SET COMPLETI

- $B^{exp}_{[-\pi,\pi]} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ ORTONORMALE COMPLETA IN $L^2[-\pi,\pi]$ BASE DEGLI ESPONENZIALI

- $B^{sin/cos}_{[-\pi,\pi]} = \left\{ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\}$ ORTONORMALE COMPLETA IN $L^2[-\pi,\pi]$

$\Rightarrow$ I SENI GENERANO LE FUNZIONI DISPARI RISPETTO A $\emptyset$
I COSENI E LA COSTANTE GENERANO LE FUNZIONI PARI RISPETTO A $\emptyset$

- $B^{1}_{[0,\pi]} = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ ORTONORMALE COMPLETA IN $L^2[0,\pi]$

$\Rightarrow$ I SENI DISPARI GENERANO LE FUNZIONI SIMMETRICHE RISPETTO A $\pi/2$
I SENI PARI GENERANO LE FUNZIONI ANTISIMMETRICHE RISPETTO A $\pi/2$

- $B^{2}_{[0,\pi]} = \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx \right\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right\}$ ORTONORMALE COMPLETA IN $L^2[0,\pi]$

$\Rightarrow$ I COSENI DISPARI GENERANO LE FUNZIONI ANTISIMMETRICHE RISPETTO A $\pi/2$
I COSENI PARI PIÙ LA COSTANTE GENERANO LE FUNZIONI SIMMETRICHE

- $B^{1}_{[0,\pi/2]} = \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin(2nx) \right\}$ $\quad B^{2}_{[0,\pi/2]} = \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin((2n+1)x) \right\}$

$B^{3}_{[0,\pi/2]} = \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos(2nx) \right\} \cup \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \right\}$ $\quad B^{4}_{[0,\pi/2]} = \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos((2n+1)x) \right\}$

ORTONORMALI COMPLETE IN $L^2[0,\pi/2]$

DECOMPA

funzione $\rightarrow$ vettore
sottospazio di $L^2 \rightarrow$ asse

$\hookrightarrow$ PROIETTORE SU UN SOTTOSPAZIO DI L^2 È ANALOGO ALLA PROIEZIONE DI UN VETTORE SU UN ASSE

DECOMPOSIZIONE IN COMPONENTI SIMMETRICHE E ANTISIMMETRICHE

$f \in L^2(a,b) \rightarrow$ decompongo in f_s, f_a simm. e centrosimm. rispetto al punto medio dell'intervallo $\frac{a+b}{2}$

$f(x) = f_s(x) + f_a(x) \quad \Rightarrow f_s \perp f_a$

$$f_s(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(a+b-x)\right)$$

$$f_a(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(a+b-x)\right)$$

DECOMPOSIZIONE IN COMPONENTI PARI E DISPARI

$f \in L^2(a,b)$, $m = \frac{a+b}{2}$

↳ PER DECOMPORRE f IN COMPONENTI PARI E DISPARI DEVO ESTENDERLA A UN INTERVALLO SIMMETRICO RISPETTO A m

- $(a-(b-a), b) = (2a-b, b)$ OPPURE
- $(a, b+(b-a)) = (a, 2b-a)$

$f(x) = f_p(x) + f_d(x) \quad \Rightarrow f_p \perp f_d$

$$f_p(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(2m-x)\right)$$

$$f_d(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(2m-x)\right)$$

3.4. NORMA, DISTANZA, SPAZI NORMATI ed ESEMPI

Sia V uno spazio vettoriale sul campo complesso $\mathbb{C}$ di dimensione arbitraria.
Sia $\| \, \| : V \to \mathbb{R}$ una NORMA, ovvero una funzione che ad un elemento $x \in V$ associa un numero reale $\|x\|$, inteso come "LUNGHEZZA" di x.

- Tale concetto generalizza quello di modulo di un numero complesso $|z| = \sqrt{z^* z}$
- Una norma deve soddisfare le seguenti proprietà:

  I) $\|x\| \geq 0 \qquad (\|x\| = 0 \iff x = \emptyset)$

  II) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

  III) $\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$ DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

- Uno spazio vettoriale equipaggiato con una norma $\| \, \|$ si dice SPAZIO NORMATO ~~METRICO~~
- La norma introduce una METRICA, cioè un concetto di distanza tra due elementi

Uno spazio metrico è un insieme (non per forza uno S.V.) in cui per ogni coppia di elementi è definita una distanza $d: V \times V \to \mathbb{R}$ tale che

I) $d(x_1, x_2) \geq 0$ e $d(x_1, x_2) = 0 \iff x_1 = x_2$

II) $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$

III) $d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2)$

- Uno spazio normato è anche uno spazio metrico (non vale il viceversa)
- DIM II) $d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\| = \|x_2 - x_1\| = d(x_2, x_1)$

  DIM III) $d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\| = \|x_1 - x_3 + x_3 - x_2\| \leq \|x_1 - x_3\| + \|x_3 - x_2\| =$
  $= d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2)$

Alcuni esempi di spazi normati in dimensione finita:

- Su $\mathbb{C}^n$, $z = (z_1, \dots, z_n)$, definisco $\|z\| = \max |z_i|$ (si verificano I, II, III)
- Su $\mathbb{C}^n$, $\|z\| = \sum_i |z_i|$; I e II sono ancora ovvie, III:
  $\|z + w\| = \sum_i |z_i + w_i| \leq \sum_i |z_i| + \sum_i |w_i| = \|z\| + \|w\|$

Ora, in dimensione infinita, prendo le sequenze z_i ($i \in \mathbb{N}^+$) di numeri complessi limitandomi alle sequenze limitate ($\sup |z_i| < \infty$).
Questo è uno S.V. e $\|z\| = \sup |z_i|$ è una norma.
Un altro esempio sono le sequenze tali che $\sum_i |z_i| < +\infty$ usando come norma proprio $\|z\| = \sum_i |z_i|$

Usando invece gli spazi funzionali si possono fornire altri esempi:
prendo l'insieme delle funzioni continue su un intervallo chiuso
$f \in C([a,b])$, $f : [a,b] \to \mathbb{C}$
Questo è uno spazio vettoriale, su di esso posso prendere norme come
$\|f\| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$ oppure $\|f\|' = \int_a^b |f(x)|\, dx$

SP. VETTORIALE CON $(,)$ $\xRightarrow{(\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)})}$ SP. VETTORIALE NORMATO $(V, \|\ \|)$ $\xRightarrow{(d(v_1,v_2) = \|v_2 - v_1\|)}$ SP. METRICO

$\Downarrow$

SP. TOPOLOGICO

- QUESTA È LA NORMA INDOTTA DAL PRODOTTO SCALARE.
- UNO SPAZIO VETTORIALE PUÒ AVERE UNA NORMA NON INDOTTA DA NESSUN PRODOTTO SCALARE, CON LA QUALE È SEMPRE UNO SPAZIO METRICO E DUNQUE TOPOLOGICO.
- QUESTA È LA DIFFERENZA TRA SPAZI DI BANACH (la cui norma non è indotta da p.s.) E SPAZI DI HILBERT, DOTATI DI UN P.S.
- SE UNA NORMA SODDISFA LA REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA ALLORA SI PUÒ DIRE CHE DISCENDE DA UN PRODOTTO SCALARE (th. von Neumann) → se $\|z\| = \sqrt{(z,z)}$ → $\|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2$

Due norme si dicono EQUIVALENTI se $\exists\, k, K \in \mathbb{R}$ t.c. $k\|v\|_2 \le \|v\|_1 \le K\|v\|_2$
→ in dimensione finita tutte le norme sono equivalenti.
→ norme equivalenti generano la stessa topologia

In dimensione finita ogni insieme chiuso e limitato è COMPATTO, non vale il viceversa.
Sia $f : C \subset V \to \mathbb{C}$ con C COMPATTO, f CONTINUA → $|f|$ assume massimo e minimo in C (TEOREMA DI WEIERSTRASS)

SUCCESSIONI E SPAZI DI SUCCESSIONI

- Sia z_i una successione di elementi di V, $z_i : \mathbb{N}^+ \to V$
  - CONVERGENZA $\quad w = \lim_{i \to \infty} z_i$ SE $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N$ t.c. $d(w, z_i) < \varepsilon \;\; \forall i > N$
  - "DI CAUCHY" SE $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N$ t.c. $\forall i, j > N \Rightarrow d(z_i, z_j) < \varepsilon$

  $\begin{cases} z_i \text{ è di Cauchy se } z_i \xrightarrow[i \to \infty]{} w, \quad w = \lim_{i\to\infty} z_i \\ \text{Il viceversa non è detto} \end{cases}$

- SPAZIO COMPLETO

  Uno spazio topologico è completo se tutte le successioni di Cauchy convergono ad un elemento dello spazio

  - $\mathbb{Q}$ non è completo, ma $\mathbb{R}$ sì ed è il suo completamento. Infatti si dice che $\mathbb{Q}$ è DENSO IN $\mathbb{R}$ perché tra due qualsiasi elementi di $\mathbb{Q}$ c'è almeno un elemento (infiniti) di $\mathbb{R}$.
  - Uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo completo è completo

- SUCCESSIONI INFINITE DI ELEMENTI

  Le successioni infinite di elementi formano uno spazio vettoriale.

  $z = \{z_1, \dots, z_n, \dots\} \in \mathbb{C}^\infty \quad ; \quad z_i : \mathbb{N}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ | $\mathbb{C}^\infty$ = SP. DELLE SUCC. INFINITE. UNA SUCCESSIONE DI ELEMENTI DI $\mathbb{C}^\infty$ È UNA SUCCESSIONE DI SUCCESSIONI (HA BISOGNO DI DUE INDICI)

  - CAVEAT I) Non è detto che due norme siano equivalenti
    II) Data una norma devo trovare il sottospazio in cui è definita
  - Posso introdurre norme tali che $\|z\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^p\right)^{1/p}$ ma devo stare attento al sottospazio in cui è definita, ovvero quello dove l'argomento della radice p-esima non DIVERGE.

  Trovo così lo spazio $\underline{\ell^p}$

• SPAZIO ℓ^∞ DELLE SUCCESSIONI ~~[illegible]~~ LIMITATE

$\|z\|_\infty = \sup_i |z_i|$ → ovvero spazio delle succ. infinite tali che $\sup_i |z_i| < \infty$
ovvero limitate: $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|z_i| \leq M \ \forall i \in \mathbb{N}$

• SPAZI ℓ^p CON $p \in [1, \infty)$

Insieme delle successioni per cui vale ~~[illegible]~~ $\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^p < \infty$

Con la norma $\|\cdot\|_p$ si dimostra che è uno SPAZIO DI BANACH

→ Un esempio è lo spazio ℓ^2, importante perché la sua norma $\|z\|_2$ risulta essere indotta da un prodotto scalare $(,) : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{C}$ tale che:

$(z, w) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i^* w_i$ → $\|z\|_2 = \sqrt{(z,z)}$

• CONVERGE? $|(z,w)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |z_i||w_i| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} |w_i|^2 < \infty$

Allora ℓ^2 È UNO SPAZIO DI HILBERT, in quanto di BANACH e con p.s.

~~[illegible]~~

COMPLETAMENTO DI UNO SPAZIO

Dato uno spazio $(V, \| \|)$ posso costruire il suo COMPLETAMENTO $(\tilde{V}, \| \|)$
(il procedimento è analogo a quello che si usa per passare da $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$

COMPLETAMENTO: spazio di Banach tale che esiste una funzione iniettiva che mappa $V \to \tilde{V}$ in un sottospazio di $\tilde{V}$ che conserva la struttura vettoriale e la norma.
Posso pensare a $\tilde{V}$ come V con l'aggiunta di tutti i suoi punti di accumulazione.

IMMERSIONE DI V IN $\tilde{V}$: ad ogni $x \in V$ associo la successione di Cauchy $\{x_i\}$ costante $x_i = x \ \forall i$. Definisco una norma in $\tilde{V}$, $\|[\{x_i\}]\| = \lim_{i \to \infty} \|x_i\|$, si vede che è ben definita,

SE $\lim_{i \to \infty} \|x_i - x_i'\| = 0 \Rightarrow \|[\{x_i\}]\| - \|[\{x_i'\}]\| = \lim_{i \to \infty} (\|x_i\| - \|x_i'\|) = 0$

In particolare si ha che l'immersione di V in $\tilde{V}$ con la successione costante conserva la norma.

- <u>V è DENSO IN $\tilde{V}$</u> (uno spazio vettoriale è denso nel suo completamento)
  - $\to$ PRENDO UNA GENERICA $[\{x_i\}]$, PRENDO UNA SUCCESSIONE DI SUCCESSIONI $[\{x_j\}]$ COSTANTI, CIOÈ $[\{x_1, \dots, x_1\}], [\{x_2, \dots, x_2\}], \dots$
  - $\to$ QUESTA SUCCESSIONE CONVERGE A $[\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}]$
  - $\to \|[\{x_i\}] - [\{x_j\}]\| = \lim_{i \to \infty} \|x_i - x_j\|$ MA SICCOME $\{x_i\}$ È DI CAUCHY $\forall \varepsilon, \exists N$ T.C. PER $j > N$ $\lim_{i \to \infty} \|x_i - x_j\| < \varepsilon$ QUINDI $[\{x_j\}] \to [\{x_i\}]$
  - $\to$ ALLO STESSO MODO SI VEDE CHE $\tilde{V}$ È IL COMPLETAMENTO DI V: DATA LA SUCCESSIONE $[\{x_j\}]$ COSTRUISCO $[\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}]$ A CUI ESSA CONVERGE.

- <u>$\tilde{V}$ è UNO SPAZIO COMPLETO</u>
  - $\to$ PRENDO UNA SUCCESSIONE DI CAUCHY DI SUCCESSIONI DI CAUCHY $[\{x_i^j\}]$
  - $\to$ ESSENDO V DENSO IN $\tilde{V}$ POSSO TROVARE SUCCESSIONI COSTANTI ARBITRARIAMENTE VICINE A QUELLE SOPRA

PRODOTTO SCALARE

$$(,) : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(z,z) = 0 \iff z = 0$$

$$\overline{(w,z)} = (z,w)$$

$$(z, \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = \alpha_1 (z,w_1) + \alpha_2 (z,w_2)$$

- Definisce sempre una norma, ma non tutte le norme discendono da un p.s.

↳ NORMA INDOTTA : $x \longmapsto \sqrt{(x,x)}$

- $\boxed{\text{DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARZ}}$

$$|(x,y)| \leq \sqrt{(x,x)(y,y)} = \|x\| \cdot \|y\|$$ (DA QUESTA DISCENDE LA DIS. TRI. DELLA NORMA)

- REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA (solo norma indotta dal p.s.)

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

→ teorema di Von Neumann
Per uno spazio normato, se la norma soddisfa la regola del pg allora discende da un prodotto scalare.

- FORMULA DI POLARIZZAZIONE

$$4(x,y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x+iy\|^2 + i\|x-iy\|^2$$

→ Tra gli spazi L^p solo L^2 ha norma che deriva dal p.s. $(f,g) = \int_a^b \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$

- Tramite prodotto scalare introduco la nozione di ORTOGONALITÀ:

$$x \perp y \quad \text{SE} \quad (x,y) = 0$$

Una base di vettori si dice ORTONORMALE se ognuno ha norma unitaria e sono tutti ortogonali tra loro (da una base qualsiasi posso ottenere una ortonormale)

→ si può scrivere $(e_i, e_j) = \delta_{ij} \ \forall i,j \implies \{e_k\}$ è un insieme ortonormale

- ESEMPIO: prodotto scalare in $\mathbb{C}^N$ → $(w,v) = \sum_{i=1}^N w_i^* v_i$
si vede come induce la norma $\|z\|_2 = \left(\sum_{i=1}^N |z_i|^2\right)^{1/2}$ (norma-p per p=2)

- Mentre un sistema ortogonale è ben definito anche in dimensione infinita, una BASE ORTONORMALE non è un concetto ben definito, serve la TOPOLOGIA.

SPAZIO DI HILBERT

Uno spazio vettoriale dotato di prodotto scalare è di Hilbert se è COMPLETO RISPETTO ALLA NORMA INDOTTA DAL PRODOTTO SCALARE.

- DISUGUAGLIANZA DI BESSEL $\sum_{k=1}^{\infty} |(e_k, v)|^2 \leq \|v\|^2$: con $\{e_k\}$ insieme ortonorm. $\forall v \in \mathcal{H}$

- TEOREMA DI FISHER-RIESZ (i seguenti fatti sono equivalenti)

I) $\forall v \in \mathcal{H} \rightarrow v = \sum_{i=1}^{\infty} (e_i, v) e_i$ (la serie a 2° membro è la SERIE DI FOURIER)

II) Lo spazio delle combinazioni lineari finite di elementi di $\{e_k\}$ è denso in $\mathcal{H}$
Tale insieme è $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ al variare di a_i, n (è denso in $\mathcal{H}$)

III) Si satura la disuguaglianza di Bessel $\Rightarrow$ ho l'IDENTITÀ DI PARSEVAL
$$\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(e_k, v)|^2$$

IV) si ha $(e_i, v) = 0 \ \forall i \iff v = 0$

V) L'insieme (ortonormale) $\{e_k\}$ è COMPLETO

- Teorema di continuità del limite in $\mathcal{H}$:
siano $v, w_i \in \mathcal{H}$ t.c. $\lim_{i \to \infty} w_i = w$, allora $\lim_{i \to \infty} (v, w_i) = (v, w)$

- Concetto di base in dimensione infinita
Sia $\{e_i\}$ una base ortonormale di $\mathbb{C}^N$.
Il vettore che minimizza la distanza con un dato vettore è il vettore stesso:
$$w_{min} = w = \sum_{i=1}^{N} (e_i, w_i) e_i \quad \rightarrow \text{HO SCRITTO IL VETTORE NELLA BASE } \{e_i\}$$

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert e $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}^+/\{0\}}$ un sistema ortonormale.
Troncando e_i fino ad N: $W^{(N)} = \{z \in \mathcal{H} \mid z = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i \ ; \lambda_i \in \mathbb{C}\}$
$$W^{(1)} \subset W^{(2)} \subset \dots \subset W^{(N)} \subset \dots \subset \mathcal{H}$$
Dato che per ogni N vale la disuguaglianza di Bessel vale anche ad infinito
Allora un generico $w^{(N)} \in \bar{W}^{(N)}$ posso scriverlo come $\sum_{i=1}^{N} (e_i, w_i) e_i$, che so essere una successione di Cauchy; $\mathcal{H}$ è completo:
$$\exists! \ w \in \mathcal{H} \text{ t.c. } \lim_{N \to \infty} w^{(N)} = w = \sum_{1}^{\infty} (e_i, w) e_i$$

$\rightarrow$ Da questo $\{e_i\}$ è una BASE ORTONORMALE COMPLETA se $\forall w \in \mathcal{H}$, $w = \sum_{i=1}^{\infty} (e_i, w) e_i$
(w nel senso di limite di $w^{(N)}$ esiste sempre; se non raggiunge w è perché non ho ricoperto tutto $\mathcal{H}$ coi vari $w^{(N)}$)

In altre parole in dimensione finita o l'insieme coincide con $\mathcal{H}$ oppure è un sottospazio con dimensione strettamente inferiore e non denso in $\mathcal{H}$, con un sottospazio ortogonale ad esso che lo completa ad $\mathcal{H}$.

In dimensione infinita invece l'insieme delle combinazioni lineari finite dei vettori della base non coincide con $\mathcal{H}$ ma non esiste un sottospazio di $\mathcal{H}$ ortogonale a lui ed è inoltre denso in $\mathcal{H}$.

- TEOREMA DI FISCHER-RIESZ (base completa in $\mathcal{H}$)

I) $\forall v \in \mathcal{H} \rightarrow v = \sum_{i=1}^{\infty} (e_i, v) e_i$

II) l'insieme $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i$ è denso in $\mathcal{H}$

III) $\forall v \in \mathcal{H} \rightarrow \|v\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(e_i, v)|^2$

IV) Se $(x_0, e_i) = 0 \ \forall i$ allora $x_0 = \emptyset$

- BASE DEI SENI E COSENI

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\} \text{ COMPLETA IN } L^2(-\pi, \pi) = H$$

BASE DI SENI E COSENI

$$\rightarrow H = H^{(+)} \oplus H^{(-)}$$

$$\hookrightarrow \left\{ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\} \text{ COMPLETA IN } H^{(-)} \xleftrightarrow{\text{ISOMORFO}} L^2(0, \pi)$$

BASE DEI SENI

$$\hookrightarrow \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \right\} \text{ COMPLETA IN } H^{(+)} \longleftrightarrow L^2(0, \pi)$$

BASE DEI COSENI

- INSIEME ORTOGONALE:
  - → tutti gli elementi diversi tra loro sono PERPENDICOLARI ($(x,y)=0$ per $x \neq y$)
  - → l'elemento nullo - ZERO - non è compreso nell'insieme
  - → INSIEME ORTONORMALE: ORTOGONALE E TUTTI GLI ELEMENTI HANNO NORMA 1
    - → <u>BASE HILBERTIANA:</u> $N \subset \mathcal{H}$ è un SISTEMA COMPLETO, o base hilbertiana se è ortonormale e vale $N^{\perp} = \{0\}$

- È importante trovarsi in uno spazio di Hilbert SEPARABILE, così che le proprietà siano più simili al caso finito-dimensionale.

	FINITO-DIMENSIONALE	INFINITO-DIMENSIONALE
BASE HILBERTIANA ($\mathcal{H}$ separabile)	finita con cardinalità pari alla dimensione dello spazio	sicuramente numerabile
$\mathcal{H}$ SEPARABILE	$\mathcal{H}$ ISOMORFO A $\mathbb{C}^n$ CON PRODOTTO HERMITIANO STANDARD	$\mathcal{H}$ ISOMORFO A $\ell^2(\mathbb{N})$

SUCCESSIONI DI FUNZIONI

- successione i cui termini sono funzioni da uno spazio X a uno Y
  ↳ APPLICAZIONE $\mathbb{N} \to \mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$ insieme di funzioni)
  $n \mapsto f_n$
  viene indicata con $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

- SUCCESSIONE DEI VALORI IN UN PUNTO FISSATO $x_0 \in X$
  $\{f_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di elementi del codominio Y
  (se $Y = \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) allora è una successione numerica)

- LIMITE DELLA SUCCESSIONE DI FUNZIONI
  Suppongo che $\forall x \in X$ la successione dei valori $\{f_n(x)\}$ converge ad un valore $f(x)$. Questa funzione $f: X \to Y$ è il LIMITE della successione.

- CONVERGENZA PUNTUALE
  $\{f_n\} \to f$ in X se $\forall x \in X \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$

  - ESEMPI: $\{1\} \to 1$ $\quad \{\frac{1}{n}\sin(nx)\} \to 0$
    $\{1/n\} \to 0$ $\quad \{x^n\} \to 0$ per $-1<x<1$
    $\quad \to 1$ per $x = 1$
    $\{x/n\} \to 0$

- CONVERGENZA UNIFORME
  $\{f_n\}$ converge uniformemente verso f in X se $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| = 0$

↳ se una successione converge uniformemente converge anche puntualmente
↳ se converge uniformemente ad f, se ogni f_n è continua in x_0 allora anche f è continua in $x_0 \in X$ (thm continuità del limite)
→ se la funzione limite di una successione di funzioni non è continua allora LA SUCCESSIONE NON CONVERGE UNIFORMEMENTE
↳ vale la stessa cosa per le funzioni limitate in X (thm limitatezza del limite)
(F. LIMITATA IN X SE $\exists M > 0 (\in\mathbb{R})$ t.c. $|f(x)| \le M \ \forall x \in X$)

- THM PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO SEGNO DI DERIVATA

  $\{f_n\}$ successione di funzioni $C^1([a,b])$. Suppongo che sia $\{f_n\}$ che la successione delle sue derivate $\{f'_n\}$ siano UNIFORMEMENTE CONVERGENTI IN $[a,b]$

  Allora $\{f_n\}$ CONVERGE A $f \in C^1([a,b])$ e risulta

  $$\lim_{n\to+\infty} f'_n(x_0) = f'(x_0)$$

- THM PASSAGGIO AL LIMITE SOTTO SEGNO DI INTEGRALE

  Suppongo che $\{f_n\}$ converge uniformemente a f $(f_n : [a,b] \to \mathbb{R}\ \forall n,\ f : [a,b] \to \mathbb{R})$

  Se ogni funzione f_n è integrabile su $[a,b]$ allora anche f lo è e vale:

  $$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$$

- LEMMA DI DINI

  Se $f_n \to f$ in $\bar{X}$ COMPATTO con f_n, f continue allora f_n CONV. UNIFORMEMENTE a f

- CONVERGENZA IN NORMA (CONVERGENZA FORTE)

  $\{f_n\}$ CONVERGE IN NORMA A f SE $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$

- CONVERGENZA ~~[illegible]~~ DEBOLE in $(V, \|\cdot\|)$ S. NORMATO

  $\{f_n\}$ CONVERGE DEBOLMENTE A f SE $\lim_{n\to\infty} \underbrace{(\phi, f_n - f)}_{\text{AZIONE DEL FUNZIONALE } \phi \text{ SU } f_n - f} = 0 \quad \forall \phi \in V^*$ duale di V

- Convergenza forte implica convergenza debole

SPAZI FUNZIONALI

Sia $\boxed{C([a,b])}$ lo SPAZIO DELLE f. CONTINUE in $[a,b]$, uno spazio vettoriale di dimensione INFINITA sul campo dei complessi $\mathbb{C}$.

- NORMA DELLA CONV. UNIFORME $\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$

  $f_i \xrightarrow{UNIF.} f$ se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ t.c. $|f_i(x) - f(x)| < \varepsilon$; $\forall x \in [a,b]$, $\forall i > N$

- NORMA DELLA CONV. IN MEDIA $\|f\|_1 = \int |f|\, dx$

↳ non sono equivalenti ma c'è una relazione $\|f\|_1 \leq (b-a)\|f\|_\infty$

e dunque CONV. UNIFORME → CONV. PUNTUALE, → CONV. IN MEDIA

→ $C([a,b])$ con la norma uniforme è UNO SPAZIO DI BANACH, non è vero invece con la norma della convergenza in media.

IL COMPLETAMENTO DI $C([a,b])$ CON LA NORMA $\|\cdot\|_1$ È LO SPAZIO $\mathbb{L}^1([a,b])$ delle funzioni integrabili secondo Lebesgue.

- NORMA "EUCLIDEA" $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f|^2 dx}$ INTRODUZIONE A $\mathbb{L}^2$ (NORMA DELLA CONV. IN MEDIA QUADRATICA)

→ Deriva dal prodotto scalare $(f,g) = \int_a^b f^* g \, dx$ $\quad (\|\cdot\|_2 = \sqrt{(\cdot,\cdot)})$

→ $\|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\, \|f\|_2$

$\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\, \|f\|_\infty$

→ lo spazio con queste norme NON È COMPLETO → per completarlo devo aggiungere le funzioni continue a tratti, ma se ammetto un numero finito di discontinuità le $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ non sono più norme buone.

Per risolvere questo problema, insieme a quello legato alle singolarità, si fa uso dell'integrale di Lebesgue nel definire gli spazi $\mathbb{L}^p$, dove si parla di CLASSI DI EQUIVALENZA di funzioni uguali quasi ovunque.

$f \sim g \quad \to \quad f = g$ quasi ovunque

Vedo che $\mathbb{L}^2$ è il completamento di $C([a,b])$ con la norma $\|\cdot\|_2$ ed è lo spazio delle funzioni quadrato sommabili

Saltando la teoria sull'integrale di Lebesgue definisco gli spazi funzionali tramite esso:

→ Sia $f: A \subset X \to \mathbb{C}$ con X SPAZIO DI MISURA

$$\underbrace{f = f_{Re} + i f_{Im}}_{} \to \int_A f \, d\mu = \int_A f_{Re} \, d\mu + i \int_A f_{Im} \, d\mu$$

↳ PERCHÉ SIA f INTEGRABILE DEVONO ESSERLO ENTRAMBE, allora si ha

- f integrabile $\Longleftrightarrow$ $|f|$ integrabile
- $\int_A |f| \, d\mu \leq \int_A |f_{Re}| \, d\mu + \int_A |f_{Im}| \, d\mu$

→ $\mathcal{L}$ è LO SPAZIO DELLE FUNZIONI INTEGRABILI IN A

$$\mathcal{L}^1(A,\mu) = \{ f : A \to \mathbb{C} \mid \underbrace{\int_A |f| \, d\mu}_{} < \infty \}$$

↳ NON È UNA NORMA! CI SONO $f \neq 0$ CON INTEGRALE NULLO (f. di Dirichlet)

→ Tramite la relazione di equivalenza definita prima definisco $\mathbb{L}^1(A,\mu)$
In particolare $f \sim g$ se l'insieme di cui differiscono ha MISURA NULLA

$$\mathbb{L}^1(A,\mu) = \mathcal{L}^1(A,\mu)/\sim \implies \int_A |f| \, d\mu \text{ è una norma} \Rightarrow \underline{\text{SP. DI BANACH}}$$

→ $\mathbb{L}^2(A,\mu) = \mathcal{L}^2(A,\mu)/\sim$ dove $\mathcal{L}^2$ è tale che $\int_A |f|^2 d\mu < \infty$

Spazio delle funzioni a QUADRATO SOMMABILE.
È uno spazio completo, dato che la norma $\|\cdot\|_2$ è indotta dal prodotto scalare è uno SPAZIO DI HILBERT.

Si può prendere A con misura finita o infinita.
Se $\mu(A) = \infty$ non posso dire né $\mathbb{L}^2 \subset \mathbb{L}^1$ né $\mathbb{L}^1 \subset \mathbb{L}^2$,
mentre se $\mu(A) < \infty$ vedo che

- $\|f\|_1 \leq \sqrt{\mu(A)} \, \|f\|_2 \leq \mu(A) \|f\|_\infty$
- CONVERGENZA UNIFORME IMPLICA CONVERGENZA PUNTUALE QUASI OVUNQUE

→ $\mathbb{L}^\infty$ è lo spazio delle funzioni limitate q.o.

$$\|f\|_\infty = \inf_{c \in \mathbb{R}} \{ c \mid |f| \leq c \text{ quasi ovunque} \} < \infty$$

- DISUGUAGLIANZA DI HOLDER: Se $f \in L^P(\Omega)$ e $g \in L^Q(\Omega)$ con $P, Q > 1$ e $\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} = 1$
  Allora $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ e $\|fg\|_1 \leq \|f\|_P \|f\|_Q$
- DISUGUAGLIANZA DI MINKOWSKI: Se $g, f \in L^P(\Omega)$
  Allora $\|f+g\|_P \leq \|f\|_P + \|g\|_P$

POLINOMI TRIGONOMETRICI

- SCALARE INTERVALLO DA $[a,b]$ a $[-\pi,\pi]$: $\begin{cases} x = -\pi + \frac{2\pi}{b-a}(y-a) \\ y = a + \frac{b-a}{2\pi}(a+\pi) \end{cases}$

  ↳ LO FACCIO PER LAVORARE IN $[-\pi,\pi]$ SENZA PERDITA DI GENERALITÀ

- SPAZIO $V_p([a,b])$ DEI POLINOMI DI GRADO QUALSIASI $V = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots$

Non è completo, ma per il thm di Weierstrass è denso in $C([a,b])$

DUNQUE LO SPAZIO DELLE f CONTINUE È IL COMPLETAMENTO DELLO SPAZIO DEI POLINOMI DI GRADO QUALSIASI

- SPAZIO $V_t^{(N)}([-\pi,\pi])$ DEI POLINOMI TRIGONOMETRICI DI GRADO N

$$V_t^{(N)} = \left\{ f = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ikx} \right\}$$

ovvero uno spazio generato da una combinazione lineare di $\{e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}\}$ con dimensione $2N+1$

- SPAZIO $V_t([-\pi,\pi])$ DELLE COMB. LINEARI FINITE DEI POLINOMI TRIGONOMETRICI

→ TEOREMA WEIERSTRASS: $V_t([-\pi,\pi])$ È DENSO IN $C([-\pi,\pi])$ CON NORMA UNIFORME RISPETTO ALLE $f \in C$ t.c. $f(-\pi) = f(\pi)$

$$V_t([-\pi,\pi]) \underset{A}{\subset} C([-\pi,\pi]) / \{f(-\pi)=f(\pi)\} \underset{B}{\subset} C([-\pi,\pi]) \underset{C}{\subset} L^2(-\pi,\pi) \quad (\mathcal{H})$$

→ (A) CONSIDERO $C([-\pi,\pi])$ CON P.S. $(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f^* g \, dx \Rightarrow \|f\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx}$

MAGGIORO LA NORMA INDOTTA CON LA NORMA UNIFORME

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \le 2\pi \max |f(x)|^2 \Rightarrow \|f\| \le \sqrt{2\pi} \max |f(x)|$$

→ $\boxed{\text{OGNI CONVERGENZA UNIFORME IMPLICA CONVERGENZA IN MEDIA QUADRATICA}}$ (opposto non vero)

ALLORA $V_t([-\pi,\pi])$ È DENSO IN $C([-\pi,\pi])/\{f(-\pi)=f(\pi)\}$ IN MEDIA QUADRATICA PERCHÉ LO È IN NORMA UNIFORME

→ (B) $C([-\pi,\pi])/\{f(-\pi)=f(\pi)\}$ È DENSO IN $C([a,b])$ CON LA NORMA QUADRATICA

→ (C) Essendo $V_t([-\pi,\pi])$ DENSO IN MEDIA QUADRATICA IN $C([-\pi,\pi])$ LO È ANCHE NEL SUO COMPLETAMENTO $L^2(-\pi,\pi)$ CON LA MEDIA QUADRATICA

$\mathbb{L}^2$ È uno spazio di Hilbert separabile: CONTIENE UNA BASE ORTONORMALE NUMERABILE

Questo apre la strada al concetto di ESPANSIONE DI UNA FUNZIONE A QUADRATO SOMMABILE IN UNA BASE DI FUNZIONI ORTONORMALI.

Ovvero la SERIE DI FOURIER

SERIE DI FOURIER

Posso scrivere una serie convergente per qualsiasi $f \in L^2(-\pi,\pi)$

- $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$

ESPANSIONE RISPETTO ALLA BASE $\left\{ \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}, \ k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$f_k = (e_k, f) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-iky}}{\sqrt{2\pi}} f(y)\,dy$$

- $f(x) = \frac{\alpha_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + s_n \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right)$

ESPANSIONE RISPETTO ALLA BASE $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, n \in \mathbb{N}^{\times} \right\}$

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,dy$$

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \cos(ny)\,dy \ ; \quad s_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sin(ny)\,dx$$

Ogni funzione di periodo 2π e integrabile tra $[-\pi,\pi]$ può rappresentarsi come somma di una serie del tipo

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = f(x)$$

Siano le funzioni trigonometriche $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$ $\quad \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ $\quad \sin x = \frac{-ie^{ix}+ie^{-ix}}{2}$

UN POLINOMIO TRIGONOMETRICO È UNA QUALSIASI COMBINAZIONE LINEARE DI e^{ikx} con $k \in \mathbb{Z}$ oppure di $\{1, \cos nx, \sin nx\}$ con $n \in \mathbb{N}^+$

Tali polinomi formano lo spazio $V_t([-\pi,\pi])$, di dimensione infinita:

$$f \in V_t([-\pi,\pi]) \rightarrow f(-\pi) = f(\pi),\ f'(-\pi) = f'(\pi), \dots \quad (f \in C^{\infty})$$

$$f = \sum_{k=-M}^{M} f_k e^{ikx} = f_0 + \sum_{n=1}^{M} \left(c_n \cos(nx) + s_n \sin(nx)\right) \quad (M \text{ INTERO ARBITRARIO})$$

$$c_n = f_n + f_{-n} \ ; \ s_n = i f_n - i f_{-n}$$

→ Weierstrass: $V_t([-\pi,\pi])$ è denso con la norma max in $C([-\pi,\pi])$

↳ Espando una f negli esponenziali: $f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$

posso scrivere i c_k in funzione di $f(x)$:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x)\,dx$$

↳ Espando una f nei seni e coseni: $f(x) = c + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{n} b_k \sin(kx)$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx) f(x)\,dx \ ; \ b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) f(x)\,dx$$

Posso scrivere una serie convergente per qualsiasi $f \in C([-\pi,\pi])$ $(\in L^2(-\pi,\pi))$

$$f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{con} \quad \alpha_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x)\,dx$$

$$f = \frac{f_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} + s_n \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right) \quad \underset{\text{O.N.}}{\text{base}} \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\} \ n \in \mathbb{N}^+$$

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \ ; \ c_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \ ; \ s_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

↳ se f è pari $(f(-x) = f(x))$ allora $s_k = 0$

se f è dispari allora $f_0 = 0$ e $c_k = 0$

INTEGRALE DI RIEMANN → FUNZIONI CONTINUE QUASI OVUNQUE

→ DIVIDO L'INTERVALLO $[a,b]$ IN UNA PARTIZIONE DISGIUNTA DI INTERVALLI

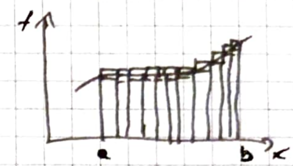
$[a,b] = \bigcup_n I_n$ ⇒ CONSIDERO $m_n = \inf_{I_n} f(x)$, $M_n = \sup_{I_n} f(x)$

→ SE $\ell(I_n)$ È LA LUNGHEZZA DI UN INTERVALLO,

AREA RETTANGOLI INSCRITTI: $\sum_n m_n \ell(I_n) = A_I$ $\boxed{\sup_{I_n} A_I \le \inf_{I_n} A_C}$

" " CIRCOSCRITTI: $\sum_n M_n \ell(I_n) = A_C$

→ SE LA FUNZIONE È RIEMANN INTEGRABILE VALE =



$$\int_I f(x)\,dx = \sup_{I_n} \sum_n m_n \ell(I_n)$$

. la funzione di Dirichlet $D(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ ⇒ $A_I = 0$ MA $A_C = \ell(I)$

⇒ SE UNA FUNZIONE È Riemann int. è anche Lebesgue int. ED I DUE INTEGRALI COINCIDONO → L È PIÙ VANTAGGIOSO PERCHÉ SI PUÒ DEFINIRE SU TUTTI GLI SPAZI DI MISURA, E SU OGNI INSIEME DI ESSI CHE SIA MISURABILE

INTEGRALE DI LEBESGUE

→ PARTO DAL CODOMINIO, DEFINISCO $[m,M]$ CHE LO COMPRENDE TUTTO

DIVIDO $[m,M] = \bigcup_n J_n = \bigcup_n [m_n, M_n]$ con $m_{n+1} = M_n$

→ DEFINISCO NEL DOMINIO $A_n = \{x \mid f(x) \in J_n\}$

ORA HO $\sum_n m_n \ell(A_n) \le \sum_n M_n \ell(A_n)$ ⇒ COSTRETTE A CONVERGERE PER PARTIZIONI SEMPRE PIÙ FINI DI $[m,M]$

→ IL PROBLEMA ORA È CHE A_n È UN INSIEME GENERICO, QUINDI NON SO COME DEFINIRE LA LUNGHEZZA $\ell(A_n)$.

Per risolverlo devo definire una MISURA SUI SOTTOINSIEMI DEL DOMINIO, così come UN CRITERIO DI MISURABILITÀ DI UNA FUNZIONE

• Spazio di misura: X con Σ insieme dei SOTTOINSIEMI MISURABILI DI X dotato di un'applicazione $\mu: \Sigma \to \mathbb{R}$ (misura di $A \subset X$, $A \in \Sigma$)

→ CRITERIO DI CARATHEODORY

A si dice MISURABILE ($A \in \Sigma$) SE $\forall E \subset X$ vale

$$\mu^*(E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E)$$

↳ questa si chiama MISURA ESTERNA, definita su un $A \subset X$ generico, trovata espandendo Σ ad un f-anello.

In questo caso $\mu^*(A) = \mu(A)$

. L'insieme delle funzioni misurabili è misurabile e chiuso sotto molte operazioni.

. F. Semplice ⇒ Definita a valori discreti assunti su insiemi numerabili.

$K_A(x) = 1$ se $x \in A$, $\emptyset$ altrimenti (F. CARATTERISTICA DI A)

$f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i K_{A_i}(x)$ con $A_i \in \Sigma$ ⇒ $\int_X f\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i)$

Sia $f: A \subset X \to \mathbb{C}$ funzione complessa in X sp. di misura

↳ $f = f_R + i f_I \longrightarrow \int_A f\, d\mu = \int_A f_R\, d\mu + i \int_A f_I\, d\mu$

↳ DEVONO ESSERE INTEGRABILI !

↳ f INTEGRABILE $\Longleftrightarrow \|f\|$ INTEGRABILE

e $\int_A |f|\, d\mu \le \int_A |f_R|\, d\mu + \int_A |f_I|\, d\mu$

L PARLA DI SP. DI CLASSI DI EQUIVAL. TRA FUNZIONI, PER VEDERE COME ARRIVA DA $\mathcal{L}$

- $L^1(A, \mu)$ SP. DELLE FUNZIONI COMPLESSE INTEGRABILI

$\|f\|_1 = \int_A |f|\, d\mu$

↳ è COMPLETO, è il completamento delle funzioni continue $C([a,b])$ con $\|f\|_1$ (infatti $d\mu = dx$ e $\|f\|_1 = \int_A |f|\, dx$)

- $L^2(A, \mu)$ SP. DELLE FUNZIONI A QUADRATO SOMMABILE: $\int_A |f|^2\, d\mu < \infty$

↳ f. $\mathcal{L}$-integrabile con int $< \infty$

↳ $(f, g) = \int_A f^* g\, d\mu$

⇓ INDUCE

$\|f\|_2 = \sqrt{\int_A |f|^2\, d\mu}$

↳ è COMPLETO $\Rightarrow$ DI HILBERT (per presenza prodotto scalare)

- PRESO $I \subset \mathbb{R}$ POSSO DIMOSTRARE CHE $L^2(I, dx)$ È IL COMPLETAMENTO DI $C([a,b])$ CON $\|f\|_2$
- CONV. UNIFORME PER FUNZIONI LIMITATE IMPLICA CONVERGENZA IN MEDIA

- L^∞ SP. DELLE FUNZIONI LIMITATE q.o.

$\|f\|_\infty = \inf_{c \in \mathbb{R}} \{ c \mid |f| \le c \text{ q.o.} \} < \infty$

$\mu(A) < \infty$

⇓

$L^\infty \subset L^2 \subset L^1$

$\|f\|_1 \le \sqrt{\mu(A)}\, \|f\|_2 \le \mu(A) \|f\|_\infty$

$\mu(A) = \infty$

⇓

NON POSSO DIRE NÈ $L^2 \subset L^1$ E NEMMENO $L^1 \subset L^2$

CONV. UNIFORME IMPLICA CONV. PUNTUALE QUASI OVUNQUE

TOPOLOGIA OPERATORI

$A: \Delta_A \subset V \longrightarrow W$

$(V, \|\cdot\|_V)$ $(W, \|\cdot\|_W)$

$\mathrm{Ker}\, A = \{x \in \Delta_A \mid Ax = 0\}$
$\mathrm{Im}\, A = \{y \in W \mid y = Tx \text{ con } x \in \Delta_A\}$

→ OP. CONTINUO : se $v_i \to v$ per $i \to \infty$:

$$\lim_{i\to\infty} A(v_i) = A\left(\lim_{i\to\infty} v_i\right) = A(v)$$

Se A non è continuo non lo riesco a definire su ogni elemento, nonostante lo abbia definito su ogni elemento della base.

Se l'operatore è continuo posso estendere Δ_A a tutto V, ho 4 condizioni:

(i) T continuo
(ii) T continuo in 0
(iii) T limitato in $\{v \in \Delta_T, \|v\| \leq 1\} = \overline{B(0,1)}$
(iv) T lipschitziano

TUTTE COND. EQUIVALENTI

LIMITATO
⇓
LIPSCHITZIANO INTORNO A ZERO
⇓
CONTINUO IN ZERO
⇓
CONTINUO OVUNQUE

NB: f lipschitziana se $\exists K$ t.c. $\|f(x-y)\| \leq K\|x-y\|$

NB: LIMITATEZZA: $\sup \|A(v)\|_W < \infty$ (sup in $v \in \overline{B(0,1)}$)

Si dimostra che

IN DIMENSIONE FINITA UN OP LINEARE È SEMPRE CONTINUO

IN DIM $= \infty$ LIMITATO $\Longleftrightarrow$ CONTINUO

→ OP. LIMITATO : $\|T\| = \sup_{v \in \Delta_T} \dfrac{\|Tv\|}{\|v\|}$ NORMA DELL'OPERATORE

- LIMITATO SE $\|T\| < \infty$, E VALE $\|Tv\|_W \leq \|T\| \cdot \|v\|_V$ (↳ NORMA-W, ↳ NORMA-V)
- È UNA BUONA NORMA
  - $\|T\| = 0 \Longleftrightarrow \|Tv\| = 0$
  - $\|\lambda T\| = |\lambda| \, \|T\|$
  - $\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$

- SE T LIMITATO POSSO ESTENDERE IL DOMINIO A TUTTO V MANTENENDO LINEARITÀ E LIMITATEZZA ⟹ MI DIMENTICO DEL DOMINIO DI APPLICAZIONE!

ALGEBRA DEGLI OPERATORI

Gli operatori che V e W formano un'algebra non commutativa

$$T_1T_2 : x \longrightarrow [T_1T_2]x = T_1(T_2x)$$

$$(T_1+T_2)x = T_1x + T_2x$$

$$(TS)x = T(Sx)$$

$$\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\|$$

$$\|TS\| \leq \|T\|\,\|S\|$$

Se T, S sono limitati allora TS e ST sono limitati

↳ l'insieme degli operatori limitati è una SOTTO-ALGEBRA

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \text{ e } \|BA\| \leq \|A\|\cdot\|B\|$$

FUNZIONALI $F: V \to \mathbb{C}$

Particolari operatori il cui spazio di arrivo è il campo complesso.

→ L'INTEGRALE DI UNA FUNZIONE AD ESEMPIO È UN FUNZIONALE

Lo spazio dei funzionali lineari limitati su V si chiama DUALE $\tilde{V}$.

→ È uno spazio vettoriale normato

→ Se $V = \mathcal{H}$, $\tilde{V} = \tilde{\mathcal{H}}$ e $\mathcal{H} \xleftrightarrow{\text{ISOMORFO}} \tilde{\mathcal{H}}$

- CONVERGENZA FORTE IN NORMA

  se $\lim_{i\to\infty} V_i = V$ vuol dire che $\lim_{i\to\infty} \|V - V_i\| = 0$

- CONVERGENZA DEBOLE: $V_i \xrightarrow[i\to\infty]{} V$ debolmente se:

  $\forall w \in \tilde{V},\ w: v \in V \longrightarrow w[v] \in \mathbb{C}$, $\|w\| < \infty$ VALE

  $\lim_{i\to\infty} w[V_i] = w[V]$

  $|w[v] - w[v_i]| = |w(v - v_i)| \leq \|w\| \, \|v - v_i\|$

  e se $\|v - v_i\| \to 0$ allora $|w[v] - w[v_i]| \to 0$

  e la convergenza forte implica la convergenza debole.

  In genere non vale l'opposto

- TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DI RIESZ

  Sia F funzionale limitato $\in \mathcal{H}$:

  $\exists !\, g \in \mathcal{H}$ t.c. $F: v \in \mathcal{H} \longmapsto (g, v)$

  Si vede facilmente: $\|F\| \leq \|g\|$

  ↳ se F è un funzionale costruito da un op tale che $Fv = (w, Tv)$

  $\|F\| \leq \|T\| \, \|g\|$

OPERATORE AGGIUNTO

Sia $T : \Delta_T \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

L'operatore aggiunto T^+ è l'unico operatore $T^+ : \Delta_{T^+} \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ tale che $\forall v \in \Delta_T$, $w \in \Delta_{T^+}$ VALE $(w, Tv) = (T^+ w, v)$

→ Se l'operatore è limitato lo costruisco considerando il prodotto scalare di un w fissato e Tv come un funzionale lineare limitato.

$(w, Tv) = F[w,T]v \to \exists x_0$ t.c. $F[w,t]v = (x_0, v)$

chiamo $x_0 = T^+ w \to (w, Tv) = (T^+ w, v)$ AGGIUNTO

→ T^+ è LIMITATO e $\|T^+\| = \|T\| < \infty$

$\|T^+ w\|^2 = (T^+ w, T^+ w) = (w, T T^+ w) \leq \|w\| \|T\| \|T^+ w\|$

ovvero $\|T^+ w\| \leq \|T\| \cdot \|w\|$ → scambio $T \rightleftarrows T^+$ e trovo l'uguale.

→ L'aggiunto dell'aggiunto è l'operatore di partenza

→ Se T, S sono limitati → $(TS)^+ = S^+ T^+$

Se T è limitato → $\|T^+\| = \|T\|$

$\|T\|^2 = \|T^+ T\|$

Operatore Inverso

- $\operatorname{Im} T = \mathcal{H}$; $\operatorname{Ker} T = \emptyset$

↳ T è INVERTIBILE ED ESISTE L'OPERATORE T^{-1} TALE CHE

Proprietà generali dell'autoaggiunto:

COMBINAZIONE LINEARE: $a_1 T_1 + a_2 T_2 \to a_1^* T_1^+ + a_2^* T_2^+$

$(T^+)^+ = T$

$(T^{-1})^+ = (T^+)^{-1}$ solo se esiste l'operatore inverso T^{-1} t.c. $\boxed{T^{-1} y = x \Leftrightarrow Tx = y}$

OPERATORE HERMITIANO → GENERALIZZA IL CONCETTO DI NUMERO REALE

Considero T non limitato: $T: \Delta_T \subset V \to W$; $T^+ : \Delta_{T^+} \subset V \to \bar{W}$

- SE $\Delta_T \subset \Delta_{T^+}$ E IN Δ_T VALE $T = T^+|_{\Delta_T}$ ALLORA T SI DICE SIMMETRICO o HERMITIANO
- SE $\Delta_T = \Delta_{T^+}$ e $T = T^+$ IN TUTTO Δ_T → T SI DICE AUTOAGGIUNTO

Per un operatore NON limitato essere autoaggiunto è più forte che essere hermitiano.
Se invece T limitato le due definizioni sono EQUIVALENTI.

→ Il prodotto di operatori autoaggiunti è autoaggiunto solo se commutano

→ gli elementi della diagonale nella rappresentazione matriciale sono reali

$[T^+] = [T]^{*t}$ ovvero compl. coniugato di ogni elemento della trasposta

$[T] = [T]^+ \longrightarrow t_{ii} = t_{ii}^* \; ; \; t_{ij}^* = t_{ji}$

→ Un operatore autoaggiunto ha AUTOVALORI REALI, gli autospazi relativi a due diversi autovalori sono ORTOGONALI.

→ POSSO DECOMPORRE UN OPERATORE $T = X + iY$ con X, Y AUTOAGGIUNTI.
Questa è la generalizzazione della decomposizione di un numero complesso in parte reale e parte immaginaria.

→ Un operatore autoaggiunto ha SEMPRE ALMENO UN AUTOVALORE, dunque è sempre possibile DIAGONALIZZARLO IN UNA BASE COMPLETA, almeno in dimensione finita.

OPERATORI ISOMETRICI e UNITARI

Un operatore che conserva il prodotto scalare è detto ISOMETRICO.

$(Uw, Uv) = (w, v) \quad \forall v, w \in \Delta_U$

→ CONSERVA ANCHE LE NORME: $\|Uv\|^2 = \|v\|^2$

→ NE DERIVA CHE $\|U\| = 1$ PER TUTTI GLI OPERATORI ISOMETRICI

Altre proprietà: $\forall v, w \in \mathcal{H} \rightarrow (w, U^+Uv) = (w, v) \rightarrow U^+U = \mathbb{1}$

→ IN DIMENSIONE FINITA
$U^+U = \mathbb{1}$ IMPLICA $U^+ = U^{-1}$ e $U^+U = UU^+ = \mathbb{1}$
e chiamo l'operatore $\boxed{\text{UNITARIO}}$

↳ In dimensione infinita non vale la stessa implicazione
UN OPERATORE SI DICE $\boxed{\text{UNITARIO}}$ SE CONSERVA IL PRODOTTO SCALARE ED È SURIETTIVO, OVVERO $\mathrm{Im}\,U = \mathcal{H}$. Allora:

- $\mathrm{Ker}\,U = \emptyset \Longrightarrow$ INVERTIBILE, POSSO DEFINIRE U^{-1} t.c. $U^{-1} = U^+$
- La conservazione della norma $\|Uv\| = \|v\|$ implica quella del prodotto scalare
- L'operatore MANDA BASI ORTONORMALI IN BASI ORTONORMALI, se $\{e_n\} \in \mathcal{H}$ è un set o.n. allora lo è anche $\{Ue_n\}$

L'operatore unitario è la generalizzazione del concetto di numero complesso di modulo unitario.

⟹ UNITARIO = ISOMETRICO + SURIETTIVO

Anche in questo caso gli autospazi relativi a due diversi autovalori sono ortogonali

Un operatore unitario NON HA SPETTRO RESIDUO

OPERATORE ISOMETRICO $UU^+ = \mathbb{1}$ (AUTOAGGIUNTO → ISOMETRICO)
SURGETTIVO $U^+ = U^{-1}$

OPERATORI DI PROIEZIONE

Si dice PROIETTORE un operatore tale che $P^2 = P$ ($P^n = P$ per $n>0$)

Si dice PROIETTORE ORTOGONALE un operatore P t.c. $P^2 = P$ ed è AUTOAGGIUNTO

→ se $P^2 = P \Rightarrow P|_{\mathrm{Im}P} = \mathbb{1}$ e posso scrivere $\mathcal{H} = \mathrm{Im}P \oplus (\mathrm{Im}P)^\perp$

→ $\mathrm{Ker}P$ e $\mathrm{Im}P$ SONO LINEARMENTE INDIPENDENTI

Posso scrivere un operatore autoaggiunto come $T = \sum_j \alpha_j P_{\alpha_j}$
con $\alpha_j^* = \alpha_j$ e P_{α_j} (α: AUTOVALORI REALI, P_{α_j} PROIETTORE SULL'AUTOSPAZIO DI α_j)
questa si chiama DECOMPOSIZIONE SPETTRALE

- gli autovalori possibili di P sono $+1$ e 0

- due proiettori si "ANNULLANO A VICENDA" cioè $P_1 \cdot P_2 = P_2 \cdot P_1 = 0$
allora la loro somma $P = P_1 + P_2$ è ancora un proiettore

AUTOVALORI

Se $\exists\, v \in V$ tale che $Tv = \alpha v$ con $\alpha \in \mathbb{C}$ allora α è un AUTOVALORE di T e v è il corrispondente AUTOVETTORE.

→ Se v_1, v_2 sono autovettori corrispondenti allo stesso autovalore allora una combinazione lineare è ancora autovettore.
Dunque un AUTOVALORE genera un AUTOSPAZIO di AUTOVETTORI, di dimensione pari alla DEGENERAZIONE DELL'AUTOVALORE.

→ POLINOMIO CARATTERISTICO (dim. finita)
Sia $[T]$ la matrice di T in una certa base, con $\dim = n$
Allora il POLINOMIO CARATTERISTICO non dipende dalla base e si scrive $P(\lambda) = \det([T] - \lambda Id)$
$\underline{\lambda}$ è una radice del polinomio $\Leftrightarrow$ è un autovalore di T
Se il polinomio caratteristico ha n radici distinte allora è DIAGONALIZZABILE

→ In dimensione finita ho sempre almeno un autovalore con degenerazione pari alla dimensione dello spazio

OPERATORI DI HILBERT-SMITH

$f(x) \rightarrow Tf(x) = \int_0^{\pi} g(x,y) f(y) dy$ con $g(x,y) \in L^2(Q)$

$T: L^2 \rightarrow L^2$ $(L^2(0,\pi))$

→ SONO LIMITATI $|Tf(x)| = (g(x,y), f(y))|_x$ CA X FISSATO, OVVERO IN $L^2(0,\pi)$)

→ PER SCHWARZ: $|Tf(x)|^2 \leq \|g(x,y)\|^2 \|f(y)\|^2 =$

$$= \int_0^{\pi} |g(x,y)|^2 dy \cdot \int_0^{\pi} |f(y)|^2 dy$$

$$\|Tf\|^2 = \int_0^{\pi} |Tf(x)| dx$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} dx dy \, |g(x,y)|^2 \|f(x)\|^2 = \|g\|^2$$ [Norma $L^2(Q)$]

↳ $\forall f$ VALE: $\frac{\|Tf\|^2}{\|f\|^2} \leq \|g\|^2$ → $\|T\| \leq \|g\|$

→ <u>AGGIUNTO</u> $T^+ h(x) = \int dy \, g^*(y,x) h(y)$

Quindi è sempre un operatore di HS ma con la trasposta coniugata g^*

Se $g(x,y) = g^*(x,y)$ l'operatore è AUTOAGGIUNTO ; $T = T^+$ e sono diagonalizzabili in una base ortonormale

→ Per trovare $\|T\|$ si può diagonalizzare T e prendere il massimo del modulo degli autovalori.

→ Un generico operatore di HS con generica funzione $Q(x,y)$ è AUTOAGGIUNTO SE $Q(x,y) = \overline{Q(y,x)}$

TRASFORMATA DI FOURIER

- SERIE DI FOURIER DI UNA FUNZIONE IN $L^2(-L,L)$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e^{-i\frac{n\pi}{L}x}$$

$$\text{dove } \alpha_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{+i\frac{n\pi}{L}x} f(x)\,dx$$

L'idea della trasformata di Fourier è di estendere il concetto a funzioni definite sull'intera retta, non solo $[-L,L]$, quindi fare il limite $L\to\infty$

Definisco la trasformata come $\hat{f}(k) \sim \lim_{L\to\infty}\int_{-L}^{L} e^{ikx} f(x)\,dx$ con $k=\frac{n\pi}{L}$

↳ prendo $f(x)\in L^1(\mathbb{R})$, posso definire l'integrale

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} f(x)\,dx \qquad \text{TR. DI FOURIER IN } L^1$$

Le proprietà di integrabilità di una funzione diventano proprietà di continuità o derivabilità della trasformata.

→ se $f(x)\in L^1$ allora $\hat{f}(k)$ è continua

$$\hat{f}(k+\delta) - \hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx}\left(e^{i\delta x}-1\right) f(x)\,dx$$

$$\lim_{\delta\to0}\left(e^{i\delta x}-1\right) = 0 \quad \text{PUNTUALMENTE } \forall x$$

Si può pensare alla trasformata come un operatore lineare

$\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ dallo spazio L^1 allo spazio C

Proprietà di derivabilità della trasformata:

se $xf\in L^1$ allora $\hat{f}$ è DERIVABILE e $\hat{f}'(k) = \mathcal{F}[ixf(x)]$

→ si vede anche che $\hat{f}'(k)$ è continua perché trasformata di una funzione L^1

→ in generale se $x^n f(x)$ sono tutte in L^1 per $0\le n\le N$ allora

$$\hat{f}(k)\in C^N \quad \text{e} \quad \hat{f}^{(n)}(k) = \frac{d^n\hat{f}}{dk^n} = \mathcal{F}\left[(ix)^n f(x)\right]$$

→ se invece $x^n f(x)\in L^1\ \forall n$ allora $\hat{f}(k)\in C^\infty$

→ valgono anche le proprietà inverse, ovvero la derivabilità di $f(x)$ è collegata all'integrabilità di $\hat{f}(k)$

→ in generale si ha se $\frac{d^n f}{dx^n}\in L^1$ per $0\le n\le N$ allora $\mathcal{F}\left[\frac{d^n f}{dx^n}\right] = (-ik)^n\hat{f}(k)$

VALE QUINDI UN'EQUIVALENZA TRA DERIVATA DA UNA PARTE E MOLTIPLICAZIONE PER ix O $-ix$ DALL'ALTRA.