

2021

MATHEMATICS — GENERAL

Paper – DSE-A-1

(Particle Dynamics)

Full Marks : 65

*Candidates are required to give their answers in their own words
as far as practicable.*

প্রাত্তিলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক

বহু বিকল্পক নৈর্ব্যক্তিক প্রশ্নাবলী

১। নিম্নলিখিত সব প্রশ্নের উত্তর দাও :

১×১০

(ক) একটি কণা সরলরেখা বরাবর $x = \frac{1}{2}vt$, গতির নিয়মে চলে, যেখানে v হল t সময়ে বেগ, তাহলে অরণ f হল

- (অ) ধ্রুক (আ) $f \propto x$ (ই) $f \propto -x$ (ঈ) $f \propto 1/x$

(খ) নিম্নের কোনটি সঠিক?

- (অ) Power = Force/velocity (আ) Power = Force × velocity
(ই) Power = Force × (velocity)² (ঈ) None of these

(গ) m -ভরবিশিষ্ট একটি বস্তুকণার উপর $m\mu\left(x + \frac{a^4}{x^3}\right)$ পরিমাণ কেন্দ্রাভিমুখী বল ক্রিয়া করে। যদি বস্তুকণাটি ‘ a ’ দূরত্বে

স্থিরাবস্থা থেকে যাত্রা শুরু করে তবে t সময়ে তার গতিবেগ হবে,

- (অ) $\sqrt{\mu}\left(\frac{a^4}{x^2} - x^2\right)^{1/2}$ (আ) $\sqrt{\mu}\left(\frac{a^4}{x^4} + x^2\right)^{1/2}$ (ই) $\sqrt{\mu}\left(-\frac{a^4}{x^2} + x^2\right)^{1/2}$ (ঈ) $-\sqrt{\mu}\left(\frac{a^4}{x^2} - x^2\right)^{1/2}$

(ঘ) যদি I ঘাতের দ্রিয়ায় সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার গতিবেগ u থেকে v তে পরিবর্তিত হয়, তবে গতিশক্তি পরিবর্তনের মান হবে

- (অ) $\frac{1}{2}I(u+v)$ (আ) $\frac{1}{2}I(u-v)$ (ই) $2I(u+v)$ (ঈ) $2I(u-v)$

(ঙ) u প্রারম্ভিক বেগে প্রক্ষিপ্ত কোন বস্তুকণার সর্বাধিক অনুভূমিক সীমা হবে,

- (অ) $\frac{u}{g}$ (আ) ug (ই) $\frac{u^2}{g}$ (ঈ) $\frac{g}{u^2}$

Please Turn Over

(চ) যদি কেন্দ্রীয় বলের প্রভাবে কোন গতিশীল কণার কেন্দ্রীয় কক্ষপথটি একটি শঙ্কুচেন্দ $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ হয়, তবে বল

সরলভেদে থাকবে

(অ) $\frac{1}{r^2}$

(আ) r^2

(ই) $\frac{1}{r}$

(উ) $\frac{1}{r^3}$ -এর সঙ্গে।

(ছ) যদি একটি বস্তুকণার ভ্রমণের অভিলম্ব উপাংশ এবং স্পর্শক উপাংশ সমান হয়, তবে গতিবেগ সমানুপাতিক হবে

(অ) ψ

(আ) $e\psi$

(ই) $e^2\psi$

(উ) $e^{-\psi}$ -এর সঙ্গে, যেখানে $\tan \psi =$ স্পর্শকের নতি।

(জ) 10,000 গ্রাম ওজনের একটি কামানের গোলা 5000 সে.মি./সেকেন্ড গতিতে ছোঁড়া হলে তার গতিশক্তি আর্গে হবে

(অ) 100×10^9 আর্গ (আ) 125×10^9 আর্গ (ই) 200×10^9 আর্গ (উ) 25×10^{10} আর্গ।

(ঝ) একটি স্থির বিন্দুমুখী বল, $\frac{\mu}{r^2}$ (প্রতি ভরের এককে), দ্বারা চালিত একটি কণার পথ অধিবৃত্ত হবে যদি

(অ) $V^2 < \frac{2\mu}{r}$

(আ) $V^2 = \frac{2\mu}{r}$

(ই) $V^2 > \frac{2\mu}{r}$

(উ) $V^2 = \frac{\mu}{r}$ ।

(V প্রারম্ভিক গতিবেগ)

(ঝ) t কে v -এর আপেক্ষক ধরা হলে, ভ্রমণ f -এর হ্রাসের হার হয়

(অ) $f^3 \frac{d^2 t}{dv^2}$

(আ) $f^2 \frac{d^2 t}{dv^2}$

(ই) $f \frac{d^2 t}{dv^2}$

(উ) $\frac{d^2 t}{dv^2}$ ।

২। যে-কোনো একটি প্রশ্নের উত্তর দাও :

৫×১

(ক) m ভরবিশিষ্ট একটি কণা mn^2x আকর্ষণ বলের অধীনে একটি সরলরেখায় গতিশীল এবং সরলরেখার উপরিস্থ একটি নির্দিষ্ট

বিন্দুর দিকে অভিমুখী হয় যেখানে x হল ওই নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে দূরত্ব। যদি কণাটি ওই নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে প্রারম্ভিক a দূরত্ব

থেকে V গতিবেগে বলের কেন্দ্রের অভিমুখে উৎক্ষিপ্ত হয় তবে দেখাও যে, কণাটি বলের কেন্দ্রে $\frac{1}{n} \tan^{-1} \left(\frac{na}{V} \right)$ সময় পরে

পৌঁছবে।

(খ) অরীয় বেগ এবং ভ্রমণের উপাংশ নির্ণয় করো।

যে-কোনো পাঁচটি প্রশ্নের উত্তর দাও।

৩। সরলরেখায় গতিশীল একটি কণার উপর ক্রিয়াশীল বলের কার্যের হার প্রস্তবক এবং x দূরত্ব অতিক্রম করতে বলটি কণার গতিবেগকে

u থেকে v তে পরিবর্তিত করে। প্রমাণ করো যে ওই দূরত্ব অতিক্রম করতে কণাটির $\frac{3(u+v)x}{2(u^2+uv+v^2)}$ সময় লাগবে। ১০

৪। সরল দোলনগতি সম্পদ একটি কণার মধ্যবিন্দু থেকে পরপর 3 সেকেন্ডে দূরত্ব যথাক্রমে x, y এবং z হলে দেখাও যে সব পর্যায়কাল

$$\frac{2\pi}{\cos^{-1}\left(\frac{x+z}{2y}\right)} \mid$$

১০

৫। একটি কণা উপবৃত্তাকার পথে তার নাভি অভিমুখে প্রতি একক ভরের $\mu/(d\text{ৰত্ব})^2$ বলের অধীনে চলছে। যদি কণাটি বলকেন্দ্র

$$\text{থেকে } R \text{ দূরত্বে } V \text{ গতিবেগে উৎক্ষিপ্ত হয় তবে দেখাও যে কণাটির পর্যায়কাল \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \left[\frac{2}{R} - \frac{V^2}{\mu} \right]^{-\frac{3}{2}} \mid$$

১০

৬। একক ভরের একটি বস্তুকণাকে দিগন্তের উপরে α কোণে V বেগে প্রক্ষিপ্ত করা হল যে মাধ্যমে তার বাধা বস্তুকণার গতিবেগের

$$k \text{ গুণ। প্রমাণ করো যে } \frac{1}{k} \log \left(1 + \frac{kV}{g} \tan \frac{\alpha}{2} \right) \text{ সময় পরে বস্তুকণাটির বেগের অভিমুখ দিগন্তের উপর } \frac{\alpha}{2} \text{ কোণ উৎপন্ন করবে।}$$

১০

৭। যদি কোনো গ্রহ তার বৃত্তাকার কক্ষপথের কোনো এক জায়গায় হঠাতে থেমে যায় তবে প্রমাণ করো যে গ্রহটি যে সময়ে সূর্যের উপর

$$\text{পতিত হবে তা গ্রহটির আবর্তকালের } \frac{\sqrt{2}}{8} \text{ গুণ।}$$

১০

৮। একটি বস্তুকণা একটি পথে ধাবমান যেখানে ত্বরণ $\frac{\mu}{y^3}$, যা সব সময় Y-অক্ষের সমান্তরাল এবং X-অক্ষের অভিমুখী। যদি ওই

$$\text{বস্তু কণাটিকে } (0, a) \text{ বিন্দু হতে X-অক্ষের সমান্তরাল দিকে } \frac{\sqrt{\mu}}{a} \text{ বেগে ছোড়া হয় তবে দেখাও যে বস্তুকণাটির গতিপথ একটি$$

বৃত্ত হবে।

১০

৯। একটি ঝাজু মসৃণ নল ω কৌণিক গতিবেগে আবর্তিত হয়, নলটির দৈর্ঘ্যের উপর অবস্থিত একটি বিন্দু O-এর সাপেক্ষে। O অভিমুখী

$$\text{একটি বল } m\mu(\text{দূরত্ব})-\text{এর প্রভাবে ওই নলের মধ্যে দিয়ে বিশ্রাম অবস্থায় থাকা একটি কণা পতনশীল হয়। দেখাও যে কণাটির$$

$$\text{যাত্রাপথের সমীকরণ হল } r = a \cos h \left(\sqrt{\frac{\omega^2 - \mu}{\omega^2}} \theta \right) \text{ অথবা } r = a \cos \left(\sqrt{\frac{\mu - \omega^2}{\omega^2}} \theta \right), \text{ যখন } \mu \geq \omega^2 \text{। } \mu = \omega^2 \text{ হলে দেখাও}$$

যে যাত্রাপথটি বৃত্তাকার হবে।

১০

১০। (ক) কেপলারের তৃতীয় সূত্রটি লেখো।

(খ) কেন্দ্রীয় বল F (প্রতি একক ভরে) অধীনে গতিশীল একটি বস্তুর ক্ষেত্রে দেখাও যে $\frac{h^2}{p^3} \frac{dp}{dr} = F \mid$

(প্রতীকগুলি স্বাভাবিক অর্থবহ)

২+৮

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Multiple Choice Questions.

1. Answer **all** the questions : 1×10
- (a) If a particle moves in a straight line and the distance x from the fixed point at any time t is $x = \frac{1}{2}vt$, where v is the velocity at the time t , then acceleration f is
- (i) constant (ii) $f \propto x$ (iii) $f \propto -x$ (iv) $f \propto 1/x$.
- (b) Which of the following is correct?
- (i) Power = Force/velocity (ii) Power = Force × velocity
 (iii) Power = Force × (velocity)² (iv) None of these.
- (c) A particle of mass m is acted on by force $m\mu\left(x + \frac{a^4}{x^3}\right)$ towards the origin. If it starts from rest at a distance a , then its velocity at time t
- (i) $\sqrt{\mu}\left(\frac{a^4}{x^2} - x^2\right)^{1/2}$ (ii) $\sqrt{\mu}\left(\frac{a^4}{x^4} + x^2\right)^{1/2}$ (iii) $\sqrt{\mu}\left(-\frac{a^4}{x^2} + x^2\right)^{1/2}$ (iv) $-\sqrt{\mu}\left(\frac{a^4}{x^2} - x^2\right)^{1/2}$.
- (d) For a rectilinear motion of a particle, if an impulse I changes its velocity from u to v , then the change in Kinetic energy is
- (i) $\frac{1}{2}I(u+v)$ (ii) $\frac{1}{2}I(u-v)$ (iii) $2I(u+v)$ (iv) $2I(u-v)$.
- (e) The maximum horizontal range of a particle with initial velocity u is given by
- (i) $\frac{u}{g}$ (ii) ug (iii) $\frac{u^2}{g}$ (iv) $\frac{g}{u^2}$.
- (f) If the central orbit described by a particle moving under central force is the conic $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$, then the force varies as
- (i) $\frac{1}{r^2}$ (ii) r^2 (iii) $\frac{1}{r}$ (iv) $\frac{1}{r^3}$.
- (g) If the tangential and normal components of acceleration be equal, then the velocity is proportional to
- (i) ψ (ii) e^ψ (iii) $e^{2\psi}$ (iv) $e^{-\psi}$.
- where $\tan \psi = \text{slope of the tangent}$.

- (h) The kinetic energy in ergs of a cannon ball of 10,000 grammes discharged with a velocity of 5000 cm/second is
 (i) 100×10^9 ergs (ii) 125×10^9 ergs (iii) 200×10^9 ergs (iv) 25×10^{10} ergs.
- (i) A particle moves under a force which is always directed towards a fixed point and is equal to $\frac{\mu}{r^2}$ per unit mass, then its path will be a hyperbola if
 (i) $V^2 < \frac{2\mu}{r}$ (ii) $V^2 = \frac{2\mu}{r}$ (iii) $V^2 > \frac{2\mu}{r}$ (iv) $V^2 = \frac{\mu}{r}$.
 (V is the initial velocity)
- (j) If t be regarded as a function of velocity v , then the rate of decrease of acceleration f is
 (i) $f^3 \frac{d^2t}{dv^2}$ (ii) $f^2 \frac{d^2t}{dv^2}$ (iii) $f \frac{d^2t}{dv^2}$ (iv) $\frac{d^2t}{dv^2}$.

2. Answer **any one** from the following :

5×1

- (a) A particle of mass m moves in a straight line under an attractive force mn^2x towards a fixed point on the line when at a distance x from it. If it be projected with a velocity V towards the centre of force from an initial distance a then prove that it reaches the centre of force after a time $\frac{1}{n} \tan^{-1} \left(\frac{na}{V} \right)$.
- (b) Deduce expressions for radial velocity and radial accelerations.

Answer **any five** questions.

3. A particle moving in a straight line is acted on by a force which works at a constant rate and changes its velocity from u to v in passing over a distance x . Prove that the time taken is $\frac{3(u+v)x}{2(u^2 + uv + v^2)}$. 10

4. In an SHM the distance of a particle from the middle point its path at three consecutive seconds are x, y, z respectively. Show that the time period is $\frac{2\pi}{\cos^{-1} \left(\frac{x+z}{2y} \right)}$. 10

5. A particle describes an ellipse under a force $\mu/(distance)^2$ towards a forces. If it was projected with a velocity V from a point distant R from the centre of force, then show that the periodic time is 10

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} \left[\frac{2}{R} - \frac{V^2}{\mu} \right]^{-\frac{3}{2}}$$

Please Turn Over

6. A particle of unit mass is projected with a velocity V at an angle α above the horizon in a medium whose resistance is k times the velocity of the particle. Prove that the direction of its velocity will make an angle $\frac{\alpha}{2}$ above the horizon after a time $\frac{1}{k} \log\left(1 + \frac{kV}{g} \tan \frac{\alpha}{2}\right)$. 10
7. If a planet was suddenly stopped in its orbit supposed circular then prove that it would fall into the Sun in a time which is $\frac{\sqrt{2}}{8}$ times the period of the planet's revolution. 10
8. A particle describes a path with an acceleration $\frac{\mu}{y^3}$ which is always parallel to the axis of Y and directed towards the X-axis. If the particle be projected from a point $(0, a)$ with the velocity $\frac{\sqrt{\mu}}{a}$ parallel to X-axis, show that the path described is a circle. 10
9. A particle falls from rest within a straight smooth tube which is revolving with uniform angular velocity ω about a point O in its length, being acted on by a force equal to $m\mu(\text{distance})$ towards O. Show that the equation to its path in space is $r = a \cos h\left(\sqrt{\frac{\omega^2 - \mu}{\omega^2}} \theta\right)$, or, $r = a \cos\left(\sqrt{\frac{\mu - \omega^2}{\omega^2}} \theta\right)$ according as $\mu \geq \omega^2$. If $\mu = \omega^2$, show that the path is a circular. 10
10. (a) Write down Kepler's third Law.
 (b) Establish the relation $\frac{h^2}{p^3} \frac{dp}{dr} = F$ for a central orbit under an attractive force F per unit mass.
 [Symbols have their usual meaning] 2+8
-

2021

MATHEMATICS — GENERAL

Paper : DSE-A-2

(Graph Theory)

Full Marks : 65

The figures in the margin indicate full marks.

*Candidates are required to give their answers in their own words
as far as practicable.*

1. Choose the correct alternatives : 1×10

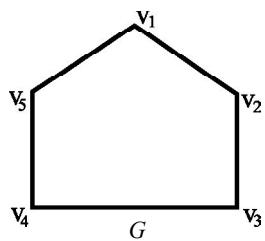
- (a) The number of vertices of a regular graph of degree 3 with 15 edges is
 - (i) 5
 - (ii) 10
 - (iii) 20
 - (iv) 45.

- (b) Maximum number of edges in a simple connected plane graph of order n is
 - (i) $2n - 4$
 - (ii) $3n - 10$
 - (iii) $3n - 6$
 - (iv) $3n$.

- (c) Number of vertices of a complete graph having 66 edges is
 - (i) 10
 - (ii) 11
 - (iii) 12
 - (iv) 13.

- (d) The adjacency matrix of a graph G is always
 - (i) symmetric
 - (ii) skew symmetric
 - (iii) singular
 - (iv) non-singular.

- (e)



G is

- (i) bipartite and regular
- (ii) bipartite, but non-regular
- (iii) regular but non-bipartite
- (iv) neither regular nor bipartite.

Please Turn Over

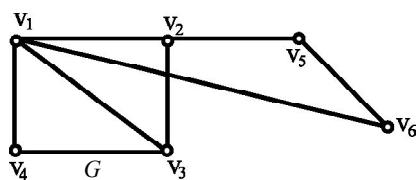
(f) If $I(G)$ is an incidence matrix of a directed graph G without loops and non-directed edges, then each column of $I(G)$ contains

- (i) two 1 (ii) one 1, one -1 (iii) two -1 (iv) one 1.

(g) The degree of the root of a binary tree is

- (i) 0 (ii) 1 (iii) 2 (iv) 3.

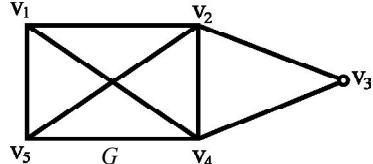
(h)



In the above graph G , distance between v_1 and v_6 is

- (i) 0 (ii) 1 (iii) 3 (iv) ∞ .

(i)



G is

- | | |
|---------------------------------|-------------------------------|
| (i) non-planar and non-Eulerian | (ii) planar and non-Eulerian |
| (iii) planar and Eulerian | (iv) non-planar and Eulerian. |

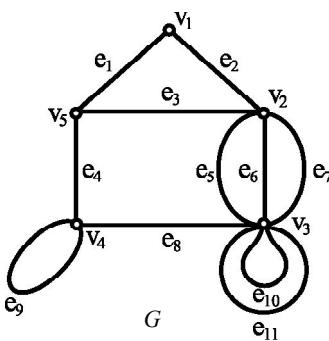
(j) The minimum number of pendant vertices in a tree with 5 vertices is

- (i) 2 (ii) 3 (iii) 0 (iv) 1.

2. Answer **any three** questions :

(a) (i) Define incidence matrix of a connected graph.

(ii)



Find incidence matrix of G .

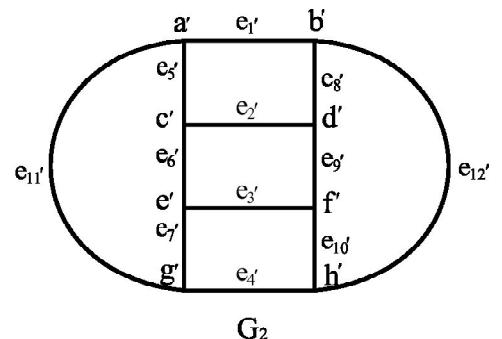
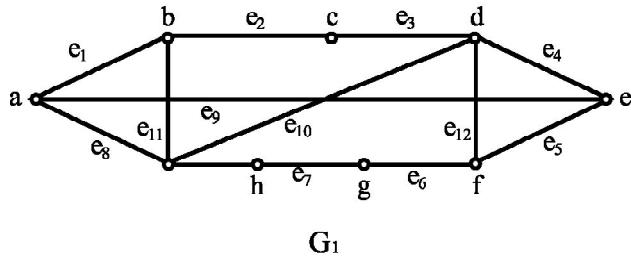
2+3

(3)

V(5th Sm.)-Mathematics-G/DSE-A-2/CBGS

- (b) (i) Define isomorphic graphs.

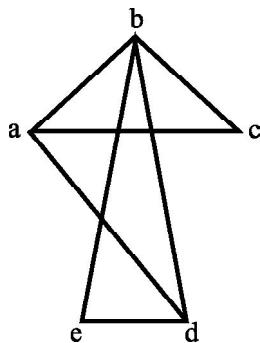
(ii)



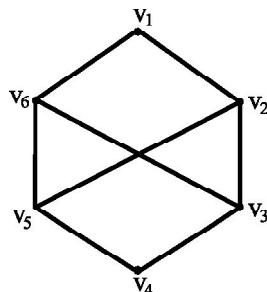
Is $G_1 \cong G_2$? Justify.

2+3

- (c) Show that the following is a planar graph by redrawing it so that no edges cross. 5

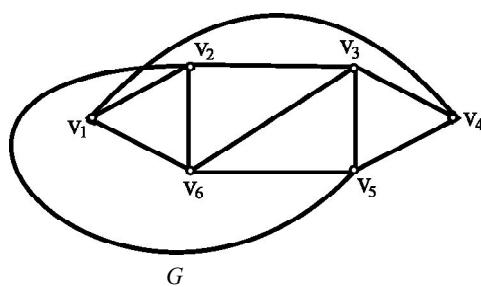


- (d) Define complement of a graph. Find the complement of the following graph. 2+3



- (e) What is a Hamiltonian graph? Is the following graph G Hamiltonian? Justify your answer.

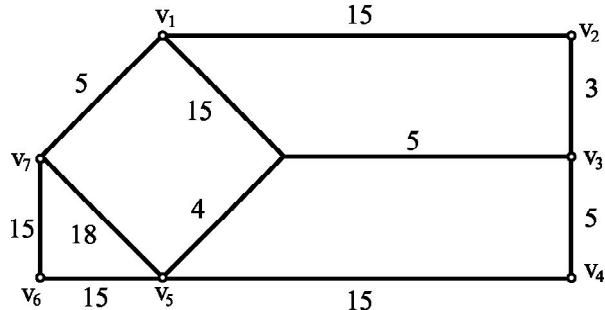
1+1+3



Please Turn Over

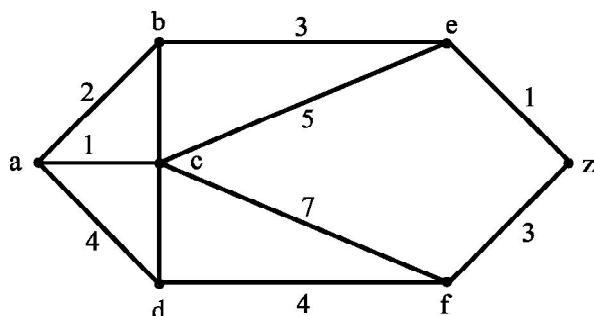
3. Answer **any four** questions :

- (a) (i) What is minimal spanning tree? Find minimal spanning tree of the graph given below :



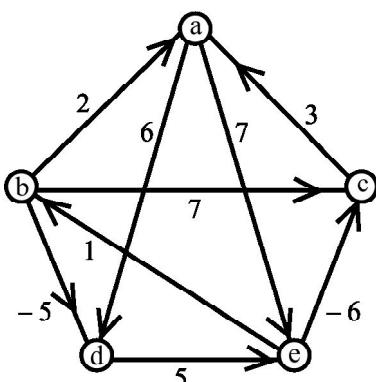
- (ii) Prove that $K_{3,3}$ is non-planar. [(2+5)+3]

- (b) (i) If degree of each vertex of a graph G is greater than or equal to 2, then show that G contains a cycle.
(ii) If G is a simple graph with at most $2n$ vertices and degree of each vertex is at least n , then show that G is connected. 5+5
- (c) (i) Apply Dijkstra's algorithm to determine a shortest path between a to z in the following graph.



- (ii) Draw a tree with 5 internal vertices and 5 terminal vertices. 7+3

- (d) Using Floyd-Warshall algorithm, find the length of the shortest path between any pair of vertices a, b, c, d and e of the following weighted directed graph. 10



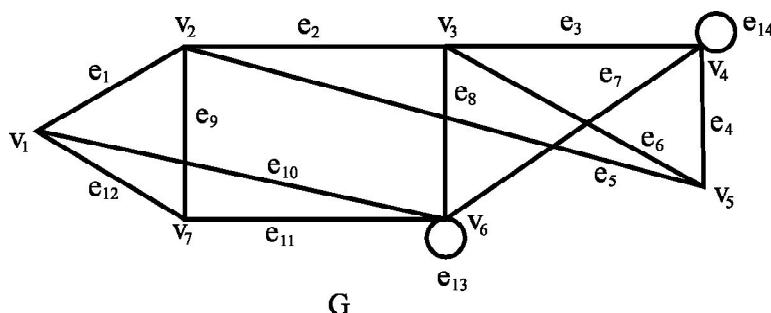
(5)

V(5th Sm.)-Mathematics-G/DSE-A-2/CBGS

- (e) (i) Draw a bipartite graph with degree sequence $(1, 3, 4), (1, 2, 2, 3)$.
(ii) If G is a tree with all odd degree vertices, then show that number of vertices of G is even.
(iii) A tree has only vertices of degree 5 and degree 1. If the tree has 34 vertices, how many have
degree 5?
5+2+3

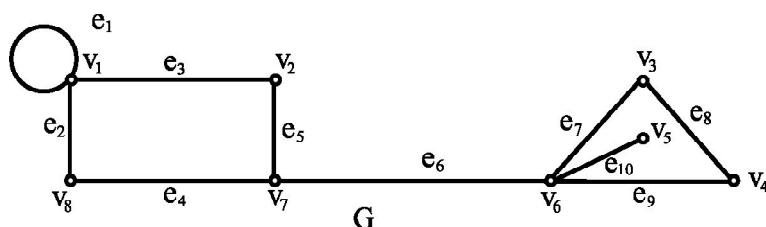
- (f) (i) Prove that a complete bipartite graph $K_{m,n}$ is Hamiltonian iff $m = n$.

(ii)

Check if G is Eulerian and Hamiltonian or not.

5+5

- (g) (i)

Find the faces and degree of each face in G . What is the relation between sum of degrees of faces and number of edges of G ?

- (ii) Does there exist a planar graph with 35 vertices and 100 edges?

- (iii) Find the maximum number of vertices in a connected graph having 17 edges.

5+2+3