X_n È COMPLETO SE TUTTE LE FUNZIONI ORTOGONALI AD ESSO SONO NULLE

$0 = (\sin((n+\frac{1}{2})x), g) = \int_0^\pi \sin((n+\frac{1}{2})x)\,g(x)\,dx$

Sia $z = \frac{1}{2}x$ → $= \int_0^{\pi/2} \sin((2n+1)z)\,g(2z)\,2dz$

ovvero: $\sin((2n+1)z)$ sono i seni dispari, COMPLETI IN $[0,\pi/2]$

quindi $g(2z) = g(x) = 0$ → allora le X_n sono UN INSIEME COMPLETO IN $[0,\pi)$

→ SCRIVERE ESPLICITAMENTE $u(x,t)$

$u(x,t) = \sum_n \alpha_n \sin((n+\frac{1}{2})x)\cos((n+\frac{1}{2})x)$

$u_x(x,t) = \sum_n \alpha_n\left[(n+\frac{1}{2})\cos^2((n+\frac{1}{2})x) - (n+\frac{1}{2})\sin^2((n+\frac{1}{2})x)\right]$

$u_x(x,0) = 0 = \sum_n \alpha_n [$