

2021

MATHEMATICS — GENERAL

Third Paper

Full Marks : 100

*Candidates are required to give their answers in their own words
as far as practicable.*

প্রান্তিলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

মডিউল - V

(মান : ৫০)

বিভাগ - ক

(মান : ২০)

১নং প্রশ্ন এবং অপর যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

১। যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

২×২

(ক) 32.1795 এবং 0.009123450001 সংখ্যাদুটির আসন্নমান পাঁচটি সার্থক আক্ষ পর্যন্ত নির্ণয় করো।

(খ) $\frac{3}{7}$ -এর আসন্নমান 0.4286 ধরলে, শতকরা ত্রুটির মান নির্ণয় করো।

(গ) $h = 1$ ধরে $\Delta^3(1-ax)(1-ax^2)$ -এর মান নির্ণয় করো।

(ঘ) নিউটনের পশ্চাদসারী অসম্মান সূত্রটি বিবৃত করো।

২। (ক) নিম্নলিখিত সারণি থেকে পার্থক্য সারণি (difference table) তৈরি করো এবং Newton-এর Backward formula-র সাহায্যে $f(21)$ -এর মান নির্ণয় করো :

x	0	5	10	15	20
$f(x)$	1.0	1.6	3.8	8.2	15.4

(খ) যে শ্রেণির দ্বিতীয় এবং পরবর্তী পদগুলি 15, 10, 7, 6, 7, 10 হয়, সেই শ্রেণিটির প্রথম পদ নির্ণয় করো। (২+৩)+৩

৩। (ক) পাঁচটি সমান অন্তরের (equal intervals) সাহায্যে $\int_0^1 \cos x dx$ -এর মান নির্ণয় করো। তোমার পছন্দের integration formula-টি ব্যবহারের কারণ বিবৃত করো।
(খ) Simpson's One-third Rule-এর জ্যামিতিক তাৎপর্য লেখো। (৮+১)+৩

Please Turn Over

৪। (ক) সমদ্বিখণন সূত্র প্রয়োগ করে $x^3 - 4x - 9 = 0$ সমীকরণটির 2 এবং 3-এর মধ্যে অবস্থিত একটি বীজের মান তিনটি সার্বক
অঙ্ক পর্যন্ত নির্ণয় করো।

(খ) $x^3 - 7x^2 - 6x - 8 = 0$ সমীকরণটির একটি বাস্তব ধনাত্মক বীজ আছে এমন এক দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি অন্তরাল নির্ণয় করো।

৬+২

৫। নিউটন-র্যাফসন পদ্ধতির সাহায্যে $x^3 - 8x + 4 = 0$ সমীকরণটির নির্ভুল চার দশমিক স্থান পর্যন্ত বাস্তব বীজের মান নির্ণয় করো।
এই পদ্ধতির জ্যামিতিক তাৎপর্য উল্লেখ করো।

৬+২

বিভাগ - খ

(মান : ৩০)

৬নং প্রশ্ন এবং অপর যে-কোনো দুটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

৬। যে-কোনো তিনটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

২×৩

(ক) নিম্নলিখিত সমীকরণদ্বয়ের ক্ষেত্রে, $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 0$ সমাধানটি একটি মৌল সমাধান কিনা পরীক্ষা করো :

$$3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 21$$

$$6x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 42$$

(খ) নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রামবিধির কার্যকর দেশ লেখচিত্রের সাহায্যে নির্দেশ করো :

$$\text{চরম } z = x_1 + 3x_2$$

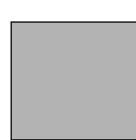
$$\text{যেখানে, } x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \geq 3$$

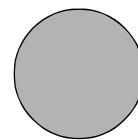
$$x_1, x_2 \geq 0$$

(গ) দেখাও যে $S = \{x: |x| \leq 3\}$ সেটটি ইউক্লিডিয়ান দেশ E^1 -এ একটি উত্তল সেট।

(ঘ) নিম্নে প্রদত্ত উত্তল সেটগুলির প্রাপ্তিক বিন্দুগুলি নির্ণয় করো (ছায়া অংশ) :



(i)



(ii)

(ঙ) নিম্নের Transportation সমস্যাটির North-West corner নিয়ম প্রয়োগ করে একটি প্রাথমিক মৌলিক কার্যকর সমাধান
বের করো :

	D_1	D_2	D_3	D_4	মোট যোগান
O_1	4	6	9	5	16
O_2	4	2	7	1	14
O_3	2	5	2	8	10
মোট চাহিদা	12	7	6	15	

- ৭। (ক) একজন উৎপাদনকারী দুই প্রকারের মডেল— A এবং B উৎপাদন করে। প্রতিটি A মডেল তৈরি করতে 4 ঘণ্টা ধার দিতে এবং 2 ঘণ্টা পালিশ করতে প্রয়োজন। প্রতিটি B মডেল-এর জন্য 2 ঘণ্টা ধার দিতে এবং 5 ঘণ্টা পালিশ করা প্রয়োজন। উৎপাদনকারীর 2টি ধার দেওয়ার মেশিন এবং 3টি পালিশ মেশিন আছে। প্রতিটি ধার দেওয়ার মেশিন প্রতি সপ্তাহে 40 ঘণ্টা কাজ করতে পারে এবং প্রতিটি পালিশ মেশিন প্রতি সপ্তাহে 60 ঘণ্টা কাজ করতে পারে। প্রতিটি A মডেল-এ 3 টাকা লাভ রাখা যায় এবং প্রতিটি B মডেল-এ 4 টাকা লাভ রাখা যায়। প্রত্যেক সপ্তাহে যে পরিমাণ মডেল উৎপন্ন হয়, তার সবটাই বিক্রি করা হয়। প্রতি সপ্তাহে দুই প্রকার মডেল-এর উৎপাদন সাপেক্ষে সর্বোচ্চ লাভের জন্য এই সমস্যাটিকে একটি রৈখিক প্রোগ্রামবিধি সমস্যা হিসাবে উপস্থাপিত করো।
- (খ) নিম্নলিখিত সমীকরণদ্বয়ের $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 2$ এই কার্যকর সমাধানটিকে একটি মৌলিক কার্যকর সমাধান-এ পরিণত করো :

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 22\end{aligned}$$

৬+৬

- ৮। (ক) লেখাচিত্রের সাহায্যে নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রাম সমস্যাটির সমাধান করো :

$$\begin{aligned}\text{চরম } z &= 4x_1 + 7x_2 \\ \text{যেখানে, } 12x_1 + 7x_2 &\leq 42 \\ 5x_1 + 4x_2 &\leq 20 \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1, x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

- (খ) Charnes' M পদ্ধতির সাহায্যে নিম্নলিখিত রৈখিক প্রোগ্রাম সমস্যাটির সমাধান করো :

$$\begin{aligned}\text{অবম } z &= x_1 + x_2 \\ \text{যেখানে, } 2x_1 + x_2 &\geq 4 \\ x_1 + 7x_2 &\geq 7 \\ x_1, x_2 &\geq 0.\end{aligned}$$

৬+৬

- ৯। (ক) নিম্নলিখিত পরিবহন সমস্যাটির সর্বোত্তম সমাধান এবং সংশ্লিষ্ট পরিবহন ব্যয় নির্ণয় করো :

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	6	4	2	7	8
O_2	5	1	4	6	14
O_3	6	5	2	5	19
O_4	4	3	2	1	11
	7	13	12	10	

- (খ) প্রমাণ করো যে সেট $S = \{(x, y) \in E^2 : |x| \leq 2, |y| \leq 1\}$ একটি উভ্য (convex) সেট।

৭+৫

১০। (ক) নিম্নলিখিত মুনাফা ম্যাট্রিক্স (Profit Matrix) থেকে সর্বোত্তম আরোপ (Optimal Assignments) নির্ণয় করো।

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
O_1	2	4	3	5	4
O_2	7	4	6	8	4
O_3	2	9	8	10	4
O_4	8	6	12	7	4
O_5	2	8	5	8	8

(খ) দেখাও যে $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0$ নিম্নলিখিত সমীকরণ দুটির একটি কার্যকর সমাধান :

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 7$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

প্রাপ্ত কার্যকর সমাধানটিকে একটি মৌল কার্যকর সমাধানে পরিণত করো।

৭+(৩+২)

মডিউল - VI

(বিভাগ-ক অথবা বিভাগ-খ উত্তর দাও)

বিভাগ - ক

[Analytical Dynamics]

(মান : ৫০)

১১নং প্রশ্ন ও যে-কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

১১। যে-কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

২×৫

(ক) একটি কণা, $v^2 = 2 - x - x^2$ গতিসূত্র মেনে একটি সরলরেখায় চলমান। দেখাও যে কণাটি সরল দোলন গতি সম্পন্ন।

(খ) নিউটনের দ্বিতীয় গতিসূত্রটি বিবৃত করো।

(গ) y -অক্ষের সমান্তরাল বলের সূত্রটি নির্ণয় করো যেখানে একটি কণা সমতল $xy = a^2$ পথে গতিশীল, a একটি ধ্রুবক।

(ঘ) একটি বস্তুকণা $p^2 = ar$ অধিব্রতাকার পথে এইরূপ বলের অধীনে গতিশীল যা সর্বদাই নাভি মুখী (focus)। বলের সূত্রটি নির্ণয় করো।

(ঙ) কোনো একটি বস্তু h উচ্চতা থেকে পড়ার সময় কত উচ্চতায় বস্তুটির গতিশক্তি স্থিতিশক্তির অর্ধেক হবে?

(চ) রৈখিক ভরবেগের নিয়তার সূত্রটি বিবৃত করো।

(ছ) বলের ঘাত কী? ক্রমাগত বল (Continuous force) এবং ঘাত বলের (Impulsive force) পার্থক্য কী?

(জ) দেখাও যে কেন্দ্রীয় কক্ষপথের *apse*-এ যে-কোনো বস্তু ব্যাসার্ধ ভেস্টরের (Radius vector) সাথে লম্বভাবে বিচরণ করে।

(ঝ) প্রমাণ করো গ্রহের শুধুমাত্র অরীয় দিকেই ভ্রমণ থাকে।

১২। m ভরের একটি বস্তু P -কে লম্বভাবে V গতিবেগসহ উপরের দিকে নিষ্কেপ করা হল। যদি বায়ুর বাধা mkv হয় তাহলে দেখাও যে P আবার শুরুর বিন্দুতে U বেগে ফিরে আসবে যেখানে $g - kU = (g + kV)e^{-k(U+V)/g}$ । ৮

১৩। O বিন্দুর সাপেক্ষে একটি সরল দোলন গতিসম্পন্ন একটি কণা যার amplitude হল ‘ a ’। কণাটি O বিন্দু থেকে $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ দূরত্বে থাকাকালীন ওর গতির অভিমুখে একটি ধাক্কা খাওয়ায় এর গতিবেগ পাঁচগুণ বেড়ে যায়। প্রমাণ করো যে কণাটি এখনও সরল দোলন গতি সম্পন্ন যার amplitude $\sqrt{7}a$ । ৮

১৪। একটি কণা প্রতি একক ভরে F কেন্দ্রীয় আকর্ষক বলের প্রভাবে সমতলে চলে। প্রচলিত অর্থে ব্যবহৃত প্রতীক ধরে দেখাও যে গতিপথের অবকলজ সমীকরণ হল $\frac{h^2}{p^3} \frac{dp}{dr} = F$ । ৮

১৫। সমতলে বক্ররেখায় গতিশীল একটি কণার গতিবেগ ও ত্বরণের অবীয় (radial) ও লম্ব অবীয় (cross radial) উপাংশগুলি নির্ণয় করো। ৮

১৬। একটি কণা কেন্দ্রীয় বল $m\mu\left\{3au^4 - 2(a^2 - b^2)u^5\right\}, a > b$ -এর অধীনে সমতলে গতিশীল এবং কণাটিকে $a + b$ দূরত্বে apse থেকে $\frac{\sqrt{\mu}}{a+b}$ গতিবেগে উৎক্ষেপ করা হয়েছে। প্রমাণ করো যে কণাটির গতিপথ $r = a + b \cos\theta$ । ৮

১৭। একটি বস্তুকণা $y = \frac{c(e^{x/2} + e^{-x/2})}{2}$ বক্ররেখায় গতিশীল y -অক্ষের সমান্তরাল বলের প্রভাবে। বলের সূত্রটি নির্ণয় করো। ৮

১৮। কোনো কণা $r^4 = a^4 \cos 4\theta$ পথে এমন একটি বলের অধীনে গতিশীল যা সর্বদাই মেরু অভিমুখী। বলের সূত্রটি নির্ণয় করো। ৮

১৯। দুটি বস্তু $3m$ এবং m ভরের, যা একটি দড়ির সাহায্যে যুক্ত, দড়িটি একটি পুলির উপর দিয়ে রয়েছে। এই সমস্তটা স্থির অবস্থায় রয়েছে যেখানে $3m$ ভরযুক্ত বস্তুটি মাটিতে রয়েছে। h উচ্চতা থেকে m ভরের একটি তৃতীয় বস্তু দ্বিতীয় ভরের উপর আঘাত করে নিজের সাথে যুক্ত করে সমস্ত সিস্টেমকে গতি প্রদান করে। প্রমাণ করো যে $3m$ ভরযুক্ত বস্তুটি $\frac{1}{5}h$ উচ্চতায় উঠতে সক্ষম হবে। ৮

২০। যদি V_1 এবং V_2 একটি গ্রহের রৈখিক বেগ হয় যখন গ্রহটির সূর্য থেকে দূরত্ব সর্বনিম্ন এবং সর্বোচ্চ, তবে প্রমাণ করো যে $(1-e)V_1 = (1+e)V_2$, যেখানে e হল গ্রহটির কক্ষপথের উৎকেন্দ্রতা। ৮

বিভাগ - খ

[Probability and Statistics]

(মান : ৫০)

১১নং প্রশ্ন ও যে-কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

১১। যে-কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

২×৫

(ক) $P(AB)$ নির্ণয় করো, যেখানে $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B/A) = \frac{1}{2}$ ।

(খ) যে-কোনো দুটি ঘটনা A ও B -এর জন্য প্রমাণ করো : $P(A+B) \geq P(A) + P(B) - 1$

(গ) নিম্নলিখিত রাশিগুলির গড়মান ও মধ্যমা নির্ণয় করো :

21, 1, 30, 91, 50, 80, 11, 61, 80, 12, 51, 80

(ঘ) যে-কোনো দুটি ঘটনা A ও B -এর জন্য প্রমাণ করো যে — $\frac{1+P(AB)-P(A)-P(B)}{1-P(B)} = P(\bar{A}/\bar{B})$, যেখানে $P(B) \neq 1$ ।

(ঙ) Baye's উপপদ্ধতি বিবৃত করো।

(চ) উদাহরণ সহযোগে নমুনাক্ষের সংজ্ঞা দাও।

(ছ) যদি x -এর y -এর উপরে এবং y -এর x -এর উপরে নির্ভর রেখাদ্বয়ের (Regression lines) সমীকরণ যথাক্রমে $x = 4y + 5$ ও $y = 5x + 4$ হয়, তবে x ও y -এর সহগান্ধ নির্ণয় করো।

(জ) Wholesale Price Index Number বলতে কী বোঝো ?

(ঝ) মুখ্য প্রকল্প (Null Hypothesis) ও বৈকল্পিক প্রকল্প (Alternative Hypothesis)-এর সংজ্ঞা দাও।

১২। (ক) তিনটি ঘটনা A, B, C -এর জন্য প্রমাণ করো : $P(ABC) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A)$ ।

(খ) একটি পরিবারে দুটি শিশু বর্তমান। তাদের (অ) দুজনেই ছেলে হওয়ার (আ) দুজনের একই জন্মতারিখ হওয়ার সম্ভাবনা নির্ণয় করো।

8+(২+২)

১৩। (ক) X একটি Binomial ($10, P$) চলক যার $4P(x=4) = P(x=3) + P(x=9)$ -এর মান নির্ণয় করো।

(খ) নিম্নলিখিত তথ্য থেকে X ও Y -এর সহগান্ধ নির্ণয় করো :

X	23	25	35	30	20	27	28	24	32
Y	33	35	45	40	30	37	38	34	42

8+8

১৪। (ক) যদি cotton thread-এর breaking strength পরিমাপের 100 নমুনার ক্ষেত্রে গড়মান (mean) 7.4 ও standard deviation 1.2 gms হয়, এবং $Z_{.025} = 1.96$ হয় তবে গড় (mean) breaking strength-এর 95% confidence limits নির্ণয় করো।

(খ) তিন-বৰ্ষীয় গতিশীল গড় পদ্ধতিতে নিম্নপ্রদত্ত তথ্য হতে Kolkata-র বৃষ্টিপাতের Trend নির্ণয় করো :

বৎসর	2014	2015	2016	2017	2018	2019
বৃষ্টিপাত (মিমি)	506	780	720	580	660	700

৫+৩

১৫। (ক) Paasche's formula দ্বারা প্রদত্ত তথ্য হতে মূল্য সূচক সংখ্যা নির্ণয় করো :

পণ্যদ্রব্য	ভিত্তি বৎসর		বর্তমান বৎসর	
	দর (টাকায়)	মাপ	দর (টাকায়)	মাপ
A	350	18	370	22
B	150	12	200	20
C	280	24	320	30

(খ) মূল্য সূচক সংখ্যার কোন ফর্মুলা factor reversal test-কে satisfy করে? শৃঙ্খল সূচক (chain index)-এর দুটি সুবিধা লেখো।

৪+(২+২)

১৬। (ক) একটি সম্ভাব্য সম্ভত চলক X -এর নিরবেশনের সম্ভাবনা ঘনত্ব p.d.f অপেক্ষক $f(x) = \begin{cases} \frac{Cx}{2021}(1-x) & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{অন্যত্র} \end{cases}$

ধ্রুবক C -এর মান এবং $\text{var}(1 - 21x)$ -এর মান নির্ণয় করো।

(খ) নিম্নলিখিত বণ্টনের একটি আয়তলেখ তৈরি করো :

বিদ্যুৎ ব্যবহার (watt)	0-35	36-75	76-125	126-200	201-250	251-350	350-450
উপভোক্তার সংখ্যা	130	150	120	110	80	70	50

৫+৩

১৭। (ক) শর্তাধীন সম্ভাবনায় Baye's-এর উপপাদ্যটি প্রমাণ করো।

(খ) দুটি বাক্স A ও B -এর মধ্যে যথাক্রমে 5টি লাল, 7টি সাদা বল এবং 6টি লাল ও 6টি সাদা বল ছিল। Randomly একটি বাক্স তুলে সেটা থেকে একটি বল তোলা হল। বলটির রং লাল হলে A বাক্সটি থেকে এটি তোলার সম্ভাবনা কত? ৩+৫

১৮। (ক) 15 আকারের একটি দ্বিতল নমুনা থেকে নিম্নলিখিত ফলগুলি পাওয়া গেল :

$$\bar{x} = 7, \bar{y} = 11, s_x = 4, s_y = 4 \text{ এবং } r = 0.7।$$

পরে দেখো গেল এতে একজোড়া ফল ($x = 7, y = 11$) সঠিক নয় এবং তা বাতিল হল। এর ফলে ' r '-এর মান কীরুপে প্রভাবিত হল দেখাও। (যেখানে $r = \text{সহগতি সহগ}$)।

(খ) SRSWOR-এর জন্য Sample mean-এর Standard error নির্ণয় করো।

8+8

১৯। (ক) Type I এবং Type II error-এর সংজ্ঞা দাও।

(খ) দুটি রাশির গুগোত্তরীয় মধ্যক নির্ণয় করো যেখানে এদের সমাত্তরীয় মধ্যক ও বিপরীত মধ্যকদ্বয় যথাক্রমে 20 এবং 12।

(গ) X ও Y দুটি স্বাধীন সম্ভাব্য চলক (Independent random variables)-এর ক্ষেত্রে প্রমাণ করো যে $\text{cov}(X, Y) = 0$ ।

১+৩+৩

Please Turn Over

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Module – V**(Marks : 50)****Group – A****(Marks : 20)**

Answer **question no. 1** and **any two** questions from the rest.

- 1.** Answer **any two** questions : 2×2

- (a) Round-off the following numbers correct to five significant digits for the two numbers :

$$32.1795 \text{ & } 0.009123450001$$

- (b) If $\frac{3}{7}$ is represented by the approximate number 0.4286, compute the percentage error.

- (c) Find $\Delta^3(1 - ax)(1 - ax^2)$, taking $h = 1$.

- (d) State Newton's backward interpolation formula.

- 2.** (a) Given the following table :

x	0	5	10	15	20
$f(x)$	1.0	1.6	3.8	8.2	15.4

Construct the difference table and compute $f(21)$ by Newton's Backward Formula.

- (b) Find the first term of the series whose second and subsequent terms are 15, 10, 7, 6, 7, 10. (2+3)+3

- 3.** (a) Evaluate $\int_0^1 \cos x \, dx$ taking 5 equal intervals. Explain the reason behind your choice of the integration formula used.

- (b) Give the Geometrical significance of Simpson's One-third Rule. (4+1)+3

- 4.** (a) Using the method of bisection compute a root of $x^3 - 4x - 9 = 0$ between 2 and 3, correct to 3 significant figures.

- (b) Find an interval of length one in which a positive real root of the following equation lies :

$$x^3 - 7x^2 - 6x - 8 = 0.$$

6+2

- 5.** Using Newton-Raphson method compute a real root of $x^3 - 8x + 4 = 0$ correct to four decimal places. Give the geometrical significance of this method. 6+2

Group - B**(Marks : 30)**

Answer **question no. 6** and **any two** questions from the rest.

- 6.** Answer **any three** questions : 2×3

- (a) Examine whether the solution $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 0$ of the following system of equations is basic :

$$3x_1 + 5x_2 - 7x_3 = 21$$

$$6x_1 + 10x_2 + 3x_3 = 42$$

- (b) Represent graphically the feasible region of the following LPP :

$$\text{Max} \quad z = x_1 + 3x_2$$

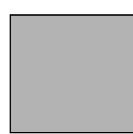
$$\text{subject to } x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \geq 3$$

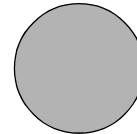
$$x_1, x_2 \geq 0$$

- (c) Show that the set $S = \{x : |x| \leq 3\}$ is a convex set in the Euclidean space E^1 .

- (d) Find the extreme points of the following convex sets (shaded region) :



(i)



(ii)

- (e) Find an initial basic feasible solution of the following Transportation Problem by North-West corner rule :

	D_1	D_2	D_3	D_4	Total Supply
O_1	4	6	9	5	16
O_2	4	2	7	1	14
O_3	2	5	2	8	10
Total Demand	12	7	6	15	

- 7. (a)** A manufacturer produces two types of models *A* and *B*. Each *A* model requires 4 hours of grinding and 2 hours of polishing whereas each *B* model requires 2 hours of grinding and 5 hours of polishing. The manufacturer has 2 grinders and 3 polishers. Each grinder works for 40 hours a week and each polisher works for 60 hours a week. Profit on an *A* model is Rs. 3.00 and on a *B* model is Rs. 4.00. Whatever is produced in a week is sold in the market. Formulate this problem as an LPP to determine the production capacity of two types of models so that the company may make the maximum profit in a week.

- (b) Reduce the feasible solution $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 2$ of the following system to a basic feasible solution :

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 22.\end{aligned}$$

6+6

8. (a) Solve the following LPP graphically :

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & z = 4x_1 + 7x_2 \\ \text{subject to} & 12x_1 + 7x_2 \leq 42 \\ & 5x_1 + 4x_2 \leq 20 \\ & 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0.\end{array}$$

- (b) Use Charnes' M-technique to solve the following LPP :

$$\begin{array}{ll}\text{Min} & z = x_1 + x_2 \\ \text{subject to} & 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 + 7x_2 \geq 7 \\ & x_1, x_2 \geq 0.\end{array}$$

6+6

9. (a) Find the optimal solution and corresponding cost of transportation in the following Transportation Problem :

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	6	4	2	7	8
O_2	5	1	4	6	14
O_3	6	5	2	5	19
O_4	4	3	2	1	11
	7	13	12	10	

- (b) Prove $S = \{(x, y) \in E^2 : |x| \leq 2, |y| \leq 1\}$ is a convex set.

7+5

10. (a) Find the optimal assignments from the following profit matrix :

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	
O_1	2	4	3	5	4	
O_2	7	4	6	8	4	
O_3	2	9	8	10	4	
O_4	8	6	12	7	4	
O_5	2	8	5	8	8	

- (b) Show that $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 0$ is a feasible solution of the system of equations

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 7$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 4$$

Reduce the Feasible Solution to a Basic Feasible Solution.

7+(3+2)

Module – VI**(Answer either Group-A or Group-B)****Group – A****[Analytical Dynamics]****(Marks : 50)**Answer **question no. 11** and **any five** questions from the rest.

- 11.** Answer **any five** questions : 2×5
- If a particle moves in a straight line and its velocity v at a distance x from the origin is given by $v^2 = 2 - x - x^2$, show that the motion is simple harmonic.
 - State Newton's 2nd law of motion.
 - Find the law of force parallel to the axis of y under which a particle describes the plane curve $xy = a^2$, a is a constant.
 - A particle describes the parabola $p^2 = ar$ under a force which is always directed towards its focus. Find the law of force.
 - At what height would the K.E. of a body falling from a height h be equal to half its potential energy?
 - State the principle of conservation of linear momentum.
 - Define Impulse. What is the difference between a continuous force and an impulsive force?
 - Show that at an *apse* of a central orbit, the particle moves perpendicular to the radius vector.
 - Prove that a planet has only a radial acceleration towards the sun.
- 12.** A particle P of mass m is thrown vertically upwards with initial speed V . If the air resistance is mkv , show that P returns to its starting point with speed U given by, $g - kU = (g + kV)e^{-k(U+V)/g}$. 8
- 13.** A particle is executing S.H.M. of amplitude a about a point O as the centre of oscillation and when at a distance $\frac{\sqrt{3}}{2} a$ from O, it receives a blow in the direction of motion, whereby its velocity is increased five times. Show that the amplitude of the subsequent S.H.M. is $\sqrt{7} a$. 8
- 14.** A particle describes a plane curve under the action of a central attractive force F per unit mass. Prove that in usual notations the differential equation to the path of the particle is $\frac{h^2}{p^3} \frac{dp}{dr} = F$. 8
- 15.** Find the expressions for the radial and cross-radial components of velocity and acceleration of a particle moving in a plane. 8

Please Turn Over

16. A particle moves under a force $m\mu \left\{ 3au^4 - 2(a^2 - b^2)u^5 \right\}, a > b$ and is projected from an *apse* at a distance $a + b$ with velocity $\sqrt{\mu}/(a + b)$; Show that its orbit is $r = a + b \cos\theta$. 8
17. A particle describes the curve $y = \frac{c(e^{x/2} + e^{-x/2})}{2}$ under a force which is always parallel to the direction of y -axis. Find the law of force. 8
18. A particle describes the path $r^4 = a^4 \cos 4\theta$ under a force which is always directed to the pole. Find the law of force. 8
19. Two masses $3m$ and m are connected by a cord passing over a pulley and the whole is at rest with $3m$ on the ground. A third mass m falls through a height h , strikes the second mass, adheres to it and sets the whole in motion. Prove that the mass $3m$ will rise from the ground to a height $\frac{1}{5}h$. 8
20. If V_1, V_2 are the linear velocities of a planet when it is respectively nearest and farthest from the Sun, prove that $(1-e)V_1 = (1+e)V_2$, where e is the eccentricity of the orbit of the planet. 8

Group – B**[Probability and Statistics]****(Marks : 50)**Answer ***question no. 11*** and ***any five*** questions from the rest.

11. Answer ***any five*** questions : 2×5
- (a) If $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B/A) = \frac{1}{2}$, then find $P(AB)$.
- (b) For any two events A and B , prove that $P(A+B) \geq P(A) + P(B) - 1$.
- (c) Find mean and median of the following numbers :
21, 1, 30, 91, 50, 80, 11, 61, 80, 12, 51, 80.
- (d) For any two events A and B , show that $\frac{1 + P(AB) - P(A) - P(B)}{1 - P(B)} = P(\bar{A}/\bar{B})$, provided $P(B) \neq 1$.
- (e) State Baye's theorem.
- (f) Define a statistic and give an example.

- (g) If the regression lines of x on y and y on x are $x = 4y + 5$ and $y = 5x + 4$ respectively, then find the correlation coefficient of x and y .
- (h) What do you mean by wholesale price index number?
- (i) Define Null Hypothesis and Alternative Hypothesis.
12. (a) For three events A, B, C prove that $P(ABC) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/AB)$.
 (b) In a family, there are two children. What is the probability that (i) they are both male, (ii) they have same birthday?
 4+(2+2)
13. (a) X is a Binomial (10, P) variate such that $4P(x=4) = P(x=3)$. Find $P(x=9)$.
 (b) Find the correlation coefficient of X and Y from the following bivariate data :
- | | | | | | | | | | |
|-----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| X | 23 | 25 | 35 | 30 | 20 | 27 | 28 | 24 | 32 |
| Y | 33 | 35 | 45 | 40 | 30 | 37 | 38 | 34 | 42 |
- 4+4
14. (a) A sample of 100 measurements at breaking strength of cotton thread gave a mean of 7.4 and a standard deviation of 1.2 gms. Find 95% confidence limits for the mean breaking strength of the cotton thread. (Given $Z_{.025} = 1.96$)
 (b) Determine the trend of rainfall in Kolkata using 3 years moving average method :
- | | | | | | | |
|---------------------|------|------|------|------|------|------|
| Year | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 |
| Rainfall(mm) | 506 | 780 | 720 | 580 | 660 | 700 |
- 5+3
15. (a) Obtain Price Index number (using Paasche's formula) from the following data :
- | Commodity | Base Year | | Current year | |
|------------------|-------------------|-----------------|---------------------|-----------------|
| | Price(Rs.) | Quantity | Price(Rs.) | Quantity |
| A | 350 | 18 | 370 | 22 |
| B | 150 | 12 | 200 | 20 |
| C | 280 | 24 | 320 | 30 |
- (b) Which formula for Price Index Number does satisfy the factor reversal test? Discuss two advantages of chain index.
 4+(2+2)
16. (a) A continuous random variable X has the p.d.f defined by $f(x) = \begin{cases} \frac{Cx}{2021}(1-x) & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{elsewhere} \end{cases}$
 Find the constant C and value of $\text{var}(1 - 21x)$.
- (b) Draw a Histogram from the following distribution :
- | | | | | | | | |
|------------------------------------|------|-------|--------|---------|---------|---------|---------|
| Electricity consumed (watt) | 0-35 | 36-75 | 76-125 | 126-200 | 201-250 | 251-350 | 350-450 |
| No. of consumers | 130 | 150 | 120 | 110 | 80 | 70 | 50 |
- 5+3

Please Turn Over

17. (a) Prove Baye's theorem on conditional probability.
- (b) Two boxes A and B contained 5 red balls, 7 white balls and 6 red balls, 6 white balls respectively. A box was chosen at random and a ball was picked from that box randomly. If the ball picked found to be red, then what is the probability that the box A was selected? 3+5
18. (a) A bivariate sample of size 15 gave the result $\bar{x} = 7$, $\bar{y} = 11$, $s_x = 4$, $s_y = 4$ and $r = 0.7$. It was later found that one pair $(x = 7, y = 11)$ was inaccurate and was rejected. How would the value of r be affected by this rejection, where r stands for the correlation coefficient?
- (b) Obtain the standard error of sample mean in case of simple random sampling without replacement (SRSWOR). 4+4
19. (a) Define Type I and Type II error.
- (b) Find the geometric mean of two observations of their arithmetic mean and harmonic mean are 20 and 12 respectively.
- (c) If X and Y are two independent random variables, prove that $\text{cov}(X, Y) = 0$. 2+3+3
-